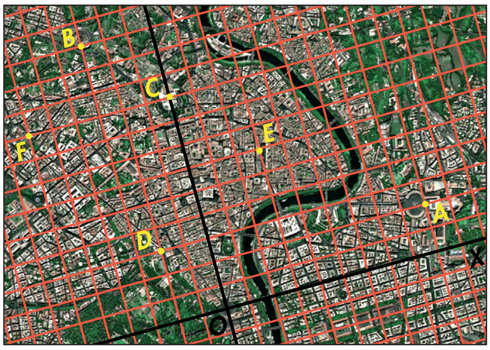
PÁGINA 168

Para manejarse por el centro de Roma, Eva y Clara han construido sobre el plano un sistema de referencia cartesiano, tomando como centro de coordenadas, *O*, la Piazza del Popolo, el eje *X* sobre la Via Cola di Rienzo y el eje *Y* sobre la Via del Corso. Han llamado *A*, *B*, *C*, *D*… a algunos lugares emblemáticos.



A. Plaza de San Pedro
B. Coliseo
C. Panteón
D. Plaza de España
E. Plaza Navona
F. Basílica Sta. María la Mayor

El lado de cada cuadradito mide 200 m.

1 **Escribe las coordenadas de los puntos *A, B, C, D, E, F* y reconoce qué lugares importantes de la ciudad son.**

$A(9, 2)$, $B(-3, 12)$, $C(0, 9)$, $D(-2, 3)$, $E(3, 6)$, $F(-6, 9)$.

2 **Clara está en el Coliseo, y Eva, en la plaza de San Pedro. Hablan por el móvil para quedar a comer.**

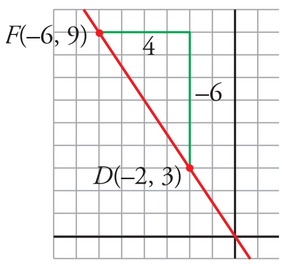
—Quedamos en el punto medio— dice Eva. (¿Cuáles son sus coordenadas?)

—Mejor quedamos en la Plaza Navona.

El punto medio M entre el Coliseo, $B(-3, 12)$, y la Plaza de San Pedro, $A(9, 2)$, es $M(3, 7)$, que está muy cerca de la Plaza Navona.

3 **Por la tarde visitarán la Basílica de Sta. María la Mayor, *F*, y, después, irán a la Plaza de España, *D*. ¿Cuál es la ecuación de la Via Sixtina, que va de una a otra? Halla la distancia entre ellas.**

La ecuación de Via Sixtina es la ecuación de una recta que va de la Basílica Santa María la Mayor, $F(-6, 9)$, hacia la Plaza de España, $D(-2, 3)$. La pendiente de esta recta es:



$$\text{Pendiente} = \frac{3-9}{-2-(-6)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

La ecuación de la recta que pasa por (–2, 3) y cuya pendiente es –3/2 es:

$$y = 3 - \frac{3}{2}(x + 2) \;\rightarrow\; 2y = 6 - 3x - 6 \;\rightarrow\; 2y = -3x \;\rightarrow\; y = -\frac{3}{2}x$$

La distancia de F a D es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 4:

$$dist\,(F, D) = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 7{,}21 \text{ cuadraditos}$$

Como el lado de cada cuadradito mide 200 m, la distancia entre la Basílica Santa María la Mayor y la Plaza de España es de 1 442 m, aproximadamente.

PÁGINA 169

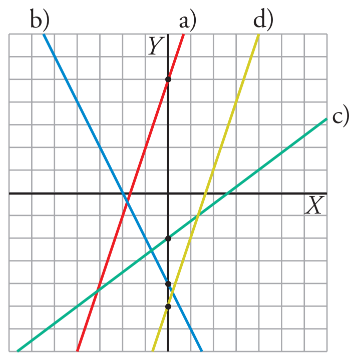
ANTES DE COMENZAR, RECUERDA

1 **Di la pendiente y la ordenada en el origen de cada recta y represéntala:**

a) $y = 3x + 5$ **b)** $y = -2x - 4$

c) $y = \frac{3}{4}x - 2$ **d)** $y - 3x + 5 = 0$

	a)	b)	c)	d)
PENDIENTE	3	–2	3/4	3
ORDENADA EN EL ORIGEN	5	–4	–2	–5



2 **Di la pendiente y un punto de cada una de las siguientes rectas:**

a) $y = 2(x - 5) + 7$ **b)** $y = -3(x + 4) + 2$

c) $y = -3(x + 4)$ **d)** $y = 5 + \frac{1}{2}(x + 1)$

e) $y = 3 - \frac{3}{5}(x - 3)$ **f)** $y = -\frac{2}{3}(x - 1) - 1$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
PENDIENTE	2	–3	–3	1/2	–3/5	–2/3
UN PUNTO	(0, –3)	(0, –10)	(0, –12)	(1, 6)	(8, 0)	(4, –3)

3 Escribe la ecuación de cada recta:

a) Pendiente = $\frac{2}{3}$. Ordenada en el origen = –3

b) Pendiente = 4. Pasa por (5, 2) **c) Pendiente = –3. Pasa por (–3, 5)**

d) Pendiente = $\frac{2}{3}$. Pasa por (–2, 0) **e) Pendiente = 0,75. Pasa por (–3, –2)**

a) $y = \frac{2}{3}x - 3$

b) $y - 2 = 4(x - 5) \rightarrow y = 4x - 18$

c) $y - 5 = -3(x + 3) \rightarrow y = -3x - 4$

d) $y = \frac{2}{3}(x + 2) \rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

e) $y + 2 = 0{,}75(x + 3) \rightarrow y = 0{,}75x + 0{,}25$

4 Resuelve los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} 2x - 11y + 50 = 0 \\ 9x + 2y + 19 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 11y + 50 = 0 \\ 4x - 22y + 100 = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - 11y + 50 = 0 \\ 4x - 22y + 33 = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - 11y + 50 = 0 \\ 9x + 2y + 19 = 0 \end{cases}$ $\begin{array}{r} 18x - 99y + 450 = 0 \\ -18x - 4y - 38 = 0 \\ \hline -103y + 412 = 0 \end{array} \rightarrow y = 4$

$2x - 44 + 50 = 0 \rightarrow 2x = -6 \rightarrow x = -3$

Solución: $x = -3$, $y = 4$

b) $\begin{cases} 2x - 11y + 50 = 0 \\ 4x - 22y + 100 = 0 \end{cases}$ $\begin{array}{r} 4x - 22y + 100 = 0 \\ -4x + 22y - 100 = 0 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$

Tiene infinitas soluciones.

c) $\begin{cases} 2x - 11y + 50 = 0 \\ 4x - 22y + 33 = 0 \end{cases}$ $\begin{array}{r} 4x - 22y + 100 = 0 \\ -4x + 22y - 33 = 0 \\ \hline 67 = 0 \end{array}$

No tiene solución.

PÁGINA 170

1 Halla las coordenadas del punto medio de los siguientes segmentos:

a) $A(-2, 5)$, $B(4, 1)$ **b)** $P(7, -3)$, $Q(-5, 1)$

c) $R(1, 4)$, $S(7, 2)$ **d)** $A(-3, 5)$, $B(4, 0)$

a) $M = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (1, 3)$ b) $M = \left(\frac{7-5}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (1, -1)$

c) $M = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (4, 3)$ d) $M = \left(\frac{-3+4}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

2 Halla las coordenadas del punto simétrico de A respecto de P en los siguientes casos:

a) $A(4, -1)$, $P(-7, 2)$ **b)** $A(5, 4)$, $P(5, 0)$

c) $A(2, 4)$, $P(5, -1)$ **d)** $A(-3, 5)$, $P(0, 8)$

a) Llamamos $A'(x, y)$ al punto simétrico de A respecto de P. El punto P será el punto medio del segmento de extremos A y A'.

$$\left.\begin{array}{l} -7 = \dfrac{4+x}{2} \to -14 = 4 + x \to x = -18 \\ 2 = \dfrac{-1+y}{2} \to 4 = -1 + y \to y = 5 \end{array}\right\} \text{Las coordenadas de } A' \text{ son } (-18, 5).$$

b) $A'(x, y)$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = \dfrac{x+5}{2} \to 10 = x + 5 \to x = 5 \\ 0 = \dfrac{y+4}{2} \to y + 4 = 0 \to y = -4 \end{array}\right\} \text{Las coordenadas de } A' \text{ son } (5, -4).$$

c) $A'(x, y)$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = \dfrac{2+x}{2} \to 10 = 2 + x \to x = 8 \\ -1 = \dfrac{4+y}{2} \to -2 = 4 + y \to y = -6 \end{array}\right\} \text{Las coordenadas de } A' \text{ son } (8, -6).$$

d) $A'(x, y)$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \dfrac{x-3}{2} \to x - 3 = 0 \to x = 3 \\ 8 = \dfrac{y+5}{2} \to 16 = y + 5 \to y = 11 \end{array}\right\} \text{Las coordenadas de } A' \text{ son } (3, 11).$$

PÁGINA 171

3 **Comprueba si $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $T(15, -25)$ están alineados.**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-1-7}{5-2} = \dfrac{-8}{3} \\[2mm] \dfrac{-25+1}{15+5} = \dfrac{-24}{10} = \dfrac{-12}{5} \end{array}\right\} -\frac{8}{3} \neq -\frac{12}{5}.\ \text{No están alineados.}$$

4 **Averigua el valor de a para que los puntos $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $Q(a, -25)$ estén alineados.**

$$\frac{-1-7}{5-2} = \frac{-25+1}{a-5} \to -\frac{8}{3} = \frac{-24}{a-5} \to -8a + 40 = -72 \to -8a = -112 \to a = 14$$

5 **Dados los puntos $A(0, 1)$, $B(2, 5)$, $P(x, y)$, averigua qué relación deben cumplir x e y para que P esté alineado con A y B.**

$$\frac{5-1}{2} = \frac{y-5}{x-2} \to 4(x-2) = 2(y-5) \to 4x - 8 = 2y - 10 \to$$

$$\to 4x - 2y + 2 = 0 \to 2x - y + 1 = 0 \to y = 2x + 1$$

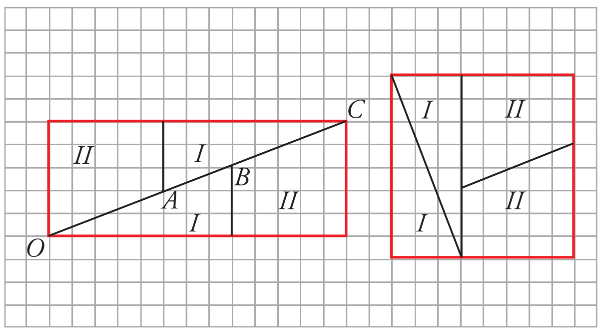
La relación buscada entre x e y es $y = 2x + 1$. Todos los puntos que están sobre esta recta cumplen la condición.

6 **Averigua el valor de t para que $A(1, 2)$, $B(7, -11)$ y $C(t, 2t)$ estén alineados.**

$$\frac{-11-2}{7-1} = \frac{2t+11}{t-7} \to -13(t-7) = 6(2t+11) \to -13t + 91 = 12t + 66 \to$$

$$\to 25t = 25 \to t = 1$$

7 **En la figura de la derecha, ¿cómo es posible que el rectángulo, que tiene $5 \times 13 = 65$ cuadritos, se pueda descomponer en los mismos cuatro fragmentos que el cuadrado, que tiene $8 \times 8 = 64$ cuadritos?**



La clave está en que los puntos $OABC$ no están alineados. Compruébalo tomando $O(0, 0)$, $A(5, 2)$, $B(8, 3)$, y probando que O, A y B no están alineados.

Para que O, A y B estén alineados, $\dfrac{2-0}{5-0} = \dfrac{2}{5}$ debería ser igual a $\dfrac{3-2}{8-5} = \dfrac{1}{3}$.

Pero $\dfrac{2}{5} \neq \dfrac{1}{3}$. Por tanto, O, A y B no están alineados.

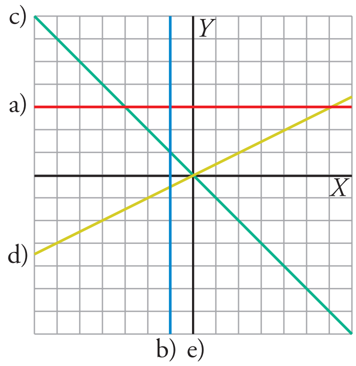
PÁGINA 172

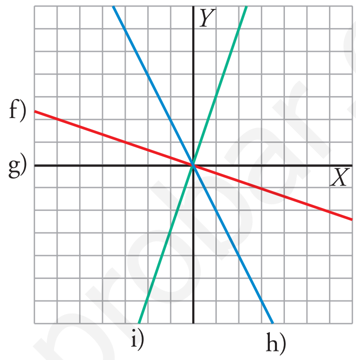
1 **Representa las siguientes rectas:**

a) $y = 3$ **b)** $x = -1$ **c)** $x = -y$

d) $y = \frac{1}{2}x$ **e)** $x = 0$ **f)** $y = -\frac{1}{3}x$

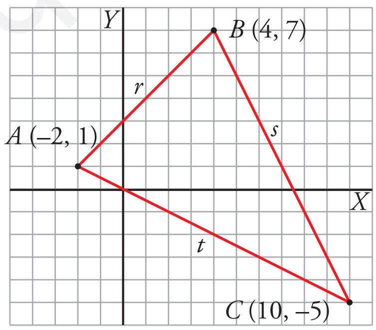
g) $y = 0$ **h)** $y = -2x$ **i)** $y = 3x$





PÁGINA 173

2 **Dibuja el triángulo de vértices $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$, $C(10, -5)$. Halla las ecuaciones de las rectas sobre las que están situados sus lados.**



- Recta r: $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$

$$\frac{y-1}{6} = \frac{x+2}{6} \rightarrow y = x + 3$$

- Recta s: $B(4, 7)$, $C(10, -5)$

$$\frac{y-7}{-12} = \frac{x-4}{6} \rightarrow 6(y-7) = -12(x-4) \rightarrow y - 7 = -2x + 8 \rightarrow y = -2x + 15$$

- Recta t: $A(-2, 1)$, $C(10, -5)$

$$\frac{y-1}{-6} = \frac{x+2}{12} \rightarrow 12(y-1) = -6(x+2) \rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}x - 1 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

PÁGINA 174

1 Halla la recta r' que es paralela a r y pasa por P:

a) $r: y = -2x + 4, \; P(2, 5)$

b) $r: 5x - 7y + 4 = 0, \; P(-3, 4)$

c) $r: 7x + 4 = 0, \; P(0, 5)$

d) $r: 5y - 15 = 0, \; P(-4, -2)$

e) $r: \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1, \; P(1, 0)$

a) Recta de pendiente –2 que pasa por $P(2, 5)$:

$r': y = -2(x - 2) + 5 \to y = -2x + 1$

b) Recta de pendiente $\frac{5}{7}$ que pasa por $P(-3, 4)$:

$r': y = \frac{5}{7}(x + 3) + 4 \to y = \frac{5}{7}x + \frac{33}{7}$

c) Recta paralela al eje Y que pasa por $P(0, 5)$:

$r': x = 0$

d) Recta paralela al eje X que pasa por $P(-4, -2)$:

$r': y = -2$

e) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1 \to 5x + 3y = 15 \to y = \frac{15 - 5x}{3}$

Recta de pendiente $-\frac{5}{3}$ que pasa por $P(1, 0)$:

$r': y = -\frac{5}{3}(x - 1) \to y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$

PÁGINA 175

2 Halla la recta r' que es perpendicular a r y pasa por P.

a) $r: y = -2x + 4, \; P(2, 5)$

b) $r: y = -x + 5, \; P(-3, 0)$

c) $r: 5x - 8y - 16 = 0, \; P(7, -1)$

d) $r: 2x - 11 = 0, \; P(3, 0)$

e) $r: 5y + 10 = 0, \; P(-2, 11)$

a) Recta de pendiente $\frac{1}{2}$ que pasa por $P(2, 5)$:

$r': y = \frac{1}{2}(x - 2) + 5 \to y = \frac{1}{2}x + 4$

b) Recta de pendiente 1 que pasa por $P(-3, 0)$:

$r': y = x + 3$

c) Recta de pendiente $-\frac{8}{5}$ que pasa por $P(7, -1)$:

$r': y = -\frac{8}{5}(x - 7) - 1 \rightarrow y = -\frac{8}{5}x + \frac{51}{5}$

d) Recta perpendicular al eje Y que pasa por $P(3, 0)$:

$r': y = 0$

e) Recta perpendicular al eje X que pasa por $P(-2, 11)$:

$r': x = -2$

3 **Averigua el valor que debe tener k para que las rectas**

$$r: 5x + ky - 11 = 0 \qquad r': 3x - 8y + 2 = 0$$

sean perpendiculares.

Sus pendientes m y m' deben verificar $m \cdot m' = -1$.

Pendiente de r: $y = \frac{11 - 5x}{k} \rightarrow m = -\frac{5}{k}$

Pendiente de r' $y = \frac{-2 - 3x}{-8} \rightarrow m' = \frac{3}{8}$

$m \cdot m' = -\frac{5}{k} \cdot \frac{3}{8} = \frac{-15}{8k} = -1 \rightarrow 8k = 15 \rightarrow k = \frac{15}{8}$

PÁGINA 176

1 **Di la posición relativa de los siguientes pares de rectas:**

a) $r: 8x + 2y - 14 = 0$, $s: 5x - y - 20 = 0$

b) $r: 3x - 2y - 14 = 0$

s: pasa por $(1, -2)$ y por $(10, 1)$

c) r: pasa por $(-1, 4)$ y $(7, -2)$

$s: 3x + 4y = 0$

d) r: pasa por $(2, -1)$ y $(8, 2)$

s: su pendiente es $\frac{1}{2}$ y pasa por $(0, -2)$

a) $\left.\begin{array}{l} r: 8x + 2y - 14 = 0 \\ s: 5x - y - 20 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4x + y - 7 = 0 \\ 5x - y - 20 = 0 \\ \hline 9x - 27 = 0 \rightarrow x = 3 \end{array}$

$4 \cdot 3 + y - 7 = 0 \rightarrow y = -5$

Las rectas r y s se cortan en el punto $(3, -5)$.

b) Veamos cuál es la ecuación de s:

$$\frac{x-1}{10-1} = \frac{y+2}{1+2} \rightarrow 3(x-1) = 9(y+2) \rightarrow x-1 = 3y+6 \rightarrow x-3y-7=0$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} r:\ 3x-2y-14=0 \\ s:\ \ x-3y-\ \ 7=0 \end{array}\right\} \begin{array}{r} 3x-2y-14=0 \\ -3x+9y+21=0 \\ \hline 7y+\ \ 7=0 \end{array} \rightarrow y=-1$$

$$3x-2\cdot(-1)-14=0 \rightarrow 3x-12=0 \rightarrow x=4$$

Las rectas r y s se cortan en el punto $(4, -1)$.

c) Buscamos la ecuación de r:

$$\frac{x+1}{8} = \frac{y-4}{-6} \rightarrow -6x-6-8y+32=0 \rightarrow 6x+8y-26=0 \rightarrow 3x+4y-13=0$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} r:\ 3x+4y-13=0 \\ s:\ 3x+4y\ \ \ \ \ \ \ \ \ =0 \end{array}\right\} \begin{array}{r} 3x+4y-13=0 \\ -3x-4y\ \ \ \ \ \ \ \ \ =0 \\ \hline -13=0 \end{array}\ \text{Contradicción.}$$

Las rectas r y s no tienen ningún punto en común. Son paralelas, ya que tienen la misma pendiente, $-3/4$, pero distinta ordenada en el origen, $13/4$ y 0.

d) Ecuación de r:

$$\frac{x-2}{8-2} = \frac{y+1}{2+1} \rightarrow 3x-6 = 6y+6 \rightarrow 3x-6y-12=0 \rightarrow x-2y-4=0$$

Ecuación de s:

$$y = \frac{1}{2}x-2 \rightarrow 2y = x-4 \rightarrow x-2y-4=0$$

r y s son la misma recta.

PÁGINA 177

1 Halla la distancia entre A y B.

a) $A(-7, 4)$, $B(6, 4)$ **b) $A(3, 4)$, $B(3, 9)$**

c) $A(-5, 11)$, $B(0, -1)$ **d) $A(4, -6)$, $B(7, 4)$**

a) $dist(A, B) = \sqrt{(6+7)^2 + (4-4)^2} = 13$

b) $dist(A, B) = \sqrt{(3-3)^2 + (9-4)^2} = 5$

c) $dist(A, B) = \sqrt{(0+5)^2 + (-1-11)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

d) $dist(A, B) = \sqrt{(7-4)^2 + (4+6)^2} = \sqrt{109} \approx 10,4$

2 **Aplica la fórmula de Herón para calcular el área del triángulo de vértices $A(-5, -2)$, $B(7, 3)$, $C(4, 7)$.**

Calculamos primero la medida de cada lado:

$a = dist(B, C) = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$b = dist(A, C) = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2}$

$c = dist(A, B) = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

Semiperímetro del triángulo, $p = \dfrac{(5 + 9\sqrt{2} + 13)}{2} = 9 + \dfrac{9}{2}\sqrt{2}$

Área $= \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} =$

$$= \sqrt{\left(9 + \frac{9}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(4 + \frac{9}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(9 - \frac{9}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{9}{2}\sqrt{2} - 4\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(81 - \frac{81}{4} \cdot 2\right) \cdot \left(\frac{81}{4} \cdot 2 - 16\right)} = \sqrt{\left(81 - \frac{81}{2}\right) \cdot \left(\frac{81}{2} - 16\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{81}{2} \cdot \frac{49}{2}} = \frac{9 \cdot 7}{2} = 31{,}5 \text{ u}^2$$

3 **Calcula el valor de c para que el punto $A(10, c)$ diste 13 unidades del punto $B(-2, 5)$.**

$dist(A, B) = \sqrt{(-2 - 10)^2 + (5 - c)^2} = 13$

$144 + 25 + c^2 - 10c = 169$

$c^2 - 10c = 0 \left\langle \begin{array}{l} c = 0 \\ c = 10 \end{array} \right.$

Hay dos soluciones: $A(10, 0)$, $A'(10, 10)$

4 **Calcula el valor de a para que el punto $P(a, 7)$ esté a 10 unidades de distancia de $Q(5, 1)$.**

$dist(P, Q) = \sqrt{(5 - a)^2 + (-6)^2} = 10$

$25 + a^2 - 10a + 36 = 100 \rightarrow a^2 - 10a - 39 = 0$

$a = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 + 156}}{2} = \dfrac{10 \pm 16}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 13 \\ -3 \end{array} \right.$

Hay dos soluciones: $P(13, 7)$, $P'(-3, 7)$

PÁGINA 178

1 **Escribe, en cada caso, la ecuación de la circunferencia:**

a) $C(7, 1)$, $r = 5$ **b)** $C(-2, 4)$, $r = 12$

a) $(x-7)^2 + (y-1)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 14x - 2y + 25 = 0$

b) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 144 \rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 8y - 124 = 0$

2 **Di el centro y el radio de las circunferencias siguientes:**

a) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$ **b)** $(x+2)^2 + y^2 = 1$

a) Centro $(3, 5)$. Radio, 5.

b) Centro $(-2, 0)$. Radio, 1.

3 **Una circunferencia de radio $r = \sqrt{45}$ tiene su centro en el punto $C(4, 9)$. ¿Pertenecen los puntos $A(-2, 6)$ y $B(8, 2)$ a esta circunferencia?**

Ecuación de la circunferencia: $(x-4)^2 + (y-9)^2 = 45$

$A(-2, 6) \rightarrow (-6)^2 + (-3)^2 = 36 + 9 = 45$. Sí pertenece.

$B(8, 2) \rightarrow 4^2 + (-7)^2 = 16 + 49 = 65 \neq 45$. No pertenece.

4 **Halla la ecuación de la circunferencia de centro $C(4, -2)$ que pasa por $P(5, 7)$.**

El radio de la circunferencia es la distancia entre C y P.

Radio $= \sqrt{(5-4)^2 + (7+2)^2} = \sqrt{82}$

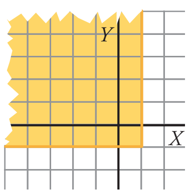
Ecuación de la circunferencia:

$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 82 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 4y - 62 = 0$

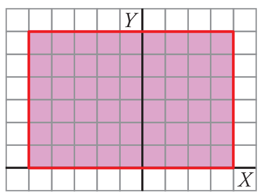
PÁGINA 179

1 **Escribe las expresiones que representan estas regiones:**

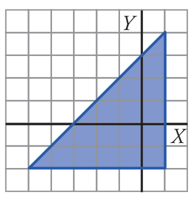
a)



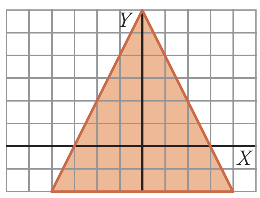
b)



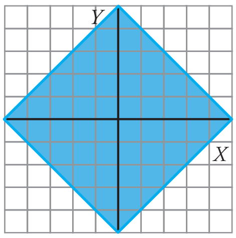
c)



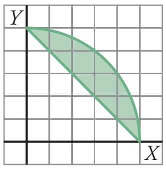
d)



e)



f)



a) $\begin{cases} x \le 1 \\ y \ge -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -5 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 6 \end{cases}$

c) • Calculamos la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (–5, –2):

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y-4}{-6} \rightarrow y - x - 3 = 0$$

El punto (0, 0) está en la zona coloreada y, para él, $y - x - 3 \le 0$.

• Las expresiones que representan esta zona son:

$$\begin{cases} y - x - 3 \le 0 \\ x \le 1 \\ y \ge -2 \end{cases}$$

d) • Recta que pasa por (4, –2) y (0, 6):

$$\frac{x-4}{-4} = \frac{y+2}{8} \rightarrow y + 2x - 6 = 0$$

Para (0, 0) $\rightarrow$ $y + 2x - 6 \le 0$

• Recta que pasa por (–4, –2) y (0, 6):

$$\frac{x+4}{4} = \frac{y+2}{8} \rightarrow 2x - y + 6 = 0$$

Para (0, 0) $\rightarrow$ $2x - y + 6 \ge 0$

• Las expresiones que representan esta región son:

$$\begin{cases} y + 2x - 6 \le 0 \\ 2x - y + 6 \ge 0 \\ y \ge -2 \end{cases}$$

e) • Recta que pasa por (5, 0) y (0, 5):

$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y}{5} \rightarrow x + y - 5 = 0$$

Para (0, 0), $x + y - 5 \le 0$

• Recta que pasa por (5, 0) y (0, –5):

$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y}{-5} \rightarrow x - y - 5 = 0$$

Para (0, 0), $x - y - 5 \le 0$

- Recta que pasa por (–5, 0) y (0, 5):

  $\dfrac{x+5}{5} = \dfrac{y}{5} \rightarrow x - y + 5 = 0$

  Para (0, 0), $x - y + 5 \ge 0$

- Recta que pasa por (–5, 0) y (0, –5):

  $\dfrac{x+5}{5} = \dfrac{y}{-5} \rightarrow x + y + 5 = 0$

  Para (0, 0), $x + y + 5 \ge 0$

  Expresiones que representan la región:

$$\begin{cases} x + y - 5 \le 0 \\ x - y - 5 \le 0 \\ x - y + 5 \ge 0 \\ x + y + 5 \ge 0 \end{cases}$$

f) • El arco corresponde a un trozo de circunferencia de centro (0, 0) y radio 5. Su ecuación es $x^2 + y^2 = 25$.

- Recta que pasa por (5, 0) y (0, 5):

  $x + y - 5 = 0$

  Para el punto (3, 3), que está dentro de la región, $x + y - 5 \ge 0$.

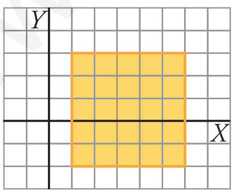
  Expresiones que representan la región:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 25 \\ x + y - 5 \ge 0 \end{cases}$$

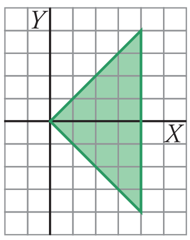
2 **Representa de forma gráfica los recintos que se obtienen a partir de los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 1 \le x \le 6 \\ -2 \le y \le 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y \ge 0 \\ x + y \ge 0 \\ x \le 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 25 \\ 3x + y + 5 \ge 0 \\ 3x - y - 5 \le 0 \end{cases}$

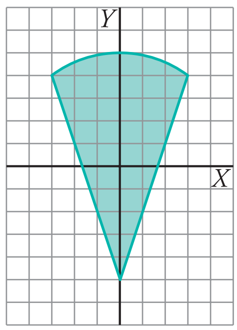
a)



b)



c)

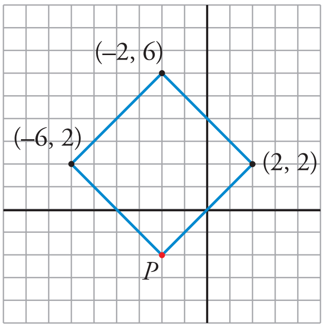


PÁGINA 180

PRACTICA

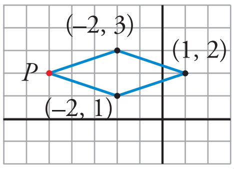
Puntos

1 **Si los puntos (–6, 2), (–2, 6) y (2, 2) son vértices de un cuadrado, ¿cuál es el cuarto vértice?**



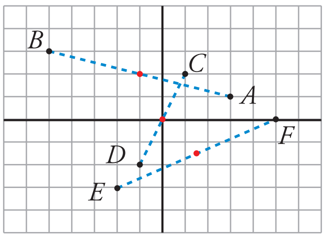
$P(-2, 2)$

2 **Los puntos (–2, 3), (1, 2) y (–2, 1) son vértices de un rombo. ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto vértice?**



$P(-5, 2)$

3 **Representa los puntos $A(3, 1)$, $B(-5, 3)$, $C(1, 2)$, $D(-1, -2)$, $E(-2, -3)$, $F(5, 0)$ y halla las coordenadas del punto medio de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$.**



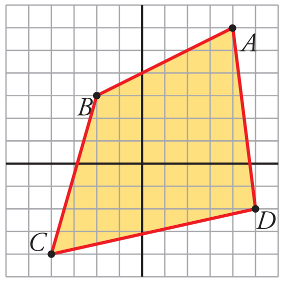
$$M_{AB} = \left(\frac{3-5}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (-1, 2)$$

$$M_{CD} = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = (0, 0)$$

$$M_{EF} = \left(\frac{-2+5}{2}, \frac{-3+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$$

8 Soluciones a los ejercicios y problemas

4 **Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados y de las diagonales del cuadrilátero *ABCD*.**



$$A(4, 6),\ B(-2, 3),\ C(-4, -4),\ D(5, -2)$$

$$M_{AB} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+6}{2}\right) = \left(1, \frac{9}{2}\right) \qquad M_{BC} = \left(\frac{-2-4}{2}, \frac{3-4}{2}\right) = \left(-3, -\frac{1}{2}\right)$$

$$M_{CD} = \left(\frac{-4+5}{2}, \frac{-4-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -3\right) \qquad M_{AD} = \left(\frac{5+4}{2}, \frac{6-2}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 2\right)$$

$$M_{AC} = \left(\frac{4-4}{2}, \frac{6-4}{2}\right) = (0, 1) \qquad M_{BD} = \left(\frac{-2+5}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

5 **Halla, en cada caso, el punto simétrico de $A(-3, -5)$ respecto de:**

a) $P(-2, 0)$ **b)** $Q(2, -3)$ **c)** $O(0, 0)$

a) $\left(\dfrac{-3+x}{2}, \dfrac{-5+y}{2}\right) = (-2, 0);\ \left.\begin{cases} \dfrac{-3+x}{2} = -2 \to x = -1 \\ \dfrac{-5+y}{2} = 0 \to y = 5 \end{cases}\right\}\ A'(-1, 5)$

b) $\left(\dfrac{-3+x}{2}, \dfrac{-5+y}{2}\right) = (2, -3);\ \left.\begin{cases} \dfrac{-3+x}{2} = 2 \to x = 7 \\ \dfrac{-5+y}{2} = -3 \to y = -1 \end{cases}\right\}\ A'(7, -1)$

c) $\left(\dfrac{-3+x}{2}, \dfrac{-5+y}{2}\right) = (0, 0);\ \left.\begin{cases} \dfrac{-3+x}{2} = 0 \to x = 3 \\ \dfrac{-5+y}{2} = 0 \to y = 5 \end{cases}\right\}\ A'(3, 5)$

6 **Si $M(-3, 5)$ es el punto medio del segmento *AB*, halla el punto *B* en cada uno de los siguientes casos:**

a) $A(-1, 5)$ **b)** $A(6, -4)$ **c)** $A(-4, -7)$

a) $\left(\dfrac{-1+x}{2}, \dfrac{5+y}{2}\right) = (-3, 5) \to x = -5;\ y = 5 \to B(-5, 5)$

b) $\left(\dfrac{6+x}{2}, \dfrac{-4+y}{2}\right) = (-3, 5) \to x = -12;\ y = 14 \to B(-12, 14)$

c) $\left(\dfrac{-4+x}{2}, \dfrac{-7+y}{2}\right) = (-3, 5) \to x = -2;\ y = 17 \to B(-2, 17)$

7 ■□□ **Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tienen el mismo punto medio. Halla las coordenadas del punto D, sabiendo que $A(-2, 3)$, $B(-3, -1)$, $C(4, -2)$.**

$$M_{AC} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$M_{BD} = \left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-1+y}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \quad \left.\begin{cases} \dfrac{-3+x}{2} = 1 \rightarrow x = 5 \\ \dfrac{-1+y}{2} = \dfrac{1}{2} \rightarrow y = 2 \end{cases}\right\} D(5, 2)$$

8 ■□□ **Comprueba, en cada caso, que los puntos dados están alineados:**

a) $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(19, 8)$ **b)** $P(-2, -3)$, $Q(2, 0)$, $R(-26, -21)$

a) $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2} \rightarrow \dfrac{3-2}{4-1} = \dfrac{8-3}{19-4} \rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{15}$ Cierto.

b) $\dfrac{0+3}{2+2} = \dfrac{-21-0}{-26-2} \rightarrow \dfrac{3}{4} = \dfrac{21}{28}$ Cierto.

9 ■□□ **Comprueba, en cada caso, si los puntos dados están alineados:**

a) $A(-1, 3)$, $B\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $C(-4, -2)$ **b)** $A(1, 0)$, $B(-3, -2)$, $C(5, 2)$

a) $\dfrac{1/2-3}{-5/2+1} = \dfrac{-2-1/2}{-4+5/2} \rightarrow \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$ Sí están alineados.

b) $\dfrac{-2-0}{-3-1} = \dfrac{2+2}{5+3} \rightarrow \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{4}{8}$ Sí están alineados.

10 ■□□ **Calcula m para que los puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$ estén alineados.**

$$\frac{-2-1}{5+1} = \frac{m-1}{2+1} \rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{m-1}{3} \rightarrow m = -\frac{3}{2} + 1 \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Rectas

11 ■□□ **Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:**

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$ **b)** $A(0, -2)$, $B(5, -2)$ **c)** $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$

a) $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} \rightarrow \dfrac{y-0}{3-0} = \dfrac{x+1}{0+1} \rightarrow y = 3x+3$

b) $\dfrac{y+2}{-2+2} = \dfrac{x-0}{5-0} \rightarrow \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{x}{5} \rightarrow y+2 = 0 \rightarrow y = -2$

c) $\dfrac{y-3}{-1-3} = \dfrac{x+2}{4+2} \rightarrow 6(y-3) = -4(x+2) \rightarrow 6y - 18 = -4x - 8 \rightarrow$

$\rightarrow 4x + 6y - 10 = 0 \rightarrow 2x + 3y - 5 = 0$

12 □□□ **Escribe la ecuación de las siguientes rectas:**

a) Pasa por (–4, 2) y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por (1, 3) y su pendiente es –2.

c) Pasa por (5, –1) y su pendiente es 0.

a) $y = 2 + \frac{1}{2}(x + 4)$

b) $y = 3 - 2(x - 1)$

c) $y = -1 + 0(x - 5) \rightarrow y = -1$

13 □□□ **Halla la ecuación de las siguientes rectas:**

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por (4, 5).

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por (4, 0).

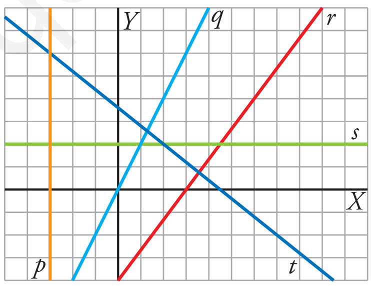
c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por (0, –3).

a) $m = -2;\ y = 5 - 2(x - 4)$

b) $m = \frac{1}{2};\ y = 0 + \frac{1}{2}(x - 4) \rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 4)$

c) $m = -\frac{3}{2};\ y = -3 - \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = -3 - \frac{3}{2}x$

14 □□□ **Escribe la ecuación de las rectas *p*, *q*, *r*, *s* y *t*.**



r: (0, –4) y (3, 0)

$$\frac{y + 4}{0 + 4} = \frac{x - 0}{3 - 0} \rightarrow 3y + 12 = 4x \rightarrow 4x - 3y - 12 = 0$$

s: $y = 2$

t: (2, 2) y (–3, 6)

$$\frac{y - 2}{6 - 2} = \frac{x - 2}{-3 - 2} \rightarrow -5y + 10 = 4x - 4 \rightarrow 4x + 5y - 14 = 0$$

p: $x = -3$

q: (0, 0) y (2, 4)

$$\frac{y - 0}{4 - 0} = \frac{x - 0}{2 - 0} \rightarrow 2y = 4x \rightarrow y = 2x$$

15 ■□□ **Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y que pasa por el punto P en los siguientes casos:**

a) $r: y = -2x + 3;\ P(-3, 2)$

b) $r: 3x - 2y + 1 = 0;\ P(4, -1)$

c) $r: x = 3;\ P(0, 4)$

a) $m = \frac{1}{2};\ y = 2 + \frac{1}{2}(x + 3)$

b) $m = -\frac{2}{3};\ y = -1 - \frac{2}{3}(x - 4)$

c) $y = 4$

16 ■□□ **Comprueba si los puntos $A(18, 15)$ y $B(-43, -5)$ pertenecen a la recta $x - 3y + 27 = 0$.**

A: $18 - 3 \cdot 15 + 27 = 0 \rightarrow A \in r$

B: $-43 - 3 \cdot (-5) + 27 \neq 0 \rightarrow B \notin r$

17 ■□□ **Dados los puntos $A(-3, 2)$ y $B(5, 0)$, halla las ecuaciones de las rectas siguientes:**

r: pasa por A y es perpendicular a $\overline{AB}$.

s: pasa por B y es perpendicular a $\overline{AB}$.

$m_{AB} = \frac{0 - 2}{5 + 3} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$

r: pendiente $= 4$; $y = 2 + 4(x + 3) \rightarrow y = 4x + 14$

s: pendiente $= 4$; $y = 0 + 4(x - 5) \rightarrow y = 4x - 20$

18 ■□□ **Calcula n y m para que las rectas**

$$r: 3x + my - 8 = 0 \qquad s: nx - 2y + 3 = 0$$

se corten en el punto $P(1, 5)$.

r: $3x + my - 8 = 0 \rightarrow 3 \cdot 1 + m \cdot 5 - 8 = 0 \rightarrow m = 1$

s: $nx - 2y + 3 = 0 \rightarrow n \cdot 1 - 10 + 3 = 0 \rightarrow n = 7$

PÁGINA 181

19 ■□□ **Halla el punto de intersección de las rectas r y s en los casos siguientes:**

a) $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \\ s: 7x + 3y - 63 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r: 3x + 6 = 0 \\ s: 2y - 5 = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = -17 \\ 7x + 3y = 63 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} 9x - 15y = -51 \\ 35x + 15y = 315 \\ \hline 44x \qquad = 264 \end{array} \rightarrow x = 6$

$7 \cdot 6 + 3y = 63 \rightarrow 3y = 21 \rightarrow y = 7$

r y s se cortan en el punto $P(6, 7)$.

b) $\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 5/2 \end{array}\right\} P\left(-2, \dfrac{5}{2}\right)$

20 **Estudia la posición relativa de las rectas:**

r: $3x - 5y + 15 = 0$ y s: pasa por $(-2, -3)$ y $(8, 3)$

r: $3x - 5y + 15 = 0$

s: $m = \dfrac{3 + 3}{8 + 2} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$; $y = -3 + \dfrac{3}{5}(x + 2) \rightarrow$

$\rightarrow 5y = -15 + 3x + 6 \rightarrow 3x - 5y - 9 = 0$

Las rectas r y s son paralelas.

21 **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:**

a) $\begin{cases} r: 2x - 5y + 3 = 0 \\ s: P(3, 1),\ Q(-2, 3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 5x - 4y + 8 = 0 \\ s: A(4, 7),\ B(0, 2) \end{cases}$

a) • s: $P(3, 1)$, $Q(-2, 3)$

$m = \dfrac{3 - 1}{-2 - 3} = \dfrac{2}{-5} = -\dfrac{2}{5}$

$y = 1 - \dfrac{2}{5}(x - 3) \rightarrow 5y = 5 - 2x + 6 \rightarrow 2x + 5y - 11 = 0$

• $\begin{array}{rl} r: & 2x - 5y + 3 = 0 \\ s: & 2x + 5y - 11 = 0 \\ \hline & 4x \qquad - 8 = 0 \end{array} \rightarrow x = 2$

$2 \cdot 2 - 5y + 3 = 0 \rightarrow 5y = 7 \rightarrow y = \dfrac{7}{5}$

r y s se cortan en el punto $\left(2, \dfrac{7}{5}\right)$.

b) • s: $A(4, 7)$, $B(0, 2)$

$m = \dfrac{2 - 7}{-4} = \dfrac{5}{4}$; $y = 2 + \dfrac{5}{4}(x - 0) \rightarrow y = 2 + \dfrac{5}{4}x \rightarrow$

$\rightarrow 4y = 8 + 5x \rightarrow 5x - 4y + 8 = 0$

r: $5x - 4y + 8 = 0$

r y s son la misma recta.

22 □□□ **Halla la ecuación de la recta perpendicular a $\overline{AB}$ en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.**

$A(-5, 3),\ B(2, 7) \rightarrow m = \dfrac{7-3}{2+5} = \dfrac{4}{7};\ m' = -\dfrac{7}{4}$

$M_{AB} = \left(\dfrac{-5+2}{2}, \dfrac{3+7}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}, 5\right)$

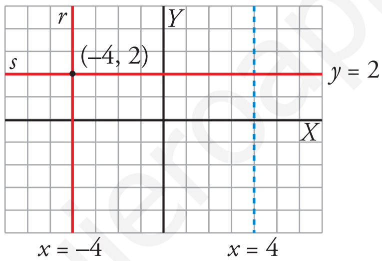
$y = 5 - \dfrac{7}{4}\left(x + \dfrac{3}{2}\right) \rightarrow y = 5 - \dfrac{7}{4}x - \dfrac{21}{8} \rightarrow 8y = 40 - 14x - 21 \rightarrow 14x + 8y - 19 = 0$

23 □□□ **Las rectas r y s pasan por el punto $(-4, 2)$; r es paralela a $3x - 12 = 0$ y s es perpendicular a ella. Representa r y s y halla su ecuación.**

$3x - 12 = 0 \rightarrow x = 4$

Paralela a $x = 4$ que pasa por $(-4, 2) \rightarrow r\!: x = -4$

Perpendicular a $x = 4$ que pasa por $(-4, 2) \rightarrow s\!: y = 2$



24 □□□ **La recta r es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, y la recta s es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto $(1, 3)$. Escribe las ecuaciones de las rectas r y s.**

$5x - 4y + 3 = 0 \rightarrow m = \dfrac{5}{4}$

r es la recta de pendiente $\dfrac{5}{4}$ que pasa por $(1, 3)$:

$r\!: y = 3 + \dfrac{5}{4}(x-1) \rightarrow 4y = 12 + 5x - 5 \rightarrow 5x - 4y + 7 = 0$

s es la recta de pendiente $-\dfrac{4}{5}$ que pasa por $(1, 3)$:

$s\!: y = 3 - \dfrac{4}{5}(x-1) \rightarrow 5y = 15 - 4x + 4 \rightarrow 4x + 5y - 19 = 0$

Distancias y circunferencia

25 □□□ **Calcula la distancia entre P y Q:**

a) $P(3, 5),\ Q(3, -7)$ **b)** $P(-8, 3),\ Q(-6, 1)$

c) $P(0, -3),\ Q(-5, 1)$ **d)** $P(-3, 0),\ Q(15, 0)$

a) $d = \sqrt{(3-3)^2 + (5+7)^2} = \sqrt{12^2} = 12$

b) $d = \sqrt{(-8+6)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $d = \sqrt{5^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

d) $d = \sqrt{(-3-15)^2 + 0^2} = 18$

26 **a) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 0)$, $B(6, 4)$.**

b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.

a) $M\left(\dfrac{-2+6}{2}, \dfrac{0+4}{2}\right) = (2, 2)$

b) $A(-2, 0) \rightarrow \overline{AM} = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$B(6, 4) \rightarrow \overline{MB} = \sqrt{(6-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

27 **Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?**

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \\ \overline{AC} = \sqrt{(-1-7)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} \\ \overline{BC} = \sqrt{(7-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{array}\right\} \overline{AB} = \overline{BC}$$

28 **Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 6)$ es rectángulo.**

$\overline{AB} = \sqrt{(-2-3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$\overline{AC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

$\overline{BC} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$\sqrt{58}^2 = \sqrt{29}^2 + \sqrt{29}^2$

29 **Escribe la ecuación de la circunferencia de centro C y radio r:**

a) $C(4, -3)$, $r = 3$ **b) $C(0, 5)$, $r = 6$**

c) $C(6, 0)$, $r = 2$ **d) $C(0, 0)$, $r = 5$**

a) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 9$ b) $x^2 + (y-5)^2 = 36$

c) $(x-6)^2 + y^2 = 4$ d) $x^2 + y^2 = 25$

30 **Di cuál es el centro y el radio de las circunferencias siguientes:**

a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ **b) $(x+1)^2 + y^2 = 81$** **c) $x^2 + y^2 = 10$**

a) $C(2, -3)$; $r = 4$ b) $C(-1, 0)$; $r = 9$ c) $C(0, 0)$; $r = \sqrt{10}$

31 ■□□ **Halla la ecuación de las circunferencias siguientes:**

a) Centro $C(0, 0)$ y pasa por $(-3, 4)$.

b) Centro $C(1, 2)$ y pasa por $(5, 4)$.

a) radio: $\sqrt{(0+3)^2+(0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$x^2 + y^2 = 25$

b) $r = \sqrt{(1-5)^2+(2-4)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

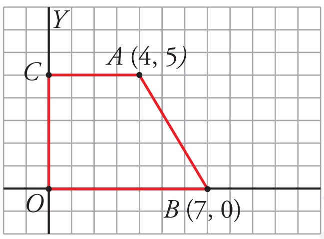
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$

PIENSA Y RESUELVE

32 ■□□ **Los puntos $A(4, 5)$ y $B(7, 0)$ son vértices de un trapecio rectángulo que tiene dos lados sobre los ejes de coordenadas y otro lado paralelo al eje X. Dibuja el trapecio y halla:**

a) Las ecuaciones de sus lados. **b) Su perímetro.** **c) Su área.**

a)



OC: $x = 0$

OB: $y = 0$

AC: $y = 5$

AB: $\dfrac{y-0}{5-0} = \dfrac{x-7}{4-7} \rightarrow -3y = 5x - 35 \rightarrow 5x + 3y - 35 = 0$

b) $\overline{AC} = 4$; $\overline{OC} = 5$; $\overline{OB} = 7$; $\overline{AB} = \sqrt{(7-4)^2+(0-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$P = 4 + 5 + 7 + \sqrt{34} = 16\sqrt{34}$ u

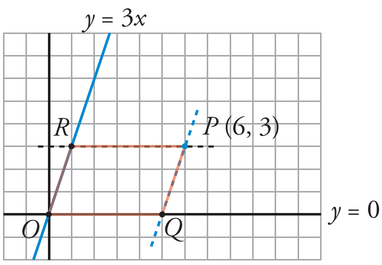
c) $A = \dfrac{7+4}{2} \cdot 5 = \dfrac{11}{2} \cdot 5 = \dfrac{55}{2}$ u^2

33 ■□□ **Dibuja un paralelogramo que tenga dos de sus lados sobre las rectas $y = 3x$ e $y = 0$ y un vértice en el punto $P(6, 3)$.**

a) Halla las ecuaciones de los otros dos lados.

b) Di cuáles son las coordenadas de los otros vértices.

a)



OR: $y = 3x$

OQ: $y = 0$

PR: $y = 3$

PQ: $y = 3 + 3(x-6) \rightarrow$

$\rightarrow y = 3 + 3x - 18 \rightarrow 3x - y - 15 = 0$

b) $O(0, 0)$, $Q(5, 0)$, $R(1, 3)$, $P(6, 3)$

34 □□□ **Determina los puntos que dividen al segmento de extremos $A(-5, -2)$, $B(7, 2)$ en cuatro partes iguales.**

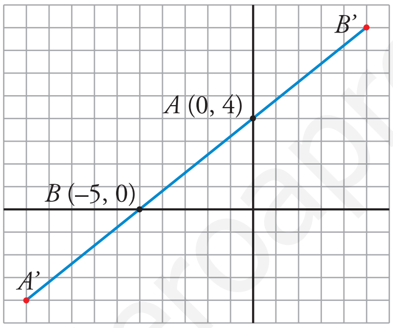
Punto medio de AB, $M\left(\frac{-5+7}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (1, 0)$

Punto medio de AM, $P\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = (-2, -1)$

Punto medio de BM, $Q\left(\frac{7+1}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (4, 1)$

Los puntos buscados son $M(1, 0)$, $P(-2, -1)$ y $Q(4, 1)$.

35 □□□ **Dados los puntos $A(0, 4)$ y $B(-5, 0)$, halla el punto simétrico de B respecto de A y el simétrico de A respecto de B.**



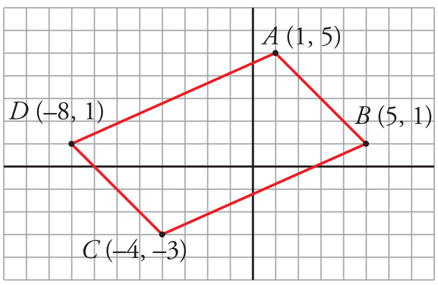
Simétrico de A respecto de B:

$$A'\left(\frac{0+x}{2}, \frac{4+y}{2}\right) = (-5, 0) \left\langle \begin{array}{l} \frac{x}{2} = -5 \rightarrow x = -10 \\ 4 + y = 0 \rightarrow y = -4 \end{array} \right\} A'(-10, -4)$$

Simétrico de B respecto de A:

$$B'\left(\frac{-5+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right) = (0, 4) \left\langle \begin{array}{l} -5 + x = 0 \rightarrow x = 5 \\ y = 8 \end{array} \right\} B'(5, 8)$$

36 □□□ **Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ y $D(-8, 1)$ es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.**



- Punto medio de AC:

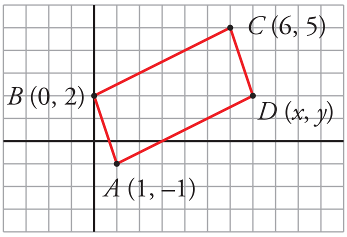
$$M_{AC} = \left(\frac{1-4}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

- Punto medio de BD:

$$M_{BD} = \left(\frac{5-8}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

Los puntos medios de las diagonales coinciden.

37 ■■□ **Halla las coordenadas del punto D, de modo que $ABCD$ sea un paralelogramo, siendo $A(1, -1)$, $B(0, 2)$ y $C(6, 5)$.**



- Punto medio de AC:

$$M_{AC} = \left(\frac{6+1}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$$

- Punto medio de BD:

$$M_{BD} = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

Los puntos medios de las diagonales deben coincidir.

$$\frac{x}{2} = \frac{7}{2} \rightarrow x = 7$$

$$\frac{y+2}{2} = 2 \rightarrow y = 4 - 2 = 2$$

El punto D tiene coordenadas $D(7, 2)$.

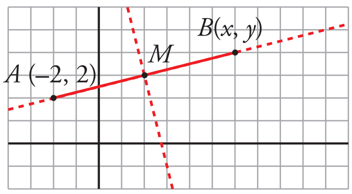
38 ■■□ **El segmento AB está sobre la recta $x - 4y + 10 = 0$. Su mediatriz es la recta $4x + y - 11 = 0$. ¿Cuáles serán las coordenadas de B si las de A son $(-2, 2)$? Resuélvelo de forma gráfica y analítica.**

- Calculamos el punto de intersección de las rectas dadas:

$$\left.\begin{array}{r} x - 4y = -10 \\ 4x + y = 11 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} x - 4y = -10 \\ 16x + 4y = 44 \\ \hline 17x \quad = 34 \end{array} \rightarrow x = 2$$

$y = 11 - 4 \cdot 2 = 3$

El punto es $M(2, 3)$.



- El punto medio de AB es $(2, 3)$:

$$\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+2}{2}\right) = (2, 3) \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 4 \rightarrow x = 6 \\ y + 2 = 6 \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

El punto buscado es $B(6, 4)$.

PÁGINA 182

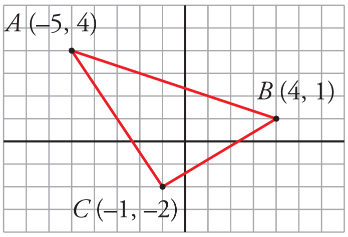
39 ■■□ **Resuelto en el libro de texto.**

40 **Dado el triángulo de vértices $A(-5, 4)$, $B(4, 1)$, $C(-1, -2)$, halla:**

a) Las ecuaciones de los tres lados.

b) El punto medio del lado AC.

c) La ecuación de la mediana del vértice B.

a) 

• Lado AB:

$$m = \frac{4-1}{-5-4} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$y = 1 - \frac{1}{3}(x-4) \to 3y = 3 - x + 4 \to$$

$$\to x + 3y - 7 = 0$$

• Lado AC:

$$m = \frac{4+2}{-5+1} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

$$y = -2 - \frac{3}{2}(x+1) \to 2y = -4 - 3x - 3 \to 3x + 2y + 7 = 0$$

• Lado BC:

$$m = \frac{1+2}{4+1} = \frac{3}{5}$$

$$y = 1 + \frac{3}{5}(x-4) \to 5y = 5 + 3x - 12 \to 3x - 5y - 7 = 0$$

b) $M_{AC} = \left(\frac{-5-1}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (-3, 1)$

c) La mediana que corresponde a B pasa, también, por el punto medio de AC, M_{AC}.

$$m = \frac{1-1}{4+3} = 0$$

$$y = 1 + 0(x+3) \to y = 1$$

41 **En el triángulo de vértices $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$, y $C(3, 0)$, halla:**

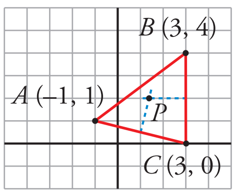
a) La ecuación de la mediatriz de BC.

b) La ecuación de la mediatriz de AC.

c) El punto de intersección de las mediatrices (el circuncentro del triángulo).

a) La mediatriz de BC es la perpendicular a BC por su punto medio, M_{BC}.

$$M_{BC} = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (3, 2)$$



La recta que contiene a BC es $x = 3$. Su perpendicular por $(3, 2)$ es $y = 2$, mediatriz de BC.

b) $M_{AC} = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Pendiente de la recta que contiene a AC, $m = \frac{1-0}{-1-3} = -\frac{1}{4}$.

Pendiente de la perpendicular a AC, $m' = 4$.

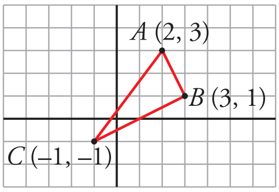
Mediatriz de AC: $y = \frac{1}{2} + 4(x-1) \rightarrow 2y = 1 + 8x - 8 \rightarrow 2y - 8x + 7 = 0$

c) Circuncentro, P:

$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ 2y - 8x + 7 = 0 \end{array}\right\} \; 4 - 8x + 7 = 0 \rightarrow 8x = 11 \rightarrow x = 11/8$

Las coordenadas de P son $\left(\frac{11}{8}, 2\right)$.

42 **Comprueba que el triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(3, 1)$ y $C(-1, -1)$ es rectángulo y halla su perímetro y su área.**



$\overline{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\overline{AC} = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$\overline{BC} = \sqrt{(3+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

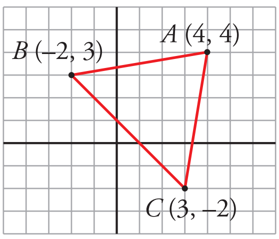
Comprobamos que el triángulo es rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras:

$5^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{20})^2 \rightarrow 25 = 5 + 20$

Perímetro $= \sqrt{5} + 5 + \sqrt{20} = 5 + 3\sqrt{5}$ u

Área $= \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5$ u^2

43 **Comprueba que el triángulo de vértices $A(4, 4)$, $B(-2, 3)$ y $C(3, -2)$ es isósceles y calcula su área.**



$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \sqrt{(4+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37} \\ \overline{AC} = \sqrt{(4-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37} \end{array}\right\} \; \overline{AB} = \overline{AC}$

$\overline{BC} = \sqrt{(3+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Calculamos la altura sobre el lado BC:

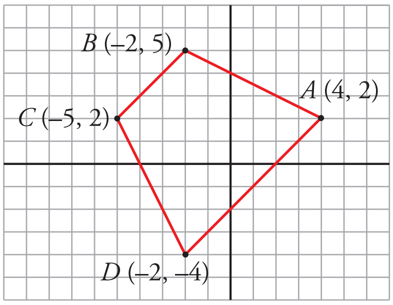
$$M_{BC} = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

La altura es la distancia entre A y el punto medio de BC:

$$h = \sqrt{\left(4 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} \cdot 2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{Área} = \frac{5\sqrt{2} \cdot (7/2)\sqrt{2}}{2} = \frac{35}{2}\ u^2$$

44 **Prueba que el cuadrilátero de vértices $A(4, 2)$, $B(-2, 5)$, $C(-5, 2)$ y $D(-2, -4)$ es un trapecio isósceles y calcula su perímetro.**



- Probamos que BC es paralelo a AD hallando las pendientes de las rectas que los contienen:

$$m_{BC} = \frac{5-2}{-2+5} = \frac{3}{3} = 1$$

$$m_{AD} = \frac{2+4}{4+2} = 1$$

- Probamos que $\overline{AB} = \overline{CD}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(-5+2)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Por tanto, el trapecio $ABCD$ es isósceles.

- Perímetro:

$$\overline{BC} = \sqrt{(-2+5)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(4+2)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$$

$$P = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 6\sqrt{5} + 9\sqrt{2}\ u$$

45 **Halla en cada caso la ecuación de la circunferencia concéntrica con la dada y cuyo radio mida la mitad:**

a) $x^2 + (y-5)^2 = 36$ **b) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 12$**

a) Centro, (0, 5); radio, 6.

La circunferencia con centro en (0, 5) y radio 3 es: $x^2 + (y-5)^2 = 9$

b) Centro (4, –3); radio, $\sqrt{12}$.

La circunferencia de centro (4, –3) y radio $\dfrac{\sqrt{12}}{2}$ es:

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = \left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^2 \rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 3$$

46 **Halla la ecuación de la circunferencia de diámetro PQ, siendo $P(-5, 2)$ y $Q(3, -6)$.**

El centro de la circunferencia es el punto medio de PQ, $M = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{2-6}{2}\right) = (-1, -2)$.

El radio es la mitad de $\overline{PQ}$:

$\overline{PQ} = \sqrt{(3+5)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2}$

Radio $= 4\sqrt{2}$

Ecuación: $(x+1)^2 + (y+2)^2 = (4\sqrt{2})^2$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 32$

47 **Determina los puntos de corte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 50$ con la bisectriz del primer cuadrante.**

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 50 \\ x = y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 + x^2 = 50 \to 2x^2 = 50 \to x^2 = 25 \\ x = 5 \to y = 5 \\ x = -5 \to y = -5 \end{array}$$

Los puntos de corte son $P(5, 5)$ y $Q(-5, -5)$.

48 **Calcula k para que el punto $(-3, k)$ pertenezca a la circunferencia $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$.**

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$

$(-3-1)^2 + (k+2)^2 = 25 \to 16 + k^2 + 4k + 4 - 25 = 0 \to k^2 + 4k - 5 = 0$

$$k = \frac{-4 \pm 6}{2} \begin{cases} k = -5 \\ k = 1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones, $k = -5$, $k = 1$.

49 **Dadas las rectas:**

$$r: 3x + by - 12 = 0 \qquad s: ax - y + 6 = 0$$

calcula el valor de a y b sabiendo que r y s son perpendiculares y que r pasa por el punto $(9, -15/2)$.

- Como r: $3x + by - 12 = 0$ pasa por $\left(9, -\frac{15}{2}\right)$:

$$3 \cdot 9 + b \cdot \left(-\frac{15}{2}\right) - 12 = 0 \to 27 - \frac{15b}{2} - 12 = 0 \to$$

$$\to 15 = \frac{15b}{2} \to \frac{2 \cdot 15}{15} = b \to b = 2$$

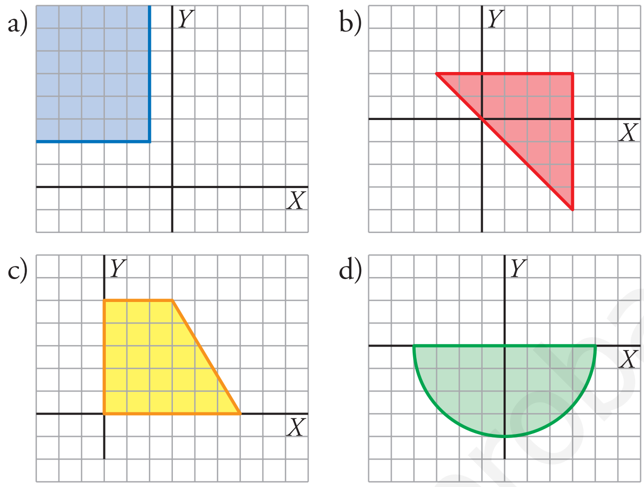
- r y s son perpendiculares:

$$m_r = -\frac{3}{2} \to m_s = \frac{2}{3} = a \to a = \frac{2}{3}$$

50 **Resuelto en el libro de texto.**

PÁGINA 183

51 **Describe mediante inecuaciones o sistemas de inecuaciones, los siguientes recintos:**



a) $\left.\begin{matrix} x \le -1 \\ y \ge 2 \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} x + 1 \le 0 \\ y - 2 \ge 0 \end{cases}$

b) $\left.\begin{matrix} y \le 2 \\ x \le 4 \\ x \ge -y \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} y - 2 \le 0 \\ x - 4 \le 0 \\ x + y \ge 0 \end{cases}$

c) El lado oblicuo del trapecio pasa por (6, 0) y (3, 5). Su ecuación es:

$$\frac{y-5}{0-5} = \frac{x-3}{6-3} \to 3y - 15 = -5x + 15 \to 5x + 3y = 30$$

Probamos con el punto (1, 1) que está dentro del recinto:

$5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8 < 30$

Las ecuaciones del recinto son:

$$\begin{cases} 5x + 3y \le 30 \\ x \ge 0 \\ 0 \le y \le 5 \end{cases}$$

d) • El arco corresponde a una circunferencia de centro (0, 0) y radio 4. Su ecuación es $x^2 + y^2 = 16$.

Para el punto (0, –1), que está dentro de la región, $x^2 + y^2 \le 16$.

• El segmento recto corresponde a la recta de ecuación $y = 0$.

Para el punto (0, –1), que está dentro de la región, $y \le 0$.

Expresiones que representan la región: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16 \\ y \le 0 \end{cases}$

52 □□□ **Representa gráficamente los siguientes recintos:**

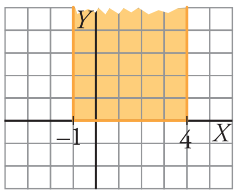
a) $\begin{cases} -1 \le x \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y \le 0 \\ x \le 3 \end{cases}$

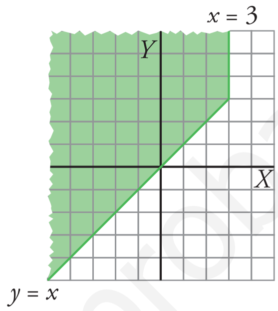
c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ y \ge 0 \\ x \le 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \le 0 \\ -5 \le y \le 0 \\ 5x - 2y \ge -10 \end{cases}$

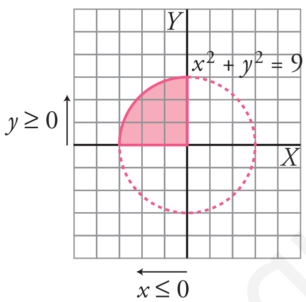
a)



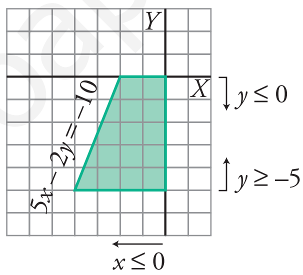
b)



c)



d)



REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

53 □□□ **Si dos rectas r_1 y r_2 son perpendiculares, ¿cuál de estas condiciones cumplirán sus pendientes?**

a) $m_1 = \dfrac{1}{m_2}$ **b)** $m_1 = -m_2$ **c)** $m_1 \cdot m_2 = -1$ **d)** $m_1 + m_2 = -1$

La c), $m_1 \cdot m_2 = -1$, que equivale a $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$.

54 □□□ **Sabes que la expresión $ax + by + c = 0$ es la ecuación de una recta. Di cómo es la recta en los siguientes casos:**

a) $a = 0$ **b)** $b = 0$ **c)** $c = 0$ **d)** $a = 0,\ c = 0$

a) $by + c = 0$ es paralela al eje OX.

b) $ax + c = 0$ es paralela al eje OY.

c) $ax + by = 0$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas, (0, 0).

d) $by = 0 \rightarrow y = 0$. Es el eje OX.

55 ■□□ **¿Cuál de las rectas**

$$r: y = 3x + 1 \qquad s: y = -\frac{1}{3}x \qquad t: y + 3x = 0$$

es perpendicular a $y = \frac{1}{3}x + 1$**?**

La pendiente de $y = \frac{1}{3}x + 1$ es $m = \frac{1}{3}$.

La pendiente de una recta perpendicular a ella debe ser –3.

$t: y + 3x = 0$ es perpendicular a la recta $y = \frac{1}{3}x + 1$.

56 ■■□ **¿Cuál de estas dos ecuaciones**

$$x^2 + (y + 1)^2 = \frac{4}{9} \qquad x^2 + y^2 + 25 = 0$$

representa una circunferencia? Di su centro y su radio.

$x^2 + (y + 1)^2 = \frac{4}{9}$ representa una circunferencia.

Su centro es el punto (0, –1), y su radio, $\frac{2}{3}$.

57 ■□□ **¿Cuál de estas expresiones nos da la distancia entre** $P(x_1, y_1)$ **y** $Q(x_2, y_2)$**?**

a) $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$

b) $\sqrt{(x_2 + x_1)^2 - (y_2 + y_1)^2}$

c) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

d) $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$

La c), $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

58 ■■■ **Si las rectas** $ax + by + c = 0$ **y** $a'x + b'y + c' = 0$ **son paralelas, ¿cuál de estas dos condiciones cumplen?**

a) $aa' + bb' = 0$

b) $ab' - a'b = 0$

¿Y si son perpendiculares?

Las pendientes de las rectas son, respectivamente:

$$m = -\frac{a}{b}, \quad m' = -\frac{a'}{b'}$$

Si las rectas son paralelas, sus pendientes son iguales:

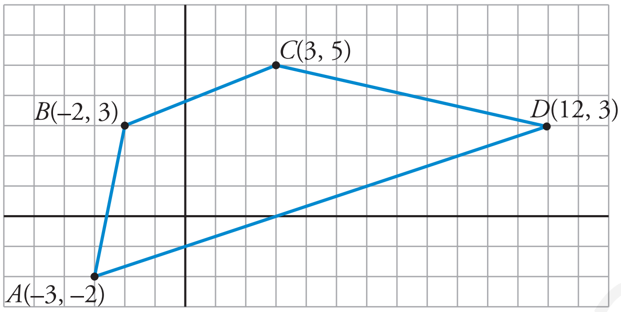
$$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \to ab' = a'b \to ab' - a'b = 0$$

Si las rectas son perpendiculares, $m = -\frac{1}{m'}$:

$$-\frac{a}{b} = \frac{b'}{a'} \to -aa' = bb' \to aa' + bb' = 0$$

PROFUNDIZA

59 **La figura adjunta parece un trapecio. Comprueba si realmente lo es. Si no lo es, rectifica las coordenadas del punto D para que sí lo sea.**



Veamos si BC es paralelo a AD, calculando sus pendientes:

$$\left.\begin{array}{l} m_{BC} = \dfrac{5-3}{3+2} = \dfrac{2}{5} \\ m_{AD} = \dfrac{3+2}{12+3} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} m_{BC} \neq m_{AD} \rightarrow ABCD \text{ no es un trapecio.}$$

Rectificamos el punto D para que las pendientes m_{BC} y m_{AD} sean iguales. Sea $D(a, b)$:

$$m_{AD} = \frac{b+2}{a+3} = m_{BC} = \frac{2}{5}$$

Si, por ejemplo, mantenemos la primera coordenada de $D(12, b)$:

$$\frac{b+2}{12+3} = \frac{2}{5} \rightarrow b + 2 = 6 \rightarrow b = 4$$

Podemos tomar $D(12, 4)$ (también es válido $D(7, 2)$).

60 **Halla un punto de la bisectriz del primer cuadrante que diste 5 unidades del punto (8, 7).**

Un punto de la bisectriz del primer cuadrante es de la forma (a, a), con $a \geq 0$.

$$dist = \sqrt{(8-a)^2 + (7-a)^2} = 5 \rightarrow a^2 + 64 - 16a + a^2 + 49 - 14a = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2a^2 - 30a + 88 = 0 \rightarrow a^2 - 15a + 44 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{15 \pm \sqrt{225-176}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{15 \pm 7}{2} = \begin{cases} 11 \\ 4 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $P(4, 4)$, $Q(11, 11)$.

61 **Las rectas $r: x - y + 1 = 0$; $s: x + y + 9 = 0$; $t: 4x - y - 14 = 0$ forman un triángulo ABC.**

a) Calcula las coordenadas de A, B y C.

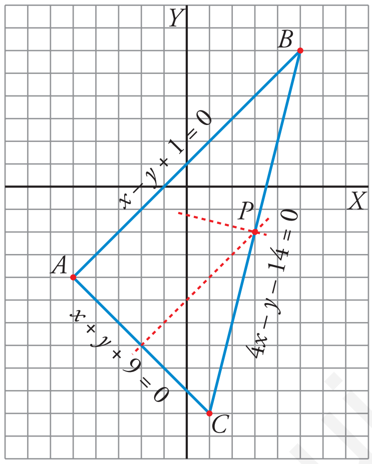
b) Halla el circuncentro del triángulo.

a) Los vértices del triángulo son los puntos donde se intersecan las rectas.

$$r \cap s \left\{ \begin{array}{l} x - y + \ \ 1 = 0 \\ x + y + \ \ 9 = 0 \\ \hline 2x \qquad + 10 = 0 \ \longrightarrow \ x = -5, \ y = -4 \end{array} \right\} \ r \cap s\text{: } A(-5, -4)$$

$$r \cap t \left\{ \begin{array}{l} x - y + \ \ 1 = 0 \\ 4x - y - 14 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -x + y - 1 = 0 \\ 4x - y - 14 = 0 \\ \hline 3x \qquad - 15 = 0 \ \longrightarrow \ x = 5, \ y = 6 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}} \right\} \ r \cap t\text{: } B(5, 6)$$

$$s \cap t \left\{ \begin{array}{l} x + y + 9 = 0 \\ 4x - y - 14 = 0 \\ \hline 5x \qquad - \ \ 5 = 0 \ \longrightarrow \ x = 1, \ y = -10 \end{array} \right\} \ s \cap t\text{: } C(1, -10)$$

b) 

El circuncentro es el punto en el que se intersecan las mediatrices.

La mediatriz es la perpendicular por el punto medio.

- Mediatriz de AC:

  Pendiente de la recta que contiene a AC, $m_{AC} = \dfrac{-10 + 4}{1 + 5} = -1$.

  Pendiente de la mediatriz de AC, $m'_1 = 1$.

  Punto medio de AC, $M_{AC} = \left(\dfrac{-5 + 1}{2}, \dfrac{-4 - 10}{2} \right) = (-2, -7)$.

  Ecuación de la mediatriz de AC:

  $y = -7 + (x + 2) \ \longrightarrow \ y = x - 5$

- Mediatriz de BC:

  Pendiente de la recta que contiene a BC, $m_{BC} = \dfrac{-10 - 6}{1 - 5} = 4$.

  Pendiente de la mediatriz de BC, $m'_2 = -\dfrac{1}{4}$.

  Punto medio de BC, $M_{BC} = \left(\dfrac{5 + 1}{2}, \dfrac{6 - 10}{2} \right) = (3, -2)$.

  Ecuación de la mediatriz de BC:

  $y = -2 - \dfrac{1}{4}(x - 3) \ \longrightarrow \ 4y = -8 - x + 3 \ \longrightarrow \ 4y + x + 5 = 0$

• Calculamos el circuncentro:

$$\left.\begin{array}{l} y = x - 5 \\ 4y + x + 5 = 0 \end{array}\right\} \; 4x - 20 + x + 5 = 0 \;\to\; 5x = 15 \;\to\; x = 3$$

$x = 3 \;\to\; y = -2$

El circuncentro es el punto $P(3, -2)$.

62 **Dada la recta $r: x - 2y + 1 = 0$ y el punto $A(-1, 5)$, calcula:**

a) La ecuación de la recta s perpendicular a r y que pasa por A.

b) El punto de intersección de r y s, M.

c) El simétrico de A respecto de M.

a) $m_r = \dfrac{1}{2} \;\to\; m_s = -2$

$s: \; y = 5 - 2(x + 1) \;\to\; y = 3 - 2x$

b) $$\left.\begin{array}{l} x - 2y + 1 = 0 \\ y = 3 - 2x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x - 2(3 - 2x) + 1 = 0 \;\to \\ \to\; x - 6 + 4x + 1 = 0 \;\to\; 5x = 5 \;\to\; x = 1 \end{array}$$

$x = 1 \;\to\; y = 3 - 2 = 1$

Las coordenadas de M son $M(1, 1)$.

c) M es el punto medio de A y su simétrico $A'(x, y)$:

$$\left(\frac{-1 + x}{2}, \frac{5 + y}{2}\right) = (1, 1) \left\langle \begin{array}{l} -1 + x = 2 \;\to\; x = 3 \\ 5 + y = 2 \;\to\; y = -3 \end{array}\right.$$

Las coordenadas de A' son $A'(3, -3)$.

63 **La recta $y = 2x + 1$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto $A(-6, 4)$. Halla las coordenadas del otro extremo.**

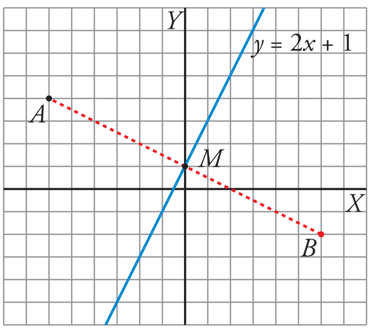
Sea B el otro extremo del segmento.

La pendiente de la mediatriz es $m = 2$.

La recta que contiene a AB tiene pendiente $-\dfrac{1}{2}$ y pasa por $A(-6, 4)$:

$r: \; y = 4 - \dfrac{1}{2}(x + 6) \;\to\; 2y = 8 - x - 6 \;\to\; x + 2y - 2 = 0$

El punto de corte de la mediatriz con esta recta r será el punto medio de AB. Lo calculamos:



$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ y = 2x + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 4x + 2 - 2 = 0 \;\to \\ \to\; 5x = 0 \;\to\; x = 0 \end{array}$$

$x = 0 \;\to\; y = 1; \; M(0, 1)$

$A(-6, 4), \; B(a, b), \; M(0, 1)$

$$\left(\frac{-6 + a}{2}, \frac{4 + b}{2}\right) = (0, 1) \left\langle \begin{array}{l} -6 + a = 0 \;\to\; a = 6 \\ 4 + b = 2 \;\to\; b = -2 \end{array}\right.$$

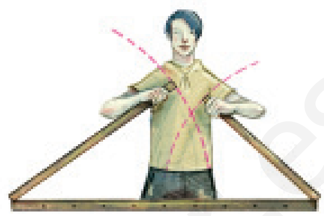
El otro extremo del segmento es $B(6, -2)$.

PÁGINA 184

INVESTIGA Y GENERALIZA

Tres listones para un triángulo

Supón que queremos construir un triángulo con tres listones, uno de 6 dm de longitud y los otros dos de longitudes x e y.



Contemplamos todas las posibilidades en cuanto a las longitudes que puedan tomar x e y, y representamos cada una mediante un punto $P(x, y)$ del plano.

Si con x, y, 6 se puede construir un triángulo, señalamos en un plano el punto $P(x, y)$ en verde. Si no es así, lo marcamos en rojo.

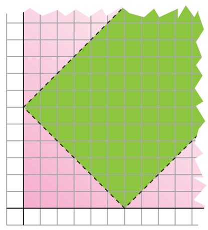
Siguiendo el mismo criterio, representa en el plano los siguientes puntos, en color rojo o verde, según corresponda:

$$E(4, 1),\ F(1, 3),\ G(7, 7)\ H(2, 6),\ I(3, 8),\ J(2, 9),\ K(10, 1), \dots$$

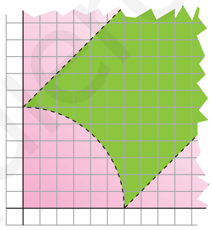
Prueba con otros valores y ve llenando el plano con puntos de uno u otro color.

Si continuaras representando puntos, ¿cuál de los siguientes sería el resultado final?

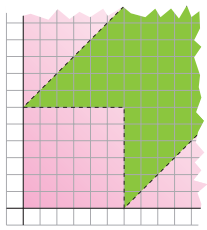
Ⓐ



Ⓑ



Ⓒ



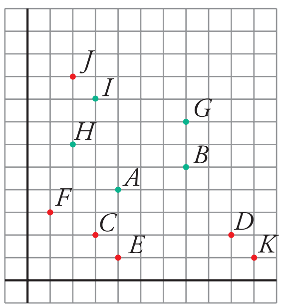
AYUDA

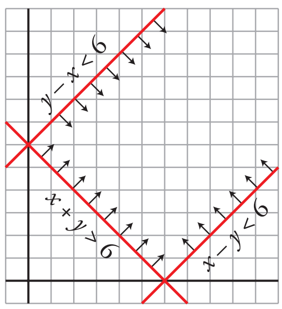
En un triángulo:

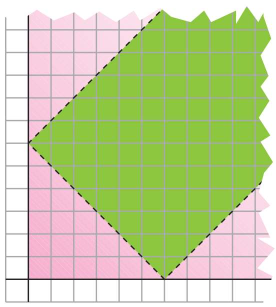
— La suma de sus lados es *mayor* que el tercer lado.

— La diferencia de dos lados es *menor* que el tercer lado.

$$\left.\begin{array}{l} x + y > 6 \\ x - y < 6 \\ y - x < 6 \end{array}\right\} \text{ Representa estas inecuaciones.}$$







La solución está en el gráfico A.

8 Soluciones a desarrolla tus competencias

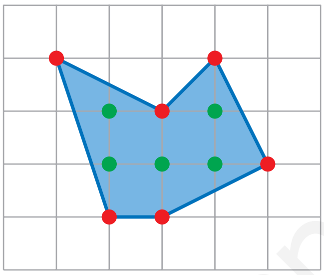
PÁGINA 185

LEE, COMPRENDE Y RESUELVE

¿Sabías que…?

Hay una curiosa forma de calcular el área de un polígono cuyos vértices coinciden con los de una cuadrícula.

- **Cuentas el número de puntos que hay dentro del polígono.** $\rightarrow x$
- **Cuentas el número de puntos que hay sobre el borde.** $\rightarrow y$



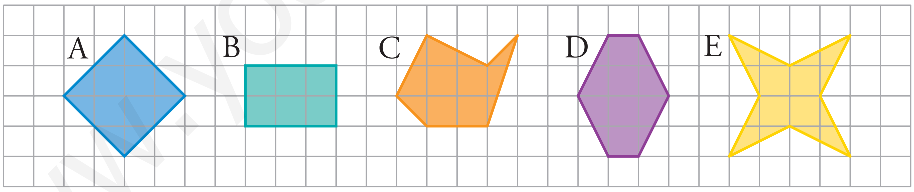
$x = 5 \qquad y = 6$

$$A = 5 + \frac{6}{2} - 1 = 7$$

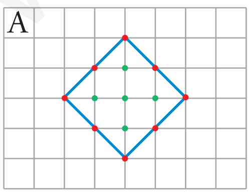
Entonces, el área (A), medida en unidades de la cuadrícula, es:

$$A = x + \frac{y}{2} - 1 \quad \text{(Teorema de Pick)}$$

Comprueba la validez de la fórmula aplicándola a estos polígonos:



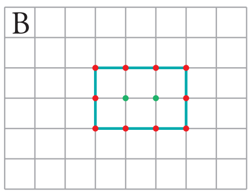
Dibuja el mayor número de polígonos que sea posible, con diferente par (x, y) y con el área igual o menor de 2. ¿Cuántos hay?



$x = 5$

$y = 8$

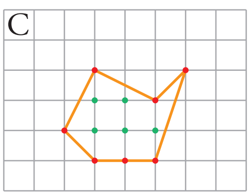
$A = 5 + \frac{8}{2} - 1 = 8$



$x = 2$

$y = 10$

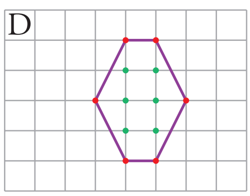
$A = 2 + \frac{10}{2} - 1 = 6$



$x = 5$

$y = 7$

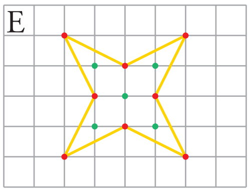
$A = 5 + \frac{7}{2} - 1 = 7{,}5$



$x = 6$

$y = 6$

$A = 6 + \frac{6}{2} - 1 = 8$

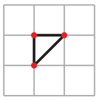


$x = 5$

$y = 8$

$A = 5 + \frac{8}{2} - 1 = 8$

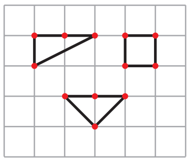
Hay seis tipos de polígonos con diferente par (x, y). A continuación se incluyen algunos ejemplos de cada tipo:



$x = 0$

$y = 3$

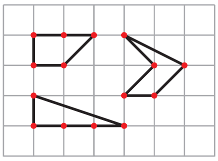
$A = 0{,}5$



$x = 0$

$y = 4$

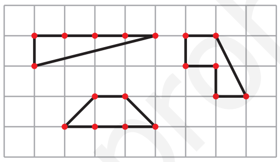
$A = 1$



$x = 0$

$y = 5$

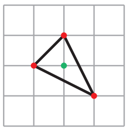
$A = 1{,}5$



$x = 0$

$y = 6$

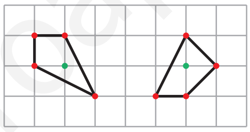
$A = 2$



$x = 1$

$y = 3$

$A = 1{,}5$



$x = 1$

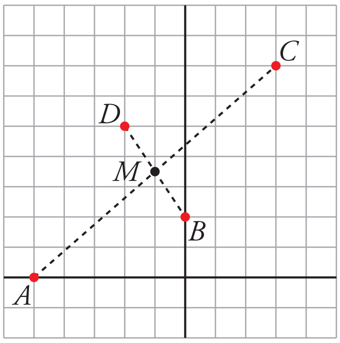
$y = 4$

$A = 2$

PÁGINA 185

Verifícalo resolviendo ejercicios

1 **Representa los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 7)$ y $D(-2, 5)$ y comprueba analíticamente que el punto medio de AC coincide con el punto medio de BD.**



$$M_{AC} = \left(\frac{3-5}{2}, \frac{7-0}{2}\right) = (-1;\ 3{,}5)$$

$$M_{BD} = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{5+2}{2}\right) = (-1;\ 3{,}5)$$

Punto medio de AC = punto medio de BD = $(-1;\ 3{,}5)$

2 **Halla el simétrico de $P(-7, -15)$ respecto de $M(2, 0)$.**

Sea $Q(a, b)$ el simétrico de P respecto de M. M es el punto medio de PQ.

$$M_{PQ} = \left(\frac{-7+a}{2}, \frac{-15+b}{2}\right) = (2, 0) \begin{cases} -7 + a = 4 \ \to \ a = 11 \\ -15 + b = 0 \ \to \ b = 15 \end{cases}$$

3 **Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $(0, -3)$ y radio 5.**

$x^2 + (y-3)^2 = 5^2 \ \to \ x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$

4 **Obtén la ecuación de las rectas r y s tales que:**

r pasa por $(-3, 2)$ y es perpendicular a $8x - 3y + 6 = 0$.

s para por $(9, -5/2)$ y es paralela a $2x + y - 7 = 0$.

- Ecuación de r:

  La pendiente de $8x - 3y + 6 = 0$ es $m = \frac{8}{3}$.

  La pendiente de r es $m' = -\frac{3}{8}$.

  r: $y = 2 - \frac{3}{8}(x + 3) \ \to \ 8y = 16 - 3x - 9 \ \to \ 3x + 8y - 7 = 0$

- Ecuación de s:

  La pendiente de s es $m = -2$.

  s: $y = -\frac{5}{2} - 2(x - 9) \ \to \ 2y = -5 - 4x + 36 \ \to \ 4x + 2y - 31 = 0$

5 **Halla el punto de intersección de las siguientes rectas:**

$$\mathbf{3x + 8y - 7 = 0 \quad y \quad 4x + 2y - 31 = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 8y - 7 = 0 \\ 4x + 2y - 31 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{r} 3x + 8y - 7 = 0 \\ -16x - 8y + 124 = 0 \\ \hline -13x \qquad + 117 = 0 \end{array} \to x = 9$$

$$3 \cdot 9 + 8y - 7 = 0 \to 8y = -20 \to y = -\frac{5}{2}$$

El punto de intersección es $P\left(9, -\frac{5}{2}\right)$.

6 **En el triángulo de vértices $A(-2, 2)$, $B(0, 7)$ y $C(6, 4)$, halla la ecuación de la mediana que parte de B.**

La mediana que parte de B pasa por B y el punto medio del segmento AC.

$$M_{AC} = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (2, 3)$$

Ecuación de la mediana:

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-7}{3-7} \to -4x = 2y - 14 \to y + 2x - 7 = 0$$