

3 Trigonometría

ACTIVIDADES INICIALES

- 3.I. En una recta r hay tres puntos: A , B y C , que distan, sucesivamente, 2 y 5 cm. Por esos puntos se trazan rectas paralelas que cortan otra, s , en M , N y P .

Si el segmento MN mide 8 cm, ¿cuál es la distancia entre los puntos N y P ?

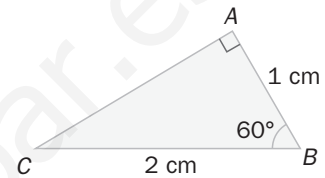
Por el teorema de Tales, los segmentos correspondientes en ambas rectas son proporcionales.

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{5}{NP} \Rightarrow NP = 20 \text{ cm}$$

- 3.II. Calcula las medidas de los elementos que faltan en el triángulo rectángulo de la derecha.

Los ángulos del triángulo miden 90° , 60° y 30° .

El cateto que falta mide $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ cm.



EJERCICIOS PROPUESTOS

- 3.1. Expresa las siguientes medidas de ángulos en radianes.

a) 30°

b) 60°

c) 330°

d) 200°

$$a) 30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{30}{180} \pi = \frac{1}{6} \pi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$c) 330^\circ = 330 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{330}{180} \pi = \frac{11}{6} \pi = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

$$b) 60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{60}{180} \pi = \frac{1}{3} \pi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$d) 200^\circ = 200 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{200}{180} \pi = \frac{10}{9} \pi = \frac{10\pi}{9} \text{ rad}$$

- 3.2. ¿Cuánto mide en grados sexagesimales un ángulo de 1 rad? Aproxima el resultado con grados, minutos y segundos.

$$1 \text{ rad} = 1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$$

- 3.3. Halla la medida en grados de los siguientes ángulos expresados en radianes.

a) $\frac{7\pi}{3}$ rad

b) $\frac{3\pi}{2}$ rad

c) 4 rad

d) 4π rad

$$a) \frac{7\pi}{3} \text{ rad} = \frac{7\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{7 \cdot 180^\circ}{3} = 420^\circ$$

$$c) 4 \text{ rad} = 4 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 229^\circ 11'$$

$$b) \frac{3\pi}{2} \text{ rad} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{2} = 270^\circ$$

$$d) 4\pi \text{ rad} = 4\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 720^\circ$$

- 3.4. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de estos triángulos.

a) $\hat{A} = 90^\circ$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm

b) $\hat{B} = 90^\circ$, $b = 15$ cm, $c = 12$ cm

$$a) a = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$$

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61} \quad \cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61} \quad \text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{6\sqrt{61}}{61} \quad \cos \hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{5\sqrt{61}}{61} \quad \text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$b) a = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$$

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \quad \cos \hat{A} = \frac{c}{b} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \quad \text{tg } \hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{4}{5} \quad \cos \hat{C} = \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \quad \text{tg } \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

3.5. Calcula la cosecante, la secante y la cotangente del ángulo de menor amplitud del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 10 centímetros, respectivamente.

Hipotenusa: $a = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$ cm. El ángulo de menor amplitud es el opuesto al cateto menor, por tanto:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} \qquad \operatorname{sec} \alpha = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{10}{5} = 2$$

3.6. Calcula las razones trigonométricas de 30° y de 60° . Para ello, toma un triángulo equilátero de lado a y divídelo en dos por una de sus alturas.

Al ser un triángulo equilátero, sus tres ángulos deben medir 60° cada uno. Por tanto: $\alpha = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$

Aplicando el teorema de Pitágoras, se puede calcular el valor de la altura: altura = $\sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

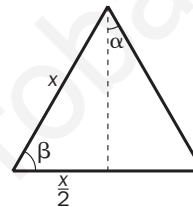
$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 60^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$



3.7. Indica el signo de todas las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

- a) 120° c) 256° e) 315° g) 55°
 b) -70° d) 800° f) 1200° h) -460°

α	120°	-70°	256°	800°	315°	1200°	55°	-480°
Cuadrante	II	IV	III	I	IV	II	I	III
sen α y cosec α	+	-	-	+	-	+	+	-
cos α y sec α	-	+	-	+	+	-	+	-
tg α y cotg α	-	-	+	+	-	-	+	+

3.8. Para los siguientes ángulos, indica el signo de todas sus razones trigonométricas.

- a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{11\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $-\frac{7\pi}{6}$ e) $-\frac{9\pi}{4}$

α	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{9\pi}{4}$
Cuadrante	II	IV	III	I	IV
sen α y cosec α	+	-	-	+	-
cos α y sec α	-	+	-	-	+
tg α y cotg α	-	-	+	-	-

3.9. Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas reduciéndolas al primer cuadrante.

a) $\text{sen } 150^\circ$

c) $\text{tg } 330^\circ$

e) $\text{sec } 240^\circ$

b) $\text{cos } 225^\circ$

d) $\text{cosec } 135^\circ$

f) $\text{cotg } 300^\circ$

a) $\text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$

d) $\text{cosec } 135^\circ = \frac{1}{\text{sen } 135^\circ} = \frac{1}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

b) $\text{cos } 225^\circ = -\text{cos } 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\text{sec } 240^\circ = -\text{sec } 60^\circ = -\frac{1}{\text{cos } 60^\circ} = -2$

c) $\text{tg } 330^\circ = -\text{tg } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{cotg } 300^\circ = -\text{ctg } 60^\circ = -\frac{1}{\text{tg } 60^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.10. Calcula el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas.

a) $\text{sen } \frac{3\pi}{4}$

b) $\text{cosec } \frac{11\pi}{6}$

c) $\text{tg } \frac{4\pi}{3}$

d) $\text{cos } \frac{5\pi}{6}$

a) $\text{sen } \frac{3\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{tg } \frac{4\pi}{3} = \text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

b) $\text{cosec } \frac{11\pi}{6} = -\text{cosec } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{-\text{sen } \frac{\pi}{6}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$

d) $\text{cos } \frac{5\pi}{6} = -\text{cos } \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.11. Sabiendo que la cotangente de un ángulo del primer cuadrante vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$, calcula el resto de las razones de dicho ángulo.

Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones son positivas. Así, tenemos: $\text{tg } \alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha \Rightarrow \text{sec } \alpha = \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2 \Rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } \alpha = \text{cos } \alpha \cdot \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3.12. Calcula las restantes razones de α sabiendo que: $\text{sec } \alpha = -5$ y que $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas.

$$\text{sec } \alpha = -5 \Rightarrow \text{cos } \alpha = -\frac{1}{5}$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5\sqrt{24}}{24}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{24}}{5}}{-\frac{1}{5}} = -24 \Rightarrow \text{cotg } \alpha = -\frac{1}{\sqrt{24}} = -\frac{\sqrt{24}}{24}$$

3.13. Halla todas las razones trigonométricas de α si se sabe que $\text{cotg } \alpha = 2$ y que $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivas, y el resto de razones, negativas.

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}; 1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha \Rightarrow \text{sec } \alpha = -\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} = -\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{cos } \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{sen } \alpha = \text{cos } \alpha \cdot \text{tg } \alpha = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\frac{5\sqrt{5}}{5} = -\sqrt{5}$$

3.14. Calcula la razón pedida en cada caso:

a) $\text{sen } \alpha$, si $\text{tg } \alpha = -3$ y $\alpha \in \text{II}$

b) $\text{tg } \alpha$, si $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha \in \text{IV}$

$$\text{a) } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2} = \frac{9}{10}. \text{ Como } \alpha \in \text{II}, \text{sen } \alpha = +\sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{b) } 1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \text{tg}^2 \alpha = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16} \Rightarrow \text{tg } \alpha = -\frac{3}{4}, \text{ ya que } \alpha \in \text{IV}$$

3.15. Calcula las razones trigonométricas de 75° y $\frac{\pi}{12}$ rad.

$$\text{a) } \text{sen } 75^\circ = \text{sen } (30^\circ + 45^\circ) = \text{sen } 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \text{sen } 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \cos (30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \text{sen } 30^\circ \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg } 75^\circ = \frac{\text{sen } 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 + 2\sqrt{12}}{4} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \text{sen } \frac{\pi}{12} = \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \text{sen } \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \text{sen } \frac{\pi}{3} \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\text{tg} \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} = 2 - \sqrt{3}$$

3.16. Demuestra que $\text{sen} \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) = -\cos \alpha$.

$$\text{sen} \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \alpha \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{2} = \cos \alpha \cdot (-1) = -\cos \alpha$$

3.17. Desarrolla las expresiones de $\cos 3\alpha$ y de $\text{tg } 3\alpha$ en función de las razones trigonométricas del ángulo α .

$$\cos 3\alpha = \cos (\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos 2\alpha - \text{sen } \alpha \text{sen } 2\alpha = \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) - \text{sen } \alpha \cdot 2\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha = \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha - 2\text{sen}^2 \alpha \cdot \cos \alpha = \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{tg } 3\alpha &= \text{tg} (\alpha + 2\alpha) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } 2\alpha}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } 2\alpha} = \frac{\text{tg } \alpha + \frac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \frac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{\text{tg } \alpha - \text{tg}^3 \alpha + 2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}}{\frac{1 - \text{tg}^2 \alpha - 2\text{tg}^2 \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{3\text{tg } \alpha - \text{tg}^3 \alpha}{1 - 3\text{tg}^2 \alpha} \\ &= \frac{\text{tg } \alpha (3 - \text{tg}^2 \alpha)}{1 - 3\text{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

3.18. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$, calcula las razones de $\frac{\alpha}{2}$.

Como α es del $2.^\circ$ cuadrante, $\frac{\alpha}{2}$ es del primero y todas sus razones son positivas.

$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ y, por último, } \text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10} : \frac{\sqrt{10}}{10} = 3$$

3.19. Transforma las siguientes sumas en productos.

a) $\text{sen } 55^\circ + \text{sen } 15^\circ$ b) $\text{sen } 75^\circ - \text{sen } 35^\circ$ c) $\text{cos } 125^\circ + \text{cos } 85^\circ$ d) $\text{cos } 220^\circ - \text{cos } 20^\circ$

a) $\text{sen } 55^\circ + \text{sen } 15^\circ = 2\text{sen } \frac{55^\circ + 15^\circ}{2} \text{cos } \frac{55^\circ - 15^\circ}{2} = 2\text{sen } 35^\circ \text{cos } 20^\circ$

b) $\text{sen } 75^\circ - \text{sen } 35^\circ = 2\text{cos } \frac{75^\circ + 35^\circ}{2} \text{sen } \frac{75^\circ - 35^\circ}{2} = 2\text{cos } 55^\circ \text{sen } 20^\circ$

c) $\text{cos } 125^\circ + \text{cos } 85^\circ = 2\text{cos } \frac{125^\circ + 85^\circ}{2} \text{cos } \frac{125^\circ - 85^\circ}{2} = 2\text{cos } 105^\circ \text{cos } 20^\circ$

d) $\text{cos } 220^\circ - \text{cos } 20^\circ = -2\text{sen } \frac{220^\circ + 20^\circ}{2} \text{sen } \frac{220^\circ - 20^\circ}{2} = -2\text{sen } 120^\circ \text{sen } 100^\circ$

3.20. Transforma los siguientes productos en sumas.

a) $\text{sen } 80^\circ \cdot \text{sen } 40^\circ$ b) $\text{cos } 25^\circ \cdot \text{cos } 10^\circ$

a) $\frac{A+B}{2} = 80^\circ, \frac{A-B}{2} = 40^\circ \Rightarrow A = 120^\circ, B = 40^\circ$ $\text{sen } 80^\circ \cdot \text{sen } 40^\circ = -\frac{1}{2} (\text{cos } 120^\circ - \text{cos } 40^\circ)$

b) $\frac{A+B}{2} = 25^\circ, \frac{A-B}{2} = 10^\circ \Rightarrow A = 35^\circ, B = 15^\circ$ $\text{cos } 25^\circ \cdot \text{cos } 10^\circ = \frac{1}{2} (\text{cos } 35^\circ + \text{cos } 15^\circ)$

3.21. Comprueba que $\text{cos } 75^\circ + \text{cos } 45^\circ = \text{cos } 15^\circ$.

$$\text{cos } 75^\circ + \text{cos } 45^\circ = 2\text{cos } \frac{75^\circ + 45^\circ}{2} = 2\text{cos } \frac{75^\circ - 45^\circ}{2} = 2\text{cos } 60^\circ \text{cos } 15^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \text{cos } 15^\circ = \text{cos } 15^\circ$$

3.22. Simplifica la siguiente expresión: $\frac{\text{cos } 2x + \text{cos } x}{\text{sen } 2x + \text{sen } x}$

$$\frac{\text{cos } 2x + \text{cos } x}{\text{sen } 2x + \text{sen } x} = \frac{2\text{cos } \frac{2x+x}{2} \text{cos } \frac{2x-x}{2}}{2\text{sen } \frac{2x+x}{2} \text{cos } \frac{2x-x}{2}} = \frac{\text{cos } \frac{3x}{2}}{\text{sen } \frac{3x}{2}} = \text{cotg } \frac{3x}{2}$$

3.23. Resuelve las siguientes ecuaciones y da los resultados en grados y en radianes.

a) $\text{sen } x = 1$ c) $2 \text{cos } x + 1 = 0$
 b) $\text{tg } x = 0$ d) $\sqrt{3} \text{tg } x - 1 = 0$

a) $\text{sen } x = 1$ El seno de un ángulo vale 1 únicamente en $90^\circ, 450^\circ, 810^\circ$, etc.
 Por tanto: $x = 90^\circ + 360^\circ k$ con $k \in \mathbb{Z}$ o $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{tg } x = 0$ La tangente vale 0 en los ángulos $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ$, etc.
 Por tanto: $x = 180^\circ k$ con $k \in \mathbb{Z}$ o $x = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\text{cos } x = -\frac{1}{2}$ El coseno es negativo para los ángulos de los cuadrantes 2.º y 3.º
 Por tanto: $x = 120^\circ + 360^\circ k, x = 240^\circ + 360^\circ k$ con $k \in \mathbb{Z}$ o $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$

d) $\text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ La tangente es positiva para los ángulos de los cuadrantes 1.º y 3.º
 Por tanto: $x = 30^\circ + 360^\circ k, x = 210^\circ + 360^\circ k$ con $k \in \mathbb{Z}$ o $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$

3.24. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en el intervalo $[0, 2\pi]$.

a) $\begin{cases} \text{tg } (x + y) = \sqrt{3} \\ x + 2y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \text{sen } x - \text{sen } y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \\ \text{sen } x + \text{sen } y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{cases}$

$$a) \begin{cases} \operatorname{tg}(x+y) = \sqrt{3} \\ x+2y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}(x+y) = \sqrt{3} \\ x+y = \frac{\pi}{2} - y \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{cotg} y = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}, y = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{\pi}{6}, y = \frac{\pi}{6}$$

$$b) \begin{cases} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}-1 + \sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}+1 - \sqrt{3}+1}{2} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x = \frac{\pi}{3}; y = \frac{\pi}{6}\right) \left(x = \frac{2\pi}{3}; y = \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x = \frac{\pi}{3}; y = \frac{5\pi}{6}\right) \left(x = \frac{2\pi}{3}; y = \frac{5\pi}{6}\right)$$

3.25. Calcula la longitud del lado c de un triángulo ABC sabiendo que $a = 10$ cm, $\widehat{A} = 45^\circ$ y $\widehat{B} = 100^\circ$.

$$\widehat{C} = 180^\circ - 100^\circ - 45^\circ = 35^\circ \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{10 \cdot \operatorname{sen} 35^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ} = 8,11 \text{ cm}$$

3.26. Calcula la longitud del lado c de un triángulo ABC sabiendo que $a = 12$ cm, $b = 15$ cm y $\widehat{C} = 35^\circ$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cos 35^\circ = 74,105 \Rightarrow c = 8,61 \text{ cm}$$

3.27. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos y calcula sus áreas.

$$a) \widehat{A} = 90^\circ, b = 15 \text{ cm}, a = 20 \text{ cm} \quad b) \widehat{B} = 90^\circ, \widehat{C} = 25^\circ, b = 10 \text{ m} \quad c) \widehat{C} = 90^\circ, b = 10 \text{ mm}, a = 18 \text{ mm}$$

$$a) c = \sqrt{20^2 - 15^2} = 13,23; \operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{15}{20} = 0,75 \Rightarrow \widehat{B} = 48^\circ 35', \widehat{C} = 41^\circ 25'. \text{Área: } \frac{bc}{2} = 99,225 \text{ cm}^2$$

$$b) \widehat{A} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ; a = b \cos \widehat{C} = 10 \cos 25^\circ = 9,06 \text{ m}; c = b \operatorname{sen} \widehat{C} = 10 \operatorname{sen} 25^\circ = 4,23 \text{ m}. \text{Área: } \frac{ac}{2} = 19,16 \text{ m}^2$$

$$c) c = \sqrt{10^2 + 18^2} = 20,59 \text{ mm}; \operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{10}{18} = 0,556 \Rightarrow \widehat{B} = 29^\circ 3', \widehat{A} = 60^\circ 57'. \text{Área: } \frac{ba}{2} = 90 \text{ mm}^2$$

3.28. Resuelve los siguientes triángulos y calcula sus áreas.

$$a) \widehat{A} = 80^\circ, \widehat{B} = 40^\circ, a = 8 \text{ dm}$$

$$c) a = 10 \text{ cm}, b = 15 \text{ cm}, c = 20 \text{ cm}$$

$$b) \widehat{A} = 80^\circ, a = 10 \text{ m}, b = 5 \text{ m}$$

$$d) \widehat{A} = 75^\circ, b = 8 \text{ mm}, c = 12 \text{ mm}$$

$$a) \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \widehat{B}}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{8 \cdot \operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ} = 5,22 \text{ dm}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{8 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ} = 7,04 \text{ dm}$$

$$\text{Área: } S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \widehat{C} = 18,1 \text{ dm}^2$$

b) Aplicando el teorema del seno:

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{b \operatorname{sen} \widehat{A}}{a} = \frac{5 \operatorname{sen} 80^\circ}{10} = 0,492 \Rightarrow \widehat{B} = 29^\circ 29'$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 80^\circ - 29^\circ 29' = 70^\circ 31'$$

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \cos 70^\circ 31' = 91,65 \Rightarrow c = 9,57 \text{ m}$$

$$\text{Área: } S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \operatorname{sen} \widehat{B} = 23,56 \text{ m}^2$$

c) Por el teorema del coseno:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{225 + 400 - 100}{600} = 0,875 \Rightarrow \hat{A} = 28^\circ 57'$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{100 + 400 - 225}{400} = 0,6875 \Rightarrow \hat{B} = 46^\circ 34'$$

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{100 + 225 - 400}{300} = -0,25 \Rightarrow \hat{C} = 104^\circ 29'$$

$$\text{Área: } S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \hat{B} = 72,6 \text{ cm}^2$$

d) Por el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 75^\circ = 158,31 \Rightarrow a = 12,58 \text{ mm}$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\sin \hat{B} = \frac{b \sin \hat{A}}{a} = \frac{8 \sin 75^\circ}{12,58} = 0,614 \Rightarrow \hat{B} = 37,88^\circ = 37^\circ 52' 45''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 75^\circ - 37,88^\circ = 67,12^\circ = 67^\circ 7' 12''$$

$$\text{Área: } S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \hat{A} = 46,36 \text{ mm}^2$$

EJERCICIOS

Medida de ángulos

3.29. Copia y completa las siguientes tablas.

Grados	30°		60°	
Radianes		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$

Grados	210°		240°	
Radianes		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$

Grados		135°		180°
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	

Grados		315°		360°
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$	

Grados	30°	45°	60°	90°
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Grados	210°	225°	240°	270°
Radianes	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

Grados	120°	135°	150°	180°
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Grados	300°	315°	330°	360°
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

3.30. Pasa de grados a radianes.

a) 585°

b) 450°

$$a) 585^\circ = 585 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{13\pi}{4} \text{ rad}$$

$$b) 450^\circ = 450 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad}$$

c) 76° 52' 30"

d) 382° 30'

$$c) 76^\circ 52' 30'' = 76,875 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{41\pi}{96} \text{ rad}$$

$$d) 382^\circ 30' = 382,5 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{17\pi}{8} \text{ rad}$$

3.31. Pasa de radianes a grados.

a) $\frac{41\pi}{3}$ rad

b) 13π rad

$$a) \frac{41\pi}{3} \text{ rad} = \frac{41\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 2460^\circ$$

$$b) \frac{11\pi}{12} \text{ rad} = \frac{11\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 165^\circ$$

c) $\frac{11\pi}{12}$ rad

d) 5 rad

$$c) 13\pi \text{ rad} = 13\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 2340^\circ$$

$$d) 5 \text{ rad} = 5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 286^\circ 28' 44''$$

3.32. Indica los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas completas más el ángulo restante.

a) 2345°

b) -1500°

c) $\frac{46\pi}{3}$ rad

d) $-\frac{52\pi}{7}$ rad

$$a) 2345^\circ = 6 \cdot 360^\circ + 185^\circ = 6 \text{ vueltas} + 185^\circ$$

$$b) -1500^\circ = -4 \cdot 360^\circ - 60^\circ = -4 \text{ vueltas} - 60^\circ$$

$$c) \frac{46\pi}{3} = 7 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} = 7 \text{ vueltas} + \frac{4\pi}{3}$$

$$d) -\frac{52\pi}{7} = -3 \cdot 2\pi - \frac{10\pi}{7} = -3 \text{ vueltas} - \frac{10\pi}{7}$$

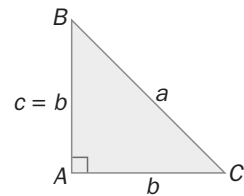
Razones trigonométricas

3.33. Halla los valores exactos de las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo de la figura.

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$$

$$a = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2}$$

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{cos } 45^\circ, \text{ y } \text{tg } 45^\circ = \frac{b}{b} = 1$$



3.34. En un triángulo isósceles, el lado mayor es el triple del lado menor. Calcula las razones trigonométricas.

Llamando al lado menor $2x$, el lado mayor será $6x$.

$$\text{Altura: } h = \sqrt{(6x)^2 - x^2} = x\sqrt{35}$$

$$\text{Si el ángulo mayor es } \alpha, \text{ sen } \alpha = \frac{x\sqrt{35}}{6x} = \frac{\sqrt{35}}{6}, \text{ cos } \alpha = \frac{x}{6x} = \frac{1}{6} \text{ y } \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{35}x}{x} = \sqrt{35}.$$

Para hallar las razones del ángulo menor, β , teniendo en cuenta que $\beta = \pi - 2\alpha$, podemos aplicar las fórmulas correspondientes.

$$\text{sen } \beta = \text{sen } (\pi - 2\alpha) = \text{sen } 2\alpha = 2\text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha = \frac{\sqrt{35}}{18}, \text{ cos } \beta = \text{cos } (\pi - 2\alpha) = -\text{cos } 2\alpha = \text{sen}^2 \alpha - \text{cos}^2 \alpha = \frac{17}{18}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{sen } \beta}{\text{cos } \beta} = \frac{\sqrt{35}}{17}$$

3.35. (TIC) Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas.

a) $\text{sen } 36^\circ$

e) $\text{cotg } 111^\circ$

i) $\text{sec } 126^\circ 33'$

b) $\text{cos } 124^\circ$

f) $\text{sec } 25^\circ$

j) $\text{tg } 23^\circ 23' 23''$

c) $\text{tg } 331^\circ$

g) $\text{sen } 25^\circ 40'$

k) $\text{tg } 33^\circ 42'$

d) $\text{cosec } 27^\circ$

h) $\text{cos } 13^\circ 15'$

l) $\text{cotg } 121^\circ 22' 45''$

a) $\text{sen } 36^\circ = 0,588$

e) $\text{cotg } 111^\circ = -0,384$

i) $\text{sen } 126^\circ 33' = -1,679$

b) $\text{cos } 124^\circ = -0,559$

f) $\text{sec } 25^\circ = 1,103$

j) $\text{tg } 23^\circ 23' 23'' = 0,433$

c) $\text{tg } 331^\circ = -0,554$

g) $\text{sen } 25^\circ 40' = 0,433$

k) $\text{tg } 33^\circ 42' = 0,667$

d) $\text{cosec } 27^\circ = 2,203$

h) $\text{cos } 13^\circ 15' = 0,973$

l) $\text{cotg } 121^\circ 22' 45'' = -0,61$

3.36. (TIC) Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas y ten en cuenta que todos los ángulos están dados en radianes.

a) $\text{sen } \frac{\pi}{12}$

b) $\text{cosec } 2$

c) $\text{cos } \frac{3\pi}{7}$

d) $\text{sec } 3$

e) $\text{tg } \frac{21\pi}{5}$

f) $\text{cotg } 2,75$

a) $\text{sen } \frac{\pi}{12} = 0,259$

c) $\text{cos } \frac{3\pi}{7} = 0,223$

e) $\text{tg } \frac{21\pi}{5} = 0,727$

b) $\text{cosec } 2 = 1,1$

d) $\text{sec } 3 = -1,01$

f) $\text{cotg } 2,75 = -2,422$

3.37. (TIC) Con ayuda de la calculadora, halla la medida en grados del ángulo α del primer cuadrante tal que:

a) $\text{sen } \alpha = 0,345$

c) $\text{tg } \alpha = 0,25$

e) $\text{sec } \alpha = 0,442$

b) $\text{cosec } \alpha = 0,3$

d) $\text{cos } \alpha = 0,553$

f) $\text{cotg } \alpha = 0,01$

a) $\text{sen } \alpha = 0,345 \Rightarrow \alpha = 20^\circ 11'$

d) $\text{sec } \alpha = 0,442 \Rightarrow$ No existe ningún ángulo.

b) $\text{cosec } \alpha = 0,3 \Rightarrow$ No existe ningún ángulo.

e) $\text{cos } \alpha = 0,553 \Rightarrow \alpha = 56^\circ 26'$

c) $\text{tg } \alpha = 0,25 \Rightarrow \alpha = 14^\circ 2'$

f) $\text{cotg } \alpha = 0,01 \Rightarrow \alpha = 89^\circ 26'$

3.38. Calcula, de forma exacta, el valor de las siguientes razones trigonométricas.

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $\text{sen } 240^\circ$ | d) $\text{cosec } 330^\circ$ | g) $\text{sec } 120^\circ$ |
| b) $\text{cos } 135^\circ$ | e) $\text{tg } 300^\circ$ | h) $\text{cotg } 225^\circ$ |
| c) $\text{sen } \frac{7\pi}{4}$ | f) $\text{tg } \frac{7\pi}{3}$ | i) $\text{sec } \frac{5\pi}{3}$ |
-
- | | | |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| a) $\text{sen } 240^\circ = -\text{sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | d) $\text{cosec } 330^\circ = -\text{cosec } 30^\circ = -2$ | g) $\text{sec } 120^\circ = -\text{sec } 60^\circ = -2$ |
| b) $\text{cos } 135^\circ = -\text{cos } 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | e) $\text{tg } 300^\circ = -\text{tg } 60^\circ = -\sqrt{3}$ | h) $\text{cotg } 225^\circ = \text{cotg } 45^\circ = 1$ |
| c) $\text{sen } \frac{7\pi}{4} = -\text{sen } \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | f) $\text{tg } \frac{7\pi}{3} = \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$ | i) $\text{sec } \frac{5\pi}{3} = \text{sec } \frac{\pi}{3} = 2$ |

3.39. Halla el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas.

- | | | | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------|--------------------------|------------------------------------------------|
| a) $\text{sen } 1215^\circ$ | b) $\text{cos } (-600^\circ)$ | c) $\text{cosec } \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ | d) $\text{cotg } 1830^\circ$ | e) $\text{tg } (-15\pi)$ | f) $\text{sec } \left(-\frac{13\pi}{3}\right)$ |
|-----------------------------|-------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------|--------------------------|------------------------------------------------|
-
- | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\text{sen } 1215^\circ = \text{sen } 135^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | d) $\text{cotg } 1830^\circ = \text{cotg } 30^\circ = \sqrt{3}$ |
| b) $\text{cos } (-600^\circ) = \text{cos } 600^\circ = \text{cos } 240^\circ = -\text{cos } 60^\circ = -\frac{1}{2}$ | e) $\text{tg } (-15\pi) = -\text{tg } 15\pi = -\text{tg } \pi = 0$ |
| c) $\text{cosec } \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\text{cosec } \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{2}} = -1$ | f) $\text{sec } \left(-\frac{13\pi}{3}\right) = \text{sec } \frac{13\pi}{3} = \text{sec } \frac{\pi}{3} = 2$ |

3.40. Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que:

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| a) Es un ángulo del primer cuadrante y $\text{cos } \alpha = \frac{2}{3}$. | d) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ y $\text{sec } \alpha = \sqrt{2}$ |
| b) Pertenece al segundo cuadrante y $\text{sen } \alpha = 0,25$. | e) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ y $\text{cotg } \alpha = -3$ |
| c) $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ y $\text{tg } \alpha = \sqrt{2}$ | f) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ y $\text{cosec } \alpha = -\frac{5}{2}$ |

a) Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones trigonométricas son positivas.

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha} = \frac{3}{2}, \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas.

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Rightarrow \text{cos } \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}, \text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = -\sqrt{15}, \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = 4,$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha} = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivas y el resto de razones son negativas.

$$\text{tg } \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha \Rightarrow \text{sec } \alpha = -\sqrt{1 + 1\text{tg}^2 \alpha} = -\sqrt{1 + 2} = -\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{cos } \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } \alpha = \text{cos } \alpha \cdot \text{tg } \alpha = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{3\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

d) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, el coseno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas.

$$\sec \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sec^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sec^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sec^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sec \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -1 \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}$$

e) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas.

$$\operatorname{cotg} \alpha = -3 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec \alpha = -\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

f) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivas y el resto de razones son negativas.

$$\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sec^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{21}}{2}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{5}{\sqrt{21}} = -\frac{5\sqrt{21}}{21}$$

3.41. Calcula en función de h el valor de cada una de las siguientes razones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen} 123^\circ$, siendo $\operatorname{sen} 57^\circ = h$.

f) $\operatorname{cosec} 701^\circ$, siendo $\operatorname{cotg} 199^\circ = h$.

b) $\cos 220^\circ$, siendo $\operatorname{tg} 40^\circ = h$.

g) $\operatorname{tg} 290^\circ$, siendo $\operatorname{sen} 110^\circ = h$.

c) $\operatorname{tg} 260^\circ$, siendo $\operatorname{sen} 80^\circ = h$.

h) $\operatorname{sen} 83^\circ$, siendo $\cos 7^\circ = h$.

d) $\cos 250^\circ$, siendo $\operatorname{sen} 110^\circ = h$.

i) $\sec 203^\circ$, siendo $\operatorname{cotg} 67^\circ = h$.

e) $\cos 247^\circ$, siendo $\operatorname{sen} 113^\circ = h$.

j) $\sec \frac{11\pi}{12}$, siendo $\operatorname{sen} \frac{\pi}{12} = h$.

a) $\operatorname{sen} 123^\circ = \operatorname{sen} 57^\circ = h$

b) $\cos 220^\circ = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 220^\circ}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 40^\circ}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + h^2}}$

c) $\operatorname{tg} 260^\circ = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 260^\circ} - 1} = \sqrt{\frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 60^\circ} - 1} = \sqrt{\frac{1}{1 - (-\operatorname{sen} 80^\circ)^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{1 - h^2} - 1} = \sqrt{\frac{h^2}{1 - h^2}} = \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}}$

d) $\cos 250^\circ = \cos 110^\circ = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 110^\circ} = -\sqrt{1 - h^2}$

e) $\cos 247^\circ = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 247^\circ} = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 67^\circ} = -\sqrt{1 - h^2}$

f) $\operatorname{cosec} 701^\circ = \operatorname{cosec} 341^\circ = -\operatorname{cosec} 19^\circ = -\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 19^\circ} = -\sqrt{1 + h^2}$

g) $\operatorname{tg} 290^\circ = \operatorname{tg} 110^\circ = h$

h) $\operatorname{sen} 83^\circ = \cos 7^\circ = h$

i) $\sec 203^\circ = \sec 23^\circ = \frac{1}{\cos 23^\circ} = \frac{1}{\operatorname{sen} 67^\circ} = \operatorname{cosec} 67^\circ = \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 67^\circ} = \sqrt{1 + h^2}$

j) $\sec \frac{11\pi}{12} = -\sec \frac{\pi}{12} = -\frac{1}{\cos \frac{\pi}{12}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{12}}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - h^2}}$

Relaciones entre las razones trigonométricas

3.42. Calcula, en función de h , la razón trigonométrica que se indica en cada caso.

a) cosec $\frac{23\pi}{5}$, sabiendo que $\cotg \frac{3\pi}{5} = -h^2$.

b) sec 305° , sabiendo que $\cotg 55^\circ = \frac{1}{h}$.

c) tg 348° , sabiendo que $\cos 192^\circ = -h^2$.

a) cosec $\frac{23\pi}{5} = \text{cosec } \frac{3\pi}{5} = \sqrt{1 + \cotg^2 \frac{3\pi}{5}} = \sqrt{1 + h^4}$

b) sec $305^\circ = \frac{1}{\cos 305^\circ} = \frac{1}{\cos 55^\circ} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1 + \tg^2 55^\circ}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\cotg^2 55^\circ}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{1/h^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + h^2}{1}}} = \sqrt{1 + h^2}$

c) tg $348^\circ = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 348^\circ} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 12^\circ} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{(-\cos 192^\circ)^2} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{h^4} - 1} = -\frac{\sqrt{1 - h^4}}{h^2}$

3.43. Sabiendo que $\sin \alpha = h$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de h :

a) $\sin (90^\circ - \alpha)$

b) $\tg (1080^\circ - \alpha)$

a) $90^\circ - \alpha$ es también un ángulo del primer cuadrante; $\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \sqrt{1 - h^2}$.

b) $1080^\circ = 3 \cdot 360^\circ$; $\tg (1080^\circ - \alpha) = \tg (-\alpha) = -\tg \alpha = \frac{-h}{\sqrt{1 - h^2}}$

3.44. Si $\tg \alpha = h$ y α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de h :

a) $\sin (90^\circ - \alpha)$

b) $\cotg (1080^\circ - \alpha)$

$1 + \tg^2 \alpha = \sec^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \tg^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + h^2}}$; $\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tg \alpha = h \sqrt{\frac{1}{1 + h^2}}$

a) $90^\circ - \alpha$ es también un ángulo del primer cuadrante; $\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + h^2}}$

b) $1080^\circ = 3 \cdot 360^\circ$; $\cotg (1080^\circ - \alpha) = \cotg (-\alpha) = -\cotg \alpha = \frac{-1}{h}$

3.45. Sabiendo que $\text{cosec } x = -\frac{7}{4}$, calcula:

a) $\sin (810^\circ - x)$

b) $\sec \left(\frac{17\pi}{2} - x \right)$

x está en el tercer cuadrante o en el cuarto. Por tanto, $810^\circ - x$ y $\frac{17\pi}{2} - x$ están en el 2.º o 3.º cuadrantes. No se puede saber el signo de $\cos x$, por lo que no se puede saber el signo de $\sin (810^\circ - x)$.

a) $\sin (810^\circ - x) = \sin (90^\circ - x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{\text{cosec}^2 x}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{49}{16}}} = \pm \frac{\sqrt{33}}{7}$

b) $\sec \left(\frac{17\pi}{2} - x \right) = \sec \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \frac{1}{\sin x} = \text{cosec } x = -\frac{7}{4}$

3.46. Demuestra que $\tg (270 - x) = \cotg x$.

$\tg(270^\circ - x) = \frac{\sin (270^\circ - x)}{\cos (270^\circ - x)} = \frac{\sin 270^\circ \cos x - \cos 270^\circ \sin x}{\cos 270^\circ \cos x + \sin 270^\circ \sin x} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \cotg x$

3.47. Desarrolla en función de $\text{sen } \alpha$ y $\text{cos } \alpha$ la expresión de $\text{sen } 3\alpha$.

$$\begin{aligned}\text{sen } 3\alpha &= \text{sen } (\alpha + 2\alpha) = \text{sen } \alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen } 2\alpha = \\ &= \text{sen } \alpha (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) + \cos \alpha (2\text{sen } \alpha \cos \alpha) = \\ &= \text{sen } \alpha \cos^2 \alpha - \text{sen}^3 \alpha + 2\text{sen } \alpha \cos^2 \alpha = 3\text{sen } \alpha \cos^2 \alpha - \text{sen}^3 \alpha\end{aligned}$$

3.48. Sabiendo que $\text{sen } \alpha = 0,25$ y $\text{cos } \beta = 0,5$, y que α y β son ángulos del primer cuadrante, calcula:

a) $\text{sen } (\alpha + \beta)$ b) $\text{cos } (\alpha - \beta)$ c) $\text{sec } (\alpha + \beta)$ d) $\text{cotg } (\alpha - \beta)$

$$\text{sen } \alpha = 0,25; \text{cos } \alpha = 0,968; \text{sen } \beta = 0,866; \text{cos } \beta = 0,5$$

$$\text{a) } \text{sen } (\alpha + \beta) = 0,25 \cdot 0,5 + 0,968 \cdot 0,866 = 0,96$$

$$\text{b) } \text{cos } (\alpha - \beta) = 0,968 \cdot 0,5 - 0,25 \cdot 0,866 = 0,7$$

$$\text{c) } \text{sec } (\alpha + \beta) = \frac{1}{\text{cos } (\alpha + \beta)} = \frac{1}{0,968 \cdot 0,5 - 0,25 \cdot 0,866} = 3,74$$

$$\text{d) } \text{cotg } (\alpha - \beta) = \frac{1}{\text{tg } (\alpha - \beta)} = \frac{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta} = \frac{1 + \frac{0,25}{0,968} \cdot \frac{0,866}{0,5}}{\frac{0,25}{0,968} - \frac{0,866}{0,5}} = -0,98$$

3.49. Si $\text{sen } \alpha = 0,4$ y $\text{cos } \beta = -0,5$, siendo $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, calcula:

a) $\text{sen } (\alpha - \beta)$ b) $\text{cos } (\alpha + \beta)$ c) $\text{tg } (\alpha + \beta)$

$$\text{sen } \alpha = 0,4; \text{cos } \alpha = -0,917; \text{sen } \beta = -0,866; \text{cos } \beta = -0,5$$

$$\text{a) } \text{sen } (\alpha - \beta) = -0,4 \cdot 0,5 - 0,917 \cdot 0,866 = -0,99$$

$$\text{b) } \text{cos } (\alpha + \beta) = 0,917 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,866 = 0,80$$

$$\text{c) } \text{tg } (\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} = \frac{-\frac{0,4}{0,917} + \frac{0,866}{0,5}}{1 + \frac{0,4}{0,917} \cdot \frac{0,866}{0,5}} = 0,74$$

3.50. Sabiendo que $\text{tg } \alpha = 3$, calcula las razones trigonométricas del ángulo 2α en cada caso.

a) Si α es un ángulo del primer cuadrante. b) Si α es un ángulo del tercer cuadrante.

a) El ángulo 2α pertenece al segundo cuadrante. Al ser $\text{tg } \alpha > 1$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

$$\text{tg } \alpha = 3 \Rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}; \text{sen } \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{sen } 2\alpha = 2\text{sen } \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{6 \cdot 10}{100} = 0,6$$

$$\text{cos } 2\alpha = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha = \frac{10}{100} - \frac{9 \cdot 10}{100} = 0,1 - 0,9 = -0,8$$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{0,6}{-0,8} = -0,75$$

b) Los mismos valores del apartado anterior, ya que el ángulo 2α también pertenece en este caso al segundo cuadrante.

3.51. Calcula el valor de la tangente de α sabiendo que es un ángulo del primer cuadrante y que $\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}\text{cos } \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{1 - \left(\text{sen } \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}; \text{tg } \alpha = \text{tg } \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{sen } \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right)}{\text{cos } \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right)} = \\ &= \frac{2\text{sen } \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\text{cos}^2 \frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{8}{9} - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{8}}{7}\end{aligned}$$

3.52. Calcula, de forma exacta, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 15°

$$\text{a) } \text{sen } 15^\circ = \text{sen } \left(\frac{30^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{cos } 15^\circ = \text{cos } \left(\frac{30^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{tg } 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} = 2 - \sqrt{3}$$

b) $7^\circ 30'$

$$\text{b) } \text{sen } 7^\circ 30' = \text{sen } \left(\frac{15^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4}}$$

$$\text{cos } 7^\circ 30' = \text{cos } \left(\frac{15^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4}}$$

$$\text{tg } 7^\circ 30' = \frac{\text{sen } 7^\circ 15'}{\text{cos } 7^\circ 15'} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

3.53. Si $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ y $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, calcula las razones trigonométricas de $\frac{\alpha}{2}$.

Si el ángulo α pertenece al segundo cuadrante, el ángulo $\frac{\alpha}{2}$ pertenece al primero.

$$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{6}}; \text{cos } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}; \text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} : \frac{1}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

3.54. Transforma en producto de razones trigonométricas las siguientes sumas.

a) $\text{sen } 48^\circ + \text{sen } 32^\circ$

d) $\text{sen } 105^\circ - \text{sen } 25^\circ$

b) $\text{cos } 200^\circ + \text{cos } 40^\circ$

e) $\text{cos } 23^\circ - \text{cos } 57^\circ$

c) $\text{sen } \frac{\pi}{3} + \text{sen } \frac{\pi}{5}$

f) $\text{cos } \frac{\pi}{3} - \text{cos } \frac{\pi}{9}$

$$\text{a) } \text{sen } 48^\circ + \text{sen } 32^\circ = 2 \text{sen } \frac{48^\circ + 32^\circ}{2} \text{cos } \frac{48^\circ - 32^\circ}{2} = 2 \text{sen } 40^\circ \text{cos } 8^\circ$$

$$\text{b) } \text{cos } 200^\circ + \text{cos } 40^\circ = 2 \text{cos } \frac{200^\circ + 40^\circ}{2} \text{cos } \frac{200^\circ - 40^\circ}{2} = 2 \text{cos } 120^\circ \text{cos } 80^\circ$$

$$\text{c) } \text{sen } \frac{\pi}{3} + \text{sen } \frac{\pi}{5} = 2 \text{sen } \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5}}{2} \text{cos } \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}}{2} = 2 \text{sen } \frac{4\pi}{15} \text{cos } \frac{\pi}{15}$$

$$\text{d) } \text{sen } 105^\circ - \text{sen } 25^\circ = 2 \text{cos } \frac{105^\circ + 25^\circ}{2} \text{sen } \frac{105^\circ - 25^\circ}{2} = 2 \text{cos } 65^\circ \text{sen } 40^\circ$$

$$\text{e) } \text{cos } 23^\circ - \text{cos } 57^\circ = -2 \text{sen } \frac{23^\circ + 57^\circ}{2} \text{sen } \frac{23^\circ - 57^\circ}{2} = -2 \text{sen } 40^\circ \text{sen } (-17^\circ) = 2 \text{sen } 40^\circ \text{sen } 17^\circ$$

$$\text{f) } \text{cos } \frac{\pi}{3} - \text{cos } \frac{\pi}{9} = -2 \text{sen } \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9}}{2} \text{sen } \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9}}{2} = -2 \text{sen } \frac{2\pi}{9} \text{sen } \frac{\pi}{9}$$

3.55. Transforma en suma de razones trigonométricas los siguientes productos.

a) $2 \operatorname{sen} 33^\circ \cdot \cos 11^\circ$

c) $\operatorname{sen} 50^\circ \cdot \cos 75^\circ$

b) $\cos 95^\circ \cdot \cos 38^\circ$

d) $\operatorname{sen} 119^\circ \cdot \operatorname{sen} 25^\circ$

a) $2 \cdot \operatorname{sen} 33^\circ \cos 11^\circ = \operatorname{sen} 44^\circ + \operatorname{sen} 22^\circ$

b) $\cos 95^\circ \cdot \cos 38^\circ = \frac{1}{2} (\cos 133^\circ + \cos 57^\circ)$

c) $\operatorname{sen} 50^\circ \cdot \cos 75^\circ = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 125^\circ + \operatorname{sen} (-25^\circ)) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 125^\circ - \operatorname{sen} 25^\circ)$

d) $\operatorname{sen} 119^\circ \cdot \operatorname{sen} 25^\circ = -\frac{1}{2} (\cos 144^\circ - \cos 94^\circ)$

3.56. Transforma en productos las siguientes sumas.

a) $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x$

c) $\cos 6x + \cos 4x$

b) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x$

d) $\cos 8x - \cos 2x$

a) $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} \frac{4x + 2x}{2} \cos \frac{4x - 2x}{2} = 2 \operatorname{sen} 3x \cos x$

b) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 2 \cos \frac{3x + x}{2} \operatorname{sen} \frac{3x - x}{2} = 2 \cos 2x \operatorname{sen} x$

c) $\cos 6x + \cos 4x = 2 \cos \frac{6x + 4x}{2} \cos \frac{6x - 4x}{2} = 2 \cos 5x \cos x$

d) $\cos 8x - \cos 2x = -2 \operatorname{sen} \frac{8x + 2x}{2} \operatorname{sen} \frac{8x - 2x}{2} = -2 \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x$

3.57. Simplifica la expresión $\operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen} x$.

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x + \frac{2\pi}{3} + x}{2} \cos \frac{x + \frac{2\pi}{3} - x}{2} = 2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} =$$

$$= 2 \left(\operatorname{sen} x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{\pi}{3} = 2 \left(\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x)$$

3.58. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $\operatorname{sen} (\alpha + \beta + \gamma)$

c) $\operatorname{sen} (2\alpha + \beta)$

b) $\cos (\alpha + \beta - \gamma)$

d) $\cos (\alpha - 2\beta)$

a) $\operatorname{sen} (\alpha + \beta + \gamma) = \operatorname{sen} (\alpha + (\beta + \gamma)) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos (\beta + \gamma) + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} (\beta + \gamma) =$
 $= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma =$
 $= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma$

b) $\cos (\alpha + \beta - \gamma) = \cos (\alpha + (\beta - \gamma)) = \cos \alpha \cdot \cos (\beta - \gamma) - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} (\beta - \gamma) =$
 $= \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \gamma + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma =$
 $= \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \gamma$

c) $\operatorname{sen} (2\alpha + \beta) = \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \cos \beta + \cos 2\alpha \cdot \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$

d) $\cos (\alpha - 2\beta) = \cos \alpha \cdot \cos 2\beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} 2\beta = \cos \alpha \cdot (\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta) + \operatorname{sen} \alpha \cdot 2 \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \beta =$
 $= \cos \alpha \cdot \cos^2 \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \beta$

3.59. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

$$a) \frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - 1} = \cos \alpha$$

$$g) \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$b) \frac{1 + \cot \alpha}{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$h) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$$

$$c) \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$i) \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

$$d) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha$$

$$j) (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta)^2 = \frac{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{2}$$

$$e) \operatorname{tg} \alpha + \cot \alpha = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$$

$$k) \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{2} = \operatorname{tg} 2\alpha$$

$$f) \frac{1 - \cos 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$$

$$a) \frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - 1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - 1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{(\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha) \cdot \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha} = \cos \alpha$$

$$b) \frac{1 + \cot \alpha}{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha} = \frac{1 + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$c) \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$d) \operatorname{tg}^2 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1 \right) = \operatorname{tg} \alpha \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}$$

$$= \operatorname{tg} \alpha \frac{\frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$e) \operatorname{tg} \alpha + \cot \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$$

$$f) \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$$

$$g) \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$h) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha - 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$$

$$i) \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = (\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta) \cdot (\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) =$$

$$= \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta - (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta =$$

$$= \operatorname{sen}^2 \alpha (\cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta) - \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta$$

$$j) (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta)^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta =$$

$$= 1 + 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) - 2 \cdot \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)) =$$

$$= 2 - \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos(\alpha + \beta) = 2 - 2 \left[\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \right] =$$

$$= 2 - 2 \left[1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \right] = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$$

k) Equivale a la identidad del apartado h.

3.60. Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas.

a) $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)^2$

e) $\operatorname{sen} 2\alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha)$

b) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta (\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta)$

f) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha}$

c) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

g) $\frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$

d) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha}$

a) $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2$

b) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta (\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta) = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \right) = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$

c) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 - \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha$

d) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} = \frac{(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha)}{1 - \operatorname{sen} \alpha} = 1 + \operatorname{sen} \alpha$

e) $\operatorname{sen} 2\alpha \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha} \right) = 2$

f) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} = \left(\frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right) \cdot \left(\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} \right) = \frac{(1 - \operatorname{sen} \alpha) \cdot (1 + \operatorname{sen} \alpha)(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha) \cdot (1 - \operatorname{sen} \alpha)} = (1 + \operatorname{sen} \alpha)(1 + \cos \alpha)$

g) $\frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{2}{2\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2}}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2} \cdot \frac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha} = 1$

3.61. Simplifica las siguientes expresiones utilizando las fórmulas de transformación de sumas en productos.

a) $\frac{\operatorname{sen} 8\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \cos 3\alpha}$

b) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

c) $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha}$

d) $\frac{\cos 2\alpha + \cos \alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} \alpha}$

a) $\frac{\operatorname{sen} 8\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \cos 3\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} 5\alpha \cos 3\alpha}{2 \cos 3\alpha} = \operatorname{sen} 5\alpha$

c) $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{2 \cos 4\alpha \operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\cos 4\alpha}$

b) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2}}$

d) $\frac{\cos 2\alpha + \cos \alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \frac{2 \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{3\alpha}{2}$

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

3.62. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en grados.

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg} x = 1$

e) $\cos x = \frac{1}{2}$

g) $\operatorname{sen} x = 0$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

h) $1 + \cos x = 0$

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

d) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 225^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

f) $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

e) $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ + 360^\circ k \\ x = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

g) $1 - \cos x = 0 \Rightarrow x = 360^\circ k$

c) $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

f) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 150^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

3.63. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en radianes.

a) $\text{sen } 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{tg } 3x = -1$

e) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$

b) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\text{sen } \frac{x}{2} = 0$

f) $\text{tg } \frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

a) $\text{sen } 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \\ 4x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}$

d) $\text{sen } \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \pi k \Rightarrow x = 2\pi k$

b) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 2x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \pi k \\ x = \frac{7\pi}{8} + \pi k \end{cases}$

e) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{x}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi + 6\pi k \\ x = 4\pi + 6\pi k \end{cases}$

c) $\text{tg } 3x = -1 \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$

f) $\text{tg } \frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{3x}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10\pi}{9} + \frac{8\pi k}{3} \\ x = \frac{22\pi}{9} + \frac{8\pi k}{3} \end{cases}$

3.64. (TIC) Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\text{sen } x = \cos x$

b) $\text{sen } 2x - \text{sen } x = 0$

c) $\text{sen } x - \sqrt{3} \cos x = 0$

d) $\text{sen } x + \cos x = \sqrt{2}$

a) $\text{sen } x = \cos x \Rightarrow \text{tg } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

b) $\text{sen } 2x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow 2 \text{sen } x \cos x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \text{sen } x (2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$

c) $\text{sen } x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Rightarrow \text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

d) $\text{sen } x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \text{sen } x + \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = \sqrt{2} \Rightarrow 1 - \text{sen}^2 x = 2 + \text{sen}^2 x - 2\sqrt{2} \text{sen } x \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 \text{sen}^2 x - 2\sqrt{2} \text{sen } x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } x = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ k$

3.65. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$.

a) $\text{tg } x + 4 \cot g x = 5$

b) $8 \cos 2x = 8 \cos x - 9$

c) $\text{tg } 2x = \cot g x$

d) $2 \text{sen}^2 x + \cos 2x = 4 \cos^2 x$

a) $\text{tg } x + 4 \cot g x = 5 \Rightarrow \text{tg } x + \frac{4}{\text{tg } x} = 5 \Rightarrow \text{tg}^2 x + 4 = 5 \text{tg } x \Rightarrow \text{tg}^2 x - 5 \text{tg } x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\text{tg } x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg } x = 4 \Rightarrow x = 75^\circ 58' & x = 255^\circ 58' \\ \text{tg } x = 1 \Rightarrow x = 45^\circ & x = 225^\circ \end{cases}$

b) $8 \cos 2x = 8 \cos x - 9 \Rightarrow 8 \cos^2 x - 8 \text{sen}^2 x - 8 \cos x + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 \cos^2 x - 8 + 8 \cos^2 x - 8 \cos x + 9 = 0 \Rightarrow 16 \cos^2 x - 8 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{32} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 75^\circ 31' ; x = 284^\circ 29'$

c) $\text{tg } 2x = \cot g x \Rightarrow \frac{2 \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} = \frac{1}{\text{tg } x} \Rightarrow \frac{2 \text{tg}^2 x}{1 - \text{tg}^2 x} = 1 \Rightarrow 2 \text{tg}^2 x = 1 - \text{tg}^2 x \Rightarrow \text{tg}^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{tg } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ, x = 210^\circ \\ x = 150^\circ, x = 330^\circ \end{cases}$

d) $2 \text{sen}^2 x + \cos 2x = 4 \cos^2 x \Rightarrow 2 \text{sen}^2 x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 4 \cos^2 x \Rightarrow \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 4 \cos^2 x \Rightarrow 1 = 4 \cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ, x = 300^\circ \\ x = 120^\circ, x = 240^\circ \end{cases}$

3.66. (TIC) Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas comprendidas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

a) $\text{sen}^2 x + \text{tg}^2 x = 0$

b) $2 \text{sen} x + \sqrt{3} \text{tg} x = 0$

c) $\cos 2x - \text{sen} x - \text{sen} 2x - \cos x$

a) $\text{sen}^2 x + \text{tg}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi \\ 1 + \frac{1}{\cos^2 x} = 0 \text{ no aporta soluciones} \end{cases}$

b) $2 \text{sen} x + \sqrt{3} \cdot \text{tg} x = 0 \Rightarrow 2 \text{sen} x + \sqrt{3} \cdot \frac{\text{sen} x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \text{sen} x \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{\cos x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$

c) $\cos 2x - \text{sen} x = \text{sen} 2x - \cos x \Rightarrow \cos 2x + \cos x = \text{sen} 2x + \text{sen} x \Rightarrow 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \text{sen} \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \frac{x}{2} \left[\cos \frac{3x}{2} - \text{sen} \frac{3x}{2} \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} ; \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi, x = 3\pi \\ \text{tg} \frac{3x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{4} ; \frac{3x}{2} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

3.67. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

a) $\text{sen} 3x + \text{sen} 6x = 0$

b) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x$

c) $\sqrt{3} \cos x + \text{sen} x = 2$

a) $\text{sen} 3x + \text{sen} 6x = 0 \Rightarrow 2 \text{sen} \frac{9x}{2} \cos \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen} \frac{9x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{2\pi}{9}, x = \frac{2\pi}{9} \\ \cos \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow x = \pi, x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

b) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x \Rightarrow 2 \cos 4x \cos x = \cos x \Rightarrow \cos x (2 \cos 4x - 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2} \\ \cos 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}, x = \frac{\pi}{12}, x = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

c) $\sqrt{3} \cos x + \text{sen} x = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \text{sen} x = 1 \Rightarrow \text{sen} \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

3.68. (TIC) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 360^\circ]$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = \frac{3}{4} \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a) } \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x = 2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ \Rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ, y = 60^\circ \\ x = 90^\circ, y = 120^\circ \\ x = 90^\circ, y = 240^\circ \\ x = 90^\circ, y = 300^\circ \end{cases} \\ x = 270^\circ \Rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 270^\circ, y = 60^\circ \\ x = 270^\circ, y = 120^\circ \\ x = 270^\circ, y = 240^\circ \\ x = 270^\circ, y = 300^\circ \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)) = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)) = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2\operatorname{sen}(x+y) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(x+y) = \frac{1}{2} \Rightarrow x+y = 30^\circ, x+y = 150^\circ$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2\operatorname{sen}(x-y) = 0 \Rightarrow x-y = 0^\circ, x-y = 180^\circ$$

Soluciones:

$$(x = 15^\circ, y = 15^\circ) (x = 75^\circ, y = 75^\circ) (x = 285^\circ, y = 105^\circ) (x = 105^\circ, y = 285^\circ) (x = 165^\circ, y = 345^\circ) (x = 345^\circ, y = 165^\circ)$$

$$\text{c) } \begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 45^\circ \Rightarrow x-y = 90^\circ \\ \frac{x-y}{2} = 315^\circ \Rightarrow x-y = 630^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 90^\circ \\ x - y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 90^\circ, y = 0^\circ$$

$$\text{d) } \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x-\pi) = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = 45^\circ, x = 225^\circ$$

$$\text{Solución: } x = 225^\circ, y = 45^\circ$$

Resolución de triángulos

3.69. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\widehat{A} = 90^\circ, a = 25 \text{ mm}, c = 14 \text{ mm}$

c) $\widehat{C} = 90^\circ, \widehat{A} = 20^\circ, a = 12 \text{ dm}$

b) $\widehat{B} = 90^\circ, a = 28 \text{ cm}, c = 45 \text{ cm}$

d) $\widehat{B} = 90^\circ, \widehat{A} = 15^\circ, b = 15 \text{ m}$

a) $b = \sqrt{25^2 - 14^2} = 20,71 \text{ mm}, \operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{14}{25} \Rightarrow \widehat{C} = 34^\circ 3' \Rightarrow \widehat{B} = 55^\circ 57'$

b) $b = \sqrt{45^2 + 28^2} = 53 \text{ cm}; \operatorname{tg} \widehat{C} = \frac{45}{28} \Rightarrow \widehat{C} = 58^\circ 7' \Rightarrow \widehat{A} = 31^\circ 53'$

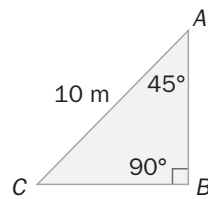
c) $\widehat{B} = 70^\circ; c = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{12}{\operatorname{sen} 20} = 35,09 \text{ dm}; b = \frac{a}{\operatorname{tg} \widehat{A}} = \frac{12}{\operatorname{tg} 20} = 32,97 \text{ dm}$

d) $\widehat{C} = 75^\circ; a = b \operatorname{sen} \widehat{A} = 15 \cdot \operatorname{sen} 15 = 3,88 \text{ m}; c = b \cdot \cos \widehat{A} = 15 \cos 15 = 14,49 \text{ m}$

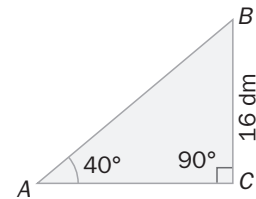
3.70. Calcula el área de cada uno de estos triángulos rectángulos.

a) $\widehat{A} = 90^\circ$, $a = 73$ mm, $c = 55$ mm

b)



c)



a) $b = \sqrt{73^2 - 55^2} = 48 \Rightarrow S = \frac{55 \cdot 48}{2} = 1320 \text{ mm}^2$

b) $a = 10 \text{ sen } 45 = 5\sqrt{2} \text{ m}$; $c = 5\sqrt{2} \text{ m}$; $S = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 25 \text{ m}^2$

c) $b = \frac{a}{\text{tg } \widehat{A}} = \frac{16}{\text{tg } 40} = 19,07 \text{ dm}$; $S = \frac{16 \cdot 19,07}{2} = 152,6 \text{ dm}^2$

3.71. Resuelve los siguientes triángulos.

a) $b = 20$ cm, $c = 28$ cm, $\widehat{C} = 40^\circ$ c) $a = 3$ cm, $\widehat{B} = 30^\circ$, $c = 5$ cm e) $a = 30$ cm, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 50^\circ$

b) $a = 41$ cm, $b = 9$ cm, $c = 40$ cm d) $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $\widehat{C} = 35^\circ$ f) $b = 25$ cm, $\widehat{B} = 55^\circ$, $\widehat{C} = 65^\circ$

a) $\frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \frac{b \cdot \text{sen } \widehat{C}}{c} = \frac{20 \cdot \text{sen } 40^\circ}{28} = 0,459 \Rightarrow \widehat{B} = 27^\circ 20'$, $\widehat{A} = 112^\circ 40'$

$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \text{sen } \widehat{A}}{\text{sen } \widehat{C}} = \frac{28 \cdot \text{sen } 112^\circ 40'}{\text{sen } 40^\circ} = 40,2 \text{ cm}$

b) $\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{81 + 1600 - 1681}{720} = 0 \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$

$\cos \widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1681 + 1600 - 81}{3280} = 0,9756 \Rightarrow \widehat{B} = 12^\circ 41'$

$\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1681 + 81 - 1600}{738} = 0,2195 \Rightarrow \widehat{A} = 77^\circ 19'$

c) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B} = 9 + 25 - 30 \cos 30 = 8,0192 \Rightarrow b = 2,8318 \text{ cm}$

$\frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{C} = \frac{c \cdot \text{sen } \widehat{B}}{b} = \frac{5 \cdot \text{sen } 30^\circ}{2,8318} = 0,8828 \Rightarrow$ Dos soluciones $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{C} = 61^\circ 59', \widehat{A} = 88^\circ 1' \\ \widehat{C} = 118^\circ 1', \widehat{A} = 31^\circ 59' \end{array} \right.$

d) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} = 144 + 225 - 360 \cos 35^\circ = 74,1053 \Rightarrow c = 8,6084 \text{ cm}$

$\frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \frac{b \cdot \text{sen } \widehat{C}}{c} = \frac{15 \cdot \text{sen } 35^\circ}{8,6084} = 0,999 \Rightarrow$ Dos soluciones $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{C} = 88^\circ 5', \widehat{A} = 56^\circ 55' \\ \widehat{C} = 91^\circ 54', \widehat{A} = 53^\circ 6' \end{array} \right.$

e) $\widehat{A} = 180^\circ - 30^\circ - 50^\circ = 100^\circ$

$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{30 \cdot \text{sen } 50^\circ}{\text{sen } 100^\circ} = 23,34 \text{ cm}$

$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \text{sen } \widehat{B}}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{30 \cdot \text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 100^\circ} = 15,23 \text{ cm}$

f) $\widehat{A} = 180^\circ - 55^\circ - 65^\circ = 60^\circ$

$\frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{25 \cdot \text{sen } 65^\circ}{\text{sen } 55^\circ} = 27,66$

$\frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \text{sen } \widehat{A}}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{25 \cdot \text{sen } 60^\circ}{\text{sen } 55^\circ} = 26,43 \text{ cm}$

3.72. Calcula el área de cada uno de estos triángulos.

a) $\widehat{A} = 80^\circ$, $b = 25$ cm, $c = 16$ cm

d) $\widehat{A} = 66^\circ$, $a = 15$ cm, $c = 20$ cm

b) $\widehat{A} = 70^\circ$, $\widehat{B} = 40^\circ$, $c = 20$ cm

e) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $\widehat{C} = 35^\circ$

c) $a = 16$ cm, $b = 25$ cm, $c = 15$ cm

a) $S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \widehat{A} = 196,96 \text{ cm}^2$

b) $\widehat{C} = 70^\circ$, $a = 20 \Rightarrow S = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \widehat{B} = 128,56 \text{ cm}^2$

c) $\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0,792 \Rightarrow \operatorname{sen} \widehat{A} = 0,6105$

d) $\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{c \operatorname{sen} \widehat{A}}{a} = \frac{20 \cdot \operatorname{sen} 66^\circ}{15} > 1$. No hay triángulo.

e) $S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \widehat{C} = 43,02 \text{ cm}^2$

PROBLEMAS

3.73. Un globo está sujeto a una cuerda de 10 m de longitud. Por la acción del viento, el globo se encuentra a una altura de 8 m.

Calcula la inclinación de la cuerda respecto de la línea de tierra.

Sea α la inclinación buscada. Entonces, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{8}{10} \Rightarrow \alpha \approx 53^\circ 7' 48''$.

3.74. En cierta ciudad, en el mediodía del solsticio de verano, los rayos solares tienen una inclinación de $73^\circ 3'$.

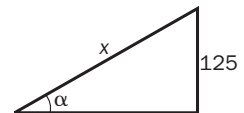
Calcula la longitud de la sombra de un edificio de 52 m de altura.

$\operatorname{tg} 73^\circ 3' = \frac{52}{x} \Rightarrow x \approx 15,85 \text{ m}$

3.75. Una señal de tráfico indica que la inclinación de un tramo de carretera es del 8%, lo cual quiere decir que en un desplazamiento horizontal de 100 m se realiza un ascenso de 8 m de altura.

a) ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?

b) ¿Cuántos metros hay que recorrer para ascender 125?



a) $\operatorname{tg} \alpha = 0,08 \Rightarrow \alpha \approx 4^\circ 34'$

b) Sea x el recorrido pedido: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{125}{x} \Rightarrow x = \frac{125}{\operatorname{sen} \alpha} = 1570 \text{ m}$

3.76. Desde un punto del suelo se ve la copa de un pino bajo un ángulo de 42° . Si nos alejamos 2,5 m hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la copa bajo un ángulo de 24° .

Calcula la altura del pino.

Sea h la altura del pino y x la distancia del pie del pino al primer punto.

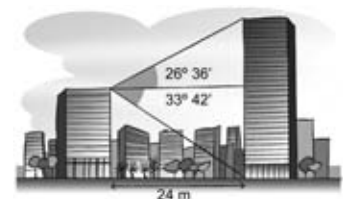
$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 42^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 24^\circ = \frac{h}{2,5 + x} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h = x \operatorname{tg} 42 = 0,9x \\ 0,445 = \frac{0,9x}{2,5 + x} \end{array} \right\} \Rightarrow 1,1125 + 0,445x = 0,9x \Rightarrow x = 2,44 \Rightarrow h = 2,2 \text{ m}$$

3.77. Calcula la altura de los dos edificios de la figura.

Sea x la altura del primer edificio e y la del segundo.

$\operatorname{tg} 33^\circ 42' = \frac{x}{24} \Rightarrow x = 24 \cdot \operatorname{tg} 33^\circ 42' = 16 \text{ m}$

$\operatorname{tg} 26^\circ 36' = \frac{y - x}{24} \Rightarrow y - x = 24 \cdot \operatorname{tg} 26^\circ 36' = 12 \text{ m} \Rightarrow y = 12 + 16 = 28 \text{ m}$



- 3.78. Dos coches, con velocidades constantes respectivas de 90 y 80 km por hora, toman dos carreteras que se bifurcan con un ángulo de 82° .

¿Qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 15 minutos de viaje?

El ángulo que forman las dos carreteras es $\alpha = 82^\circ$. Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= 90 \cdot 0,25 = 22,5 \text{ km} \\ e_2 &= 80 \cdot 0,25 = 20 \text{ km} \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = \sqrt{22,5^2 + 20^2 - 2 \cdot 22,5 \cdot 20 \cdot \cos 82^\circ} \approx 27,9 \text{ km}$$

- 3.79. Dos coches parten a la vez de un cruce del que salen dos carreteras: una en dirección norte y otra en dirección nornordeste. Uno de los coches toma la primera de ellas con una velocidad uniforme de 70 km por hora, y el otro la segunda con una velocidad constante de 90 km por hora.

¿A qué distancia se encontrarán al cabo de 30 minutos?

El ángulo que forman las dos carreteras es $\alpha = 22^\circ 30'$. Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= 70 \cdot 0,5 = 35 \text{ km} \\ e_2 &= 90 \cdot 0,5 = 45 \text{ km} \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = \sqrt{35^2 + 45^2 - 2 \cdot 35 \cdot 45 \cdot \cos \alpha} \approx 18,4 \text{ km}$$

- 3.80. Dos ciudades A y B están situadas sobre el mismo meridiano de la esfera terrestre, mientras que la ciudad C se encuentra en el mismo paralelo que A . La latitud de A es de $\alpha = 40^\circ$ Norte.

- a) Si la ciudad B está 150 km al norte de A , calcula su latitud sabiendo que el radio de la Tierra es de unos 6370 km.
b) Si la ciudad C está situada en un meridiano a 30° al oeste de A , ¿qué distancia separa estas dos ciudades?



- a) Recordando que la longitud de un arco de amplitud α grados y de una circunferencia de radio r es $L = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ}$:

$$\alpha + \beta = \frac{180^\circ \cdot L}{\pi \cdot r} = \frac{180^\circ \cdot \left[\frac{\pi \cdot 40^\circ \cdot 6370}{180^\circ} + 150 \right]}{\pi \cdot 6370} \approx 41^\circ 21'$$

- b) Se calcula en primer lugar el radio del paralelo correspondiente.

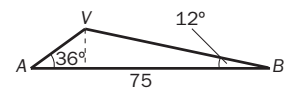
$$\text{sen } 50^\circ = \frac{r}{6370} \Rightarrow r = 4879,7 \text{ km}; L = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ} = 2555 \text{ km}$$

- 3.81. Un avión vuela entre dos ciudades, A y B , que distan entre sí 75 km. Las visuales desde A y B hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36° y 12° de amplitud, respectivamente.

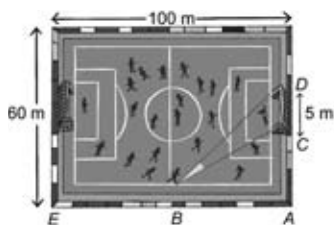
Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de A y de B , suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

$$\frac{VB}{\text{sen } 36^\circ} = \frac{75}{\text{sen } 132^\circ} \Rightarrow VB \approx 59 \text{ km}$$

$$\frac{VA}{\text{sen } 12^\circ} = \frac{75}{\text{sen } 132^\circ} \Rightarrow VA \approx 21 \text{ km} \quad h = VB \text{ sen } 12^\circ \approx 12,3 \text{ km}$$



- 3.82. Calcula el ángulo de tiro del jugador que está situado en el punto B del campo.



$$\text{tg } \widehat{CBA} = \frac{60 - 5}{\frac{2}{40}} = \frac{27,5}{40} = 0,6875 \Rightarrow \widehat{CBA} = 34^\circ 31'$$

$$\text{tg } \widehat{DBA} = \frac{32,5}{\frac{2}{40}} = \frac{32,5}{40} = 0,8125 \Rightarrow \widehat{DBA} = 39^\circ 6'$$

$$\alpha = 39^\circ 6' - 34^\circ 31' = 4^\circ 35'$$

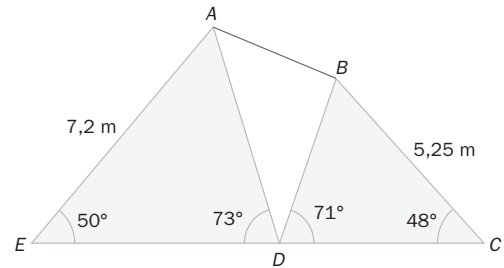
3.83. Calcula la distancia entre los puntos A y B.

$$\frac{AD}{\sin 50^\circ} = \frac{7,2}{\sin 73^\circ} \Rightarrow AD = 5,77$$

$$\frac{BD}{\sin 48^\circ} = \frac{9,25}{\sin 71^\circ} \Rightarrow BD = 7,27$$

$$AB^2 = 5,77^2 + 7,27^2 - 2 \cdot 5,77 \cdot 7,27 \cos(180^\circ - 73^\circ - 71^\circ) = 18,27$$

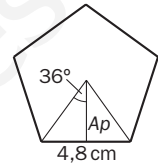
$$AB = 4,27 \text{ m}$$



3.84. Calcula el área de un pentágono regular si su perímetro coincide con el de un cuadrado que tiene 144 cm² de área.

El lado del cuadrado mide $\sqrt{144} = 12$ cm. El perímetro del pentágono 48 cm. Cada lado del pentágono mide 9,6 cm.

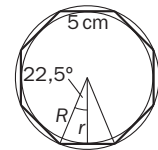
$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{4,8}{A_p} \Rightarrow A_p = \frac{4,8}{\operatorname{tg} 36^\circ} \approx 6,6 \text{ cm} \Rightarrow A_{\text{pentágono}} = \frac{\text{perímetro} \times A_p}{2} = \frac{48 \cdot 6,6}{2} \approx 158,56 \text{ cm}^2$$



3.85. Calcula los radios y las áreas de las circunferencias inscrita y circunscrita a un octógono regular de 5 cm de lado.

$$\operatorname{tg} \frac{360^\circ}{16} = \frac{5/2}{R} \Rightarrow R = \frac{5/2}{\sin 22^\circ 30'} = 6,53 \text{ cm} \Rightarrow S_c = \pi R^2 = 134 \text{ cm}^2$$

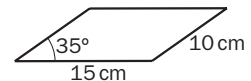
$$\operatorname{tg} \frac{360^\circ}{16} = \frac{5/2}{r} \Rightarrow r = \frac{5/2}{\operatorname{tg} 22^\circ 30'} = 6,04 \text{ cm} \Rightarrow S_i = \pi r^2 = 114 \text{ cm}^2$$



3.86. Calcula el área del paralelogramo cuyos lados miden 10 y 15 cm, respectivamente, si uno de sus ángulos mide 35°.

El paralelogramo se puede dividir en dos triángulos iguales.

$$S_i = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 \cdot \sin 35^\circ \quad S_p = 10 \cdot 15 \cdot \sin 35^\circ = 86,04 \text{ cm}^2$$



3.87. a) Halla una fórmula que permita calcular el área de un rombo conociendo las medidas de su lado y de uno de sus ángulos.

b) ¿Cuál es el área de un rombo de 15 cm de lado si uno de sus ángulos mide 40°?

a) El rombo se puede dividir en dos triángulos isósceles iguales.

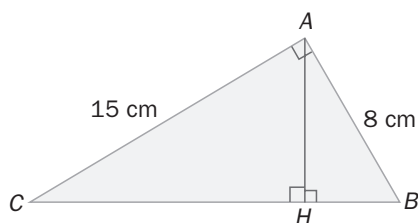
$$S_i = \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin \alpha \Rightarrow S_R = x^2 \cdot \sin \alpha$$

$$\text{b) } S_R = 15^2 \sin 40^\circ = 144,63 \text{ cm}^2$$

3.88. Dado el triángulo de la figura.

a) Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos.

b) Halla la medida de los segmentos BH y CH.



$$\text{a) } BC = 17 \text{ cm}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{15}{17} \quad \cos \hat{B} = \frac{8}{17} \quad \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{15}{8}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{8}{17} \quad \cos \hat{C} = \frac{15}{17} \quad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{8}{15}$$

$$\text{b) } CH = 15 \cos \hat{C} \approx 13,24 \text{ cm} \quad BH = 8 \cos \hat{B} \approx 3,76 \text{ cm}$$

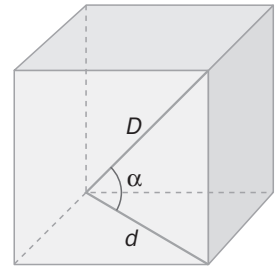
- 3.89. Calcula el ángulo α que forman la diagonal del cubo y la diagonal de una cara del mismo.

Sea a la arista del cubo.

Diagonal del cubo: $D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$. Diagonal de una cara:

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

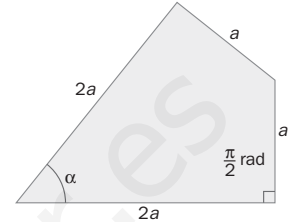
$$\cos \alpha = \frac{d}{D} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 35^\circ 16'$$



- 3.90. Calcula la amplitud del ángulo α de la figura.

La figura se puede dividir en dos triángulos iguales, ya que tienen los tres lados iguales.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 26^\circ 34' \Rightarrow \alpha = 53^\circ 8'$$



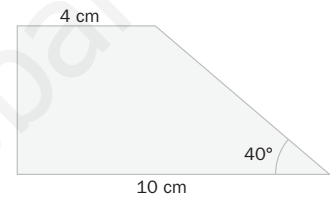
- 3.91. Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio de la figura.

Altura: $h = 6 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = 5,03$ cm

Lado restante: $b = 6 \cdot \cos 40^\circ = 4,6$ cm

Perímetro: 23,63 cm

Área: $\frac{10+4}{2} \cdot 5,03 = 35,21$ cm²



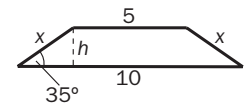
- 3.92. Las bases de un trapecio isósceles miden 10 y 5 cm, respectivamente. El ángulo que forma la base mayor con cada uno de los lados no paralelos es de 35° .

Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio.

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{\frac{10-5}{2}} \Rightarrow h = 1,75$$
 cm

$$\cos 35^\circ = \frac{2,5}{x} \Rightarrow x = \frac{2,5}{\cos 35^\circ} = 3,05$$
 cm

$$P = 21,1$$
 cm ; $A = \frac{(10+5) \cdot h}{2} = 13,1$ cm²

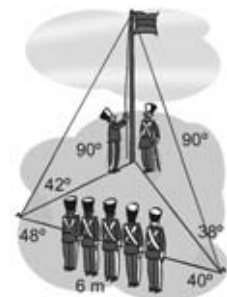


- 3.93. Se ha colocado un poste sujeto al suelo mediante dos anclajes como aparece en la figura. Determina si las medidas son correctas.

$$CB = \frac{6 \cdot \operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen}(180^\circ - 40^\circ - 48^\circ)} = 3,86 \Rightarrow AB = 3,86 \cdot \operatorname{tg} 42^\circ = 3,48$$
 m

$$BD = \frac{6 \cdot \operatorname{sen} 48^\circ}{\operatorname{sen}(180^\circ - 40^\circ - 48^\circ)} = 4,46 \Rightarrow AB = 4,46 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 2,57$$
 m

Los datos no son correctos.

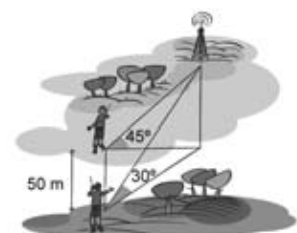


- 3.94. Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de 45° . Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30° . Halla la altura de la antena.

La distancia inicial a la torre será igual a la altura de la antena (ángulo de 45°).

Desde el segundo punto, la distancia a la torre será $\frac{h}{\operatorname{tg} 30^\circ} = h\sqrt{3}$.

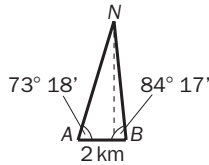
Al ser el triángulo del suelo rectángulo, $h^2 + 50^2 = (h\sqrt{3})^2 \Rightarrow h \approx 35,36$ m.



3.95. Dos personas que están separadas por 2 km de distancia, sobre su plano vertical y en el mismo momento, una nube bajo ángulos respectivos de $73^\circ 18'$ y $84^\circ 17'$.

Calcula la altura de la nube y la distancia de la misma a cada uno de los observadores.

Hay dos posibles interpretaciones del problema.

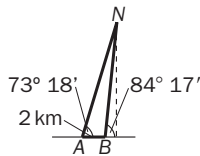


Si la nube está situada entre los dos observadores:

$$\frac{NB}{\sin 73^\circ 18'} = \frac{2}{\sin 22^\circ 25'} \Rightarrow NB \approx 5,02 \text{ km}$$

$$\frac{NA}{\sin 84^\circ 17'} = \frac{2}{\sin 22^\circ 25'} \Rightarrow NA \approx 5,22 \text{ km}$$

$$h = NB \cdot \sin 84^\circ 17' \approx 5 \text{ km}$$



Si la nube está situada a un mismo lado de los dos observadores:

$$\frac{NB}{\sin 73^\circ 18'} = \frac{2}{\sin 10^\circ 59'} \Rightarrow NB \approx 10,05 \text{ km}$$

$$\frac{NA}{\sin 95^\circ 43'} = \frac{2}{\sin 10^\circ 59'} \Rightarrow NA \approx 10,45 \text{ km}$$

$$h = NB \cdot \sin 84^\circ 17' \approx 10 \text{ km}$$

3.96. Determina, en función del número de lados, las áreas de los polígonos regulares de n lados inscritos y circunscritos, respectivamente, a una circunferencia de 10 cm de radio.

Polígono de n lados inscrito en una circunferencia de radio 10 cm:

$$S = n \cdot S_t = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n} = 50n \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$$

Siendo S_t la superficie de un triángulo cuyos lados son un lado del polígono y dos radios de la circunferencia circunscrita.

Polígono de n lados circunscrito en una circunferencia de radio 10 cm:

$$S = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot \text{tg} \frac{180^\circ}{n} = 100n \cdot \text{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

3.97. a) Demuestra que en cualquier triángulo ABC , rectángulo en A , se verifica que: $\widehat{\text{sen}} 2\widehat{B} = \widehat{\text{sen}} 2\widehat{C}$

b) Demuestra que cualquier triángulo ABC que verifique la igualdad anterior es isósceles o rectángulo.

a) $\widehat{B} + \widehat{C} = 90 \Rightarrow 2\widehat{B} = 180 - 2\widehat{C} \Rightarrow \widehat{\text{sen}} 2\widehat{B} = \widehat{\text{sen}} (180 - 2\widehat{C}) = \widehat{\text{sen}} 2\widehat{C}$

b) $\widehat{\text{sen}} 2\widehat{B} = \widehat{\text{sen}} 2\widehat{C} \Rightarrow \begin{cases} 2\widehat{B} = 2\widehat{C} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \text{ es isósceles} \\ 2\widehat{B} = 180^\circ - 2\widehat{C} \Rightarrow 2\widehat{B} + 2\widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ \text{ es rectángulo} \end{cases}$

3.98. Si \widehat{A} , \widehat{B} y \widehat{C} son los tres ángulos de un triángulo cualquiera, calcula el valor de la expresión:

$$\text{cotg } \widehat{A} \cdot \text{cotg } \widehat{B} + \text{cotg } \widehat{A} \cdot \text{cotg } \widehat{C} + \text{cotg } \widehat{B} \cdot \text{cotg } \widehat{C}$$

$$\text{cotg}(\widehat{A} + \widehat{B}) = \frac{1}{\text{tg}(\widehat{A} + \widehat{B})} = \frac{1 - \text{tg } \widehat{A} \text{ tg } \widehat{B}}{\text{tg } \widehat{A} + \text{tg } \widehat{B}} = \frac{\text{cotg } \widehat{A} \text{ cotg } \widehat{B} - 1}{\text{cotg } \widehat{A} + \text{cotg } \widehat{B}} = \text{cotg}(180^\circ - \widehat{C}) = -\text{cotg } \widehat{C}$$

Por tanto: $\text{cotg } \widehat{A} \cdot \text{cotg } \widehat{B} - 1 = -\text{cotg } \widehat{A} \text{ cotg } \widehat{C} - \text{cotg } \widehat{B} \cdot \text{cotg } \widehat{C} \Rightarrow$ La expresión vale 1.

PROFUNDIZACIÓN

3.99. Expresa $\sin 4\alpha$ y $\cos 4\alpha$ en función de $\sin \alpha$ y de $\cos \alpha$.

$$\sin 4\alpha = \sin(2(2\alpha)) = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 4 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha$$

Y de este resultado, junto con el obtenido en el ejercicio 47 se llega a:

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{4 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - 6 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

3.100. Calcula $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma)$ en función de $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ y $\operatorname{tg} \gamma$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) &= \operatorname{tg}(\alpha + (\beta + \gamma)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\beta + \gamma)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(\beta + \gamma)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma} \end{aligned}$$

3.101. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica.

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^4\left(\frac{x}{2}\right) \\ \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^4\left(\frac{x}{2}\right) &= \left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - \cos x}{2}\right)^2 = \frac{1 + \cos^2 x + 2 \cos x}{4} - \frac{1 + \cos^2 x - 2 \cos x}{4} = \cos x \end{aligned}$$

3.102. a) Demuestra que $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

b) Con ayuda de la fórmula anterior y el teorema del coseno, demuestra que en un triángulo de lados a , b y c se verifica:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

siendo p el valor del semiperímetro del triángulo:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\text{a) } 1 + \cos \alpha = 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= 1 + \cos \alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a) \cdot (b+c-a)}{2bc} = \\ &= \frac{2p(p-a)}{bc} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \end{aligned}$$

3.103. (TIC) Resuelve la ecuación trigonométrica $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Soluciones: } 2x = 120^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = 60^\circ + 180^\circ k$$

$$2x = 240^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = 120^\circ + 180^\circ k$$

3.104. (TIC) Resuelve este sistema de ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi]$. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$

Elevando al cuadrado las ecuaciones y sumando miembro a miembro los resultados:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y = 1 \\ \cos^2 x + \cos^2 y + 2 \cos x \cos y = 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y + 2(\sin x \sin y + \cos x \cos y) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + 2 \cos(x - y) = 2 \Rightarrow \cos(x - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = y + \frac{\pi}{2} \\ y - x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \sin y = 1 \Rightarrow \cos y + \sin y = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - \sin^2 y} = 1 - \sin y \Rightarrow 1 - \sin^2 y = 1 + \sin^2 y - 2 \sin y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 y - 2 \sin y = 0 \Rightarrow 2 \sin y (\sin y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin y = 0 \Rightarrow y = 0 ; x = \frac{\pi}{2} \\ \sin y = 1 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} ; x = \pi \text{ solución falsa} \end{cases}$$

De la misma forma, se obtiene también la solución $x = 0 ; y = \frac{\pi}{2}$.

3.105. Calcula, en función de t , el valor de las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$.

$$\sin \alpha = \sin\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

$$\cos \alpha = \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$$

3.106. Si la suma de dos ángulos α y β es igual a $\frac{\pi}{3}$ radianes, calcula el valor de la expresión: $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

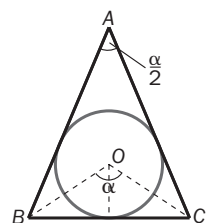
3.107. El radio de la circunferencia inscrita a un triángulo isósceles mide 18 cm. Resuelve el triángulo sabiendo que su base mide 60 cm.

$OB = \sqrt{18^2 + 30^2} \approx 35$. El triángulo OBC tiene por lados 35, 35 y 60 cm. Por tanto:

$$60^2 = 35^2 + 35^2 - 35 \cdot 35 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1224 + 1224 - 3600}{2448} = -0,4706 \Rightarrow \alpha \approx 118^\circ 4' \Rightarrow \hat{A} = \frac{\alpha}{2} = 59^\circ 2'$$

$$\hat{B} = \hat{C} = 60^\circ 29', \quad AB = AC = \frac{BC \cdot \sin 60^\circ 29'}{\sin 59^\circ 2'} = 60,9 \text{ cm}$$



3.108. Demuestra que la suma de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo cualquiera es igual al producto de las mismas.

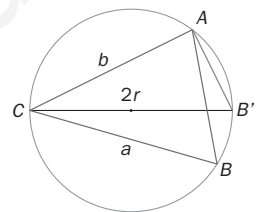
$$\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} &= 180^\circ - \widehat{C} \Rightarrow \operatorname{tg}(\widehat{A} + \widehat{B}) = \operatorname{tg}(180^\circ - \widehat{C}) \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \widehat{A} + \operatorname{tg} \widehat{B}}{1 - \operatorname{tg} \widehat{A} \cdot \operatorname{tg} \widehat{B}} = -\operatorname{tg} \widehat{C} \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{tg} \widehat{A} + \operatorname{tg} \widehat{B} &= -\operatorname{tg} \widehat{C} + \operatorname{tg} \widehat{A} \cdot \operatorname{tg} \widehat{B} \cdot \operatorname{tg} \widehat{C} \Rightarrow \operatorname{tg} \widehat{A} + \operatorname{tg} \widehat{B} + \operatorname{tg} \widehat{C} = \operatorname{tg} \widehat{A} \cdot \operatorname{tg} \widehat{B} \cdot \operatorname{tg} \widehat{C} \end{aligned}$$

3.109. Prueba que si los ángulos de un triángulo verifican que $\cos \widehat{A} + \cos \widehat{B} = \operatorname{sen} \widehat{C}$, entonces el triángulo es rectángulo. ¿Cuál es el ángulo recto?

$$\begin{aligned} \cos \widehat{A} + \cos \widehat{B} &= \operatorname{sen} \widehat{C} \Rightarrow 2 \cos \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} \cos \frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} = \operatorname{sen} \widehat{C} \Rightarrow 2 \cos \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2} \cos \frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} = \operatorname{sen} \widehat{C} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cos \left(90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2} \right) \cos \frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} &= \operatorname{sen} \widehat{C} \Rightarrow 2 \operatorname{sen} \frac{\widehat{C}}{2} \cos \frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{\widehat{C}}{2} \cos \frac{\widehat{C}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} = \cos \frac{\widehat{C}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{A} - \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \\ \frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{A} - \widehat{B} = -\widehat{C} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} = 90^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

3.110. Demuestra que dado el triángulo de la figura y la circunferencia circunscrita a él:

a) Se cumple la relación: $r = \frac{b}{2 \operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{2 \operatorname{sen} \widehat{C}}$
(Ten en cuenta la relación entre los ángulos \widehat{B} y \widehat{B}')



b) El área del triángulo se puede calcular como $A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}$.

a) $\widehat{B} = \widehat{B}'$, ya que son ángulos inscritos a la misma circunferencia y determinan el mismo arco.

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{b \cdot \operatorname{sen} \widehat{A}}{a}; \operatorname{sen} \widehat{B}' = \frac{b}{2r}. \text{ Por tanto, } \frac{b \operatorname{sen} \widehat{A}}{a} = \frac{b}{2r} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \widehat{A}}{a} = \frac{1}{2r} \Rightarrow \frac{a}{2 \operatorname{sen} \widehat{A}} = r \Rightarrow$$

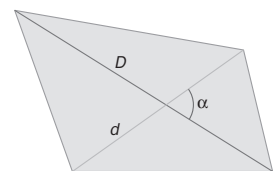
$$\Rightarrow r = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{2 \operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{2 \operatorname{sen} \widehat{C}}$$

b) $\widehat{A} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \frac{c}{2r} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}$

3.111. Observa la siguiente figura:

a) Si las diagonales de un cuadrilátero miden d y D unidades lineales, respectivamente, y forman un ángulo α , demuestra que el área de dicho cuadrilátero puede calcularse con la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} d \cdot D \operatorname{sen} \alpha$$



b) Calcula el área de un cuadrilátero cuyas diagonales forman un ángulo de 80° si miden 4 y 5 cm, respectivamente.

a) Dado el cuadrilátero, se considera el paralelogramo que se obtiene al trazar por cada vértice la paralela a la diagonal que no pasa por él. El área del cuadrilátero es igual a la suma de las áreas de cuatro triángulos: T_1, T_2, T_3 y T_4 .

$$\text{Por tanto: } S_{\text{cuadrilátero}} = \frac{1}{2} S_{\text{paralelogramo}} = \frac{1}{2} D \cdot d \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

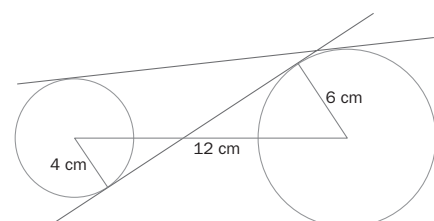
b) $S = \frac{1}{2} D \cdot d \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \operatorname{sen} 80^\circ = 9,85 \text{ cm}^2$

3.112. Considera las dos circunferencias coplanarias de la figura.

Calcula la inclinación sobre la recta que une los dos centros de:

a) La tangente común exterior.

b) La tangente común interior.



a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{6-4}{12} \Rightarrow \alpha = 9^\circ 36'$ b) $\operatorname{sen} \beta = \frac{6+4}{12} \Rightarrow \beta = 56^\circ 27'$