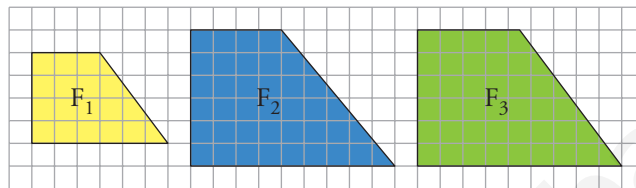


PÁGINA 139

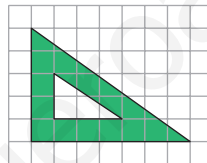
PRACTICA**Figuras semejantes**

1 ■■■ ¿Cuáles de estas figuras son semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?



F_1 es semejante a F_3 . La razón de semejanza es $\frac{3}{2}$.

2 ■■■ a) ¿Son semejantes los triángulos interior y exterior?



b) ¿Cuántas unidades medirán los catetos de un triángulo semejante al menor cuya razón de semejanza sea 2,5?

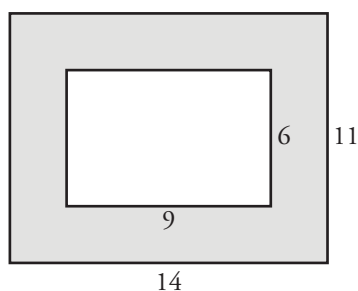
a) No. La razón entre los catetos es $\frac{2}{3}$ en el interior y $\frac{5}{7}$ en el exterior.

b) $2 \cdot 2,5 = 5$

$3 \cdot 2,5 = 7,5$

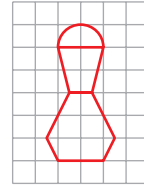
Los catetos medirán 5 y 7,5 unidades.

3 ■■■ Una fotografía de 9 cm de ancha y 6 cm de alta tiene alrededor un marco de 2,5 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.

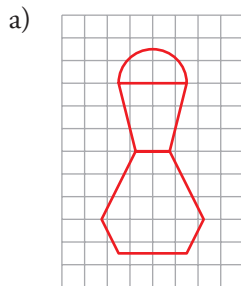


$$\frac{14}{9} \neq \frac{11}{6} \rightarrow \text{No son semejantes.}$$

- 4 ■■■ Un joyero quiere reproducir un broche como el de la figura a escala 1,5.



- a) Haz un dibujo de la figura ampliada.
b) Calcula su superficie.



$$\begin{aligned}
 S_{\text{ORIGINAL}} &= \frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 + \left(\frac{1+2}{2} \cdot 2 \right) + \left(\frac{1+3}{2} \cdot 2 \right) + \left(\frac{2+3}{2} \cdot 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \pi + 3 + 4 + \frac{5}{2} \approx 11,1 \text{ u}^2 \\
 S_{\text{AMPLIADA}} &= 11,1 \cdot 1,5^2 \approx 24,91 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

- 5 ■■■ En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm.

- a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?
b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades A y B cuya distancia real es 360 km?

a)
$$\left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1\,500\,000 \\ 2,5 \rightarrow x \end{array} \right\} x = 2,5 \cdot 1\,500\,000 = 3\,750\,000 \text{ cm} = 37,5 \text{ km}$$

b)
$$\left. \begin{array}{l} 1\,500\,000 \rightarrow 1 \\ 36\,000\,000 \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{36\,000\,000}{1\,500\,000} = 24 \text{ cm}$$

- 6 ■■■ En el plano de un piso cuya escala es 1:200, el salón ocupa una superficie de 7 cm². ¿Cuál es la superficie real del salón?

$$7 \cdot 200^2 = 280\,000 \text{ cm}^2 = 28 \text{ m}^2$$

- 7 ■■■ Un rombo cuyas diagonales miden 275 cm y 150 cm, ¿qué área ocupará en un plano de escala 1:25?

$$\text{Área} = \frac{275 \cdot 150}{2} = 20\,625 \text{ cm}^2$$

$$\text{En el plano ocupará } \frac{20\,625}{25^2} = 33 \text{ cm}^2.$$

8 ■■■ Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcula:

- a) Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 cm de diámetro.
 b) La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm².
 c) El volumen de una piscina que en la maqueta contiene 20 cm³ de agua.

$$\begin{array}{l} 1 \text{ cm} \rightarrow 250 \text{ cm} \\ \text{a) } 6 \text{ cm} \rightarrow h \\ 4 \text{ cm} \rightarrow d \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1 \text{ cm} \rightarrow 250 \text{ cm} \\ 6 \text{ cm} \rightarrow h \\ 4 \text{ cm} \rightarrow d \end{array}} \right\} \begin{array}{l} h = 1500 \text{ cm} = 15 \text{ m} \\ d = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m} \end{array}$$

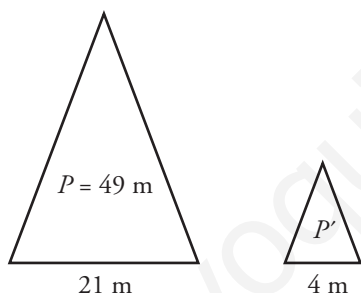
La torre cilíndrica mide 15 m de altura y 10 m de diámetro.

b) $40 \cdot 250^2 = 2500000 \text{ cm}^2 = 250 \text{ m}^2$

c) $20 \cdot 250^3 = 312500000 \text{ cm}^3 = 312,5 \text{ m}^3$

Semejanza de triángulos

9 ■■■ El perímetro de un triángulo isósceles es 49 m y su base mide 21 m. Halla el perímetro de otro triángulo semejante, cuya base mide 4 m. ¿Cuál es la razón de semejanza entre el triángulo mayor y el menor?



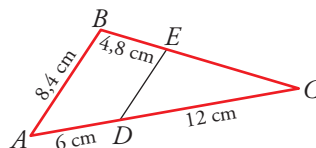
$$\frac{21}{4} = 5,25$$

Perímetro del triángulo semejante:

$$P' = \frac{49}{5,25} = 9,33 \text{ m}$$

La razón de semejanza es 5,25.

10 ■■■ En la figura, el segmento DE es paralelo a AB .



Jusitifica que los triángulos ABC y CDE son semejantes y calcula DE y EC .

Los triángulos ABC y CDE son semejantes porque tienen un ángulo común, \hat{C} , y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos, $DE \parallel AB$. Están en posición de Tales.

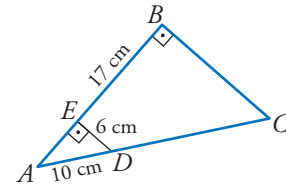
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{\overline{DE}}{8,4} = \frac{12}{18} \rightarrow \overline{DE} = \frac{12 \cdot 8,4}{18} = 5,6 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{x}{4,8 + x} = \frac{5,6}{8,4} \rightarrow 8,4x = 26,88 + 5,6x \rightarrow$$

$$\rightarrow 2,8x = 26,88 \rightarrow x = 9,6 \rightarrow \overline{EC} = 9,6 \text{ cm}$$

- 11 ■■■ ¿Por qué son semejantes los triángulos ABC y AED ?

Halla el perímetro del trapecio $EBCD$.



Porque son rectángulos con un ángulo agudo común, \hat{A} . Tienen los tres ángulos iguales.

- Hallamos \overline{EA} aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\overline{EA} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm}; \quad \overline{AB} = 8 + 17 = 25 \text{ cm}$$

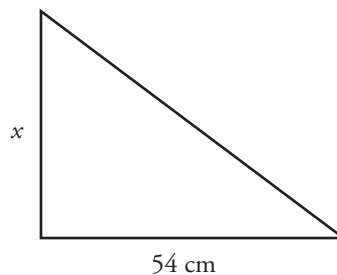
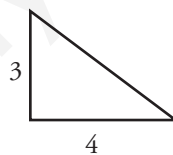
- $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EA}} \rightarrow \frac{10 + x}{10} = \frac{25}{8} \rightarrow 80 + 8x = 250 \rightarrow 8x = 170$

$$x = 21,25 \rightarrow \overline{DC} = 21,25 \text{ cm}$$

- $\frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \rightarrow \frac{\overline{BC}}{6} = \frac{25}{8} \rightarrow \overline{BC} = \frac{150}{8} = 18,75 \text{ cm}$

- Perímetro de $EBCD = 17 + 18,75 + 21,25 + 6 = 63 \text{ cm}$

- 12 ■■■ En un triángulo rectángulo, la relación entre los catetos es $3/4$. Halla el perímetro de otro triángulo semejante en el que el cateto menor mide 54 cm .



$$\frac{54}{x} = \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{54 \cdot 4}{3} = 72 \text{ cm mide el cateto mayor.}$$

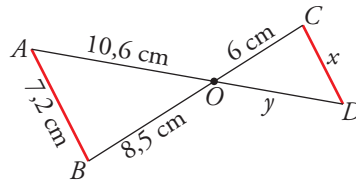
$$h = \sqrt{54^2 + 72^2} = 90 \text{ cm mide la hipotenusa.}$$

$$\text{Perímetro} = 54 + 72 + 90 = 216 \text{ cm}$$

- 13 ■■■ La razón de semejanza entre dos triángulos es $2/5$. Si el área del mayor es 150 cm^2 , ¿cuál es el área del menor?

$$\text{El área del menor es } 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 24 \text{ cm}^2.$$

- 14 ■■■ Observa esta figura, en la que el segmento AB es paralelo a CD .



- a) Di por qué son semejantes los triángulos OAB y ODC .

- b) Calcula x e y .

a) Son semejantes porque tienen un ángulo igual, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ por ser opuestos por el vértice, y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos.

$$b) \frac{x}{7,2} = \frac{6}{8,5} \rightarrow x = \frac{7,2 \cdot 6}{8,5} \approx 5,08 \text{ cm}$$

$$\frac{6}{8,5} = \frac{y}{10,6} \rightarrow y = \frac{10,6 \cdot 6}{8,5} \approx 7,48 \text{ cm}$$

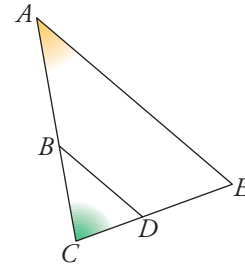
PÁGINA 140

- 15 ■■■ Si BD es paralelo a AE , y $\overline{AC} = 15 \text{ cm}$, $\overline{CE} = 11 \text{ cm}$ y $\overline{BC} = 6,4 \text{ cm}$:

- a) Calcula \overline{CD} .

- b) ¿Podemos saber cuánto vale \overline{AE} sin medirlo directamente?

- c) Si $\hat{A} = 37^\circ$ y $\hat{C} = 80^\circ$, calcula \hat{E} , \hat{B} y \hat{D} .



- a) Los triángulos ACE y BCD son semejantes.

$$\text{Por tanto: } \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \rightarrow \frac{15}{6,4} = \frac{11}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} = \frac{11 \cdot 6,4}{15} \approx 4,69 \text{ cm}$$

- b) No podemos saber lo que mide AE porque no conocemos la medida del lado correspondiente, BD .

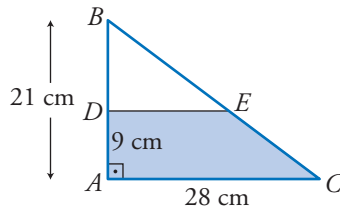
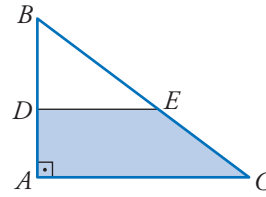
- c) $\hat{E} = 180^\circ - (37^\circ + 80^\circ) = 63^\circ$; $\hat{B} = \hat{A} = 37^\circ$; $\hat{D} = \hat{E} = 63^\circ$

- 16 ■■■ Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del primero es 26 cm^2 , ¿cuál es el área del segundo?

$$\text{Razón de semejanza} = \frac{13,6}{8} = 1,7$$

$$\text{Área del segundo} = 26 \cdot 1,7^2 = 75,14 \text{ cm}^2$$

- 17** Los catetos del triángulo ABC ($A = 90^\circ$) miden $AB = 21$ cm, $AC = 28$ cm. Desde el punto D , tal que $AD = 9$ cm, se traza una paralela a AC . Halla el área y el perímetro del trapecio $ADEC$.



Los triángulos ABC y DBE son semejantes.

Por ello:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} \rightarrow \frac{21}{12} = \frac{28}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{DE} = \frac{12 \cdot 28}{21} = 16 \text{ cm}$$

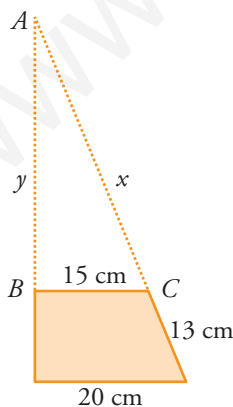
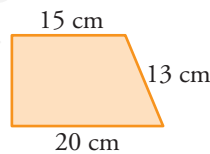
Calculamos la hipotenusa de cada uno de los triángulos:

$$\left. \begin{aligned} \overline{BC} &= \sqrt{21^2 + 28^2} = 35 \text{ cm} \\ \overline{BE} &= \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \overline{EC} = 35 - 20 = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Área del trapecio} = \frac{28 + 16}{2} \cdot 9 = 198 \text{ cm}^2$$

$$\text{Perímetro del trapecio } ADEC = 9 + 16 + 15 + 28 = 68 \text{ cm}$$

- 18** Calcula el perímetro del triángulo cuya base coincide con la base mayor de este trapecio y que se obtiene al prolongar los lados no paralelos hasta que se corten.



$$\frac{20}{15} = \frac{13 + x}{x} \rightarrow 20x = 195 + 15x \rightarrow$$

$$\rightarrow 5x = 195 \rightarrow x = 39 \text{ cm}$$

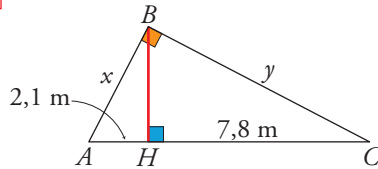
Calculamos la medida del cateto AB en el triángulo ABC :

$$y = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro del triángulo} = 36 + 15 + 39 = 90 \text{ cm}$$

Teorema del cateto y de la altura

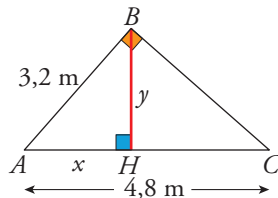
En cada uno de los siguientes triángulos rectángulos se ha trazado la altura BH sobre la hipotenusa. Halla, en cada caso, los segmentos x e y .

19 ■■■

$$\overline{BH}^2 = 2,1 \cdot 7,8 \rightarrow \overline{BH} \approx 4,05 \text{ m}$$

$$\text{En el triángulo } ABH, x^2 = 2,1^2 + 4,05^2 \rightarrow x \approx 4,56 \text{ m}$$

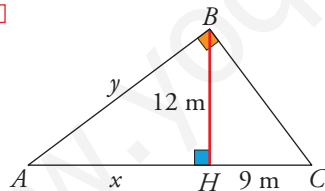
$$\text{En el triángulo } BHC, y^2 = 7,8^2 + 4,05^2 \rightarrow y \approx 8,79 \text{ m}$$

20 ■■■

Por el teorema del cateto:

$$3,2^2 = 4,8x \rightarrow x \approx 2,13 \text{ m}$$

$$\text{En el triángulo } ABH, y^2 = 3,2^2 - 2,13^2 \rightarrow y \approx 2,39 \text{ m}$$

21 ■■■

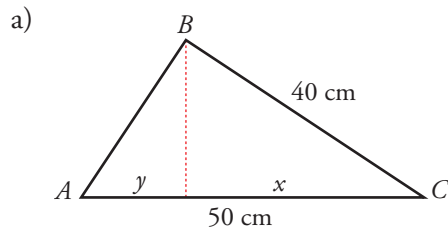
Por el teorema de la altura:

$$12^2 = x \cdot 9 \rightarrow x = 16 \text{ m}$$

$$\text{En el triángulo } ABH, y^2 = 12^2 + 16^2 \rightarrow y = 20 \text{ m}$$

22 ■■■ Dibuja, en cada caso, un triángulo rectángulo y traza su altura sobre la hipotenusa.

- Calcula la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa si esta mide 50 cm y el cateto mayor 40 cm.
- La hipotenusa mide 25 cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa 9 cm. Halla el cateto mayor.
- La altura relativa a la hipotenusa mide 6 cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa, 4,5 cm. Halla la hipotenusa.



$$40^2 = 50 \cdot x \rightarrow x = 32 \text{ cm}$$

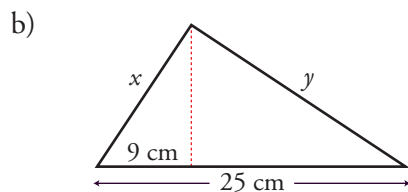
Proyección de AB sobre AC :

$$50 - 32 = 18 \text{ cm}$$

O bien:

$$\overline{AB} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30 \text{ cm}$$

$$30^2 = 50 \cdot y \rightarrow y = 18 \text{ cm}$$

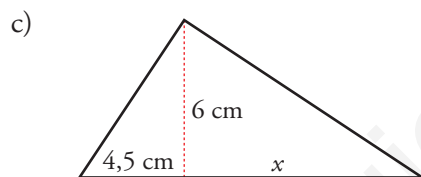


La proyección de y sobre la hipotenusa es:

$$25 - 9 = 16 \text{ cm}$$

Por el teorema del cateto:

$$y^2 = 25 \cdot 16 \rightarrow y = 20 \text{ cm}$$



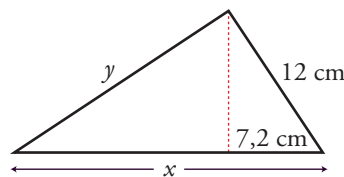
Por el teorema de la altura:

$$6^2 = 4,5 \cdot x \rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

$$\text{Hipotenusa} = 4,5 + 8 = 12,5 \text{ cm}$$

23 ■■■ Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 m y su proyección sobre la hipotenusa mide 7,2 m.

Calcula el área y el perímetro del triángulo.



Por el teorema del cateto:

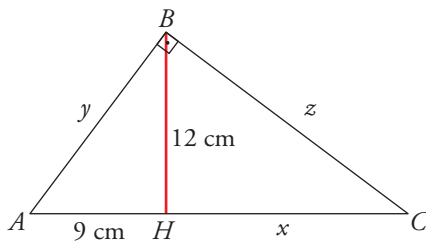
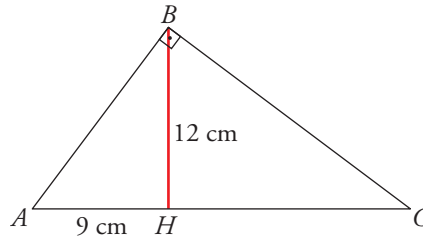
$$12^2 = 7,2x \rightarrow x = 20 \text{ m}$$

$$y^2 = 20^2 - 12^2 \rightarrow y = 16 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ m}^2$$

$$\text{Perímetro} = 16 + 12 + 20 = 48 \text{ m}$$

- 24 ■■■ Halla el perímetro del triángulo ABC del que conocemos $AH = 9$ cm, $BH = 12$ cm.



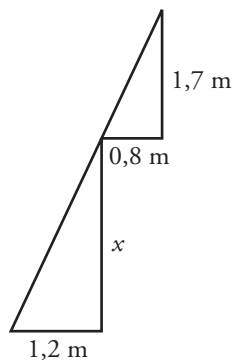
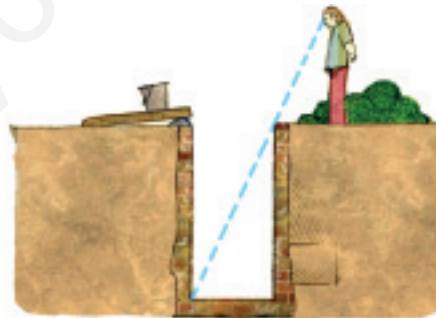
Por el teorema de la altura:

$$12^2 = 9 \cdot x \rightarrow x = 16$$

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow y = 15 \text{ cm} \\ z^2 = 12^2 + 16^2 \rightarrow z = 20 \text{ cm} \end{array} \right\} \text{Perímetro} = 15 + 20 + 25 = 60 \text{ cm}$$

PIENSA Y RESUELVE

- 25 ■■■ ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?

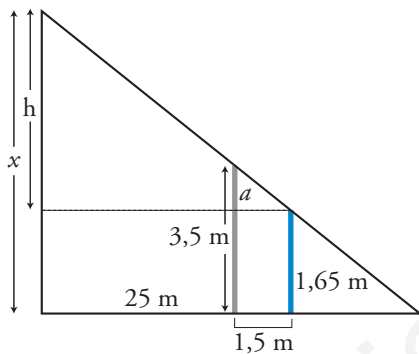
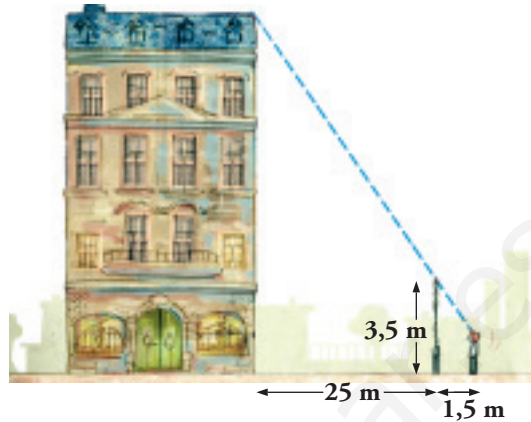


$$\frac{x}{1,7} = \frac{1,2}{0,8} \rightarrow x = \frac{1,2 \cdot 1,7}{0,8} \rightarrow x = 2,55 \text{ m}$$

La profundidad es de 2,55 m.

PÁGINA 141

- 26** Para medir la altura de la casa, Álvaro, de 165 cm de altura, se situó a 1,5 m de la verja y tomó las medidas indicadas. ¿Cuánto mide la casa?

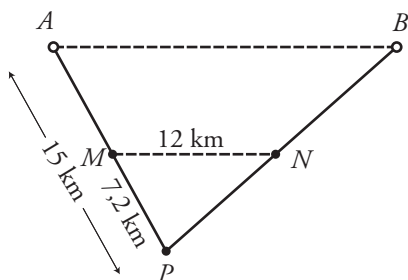
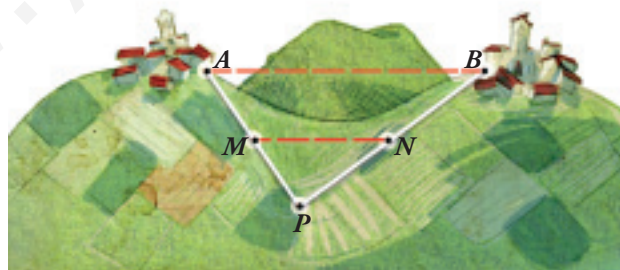


$$a = 3,5 - 1,65 = 1,85 \text{ m}$$

$$\frac{25 + 1,5}{1,5} = \frac{h}{1,85} \rightarrow h = \frac{26,5 \cdot 1,85}{1,5} = 32,68 \text{ m}$$

$$\text{Altura de la casa: } 32,68 + 1,65 = 34,33 \text{ m}$$

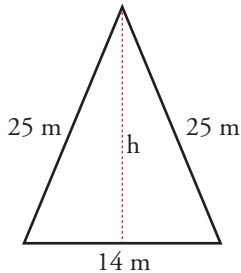
- 27** Entre dos pueblos A y B hay una colina. Para medir la distancia AB fijamos un punto P desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas $AP = 15 \text{ km}$, $PM = 7,2 \text{ km}$ y $MN = 12 \text{ km}$. (MN es paralela a AB). Halla la distancia AB .



Los triángulos APB y MPN son semejantes. Por tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{12} = \frac{15}{7,2} \rightarrow \overline{AB} = \frac{15 \cdot 12}{7,2} = 25 \text{ km}$$

- 28** ■■■ El perímetro de un triángulo isósceles es 64 m, y el lado desigual mide 14 m. Calcula el área de un triángulo semejante cuyo perímetro es de 96 m.



Altura del triángulo:

$$h^2 = 25^2 - 7^2 \rightarrow h = 24 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{14 \cdot 24}{2} = 168 \text{ m}^2$$

$$\text{Razón de semejanza} = \frac{96}{64} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Área del triángulo semejante} = 168 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 378 \text{ cm}^2$$

- 29** ■■■ Dos triángulos ABC y PQR son semejantes. Los lados del primero miden 24 m, 28 m y 34 m. Calcula la medida de los lados del segundo triángulo sabiendo que su perímetro es 129 m.

Perímetro del triángulo ABC : $24 + 28 + 34 = 86 \text{ m}$

$$\text{Razón de semejanza: } \frac{129}{86} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Lados del triángulo } PQR: 24 \cdot \frac{3}{2} = 36 \text{ cm}; 28 \cdot \frac{3}{2} = 42 \text{ cm}; 34 \cdot \frac{3}{2} = 51 \text{ cm}$$

- 30** ■■■ Las áreas de dos triángulos isósceles semejantes son 48 m^2 y 108 m^2 . Si el lado desigual del primer triángulo es 12 m, ¿cuál es el perímetro del segundo?

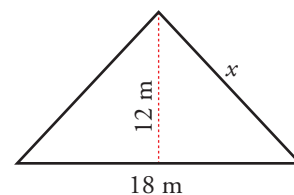
$$\text{Razón de semejanza: } \sqrt{\frac{108}{48}} = 1,5$$

$$\text{Lado desigual del segundo: } 12 \cdot 1,5 = 18 \text{ cm}$$

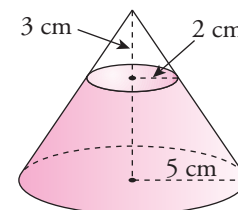
$$\text{Altura del segundo: } 108 = \frac{18 \cdot h}{2} \rightarrow h = 12 \text{ cm}$$

$$\text{Lados iguales del segundo: } x^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow x = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro del segundo: } 18 + 15 + 15 = 48 \text{ cm}$$



- 31** ■■■ De un cono de radio 5 cm hemos cortado otro cono de radio 2 cm y altura 3 cm. Calcula el volumen del cono grande.

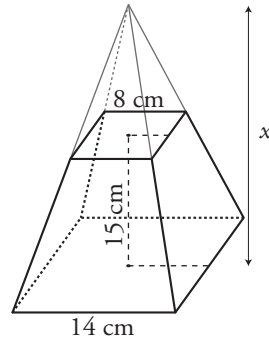


Calculamos la altura del cono grande, x :

$$\frac{x}{3} = \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ cm}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 7,5 = 62,5 \pi \text{ cm}^3$$

- 32** ■■■ Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular en el que los lados de las bases miden 8 cm y 14 cm y su altura es 15 cm.



Calculamos la altura de la pirámide menor, x :

$$\frac{x + 15}{x} = \frac{7}{4} \rightarrow 4x + 60 = 7x \rightarrow 60 = 3x \rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

$$\text{Volumen de la pirámide grande} = \frac{1}{3} \cdot 14^2 \cdot (20 + 15) = 2\,286,67 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen de la pirámide pequeña} = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 20 = 426,67 \text{ cm}^3$$

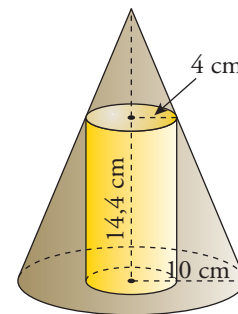
$$\text{Volumen del tronco de pirámide} = 2\,286,67 - 426,67 = 1\,860 \text{ cm}^3$$

- 33** ■■■ En un cono de 10 cm de radio hemos inscrito un cilindro de radio 4 cm y altura 14,4 cm. Halla la altura del cono.

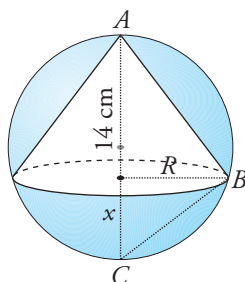
$$\frac{x + 14,4}{x} = \frac{10}{4} \rightarrow 4x + 57,6 = 10x \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x = 57,6 \rightarrow x = 9,6 \text{ cm}$$

$$\text{Altura del cono: } 9,6 + 14,4 = 24 \text{ cm}$$



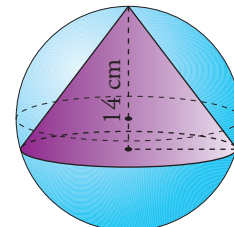
- 34** ■■■ Tenemos un cono inscrito en una esfera de radio 11 cm. ¿Cuál será el radio de la base del cono si su altura es 14 cm?



$$x = 22 - 14 = 8 \text{ cm}$$

Por el teorema de la altura, en el triángulo rectángulo ABC se verifica:

$$R^2 = 14 \cdot 8 = 112 \rightarrow R \approx 10,58 \text{ cm}$$

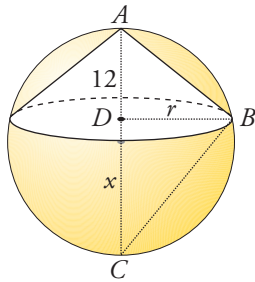


- 35** ■■■ En una esfera de 15 cm de radio hemos inscrito un cono de altura 12 cm. Calcula su área lateral.

Radio de la esfera: 15 cm

$$\overline{DC} = 30 - 12 = 18 \text{ cm}$$

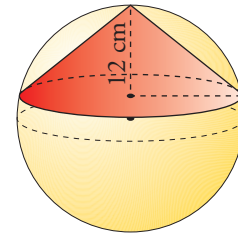
Calculamos el radio del cono utilizando el teorema de la altura en el triángulo ABC :



$$r^2 = 12 \cdot 18 \rightarrow r \approx 14,7 \text{ cm}$$

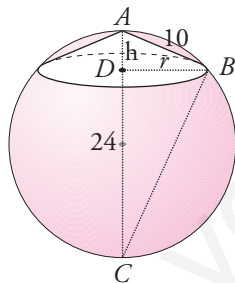
$$\text{Generatriz del cono: } g^2 = 12^2 + 14,7^2 \rightarrow g \approx 18,98 \text{ cm}$$

$$\text{Área lateral del cono: } \pi r g = \pi \cdot 14,7 \cdot 18,98 \approx 279\pi \text{ cm}^2$$



- 36** ■■■ En una esfera de 24 cm de diámetro se inscribe un cono cuya generatriz mide 10 cm. Calcula el volumen del cono.

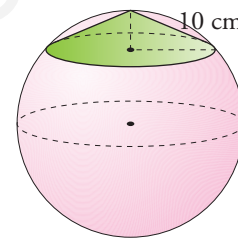
Para calcular la altura del cono, aplicamos el teorema del cateto en el triángulo rectángulo ABC :



$$10^2 = h \cdot 24 \rightarrow h \approx 4,17 \text{ cm}$$

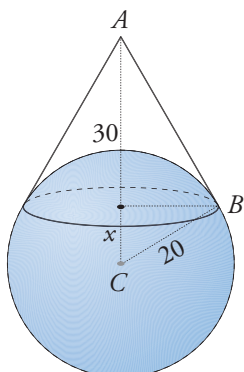
$$\text{Radio del cono: } r^2 = 10^2 - 4,17^2 \rightarrow r \approx 9,09 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 9,09^2 \cdot 4,17 \approx 114,85\pi \text{ cm}^3$$



- 37** ■■■ Sobre una esfera de 20 cm de radio se encaja un cono de 30 cm de altura. Halla el área del casquete esférico que determina el cono.

Para hallar x , aplicamos el teorema del cateto en el triángulo rectángulo ABC :

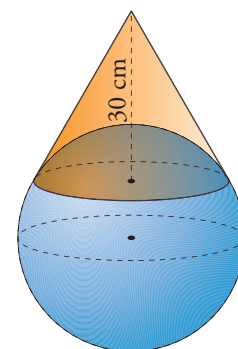


$$20^2 = (30 + x)x \rightarrow 400 = 30x + x^2$$

$$x^2 + 30x - 400 = 0 \rightarrow x = \frac{-30 \pm 50}{2} = \begin{cases} -40 & \text{No vale.} \\ 10 & \text{cm} \end{cases}$$

$$\text{Altura del casquete} = 20 - 10 = 10 \text{ cm}$$

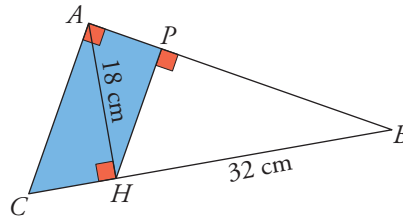
$$\text{Área del casquete} = 2\pi R h = 2\pi \cdot 20 \cdot 10 = 400\pi \text{ cm}^2$$



PÁGINA 142

38 ■■■ Resuelto en el libro de texto.

39 ■■■ En el triángulo ABC , rectángulo en A , conocemos $\overline{AH} = 18$ cm y $\overline{HB} = 32$ cm.



- Calcula \overline{CH} en el triángulo ABC . Obtén \overline{CB} .
- Con el teorema de Pitágoras, obtén \overline{AC} en el triángulo AHC y \overline{AB} en el triángulo AHB .
- Aplica el teorema del cateto en el triángulo rectángulo AHB para obtener AP . Calcula PH .
- Halla el área y el perímetro del trapecio $APHC$.

a) Por el teorema de la altura:

$$\overline{AH}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{HB} \rightarrow 18^2 = \overline{CH} \cdot 32 \rightarrow \overline{CH} = 10,125 \text{ cm}$$

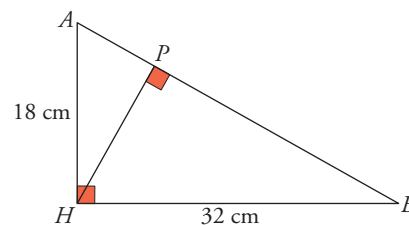
$$\overline{CB} = \overline{CH} + \overline{HB} = 32 + 10,125 \rightarrow \overline{CB} = 42,125 \text{ cm}$$

b) $\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 \rightarrow$

$$\rightarrow \overline{AC} = \sqrt{18^2 + 10,125^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{AC} \approx 20,65 \text{ cm}$$

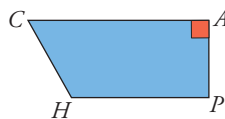
$$\overline{AB} = \sqrt{18^2 + 32^2} \rightarrow \overline{AB} \approx 36,72 \text{ cm}$$



c) $\overline{AH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AP} \rightarrow \overline{AP} = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{AB}} = \frac{18^2}{36,71} \approx 8,83 \text{ cm}$

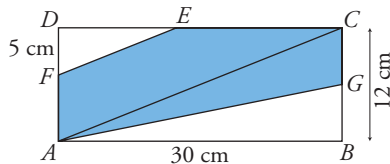
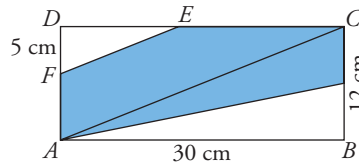
$$\overline{HP} = \sqrt{\overline{HA}^2 - \overline{PA}^2} = \sqrt{18^2 - 8,83^2} \rightarrow \overline{HP} \approx 15,69 \text{ cm}$$

d) Perímetro ($APHC$) = $\overline{CH} + \overline{HP} + \overline{PA} + \overline{AC} = 55,295 \text{ cm}$



$$\text{Área } (APHC) = \frac{\overline{PH} + \overline{AC}}{2} \cdot \overline{AP} = \frac{15,69 + 20,65}{2} \cdot 8,83 \approx 160,44 \text{ cm}^2$$

40 ■■■ Si $\overline{DF} = 5$ cm, ¿cuál es el área y el perímetro del pentágono $FECGA$?



$$\overline{AC}^2 = 30^2 + 12^2 \rightarrow \overline{AC} \approx 32,31$$

Los triángulos FDE y ADC son semejantes. Por ello:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{5}{12} = \frac{\overline{FE}}{32,31} \rightarrow \overline{FE} \approx 13,46 \text{ cm}$$

En el triángulo FDE , $\overline{DE}^2 = \overline{FE}^2 - \overline{DF}^2 = 13,46^2 - 5^2 \rightarrow \overline{DE} \approx 12,5$ cm

$$\overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE} = 30 - 12,5 = 17,5 \text{ cm}$$

$$\overline{CG} = 6 \text{ cm}$$

$$\overline{AG}^2 = 30^2 + 6^2 \rightarrow \overline{AG} \approx 30,59 \text{ cm}$$

$$\overline{AF} = 7 \text{ cm}$$

$$\text{Área del triángulo } FDE = \frac{12,5 \cdot 5}{2} = 31,25 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del triángulo } ABG = \frac{30 \cdot 6}{2} = 90 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del pentágono} \approx 30 \cdot 12 - 31,25 - 90 = 238,75 \text{ cm}^2$$

Perímetro del pentágono:

$$\overline{FE} + \overline{EC} + \overline{CG} + \overline{GA} + \overline{AF} \approx 13,46 + 17,5 + 6 + 30,59 + 7 = 74,55 \text{ cm}$$

41 ■■■ Queremos construir un ortoedro de volumen $36\,015 \text{ cm}^3$ que sea semejante a otro de dimensiones $25 \times 15 \times 35$ cm.

¿Cuánto medirán sus aristas?

$$V = 25 \cdot 15 \cdot 35 = 13\,125 \text{ cm}^3$$

$$k^3 = \frac{36\,015}{13\,125} = 2,744 \rightarrow k = 1,4$$

$$25 \cdot 1,4 = 35$$

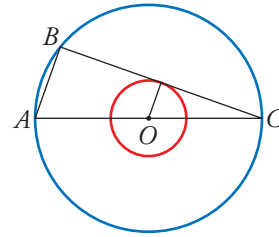
$$15 \cdot 1,4 = 21$$

$$35 \cdot 1,4 = 49$$

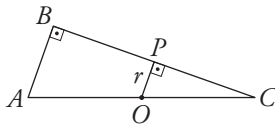
Las aristas del ortoedro deben medir: 35 cm, 21 cm y 49 cm.

- 42** ■■■ En estas dos circunferencias concéntricas, el radio de la mayor es el triple de la menor.

Hemos trazado el diámetro AC y la cuerda BC , que es tangente a la circunferencia interior. Si $AB = 10$ cm, ¿cuánto miden los radios de cada circunferencia?



Los triángulos ABC y OPC son semejantes, por ser rectángulos con un ángulo agudo común.



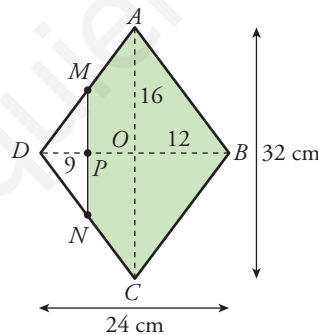
$$\text{Si } \overline{OP} = r \rightarrow \overline{OC} = 3r \rightarrow \overline{AC} = 6r$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} \rightarrow \frac{10}{r} = \frac{6r}{3r} \rightarrow 10 = 2r \rightarrow r = 5$$

Los radios miden 5 cm y 15 cm.

- 43** ■■■ Las diagonales de un rombo miden $\overline{AC} = 32$ cm y $\overline{BD} = 24$ cm. Por un punto P de la diagonal menor, tal que $\overline{PD} = 9$ cm, se traza una paralela a la diagonal AC , que corta en M y N a los lados AD y CD .

Calcula el área y el perímetro del pentágono $MABCN$.



Los triángulos AOD y MPD son semejantes. Por ello:

$$\frac{16}{12} = \frac{\overline{MP}}{9} \rightarrow \overline{MP} = \frac{16 \cdot 9}{12} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ cm}$$

$$\overline{MD} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm} \rightarrow \overline{MA} = 20 - 15 = 5 \text{ cm}$$

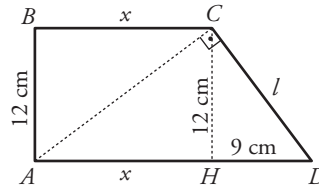
$$\text{Perímetro } MABCN = 2(\overline{MA} + \overline{AB} + \overline{MP}) = 2(5 + 20 + 12) = 74 \text{ cm}$$

$$\text{Área pentágono} = \text{Área rombo} - \text{Área triángulo } MND =$$

$$= \frac{32 \cdot 24}{2} - \frac{9 \cdot 12}{2} \cdot 2 = 384 - 108 = 276 \text{ cm}^2$$

- 44 ■■■ En un trapezio rectángulo, la diagonal menor es perpendicular al lado oblicuo, la altura mide 12 cm y la diferencia entre las bases es de 9 cm.

Calcula el perímetro y el área del trapezio.



En el triángulo ACD :

$$12^2 = x \cdot 9 \rightarrow x = 16 \text{ cm} \rightarrow \overline{AD} = 9 + 16 = 25 \text{ cm}$$

En el triángulo CHD :

$$l^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow l = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro del trapezio: } \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 12 + 16 + 15 + 25 = 68 \text{ cm}$$

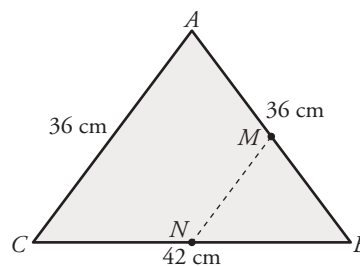
$$\text{Área del trapezio: } \frac{16 + 25}{2} \cdot 12 = 246 \text{ cm}^2$$

- 45 ■■■ Los lados de un triángulo ABC miden:

$$\overline{AC} = \overline{AB} = 36 \text{ cm}, \quad \overline{CB} = 42 \text{ cm}$$

Desde un punto M de AB se traza una paralela a AC , que corta al lado BC en un punto N .

¿Cuánto deben medir los lados del triángulo MBN para que su área sea $1/9$ de la del triángulo ABC ?

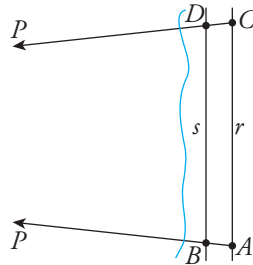


$$\frac{\text{Área } MNB}{\text{Área } ABC} = \frac{1}{9} \rightarrow k^2 = \frac{1}{9} \rightarrow k = \frac{1}{3}$$

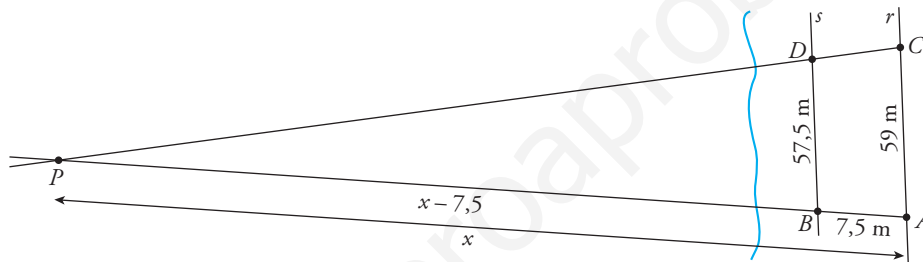
$$36 \cdot \frac{1}{3} = 12 \text{ cm}; \quad 42 \cdot \frac{1}{3} = 14 \text{ cm}$$

$$\overline{MB} = \overline{MN} = 12 \text{ cm}; \quad \overline{NB} = 14 \text{ cm}$$

- 46** ■■■ Queremos calcular la distancia que hay desde un punto A de la playa a una piedra P que se ve a lo lejos. Para ello, trazamos una recta r que pase por A y una paralela a ella, s .



Desde A observamos P en una línea que corta en B a s . Desde otro punto C de r , hacemos lo mismo y obtenemos D . Medimos: $\overline{AB} = 7,5$ m, $\overline{AC} = 59$ m, $\overline{BD} = 57,5$ m. ¿Cuál es la distancia de A a P ?



$$\frac{x}{x-7,5} = \frac{59}{57,5} \rightarrow 57,5x = 59x - 442,5 \rightarrow 1,5x = 442,5 \rightarrow x = 295 \text{ m}$$

Distancia de A a $P = 295$ m

PÁGINA 143

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

- 47** ■■■ Un triángulo rectángulo, ¿puede ser semejante a un triángulo isósceles? ¿Y a un triángulo equilátero?

Un triángulo rectángulo puede ser semejante a uno isósceles, siempre que el triángulo rectángulo sea también isósceles.

Un triángulo rectángulo no puede ser semejante a un triángulo equilátero porque este tiene los tres ángulos iguales.

- 48** ■■■ Dos triángulos equiláteros cualesquiera, ¿son semejantes entre sí? ¿Y dos polígonos regulares con el mismo número de lados?

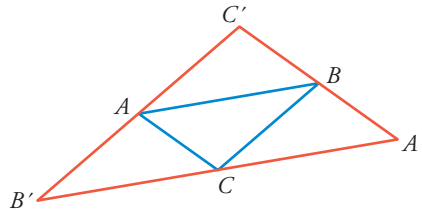
Dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes porque tienen los ángulos iguales.

También lo son dos polígonos regulares con el mismo número de lados, porque sus ángulos son iguales.

49 ■■■ Dibuja un triángulo y, desde cada vértice, traza una recta paralela al lado opuesto. Así obtendrás un nuevo triángulo más grande.

a) Justifica por qué es semejante al inicial.

b) ¿Cuál es la razón entre las áreas?



a) $\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array} \right\}$ porque tienen sus lados paralelos.

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes porque sus ángulos son iguales.

b) $\frac{\text{Área } A'B'C'}{\text{Área } ABC} = 4$

50 ■■■ Justifica en cuáles de los siguientes casos podemos asegurar que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes:

a) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$, $\hat{C} = \hat{C}'$

b) $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$, $\hat{A} = \hat{A}'$

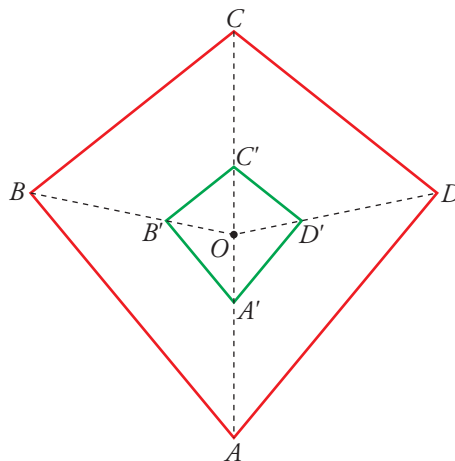
c) $\frac{AB}{A'B'} \neq \frac{BC}{B'C'}$, $\hat{B} = \hat{B}'$

d) $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$

En b), porque tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo que forman.

En d), porque tienen los tres ángulos iguales.

51 ■■■ Hemos aplicado una homotecia al cuadrilátero $ABCD$ para obtener el cuadrilátero $A'B'C'D'$.



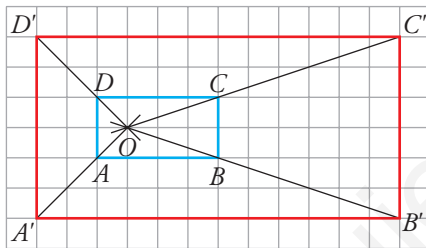
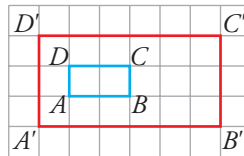
- a) ¿Cuál es el centro y cuál es la razón?
 b) Justifica que $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son semejantes.

a) El centro es O . La razón es $\frac{OC'}{OC} = \frac{1}{3}$

b) Porque:

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OD'}{OD} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'D'}{AD} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{3}$$

- 52** ■■■ Halla el centro y la razón de homotecia que transforma el rectángulo $ABCD$ en $A'B'C'D'$.



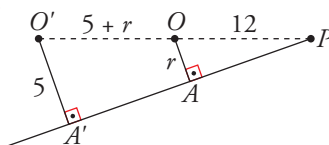
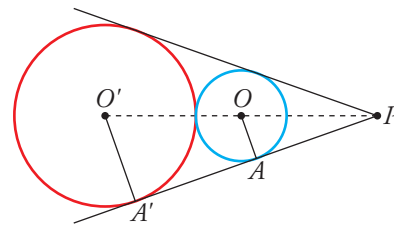
El centro de la homotecia es O , punto de corte de las rectas AA' , BB' , CC' y DD' .

Razón: $\frac{OA'}{OA} = 2$

PROFUNDIZA

- 53** ■■■ Desde un punto P trazamos tangentes a dos circunferencias tangentes exteriores.

Si $\overline{OP} = 12$ cm y $\overline{O'A'} = 5$ cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia menor?



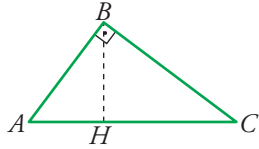
Los triángulos OAP y $O'A'P$ son semejantes por ser rectángulos con un ángulo agudo común.

$$\frac{5}{r} = \frac{17+r}{12} \rightarrow 60 = 17r + r^2 \rightarrow r^2 + 17r - 60 = 0$$

$$r = \frac{-17 \pm 23}{2} = \begin{cases} -20 & \text{(no vale)} \\ 3 & \end{cases}$$

El radio de la circunferencia menor mide 3 cm.

- 54 ■■■ En el triángulo rectángulo ABC hemos trazado la altura sobre la hipotenusa BH .



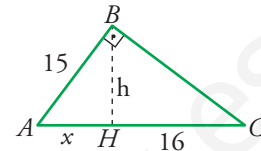
Halla el área del triángulo en el que conocemos $AB = 15$ cm y $HC = 16$ cm.

$$\left. \begin{array}{l} h^2 + x^2 = 15^2 \\ h^2 = 16 \cdot x \end{array} \right\} 16x + x^2 = 225 \rightarrow x^2 + 16x - 225 = 0$$

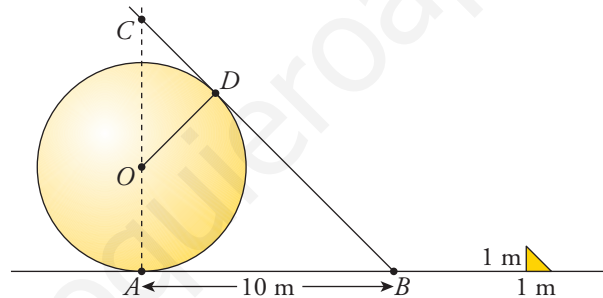
$$x = \frac{-16 \pm 34}{2} = \begin{cases} x = -25 \text{ (no vale)} \\ x = 9 \end{cases}$$

$$h^2 = 16 \cdot 9 \rightarrow h = 12 \text{ cm}$$

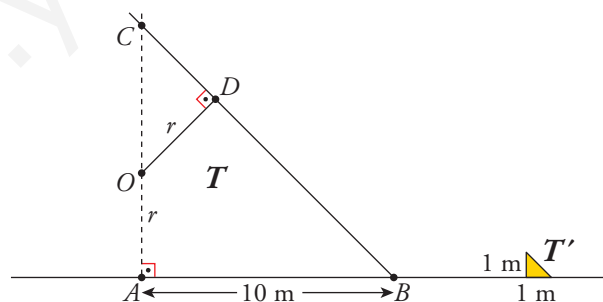
$$\text{Área} = \frac{25 \cdot 12}{2} = 150 \text{ cm}^2$$



- 55 ■■■ Una esfera apoyada en el suelo proyecta una sombra que llega hasta 10 m del punto donde la esfera toca el suelo. En ese momento, un poste vertical de 1 m de alto produce una sombra de 1 m. Calcula el radio de la esfera.



Los triángulos T y T' son semejantes.



$$\overline{AC} = \overline{AB} = 10 \text{ m}$$

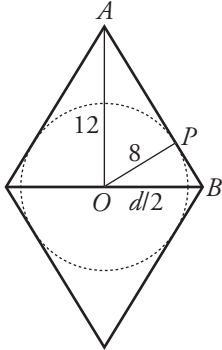
$$\overline{CB} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

Por la semejanza de OCD y ABC , tenemos:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CB}} \rightarrow \frac{r}{10} = \frac{10-r}{10\sqrt{2}} \rightarrow \sqrt{2}r = 10-r \rightarrow$$

$$\rightarrow r(\sqrt{2} + 1) = 10 \rightarrow r = \frac{10}{1 + \sqrt{2}} = 10(\sqrt{2} - 1) \approx 4,14 \text{ cm}$$

- 56** ■■■ Una de las diagonales de un rombo mide 24 cm y el radio del círculo inscrito en dicho rombo es 8 cm. Calcula el perímetro y el área del rombo.



En el triángulo rectángulo OAP :

$$\overline{AP}^2 = 12^2 - 8^2 \rightarrow \overline{AP} = \sqrt{80} \approx 8,94 \text{ cm}$$

En el triángulo rectángulo OAB :

$$8^2 = \overline{AP} \cdot \overline{PB} \rightarrow \overline{PB} = \frac{64}{8,94} \approx 7,16 \text{ cm}$$

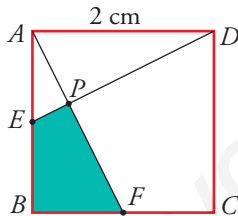
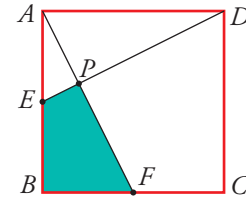
Lado del rombo: $8,94 + 7,16 = 16,1 \text{ cm}$

Perímetro del rombo: $4 \cdot 16,1 = 64,4 \text{ cm}$

$$\text{Diagonal: } \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 16,1^2 - 12^2 \rightarrow \frac{d}{2} \approx 10,73 \rightarrow d \approx 21,46 \text{ cm}$$

$$\text{Área: } \frac{24 \cdot 21,46}{2} = 257,52 \text{ cm}^2$$

- 57** ■■■ En el cuadrado de la figura, E es el punto medio del lado AB , y F , el punto medio de BC . Si el lado del cuadrado mide 2 cm, ¿cuál es el área del cuadrilátero $EPFB$?



Calcularemos el área de $EPFB$ como el área del triángulo ABF menos el área del triángulo AEP .

$$\overline{ED} = \overline{AF} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$$

Los triángulos ABF y AEP son semejantes porque:

$$\begin{cases} \hat{A} \text{ es común.} \\ \widehat{AEP} = \widehat{AFB} \text{ por la igualdad de los triángulos } ADE \text{ y } AFB. \end{cases}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{EP}}{\overline{BF}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{EP}}{1} \rightarrow \overline{EP} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{AP}}{2} \rightarrow \overline{AP} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$A_{EPFB} = A_{ABF} - A_{APE} = \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \text{ cm}^2$$