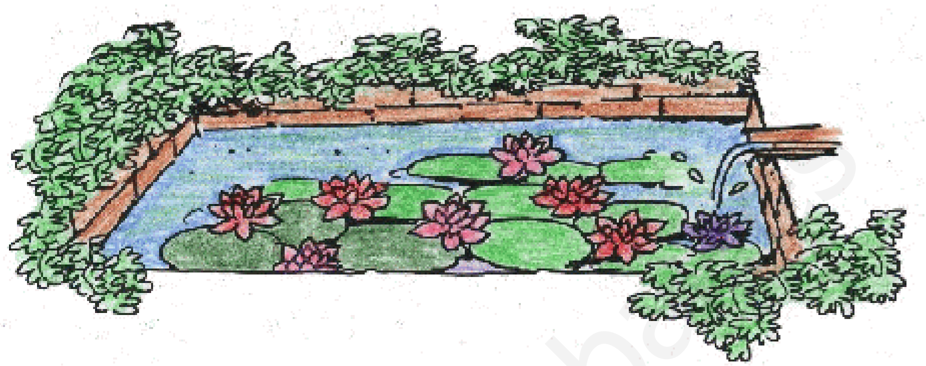
LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

INTRODUCCIÓN

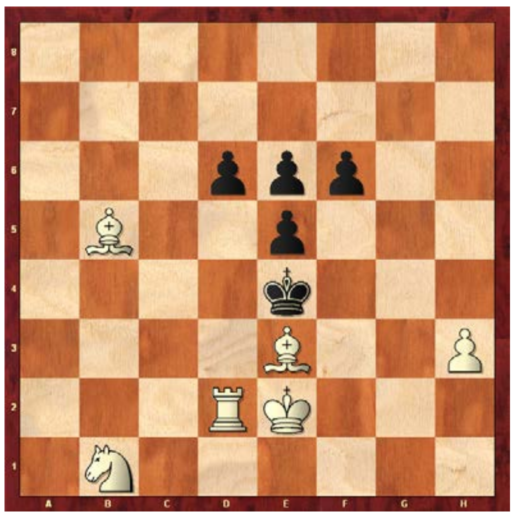
- Una hoja de nenúfar flota en el centro de un estanque circular. Su área se duplica día a día.



Haz una tabla de valores que relacione el tamaño del nenúfar con el número de días que lleva creciendo. Representa gráficamente este crecimiento.

Si un nenúfar cubre el estanque en 30 días, ¿cuántos días tardan en llenarlo dos nenúfares?

- El Brahmán Laharsessa, parece ser que también conocido como Sissa Ben Dahir, como recompensa por ofrecer el juego del ajedrez como entretenimiento al rey Iadova de la India, que estaba triste por la muerte de su hijo, pidió como recompensa un grano de trigo por el primer cuadro del tablero del ajedrez, por el segundo cuadro el doble del cuadro anterior es decir del primero, por el tercero el doble de lo que había en el cuadro anterior, el segundo; y así sucesivamente hasta la casilla 64.



El Rey les planteo el problema a sus matemáticos y le dijo a Sissa Ben Dahir, “pásate después y te daré tu recompensa”.

¿Puedes ayudar a los matemáticos a calcular la cantidad de trigo que debe entregarse como recompensa al inventor del ajedrez?

La **función exponencial** es del tipo:

$$f(x) = a^x$$

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama *función exponencial de base a y exponente x*.

x	y = 2^x
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

1/8
1/4
1/2
1
2
4

1/8
1/4
1/2
1
2

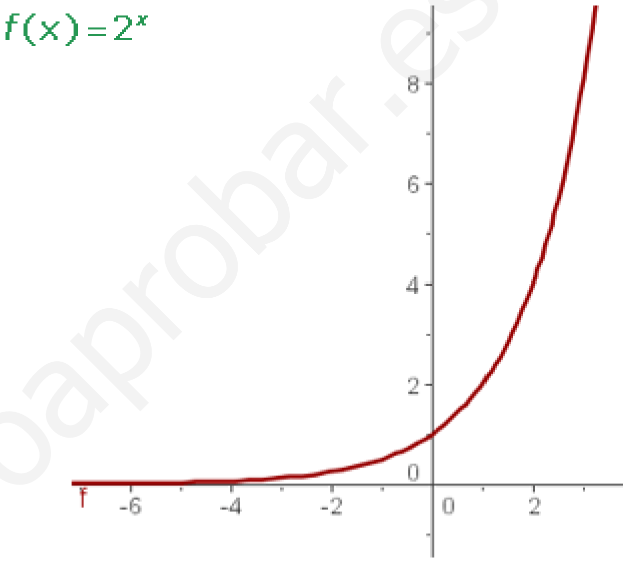
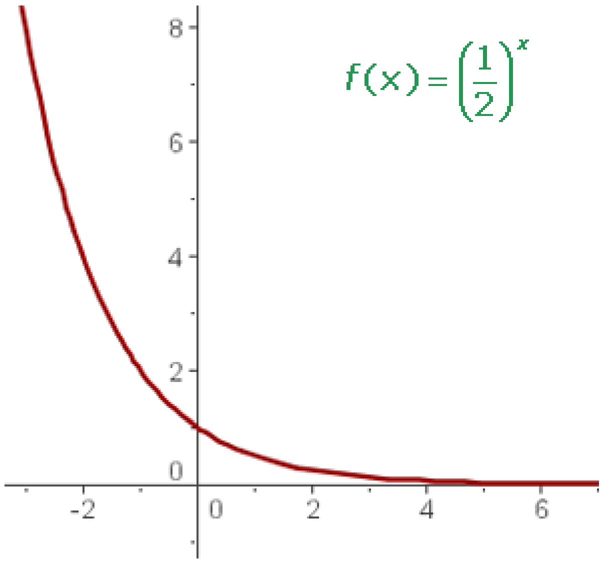


Tabla: Las diferencias son constantes

x	y = $(1/2)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8



Dominio: $\mathbb{R}$.

Recorrido: $\mathbb{R}^+$.

Es continua.

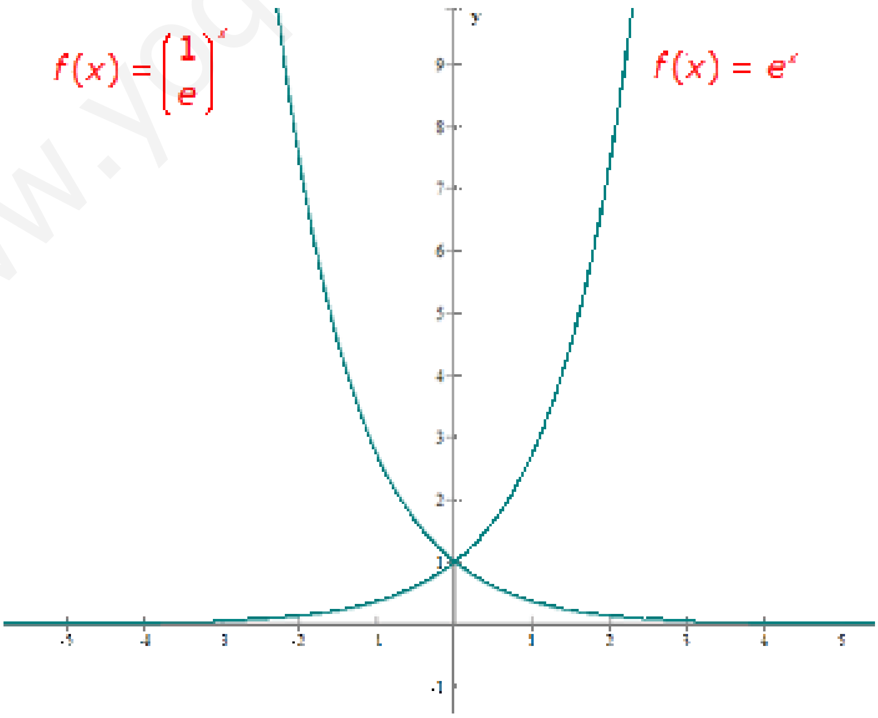
Los puntos (0, 1) y (1, a) pertenecen a la gráfica.

Es inyectiva $\forall a \neq 1$(ninguna imagen tiene más de un original).

Creciente si a >1.

Decreciente si a < 1.

Las curvas $y = a^x$ e $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.



La ecuación exponencial

Una **ecuación exponencial** es aquella **ecuación** en la que la **incógnita** aparece en el **exponente**.

Para **resolver una ecuación exponencial** vamos a tener en cuenta:

1 $a > 0 \qquad a \neq 1$

2 $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

3 **Definiciones y propiedades de las potencias.**

Definiciones	Propiedades
$a^0 = 1$ ·	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^1 = a$	$a^m : a^n = a^{m-n}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
	$a^n : b^n = (a : b)^n$

Ejemplos de resolución de ecuaciones exponenciales:

$2^{2x-1} = 4$

$2^{2x-1} = 2^2 \rightarrow 2x - 1 = 2 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

$\sqrt[2x-1]{3^{x-3}} = \sqrt{27}$

$3^{\frac{x-3}{2x-1}} = 3^{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{x-3}{2x-1} = \frac{3}{2} \rightarrow x = -\frac{3}{4}$

$2^x \cdot 2 + 2^x + \frac{2^x}{2} = 28$

$2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28 \rightarrow 2^x\left(2 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 28$

$2^x \cdot \frac{7}{2} = 28 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$

$2^x \cdot 2 = 1024$

$2^x = 2^9 \rightarrow x = 9$

Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales

1 $2^{2x-1} = 4$

2 $\sqrt[2x-1]{3^{x-3}} = \sqrt{27}$

3 $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

4 $\sqrt[3]{8^x} = 65536$

5 $4^{x^2-6x} = 16384$

6 $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$

7 $3^{x^2-1} = 134$

8 $2^{2x} \cdot 2 = 3^x \cdot 3^5$

9 $3^x \cdot 5^{2x} = 150$

10 $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$

Para despejar una incógnita que está en el exponente de una potencia, se toman logaritmos cuya base es la base de la potencia.

$a^x = b$

$\log_a a^x = \log_a b \qquad x \log_a a = \log_a b \qquad x = \log_a b$

$10^{x+2} = 5 \rightarrow \log 10^{x+2} = \log 5 \rightarrow (x+2)\log 10 = \log 5$

$\rightarrow (x+2) = \log 5 \rightarrow x = \log 5 - 2 = -1.3010$

SOLUCIONES

El número total de granos de trigo de la recompensa pedida por El Brahmán inventor del juego del ajedrez, es la suma de la siguiente sucesión, geométrica:

$S= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^i + \ldots\ldots + 2^{62} + 2^{63}$

Que también se puede poner como:

$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^i + \ldots\ldots + 2^{62} + 2^{63}$

Para hallar la suma de esta sucesión, se multiplican ambos términos de la igualdad por dos y se resta a la segunda la suma de la sucesión original, es decir:

$2S = 2.2^0 + 2.2^1 + 2.2^2 + 2.2^3 + \ldots\ldots + 2.2^i + \ldots\ldots + 2.2^{62} + 2.2^{63}$

que es lo mismo que:

$2S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^{(i+1)} + \ldots\ldots + 2^{62} + 2^{63} + 2^{64}$

Restando ambas sucesiones se obtiene lo siguiente:

$2S – S = S = 2^{64} – 1$ = (1´8446 x 10^{19})-1 granos de trigo.

Parece ser que un metro cúbico de trigo tiene unos quince millones de granos, es decir 15x10^6 granos, con lo que el volumen que ocuparan los granos de la recompensa es:

(1´8446 x 10^{19})/(15 x 10^6) = 1´2297 x 10^{12} m^3 .

Que es el volumen de un cubo de lado igual a 10.713 m (10´713 Km).

También parece ser que un grano de trigo pesa entre 0´032 gramos y 0´05 gramos, si cogemos un valor medio, por ejemplo 0´04 gramos, el peso de los granos de la recompensa es:

(1´8446 x 10^{19})x(0´04)x1x10^{-6} = 7´37 x 10^{11} Toneladas métricas de trigo. La producción actual mundial anual de trigo esta sobre las 650 millones de toneladas.

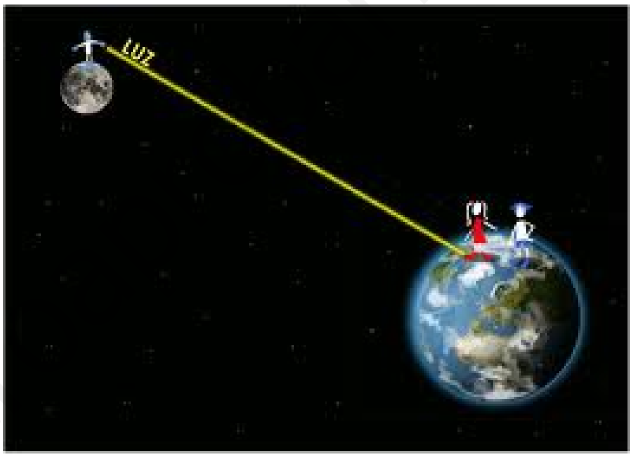
Con lo cual:
(7´37 x 10^{11})/(650 x 10^6) = 1.135 años.

Se necesitarían del orden de 1.135 años de toda la producción mundial de trigo para pagarle al ajedrecista.

El problema de los granos de trigo ha tenido diversas aplicaciones matemáticas y geométricas, otro problema similar a este, y que también se basa en una progresión geométrica con base en el número dos es el siguiente:

Imaginemos que tenemos un papel infinitamente grande, de un espesor pongamos de 0,10 mm (una décima de milímetro), lo doblamos por la mitad con lo cual tendría un espesor del doble del original, es decir 0,20 mm, después doblamos otra vez el resultado por la mitad, espesor en este caso de 0,40 mm, y así sucesivamente tantas veces como queramos.

Parece ser que en la práctica ningún papel por fino y grande que este sea, no es posible doblarlo más de unas 8 veces. Para la aplicación del problema en cuestión el papel puede doblarse por la mitad tantas veces como queramos.



La pregunta es cuantas veces habría que doblarlo para que el espesor del papel tuviera la distancia entre la Tierra y la Luna, (unos 384.000 Km).

0,10 x 2 x 2 x 2 .... x 2 = 384.000 x 10^6

Esta ecuación se puede reajustar de la siguiente forma:

$0{,}10 \times 2^n = 384.000 \times 10^6$

Donde “n”; es el número de veces que habría que doblar el papel original para conseguir nuestro objetivo de que su espesor fuera la distancia Tierra-Luna.

Operando convenientemente se llega a la siguiente solución:

$n = \ln (3{,}84 \times 10^{12}) / \ln 2 = 41{,}804 \approx 42$

Resumiendo, necesitaríamos doblar el papel unas 42 veces para conseguir el espesor deseado.

Lógicamente esto es imposible, pero la imaginación y las matemáticas todo lo pueden.

MÁS EJEMPLOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EXPONENCIALES

$$2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$2^x = t \qquad\qquad 2^{2x} = \left(2^x\right)^2 = t^2$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{2} \\ t_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2^x = \dfrac{1}{2} \\ 2^x = 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$$

$$2 - \frac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x = 0$$

$$3^x = t$$

$$2 - \frac{1}{t} + 3 \cdot t = 0$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t_1 = -1 \qquad 3^x = -1 \qquad \text{sin solución}$$

$$t_2 = \frac{1}{3} \qquad 3^x = \frac{1}{3} \qquad x = -1$$

$$4^{3x} = 8^x + 3$$

$$\left(2^2\right)^{3x} = 2^{3x} + 3$$

$$2^{3x} = t$$

$$t^2 - t - 3 = 0 \qquad t = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$2^{3x} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \qquad 3x \log 2 = \log \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{\log \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}}{3 \log 2} = 0.441 \qquad 2^{3x} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \qquad \text{No tiene solución}$$

MÁS EJERCICIOS DE ECUACIONES EXPONENCIALES

11 $3^{1-x} - 3^{x} = 2$

12 $2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$

13 $4^{x-1} + 2^{x+2} = 48$

14 $4^{3x} = 8^{x} + 3$

15 $e^{x} - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0$

16 $2^{4x} - 2^{2x} - 12 = 0$

17 $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{x} = 1023$

18 $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + \cdots + 2^{x} = \frac{127}{8}$

19 $10^{x+2} = 5$

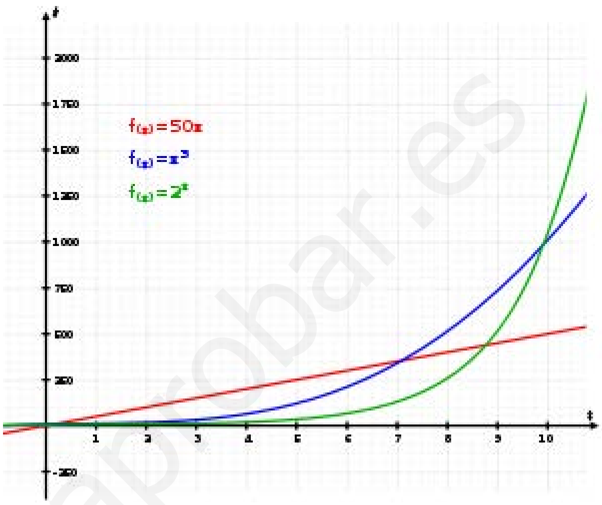
Crecimiento exponencial

La expresión **crecimiento exponencial** se aplica a una magnitud *M* tal que su variación en el tiempo es proporcional a su valor, lo que implica que crece muy rápidamente en el tiempo de acuerdo con la ecuación:

$$M_t = M_0 \cdot e^{rt}$$

Donde:

M_t es valor de la magnitud en el instante $t > 0$;
M_0 es el valor inicial de la variable, valor en $t = 0$, cuando empezamos a medirla;
r es la llamada tasa de crecimiento instantánea, tasa media de crecimiento durante el lapso transcurrido entre $t = 0$ y $t > 0$;
$e = 2{,}718281828459...$



Crecimiento exponencial Crecimiento lineal Crecimiento cúbico

La expresión se refiere al crecimiento de una función exponencial de la forma $y = a^x$ con $r = ln(a)$. Se puede ilustrar el crecimiento exponencial tomando en la última ecuación $a = 2$ y x un valor entero. Por ejemplo, si $x = 4$, entonces $y = 2x2x2x2 = 16$. Si $x = 10$ entonces $y = 1.024$. Y así sucesivamente.

Fenómenos que crecen de forma exponencial

Algunos fenómenos que pueden ser descritos por un crecimiento exponencial, al menos durante un cierto intervalo de tiempo, son:

1. El número de células de un feto mientras se desarrolla en el útero materno.
2. En una economía sin trastornos, los precios crecen exponencialmente, donde la tasa coincide con el índice de inflación.
3. El número de contraseñas posibles con *n* dígitos crece exponencialmente con *n*.

4. El número de operaciones cálculos necesarios para resolver un problema NP-completo crece exponencialmente con el tamaño de la entrada, representable o codificable mediante un número entero.
5. El número de bacterias que se reproducen por fisión binaria.
6. El número de miembros en poblaciones de ecosistemas cuando carecen de predador.

Ecuaciones diferenciales

El crecimiento es exponencial cuando el crecimiento de la función en un punto es proporcional al valor de la función en ese punto, lo que se puede expresar en mediante la ecuación diferencial de primer orden:

(1) $$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = rM \\ M(0) = M_0 \end{cases}$$

Donde M_0 es el valor inicial de la magnitud cuyo crecimiento exponencial se está estudiando (es decir, el valor de la magnitud para *t* = 0). La solución esta ecuación (1) para cualquier instante de tiempo posterior es simplemente:

$$M(t) = M_0 e^{rt}$$

Para *t* > 0 puede verse que $M(t) > M_0$ (siempre y cuando el crecimiento sea positivo *r* > 0).