

TRIGONOMETRIA

Relación fundamental de la trigonometría

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$$

Ángulo doble:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x$$

$$\operatorname{cos} 2x = \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Ángulo mitad

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} x}{2}}$$

$$\operatorname{cos} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} x}{1 + \operatorname{cos} x}}$$

Suma de ángulos:

$$\operatorname{cos}(x + y) = \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Resta de ángulos:

$$\operatorname{cos}(x - y) = \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} y - \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Transformación de sumas en productos:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x + y}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left(\frac{x - y}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{cos} \left(\frac{x + y}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{x - y}{2} \right)$$

$$\operatorname{cos} x + \operatorname{cos} y = 2 \operatorname{cos} \left(\frac{x + y}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left(\frac{x - y}{2} \right)$$

$$\operatorname{cos} x - \operatorname{cos} y = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{x + y}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{x - y}{2} \right)$$

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

Teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Razones trigonométricas de un ángulo

1. ¿Existe un ángulo "x" tal que $\operatorname{sen} x = 1/2$ y $\operatorname{cos} x = 1/4$? ¿Puede valer el seno de un ángulo $1/8$?

Sol: no, si.

2. Calcula las restantes razones trigonométricas del ángulo α : a) $\operatorname{sen} \alpha = 1/4$ y $\tilde{\alpha}$ al primer cuadrante;

b) $\operatorname{sen} \alpha = -1/3$ y $\tilde{\alpha}$ al tercer cuadrante. Sol: a) $\operatorname{cos} \alpha = \sqrt{15}/4$, $\operatorname{tg} \alpha = 1/\sqrt{15}$; b) $\operatorname{cos} \alpha = -2\sqrt{2}/3$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}/4$

3. Dibuja un ángulo cuyo seno sea el doble que su coseno.

4. Calcula en cada caso el valor de las demás razones trigonométricas considerando que x está en el primer cuadrante: a) $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}/2$; b) $\operatorname{cos} x = 0,8$; c) $\operatorname{tg} x = 2$.

Sol: a) $\operatorname{cos} x = 1/2$; $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; b) $\operatorname{sen} x = 0,6$; $\operatorname{tg} x = 3/4$; c) $\operatorname{sen} x = 2/\sqrt{5}$; $\operatorname{cos} x = 1/\sqrt{5}$.

5. Calcula el seno, el coseno, la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante del ángulo de 1.110° .

Sol: $1.110^\circ = 30^\circ$; $\operatorname{sen} 1.110 = 1/2$, $\operatorname{cos} 1.110 = 3/2$, $\operatorname{tg} 1.110 = 1/3$, $\operatorname{cotg} 1.110 = \sqrt{3}$, $\operatorname{sec} 1.110 = 2/\sqrt{3}$, $\operatorname{cosec} 1.110 = 2$.

6. Dibuja ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima el valor de sus razones

trigonométricas. a) $\operatorname{sen} \alpha = -1/2$; $\operatorname{tg} \alpha > 0$; b) $\operatorname{tg} \beta = 1$; $\operatorname{cos} \beta < 0$. Sol: a) 210° ; $\operatorname{cos} \alpha = -3/2$, $\operatorname{tg} \alpha = 1/\sqrt{3}$; b) 225° ;

$\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{2}/2$, $\operatorname{cos} \alpha = -\sqrt{2}/2$

7. Calcula $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{sec} x$, $\operatorname{cosec} x$, y $\operatorname{cotg} x$, si $\operatorname{cos} x = 0,6$ y $\operatorname{tg} x < 0$.

Sol: $\operatorname{sen} x = -0,8$; $\operatorname{tg} x = -4/3$, $\operatorname{sec} x = 5/3$; $\operatorname{cosec} x = -5/4$; $\operatorname{cotg} x = -3/4$.

8. ¿Para qué ángulos es $\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{cos} \alpha$? Sol: 135° y 315°

9. Escribe en grados sexagesimales, centesimales y en radianes, el ángulo que forman las agujas del reloj cuando son: a) las 6:00; b) las 3:00; c) las 10:00.

Sol: a) 180° , $200'$, π rad; b) 90° , $100'$, $\pi/2$ rad; c) 60° , $200/3'$, $\pi/3$ rad

10. Expresa en grados sexagesimales: a) $\pi/4$ rad; b) $3\pi/4$ rad; $5\pi/4$ rad y $4\pi/3$ rad.

Sol: a) 45° ; b) 135° ; c) 225° ; d) 240° .

11. Completa la tabla:

Radianes	$\pi/3$			π		$3\pi/4$	$5\pi/4$		$\pi/2$	
Grados		30	45		225			330		270

Sol: $\pi/6, \pi/4, 5\pi/4, 7\pi/6, 3\pi/2, 60^\circ, 180^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 90^\circ$

12. Halla las razones trigonométricas de α : a) $\cos\alpha=3/5$ y α pertenece al cuarto cuadrante; b) $\cos\alpha=-1/3$ y α pertenece al segundo cuadrante; c) $\operatorname{tg}\alpha=-2/5$ y α pertenece al segundo cuadrante; d) $\sec\alpha=-3/2$ y α pertenece al tercer cuadrante.

Sol: a) $\operatorname{sen}\alpha=-4/5$; $\operatorname{tg}\alpha=-4/3$; b) $\operatorname{sen}\alpha=2\sqrt{2}/3$, $\operatorname{tg}\alpha=-2\sqrt{2}$; c) $\operatorname{sen}\alpha=2/\sqrt{29}$, $\cos\alpha=-5/\sqrt{29}$; d) $\operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{5}/3$, $\cos\alpha=-2/3$

13. Puede ser cierto: a) $\operatorname{sen}\alpha=1/5$ y $\cos\alpha=2/5$; b) $\operatorname{sen}x=1/3$ y $\operatorname{tg}x=1/9$. Sol: a) no; b) no

14. Si un ángulo está situado en el tercer cuadrante. ¿Qué signo tienen: la cotangente, la cosecante y la secante de ese ángulo?. Sol: $\operatorname{cotg}(+)$, $\operatorname{cosec}(-)$, $\operatorname{sec}(-)$

15. Si un ángulo está situado en el segundo o tercer cuadrante, ¿se puede asegurar que su tangente es negativa?. Sol: en el $2^\circ (-)$; en el $3^\circ (+)$.

16. Si $\operatorname{tg}\alpha=4$ y $\alpha \in [180, 270]$, calcula el valor de las restantes razones trigonométricas:

Sol: $\operatorname{sen}\alpha=-4/\sqrt{17}$; $\cos\alpha=-1/\sqrt{17}$.

17. Usando la calculadora resuelve: $\operatorname{sen}x=0,6018$; $\operatorname{cos}y=0,6428$; $\operatorname{tg}z=2,7475$; $\operatorname{cotg}\alpha=2,1445$.

Sol: $x=37^\circ$; $y=50^\circ$; $z=70^\circ$; $\alpha=25^\circ$.

18. Si el seno de α es 0,8 y el ángulo α no pertenece al primer cuadrante. Halla las demás razones trigonométricas. Sol: $\cos\alpha=-0,6$; $\operatorname{tg}\alpha=-4/3$

19. Si la tangente de α es $1/2$ y el ángulo α pertenece al tercer cuadrante. Halla las demás razones trigonométricas Sol: $\cos\alpha=-2/\sqrt{5}$; $\operatorname{sen}\alpha=-1/\sqrt{5}$

20. Si $\sec\alpha=-2$ y α no pertenece al tercer cuadrante calcular el resto de las razones trigonométricas.

Sol: $\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{3}/2$; $\cos\alpha=-1/2$; $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$

21. Si $\operatorname{tg}\alpha=3/2$ y no pertenece al primer cuadrante halla las demás razones trigonométricas.

Sol: $\operatorname{sen}\alpha=-3/\sqrt{13}$, $\cos\alpha=-2/\sqrt{13}$

22. Dibuja un ángulo agudo tal que su seno sea $3/5$.

Razones trigonométricas en función de ángulos conocidos.

23. Calcular en función de las razones trigonométricas de ángulos conocidos las razones de: $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ$.

Sol: $\operatorname{sen}120^\circ=\operatorname{sen}60^\circ$, $\cos120^\circ=-\cos60^\circ$; $\operatorname{sen}135^\circ=\operatorname{sen}45^\circ$, $\cos135^\circ=-\cos45^\circ$; $\operatorname{sen}150^\circ=\operatorname{sen}30^\circ$, $\cos150^\circ=-\cos30^\circ$; $\operatorname{sen}180^\circ=\operatorname{sen}0$, $\cos180^\circ=-\cos0$; $\operatorname{sen}210^\circ=-\operatorname{sen}30^\circ$, $\cos210^\circ=-\cos30^\circ$; $\operatorname{sen}225^\circ=-\operatorname{sen}45^\circ$, $\cos225^\circ=-\cos45^\circ$; $\operatorname{sen}240^\circ=-\operatorname{sen}60^\circ$, $\cos240^\circ=-\cos60^\circ$; $\operatorname{sen}270^\circ=-\operatorname{sen}90^\circ$, $\cos270^\circ=-\cos90^\circ$; $\operatorname{sen}300^\circ=-\operatorname{sen}60^\circ$, $\cos300^\circ=\cos60^\circ$; $\operatorname{sen}315^\circ=-\operatorname{sen}45^\circ$, $\cos315^\circ=\cos45^\circ$; $\operatorname{sen}330^\circ=-\operatorname{sen}30^\circ$, $\cos330^\circ=\cos30^\circ$

24. Calcular las razones trigonométricas de 15° en función de ángulos de razones conocidas.

Sol: $\operatorname{sen}(45-30)$, $\cos(45-30)$, $\operatorname{tg}(45-30)$

25. Estudia que ángulos pueden tener las siguientes relaciones entre sus razones trigonométricas considerando que α pertenece al primer cuadrante: a) $\text{sen}\alpha=\text{sen}\beta$; b) $\text{cos}\alpha=-\text{cos}\beta$; c) $\text{sen}\alpha=-\text{cos}\beta$; d) $\text{tg}\alpha=\text{tg}\beta$.

Sol: a) $\beta=180-\alpha$; b) $\beta=180-\alpha$ ó $\beta=180+\alpha$; c) $\beta=90+\alpha$ ó $270-\alpha$; d) $\beta=180+\alpha$

26. Sin utilizar la calculadora calcula las razones trigonométricas de los ángulos: a) 765° ; b) -240° .

Sol: a) $765^\circ=45^\circ$, $\text{sen}765^\circ=\text{cos}765^\circ=2/2$; b) $-240^\circ=120^\circ$, $\text{sen}(-240^\circ)=\sqrt{2}/2$, $\text{cos}(-240^\circ)=-1/2$

27. Sabiendo que $\text{sen}37^\circ=0,6$. Calcula las razones de 53° .

Sol: $\text{sen}53^\circ=0,8$; $\text{cos}53^\circ=0,6$; $\text{tg}53^\circ=4/3$

28. Sabiendo que $\text{cos}37^\circ=0,8$. Calcula las razones de 143° .

Sol: $\text{sen}143^\circ=0,6$; $\text{cos}143^\circ=-0,8$; $\text{tg}143^\circ=-3/4$

29. Sabiendo que el $\text{sen}20^\circ=0,342$. Calcula el seno del ángulo 40° . Sol: 0,643.

30. Calcula las razones trigonométricas de 150° utilizando las razones del ángulo de 30° .

Sol: $\text{sen}150^\circ=1/2$, $\text{cos}150^\circ=-\sqrt{3}/2$; $\text{tg}150^\circ=-\sqrt{3}/3$.

31. Las razones trigonométricas del ángulo de 20° son: $\text{sen}20^\circ=0,342$; $\text{cos}20^\circ=0,94$; $\text{tg}20^\circ=0,364$. Calcula las razones trigonométricas de 70° .

Sol: $\text{sen}70^\circ=0,94$; $\text{cos}70^\circ=0,342$; $\text{tg}70^\circ=2,75$.

32. Las razones trigonométricas del ángulo de 53° son: $\text{sen}53^\circ=0,8$; $\text{cos}53^\circ=0,6$; $\text{tg}53^\circ=4/3$. Calcula las razones trigonométricas de 143° .

Sol: $\text{sen}143^\circ=0,6$; $\text{cos}143^\circ=-0,8$; $\text{tg}143^\circ=-3/4$.

33. Si $\text{sen}12^\circ=0,2$ y $\text{sen}37^\circ=0,6$, calcula: a) $\text{sen}49^\circ$, $\text{cos}49^\circ$ y $\text{tg}49^\circ$ b) $\text{sen}25^\circ$, $\text{cos}25^\circ$ y $\text{tg}25^\circ$.

Sol: a) $\text{sen}49^\circ=0,74$; $\text{cos}49^\circ=0,656$; $\text{tg}49^\circ=1,15$; b) $\text{sen}25^\circ=0,42$; $\text{cos}25^\circ=0,9$; $\text{tg}25^\circ=0,47$

34. Calcula las razones trigonométricas de 215° si $\text{tg}35^\circ=0,7$.

Sol: $\text{sen}215^\circ=-0,57$; $\text{cos}215^\circ=-0,82$; $\text{tg}215^\circ=0,7$.

35. Calcular las razones trigonométricas de: 150° , -225° , 480° , -660° , -1770° , 1440° .

Sol: $\text{sen}150^\circ=1/2$, $\text{cos}150^\circ=-\sqrt{3}/2$; $\text{sen}(-225^\circ)=\sqrt{2}/2$, $\text{cos}(-225^\circ)=-\sqrt{2}/2$; $\text{sen}480^\circ=\sqrt{3}/2$, $\text{cos}480^\circ=-1/2$; $\text{sen}(-660^\circ)=\sqrt{3}/2$, $\text{cos}(-660^\circ)=1/2$; $\text{sen}(-1770^\circ)=1/2$, $\text{cos}(-1770^\circ)=\sqrt{3}/2$; $\text{sen}1440^\circ=0$, $\text{cos}1440^\circ=1$

36. Si α es un ángulo del 2º cuadrante, tal que $\text{sen}\alpha=3/5$. Representar α , $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $-\alpha$ y calcular el seno de cada uno de ellos. Sol: $\text{sen}(\pi-\alpha)=4/5$; $\text{sen}(\pi+\alpha)=-3/5$; $\text{sen}(-\alpha)=-3/5$

37. Halla el ángulo complementario de $25^\circ39'18''$. ¿Qué relación existe entre el seno de un ángulo y su complementario?. Sol: $64^\circ20'42''$; $\text{sen}^2\alpha+\text{sen}^2(90-\alpha)=1$

38. Halla el ángulo suplementario de $135^\circ38'16''$. ¿Qué relación existe entre el seno de un ángulo y el de su suplementario?. Sol: $44^\circ21'44''$; $\text{sen}\alpha=\text{sen}(180-\alpha)$

39. Sabiendo que $\text{sen}\alpha=4/5$ y que α está en el primer cuadrante. Halla las razones trigonométricas de 2α y $\alpha/2$.

Sol: $\text{sen}(2\alpha)=24/25$, $\text{cos}(2\alpha)=-7/25$; $\text{sen}(\alpha/2)=1/\sqrt{5}$, $\text{cos}(\alpha/2)=2/\sqrt{5}$

40. Calcula las razones trigonométricas de -1200° , 570° y $10\pi/3$ rad.

Sol: $\text{sen}(-1200^\circ)=-\sqrt{3}/2$, $\text{cos}(-1200^\circ)=-1/2$; $\text{sen}(570^\circ)=-1/2$, $\text{cos}(570^\circ)=-\sqrt{3}/2$; $\text{sen}(10\pi/3)=-\sqrt{3}/2$, $\text{cos}(10\pi/3)=-1/2$

41. Hallar las razones trigonométricas de 75° y 3000° . Sol: $\text{sen}75 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$; $\text{cos}75 = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\text{sen}3000 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{cos}3000 = -1/2$
42. Relaciona entre sí, las razones trigonométricas de los ángulos 3625° y 4025° .
Sol: $\text{sen}3625 = \text{cos}4025$; $\text{cos}3625 = \text{sen}4025$
43. Sabiendo que $\text{tg}\alpha = 1/2$, halla $\text{tg}(\alpha + 45^\circ)$ y $\text{tg}(45 - \alpha)$. Sol: $\text{tg}(\alpha + 45) = 3$; $\text{tg}(45 - \alpha) = 1/3$
44. Sabiendo que $\text{cos}36^\circ = 0,8090$. Halla las razones trigonométricas de los ángulos 9° y 6° .
Sol: $\text{sen}9^\circ = 0,156$, $\text{cos}9^\circ = 0,988$; $\text{sen}6^\circ = 0,105$, $\text{cos}6^\circ = 0,995$
45. Sabiendo que $\text{sen}20^\circ = 0,342$, calcula las razones trigonométricas de 40° .
Sol: $\text{sen}40 = 0,643$, $\text{cos}40 = 0,766$
46. Sabiendo que $\text{cos}\alpha = 0,2$, calcula las razones trigonométricas de $(\pi/2) - 2\alpha$.
Sol: $\text{sen}((\pi/2) - 2\alpha) = -0,92$; $\text{cos}((\pi/2) - 2\alpha) = 0,392$
47. Sabiendo que $\text{tg}\alpha = 2$, α pertenece al primer cuadrante, calcula $\text{sen}3\alpha$. Sol: $\text{sen}(3\alpha) = -2\sqrt{5}/25$
48. Sabiendo que $\text{tg}2\alpha = \sqrt{3}$ y que $\alpha < (\pi/2)$, halla el seno y coseno de α . Sol: $\text{sen}\alpha = 1/2$, $\text{cos}\alpha = \sqrt{3}/2$
49. Sabiendo que α es un ángulo situado en el segundo cuadrante y que $\text{tg}\alpha = -1/4$, halla las razones trigonométricas de 2α . Sol: $\text{sen}(2\alpha) = -8/17$; $\text{cos}(2\alpha) = 15/17$
50. Sabiendo que $\text{tg}(\alpha/2) = 2$, Halla $\text{sen}\alpha$ y $\text{cos}\alpha$. Sol: $\text{sen}\alpha = 4/5$; $\text{cos}\alpha = -3/5$
51. Sabiendo que $\text{tg}(\alpha + \beta) = -3$ y que $\text{tg}\alpha = 2$. Halla $\text{tg}2\beta$ y $\text{tg}(\alpha - \beta)$. Sol: $\text{tg}2\beta = \square$; $\text{tg}(\alpha - \beta) = 1/3$
52. Transforma en producto: a) $\text{sen}60^\circ - \text{sen}30^\circ$, b) $\text{cos}60^\circ - \text{cos}30^\circ$.
Sol: a) $2 \cdot \text{sen}15 \cdot \text{cos}45$; b) $-2 \cdot \text{sen}45 \cdot \text{sen}15$
53. Calcula reduciendo al primer cuadrante las razones trigonométricas siguientes: a) $\text{sen}150$; b) $\text{cos}135$; c) $\text{tg}300$; d) $\text{sec}225$; e) $\text{cosec}120$; f) $\text{cotg}240$; g) $\text{sen}750$; h) $\text{cos}(8\pi/3)$.
Sol: a) $1/2$; b) $-\sqrt{2}/2$; c) $-\sqrt{3}$; d) $-\sqrt{2}$; e) $2/\sqrt{3}$; f) $\sqrt{3}/3$; g) $1/2$; h) $-1/2$.
54. Si $\text{sen}20^\circ = 0,34$, calcula las razones trigonométricas de: a) 70° , b) 10° ; c) 40° ; d) 160° ; e) 340° ; f) 250° ; g) 110° .
Sol: a) $\text{sen}70 = 0,94$, $\text{cos}70 = 0,34$, $\text{tg}70 = 2,76$; b) $\text{sen}10 = 0,17$, $\text{cos}10 = 0,98$, $\text{tg}10 = 0,177$; c) $\text{sen}40 = 0,6392$, $\text{cos}40 = 0,7680$, $\text{tg}40 = 0,83$; d) $\text{sen}160 = 0,34$, $\text{cos}160 = -0,94$, $\text{tg}160 = -0,36$; e) $\text{sen}340 = -0,34$, $\text{cos}340 = -0,94$, $\text{tg}340 = 0,36$; f) $\text{sen}250 = -0,94$, $\text{cos}250 = -0,34$, $\text{tg}250 = 2,76$; g) $\text{sen}110 = 0,94$, $\text{cos}110 = -0,34$, $\text{tg}110 = -2,76$.
55. Sin tablas ni calculadora, determina: a) $\text{sen}105^\circ$, b) $\text{cos}15^\circ$, c) $\text{tg}75^\circ$.
Sol: a) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$; b) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$; c) $(\sqrt{3} + 1)/(\sqrt{3} - 1)$.
56. Halla las razones trigonométricas de 840° .
Sol: $\text{sen}840 = \sqrt{3}/2$; $\text{cos}840 = -1/2$; $\text{tg}840 = -\sqrt{3}$.
57. Si $\alpha = 60^\circ$. Calcula: a) $\text{tg}(\alpha/2)$; b) $\text{cos}^2\alpha$; c) $\text{cos}4\alpha$; d) $\text{cos}(\alpha/2)$; e) $(\text{cos}\alpha)/2$; f) $\text{sen}2\alpha$; g) $2\text{sen}\alpha$.
Sol: a) $\sqrt{3}/3$; b) $1/4$; c) $-1/2$; d) $\sqrt{3}/2$; e) $1/4$; f) $\sqrt{3}/2$; g) $\sqrt{3}$
58. Si $\text{sen}37^\circ = 0,6$. Calcula: a) $\text{sen}(53)$; b) $\text{tg}(37/2)$; c) $\text{sen}(74)$; d) $\text{cos}(127)$; e) $\text{tg}(74)$.
Sol: a) $0,8$; b) $1/3$; c) $0,96$; d) $-0,6$; e) $24/7$.

Problemas de triángulos.

Triángulos rectángulos, isósceles o equiláteros

1. Resuelve los triángulos rectángulos, en los que $A=90^\circ$: a) $b=3$, $c=3$; b) $a=5$; $B=37^\circ$; c) $c=15$, $b=8$.

Sol: a) $B=45^\circ$, $C=45^\circ$, $b=3\sqrt{2}$; b) $C=53^\circ$, $b=3$, $c=4$; c) $a=17$, $C=61,9^\circ$, $B=28,1^\circ$

2. La base de un triángulo isósceles mide 60 cm y los lados iguales 50 cm. Calcula sus ángulos.

Sol: 53° , 53° , 74° .

3. Sabiendo que en un triángulo $A=90^\circ$, $a=13$ cm y $b=12$ cm. Hallar el otro lado y los otros ángulos.

Sol: $c=5$, $B=67,4^\circ$, $C=22,6^\circ$

4. Resuelve el triángulo, rectángulo en A, sabiendo que: $B=30^\circ$ y $b=4$ cm. ¿Cuál es su área?.

Sol: $C=60^\circ$; $b=4\sqrt{3}$ cm; $a=8$ cm; $S=8\sqrt{3}$ cm².

5. Resuelve el triángulo isósceles ABC, en el que el ángulo desigual es A, conociendo: a) $c=10$ m y $a=12$ m; b) $A=120^\circ$ y $c=2$ m; c) $B=45^\circ$ y $a=10$ m.

Sol: a) $C=B=53^\circ$; $A=74^\circ$; $b=c=10$; b) $B=C=30^\circ$; $b=c=2$, $a=2\sqrt{3}$; c) $B=C=45^\circ$, $A=90^\circ$, $b=c=5\sqrt{2}$.

6. La base de un triángulo isósceles mide 20 m y el ángulo opuesto 74° . Calcula los lados y la superficie.

Sol: $x=50/3$; $S=400/3$ m².

Problemas de triángulos en general

7. ¿Son posibles los triángulos de medidas?: a) $a=30$; $b=20$; $c=60$ cm; b) $b=50$; $c=4$ m; $B=60^\circ$; c) $a=5$; $b=32$; $c=4$ m; d) $b=60$; $c=90$ cm; $C=30^\circ$.

Sol: a) No; b) No; c) No; d) Sí

8. Calcula la superficie de un triángulo sabiendo que los lados a y b miden respectivamente 20 y 30 cm. y que el ángulo C es de 30° . Sol: 150 cm².

9. Resuelve los triángulos: a) $a=6$; $B=45^\circ$; $A=75^\circ$; b) $A=90^\circ$; $B=30^\circ$, $a=6$.

Sol: a) $b=4,4$; $c=5,4$; $C=60^\circ$; b) $C=60^\circ$, $b=3$, $c=33$

10. Resuelve los triángulos: a) $a=20$ m; $B=45^\circ$; $C=65^\circ$; b) $c=6$ m, $A=105^\circ$, $B=35^\circ$. c) $b=40$ m; $c=30$ m, $A=60^\circ$. Sol: a) $A=70$, $b=15$, $c=19,3$; b) $C=40$, $a=9$, $b=5,35$; c) $a=36$, $B=71^\circ$, $C=46^\circ$

11. En un triángulo el ángulo A mide 75° , el ángulo B 35° y el lado a 30 m. a) Calcula el resto de los elementos del triángulo y su área. b) Haz lo mismo para el triángulo de elementos: $A=100^\circ$, $B=30^\circ$, $b=20$ m. Sol: a) $C=70^\circ$, $b=17,8$, $c=29,2$; Area= $250,9$ m² b) $C=50^\circ$, $a=39,4$, $c=30,64$; Area= $301,75$ m²

12. Sin calculadora, resuelve los siguientes triángulos:

a) $a=10$ cm, $B=45^\circ$ y $C=75^\circ$

b) $b=4$ m $A=15^\circ$, $B=30^\circ$

Sol: a) $A=60^\circ$, $b=10\sqrt{2/3}$; $c=5(\sqrt{6} + \sqrt{2})/3$; b) $c=4\sqrt{2}$, $C=135^\circ$, $a=4\sqrt{2-\sqrt{3}}$

13. Dado el triángulo de vértices A,B,C. Sabiendo que $A=60^\circ$, $B=45^\circ$ y que $b=20$ m. Resolverlo y calcular su área. Sol: $C=75^\circ$; $a=24,5$ m; $c=27,3$ m; $S=236,4$ m².

14. Resuelve el triángulo ABC, en el cual $A=30^\circ$, $b=3$ m, $c=4$ m. Calcular el resto de los valores y el área. Sol: $B=46,9^\circ$; $C=103,1^\circ$; $a=2,05$; $S=3$ m².

15. Resuelve, sin emplear calculadora, los triángulos en los que se conocen estos datos:

- a) $a = 20$ m, $B = 45^\circ$ y $C = 75^\circ$;
- b) $b = 12$ cm, $A = 15^\circ$ y $B = 30^\circ$;
- c) $A = 90^\circ$, $B = 60^\circ$ y $a = 20$ m.

Sol: a) $A=60^\circ$, $b=20 \sqrt{2} / \sqrt{3}$, $c=10(\sqrt{6} + \sqrt{2})/3$; b) $C=135^\circ$, $a = 12 \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $c=12 \sqrt{2}$;
c) $C=30^\circ$, $a=10 \sqrt{3}$, $c=10$

16. El radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC mide $\sqrt{72}$ cm. si dos de los ángulos del triángulo son de 60° y 45° . Resuelve el triángulo y calcula su área.

Sol: $a=4\sqrt{2}$ cm; $b=3$ cm; $c=4$ cm; $A=60^\circ$, $B=45^\circ$, $C=75^\circ$; $\text{Area}=8$ cm²

Otras figuras geométricas.

1. Calcula los ángulos de un rombo de diagonal 4 y lado 4 m. Sol: 60° y 120° .
2. Calcular el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6 m. Sol: 7 m.
3. Calcula la longitud de los lados de un paralelogramo cuyas diagonales son de 20 y 16 cm. y las diagonales forman entre sí un ángulo de 37° . Sol: 6 y 17,1 cm.
4. En una pirámide cuadrangular, el lado de la base mide 200 m. Y el ángulo α que forma una cara con la base es de 60° . Calcular: a) la altura de la pirámide; b) la altura de una cara; c) el ángulo que forma la arista con la base; d) el ángulo que forma la cara con la cúspide.
Sol: a) 100,3; b) 200; c) 50,77°; d) 30°.
5. Calcula el área del decágono regular de 10 cm de lado. Sol: 293,88 u².
6. En una circunferencia de 6 cm de radio trazamos una cuerda de 9 cm. ¿Qué ángulo central abarca dicha cuerda?. Sol: $97,2^\circ$.
7. Una circunferencia tiene de radio 6 cm. ¿Cuál será la longitud de circunferencia correspondiente a un ángulo de 30° ?. Sol: 3,14 cm.
8. Calcular los ángulos de un rombo sabiendo que su lado mide 5 m y una diagonal 8 m. Sol: 74° , 106°
9. Calcula el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 12 m.
Sol: $S=342,4$ m².
10. En una circunferencia de radio 8 m se toma una cuerda de 4 m. ¿Cuál es el ángulo que abarca?.
Sol: $\alpha=28,95^\circ$.
11. Calcula los ángulos de un rombo del que se conocen las diagonales: 16 m y 12 m. ¿Cuál es su área?. Sol: $\alpha=73^\circ 44' 23''$; $\beta=106^\circ 15' 37''$; $S=96$ m².
12. Halla los radios de la circunferencia inscrita y circunscrita a un octógono regular de lado 6 m.
Sol: $R=7,84$ m; $r=7,24$ m.
13. Calcula los ángulos de un trapecio isósceles en el que las bases miden 60 m y 30 m y de altura 30 m. Sol: $A=B=63,4^\circ$; $C=D=116,6^\circ$.
14. Calcula el lado de un pentágono regular, inscrito en una circunferencia, cuyo diámetro es 50 cm.
Sol: 29,4 cm

15. En una circunferencia de 10 cm de radio se traza una cuerda de 6 cm. Averigua el ángulo central que abarca dicha cuerda. Sol: $34,9^\circ$

16. Calcula el radio de la circunferencia circunscrita a cada uno de los triángulos siguientes, en los que se conocen: a) $b = c = 2$ m y $B = 30^\circ$; b) $b=6$ m, $A = 90^\circ$ y $C = 37^\circ$. Sol: a) 2; b) 10

Resolución de ecuaciones trigonométricas.

1. Resolver: a) $\sin 2x = -1/2$; b) $\cos x = 3/2$; c) $\operatorname{tg} x = 1$; d) $\sin 3x = 3/2$.

Sol: a) $x = 105 + 180k$; $165 + 180k$; b) $x = 30 + 360k$; $330 + 360k$; c) $x = 45 + 180k$; d) $x = 20 + 120k$; $40 + 120k$.

2. Resolver: a) $\sin(x - (\pi/3)) = \sin(2x + (\pi/3))$; b) $\cos 2x = \cos(x + \pi/2)$; c) $\cos 2x = \cos x$; d) $\sin 2x = \cos x$.

Sol: a) $x = 60 + 120k$, $x = 240 + 360k$; b) $x = \pi/2 + 2k\pi$, $x = 11\pi/6 + 2k\pi/3$; c) $x = 120k$; d) $x = 30 + 120k$.

3. Resolver: a) $\log(\sin x) - \log(\cos x) = 0$; b) $\cos x - 2\sin x \cdot \cos x = 0$; c) $\sin^2 x + \cos 2x = 1/4$; d) $\operatorname{tg}^2 x + 2 = 3\operatorname{tg} x$; e) $\sin^2 x + \cos^2 x = 2 - \cos^2 x$.

Sol: a) $x = 45^\circ + 360k$; b) $x = 90^\circ + 360k$, $x = 30^\circ + 360k$, $150 + 360k$; c) $x = 60^\circ + 180k$, $x = 120 + 180k$; d) $x = 45^\circ + 180k$, $63,43 + 180k$; e) $x = 0 + 180k$.

4. Resolver: a) $\cos^2 x = \sin^2 x$; b) $\sin x = -\cos x$; c) $\sin(2x - 15^\circ) = \cos(x + 15^\circ)$.

Sol: a) $45 + 90k$; b) $135 + 180k$; c) $x = 30^\circ + 120k$, $x = 330^\circ + 360k$

5. Resolver: a) $\operatorname{tg} \alpha = 2\operatorname{sen} \alpha$; b) $2\sin^2 x + \cos^2 x - 32\sin x = 0$; c) $\sin^2 x - \sin x + 1/4 = 0$; d) $\cos^2 x = (\cos x)/2$.

Sol: a) $\alpha = 60 + 360k$, $\alpha = 300 + 360k$, $\alpha = 360k$; b) $x = 45 + 360k$, $x = 135 + 360k$; c) $x = 30 + 360k$, $x = 150 + 360k$; d) $x = 90 + 180k$, $x = 60 + 360k$, $x = 300 + 360k$

6. Resolver, sabiendo que x e y pertenecen al primer cuadrante:

a) $\cos(60+x) = \sin x$

b) $\sin 2x = \operatorname{tg} x$

c) $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

d)
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \\ \cos(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Sol: a) $x = 15^\circ$; b) $x = 0$, $x = 45^\circ$; c) $x = 60^\circ$; d) $x = 0$, $y = 90^\circ$; $x = 90^\circ$, $y = 0$; e) $x = 45^\circ$, $y = 0$; $x = 0$, $y = 45^\circ$

7. Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos x + 3\sin x = 2$

b) $4\sin(x/2) + 2\cos x = 2$

c) $2\sin(x+30^\circ)\cos(x-30^\circ) = 3$

d) $\sin(x/2) = \operatorname{tg}(x/4)$

e) $\log(\operatorname{tg} x) + \log(\cos x) = \log(1/2)$

f) $6 \operatorname{tg} x = 3/\cos x$

Sol: a) $x = 60^\circ + 360k$; b) $x = 180^\circ + 360k$; c) $x = 60^\circ + 180k$, $x = 30^\circ + 180k$; d) $x = 180k$; e) $x = 30^\circ + 360k$; f) $x = 30^\circ + 360k$, $x = 150 + 360k$

8. Resuelve la ecuación $\cos^2 x = \sin^2 x$. Sol: $x = 45 + 90k$

9. Resolver:

a) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$ b) $\operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos} \beta$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$

d) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} \beta$ e) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$

Sol: a) $\alpha = \beta$, $\alpha = 180 - \beta$; b) $\alpha = \beta$, $\alpha = -\beta$; c) $\alpha = \beta$, $\alpha = 180 + \beta$; d) $\alpha = 90 - \beta$, $\alpha = \beta - 90$; e) $\alpha = 90 - \beta$

10. Resolver las ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + (\pi/2))$

b) $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(x + (\pi/2))$

c) $\operatorname{cos}(2x) = \operatorname{cos}(x + 90^\circ)$

d) $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{cos}(2x + (\pi/3))$

e) $\operatorname{sen} x = \operatorname{cos} 2x$

f) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(2x + \pi)$

Sol: a) $\pi/4 + k\pi$; b) $-\pi/4 + k\pi$; c) $x = \pi/6 + 2k\pi/3$, $x = \pi/2 + 2k\pi$; d) $\pi/30 + 2k\pi/5$; e) $\pi/6 + 2k\pi/3$; f) $k\pi$

11. Resolver la ecuación: $\operatorname{sen}(2x + (\pi/6)) = \operatorname{cos}((\pi/4) - x)$. Sol: $x = \pi/12 = 15^\circ$

12. Resolver: a) $\operatorname{sen}(3x - 120^\circ) = \operatorname{cos}(x + 15^\circ)$; b) $x = \operatorname{arsen} 0$; c) $x = \operatorname{arctg} 1$; d) $x = \operatorname{arccos}(-1/2)$;

e) $\operatorname{sen} x \operatorname{cos} x = 1/2$; f) $2\operatorname{cos} 5x \operatorname{sen} 2x = \sqrt{2} \operatorname{cos} 5x$; g) $\operatorname{cos}^2 x = \operatorname{sen}^2 x$; h) $\operatorname{sen} x = -\operatorname{cos} x$; i) $\operatorname{cos} x - 2\operatorname{sen} x \operatorname{cos} x$;

j) $\operatorname{cos} 2x = 1 + 2\operatorname{sen} x$; k) $[\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1; \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 0]$; l) $\operatorname{tg}^2 x + 3 = 4\operatorname{tg} x$; m) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos} 2x = 1$;

n) $6\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{cos} 2x = 1$

13. Resolver la ecuación: $\operatorname{sen} x + (1/3)\operatorname{cos} x = 0$. Sol: $x = 150 + 180k$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} x \operatorname{cos} x = 1/2$

b) $\operatorname{cos} x \operatorname{tg} x = \sqrt{3}/2$

c) $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$

d) $\sqrt{3} + \operatorname{cos} x = 0$

e) $\operatorname{cos} 2x = \operatorname{sen}(x + 180^\circ)$

Sol: a) $x = 45 + 180k$; b) $x = 60 + 360k$, $x = 120 + 360k$; c) $x = 180k$, $x = 60 + 360k$, $x = 300 + 360k$;

d) $x = 150 + 180k$; e) $x = 90 + 360k$, $x = 210 + 360k$, $x = 330 + 360k$

15. Resuelve los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ \operatorname{cos}(x - y) = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}(x + y) = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} \\ \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 y = 1 \\ -\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} y \\ x - y = 30^\circ \end{cases}$$

Sol: a) $x=30^\circ, y=30^\circ; x=150^\circ, y=150^\circ;$ b) $x=60^\circ, y=30^\circ; x=120^\circ, y=330^\circ;$
 c) $x=30^\circ, y=30^\circ; x=150^\circ, y=150^\circ;$
 d) $x=60, y=60; x=120, y=120; x=240, y=240; x=300, y=300, x=60, y=120\dots;$
 e) $x=90, y=30; x=30, y=90; f) x=60, y=30$

16. Resuelve la ecuación: $\cos(2x)-2\cos x+1=0$. Sol: $x=\pi/2+2k\pi; x=0+2k\pi$.

17. Despeja x en las siguientes igualdades: a) $2=2\arctg(x/4)$; b) $1=\sqrt{2} \arccos(1/x)$.
 Sol: a) $x=\pi; x=5\pi$; b) $x=4/\pi; x=4/(7\pi)$

18. Calcula $\arctg \sqrt{3} + \operatorname{arccotg}(1/\sqrt{3})$. Sol: $60^\circ+30^\circ=90^\circ$

19. Resuelve los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ 2x + 2y = 120 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}(x+y) = 1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} \cos(x+y) = 0 \\ \cos(x-y) = 0 \end{cases}$$

Sol: a) $x=30^\circ, y=30^\circ$ b) $x=60^\circ, y=30^\circ; x=120^\circ, y=330^\circ;$ c) $x=90^\circ, y=0; x=270^\circ, y=0$.

20. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$a) \operatorname{sen}(x-30) = 1/2 \quad b) \cos(2x-30) = 1/2 \quad c) \operatorname{sen}(3x-30) = \sqrt{3}/2;$$

$$d) \cos(3x-15) = \sqrt{3}/2 \quad e) \operatorname{tg}(x-45) = -1$$

Sol: a) $x=60+360k; x=180+360k;$ b) $x=45+180k; x=165+180k;$ c) $x=30+120k; x=50+120k;$ d) $x=15+120k;$
 $x=115+120k;$ e) $x=180k$.

21. Resuelve las expresiones:

$$a) \operatorname{sen} 2x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x \quad b) \cos x = (2 \operatorname{tg} x)/(1 + \operatorname{tg}^2 x) \quad c) \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1/2$$

$$d) \operatorname{cosec} x \cdot \cos x = 1 \quad e) \operatorname{tg} x \operatorname{sec} x = 2 \quad f) \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

Sol: a) $x=180k; x=30+180k; x=150+180k;$ b) $x=30+360k; x=150+360k;$ c) $x=30+180k;$
 $x=150+180k;$ d) $x=45+180k;$ e) $x=60+360k; x=300+360k;$ f) $x=60+180k; x=120+180k$

22. Resuelve las ecuaciones:

$$a) \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{sen} x \quad b) 2 \operatorname{tg} x = 1/\cos^2 x \quad c) \operatorname{sec}(3x) = 2/\sqrt{3}$$

Sol: a) $x=180k, x=60+360k, x=300+360k;$ b) $x=45+180k, x=135+180k;$ c) $x=10+120k, x=100+120k$.

23. Resuelve las ecuaciones:

$$a) (4 \operatorname{tg} x)/(1 - \operatorname{tg}^2 x) = 2/\operatorname{tg} x \quad b) \cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$c) \cos 2x + \operatorname{sen} x = \cos x.$$

Sol: a) $x=30+180k;$ b) $x=60^\circ+360k; x=120+360k;$ c) $x=30+360k; x=150+360k$.

24. Despeja x en la expresión $y=(1/a)\operatorname{sec}(2-x)$. Sol: $x=2-\arccos[1/(ay)]$

25. Resuelve la expresión $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = 0$. Sol: $x=0+60k; x=90+180k$

26. a) Hallar el valor de la siguiente expresión: $\arctg 1 + \arctg \sqrt{3} - \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\pi/3));$
 b) Resuelve la ecuación: $\operatorname{sen}(2x+60) + \operatorname{sen}(x+30) = 0$.

Sol: a) $\pi/4$; b) $x=-30+120k$; $x=150+360k$.

27. Resuelve:

a) $\cos(2x-\pi)=0$

b) $\sin(2x-(\pi/3))=1/2$

c) $3\sin x=2\cos^2 x$

d) $\operatorname{tg}(2x)=-1$

e) $2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$

f) $\operatorname{tg}^2 x = 3$

Sol: a) $x=\pi/4+k\pi/2$; b) $x=\pi/4+k\pi$, $x=7\pi/12+k\pi$; c) $x=\pi/6+2k\pi$; d) $x=11\pi/6+2k\pi$; e) $x=\pi/4+2k\pi$; $x=3\pi/4+2k\pi$

Representación de funciones y deducciones

1. Calcula el dominio, imagen, periodicidad, máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento de: $y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=\operatorname{tg} x$.

2. Dibuja la gráfica de la función $\sin 2x$.

3. Representa la función $y=\sin x+2$

4. Halla el dominio de las funciones a) $y=\cos x$; b) $y=\operatorname{arccos} x$. Sol: a) $\operatorname{Dom}=\tilde{x}\mathbb{R}$; b) $\operatorname{Dom}=[-1, 1]$

5. Deducir las siguientes razones trigonométricas: a) razones del ángulo $(a+b)$; b) razones del ángulo $(a-b)$; c) razones del ángulo mitad $(x/2)$; d) razones del ángulo doble $(2x)$.

6. Deducir las razones trigonométricas de 30° y 60° a partir de un triángulo equilátero de lado l .

7. Deducir las razones de 45° a partir de un cuadrado de lado l .

8. Expresa $\sin 3\alpha$ en función de $\sin \alpha$. Sol: $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$

Problemas

1. Calcula la altura de una torre, si situándonos a 20 m de su pie vemos la parte más alta bajo un ángulo de 45° . Sol: 20 m

2. El ángulo de elevación de una torreta eléctrica es de 45° a una distancia de 10 m de la torreta. Si el observador se encuentra a 1 m sobre el suelo. Calcula la altura de la torreta. Sol: 11 m.

3. En un solar de forma triangular dos de sus lados miden 6 y 10 m respectivamente y el ángulo comprendido se midió con un teodolito y resultó ser de 30° . ¿Cuál es su superficie? Sol: 15 m^2

4. Desde mi casa veo la fuente que está en el centro de la plaza mayor y también veo el ayuntamiento. He preparado un teodolito para calcular el ángulo formado por dichas visuales y ha dado $26^\circ 23'$. La distancia desde mi casa a la fuente es de 40 m y la distancia de la fuente al ayuntamiento es de 30 m. ¿Qué distancia hay desde mi casa al ayuntamiento? Sol: 60 m; 11,67 m

5. Los padres de Pedro tienen una parcela en el campo de forma triangular. Cuyos lados miden 20, 22 y 30 m. Pedro quiere calcular los ángulos. ¿Cuáles son esos ángulos? Sol: $41,8^\circ$, $47,16^\circ$ y $91,04^\circ$.

6. Dos amigos van a subir una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación y obtuvieron que era de 30° . Han avanzado 300 m hacia la montaña y han vuelto a medir y ahora es de 45° . Calcula la altura de la montaña. Sol: 410 m.

7. Dos amigos observan desde su casa un globo que está situado en la vertical de la línea que une sus casas. La distancia entre sus casas es de 3 km. Los ángulos de elevación medidos por los amigos son de 45° y 60° . Halla la altura del globo y la distancia de ellos al globo.
Sol: 1900 m de altura, 2690 m de uno y 2198 m del otro.
8. Tres pueblos están unidos por carreteras: $AB = 10$ km, $BC = 12$ km y el ángulo formado por AB y BC es de 120° . Cuánto distan A y C. Sol: 19 km.
9. Van a construir un túnel del punto A al punto B. Se toma como referencia una antena de telefonía (C) visible desde ambos puntos. Se mide entonces la distancia $AC = 250$ m. Sabiendo que el ángulo en A es de 53° y el ángulo B es de 45° calcula cuál será la longitud del túnel. Sol: 350 m.
10. Dos amigos andan a 4 km/h. Llegan a un punto del que parten dos caminos que forman entre sí un ángulo de 60° y cada uno toma un camino. ¿A qué distancia se encontrarán al cabo de una hora?.
Sol: 4 km.
11. Un avión vuela entre A y B que distan 7 km. Las visuales desde el avión de A y B forman un ángulo de 45° y 37° con la horizontal. a) ¿A qué altura está el avión?; b) Si una persona se encuentra en la vertical bajo el avión, ¿a qué distancia se encuentra de cada ciudad?.
Sol: a) 3 km; b) 3 km de A; 4 km de B.
12. Estando situado a 100 m de un árbol, veo su copa bajo un ángulo de 30° . Mi amigo ve el mismo árbol bajo un ángulo de 60° . ¿A qué distancia está mi amigo del árbol?. Sol: $100/3$ m.
13. Para medir la altura de una montaña hallamos el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo 53° . Nos alejamos 175 m y ahora el nuevo ángulo es de 37° . ¿Cuanto mide la altura de la montaña?. (sen $53^\circ=0,8$; cos $53^\circ=0,6$).
Sol: 300 m.
14. Si vemos una chimenea bajo un ángulo de 60° , ¿bajo qué ángulo la veríamos si la distancia fuese el doble?. ¿Y si fuese el triple?. Sol: $40,9^\circ$, 30° .
15. Andrés mide 180 cm y su sombra 135 cm. ¿Qué ángulo forman en ese instante los rayos de sol con la horizontal?. Sol: 53° .
16. Calcular la anchura de un río si nos colocamos enfrente de un árbol de la otra orilla y luego al desplazarnos 100 m paralelamente al río observamos el mismo árbol bajo un ángulo de 20° . Sol: 36,4 m.
17. Calcula la altura de una casa sabiendo que cuando la altura del sol es de 56° proyecta una sombra de 20 m. Sol: 30 m.
18. Un avión que está volando a 500 m de altura distingue un castillo con un ángulo de depresión de 15° . ¿A qué distancia del castillo se halla?.
Sol: 1932 m.
19. Desde dos puntos A y B separados entre si 60 m, se dirigen dos visuales a un árbol situado en la recta AB en un punto entre A y B. El observador de A lo ve bajo un ángulo de 50° y el de B bajo un ángulo de 40° . Calcular: a) la altura del árbol y la distancia de A al pie de la vertical en la que se encuentra el árbol.
Sol: $h=29,5$ m; $d=24,8$ m y 30,5 m.
20. Un teleférico recorre 200 m con un ángulo de elevación constante de 25° . ¿Cuántos metros ha avanzado en la horizontal, y cuántos metros ha ganado de altura?.
Sol: $d=181$ m; $h=84,5$ m.
21. El viento tronza un árbol, la punta se apoya en el suelo, en un punto situado a 10 m del pie, formando un ángulo de 30° con el plano horizontal. ¿Cuál era la altura del árbol?. Sol: 103 m.

22. Una persona mide 1,80 m y proyecta una sombra de 1,90 m. Halla las razones trigonométricas del ángulo que forman los rayos del sol con la horizontal.

Sol: $\text{sen}43,45^\circ=0,688$; $\text{cos}43,45^\circ=0,726$; $\text{tg}43,45^\circ=18/19$.

23. Dos móviles parten de un punto al mismo tiempo, siguiendo dos trayectorias rectilíneas que forman entre sí un ángulo de 135° y con velocidades de 10 y 20 m/s respectivamente. Al cabo de cinco minutos ¿qué distancia los separa?. Sol: 8394 m

24. Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B de una orilla se observa un punto P de la orilla opuesta, las visuales forman con la dirección de la orilla ángulos de 45° y 60° respectivamente. Calcula la anchura del río sabiendo que la distancia entre A y B es de 12,62 m. Sol: 8 m

25. Un repetidor de televisión, situado sobre una montaña, se ve desde un punto del suelo P bajo un ángulo de 67° ; Si nos acercamos a la montaña 30 m lo vemos bajo un ángulo de 70° y desde ese mismo punto vemos la montaña bajo un ángulo de 66° . Calcular la altura del repetidor.

Sol: 90,5 m.

26. Desde una altura de 3000 m un piloto observa la luz de un aeropuerto bajo un ángulo de depresión de 30° . Determina la distancia horizontal entre el avión y el aeropuerto. Sol: $3000\sqrt{3}$ m.

27. Un avión vuela durante dos horas a 200 km/h en dirección NO. Calcula la distancia que recorre hacia el Norte y hacia el Oeste. Sol: $x=y=200\sqrt{2}$ km.

28. Calcula la altura de una torre sabiendo que a cierta distancia de su pie vemos el punto más alto bajo un ángulo de 60° , y si nos alejamos 20 m de dicho punto vemos el punto más alto bajo un ángulo de 30° . ¿A qué distancia nos encontramos inicialmente del pie de la torre?.

Sol: $h=10\sqrt{3}$ m; $x=10$ m

29. Un avión vuela horizontalmente a una determinada altura "h". Cuando se encuentra sobre la vertical de un punto A, ve la torre del aeropuerto bajo un ángulo de depresión de 30° . Al aproximarse 1000 m ve la misma luz bajo un ángulo de 60° . Halla: a) La altura a la que vuela el avión; b) La distancia del punto A a la torre del aeropuerto.

Sol: a) $h=500\sqrt{3}$ m; b) $x=1500$ m.

30. Desde cierto lugar del suelo se ve el punto más alto de una torre, formando la visual un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 50 m a la torre, ese ángulo se hace de 60° . Calcula la altura de la torre. Sol: $h=25\sqrt{3}$ m.

Comprobación de igualdades:

1. Comprueba que son ciertas las expresiones:

a) $\text{cosa} \cdot \text{sen}^2\alpha + \text{cos}^3\alpha = \text{tga} \square \text{coseca}$

b) $(\text{sen}\alpha + \text{cosa})^2 = 1 + \text{sen}(2\alpha)$

c) $\text{sec}^2\alpha = (1 + \text{tg}^2\alpha)$

d) $\text{cos}^2\alpha = \text{cotg}^2\alpha / (1 + \text{cotg}^2\alpha)$

Sol: a) No; b) Sí; c) Sí; d) Sí

2. Comprueba que es cierta la igualdad: $(1/\text{cos}^2x) = 1 + \text{tg}^2x$.

3. Comprueba si es cierta la igualdad: $(1/\text{cos}x) - \text{cos}x = \text{tg}x$. Sol: No

4. Decir si son ciertas o no las igualdades:

a) $\cos(2x) = 2\cos x$

b) $\cos(\pi) = 2\cos(\pi/2)$

c) $\sin 2\pi = 2\sin \pi$

d) $\cos 2\pi = 2\cos \pi$

e) $\sin(\pi/3) = 2\sin(\pi/6)$

Sol: a) No; b) No; c) Sí; d) No; e) No

5. Demuestra que $\arcsen(-x) = -\arcsen x$ y que $\arctg(-x) = -\arctg x$.

6. Demuestra la igualdad: $\operatorname{tg}(45+a) - \operatorname{tg}(45-a) = 2\operatorname{tg} 2a$.

7. Demuestra la igualdad: a) $\operatorname{sen}^2 x = 1/2 (1 - \cos 2x)$; b) $\cos^2 x = 1/2 (1 + \cos 2x)$.

8. Demuestra la igualdad: $(1 + \cos 2x) \operatorname{tg} x = 2\operatorname{sen}(2x)$.

9. Demuestra la igualdad: a) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{sen}^2 x$; b) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos^2 x$

10. Demuestra la igualdad: $\cos(x+45^\circ) \cdot (\cos x - \operatorname{sen} x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x$.

11. Demuestra los teoremas del seno y del coseno.

12. Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\operatorname{sen}(90+\alpha) \square \cos(-\alpha) + \operatorname{sen}(180+\alpha) \square \cos(90+\alpha) = 1$

b) $\cos(-\alpha) \square \cos(180-\alpha) + \cos(90-\alpha) \square \operatorname{sen}(-\alpha) = -1$

c) $\frac{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{1 - \cos x}{2}$

d) $\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{cosec} x}{\cos x - \sec x} = \operatorname{cotg}^3 x$

13. Demuestra la igualdad: $\frac{\cos(x+y) \cdot \cos(x-y)}{\cos x - \operatorname{sen} y} = \cos x + \operatorname{sen} y$

14. Demuestra la igualdad: $\operatorname{sen}(\pi-\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\pi/2-\alpha) + \operatorname{sen}(-\alpha) \cdot \cos(\pi+\alpha) = \operatorname{sen} 2\alpha$

15. Demuestra la igualdad: $\operatorname{sen}(x/2) \cdot \cos(x/2) = (\operatorname{sen} x)/2$