

1. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: **(1 punto)**

$$\frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$$

2. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica, teniendo en cuenta que *no está permitido usar números decimales, sólo fracciones y radicales con las razones trigonométricas de los ángulos fundamentales*. **(1 punto)**

$$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = 1 - \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

3. Halla las coordenadas del vector $\vec{x} = (-2, 3)$ respecto de la base formada por los vectores $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (-4, 2)$. **(1 punto)**

4. Las rectas $r \equiv 3x + 2y - 1 = 0$ y $s \equiv x + ky - 2 = 0$, forman un ángulo de 60° . Halla k . **(1 punto)**

5. Contesta a los siguientes apartados:

a) Hallar las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua, general y afín de la recta r que pasa por los puntos $P(2, 3)$ y $Q(-4, 1)$. **(1 punto)**

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta $3x - 2y + 5 = 0$? Halla el ángulo que forma tal recta con el eje X . **(1 punto)**

c) Hallar la distancia del punto $P(2, 5)$ a la recta $r \equiv x - 3y + 5 = 0$. **(1 punto)**

d) Hallar el ángulo que forman las rectas r y s , donde

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases} \quad ; \quad s \equiv y = 3x - 7 \quad \textbf{(1 punto)}$$

6. Dado el triángulo de vértices $A(-2, -5)$, $B(-1, 2)$ y $C(3, 0)$, calcula:

a) La longitud de la altura que pasa por el vértice A . **(1,5 puntos)**

b) El área del triángulo. **(0,5 puntos)**

Soluciones

$$1. \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$$
$$2. \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = 1 - \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Multiplicando todos los términos por $\operatorname{sen}^2 x$ para eliminar denominadores:

$$\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

Entonces:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ k \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

3. Llamemos (a, b) a las coordenadas de \vec{x} respecto de la base formada por los vectores \vec{u} y \vec{v} .
Entonces: $(-2, 3) = a(2, 1) + b(-4, 2) = (2a, a) + (-4b, 2b) = (2a - 4b, a + 2b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 4b = -2 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 4b = -2 \\ -2a - 4b = -6 \end{cases} \Rightarrow -8b = -8 \Rightarrow b = 1.$$

Sustituyendo por ejemplo en la segunda ecuación del sistema inicial, $a = 1$. Así pues las coordenadas de \vec{x} respecto de la base formada por los vectores \vec{u} y \vec{v} son $(1, 1)$.

4. Un vector director de r es $\vec{u} = (-2, 3)$ y un vector director de s es $\vec{v} = (-k, 1)$. Entonces:

$$\cos 60^\circ = \frac{(-2, 3) \cdot (-k, 1)}{|(-2, 3)| |(-k, 1)|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2k + 3}{\sqrt{13} \sqrt{k^2 + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{13k^2 + 13} = 4k + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13k^2 + 13 = 16k^2 + 48k + 36 \Leftrightarrow 3k^2 + 48k + 23 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$k = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 3 \cdot 23}}{2 \cdot 3} = \frac{-48 \pm \sqrt{2028}}{6} = \frac{-48 \pm 26\sqrt{3}}{6} = -8 \pm \frac{13\sqrt{3}}{3} \approx \begin{cases} k_1 = -0,494 \\ k_2 = -15,5 \end{cases}$$

5. a) Un vector director de la recta r es $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (-6, -2)$. Entonces:

- Ecuación vectorial: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v} \Rightarrow (x, y) = (2, 3) + t(-6, -2)$

- Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$$

- Ecuación continua:
$$\frac{x-2}{-6} = \frac{y-3}{-2}$$

- Ecuación general: $-2x + 4 = -6y + 18 \Leftrightarrow -2x + 6y - 14 = 0$

- Ecuación afín: $6y = 2x + 14 \Leftrightarrow y = \frac{2}{6}x + \frac{14}{6} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

b) Despejando y tenemos: $2y = 3x + 5 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$. Entonces la pendiente de la recta es $m = \frac{3}{2}$. Por tanto $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 56,31^\circ$, donde α es el ángulo que forma la recta con el eje X .

c)
$$d(P, r) = \frac{|1 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{10} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \approx 2,53$$

d) Un vector director de r es $\vec{u} = (2, 1)$ y un vector director de la recta s es $\vec{v} = (1, 3)$ (la ecuación general de la recta s es $3x - y - 7 = 0$). Llamando α al ángulo que forman las dos rectas:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5\sqrt{50}}{50} = \\ &= \frac{5^2 \cdot \sqrt{2}}{5^2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ \end{aligned}$$

6. La recta que pasa por $B(-1, 2)$ y $C(3, 0)$ tiene vector director $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (4, -2)$. Por tanto su ecuación es:

$$r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-2} \Leftrightarrow r \equiv -2x - 2 = 4y - 8 \Leftrightarrow r \equiv 2x + 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow r \equiv x + 2y - 3 = 0$$

Un vector perpendicular a la recta anterior es $\vec{v} = (2, 4)$. Por tanto la recta perpendicular a la anterior que pasa por $A(-2, -5)$ es:

$$s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y+5}{4} \Leftrightarrow s \equiv 4x + 8 = 2y + 10 \Leftrightarrow s \equiv 4x - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow s \equiv 2x - y - 1 = 0$$

El punto P de corte de r y s es la solución al sistema de ecuaciones formado por las dos rectas:

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow P = (1, 1)$$

a) La longitud h de la altura que pasa por el vértice A es:

$$h = d(A, P) = |\vec{AP}| = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (1 - (-5))^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$$

b) La longitud de la base b correspondiente a la altura h calculada en el apartado anterior es:

$$b = d(B, C) = |\vec{BC}| = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

Por tanto el área S del triángulo es:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{20}\sqrt{45}}{2} = \frac{\sqrt{900}}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ u}^2$$