NOMBRE: ____________________________________________________________

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:
   a) $\dfrac{\sqrt[4]{x^{10}}}{x^2\sqrt[3]{x^4}}$ *(0,5 puntos)*
   b) $\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ *(0,5 puntos)*
2) Los primeros términos de una sucesión son: $a_1 = 7$; $a_2 = 14$; $a_3 = 28$; y así sucesivamente, multiplicando el término anterior por 2 para obtener el que le sigue. Se pide:
   a) ¿Qué tipo de sucesión es? *(0,1 punto)*
   b) Empleando alguna fórmula adecuada al tipo de sucesión que es, sumar sus 12 primeros términos. *(0,9 puntos)*
3) Calcular $37^2$. *(0 puntos)*
   a) Hallar el valor de $m$ para que el resto de dividir $P(x)$ entre $x - 2$ sea $-45$, siendo $P(x) = mx^3 - 13x^2 - 48x + 55$ *(0,5 puntos)*
   b) Sin usar la calculadora, factorizar $Q(x) = 6x^3 - 13x^2 - 48x + 55$ *(0,5 puntos)*
4) Resolver las ecuaciones:
   a) $\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{x-2}{x+3}$ *(1 punto)*
   b) $5 \log x = 3 + \log \dfrac{x^3}{10}$ *(1 punto)*
   c) $5^{2x} - 30\cdot 5^x + 125 = 0$ *(1 punto)*
   d) $2\sqrt{2x+3}=3+\sqrt{3x}$ *(1 punto)*
5) Resolver la inecuación $\dfrac{x+3}{x^2-4x} \geq 0$ *(1 punto)*
6) Contestar las siguientes cuestiones:
   a) Sin calculadora, siendo $\text{tg}\ \alpha = -2$, $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de $\alpha$. A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de $\alpha$ en grados, minutos, segundos. *(1 punto)*
   b) Hallar sin calculadora el valor exacto de $\text{sen}\ 1650^\circ$. *(0,5 puntos)*
   c) Convertir a radianes 150º, expresándolo mediante una expresión simplificada que en la que aparezca $\pi$. *(0,5 puntos)*

## SOLUCIONES

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:

a) $\dfrac{\sqrt[4]{x^{10}}}{x^2\sqrt[3]{x^4}}$ *(0,5 puntos)*

$$\frac{\sqrt[4]{x^{10}}}{x^2\sqrt[3]{x^4}}=\frac{\sqrt{x^5}}{x^2\sqrt[3]{x^3x}}=\frac{\sqrt{x^4x}}{x^2x\sqrt[3]{x}}=\frac{x^2\sqrt{x}}{x^3\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt[3]{x^3}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{x^3}\sqrt[6]{x^4}}{x\,x}=\frac{\sqrt[6]{x^7}}{x^2}=\frac{x\sqrt[6]{x}}{x^2}=\boxed{\frac{\sqrt[6]{x}}{x}}$$

b) $\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ *(0,5 puntos)*

$$\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}\,\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2}{(\sqrt{3})^2-(2\sqrt{5})^2}=\frac{3-4\sqrt{15}+4\cdot 5}{3-4\cdot 5}=$$

$$=\frac{23-4\sqrt{15}}{-17}=\boxed{\frac{4\sqrt{15}-23}{17}}$$

2) Los primeros términos de una sucesión son: $a_1 = 7$; $a_2 = 14$; $a_3 = 28$; y así sucesivamente, multiplicando el término anterior por 2 para obtener el que le sigue. Se pide:

a) ¿Qué tipo de sucesión es? *(0,1 punto)*

Es una progresión geométrica, con $a_1 = 7$ y $r = 2$.

b) Empleando alguna fórmula adecuada al tipo de sucesión que es, sumar sus 12 primeros términos. *(0,9 puntos)*

$$s_{12}=\frac{a_1(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{7(2^{12}-1)}{2-1}=\boxed{28665}$$

3) Calcular $37^2$. *(0 puntos)*

$$\boxed{37^2=1369}$$

a) Hallar el valor de $m$ para que el resto de dividir $P(x)$ entre $x-2$ sea $-45$, siendo $P(x) = mx^3 - 13x^2 - 48x + 55$ *(0,5 puntos)*

Según el Teorema del Resto, el resto de la citada división es:

$$P(2) = -45 \iff 8m - 13\cdot 4 - 48\cdot 2 + 55 = -45 \iff 8m - 93 = -45 \iff$$

$$\iff 8m = 93 - 45 \iff m=\frac{48}{8} \iff \boxed{m=6}$$

b) Sin usar la calculadora, factorizar $Q(x) = 6x^3 - 13x^2 - 48x + 55$ *(0,5 puntos)*

Intentamos, inicialmente, Ruffini:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 6 | – 13 | – 48 | 55 |
| 1 | | 6 | – 7 | – 55 |
| | 6 | – 7 | – 55 | 0 |

Como no encontramos cómo continuar, resolvemos la correspondiente ecuación de segundo grado para averiguar si tiene más raíces:

$$6x^2 - 7x - 55 = 0 \iff x=\frac{7\pm\sqrt{49+1320}}{12}=\frac{7\pm 37}{12}=\begin{cases}=\dfrac{-30}{12}=-\dfrac{5}{2}\\[2mm] =\dfrac{44}{12}=\dfrac{11}{3}\end{cases}$$

Luego $\boxed{P(x) = 6(x-1)(x+5/2)(x-11/3)}$

4) Resolver las ecuaciones:

a) $\dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{x+3}{x-3} = \dfrac{x-2}{x+3}$ *(1 punto)*

$$\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = \frac{x-2}{x+3} \iff \frac{(x-3)^2-(x+3)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 - (x^2 + 6x + 9) = x^2 - 3x - 2x + 6 \iff$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 - x^2 - 6x - 9 = x^2 - 5x + 6 \iff$$

$$\iff -12x = x^2 - 5x + 6 \iff$$

$$\iff 0 = x^2 - 5x + 6 + 12x \iff x^2 + 7x + 6 = 0 \iff$$

$$\iff x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ = \dfrac{-12}{2} = -6 \end{array} \right.$$

Ambas soluciones son válidas, puesto que no anulan los denominadores iniciales: $\boxed{x = -1 \quad \text{ó} \quad x = -6}$.

b) $5 \log x = 3 + \log \dfrac{x^3}{10}$ *(1 punto)*

$$5 \log x = 2 + \log \frac{x^3}{10} \iff 5 \log x = 2 + \log x^3 - \log 10 \iff$$

$$\iff 5 \log x = 2 + 3 \log x - 1 \iff 5 \log x - 3 \log x = 1 \iff 2 \log x = 1 \iff$$

$$\iff \log x = 1/2 \iff x = 10^{1/2} \iff \boxed{x = \sqrt{10}}$$

La solución hallada es válida porque no anula los argumentos de los logaritmos de la ecuación inicial. En realidad, habría dos soluciones: $x = \pm\sqrt{10}$, pero $-\sqrt{10}$ no es válida, porque haría negativo el argumento del logaritmo del primer miembro de la ecuación original, lo que no es posible.

c) $5^{2x} - 30\cdot 5^x + 125 = 0$ *(1 punto)*

$$5^{2x} - 30\cdot 5^x + 125 = 0 \iff (5^x)^2 - 30\cdot 5^x + 125 = 0$$

Llamando $\boxed{t = 5^x}$:

$$t^2 - 30t + 125 = 0 \Rightarrow t = \frac{30 \pm \sqrt{900-500}}{2} = \frac{30 \pm 20}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ = \dfrac{50}{2} = 25 \end{array} \right.$$

- Si $t = 5 \Rightarrow$ Como $t = 5^x$, $5^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$
- Si $t = 25 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

d) $2\sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{3x}$ *(1 punto)*

$$2\sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{3x} \Rightarrow (2\sqrt{2x+3})^2 = (3+\sqrt{3x})^2 \Rightarrow$$

$$4(2x+3) = 9 + 6\sqrt{3x} + 3x \Rightarrow 8x + 12 = 9 + 6\sqrt{3x} + 3x \Rightarrow$$

$$8x + 12 - 9 - 3x = 6\sqrt{3x} \Rightarrow 5x + 3 = 6\sqrt{3x} \Rightarrow (5x+3)^2 = (6\sqrt{3x})^2 \Rightarrow$$

$$25x^2 + 30x + 9 = 36\cdot 3x \Rightarrow 25x^2 - 78x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{78 \pm \sqrt{6084-900}}{50} =$$

$$= \frac{78 \pm 72}{50} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{78-72}{50} = \dfrac{3}{25} \\ \dfrac{78+72}{50} = 3 \end{array} \right.$$

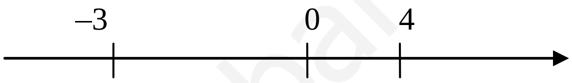
Ambas son válidas, como puede comprobarse sustituyendo en la ecuación original.

5) Resolver la inecuación $\dfrac{x+3}{x^2-4x} \geq 0$ *(1 punto)*

- Raíces del numerador: $x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x = -3}$. Factorizado: $\underline{x + 3}$.
- Raíces del denominador: $x^2 - 4x = 0 \;\Rightarrow\; x(x-4) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x = 0 \text{ ó } x = 4}$. Factorizado: $\underline{x(x-4)}$.
- Inecuación resultante con los polinomios factorizados:

  $$\frac{x+3}{x(x-4)} \geq 0$$

  División de R en intervalos mediante las raíces:




| | $(-\infty, -3)$ | $-3$ | $(-3, 0)$ | $0$ | $(0, 4)$ | $4$ | $(4, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x + 3$ | – | 0 | + | … | + | … | + |
| $x - 0$ | – | … | – | 0 | + | … | + |
| $x - 4$ | – | … | – | … | – | 0 | + |
| $\dfrac{x-3}{x(x-4)}$ | – | 0 | + | $\nexists$ | – | $\nexists$ | + |
| ¿Sirven? → | No | Si | Si | No | No | No | Si |

Luego la solución son los puntos de: $\boxed{[-3, 0) \cup (4, +\infty)}$.

6) Contestar las siguientes cuestiones:

a) Sin calculadora, siendo $\operatorname{tg} \alpha = -2$, $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de $\alpha$. A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de $\alpha$ en grados, minutos, segundos. *(1 punto)*

Como la tangente es negativa en el segundo cuadrante y positiva en el tercero, el ángulo está en el <u>segundo cuadrante</u>.

- $\boxed{\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\dfrac{1}{2}}$
- $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \;\Rightarrow\; \cos^2 \alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{1+(-2)^2} = \dfrac{1}{5} \;\Rightarrow$

  $\Rightarrow \boxed{\cos \alpha = -\sqrt{\dfrac{1}{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$, negativo por ser del segundo cuadrante.
- $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \;\Rightarrow\; \boxed{\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = -2\dfrac{-\sqrt{5}}{5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$
- $\boxed{\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} = \dfrac{1}{-1/\sqrt{5}} = -\sqrt{5}}$

- $\boxed{\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}/5} = \dfrac{5}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2{\cdot}5} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

Con la calculadora, obtenemos (partiendo de que tg $\alpha = -2$), que $\alpha = -63{,}43^{\circ}$.
Como es del II cuadrante: $\boxed{\alpha = -63{,}43^{\circ} + 180^{\circ} = 116{,}57^{\circ} = 116^{\circ}\ 33'\ 54''}$

b) Hallar sin calculadora el valor exacto de sen 1650º. *(0,5 puntos)*
sen 1650º = sen 210º = – sen (210º – 180º) = – sen 30º = $\boxed{-1/2}$ ya que ésa es la relación entre el coseno de ángulos del tercer y primer cuadrante. El valor de 210º es el resto de dividir 1650º entre 360º (son 4 vueltas completas más dicho resto).

c) Convertir a radianes 150º, expresándolo mediante una expresión simplificada que en la que aparezca $\pi$. *(0,5 puntos)*
Usamos una simple regla de 3:

$$\frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{x}{150^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{150\pi}{180} = \boxed{\frac{5\pi}{6} \text{ rad}}$$