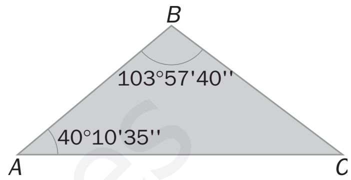
PARA EMPEZAR

1 Utiliza la calculadora para hallar la medida en grados, minutos y segundos de cada uno de los ángulos que resultan al dividir un círculo en:

a) 7 partes iguales **b) 13 partes iguales**

a) $360° : 7 = 51° \, 25' \, 43''$ b) $360° : 13 = 27° \, 41' \, 32''$

2 Clasifica los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ de este triángulo y calcula la medida del ángulo $\widehat{C}$.



El ángulo $\widehat{A}$ es agudo, ya que es menor de 90°.

El ángulo $\widehat{B}$ es obtuso, ya que es mayor de 90° y menor de 180°.

El ángulo $\widehat{C}$ es: $\widehat{C} = 180° - 103° \, 57' \, 40'' - 40° \, 10' \, 35'' = 35° \, 51' \, 45''$, y es agudo.

3 En un triángulo rectángulo isósceles, la hipotenusa mide 10 centímetros. Calcula la medida de los catetos y de los ángulos agudos.

Para obtener la medida de los catetos aplicamos el teorema de Pitágoras:

$10^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 100 = 2x^2 \Rightarrow x = \sqrt{50} = 7{,}07$ cm

4 En un momento de la ascensión al Alpe d'Huez, los ciclistas suben por un tramo de carretera que tiene una inclinación con la horizontal de 5° 3′ 48″. Calcula los ángulos complementario y suplementario de este ángulo.

El ángulo complementario es: $90° - 5° \, 3' \, 48'' = 84° \, 56' \, 12''$.

El ángulo suplementario es: $180° - 5° \, 3' \, 48'' = 174° \, 56' \, 12''$.

Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

7.1 a) Calcula los radianes que mide un ángulo de 60 grados.

b) Calcula cuántos grados mide un ángulo de $\frac{3\pi}{2}$ radianes.

a) $\frac{2\pi}{360°} = \frac{x}{60°} \Rightarrow x = \frac{2\pi 60°}{360°} = \frac{\pi}{3}$ rad

b) $2\pi \backslash 360° = \frac{\frac{3\pi}{2}}{n°} \Rightarrow n° = \frac{3\pi}{2} \frac{360°}{2\pi} = 270°$

7.2 Pasa a radianes los siguientes ángulos expresados en grados.

a) 30° **b) 90°** **c) 135°** **d) 240°**

a) $\frac{2\pi \cdot 30°}{360°} = \frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{2\pi \cdot 90°}{360°} = \frac{\pi}{2}$ rad c) $\frac{2\pi \cdot 135°}{360°} = \frac{3\pi}{4}$ rad d) $\frac{2\pi \cdot 240°}{360°} = \frac{4\pi}{3}$ rad

7.3 Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes.

a) $\frac{\pi}{4}$ **b) $\frac{5\pi}{6}$** **c) π** **d) $\frac{23\pi}{24}$**

a) $\frac{\frac{\pi}{4} \cdot 360°}{2\pi} = 45°$ b) $\frac{\frac{5\pi}{6} \cdot 360°}{2\pi} = 150°$ c) $\frac{\pi \cdot 360°}{2\pi} = 180°$ d) $\frac{\frac{23\pi}{24} \cdot 360°}{2\pi} = 172° \, 30'$

7.4 Completa la siguiente tabla con las medidas de algunos ángulos en grados y radianes.

Grados		**45**			**180**	**270**	
Radianes	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$			2π

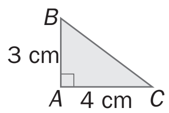
Para pasar de grados a radianes, se multiplica por 2π y se divide entre 360°: $\dfrac{2\pi \cdot x}{360°}$.

Para pasar de radianes a grados, se multiplica por 360° y se divide entre 2π: $\dfrac{x \cdot 360°}{2\pi}$.

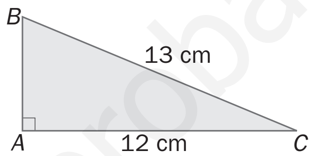
Grados	30	45	60	90	180	270	360
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	2π

7.5 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos de la figura.

a)



b)



a) Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa: $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm.

Las razones trigonométricas de los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son:

$\text{sen}\,\widehat{B} = \frac{4}{5} = 0{,}8$; $\cos\widehat{B} = \frac{3}{5} = 0{,}6$; $\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{4}{3} = 1{,}\widehat{3}$

$\text{sen}\,\widehat{C} = \frac{3}{5} = 0{,}6$; $\cos\widehat{C} = \frac{4}{5} = 0{,}8$; $\text{tg}\,\widehat{C} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

b) Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el cateto desconocido: $AB = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ cm.

Las razones trigonométricas de los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son:

$\text{sen}\,\widehat{B} = \frac{12}{13} = 0{,}9231$; $\cos\widehat{B} = \frac{5}{13} = 0{,}3846$; $\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

$\text{sen}\,\widehat{C} = \frac{5}{13} = 0{,}3846$; $\cos\widehat{C} = \frac{12}{13} = 0{,}9231$; $\text{tg}\,\widehat{C} = \frac{5}{12} = 4{,}1\widehat{6}$

Ejercicio resuelto

7.6 Con ayuda de la calculadora, halla el valor de x en los siguientes casos.

a) sen 40° = x

b) cos 55° = x

c) cos x = 0,5469

d) tg x = 1

a) $x = 40$ $\boxed{\text{SEN}}$ $= 0{,}6428$

b) $x = 55$ $\boxed{\text{COS}}$ $= 0{,}5736$

c) $x = 0{,}5469$ $\boxed{\text{COS}^{-1}}$ $= 56{,}8454 = 56°\ 51'$

d) $x = 1$ $\boxed{\text{TAN}^{-1}}$ $= 45°$

7.7 Utilizando la calculadora, halla el valor de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 74°

b) cos 65°

c) tg 20°

d) cos 59°

e) tg 13°

f) sen 35°

a) sen 74° = 0,9613

b) cos 65° = 0,4226

c) tg 20° = 0,364

d) cos 59° = 0,515

e) tg 13° = 0,2309

f) sen 35° = 0,5736

7.8 Con ayuda de la calculadora, halla la medida de:

a) El ángulo cuyo seno vale 0,5.

b) El ángulo cuyo coseno vale 0,5.

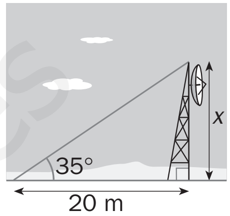
a) $\widehat{A} = 0{,}5$ $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$ $= 30°$

b) $\widehat{B} = 0{,}5$ $\boxed{\text{COS}^{-1}}$ $= 60°$

PARA APLICAR

Problema resuelto

7.9 Calcula la altura aproximada de la antena.



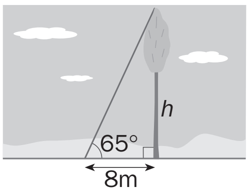
La razón trigonométrica que relaciona el ángulo con los catetos es la tangente:

$$\text{tg}\,35° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{x}{20} = 0{,}7002 \Rightarrow x = 20 \cdot 0{,}7002 = 14{,}004$$

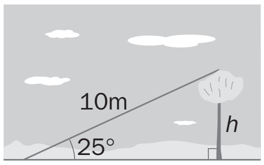
La antena mide aproximadamente 14 metros.

7.10 Calcula la altura aproximada de los árboles de la figura.

a)



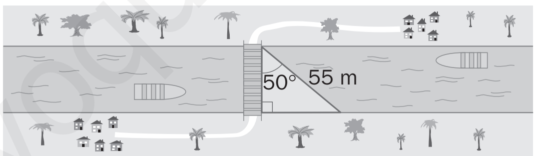
b)



a) $\text{tg}\,65° = \frac{h}{8} \Rightarrow h = 8 \cdot \text{tg}\,65° = 17{,}156$ m

b) $\text{sen}\,25° = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \cdot \text{sen}\,25° = 4{,}226$ m

7.11 Una ONG ha decidido construir un puente sobre un río para comunicar dos pueblos de las orillas. Calcula la longitud aproximada del puente con los datos de la figura.



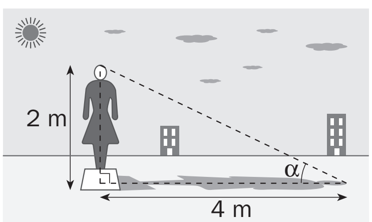
Si llamamos x a la anchura del río, tenemos que: $\cos 50° = \frac{x}{55} \Rightarrow x = 55 \cdot \cos 50° = 35{,}35$ m.

7.12 Con ayuda de la calculadora, halla el ángulo aproximado que forman los rayos solares con la superficie del suelo en el momento en que una estatua de 2 metros de altura proyecta una sombra de 4 metros.

Representamos gráficamente la situación:

La razón trigonométrica que relaciona el ángulo con los catetos es la tangente.

$\text{tg}\,\alpha = \frac{2}{4} = 0{,}5$



Así tenemos que:

$\alpha = 0{,}5$ $\boxed{\text{TAN}^{-1}}$ $= 26{,}57°$ $\boxed{\circ\ '\ ''}$ $= 26°\ 33'\ 54''$

7.13 **La siguiente señal de tráfico significa que por cada 100 metros que se avanza en la horizontal se sube un desnivel de 13 metros. Con ayuda de la calculadora, halla el ángulo que forma en ese momento la carretera con la horizontal.**

Representamos gráficamente la situación.

La razón trigonométrica del ángulo $\widehat{A}$ que relaciona los datos del enunciado es la tangente: $\text{tg}\,\widehat{A} = \frac{13}{100} = 0{,}13$.

Utilizando la calculadora hallamos el ángulo: $\widehat{A} = 0{,}13$ $\boxed{\text{TAN}^{-1}}$ $= 7{,}407°$ $\boxed{\circ\ '\ ''}$ $= 7°\ 24'\ 25''$

Relaciones entre las razones trigonométricas

Ejercicio resuelto

7.14 **El seno de un ángulo agudo vale 0,32. Calcula el coseno y la tangente de ese mismo ángulo.**

Como α es un ángulo agudo y $\text{sen}\,\alpha = 0{,}32$, por la primera relación fundamental:

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 0{,}32^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0{,}1024 = 0{,}8976 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0{,}8976} = 0{,}9474$

Por la segunda relación fundamental: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}32}{0{,}9474} = 0{,}3378$

PARA PRACTICAR

7.15 **Calcula el seno y la tangente de un ángulo agudo sabiendo que su coseno tiene los siguientes valores.**

a) 0,127 **b) 0,5** **c) 0,2588** **d) 0,9135**

a) Por la relación fundamental el seno del ángulo valdrá $\sqrt{1 - (0{,}127)^2} = 0{,}992$.

Su tangente valdrá $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}992}{0{,}127} = 7{,}811$.

b) Por la relación fundamental el seno del ángulo valdrá $\sqrt{1 - (0{,}5)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Su tangente valdrá $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}5} = \sqrt{3}$.

c) Por la relación fundamental el seno del ángulo valdrá $\sqrt{1 - (0{,}2588)^2} = 0{,}966$.

Su tangente valdrá $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}966}{0{,}2588} = 3{,}73$.

d) Por la relación fundamental el seno del ángulo valdrá $\sqrt{1 - (0{,}9135)^2} = 0{,}4068$.

Su tangente valdrá $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}4068}{0{,}9135} = 0{,}4453$.

Ejercicio resuelto

7.16 **El coseno de un ángulo agudo vale $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Calcula el seno y la tangente de ese mismo ángulo.**

Por la relación fundamental tenemos que: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.

Así: $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

Por la segunda relación fundamental:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

7.17 Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo sabiendo que su seno tiene los siguientes valores.

a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{\sqrt{7}}{5}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Da los resultados en forma de expresiones radicales.

a) Por la primera relación fundamental tenemos que: $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{35}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6}$.

Obtenemos ahora el valor de la tangente realizando el cociente del seno entre el coseno: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{35}}{6}} = \frac{1}{\sqrt{35}}$.

b) Por la primera relación fundamental tenemos que: $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Obtenemos ahora el valor de la tangente realizando el cociente del seno entre el coseno: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$.

c) Por la primera relación fundamental tenemos que: $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{7}{25}} = \sqrt{\frac{18}{25}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

Obtenemos ahora el valor de la tangente realizando el cociente del seno entre el coseno: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{5}}{\frac{3\sqrt{2}}{5}} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}$.

d) Por la primera relación fundamental tenemos que: $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Obtenemos ahora el valor de la tangente realizando el cociente del seno entre el coseno: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

7.18 Con ayuda de la calculadora, halla los valores de las expresiones *A* y *B*.

$A = \text{sen}\,45° + \text{sen}\,45°$ **$B = \text{sen}\,(45° + 45°)$**

Explica razonadamente si la siguiente fórmula es verdadera o falsa. $2\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(2\alpha)$

Obtenemos el valor de las expresiones:

$A = \text{sen}\,45° + \text{sen}\,45° = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ $B = \text{sen}\,(45° + 45°) = \text{sen}\,(90°) = 1$

Así, si tomamos como $\alpha = 45°$, tenemos que:

$A = \text{sen}\,45° + \text{sen}\,45° = 2 \cdot \text{sen}\,45° = \sqrt{2}$

$B = \text{sen}\,(45° + 45°) = \text{sen}\,(2 \cdot 45°) = 1$

Por lo que $A \neq$ B, lo que demuestra que la fórmula indicada es por lo general falsa.

7.19 Comprueba con ejemplos si las siguientes fórmulas son verdaderas o falsas.

a) $\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(\alpha + \beta)$ **b) $\cos\alpha + \cos\beta = \cos(\alpha + \beta)$**

Ambas son falsas. Basta con considerar, por ejemplo, $\alpha = 30°$ y $\beta = 60°$.

En este caso $\alpha + \beta = 90°$

a) $\text{sen}\,30° + \text{sen}\,60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \neq 1 = \text{sen}\,90°$

b) $\cos 30° + \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \neq 0 = \cos 90°$

Problema resuelto

7.20 Demuestra la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\mathbf{1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{cos^2 \alpha}}$$

Para demostrar una igualdad trigonométrica, se parte de uno de sus miembros y, aplicando las fórmulas y relaciones conocidas, se trata de llegar al otro miembro:

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

7.21 Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.

a) $\mathbf{1 + \frac{1}{tg^2 \alpha} = \frac{1}{sen^2 \alpha}}$

b) $\mathbf{tg^2 \alpha - sen^2 \alpha = sen^2 \alpha \cdot tg^2 \alpha}$

c) $\mathbf{cos^2 \alpha - sen^2 \alpha = 1 - 2sen^2 \alpha}$

d) $\mathbf{tg^2 \alpha = sen^2 \alpha + sen^2 \alpha \cdot tg^2 \alpha}$

a) Se sustituye la tangente por $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos \alpha}$, se eleva al cuadrado y se hace común denominador:

$$1 + \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha} = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} = \frac{\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}$$

b) En el primer término de la igualdad se sustituye la tangente por $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos \alpha}$, se eleva al cuadrado y se hace común denominador, por último se saca factor común al $\text{sen}^2 \alpha$:

$$\text{tg}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha = \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \text{sen}^2 \alpha = \frac{\text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\text{sen}^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \text{tg}^2 \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha$$

c) Se cambia el $\cos^2 \alpha$ por $1 - \text{sen}^2 \alpha$ y se opera:

$$\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha = (1 - \text{sen}^2 \alpha) - \text{sen}^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 \alpha$$

d) A partir del segundo término de la igualdad, se saca factor común al $\text{sen}^2 \alpha$ y se sustituye la tangente por $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos \alpha}$, se eleva al cuadrado y se hace común denominador:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha \cdot \text{tg}^2 \alpha = \text{sen}^2 \alpha \cdot (1 + \text{tg}^2 \alpha) = \text{sen}^2 \alpha \cdot \left(1 + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) = \text{sen}^2 \alpha \cdot \left(\frac{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) = \text{sen}^2 \alpha \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) = \text{tg}^2 \alpha$$

7.22 Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas.

a) $\mathbf{cos\,\alpha + \frac{sen\,\alpha}{tg\,\alpha}}$

b) $\mathbf{\frac{1 - cos\,\alpha}{sen^2 \alpha}}$

a) Se sustituye la tangente por $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos \alpha}$ y se divide:

$$\cos \alpha + \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha} = \cos \alpha + \frac{\text{sen}\,\alpha}{\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos \alpha}} = \cos \alpha + \frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos \alpha}{\text{sen}\,\alpha} = 2 \cdot \cos \alpha$$

b) Se cambia el $\text{sen}^2 \alpha$ por $1 - \cos^2 \alpha$, que es una diferencia de cuadrados, por lo que podemos factorizarlo en una suma por diferencia, y se simplifica:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{1 + \cos \alpha}$$

Problema resuelto

7.23 La tangente de un ángulo agudo vale 2,73. ¿Cuánto valen las otras razones?

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 2{,}73 \cdot \cos\alpha$

Se sustituye en la primera relación fundamental.

$(2{,}73\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 7{,}4529\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 8{,}4529\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{8{,}4529}} = 0{,}344$

Se calcula el seno.

$\text{sen}\,\alpha = 2{,}73 \cdot \cos\alpha = 2{,}73 \cdot 0{,}344 = 0{,}939$

7.24 Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo sabiendo que su tangente tiene los siguientes valores.

a) 1,53 **b) 6,45** **c) 0,87**

a) El coseno del ángulo valdrá: $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{(1{,}53)^2 + 1}} = 0{,}547$.

Hallamos el seno: $\text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = 1{,}53 \cdot 0{,}547 = 0{,}837$.

b) El coseno del ángulo valdrá: $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{(6{,}45)^2 + 1}} = 0{,}1532$.

Hallamos el seno: $\text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = 6{,}45 \cdot 0{,}1532 = 0{,}988$.

c) El coseno del ángulo valdrá: $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{(0{,}87)^2 + 1}} = 0{,}7544$.

Hallamos el seno: $\text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = 0{,}87 \cdot 0{,}7544 = 0{,}6563$.

7.25 La tangente de un ángulo agudo vale $\frac{3}{2}$. Calcula el seno y el coseno de ese mismo ángulo y expresa los resultados mediante fracciones y radicales.

El coseno del ángulo valdrá: $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1}} = \sqrt{\dfrac{1}{\frac{9}{4} + 1}} = \sqrt{\dfrac{1}{\frac{13}{4}}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

El seno valdrá: $\text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{13}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Ampliación del concepto de ángulo

PARA PRACTICAR

7.26 Señala a cuál de los cuatro cuadrantes de la circunferencia goniométrica pertenecen estos ángulos.

a) Los ángulos agudos.

b) Los mayores de 180 grados pero menores de 270.

c) Los mayores que un ángulo recto pero menores que uno llano.

d) Los mayores de 270 grados pero menores de 360.

a) Al primer cuadrante

b) Al tercer cuadrante

c) Al segundo cuadrante

d) Al cuarto cuadrante

Ejercicio resuelto

7.27 **Dados los ángulos $\alpha = 36°$, $\beta = 43°$ y $\theta = 66°$, halla los siguientes ángulos indicando el cuadrante al que pertenecen.**

a) $4\alpha - \beta - \theta$ **b)** $\frac{\alpha}{6} + 4\beta - \theta$ **c)** $\alpha + 2\beta + \frac{13}{11}\theta$ **d)** $5\alpha - \beta + \frac{7}{3}\theta$

a) $4\alpha - \beta - \theta = 35° \Rightarrow$ primer cuadrante

b) $\frac{\alpha}{6} + 4\beta - \theta = 112° \Rightarrow$ segundo cuadrante

c) $\alpha + 2\beta + \frac{13}{11}\theta = 200° \Rightarrow$ tercer cuadrante

d) $5\alpha - \beta + \frac{7}{3}\theta = 291° \Rightarrow$ cuarto cuadrante

7.28 **Dados los ángulos $\alpha = 15°$, $\beta = 77°$ y $\theta = 81°$, halla los siguientes ángulos indicando el cuadrante al que pertenecen.**

a) $3\alpha + \beta - \theta$ **b)** $3\theta - \frac{6\beta}{7}$ **c)** $\frac{\alpha}{5} + \frac{4\beta}{11} + 2\theta$

a) $3 \cdot 15° + 77° - 81° = 41°$ Pertenece al primer cuadrante.

b) $3 \cdot 81° - \frac{6 \cdot 77°}{7} = 177°$ Pertenece al segundo cuadrante.

c) $\frac{15°}{5} + \frac{4 \cdot 77°}{11} + 2 \cdot 81° = 193°$ Pertenece al tercer cuadrante.

7.29 **Dados los ángulos $\alpha = \frac{\pi}{5}$ rad y $\beta = \frac{5\pi}{6}$ rad, calcula los siguientes ángulos indicando el cuadrante al que pertenecen.**

a) 2α **b)** $\alpha + \beta$ **c)** $\beta - \alpha$ **d)** 2β

a) $2 \cdot \frac{\pi}{5} = \frac{2 \cdot \pi}{5} = 72°$ Primer cuadrante

b) $\frac{\pi}{5} + \frac{5\pi}{6} = \frac{31\pi}{30} = 186°$ Tercer cuadrante

c) $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{5} = \frac{19\pi}{30} = 114°$ Segundo cuadrante.

d) $2 \cdot \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} = 300°$ Cuarto cuadrante.

Ejercicio resuelto

7.30 **Expresa los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 360°. ¿A qué cuadrante pertenece cada uno?**

a) 3000° **b)** $\frac{19\pi}{4}$ rad

a) Dividimos 3000 entre 360° y obtenemos 8 de cociente y 120 de resto.
Así: $3000 = 8 \cdot 360 + 120° \Rightarrow$ 2.º cuadrante

b) Dividimos el ángulo entre 2π y obtenemos 2 de cociente y $\frac{3\pi}{4}$ de resto.
Así: $\frac{19\pi}{4} = 2 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$ 2.º cuadrante

7.31 **Expresa los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 360 grados, e indica el cuadrante al que pertenecen.**

a) 500° **b)** 2389° **c)** $\frac{17\pi}{6}$ rad **d)** $\frac{32\pi}{5}$ rad

Dividimos el ángulo entre 360° o 2π, y el cociente es el número de vueltas y el resto, el ángulo buscado.

a) $500° = 1 \cdot 360° + 140°$ Pertenece al segundo cuadrante.

b) $2389° = 6 \cdot 360° + 229°$ Pertenece al tercer cuadrante.

c) $\frac{17\pi}{6} = 1 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{6}$ Pertenece al segundo cuadrante.

d) $\frac{32\pi}{5} = 3 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{5}$ Pertenece al primer cuadrante.

7.32 Señala a qué cuadrante pertenecen los siguientes ángulos negativos.

a) $-45°$ **c) $-200°$** **e) $-390°$** **g) $-580°$**

b) $-120°$ **d) $-320°$** **f) $-456°$** **h) $-640°$**

a) 4.º cuadrante

b) 3.er cuadrante

c) 2.º cuadrante

d) 1.er cuadrante

e) $-390° = -1 \cdot 360° - 90°$ Pertenece al 4.º cuadrante.

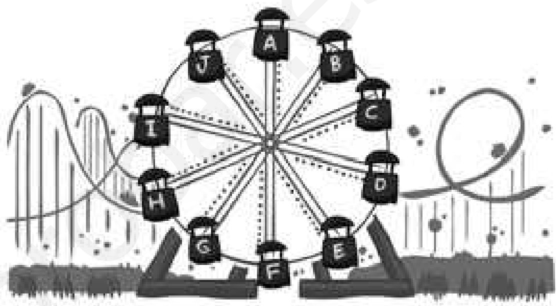
f) $-456° = -1 \cdot 360° - 96°$ Pertenece al 3.er cuadrante.

g) $-580° = -1 \cdot 360° - 220°$ Pertenece al 2.º cuadrante

h) $-640° = -1 \cdot 360° - 280°$ Pertenece al 1.er cuadrante.

PARA APLICAR

7.33 Una noria está compuesta por 10 cestas. La figura muestra la posición inicial. Indica qué cesta se encontrará más cerca del suelo si la noria realiza los siguientes giros.



a) 72° **e) 648°**

b) 180° **f) 900°**

c) 252° **g) $-36°$**

d) 324° **h) $-216°$**

a) H

b) A

c) C

d) E

e) $648° = 1 \cdot 360° + 288° \Rightarrow$ D

f) $900° = 2 \cdot 360° + 180° \Rightarrow$ A

g) E

h) J

7.34 Calcula el ángulo que gira la aguja de las horas en un reloj durante los siguientes períodos de tiempo.

a) Una hora **c) Un día**

b) Medio día **d) Una semana**

a) Como el reloj tiene 12 horas, cada hora, la aguja recorrerá $\frac{360°}{12} = 30°$.

b) Medio día son 12 horas, por lo que la aguja da la vuelta completa, recorriendo 360°.

c) En un día da la vuelta dos veces, por lo que recorre $360° \cdot 2 = 720°$.

d) Una semana son 7 días, por lo que recorrerá $7 \cdot 720° = 5040°$.

7.35 Un reloj marca las once y media del mediodía.

a) ¿Qué ángulo recorre el minutero para marcar la una y diez de la tarde?

b) ¿Qué hora es si el minutero ha recorrido un ángulo de -5400 grados?

c) ¿Qué ángulo deberá recorrer el minutero si queremos retrasar el reloj tres cuartos de hora?

a) El minutero da una vuelta entera (serían las doce y media) y un giro equivalente a 40 minutos, es decir, $\frac{40 \cdot 360°}{60} = 240°$. En total la aguja recorre $-360° - 240° = -600°$.

b) $-5400° = 15 \cdot (-360°)$, con lo que el minutero ha girado 15 vueltas, es decir, 15 horas. Serán, por tanto, las dos y media de la madrugada.

c) 270°

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

7.36 **El seno de un ángulo del segundo cuadrante vale $\frac{12}{13}$. Calcula el coseno y la tangente de ese mismo ángulo.**

Al ser un ángulo del segundo cuadrante, tanto el coseno como la tangente serán negativos. Aplicamos las relaciones fundamentales:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}; \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$$

7.37 **Calcula el coseno y la tangente de un ángulo α del que sabemos que:**

a) Pertenece al segundo cuadrante y seno $\alpha = \frac{12}{37}$.

b) Pertenece al cuarto cuadrante y seno $\alpha = -\frac{7}{25}$.

a) El coseno del ángulo será negativo por pertenecer al segundo cuadrante. Aplicando la relación fundamental $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, este valdrá $-\sqrt{1 - \left(\frac{12}{37}\right)^2} = -\sqrt{\frac{1369 - 144}{1369}} = -\frac{35}{37}$.

Su tangente valdrá: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{12}{37}}{-\frac{35}{37}} = -\frac{12}{35}$.

b) El coseno del ángulo será positivo por pertenecer al cuarto cuadrante. Aplicando la relación fundamental $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, este valdrá $\sqrt{1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{625 - 49}{625}} = \frac{24}{25}$.

Su tangente valdrá: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = -\frac{7}{25}$.

7.38 **El coseno de un ángulo del tercer cuadrante vale $-\frac{28}{53}$. Calcula el seno y la tangente de ese mismo ángulo.**

El seno del ángulo será negativo por pertenecer al tercer cuadrante. Aplicando la relación fundamental, este valdrá:

$\text{sen}\,\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{28}{53}\right)^2} = -\sqrt{\frac{2809 - 784}{2809}} = -\frac{45}{53}$. Su tangente valdrá $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{45}{53}}{-\frac{28}{53}} = \frac{45}{28}$.

7.39 **Responde a las siguientes preguntas de forma razonada.**

a) ¿Puede el coseno de un ángulo valer $\frac{3}{2}$?

b) ¿Puede el seno de un ángulo valer $\frac{5}{4}$?

c) ¿Puede la tangente de un ángulo agudo valer 500?

d) Si está en el segundo cuadrante, ¿puede ser $\cos\alpha = \frac{1}{3}$? ¿Y $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$?

e) ¿Puede tener tangente positiva un ángulo que no sea del primer cuadrante?

a) No, el coseno de un ángulo en valor absoluto no puede valer más que 1.

b) No, el seno de un ángulo en valor absoluto no puede valer más que 1.

c) Sí, la tangente puede valer cualquier valor real.

d) No, el coseno de un ángulo del segundo cuadrante es negativo. Sí, para $\alpha = 160{,}53°$ se cumple.

e) Sí, los del tercer cuadrante.

7.40 a) Calcula el resto de las razones trigonométricas de los ángulos α y β pertenecientes al primer cuadrante si sabemos que: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos\beta = \dfrac{1}{2}$

b) Con ayuda de la calculadora, averigua la medida de α y β.

a) Todas las razones serán positivas al tratarse de ángulos del primer cuadrante. Se aplica la relación fundamental $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ a cada uno de los ángulos:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\alpha = \boxed{\mathrm{SEN}^{-1}}\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 60°$ $\qquad \beta = \boxed{\mathrm{COS}^{-1}}\ \dfrac{1}{2} = 60°$

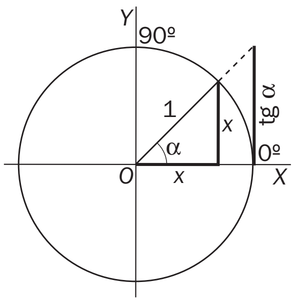
7.41 La tangente de un ángulo del tercer cuadrante vale $\dfrac{77}{36}$. Calcula el seno y el coseno de ese mismo ángulo.

El coseno de ese ángulo es negativo por pertenecer al tercer cuadrante. Su valor lo calcularemos aplicando que:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} = +\sqrt{\frac{1}{\frac{5929 + 1296}{1296}}} = -\sqrt{\frac{1296}{7225}} = -\frac{36}{85}$$

El seno del ángulo será $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{77}{36} \cdot \left(-\dfrac{36}{85}\right) = -\dfrac{77}{85}$.

7.42 Dibuja en la circunferencia goniométrica un ángulo α del primer cuadrante tal que $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$. ¿De qué ángulo se trata? Halla el valor de sus razones trigonométricas.



El ángulo es 45°, y se corresponde con la bisectriz del primer cuadrante.

Para calcular las razones trigonométricas se tiene en cuenta que al ser la circunferencia goniométrica, el radio mide 1, por lo que podemos calcular los catetos del triángulo formado a partir del teorema de Pitágoras:

$$1 = x^2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

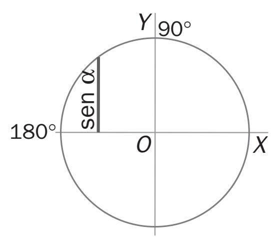
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

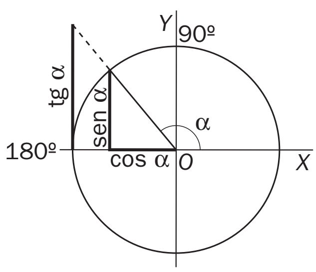
PARA APLICAR

7.43 La carretera que rodea una gran ciudad tiene forma de circunferencia de 29 kilómetros de radio. Suponemos que el centro de la carretera coincide con el origen de coordenadas. Calcula las razones trigonométricas del ángulo que ha girado un coche que se ha desplazado del punto (29, 0) al (−20, 21).

Si α es el ángulo que ha girado, tenemos que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{r} = \dfrac{21}{29}$, $\cos\alpha = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-20}{29}$ y $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{21}{-20}$.

7.44 En la figura aparecen la circunferencia goniométrica y el seno de un ángulo α del segundo cuadrante. Dibuja dicho ángulo, su coseno y su tangente. Indica el signo de cada una de sus razones trigonométricas.





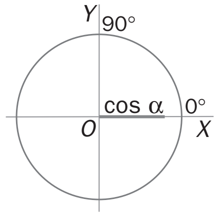
$\operatorname{sen}\alpha > 0$

$\cos\alpha < 0$

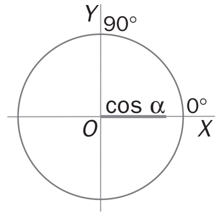
$\operatorname{tg}\alpha < 0$

7.45 En la figura aparecen dos circunferencias goniométricas, una con el coseno de un ángulo α del primer cuadrante y otra con la tangente de un ángulo β del cuarto cuadrante. Dibuja α, β y el resto de sus razones trigonométricas e indica el signo de cada una.

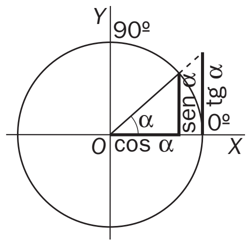
a)



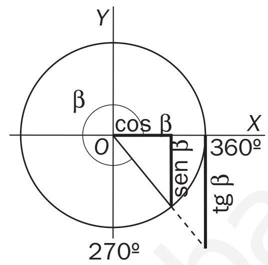
b)



a) $\text{sen}\,\alpha > 0$; $\cos\alpha > 0$; $\text{tg}\,\alpha > 0$



b) $\text{sen}\,\alpha < 0$; $\cos\alpha > 0$; $\text{tg}\,\alpha < 0$



7.46 Halla los valores de los ángulos que verifican la siguiente ecuación trigonométrica.

$$\textbf{sen}^2\,\alpha - 2\cos^2\alpha = 1$$

Se sustituye el $\text{sen}^2\,\alpha$ por $1 - \cos^2\alpha$, de forma que se obtiene una ecuación solo en función del coseno y que se puede resolver:

$$\text{sen}^2\,\alpha - 2\cdot\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow (1 - \cos^2\alpha) - 2\cdot\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow -3\cdot\cos^2\alpha = 0 \Rightarrow \cos^2\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 90° + 360°\,k\\ \alpha = 270° + 360°\,k\end{cases}$$

donde k es un número natural.

Razones trigonométricas de ángulos relacionados

P A R A   P R A C T I C A R

Ejercicio resuelto

7.47 Sin ayuda de la calculadora, indica los valores de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 150° b) cos 225° c) tg 315° d) sen (−60°)

Se relacionan con las razones trigonométricas de los ángulos del primer cuadrante de la siguiente forma.

Si el ángulo pertenece al:

- Segundo cuadrante, el cálculo se apoya en el ángulo que le falta para 180°.
- Tercer cuadrante, el cálculo se apoya en el ángulo que le sobra de 180°.
- Cuarto cuadrante, el cálculo se apoya en el ángulo que le falta para 360°.

a) $\text{sen}\,150° = \text{sen}\,(180° - 150°) = \text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$

b) $\cos 225° = -\cos(225° - 180°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{tg}\,315° = \text{tg}\,(-45°) = -\text{tg}\,45° = -1$

d) $\cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

7.48 Sin ayuda de la calculadora, indica los valores de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 120° **b) sen 225°** **c) sen 300°** **d) cos 150°** **e) cos 135°** **f) cos 210°** **g) tg 300°** **h) tg 1305°** **i) tg 150°**

a) $\text{sen}\,120° = \text{sen}\,(180° - 60°) = \text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen}\,225° = \text{sen}\,(180° + 45°) = -\text{sen}\,45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen}\,300° = \text{sen}\,(360° - 60°) = -\text{sen}\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos 150° = \cos (180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos 135° = \cos (180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos 210° = \cos (180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\text{tg}\,300° = \frac{\text{sen}\,300°}{\cos 300°} = \frac{\text{sen}\,(-60°)}{\cos(-60°)} = \frac{-\text{sen}\,60°}{\cos 60°} = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

h) $\text{tg}\,1305° = \text{tg}\,225° = \frac{\text{sen}\,225°}{\cos 225°} = \frac{-\text{sen}\,45°}{-\cos 45°} = \text{tg}\,45° = 1$

i) $\text{tg}\,150° = \frac{\text{sen}\,150°}{\cos 150°} = \frac{\text{sen}\,30°}{-\cos 30°} = -\text{tg}\,30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

7.49 Indica en cada caso qué ángulos menores de 360 grados cumplen las siguientes igualdades.

a) sen x = sen 15° **b) cos y = cos 15°** **c) tg z = tg 15°**

a) x debe pertenecer al segundo cuadrante para que el seno sea positivo, por lo que: $x = 180° - 15° = 165°$.

b) x debe pertenecer al cuarto cuadrante para que el coseno sea positivo, por lo que: $x = 360° - 15° = 345°$.

c) x debe pertenecer al tercer cuadrante para que la tangente sea positiva, por lo que: $x = 180° + 15° = 195°$.

Ejercicio resuelto

7.50 Indica la medida de todos los ángulos α que verifiquen que $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

El coseno es un número positivo, por lo que el ángulo puede estar en el primer cuadrante o en el cuarto.

$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 60° + 360°\,k \\ \alpha = 300° + 360°\,k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

7.51 Indica la medida de todos los ángulos que verifican que:

a) $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$

b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos\alpha = 0$

d) $\text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{tg}\,\alpha = 1$

a) $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 30° + 360°k \\ \alpha = 150° + 360°k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 135° + 360°k \\ \alpha = 225° + 360°k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

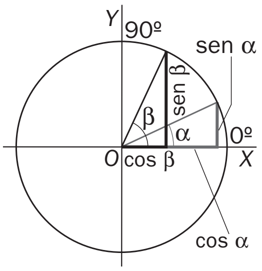
c) $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 90° + 360°k \\ \alpha = 270° + 360°k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

d) $\text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 240° + 360°k \\ \alpha = 300° + 360°k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

e) $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 30° + 360°k \\ \alpha = 210° + 360°k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

f) $\text{tg}\,\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 45° + 360°k \\ \alpha = 225° + 360°k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

7.52 Dibuja en la circunferencia goniométrica dos ángulos complementarios y escribe las relaciones entre sus razones trigonométricas.



$$\text{sen}\,\alpha = \cos(90° - \alpha) = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \text{sen}\,(90° - \alpha) = \text{sen}\,\beta$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos(90° - \alpha)}{\text{sen}\,(90° - \alpha)} = \frac{\cos\beta}{\text{sen}\,\beta} = \frac{1}{\text{tg}\,\beta}$$

7.53 Comprueba que las razones trigonométricas de los ángulos complementarios $\alpha = 30°$ y $\beta = 60°$ cumplen las relaciones que has obtenido en la actividad anterior.

$\text{sen}\,60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{sen}\,30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$; $\text{tg}\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\text{tg}\,60° = \sqrt{3} = \frac{1}{\text{tg}\,30°}$

PARA APLICAR

7.54 Fíjate en la representación de las razones trigonométricas en una circunferencia goniométrica para responder a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuál es el valor máximo que pueden alcanzar el seno y el coseno de un ángulo? ¿Qué ángulos alcanzan dichos valores?

b) ¿Cuál es el valor mínimo que pueden alcanzar el seno y el coseno de un ángulo? ¿Qué ángulos los alcanzan?

c) Halla la tangente de los ángulos de 0, 90, 180 y 270 grados.

a) y b) Tanto el seno como coseno están acotados por 1 y -1.

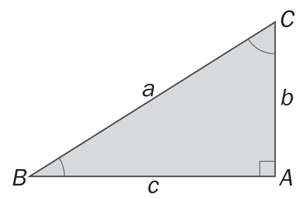
El seno alcanza el valor 1 para el ángulo 90° y -1 para el ángulo 270°.

El coseno alcanza el valor 1 en el ángulo 0° y el valor -1 en el ángulo 180°.

c) La tangente de un ángulo puede alcanzar cualquier valor real, es decir, puede ir desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

$\text{tg}\,0° = \text{tg}\,180° = 0$, $\text{tg}\,90° = +\infty$, $\text{tg}\,270° = -\infty$

7.55 Calcula de dos maneras diferentes el producto de las tangentes de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

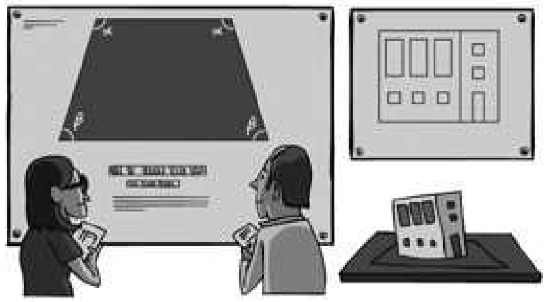


Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios. Por tanto, se tiene que:

$\text{tg}\,\widehat{C} \cdot \text{tg}\,\widehat{B} = \text{tg}\,\widehat{C} \cdot \text{tg}\,(90° - \widehat{C}) = \text{tg}\,\widehat{C}\,\frac{1}{\text{tg}\,\widehat{C}} = 1.$

Otra forma es considerar cada tangente: $\text{tg}\,\widehat{C} \cdot \text{tg}\,\widehat{B} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c} = 1.$

7.56 El nuevo centro de salud va a construirse en un terreno con forma de trapecio isósceles. Halla la suma de los cosenos de los cuatro ángulos.



Al ser el trapecio isósceles estará formado por dos ángulos agudos α iguales y dos ángulos obtusos iguales β. Además, como la suma de sus ángulos tiene que valer 360°, se tiene que $\alpha + \beta = 180°$, es decir, que son ángulos suplementarios.

$2 \cdot \cos\alpha + 2 \cdot \cos\beta = 2 \cdot \cos\alpha + 2 \cdot \cos(180° - \alpha) = 2 \cdot \cos\alpha - 2 \cdot \cos\alpha = 0$

7.57 Sabiendo que sen (90° − α) = *h* y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de *h* el valor de tg (180° + α).

$$\text{tg}\,(180^\circ + \alpha) = \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\text{sen}\,(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sqrt{1 - h^2}}{h}$$

MATEMÁTICAS APLICADAS

PARA APLICAR

7.58 Construye un medidor de ángulos y utilízalo para calcular las siguientes alturas.

a) La del edificio donde vives.

b) La de la torre de alguna iglesia de tu ciudad.

c) La del árbol más alto cercano a tu casa.

Para resolver esta actividad se procede del mismo modo que en el ejemplo resuelto en la teoría. Los resultados de cada alumno dependerán de los datos tomados en cada caso particular.

ACTIVIDADES FINALES

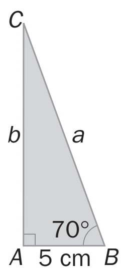
PARA PRACTICAR Y APLICAR

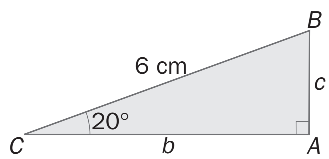
7.59 Los ángulos de un triángulo son proporcionales a 1, 2 y 3. Calcula el valor de dichos ángulos expresando el resultado en grados y radianes.

Sean x, $2x$ y $3x$ los ángulos del triángulo. Como su suma es 180° se tiene que $x + 2x + 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$, es decir, que los ángulos medidos en grados son 30°, 60° y 90°.

Su medida en radianes es, respectivamente, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$.

7.60 Calcula la medida de los lados desconocidos de los siguientes triángulos rectángulos.





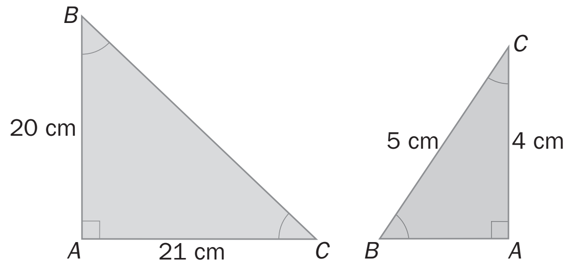
a) $\cos 70^\circ = \frac{5}{a} \Rightarrow a = \frac{5}{\cos 70^\circ} = 14{,}62$ cm

$\text{tg}\,70^\circ = \frac{b}{5} \Rightarrow b = 5 \cdot \text{tg}\,70^\circ = 13{,}74$ cm

b) $\text{sen}\,20^\circ = \frac{c}{6} \Rightarrow c = 6 \cdot \text{sen}\,20^\circ = 2{,}05$ cm

$\cos 20^\circ = \frac{b}{6} \Rightarrow b = 6 \cdot \cos 20^\circ = 5{,}64$ cm

7.61 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos de la figura. Con ayuda de la calculadora, obtén la medida de dichos ángulos.



a) La hipotenusa mide $\alpha = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$ cm.

Las razones trigonométricas pedidas serán:

$\text{sen}\,\widehat{C} = \cos\widehat{B} = \dfrac{20}{29} = 0{,}689$

$\widehat{C} = 0{,}689\ \boxed{\text{SEN}^{-1}} = 43°\ 36'$

$\cos\widehat{C} = \text{sen}\,\widehat{B} = \dfrac{21}{29} = 0{,}7241$

$\widehat{B} = 0{,}7241\ \boxed{\text{SEN}^{-1}} = 46°\ 24'$

$\text{tg}\,\widehat{B} = \dfrac{21}{20} = 1{,}05; \qquad \text{tg}\,\widehat{C} = \dfrac{20}{21} = 0{,}95$

$\text{sen}\,\widehat{B} = \cos\widehat{C} = \dfrac{20}{29}; \qquad \cos\widehat{B} = \text{sen}\,\widehat{C} = \dfrac{21}{29};$

$\text{tg}\,\widehat{B} = \dfrac{1}{\text{tg}\,\widehat{C}} = \dfrac{20}{21}.$

b) El cateto desconocido lo calculamos utilizando el teorema de Pitágoras: $c = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm.

Las razones trigonométricas pedidas serán:

$\text{sen}\,\widehat{B} = \cos\widehat{C} = \dfrac{4}{5}; \qquad \cos\widehat{B} = \text{sen}\,\widehat{C} = \dfrac{3}{5};$

$\text{tg}\,\widehat{B} = \dfrac{1}{\text{tg}\,\widehat{C}} = \dfrac{4}{3}.$

Los ángulos desconocidos miden:

$\widehat{B} = 53{,}13°$ y $\widehat{C} = 36{,}87°$

7.62 El seno de un ángulo agudo vale $\dfrac{28}{53}$. Calcula el coseno y la tangente de ese mismo ángulo.

El coseno lo calcularemos aplicando la relación fundamental: $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{28}{53}\right)^2} = \dfrac{45}{53}$. Su tangente valdrá $\dfrac{28}{45}$.

7.63 La tangente de un ángulo agudo vale $\dfrac{1}{5}$. Calcula el seno y el coseno de ese mismo ángulo. Da los resultados en forma de expresiones radicales.

Aplicando la relación fundamental se obtiene: $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 + 1}} = 0{,}98$

El valor del seno se obtiene a partir de la definición de la tangente:

$\text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{1}{5} \cdot 0{,}98 = 0{,}196.$

Este valor también lo podríamos haber obtenido utilizando la relación fundamental.

7.64 Responde a las siguientes preguntas de forma razonada.
a) ¿Hay algún ángulo en el segundo cuadrante cuyo coseno sea positivo?
b) ¿Hay algún ángulo del tercer cuadrante cuya tangente sea positiva?
c) ¿A qué cuadrante pertenecen los ángulos que tienen cosenos positivos y tangentes negativas?

a) Ninguno.

b) Todos.

c) Los ángulos del cuarto cuadrante.

7.65 Calcula el resto de las razones trigonométricas de un ángulo α del que sabemos que:

a) Pertenece al segundo cuadrante y $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{48}{73}$.

b) Pertenece al tercer cuadrante y $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$.

a) El coseno del ángulo será negativo por ser del segundo cuadrante.

Su coseno valdrá $-\sqrt{1 - \left(\dfrac{48}{73}\right)^2} = -\dfrac{55}{73}$. La tangente valdrá $\dfrac{55}{48}$.

b) Como el ángulo es del tercer cuadrante, tanto el seno como el coseno del ángulo serán negativos.

El coseno lo calculamos mediante la fórmula: $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

El seno: $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

7.66 Expresa las razones trigonométricas de los siguientes ángulos en función de las de 10 grados.

a) 80° **b) 170°** **c) 190°** **d) −10°** **e) 350°**

a) $\operatorname{sen}80° = \operatorname{sen}(90° - 10°) = \cos 10°$; $\cos 80° = \cos(90° - 10°) = \operatorname{sen}10°$; $\operatorname{tg}80° = \operatorname{tg}(90° - 10°) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}10°}$

b) $\operatorname{sen}170° = \operatorname{sen}(180° - 10°) = \operatorname{sen}10°$; $\cos 170° = -\cos 10°$; $\operatorname{tg}170° = -\operatorname{tg}10°$

c) $\operatorname{sen}190° = \operatorname{sen}(180° + 10°) = -\operatorname{sen}10°$; $\cos 190° = -\cos 10°$; $\operatorname{tg}190° = \operatorname{tg}10°$

d) $\operatorname{sen}(-10°) = -\operatorname{sen}10°$; $\cos(-10°) = \cos 10°$; $\operatorname{tg}(-10°) = -\operatorname{tg}10°$

e) $\operatorname{sen}350° = \operatorname{sen}(360° - 10°) = -\operatorname{sen}10°$; $\cos 350° = \cos 10°$; $\operatorname{tg}350° = -\operatorname{tg}10°$

7.67 Sin ayuda de la calculadora, indica los valores de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 150° **b) cos 300°** **c) tg 210°**

a) $\operatorname{sen}150° = \operatorname{sen}(180° - 30°) = \operatorname{sen}30° = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg}210° = \operatorname{tg}(180° + 30°) = \operatorname{tg}30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

7.68 Indica la medida de todos los ángulos α que verifican que:

a) $\operatorname{sen}\alpha = 1$ **b) $\operatorname{tg}\alpha = 0$** **c) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$**

a) $\operatorname{sen}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90° + 360°\,k, \quad k \in \mathbf{Z}$

b) $\operatorname{tg}\alpha = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 360°\,k \\ \alpha = 1800° + 360°\,k \end{cases}, \ k \in \mathbf{Z}$

c) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 150° + 360°\,k \\ \alpha = 210° + 360°\,k \end{cases}, \ k \in \mathbf{Z}$

7.69 El coseno de un ángulo α vale $\frac{56}{65}$. Calcula el valor de las siguientes expresiones según el cuadrante al que pertenezca α.

a) $65 \cdot \operatorname{sen}\alpha - 56 \cdot \operatorname{tg}\alpha$ **b) $65 \cdot \operatorname{sen}\alpha + 56 \cdot \operatorname{tg}\alpha$**

Para que el coseno de un ángulo tome ese valor el ángulo debe pertenecer al primer o al cuarto cuadrante.

- Si el ángulo pertenece al primer cuadrante el seno valdrá $\sqrt{1 - \left(\frac{56}{65}\right)^2} = \frac{33}{65}$, con lo que su tangente valdrá $\frac{33}{56}$.

a) $65 \cdot \frac{33}{65} - 56 \cdot \frac{33}{56} = 0$ b) $65 \cdot \frac{33}{65} + 56 \cdot \frac{33}{56} = 66$

- Si el ángulo pertenece al cuarto cuadrante el seno valdrá $-\sqrt{1 - \left(\frac{56}{65}\right)^2} = -\frac{33}{65}$, con lo que su tangente valdrá $-\frac{33}{56}$.

a) $65 \cdot \left(-\frac{33}{65}\right) - 56 \cdot \left(-\frac{33}{56}\right) = 0$ b) $65 \cdot \left(-\frac{33}{65}\right) + 56 \cdot \left(-\frac{33}{56}\right) = -66$

7.70 Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.

a) $\dfrac{1 + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$

a) En el primer término de la igualdad, se cambia la tangente por seno entre coseno, se hace común denominador y se simplifica:

$$\frac{1 + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = \frac{1 + \dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = \frac{1 + \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

b) Se multiplica cada sumando de dentro del paréntesis por las tangentes y se simplifica:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha$$

7.71 Simplifica la siguiente expresión trigonométrica $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) + (1 - \operatorname{sen}\alpha)(1 + \operatorname{sen}\alpha)$.

$(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) + (1 - \operatorname{sen}\alpha)(1 + \operatorname{sen}\alpha) = 1 - \cos^2\alpha + 1 - \operatorname{sen}^2\alpha = 2 - (\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) = 2 - 1 = 1$

7.72 Sabiendo que $\operatorname{tg} 188° = h$, calcula en función de h el valor de $\dfrac{\operatorname{sen} 172° - \cos 172°}{\operatorname{tg} 8°}$.

Primero calculamos el resto de razones trigonométricas para el ángulo de 188°, teniendo en cuenta que está en el tercer cuadrante.

$\cos 188° = -\sqrt{\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 188°}} = -\sqrt{\dfrac{1}{1 + h^2}}$ y $\operatorname{sen} 188° = \operatorname{tg} 188° \cdot \cos 188° = -h \cdot \sqrt{\dfrac{1}{1 + h^2}}$

Las relaciones entre el ángulo de 188° y los de 172° y 8° son:

8° = 188° − 180° y 172° = 180° − 8°, por lo que las razones trigonométricas son:

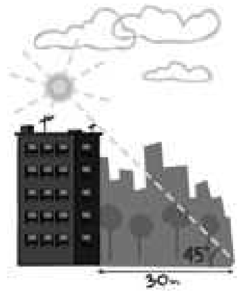
$\operatorname{sen} 188° = \operatorname{sen}(180° + 8°) = -\operatorname{sen} 8°$ $\operatorname{sen} 172° = \operatorname{sen}(180° - 8°) = -\operatorname{sen} 188°$

$\cos 188° = \cos(180° + 8°) = -\cos 8°$ $\cos 172° = \cos(180° - 8°) = -\cos 8° = \cos 188°$

$\operatorname{tg} 188° = \operatorname{tg}(180° + 8°) = \operatorname{tg} 8°$ $\operatorname{tg} 172° = \operatorname{tg}(180° - 8°) = -\operatorname{tg} 8° = -\operatorname{tg} 188°$

$$\frac{\operatorname{sen} 172° - \cos 172°}{\operatorname{tg} 8°} = \frac{-\operatorname{sen} 188° - \cos 188°}{\operatorname{tg} 188°} = \frac{h \cdot \sqrt{\dfrac{1}{1 + h^2}} + \sqrt{\dfrac{1}{1 + h^2}}}{h} = \frac{h + 1}{h}\sqrt{\frac{1}{1 + h^2}}$$

7.73 En el momento del día en que los rayos solares tienen una inclinación de 45 grados, la sombra que proyecta un edificio mide 30 metros. Calcula la altura del edificio.



La altura será $h = 30 \cdot \text{tg}\, 45° = 30$ m

7.74 La Torre Eiffel tiene una altura de 300 metros. Calcula la longitud de su sombra cuando los rayos solares tienen una inclinación de 60 grados.

La medida x de su sombra verifica que $\text{tg}\, 60° = \sqrt{3} = \dfrac{300}{x} \Rightarrow x = \dfrac{300}{\sqrt{3}} = 173{,}21$ m

7.75 La señal de tráfico indica que los ciclistas suben una rampa del 8%. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la carretera?

El ángulo de inclinación de la carretera verifica que su seno es $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{8}{100} = 0{,}08$, con lo que su ángulo es 4,57°.

PARA REFORZAR

7.76 Indica de forma razonada a qué cuadrante pertenecen los siguientes ángulos.

a) 100° **b) 339°** **c) $\dfrac{\pi}{3}$ rad** **d) $\dfrac{15\pi}{13}$ rad**

a) 2.º cuadrante b) 4.º cuadrante c) 1.er cuadrante d) 3.er cuadrante

7.77 Expresa los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 360 grados.

a) 1030° **b) 4410°** **c) $\dfrac{31\pi}{5}$ rad**

a) $1030° = 2 \cdot 360° + 310°$ b) $4410° = 12 \cdot 360° + 90°$ c) $\dfrac{31\pi}{5}$ rad $= 3 \cdot 2\pi + 0{,}2\pi$ rad

7.78 Expresa los siguientes ángulos como suma de un número entero negativo de vueltas más un ángulo negativo de valor absoluto menor de 360 grados.

a) −500° **b) −2250°** **c) −1000°**

a) $-500° = -360° - 140°$ b) $-2250° = -6 \cdot 360° - 90°$ c) $-1000° = -2 \cdot 360° - 280°$

7.79 Señala de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) El coseno de un ángulo del segundo cuadrante es negativo.

b) Si un ángulo pertenece al tercer cuadrante o al cuarto, su tangente es positiva.

c) Si el seno de un ángulo es positivo, entonces el ángulo pertenece al primer cuadrante.

d) $\text{sen}\, 15° = \cos 75°$

e) $\text{tg}\, 10° = \text{tg}\, 190°$

f) $\cos 25° = -\cos(-25°)$

a) Verdadero.

b) Falso, en el cuarto cuadrante la tangente es negativa.

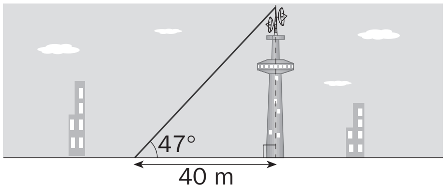
c) Falso, el ángulo puede estar también en el segundo cuadrante.

d) Verdadero, son ángulos complementarios.

e) Verdadero, son ángulos que difieren en 180° y 190° está en el tercer cuadrante, donde la tangente es positiva.

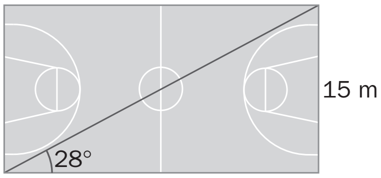
f) Falso, al ser opuestos $\cos 25° = \cos(-25°)$.

7.80 Calcula la altura aproximada de la siguiente antena.



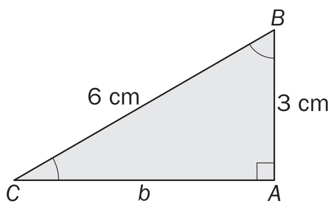
La altura pedida será: $40 \cdot \text{tg}\, 47° = 42{,}89$ m

7.81 Una cancha de baloncesto mide 15 metros de ancho. Calcula el largo de la pista si la diagonal forma un ángulo de 28 grados con uno de los laterales.



Su anchura medirá: $\dfrac{15}{\text{tg}\, 28°} = 28{,}21$ m

7.82 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 6 centímetros, y uno de sus catetos, 3. Halla las razones trigonométricas de los ángulos del triángulo.



El cateto desconocido mide: $b = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Las razones trigonométricas serán:

$$\text{sen}\, \widehat{B} = \cos \widehat{C} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \widehat{B} = \text{sen}\, \widehat{C} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\, \widehat{B} = \frac{1}{\text{tg}\, \widehat{C}} = \sqrt{3}$$

7.83 Calcula el seno y la tangente de un ángulo agudo sabiendo que su coseno vale 0,3.

El seno del ángulo valdrá $\sqrt{1 - (0{,}3)^2} = 0{,}95$ y la tangente $\dfrac{0{,}95}{0{,}3} = 3{,}18$.

7.84 Calcula el seno y el coseno de un ángulo del tercer cuadrante del que sabemos que su tangente vale 4.

El coseno de un ángulo del tercer cuadrante es negativo. Este valdrá $\cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{1}{1 + \text{tg}^2\alpha}} = -\sqrt{\dfrac{1}{1+16}} = -\dfrac{1}{\sqrt{17}} = -\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

El seno valdrá $-\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

7.85 Sin ayuda de la calculadora, halla el valor de las razones trigonométricas de los ángulos de 135, 225 y 315 grados.

$$\text{sen}\, 135° = \text{sen}\,(180° - 45°) = \text{sen}\, 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\, 135° = \text{tg}\,(180° - 45°) = -\text{tg}\, 45° = -1$$

$$\text{sen}\, 225° = \text{sen}\,(180° + 45°) = -\text{sen}\, 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\, 225° = \text{tg}\,(180° + 45°) = -\text{tg}\, 45° = -1$$

$$\text{sen}\, 315° = \text{sen}\,(360° - 45°) = -\text{sen}\, 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315° = \cos(360° - 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\, 315° = \text{tg}\,(360° - 45°) = -\text{tg}\, 45° = -1$$

7.86 Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética. Si el ángulo menor mide 45 grados, halla la medida de los otros dos ángulos y expresa el resultado en grados y radianes.

Si los ángulos están en progresión aritmética de diferencia d, estos se pueden expresar como $45°$, $45° + d$, $45° + 2d$.

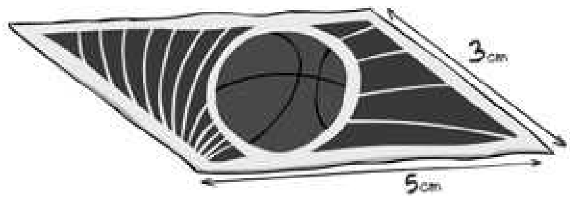
Como la suma tiene que valer $180°$ se tiene que $45 + 45 + d + 45 + 2d = 180 \Rightarrow 3d = 180 - 135 \Rightarrow d = \frac{45}{3} = 15$ con lo que los ángulos serán de 45, 60 y 75 grados.

7.87 Un reloj señala las doce en punto. Después de 25 minutos, ¿qué ángulo forman sus agujas?

La aguja de los minutos ha girado $-\frac{360}{60} \cdot 25 = -150°$. La aguja de las horas ha girado $-\frac{30}{60} \cdot 25 = -12{,}5°$.

Por tanto, el ángulo que forman las agujas, medido en sentido positivo, es $-12{,}5° - (-150°) = 137{,}5°$.

7.88 Las entradas de un partido de baloncesto se imprimen en forma de paralelogramo tal y como muestra la figura. El ángulo agudo que forman dos de sus lados es tal que su tangente vale el doble que su seno. Calcula el área de las entradas.



Calculemos el ángulo agudo del paralelogramo.

Dicho ángulo verifica que:

$\text{tg}\,\alpha = 2\text{sen}\,\alpha \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 2\text{sen}\,\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \cos\alpha$, con lo que $\alpha = 60°$.

La altura h del paralelogramo será $h = 3 \cdot \text{sen}\,60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, con lo que el área pedida será $5 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

7.89 En cada caso, halla dos ángulos que verifiquen las siguientes igualdades.

a) $\text{sen}\,(x + 45°) = \text{sen}\,(2x - 90°)$

b) $\text{tg}\left(\frac{1}{2}x - 30°\right) = \text{tg}\,(3x + 60°)$

c) $\frac{1}{\text{sen}\,x \cdot \cos x} = 1 + \text{tg}^2 x$

a) $\text{sen}\,(x + 45°) = \text{sen}\,(2x - 90°) \Rightarrow \begin{cases} x + 45° = 2x - 90° \Rightarrow x = 135° \\ x + 45° + 2x - 90° = 180° \Rightarrow x = 75° \end{cases}$

b) $\text{tg}\left(\frac{1}{2}x - 30°\right) = \text{tg}\,(3x + 60°) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - 30° = 3x + 60° \Rightarrow -36° \\ \frac{1}{2}x - 30° + 180° = 3x + 60° \Rightarrow x = 36° \end{cases}$

c) $\frac{1}{\text{sen}\,x \cdot \cos x} = \text{tg}^2 x + 1 \Rightarrow \frac{1}{\text{sen}\,x \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \text{sen}\,x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} x = 45° \\ x = 225° \end{cases}$

7.90 Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica.

$$2 \cdot \cos x = 3 \cdot \text{tg}\,x$$

$2 \cdot \cos x = 3 \cdot \text{tg}\,x \Leftrightarrow 2\cos x = 3\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} \Rightarrow 2\cos^2 x = 2(1 - \text{sen}^2 x) = 3\text{sen}\,x \Rightarrow 2\text{sen}^2 x + 3\text{sen}\,x - 2 = 0$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, tomando como incógnita $\text{sen}\,x$ tenemos que:

$\text{sen}\,x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30°;\ x = 150° \\ \text{sen}\,x = -2 \Rightarrow \text{solución no válida} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + 360°\,k \\ x = 150° + 360°\,k \end{cases},\ k \in \mathbf{Z}$

7.91 La base de la carpa de un circo tiene forma de octógono regular de 30 metros de lado. Calcula su área.

Consideramos uno de los 8 triángulos isósceles que resultan al unir el centro del octógono con los vértices. El ángulo desigual de cada uno de ellos mide $360° : 8 = 45°$.

Como los triángulos son isósceles los ángulos de la base miden 67,5° cada uno.

Hallamos la medida de la altura h de uno de los triángulos isósceles.

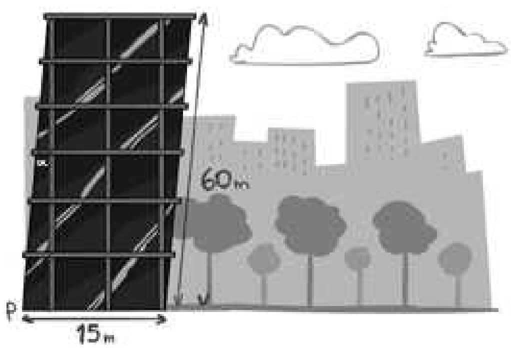
$$\text{tg}\,67{,}5° = \frac{h}{15} \Rightarrow h = 15 \cdot \text{tg}\,67{,}5° = 36{,}21 \text{ m}$$

La superficie de cada uno de los triángulos es: $\frac{30 \cdot 36{,}21}{2} = 543{,}15 \text{ m}^2$.

Como la base de la carpa está formada por 8 triángulos iguales, la superficie total será de: $8 \cdot 543{,}15 \text{ m}^2 = 4345{,}2 \text{ m}^2$.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

7.92 La torre inclinada



En el centro de una gran ciudad se ha construido una moderna torre. Los arquitectos la han diseñado con una inclinación inicial α de 5 grados como muestra la figura.

Sin embargo, debido a ciertos fallos en el proyecto, la inclinación aumenta con el paso del tiempo de forma que la vertical se separa del punto *P* 10 milímetros cada año.

a) Calcula el tiempo que ha de pasar desde el año de la construcción para que la vertical sobrepase el centro de la base.

b) ¿Cuánto medirá el ángulo α en ese momento?

a) En principio, la separación de la vertical del punto P es de $60 \cdot \text{sen}\,\alpha = 60 \cdot \text{sen}\,5° = 5{,}23$ m.

Para que esta separación llegue a la mitad del lado de la base, debe aumentar en $7{,}5 - 5{,}23 = 2{,}27 \text{ m} = 2270$ mm.

Por tanto, han de pasar más de $\frac{2270}{10} = 227$ años para que la vertical sobrepase el centro de la base.

b) En el momento en que la vertical alcance el centro de la base, la inclinación α será de: $\text{sen}\,\alpha = \frac{7{,}5}{60} = 0{,}125 \Rightarrow \alpha = 7°\ 11'$.

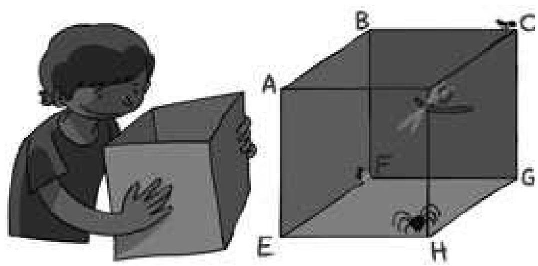
7.93 Animales en un cubo

Juan tiene una caja de cartón con forma de cubo de 30 centímetros de lado. Dentro de ella ha metido una araña, una mosca y una libélula. Observa el dibujo para ver en qué esquina se ha situado cada animal.

a) Calcula la distancia menor que deberán recorrer la araña y la libélula para llegar hasta donde se encuentra la mosca.

b) Calcula la longitud del camino más corto que debe recorrer la hormiga por el exterior de la caja para llegar al vértice *E*.

c) Describe el camino que debe seguir la hormiga en función del ángulo que forma con la arista *CD*.



a) La araña debe recorrer la diagonal de la base para llegar a la mosca: $d = \sqrt{30^2 + 30^2} = 42{,}43$ cm.

La libélula tendrá que recorrer la diagonal del cubo para llegar a la mosca: $D = \sqrt{42{,}43^2 + 30^2} = 51{,}96$ cm.

b) La hormiga deberá ir desde el vértice C a la mitad del lado DH, y de aquí al vértice E:

$l = 2 \cdot \sqrt{15^2 + 30^2} = 67{,}08$ cm.

c) El ángulo que forma con la arista CD es: $\text{tg}\,\alpha = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26°\ 33'\ 54''$.

El camino que recorre es: $l = 2 \cdot 30 \cdot \frac{2 \cdot 30}{\cos\alpha} = \frac{2 \cdot 30}{\cos(26°\ 33'\ 54'')} = 67{,}08$ cm. Se obtiene el mismo resultado.

7.A1 **Expresa en radianes los siguientes ángulos.**

a) 18° **b) 105°** **c) 120°**

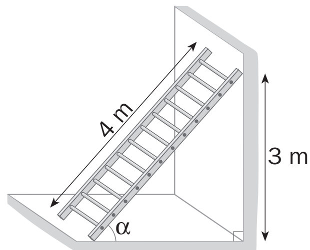
a) $\frac{2\pi \cdot 18°}{360°} = \frac{\pi}{10}$ rad b) $\frac{2\pi \cdot 105°}{360°} = \frac{7\pi}{12}$ rad c) $\frac{2\pi \cdot 120°}{360°} = \frac{2\pi}{3}$ rad

7.A2 **Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes.**

a) $\frac{2\pi}{3}$ **rad** **b)** $\frac{5\pi}{9}$ **rad** **c)** $\frac{\pi}{15}$ **rad**

a) $\frac{\frac{2\pi}{3} \cdot 360°}{2\pi} = 120°$ b) $\frac{\frac{5\pi}{9} \cdot 360°}{2\pi} = 100°$ c) $\frac{\frac{\pi}{15} \cdot 360°}{2\pi} = 12°$

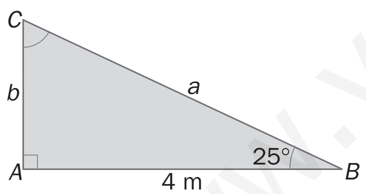
7.A3 **Con ayuda de la calculadora, halla la medida aproximada del ángulo de inclinación con que debe colocarse una escalera de 4 metros para que alcance una altura de 3 metros.**



La razón trigonométrica del ángulo alfa que relaciona el cateto opuesto con la hipotenusa es el seno. $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = 0{,}75$ $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$ $= 48°\ 35'\ 25''$

Debe colocarse formando 48° 35′ 25″ con la horizontal.

7.A4 **Calcula la medida de los ángulos y los lados desconocidos del triángulo rectángulo de la figura.**



$\widehat{C} = 180° - (90° + 25°) = 65°$

$\text{tg}\,25° = \frac{b}{4} \Rightarrow b = 4 \cdot \text{tg}\,25° = 1{,}86$ m

$\cos 25° = \frac{4}{a} \Rightarrow a = \frac{4}{\cos 25°} = 4{,}41$ m

7.A5 **El coseno de un ángulo agudo vale 0,77. Calcula el seno y la tangente de ese mismo ángulo.**

El seno del ángulo valdrá $\sqrt{1 - (0{,}77)^2} = 0{,}64$ y la tangente $\frac{0{,}64}{0{,}77} = 0{,}83$.

7.A6 **Dados los ángulos $\alpha = 20°$ y $\beta = 55°$, indica el cuadrante al que pertenecen los siguientes ángulos.**

a) $\alpha + 2\beta$ **c)** $4\beta - \alpha$ **e)** $\alpha - \beta$

b) $5\alpha - \beta$ **d)** $7\beta - 2\alpha$ **f)** 11β

a) $\alpha + 2\beta = 130° \Rightarrow$ segundo cuadrante

b) $5\alpha - \beta = 45° \Rightarrow$ primer cuadrante

c) $4\beta - \alpha = 200° \Rightarrow$ tercer cuadrante

d) $7\beta - 2\alpha = 345° \Rightarrow$ cuarto cuadrante

e) $\alpha - \beta = -35° \Rightarrow$ cuarto cuadrante

f) $11\beta = 605° = 360° + 245° \Rightarrow$ tercer cuadrante

7.A7 En cada caso, calcula las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

a) $\cos\alpha = 0{,}1 \qquad 270° < \alpha < 360°$

b) $\operatorname{tg}\alpha = -1 \qquad 90° < \alpha < 180°$

c) $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{3}{5} \qquad 180° < \alpha < 270°$

a) El seno será negativo al pertenecer al cuarto cuadrante: $\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1 - (0{,}1)^2} = -0{,}995$, y la tangente será: $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{0{,}99}{0{,}1} = -9{,}95$.

b) El coseno de un ángulo del segundo cuadrante es negativo. Este valdrá

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ El seno valdrá $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) El coseno del ángulo será negativo por pertenecer al tercer cuadrante. Aplicando la relación fundamental este valdrá

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}.$$ Su tangente valdrá $\dfrac{3}{4}$.

7.A8 Halla todos los ángulos cuyo coseno sea igual a $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 135° + 360°\,k \\ 225° + 360°\,k \end{cases},\ k \in Z$$

7.A9 Expresa las razones trigonométricas de los siguientes ángulos en función de las del ángulo de 25 grados.

a) 155° b) 205° c) 335°

a) $\operatorname{sen} 155° = \operatorname{sen}(180° - 25°) = \operatorname{sen} 25°$
$\cos 155° = \cos(180° - 25°) = -\cos 25°$
$\operatorname{tg} 155° = \operatorname{tg}(180° - 25°) = -\operatorname{tg} 25°$

b) $\operatorname{sen} 205° = \operatorname{sen}(180° + 25°) = -\operatorname{sen} 25°$
$\cos 205° = \cos(180° + 25°) = -\cos 25°$
$\operatorname{tg} 205° = \operatorname{tg}(180° + 25°) = \operatorname{tg} 25°$

c) $\operatorname{sen} 335° = \operatorname{sen}(360° - 25°) = -\operatorname{sen} 25°$
$\cos 335° = \cos(360° - 25°) = \cos 25°$
$\operatorname{tg} 335° = \operatorname{tg}(360° - 25°) = -\operatorname{tg} 25°$

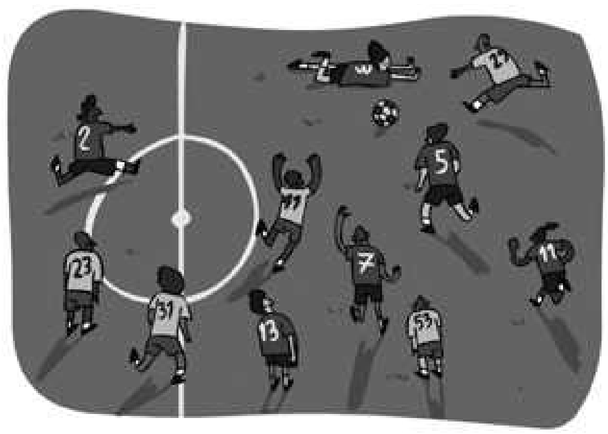
E N T R E T E N I D O

Los primos de Germain

Hay muchos tipos de números: pares, capicúas, primos, triangulares… pero ¿sabías que también hay números de Germain?

Para que un número *n* sea de Germain, tiene que ser primo y, además, el número 2*n* + 1 también debe ser primo.

¿Cuáles de los siguientes números no son primos de Germain?



Los números primos de Sophie Germain inferiores a 200, son: 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113, 131, 173, 179, 191.

Así entre los números propuestos, no son primos de Germain el 7, 13 y 31 ya que aunque son números primos, los números (2*n* + 1): 15, 27 y 63 son todos múltiplos de 3.