SOLUCIONARIO

Matemáticas

José María Arias Cabezas
Ildefonso Maza Sáez

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA 4B

Bruño

Dirección del proyecto editorial
Antonio Díaz

Autores
José María Arias Cabezas e **Ildefonso Maza Sáez**

Coordinación del proyecto editorial
Estrella Marinas

Coordinación de ediciones
Paz Utrera

Revisión científica
Fernando Arce y **José Ángel Fernández-Cano**

Coordinación de preimpresión
Alberto Gutiérrez

Coordinación de diseño
Cristóbal Gutiérrez

Este libro corresponde al cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria, materia de Matemáticas, y forma parte de los materiales curriculares del proyecto del Grupo Editorial Bruño, S. L.

ISBN: 978-84-216-7257-0
Depósito legal: M-2842-2012
Printed in Spain

BS005853/1E-4I – 7150895

ÍNDICE

SOLUCIONARIO BLOQUE I.
ARITMÉTICA

1. Los números reales

1. NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

PIENSA Y CALCULA

a) Calcula mentalmente el área de un cuadrado de 2 cm de lado.
b) Expresa de forma exacta el lado, *x*, de un cuadrado de 2 cm² de área.

$A = 2^2 = 4\ \text{cm}^2$

$x = \sqrt{2}$ cm

APLICA LA TEORÍA

1. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

a) $\frac{2}{3}$ **b)** π **c)** $\sqrt{2}$ **d) 1,455555...**

a) Racional. b) Irracional.
c) Irracional. d) Racional.

2. Escribe tres números racionales.

$\frac{3}{4}, -5, -\frac{2}{3}$

3. Escribe tres números irracionales.

$\sqrt{10}, \pi, -\sqrt{3}$

4. Escribe dos números racionales comprendidos entre 1/3 y 2/3

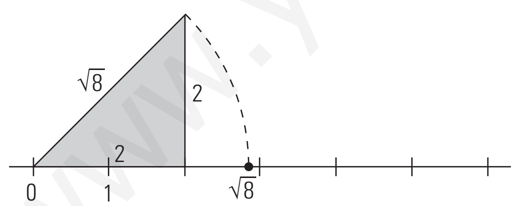
$\frac{1/3 + 2/3}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1/3 + 1/2}{2} = \frac{5}{12}$

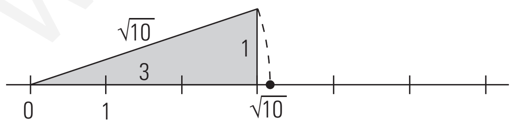
5. Representa gráficamente de forma exacta:

a) $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{10}$

a)

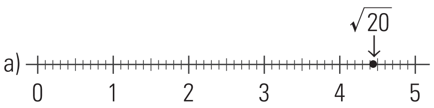


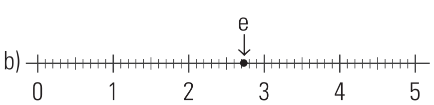
b)

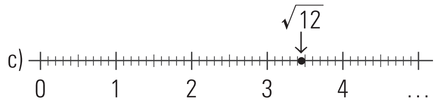


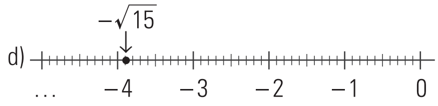
6. Representa gráficamente de forma aproximada:

a) $\sqrt{20}$ **b) e** **c)** $\sqrt{12}$ **d)** $-\sqrt{15}$









7. Halla de forma exacta la diagonal de un cubo de 1 cm de lado y escribe qué tipo de número es.

$d = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

Es un número irracional.

Calcula:

8. $1 - \frac{5}{4} + \frac{2}{3}$

$\frac{5}{12}$

9. $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}$

$\frac{1}{6}$

10. $\frac{2}{3} : \left(\frac{2}{5} - 1\right)$

$-\frac{10}{9}$

11. $\frac{4}{7}\left(\frac{5}{2} + 1\right)$

2

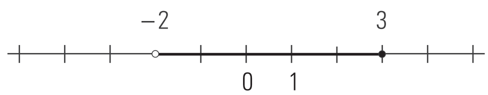
12. $2\left(\frac{1}{3} + 1\right) - \frac{5}{2} : \left(\frac{1}{3} - 3\right)$

$\frac{11}{3}$

2. LA RECTA REAL

PIENSA Y CALCULA

Representa en la recta real todos los números reales *x* que cumplen: $-2 < x \leq 3$



APLICA LA TEORÍA

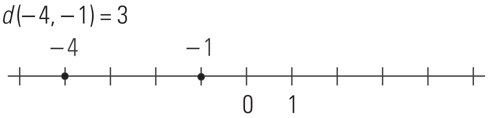
13. Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos.

a) 2 y 5 **b) –3 y 2** **c) –4 y –1** **d) –3 y 0**

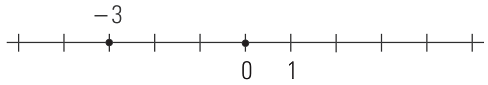
a) $d(2, 5) = 3$

b) $d(-3, 2) = 5$

c) $d(-4, -1) = 3$



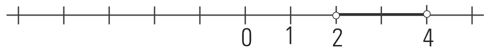
d) $d(0, -3) = 3$



14. Escribe en forma de desigualdad los siguientes intervalos, represéntalos gráficamente y clasifícalos:

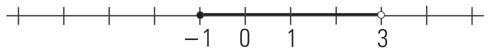
a) (2, 4) **b) [–1, 3)** **c) (–2, +∞)** **d) (– ∞, 1]**

a) $\{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 4\}$



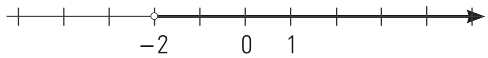
Abierto.

b) $\{x \in \mathbb{R};\ -1 \le x < 3\}$



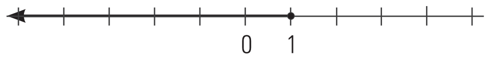
Semiabierto y semicerrado.

c) $\{x \in \mathbb{R};\ x > -2\}$



Abierto.

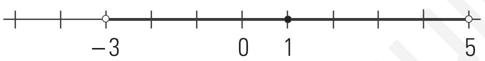
d) $\{x \in \mathbb{R};\ x \le 1\}$

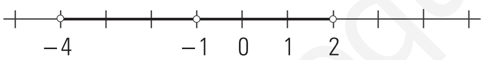


Semiabierto y semicerrado.

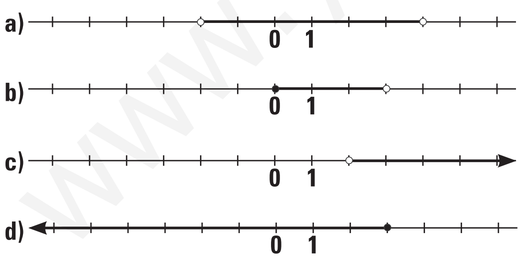
15. Representa gráficamente los siguientes entornos:

a) $E(1, 4)$ **b) $E^*(-1, 3)$**

a)


b)


16. Escribe los siguientes intervalos y clasifícalos:



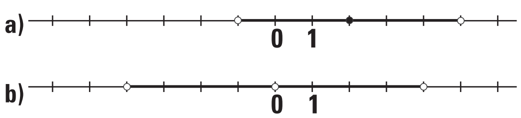
a) $(-2, 4)$ Abierto.

b) $[0, 3)$ Semiabierto y semicerrado.

c) $(2, +\infty)$ Abierto.

d) $(-\infty, 3]$ Semiabierto y semicerrado.

17. Escribe los siguientes entornos:



a) $E(2, 3)$

b) $E^*(0, 4)$

3. Aproximaciones y errores

PIENSA Y CALCULA

Juan estima que la altura de un árbol es de 35 m. Si la altura real es de 35,5 m, ¿cuál es el error cometido en la estimación?

$35{,}5 - 35 = 0{,}5$ m

APLICA LA TEORÍA

18. Calcula la parte entera y decimal de los siguientes números:

a) 2,49 **b) –3,24**

a) $\text{Ent}(2{,}49) = 2$
$\text{Dec}(2{,}49) = 0{,}49$

b) $\text{Ent}(-3{,}24) = -4$
$\text{Dec}(-3{,}24) = 0{,}76$

19. Redondea a dos cifras decimales los siguientes números y di cuáles de las aproximaciones son por defecto y cuáles por exceso:

a) $\frac{25}{7}$ **b) 43,5978**

a) $3{,}5714\ldots \approx 3{,}57$
Aproximación por defecto.

b) $43{,}60$
Aproximación por exceso.

20. Trunca a dos cifras decimales los números:

a) $\frac{25}{7}$ **b) 43,5978**

a) $3{,}5714\ldots \approx 3{,}57$ b) $43{,}5978 \approx 43{,}59$

21. Halla el error absoluto y el error relativo que se cometen al aproximar con dos cifras decimales los siguientes números:

a) $\frac{58}{12}$ **b) $\sqrt{6}$**

a) $4{,}83333\ldots \approx 4{,}83$
Error absoluto = 0,00333
Error relativo = 0,00069

b) $2{,}4494\ldots \approx 2{,}45$
Error absoluto = 0,00051
Error relativo = 0,0002

22. Expresa en notación científica los siguientes números:

a) 372 000 000 **b) 0,00000058**

a) $3{,}72 \cdot 10^{8}$ b) $5{,}8 \cdot 10^{-7}$

23. Expresa en notación decimal los siguientes números:

a) $7{,}48 \cdot 10^{8}$ **b) $1{,}53 \cdot 10^{-9}$**

a) 748 000 000 b) 0,00000000153

24. Opera y expresa en notación científica:

a) $5{,}4 \cdot 10^{15} \cdot 8{,}12 \cdot 10^{-9}$

b) $2{,}7 \cdot 10^{6} : (1{,}5 \cdot 10^{-4})$

a) $4{,}3848 \cdot 10^{7}$ b) $1{,}8 \cdot 10^{10}$

4. Números combinatorios

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente los siguientes productos:

a) 3 · 2 · 1 **b) 4 · 3 · 2 · 1** **c) 5 · 4 · 3 · 2 · 1**

a) 6 b) 24 c) 120

APLICA LA TEORÍA

25. Calcula el factorial de los números siguientes:

a) 6 **b) 8**

a) 6! = 720 b) 8! = 40 320

26. Calcula mentalmente los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{4}{2}$ **b)** $\binom{7}{2}$

c) $\binom{3}{3}$ **d)** $\binom{6}{1}$

a) 6 b) 21 c) 1 d) 6

27. Comprueba que se cumple, en cada caso, la igualdad siguiente:

$$\binom{m}{p} = \binom{m}{m-p}$$

a) $m = 6,\ p = 2$

b) $m = 8,\ p = 3$

a) $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$

b) $\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$

28. Aplica las propiedades de los números combinatorios y calcula el valor de *x* en la siguiente igualdad:

$$\binom{12}{x-2} = \binom{12}{x+2}$$

Se tiene que:

$x - 2 + x + 2 = 12$

$x = 6$

Ejercicios y problemas propuestos

1. NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

29. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

a) $\sqrt{10}$ **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** $\sqrt{64}$ **d)** $-\sqrt{50}$

a) Irracional. b) Racional.

c) Racional. d) Irracional.

30. Escribe tres números racionales comprendidos entre 1/4 y 3/4

$\frac{1/4 + 3/4}{2} = \frac{1}{2}$

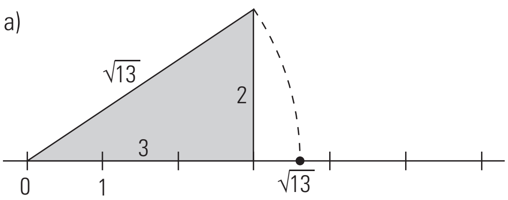
$\frac{1/4 + 1/2}{2} = \frac{3}{8}$

$\frac{1/4 + 3/8}{2} = \frac{5}{16}$

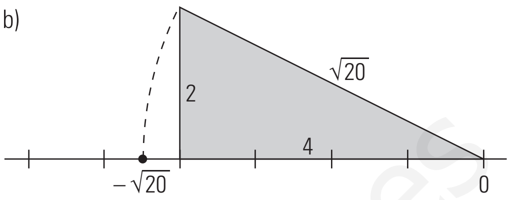
31. Representa gráficamente de forma exacta:

a) $\sqrt{13}$ **b)** $-\sqrt{20}$

a)

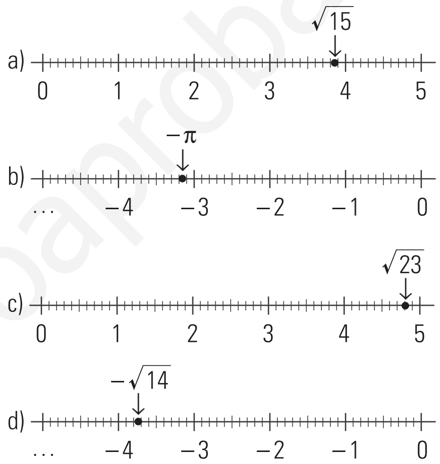


b)



32. Representa gráficamente de forma aproximada:

a) $\sqrt{15}$ **b)** $-\pi$ **c)** $\sqrt{23}$ **d)** $-\sqrt{14}$



33. Calcula:

a) $\frac{4}{5} + 3 - \frac{7}{15}$ **b)** $\frac{1}{6} - \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{2} : \left(\frac{3}{4} - 1 + \frac{5}{8}\right)$ **d)** $\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3} - 2 + \frac{2}{5}\right)$

a) $\frac{10}{3}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $-\frac{19}{25}$

34. Halla de forma exacta el lado de un cuadrado de 10 cm² de área y escribe qué tipo de número es.

$\sqrt{10}$ cm

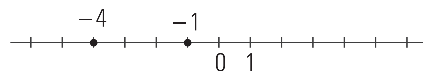
Es un número irracional.

2. LA RECTA REAL

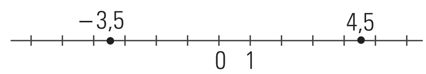
35. Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos:

a) –4 y –1 **b) –3,5 y 4,5**

a) $d(-4, -1) = 3$



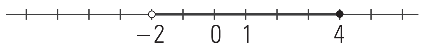
b) $d(-3{,}5;\ 4{,}5) = 8$



36. Escribe en forma de desigualdad los intervalos, represéntalos gráficamente y clasifícalos:

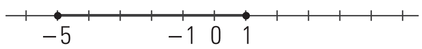
a) (–2, 4] b) [–5, 1] c) [3, +∞) d) (– ∞, –3)

a) $\{x \in \mathbb{R}; -2 < x \leq 4\}$



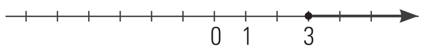
Semiabierto y semicerrado.

b) $\{x \in \mathbb{R}; -5 \leq x \leq 1\}$



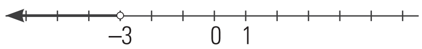
Cerrado.

c) $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 3\}$



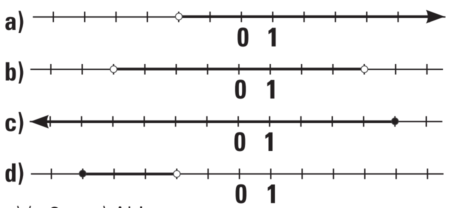
Semiabierto y semicerrado.

d) $\{x \in \mathbb{R}; x < -3\}$



Abierto.

37. Escribe los intervalos que se representan en los siguientes dibujos y clasifícalos:



a) $(-2, +\infty)$ Abierto.

b) $(-4, 4)$ Abierto.

c) $(-\infty, 5]$ Semiabierto y semicerrado.

d) $[-5, -2)$ Semiabierto y semicerrado.

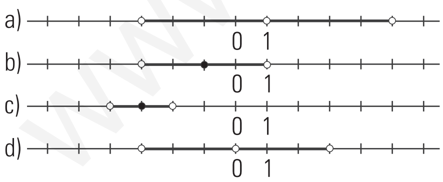
38. Representa gráficamente los siguientes entornos:

a) $E^*(1, 4)$

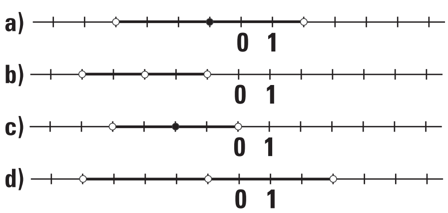
b) $E(-1, 2)$

c) $E(-3, 1)$

d) $E^*(0, 3)$



39. Escribe los entornos que se representan en los siguientes dibujos:



a) $E(-1, 3)$

b) $E^*(-3, 2)$

c) $E(-2, 2)$

d) $E^*(-1, 4)$

3. APROXIMACIONES Y ERRORES

40. Calcula la parte entera y decimal de los siguientes números:

a) –7,15 b) –3,14 c) 4,25 d) 2,72

a) $\text{Ent}(-7{,}15) = -8$
$\text{Dec}(-7{,}15) = 0{,}85$

b) $\text{Ent}(-3{,}14) = -4$
$\text{Dec}(-3{,}14) = 0{,}86$

c) $\text{Ent}(4{,}25) = 4$
$\text{Dec}(4{,}25) = 0{,}25$

d) $\text{Ent}(2{,}72) = 2$
$\text{Dec}(2{,}72) = 0{,}72$

41. Redondea a dos cifras decimales los siguientes números y di cuáles de las aproximaciones son por defecto y cuáles por exceso:

a) $\frac{35}{8}$ b) 13,4972 c) $\sqrt{37}$ d) 2,6283

a) 4,375 ≈ 4,38 por exceso.

b) 13,50 por exceso.

c) 6,082… ≈ 6,08 por defecto.

d) 2,63 por exceso.

42. Trunca a dos cifras decimales los siguientes números:

a) $\frac{35}{8}$ b) 13,4972 c) $\sqrt{37}$ d) 2,6283

a) 4,375 ≈ 4,37

b) 13,49

c) 6,082… ≈ 6,08

d) 2,62

43. Halla el error absoluto y el error relativo que se cometen al redondear con dos cifras decimales los siguientes números:

a) 25/12 **b) $\sqrt{8}$**

c) 12,3402 **d) $\sqrt{80}$**

a) 2,08
Error absoluto = 0,0033
Error relativo = 0,0016

b) 2,83
Error absoluto = 0,0016
Error relativo = 0,0006

c) 12,34
Error absoluto = 0,0002
Error relativo = 0,00002

d) 8,94
Error absoluto = 0,0042
Error relativo = 0,00048

44. Expresa en notación científica los siguientes números:

a) 371 500 000 **b) 435 900 000 000**

c) 0,00000278 **d) 0,000269**

a) $3{,}715 \cdot 10^{8}$ b) $4{,}359 \cdot 10^{11}$

c) $2{,}78 \cdot 10^{-6}$ d) $2{,}69 \cdot 10^{-4}$

45. Expresa en notación decimal los siguientes números:

a) $3{,}437 \cdot 10^9$ **b) $2{,}33 \cdot 10^{-7}$**

c) $1{,}2 \cdot 10^5$ **d) $3{,}014 \cdot 10^{-9}$**

a) 3 437 000 000 b) 0,000000233

c) 120 000 d) 0,000000003014

46. Opera y expresa el resultado en notación científica:

a) $7{,}5 \cdot 10^{12} - 3{,}4 \cdot 10^{12}$

b) $0{,}8 \cdot 10^{15} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-6}$

c) $4{,}36 \cdot 10^{15} + 1{,}54 \cdot 10^{15}$

d) $5{,}74 \cdot 10^{20} : (1{,}64 \cdot 10^{-9})$

a) $4{,}1 \cdot 10^{12}$ b) $2{,}56 \cdot 10^9$ c) $5{,}9 \cdot 10^{15}$ d) $3{,}5 \cdot 10^{29}$

4. NÚMEROS COMBINATORIOS

47. Calcula el factorial de los números siguientes:

a) 7 **b) 9**

a) 5 040 b) 362 880

48. Calcula los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{6}{4}$ **b) $\binom{10}{9}$** **c) $\binom{40}{40}$** **d) $\binom{30}{1}$**

a) 15 b) 10 c) 1 d) 30

49. Comprueba que se cumple, en cada caso, la igualdad siguiente:

$$\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p} + \binom{m-1}{p-1}$$

a) $m = 7$, $p = 3$ **b) $m = 10$, $p = 2$**

a) $\binom{7}{3} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$

$35 = 20 + 15$

b) $\binom{10}{2} = \binom{9}{2} + \binom{9}{1}$

$45 = 36 + 9$

50. Calcula los términos de la fila séptima del triángulo de Tartaglia.

1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

51. Aplica las propiedades de los números combinatorios y calcula el valor de x en la siguiente igualdad:

$$\binom{9}{x-1} = \binom{9}{x-2}$$

$x - 1 + x - 2 = 9$

$x = 6$

PARA AMPLIAR

52. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

a) $2 - \sqrt{5}$ **b) $\frac{2}{7} - \frac{5}{7}$**

c) π^2 **d) $(0{,}2222\ldots)^2$**

a) Irracional. b) Racional. c) Irracional. d) Racional.

53. Escribe tres números racionales entre 1,5 y 1,7

$\frac{1{,}5 + 1{,}7}{2} = 1{,}6$

$\frac{1{,}5 + 1{,}6}{2} = 1{,}55$

$\frac{1{,}5 + 1{,}55}{2} = 1{,}525$

54. Escribe dos números irracionales entre 3,1 y 3,2

$\pi = 3{,}14159\ldots$

$\sqrt{10} = 3{,}1622\ldots$

55. Expresa, mediante el número π, un número irracional que esté comprendido entre 0 y 1

$\frac{\pi}{4} = 0{,}7853\ldots$

56. Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(1, 2)

57. Escribe en forma de intervalo las siguientes desigualdades:

a) $1 \le x \le 4$ **b) $x > 2$**

c) $-1 < x \le 5$ **d) $x < 3$**

a) [1, 4] b) $(2, +\infty)$

c) (– 1, 5] d) $(-\infty, 3)$

58. Escribe en forma de entorno las siguientes desigualdades:

a) $|x - 1| < 2$ **b) $|x - 3| < 1$**

c) $|x + 2| < 3$ **d) $|x| < 4$**

a) $E(1, 2)$ b) $E(3, 1)$

c) $E(-2, 3)$ d) $E(0, 4)$

59. Redondea a dos decimales los siguientes números y di cuáles de las aproximaciones son por defecto y cuáles por exceso:

a) 25,4632 **b) 74,0981**

c) 32,7381 **d) 91,9983**

a) 25,46 por defecto.

b) 74,10 por exceso.

c) 32,74 por exceso.

d) 92,00 por exceso.

CON CALCULADORA

60. Halla con la calculadora el valor de los siguientes números con tres cifras decimales:

a) 2π **b) $\pi + \sqrt{10}$**

c) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ **d) $\sqrt{30} + \sqrt{12}$**

a) 6,283 b) 6,304

c) 1,618 d) 8,941

61. Halla con la calculadora y expresa el resultado en notación científica:

a) $3,47 \cdot 10^{14} + 5,68 \cdot 10^{14}$
b) $2,898 \cdot 10^{20} : (8,4 \cdot 10^{8})$
c) $2,5 \cdot 10^{24} \cdot 3,25 \cdot 10^{6}$
d) $2,71 \cdot 10^{12} \cdot 3,21 \cdot 10^{-9} : (2,5 \cdot 10^{-10})$

a) $9,15 \cdot 10^{14}$ b) $3,45 \cdot 10^{11}$
c) $8,125 \cdot 10^{30}$ d) $3,47964 \cdot 10^{13}$

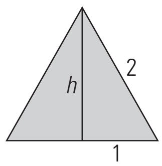
PROBLEMAS

62. Halla de forma exacta la longitud de una circunferencia de 3 m de diámetro. ¿Qué clase de número es?

$L = 2\pi \cdot 1,5 = 3\pi$ m

Es un número irracional.

63. Halla de forma exacta el área de un triángulo equilátero de 2 cm de lado. Clasifica el resultado como número racional o irracional.

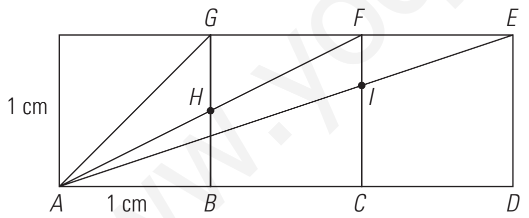


$h = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$A = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm^2

Es un número irracional.

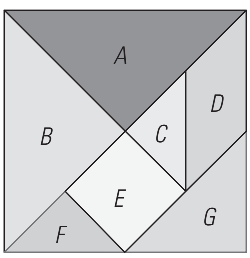
64. Halla de forma exacta las longitudes de los segmentos siguientes y clasifica los resultados como números racionales o irracionales:



a) *BH* b) *CI* c) *AG* d) *AF* e) *AE*

a) $BH = 1/2$. Número racional.
b) $CI = 2/3$. Número racional.
c) $AG = \sqrt{2}$. Número irracional.
d) $AF = \sqrt{5}$. Número irracional.
e) $AE = \sqrt{10}$. Número irracional.

65. La siguiente figura se conoce con el nombre de tangram chino. Si el lado del cuadrado mide 1 m, halla el área de cada una de las figuras que componen el tangram.



$A = B = 1/4$ m^2
$C = F = 1/16$ m^2
$D = E = G = 1/8$ m^2

66. Escribe el menor intervalo cerrado, cuyos extremos sean números enteros, que contenga a $\sqrt{21}$

[4, 5]

67. Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número -2π

$(-7, -6)$

68. La longitud de una varilla se aproxima a 1,34 m. ¿Entre qué valores se hallará la longitud real si la aproximación es por defecto? ¿Y si fuese por exceso?

Entre 1,34 y 1,35

Entre 1,33 y 1,34

69. Las dimensiones de un cartón rectangular son 0,542 m y 0,354 m. Calcula su área y redondea el resultado a dos decimales.

0,19 m^2

70. Se construye un ortoedro de dimensiones 5,5 cm × × 10,6 cm × 8,6 cm para almacenar medio litro de líquido. ¿Qué error relativo se está cometiendo?

$V = 5,5 \cdot 10,6 \cdot 8,6 = 501,38$ cm^3

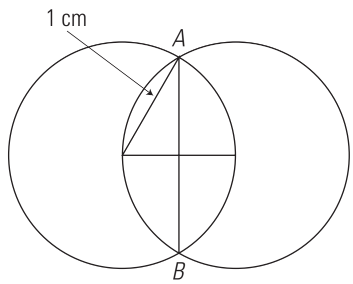
Error relativo $= \dfrac{|500 - 501,38|}{500} = 0,00276$

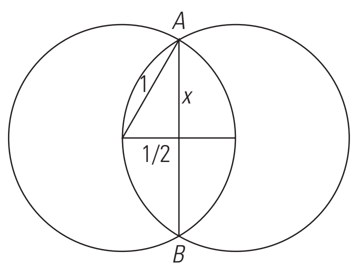
71. Se sabe que 4 g de hidrógeno contienen $1,2046 \cdot 10^{24}$ moléculas. Calcula la masa en gramos de una molécula de hidrógeno.

$4 : (1,2046 \cdot 10^{24}) = 3,321 \cdot 10^{-24}$ g

PARA PROFUNDIZAR

72. Calcula la longitud del segmento *AB* en la figura siguiente y clasifica el resultado como número racional o irracional:

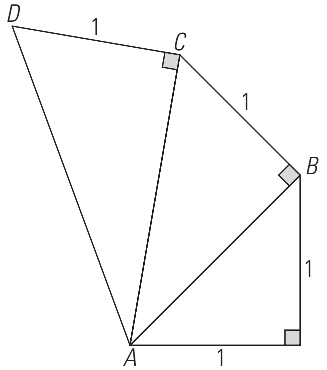




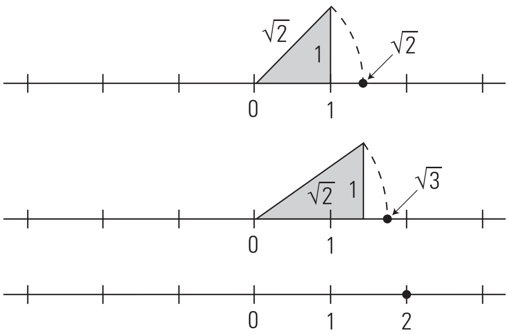
$AB = 2\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm

Es un número irracional.

73. Calcula la longitud de los segmentos *AB*, *AC* y *AD* de la figura adjunta, y representa de forma exacta en la recta real los números obtenidos:



$AB = \sqrt{2}$ $\qquad AC = \sqrt{3}$ $\qquad AD = \sqrt{4} = 2$



74. La distancia que hay del Sol a la Tierra es de $1{,}486 \cdot 10^8$ km. Si se toma la velocidad de la luz como 300 000 km/s, calcula el tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra.

$t = \dfrac{e}{v}$

$t = 1{,}486 \cdot 10^8 : 300\,000 = 495{,}33 \text{ s} = 8 \text{ min } 15 \text{ s}$

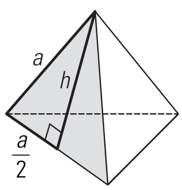
75. Si el radio del Sol mide $6{,}96 \cdot 10^5$ km, calcula el volumen del Sol suponiendo que es una esfera.

$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot (6{,}96 \cdot 10^5)^3 = 1{,}41 \cdot 10^{18} \text{ km}^3$

76. Halla el área y el volumen de un tetraedo regular cuya arista mide 5 cm. Redondea el resultado a dos decimales.

Área:

$a^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + h^2$



$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

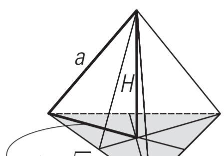
$A_{cara} = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$A = 4 \times A_{cara} = a^2\sqrt{3}$

$a = 5 \text{ cm} \Rightarrow A = 5^2\sqrt{3} \simeq 43{,}30 \text{ cm}^2$

Volumen:

$a^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + H^2$



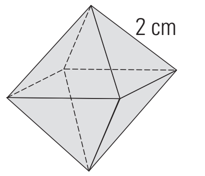
$\dfrac{\cancel{2}}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$H = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$V = \dfrac{1}{3} A_{cara} \times H = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

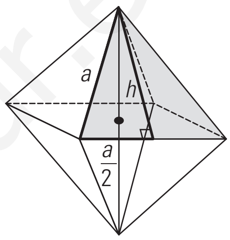
$a = 5 \text{ cm} \Rightarrow V = \dfrac{5^3\sqrt{2}}{12} \simeq 17{,}73 \text{ cm}^2$

77. Halla el área y el volumen de un octaedro regular cuya arista mide 2 cm. Redondea el resultado a dos decimales.



Área:

$a^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + h^2$



$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

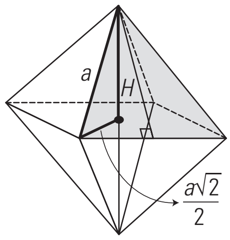
$A_{cara} = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$A = 8 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = 2a^2\sqrt{3}$

$a = 2 \text{ cm} \Rightarrow A = 2 \cdot 2^2\sqrt{3} = 13{,}86 \text{ cm}^2$

Volumen:

$a^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + H^2$



$H = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$V = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

$a = 2 \text{ cm} \Rightarrow V = \dfrac{2^3\sqrt{2}}{3} \simeq 3{,}77 \text{ cm}^3$

APLICA TUS COMPETENCIAS

78. Una tienda hace una rebaja del 15% en una lámpara de 120 €. ¿Qué precio se paga por ella?

$120 \cdot 0{,}85 = 102$ €

79. En una factura de 250 € nos aplican un 20% de descuento y un 16% de IVA. Calcula el importe total de la factura.

$250 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}16 = 232$ €

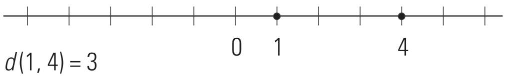
COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Escribe la clasificación de los números reales y pon un ejemplo de cada uno de ellos.

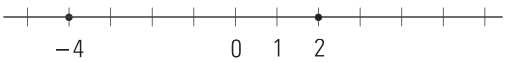
$$\text{Reales } \mathbb{R} \begin{cases} \text{Racionales } \mathbb{Q} \begin{cases} \text{Enteros } \mathbb{Z} \begin{cases} \text{Naturales } \mathbb{N}\text{: } 0, 1 \\ \text{Negativos: } -3 \end{cases} \\ \text{Fraccionarios: } \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \text{Irracionales: } \sqrt{2} \end{cases}$$

2. Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos:

a) 1 y 4 **b) –4 y 2**

a) 

$d(1, 4) = 3$

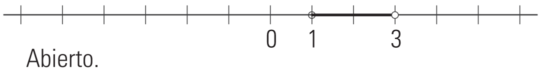
b) 

$d(-4, 2) = 6$

3. Escribe en forma de desigualdad los intervalos, represéntalos gráficamente y clasifícalos:

a) (1, 3) **b) [–2, 1)** **c) (– ∞, 2)** **d) [–1, + ∞)**

a) $\{x \in \mathbb{R}; 1 < x < 3\}$

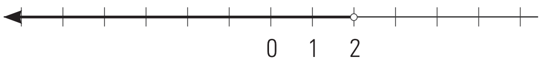


Abierto.

b) $\{x \in \mathbb{R}; -2 \le x < 1\}$

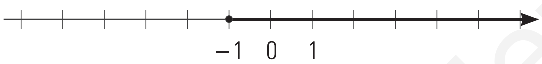
Semiabierto y semicerrado.

c) $\{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < 2\}$



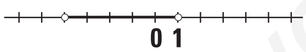
Abierto.

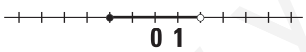
d) $\{x \in \mathbb{R}; -1 \le x < +\infty\}$



Semiabierto y semicerrado.

4. Escribe los intervalos de los dibujos siguientes y clasifícalos:

a) 

b) 

c) 

d) 

a) $(-4, 1)$ Abierto.

b) $[-2, 2)$ Semicerrado y semiabierto.

c) $(2, +\infty)$ Abierto.

d) $(-\infty, -1]$ Semiabierto y semicerrado.

5. Halla el error absoluto y el error relativo que se cometen al aproximar con dos cifras decimales los siguientes números:

a) $\mathbf{\frac{38}{15}}$ **b)** $\sqrt{7}$

a) $\frac{38}{15} = 2{,}53$

Error absoluto = 0,0033

Error relativo = 0,0013

b) $\sqrt{7} = 2{,}65$

Error absoluto = 0,0042

Error relativo = 0,0016

6. Aplica las propiedades de los números combinatorios y calcula el valor de *x* en la siguiente igualdad:

$$\binom{10}{x+1} = \binom{10}{x+3}$$

$x + 1 + x + 3 = 10 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

7. Calcula el área de un triángulo equilátero de *x* cm de lado.

$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$A = \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

8. La masa de la Tierra es $5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg, y la de la Luna es $7{,}348 \cdot 10^{22}$ kg. Calcula cuántas veces es mayor la masa de la Tierra que la de la Luna.

$5{,}974 \cdot 10^{24} : (7{,}348 \cdot 10^{22}) = 81{,}30$

Windows/Linux WIRIS

PRACTICA

87. Calcula:

a) $1 - \frac{5}{4} + \frac{2}{3}$ **b)** $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}$

c) $\frac{2}{3} : \left(\frac{2}{5} - 1\right)$ **d)** $\frac{4}{7}\left(\frac{5}{2} + 1\right)$

a) 5/12 b) 1/6

c) –10/9 d) 2

88. Halla la expresión decimal con 15 dígitos de los siguientes números y clasifícalos como racionales o irracionales:

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\frac{22}{15}$ **c)** π **d) e**

a) 1,4142135623731
Número irracional.

b) 1,46666666666667
Número racional.

c) 3,14159265358979
Número irracional.

d) 2,71828182845905
Número irracional.

89. Halla el error absoluto y relativo que se comete al aproximar con dos cifras decimales los siguientes números:

a) $\frac{58}{12}$ **b)** $\sqrt{6}$

a) $\frac{58}{12} = 4{,}83$

Error absoluto = 0,00333

Error relativo = 0,000689

b) $\sqrt{6} = 2{,}45$

Error absoluto = 0,00051

Error relativo = 0,000208

90. Opera y expresa en notación científica:

a) $5,4 \cdot 10^{15} \cdot 8,12 \cdot 10^{-9}$

b) $2,7 \cdot 10^{6} : (1,5 \cdot 10^{-4})$

a) $4,3848 \cdot 10^{7}$

b) $1,8 \cdot 10^{10}$

91. Calcula el factorial de los números siguientes:

a) 6 **b) 8**

a) 720 b) 40 320

92. Calcula los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{7}{5}$ **b)** $\binom{8}{3}$

c) $\binom{9}{7}$ **d)** $\binom{12}{6}$

a) 21 b) 56 c) 36 d) 924

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

93. Aplica las propiedades de los números combinatorios y calcula el valor de *x* en la siguiente igualdad:

$$\binom{9}{x-1} = \binom{9}{x-2}$$

$x = 6$

94. La distancia que separa el Sol de la Tierra es de $1,486 \cdot 10^{8}$ km. Si se toma la velocidad de la luz como 300 000 km/s, calcula el tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra.

$t = 495,33$ s $= 8,26$ min

95. Si el radio del Sol mide $6,96 \cdot 10^{5}$ km, calcula el volumen del Sol suponiendo que es una esfera.

$V = 1,4123 \cdot 10^{18}$ km^{3}

2. Potencias, radicales y logaritmos

1. POTENCIAS DE EXPONENTE NATURAL Y ENTERO

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente las siguientes potencias:

a) 2^3 **b)** $(-2)^3$ **c)** -2^3 **d)** $-(-2)^3$

a) 8 b) –8 c) –8 d) 8

APLICA LA TEORÍA

1. Calcula mentalmente los cinco primeros cuadrados perfectos.

0, 1, 4, 9, 16

2. Calcula mentalmente:

a) 2^{-4} **b)** $(-2)^{-4}$ **c)** -2^{-4} **d)** $-(-2)^{-4}$

a) 1/16 b) 1/16 c) –1/16 d) –1/16

3. Calcula mentalmente:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ **b)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ **c)** $-\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ **d)** $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

a) $\frac{27}{8}$ b) $-\frac{27}{8}$ c) $-\frac{27}{8}$ d) $\frac{27}{8}$

4. Calcula mentalmente:

a) 0^7 **b)** $(-5)^0$ **c)** 1^6 **d)** $(-6)^1$

a) 0 b) 1 c) 1 d) –6

5. Calcula:

a) $\dfrac{6^{-2} \cdot 10^3}{5^2 \cdot 2 \cdot 3^{-4}}$ **b)** $\dfrac{3^3 \cdot 12^{-2} \cdot 5^2}{6^{-3} \cdot 2^{-3} \cdot 3^4}$

a) 45 b) 100

6. Escribe en forma de potencia de base 2:

a) 32 **b)** 2 **c)** 1 **d)** $\frac{1}{32}$

a) 2^5 b) 2^1 c) 2^0 d) 2^{-5}

7. Realiza las siguientes operaciones y comprueba el resultado con la calculadora:

a) $(12^2 - 140)\sqrt{49}$

b) $(11^2 + 4)\sqrt[3]{64}$

c) $(2^4 + 2 \cdot 17)\sqrt[4]{81}$

d) $(2^5 - 4 \cdot 7)\sqrt[4]{81}$

a) 28 b) 500 c) 150 d) 12

8. Calcula mentalmente:

a) $(3 + 4)^2$ **b)** $3^2 + 4^2$ **c)** $(5 - 3)^2$ **d)** $5^2 - 3^2$

a) 49 b) 25 c) 4 d) 16

9. Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

a) $x^3 \cdot x^4$ **b)** $x^7 : x^3$

c) $(x^3)^2$ **d)** $x^3 \cdot x^4 : x^5$

a) x^7 b) x^4 c) x^6 d) x^2

10. Una pecera tiene forma cúbica y su arista mide 75 cm. Si está llena, ¿cuántos litros de agua contiene?

$V = 75^3 = 421\,875$ cm^3 = 421,875 litros.

2. RADICALES

PIENSA Y CALCULA

Halla mentalmente el valor de *x* en los siguientes casos:

a) $\sqrt[3]{1000} = x$ **b)** $\sqrt[6]{x} = 10$

c) $\sqrt[x]{81} = 3$ **d)** $\sqrt[4]{16} = x$

a) $x = 10$ b) $x = 1\,000\,000$ c) $x = 4$ d) $x = \pm 2$

APLICA LA TEORÍA

11. Calcula mentalmente el valor de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{25}$ **b)** $\sqrt[3]{-8}$ **c)** $\sqrt[4]{16}$ **d)** $\sqrt{-36}$

a) ±5 b) –2 c) ±2 d) No tiene raíces reales.

12. Utilizando la calculadora, halla las siguientes raíces. Redondea los resultados a dos decimales.

a) $\sqrt{345{,}67}$ **b)** $\sqrt[3]{895{,}34}$ **c)** $\sqrt[4]{89{,}45}$ **d)** $\sqrt[5]{1000}$

a) 18,59 b) 9,64 c) 3,08 d) 3,98

13. Escribe en forma de radical las potencias:

a) $5^{1/3}$ **b)** $x^{-1/2}$ **c)** $a^{2/3}$ **d)** $6^{-3/4}$

a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ c) $\sqrt[3]{a^2}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{6^3}}$

14. Escribe en forma de potencia los radicales:

a) $\sqrt{7}$ **b)** $\sqrt[5]{a^2}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt[7]{6^5}}$

a) $7^{1/2}$ b) $a^{2/5}$ c) $a^{-1/3}$ d) $6^{-5/7}$

15. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt{5^4}$ **b)** $\sqrt[6]{x^2}$ **c)** $\sqrt[8]{5^6}$ **d)** $\sqrt[12]{a^8}$

a) 25 b) $\sqrt[3]{x}$ c) $\sqrt[4]{5^3}$ d) $\sqrt[3]{a^2}$

16. Introduce dentro del radical el factor o factores que están delante:

a) $3\sqrt{5}$ **b)** $a\sqrt[3]{4}$

c) $2^4 a \sqrt[3]{2a^2}$ **d)** $3^2 x^3 \sqrt[4]{5x}$

a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt[3]{4a^3}$

c) $\sqrt[3]{2^{13} a^5}$ d) $\sqrt[4]{5 \cdot 3^8 x^{13}}$

17. Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{50}$ **b)** $\sqrt[3]{32a^7}$

c) $\sqrt[4]{81 a^{11} b^6}$ **d)** $\sqrt[5]{64 x^{17} y^{11} z}$

a) $5\sqrt{2}$ b) $2a^2\sqrt[3]{4a}$

c) $3a^2\sqrt[4]{a^3 b^2}$ d) $2x^3 y^2 \sqrt[5]{2x^2 yz}$

18. El volumen de un cubo es 2 m³. ¿Cuánto mide la arista? Redondea el resultado a dos decimales.

$V = 2$ m^3

$a = \sqrt[3]{2} = 1{,}26$ m

3. OPERACIONES CON RADICALES

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{9+16}$ **b)** $\sqrt{9}+\sqrt{16}$

c) $\sqrt{25-9}$ **d)** $\sqrt{25}-\sqrt{9}$

a) 5 b) 7 c) 4 d) 2

APLICA LA TEORÍA

19. Realiza las siguientes sumas y restas de radicales:

a) $\sqrt{77}-\sqrt{50}+\sqrt{18}-\sqrt{8}+\sqrt{200}$

b) $2\sqrt{75}-3\sqrt{12}+5\sqrt{27}-7\sqrt{48}+\sqrt{300}$

a) $6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+10\sqrt{2}=$
$=(6-5+3-2+10)\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

b) $10\sqrt{3}-6\sqrt{3}+15\sqrt{3}-28\sqrt{3}+10\sqrt{3}=$
$=(10-6+15-28+10)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

20. Utilizando la calculadora, halla la siguiente suma y resta de radicales. Redondea el resultado a dos decimales.

$$4\sqrt{35}-7\sqrt{28}+2\sqrt{47}$$

0,34

21. Realiza los siguientes productos:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$ **b)** $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{50}$

c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$ **d)** $\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[8]{5}$

a) $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{250}=5\sqrt[3]{2}$

c) m.i.c. (2, 3) = 6
$\sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{5^3\cdot 2^2}=\sqrt[6]{500}$

d) m.i.c. (6, 8) = 24
$\sqrt[24]{3^4}\cdot\sqrt[24]{5^3}=\sqrt[24]{3^4\cdot 5^3}=\sqrt[24]{10\,125}$

22. Realiza los siguientes cocientes:

a) $\sqrt{6}:\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt[3]{40}:\sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[3]{4}:\sqrt{6}$ **d)** $\sqrt[3]{9}:\sqrt[6]{18}$

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{8}=2$

c) m.i.c. (2, 3) = 6
$\sqrt[6]{4^2}:\sqrt[6]{6^3}=\sqrt[6]{4^2:6^3}=\sqrt[6]{16:216}=\sqrt[6]{2:27}=\sqrt[6]{\dfrac{2}{27}}$

d) m.i.c. (2, 3) = 6
$\sqrt[6]{9^2}:\sqrt[6]{18}=\sqrt[6]{9^2:18}=\sqrt[6]{81:18}=\sqrt[6]{9:2}=\sqrt[6]{\dfrac{9}{2}}$

23. Copia en tu cuaderno y sustituye los recuadros por igual, =, o distinto, ≠

a) $\sqrt[3]{5^2}$ ■ $(\sqrt[3]{5})^2$ **b)** $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ ■ $\sqrt[5]{7}$

a) = b) ≠

24. Racionaliza:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}}$ **c)** $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ **e)** $\dfrac{7}{\sqrt[3]{14}}$ **f)** $\dfrac{5}{2-\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{6\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{6\cdot\sqrt{3}}{3}=2\cdot\sqrt{3}$

b) $\dfrac{10\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{10\cdot\sqrt[3]{5^2}}{5}=2\cdot\sqrt[3]{5^2}$

c) $\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}=$
$=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}=\dfrac{\cancel{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\cancel{2}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

d) $\dfrac{4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{4\cdot\sqrt{2}}{2}=2\cdot\sqrt{2}$

e) $\dfrac{7\cdot\sqrt[3]{14^2}}{\sqrt[3]{14}\cdot\sqrt[3]{14^2}}=\dfrac{7\cdot\sqrt[3]{14^2}}{14}=\dfrac{\sqrt[3]{14^2}}{2}$

f) $\dfrac{5(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{5(2+\sqrt{3})}{4-3}=$
$=5(3-\sqrt{3})=10-5\sqrt{3}$

4. LOGARITMOS

PIENSA Y CALCULA

Halla el valor de *x* en los siguientes casos:

a) $10^3=x$

b) $10^x=1\,000\,000$

c) $x^2=100$

d) $x^1=10$

e) $10^x=1$

a) $x=1\,000$ b) $x=6$ c) $x=\pm10$ d) $x=10$ e) $x=0$

APLICA LA TEORÍA

25. Halla el valor de *x* en los siguientes casos:

a) $3^2=x$ **b)** $x^3=27$ **c)** $3^x=1/3$

a) $x=9$ b) $x=3$ c) $x=-1$

26. Halla el valor de *x* en los siguientes casos:

a) $2^{-3}=x$ **b)** $x^3=8$ **c)** $2^x=1/4$

a) $x=1/8$ b) $x=2$ c) $x=-2$

27. Halla mentalmente los siguientes logaritmos:

a) log 100 **b)** log 10 **c)** log 0,001

a) 2 b) 1 c) –3

28. Halla mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 32$ **b)** $\log_2 1$ **c)** $\log_2 1/8$

a) 5 b) 0 c) –3

29. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) log 23,5 **b)** log 267 **c)** log 0,0456

a) 1,3711 b) 2,4265 c) –1,3410

30. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) ln 3 **b)** ln 23,7 **c)** ln 0,5

a) 1,0986 b) 3,1655 c) –0,6931

31. Utilizando las propiedades de los logaritmos y la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) $\log 3^{15}$ **b)** $\log \sqrt[7]{23}$ **c)** $\log (0{,}5^{30} \cdot 7^{23})$

a) $15 \log 3 = 7{,}1568$

b) $\dfrac{\log 23}{7} = 0{,}1945$

c) $30 \log 0{,}5 + 23 \log 7 = 10{,}4064$

32. Copia en tu cuaderno y sustituye los recuadros por igual, =, o distinto, ≠:

a) $\log (7 + 5)$ ■ $\log 7 + \log 5$

b) $\log 5^2$ ■ $2 \log 5$

c) $\log \dfrac{6}{5}$ ■ $\log 6 - \log 5$

d) $\log \sqrt[3]{5}$ ■ $\log \dfrac{5}{3}$

a) ≠ b) = c) = d) ≠

33. Sabiendo que log 5 = 0,6990, halla:

a) log 2 **b)** log 20

a) $\log 2 = \log \dfrac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - 0{,}6990 = 0{,}3010$

b) $\log 20 = \log (2^2 \cdot 5) = 2 \log 2 + \log 5 =$
$= 2 \cdot 0{,}3010 + 0{,}6990 = 1{,}3010$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. POTENCIAS DE EXPONENTE NATURAL Y ENTERO

34. Calcula mentalmente los cinco primeros cubos perfectos.

0, 1, 8, 27, 64

35. Calcula mentalmente:

a) 3^{-4} **b)** $(-3)^{-4}$ **c)** -3^{-4} **d)** $-(-3)^{-4}$

a) $\dfrac{1}{81}$ b) $\dfrac{1}{81}$ c) $-\dfrac{1}{81}$ d) $-\dfrac{1}{81}$

36. Calcula mentalmente:

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$ **b)** $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$ **c)** $-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$ **d)** $-\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$

a) $\dfrac{8}{27}$ b) $\dfrac{8}{27}$ c) $-\dfrac{8}{27}$ d) $\dfrac{8}{27}$

37. Calcula mentalmente:

a) 0^{10} **b)** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^0$ **c)** 1^{-5} **d)** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^1$

a) 0 b) 1 c) 1 d) $\dfrac{3}{4}$

38. Calcula:

a) $\dfrac{4^3 \cdot 6^{-3}}{12^{-3} \cdot 2^5}$ **b)** $\dfrac{2^5 \cdot 4^{-2} \cdot 5^{-2}}{10^{-3} \cdot 2^3}$

a) 16 b) 10

39. Escribe en forma de potencia de base 3:

a) 81 **b)** 3 **c)** 1 **d)** $\dfrac{1}{27}$

a) 3^4 b) 3^1 c) 3^0 d) 3^{-3}

40. Realiza las siguientes operaciones y comprueba el resultado con la calculadora:

a) $(10^2 - 75)\sqrt{121}$ **b)** $(15^2 + 5^3)\sqrt[3]{512}$

c) $(4^4 - 7 \cdot 3)\sqrt[4]{256}$

a) 275 b) 2 800 c) 940

41. Calcula mentalmente:

a) $(5 + 6)^2$ **b)** $5^2 + 6^2$ **c)** $(10 - 8)^2$ **d)** $10^2 - 8^2$

a) 121 b) 61 c) 4 d) 36

42. Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

a) $x^{-2} \cdot x^5$ **b)** $x^3 : x^7$

c) $(x^{-4})^3$ **d)** $x^{-3} \cdot x^5 : x^{-4}$

a) x^3 b) x^{-4} c) x^{-12} d) x^6

2. RADICALES

43. Calcula mentalmente el valor de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{64}$ **b)** $\sqrt[3]{64}$ **c)** $\sqrt[4]{81}$ **d)** $\sqrt{-49}$

a) ±8 b) 4

c) ±3 d) No tiene raíces reales.

44. Utilizando la calculadora, halla las siguientes raíces. Redondea los resultados a dos decimales.

a) $\sqrt{1\,000}$ **b)** $\sqrt[3]{100}$ **c)** $\sqrt[4]{1{,}25}$ **d)** $\sqrt[5]{524{,}5}$

a) 31,62 b) 4,64 c) 1,06 d) 3,50

45. Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

a) $x^{1/2}$ **b)** $5^{-1/3}$ **c)** $a^{3/4}$ **d)** $7^{-4/5}$

a) $\sqrt{x}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ c) $\sqrt[4]{a^3}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{7^4}}$

46. Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

a) $\sqrt{a}$ **b)** $\sqrt[3]{5^2}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt[6]{7^5}}$

a) $a^{1/2}$ b) $5^{2/3}$ c) $a^{-1/4}$ d) $7^{-5/6}$

47. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt{2^6}$ **b)** $\sqrt[6]{x^3}$ **c)** $\sqrt[9]{a^6}$ **d)** $\sqrt[12]{5^9}$

a) 8 b) $\sqrt{x}$ c) $\sqrt[3]{a^2}$ d) $\sqrt[4]{5^3}$

48. Introduce dentro del radical el factor o factores que están delante:

a) $5\sqrt{2}$ **b)** $a^2\sqrt[3]{5}$

c) $3^2 a^4 \sqrt[3]{3a}$ **d)** $5^2 x^2 y \sqrt[4]{5x^3y^2}$

a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt[3]{5a^6}$

c) $\sqrt[3]{3^7 a^{13}}$ d) $\sqrt[4]{5^9 x^{11} y^6}$

49. Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{18}$ **b)** $\sqrt[3]{81x^{15}}$

c) $\sqrt[4]{64a^{17}b^9}$ **d)** $\sqrt[5]{128x^{19}y^{15}x^{10}}$

a) $3\sqrt{2}$ b) $3x^5\sqrt[3]{3}$

c) $2a^4b^2\sqrt[4]{4ab}$ d) $2x^3y^3z^2\sqrt[5]{4x^4}$

3. OPERACIONES CON RADICALES

50. Realiza las siguientes sumas y restas de radicales:

a) $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{300}$

b) $3\sqrt{50} + 4\sqrt{18} - 5\sqrt{8} + 2\sqrt{200}$

a) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 10\sqrt{3} =$
$= (5 - 2 + 3 - 4 + 10)\sqrt{3} = 12\sqrt{2}$

b) $15\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 20\sqrt{2} =$
$= (15 + 12 - 10 + 20)\sqrt{2} = 37\sqrt{2}$

51. Utilizando la calculadora, halla la siguiente suma y resta de radicales. Redondea el resultado a dos decimales.

$$5\sqrt{23} - 2\sqrt{47} + 7\sqrt{19}$$

40,78

52. Realiza los siguientes productos:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ **b)** $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{10}$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$ **d)** $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3}$

a) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{120} = 2\sqrt[3]{15}$

c) m.i.c. (2, 3) = 6
$\sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{108}$

d) m.i.c. (4, 6) = 12
$\sqrt[12]{5^3} \cdot \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 3^2} = \sqrt[12]{1125}$

53. Realiza los siguientes cocientes:

a) $\sqrt{6} : \sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{40} : \sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[3]{9} : \sqrt{12}$ **d)** $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3}$

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{8} = 2$

c) m.i.c. (2, 3) = 6
$\sqrt[6]{9^2} : \sqrt[6]{12^3} = \sqrt[6]{9^2 : 12^3} = \sqrt[6]{\dfrac{3}{2^6}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[6]{3}$

d) m.i.c. (3, 5) = 15
$\sqrt[15]{2^5} : \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{2^5 : 3^3} = \sqrt[15]{\dfrac{32}{27}}$

54. Copia en tu cuaderno y sustituye los recuadros por igual, =, o distinto, ≠:

a) $\sqrt[3]{7^2}$ ■ $(\sqrt{7})^3$ **b)** $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ ■ $\sqrt[6]{5}$

a) ≠ b) =

55. Racionaliza:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{8}{\sqrt[3]{7^2}}$ **c)** $\dfrac{7}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

a) $\dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

b) $\dfrac{8 \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7}} = \dfrac{8 \cdot \sqrt[3]{7}}{7}$

c) $\dfrac{6(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \dfrac{6(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{7 - 5} =$
$= \dfrac{6(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{2} = 3(\sqrt{7} + \sqrt{5})$

56. Racionaliza:

a) $\dfrac{10}{\sqrt{6}}$ **b)** $\dfrac{12}{\sqrt[3]{4}}$ **c)** $\dfrac{14}{3 - \sqrt{3}}$

a) $\dfrac{10 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{10 \cdot \sqrt{6}}{6} = \dfrac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}$

b) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{12 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \dfrac{12 \cdot \sqrt[3]{2}}{2} = 6 \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\dfrac{14(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \dfrac{14(3 + \sqrt{3})}{9 - 3} =$
$= \dfrac{14(3 + \sqrt{3})}{6} = \dfrac{7(3 + \sqrt{3})}{3}$

4. LOGARITMOS

57. Halla mentalmente el valor de *x*

a) $2^5 = x$ **b)** $x^{-1} = 2$ **c)** $2^x = \dfrac{1}{4}$

a) $x = 32$ b) $x = 1/2$ c) $x = -2$

58. Halla mentalmente el valor de *x* en los siguientes casos:

a) $5^{-3} = x$ **b)** $x^3 = 125$ **c)** $5^x = 1$

a) $x = \dfrac{1}{125}$ b) $x = 5$ c) $x = 0$

59. Halla mentalmente los siguientes logaritmos:

a) log 1 000 **b)** log 1 **c)** $\log 10^{-6}$

a) 3 b) 0 c) –6

60. Halla mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 9$ **b)** $\log_3 \dfrac{1}{27}$ **c)** $\log_3 1$

a) 2 b) –3 c) 0

61. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) log 405,75 **b)** log 1,9 **c)** log 0,0005

a) 2,6083 b) 0,2788 c) –3,3010

62. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) ln 5 **b)** ln 25,8 **c)** ln 0,034

a) 1,6094 b) 3,2504 c) –3,3814

63. Utilizando las propiedades de los logaritmos y la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) $\log 2^{10}$ **b)** $\log \dfrac{867}{3}$ **c)** $\log (5^{23} : 3{,}4^{15})$

a) 10 log 2 = 3,0103

b) log 867 – log 3 = 2,4609

c) 23 log 5 – 15 log 3,4 = 8,1041

64. Copia en tu cuaderno y sustituye los recuadros por igual, =, o distinto, ≠:

a) log (12 : 19) ■ log 12 – log 19

b) $\log \sqrt[3]{7}$ ■ 3 log 7

c) log (22 + 8) ■ log 22 + log 8

d) log (22 + 8) ■ log 30

a) = b) ≠ c) ≠ d) =

65. Sabiendo que log 2 = 0,3010, halla:

a) log 25 **b) log 50**

a) $\log \frac{100}{4} = \log \frac{100}{2^2} = \log 100 - 2 \log 2 =$
$= 2 - 2 \cdot 0{,}3010 = 1{,}398$

b) $\log \frac{100}{2} = \log 100 - \log 2 = 2 - 0{,}3010 = 1{,}6990$

PARA AMPLIAR

66. Escribe en forma de radical las siguientes potencias y halla mentalmente el resultado:

a) $8^{1/3}$ **b) $9^{-1/2}$** **c) $25^{3/2}$** **d) $8^{2/3}$**

a) $\sqrt[3]{8} = 2$

b) $\frac{1}{\sqrt{9}} = \pm\frac{1}{3}$

c) $(\sqrt{25})^3 = (-5)^3 = -125$

d) $(\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

Efectúa las siguientes operaciones:

67. a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ **b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$**

a) $3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$

b) $3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$

68. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$3 - 2 = 1$

69. $3\sqrt{50} - 5\sqrt{32} + 3\sqrt{98}$

$15\sqrt{2} - 20\sqrt{2} + 21\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

70. a) $\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}$ **b) $\sqrt{6} : \sqrt{3}$**

a) $\sqrt{30}$ b) $\sqrt{2}$

71. a) $\sqrt[3]{5}\sqrt[4]{5}$ **b) $\sqrt[3]{7} : \sqrt[4]{7}$**

a) m.i.c.(3, 4) = 12
$\sqrt[12]{5^4} \cdot \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{5^7}$

b) m.i.c.(3, 4) = 12
$\sqrt[12]{7^4} : \sqrt[12]{7^3} = \sqrt[12]{7}$

72. Escribe con un solo radical:

a) $\sqrt{\sqrt{a}}$ **b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$**

a) $\sqrt[4]{a}$ b) $\sqrt[8]{x}$

Racionaliza:

73. a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$ **b) $\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$**

a) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

b) $\frac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

74. a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ **b) $\frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$**

a) $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

b) $\frac{(1 - \sqrt{5})\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 5}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} - 1$

75. a) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ **b) $\frac{9}{\sqrt[3]{3^2}}$**

a) $\frac{4\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{2^2}}{2} = 2\sqrt[3]{2^2}$

b) $\frac{9\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{9\sqrt[3]{3}}{3} = 3\sqrt[3]{3}$

76. a) $\frac{21}{\sqrt[5]{7}}$ **b) $\frac{35}{\sqrt[5]{7^3}}$**

a) $\frac{21\sqrt[5]{7^4}}{\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{7^4}} = \frac{21\sqrt[5]{7^4}}{7} = 3\sqrt[5]{7^4}$

b) $\frac{35\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^3} \cdot \sqrt[5]{7^2}} = \frac{35\sqrt[5]{7^2}}{7} = 5\sqrt[5]{7^2}$

77. a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ **b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$**

a) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3 - 2} = 3 - \sqrt{6}$

b) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = \sqrt{6} + 2$

78. a) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ **b) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$**

a) $\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{3 + 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = 5 + 2\sqrt{6}$

b) $\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = 5 - 2\sqrt{6}$

Reduce al logaritmo de una sola expresión:

79. log 5 + log 6 – log 2

$\log \frac{5 \cdot 6}{2} = \log 15$

80. 2 log 7 + 3 log 5

$\log (7^2 \cdot 5^3) = \log 6\,125$

81. 3 log *a* + 2 log *b* – 5 log *c*

$\log \frac{a^3 \cdot b^2}{c^5}$

82. 2 log *x* – 5 log *y* + 3 log *z*

$\log \frac{x^2 \cdot z^3}{y^5}$

83. $\frac{1}{2} \log x + \frac{1}{3} \log y$

$\log (\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}) = \log \sqrt[6]{x^3 y^2}$

CON CALCULADORA

Utilizando la calculadora, halla el valor de las siguientes expresiones. Redondea el resultado a dos decimales.

84. $(5{,}3^4 - 3{,}4 \cdot 7{,}28)\sqrt[5]{12{,}2}$

1 260,47

85. a) $4\pi \cdot 7{,}5^2$ **b) $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 7{,}5^3$**

a) 706,86 b) 1 767,15

86. a) $5^{2,25}$ **b) $7,5^{3,4}$**

a) 37,38 b) 944,51

87. a) π^{e} **b) e^{π}**

a) 22,46 b) 23,14

Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

88. a) $\log \pi$ **b) $\log \frac{1+\sqrt{5}}{2}$** **c) $\log e$**

a) 0,4971 b) 0,2090 c) 0,4343

89. a) $\ln \pi$ **b) $\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}$** **c) $\ln 10$**

a) 1,1447 b) 0,4812 c) 2,3026

PROBLEMAS

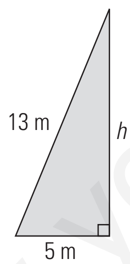
90. Calcula el volumen de un cubo de área 5 m²

$6a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{5}{6}} = 0{,}91$ m

$V = a^3$

$V = 0{,}91^3 = 0{,}75$ m³

91. Una escalera está apoyada sobre la fachada de un edificio. Si la escalera mide 13 m de longitud y el pie de la escalera está a 5 m de la pared, ¿a qué altura de la pared llega la escalera?



$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ m

92. Una población crece según la función dada por $P(t) = p \cdot 1{,}0025^t$, donde t es el tiempo en años. Si en el año 2010 tenía un millón de habitantes, siendo p la población inicial, ¿cuántos habitantes tendrá en el año 2060?

$P(50) = 1 \cdot 10^6 \cdot 1{,}0025^{50} = 1\,132\,972$ habitantes

93. Halla la arista de un cubo cuyo volumen es 7 m³. Redondea el resultado a dos decimales.

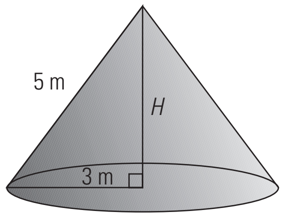
$V = a^3$

$a^3 = 7 \Rightarrow a = \sqrt[3]{7} = 1{,}91$ m

94. La cantidad de madera de un bosque crece según la función $y = x \cdot 1{,}025^t$, donde t es el tiempo en años y x es la cantidad de madera inicial. Si en el año 2010 el bosque tenía 1 000 km³ de madera, ¿cuánta madera tendrá en el año 2110?

$y = 1{,}025^{100} \cdot 1\,000 = 11\,813{,}72$ km³

95. Halla el volumen de un cono en el que el radio de la base mide 3 m, y la generatriz, 5 m



$H = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ m

$V = \frac{1}{3}\pi\, 3^2 \cdot 4 = 37{,}70$ m³

96. La fórmula del capital final en el interés compuesto es $C = c(1 + r)^t$, donde C es el capital final, c es el capital inicial, r es el tanto por uno y t es el tiempo en años. Calcula en cada caso la incógnita que falta:

a) $c = 10\,000$ €, $r = 0{,}05$, $t = 6$ años

b) $C = 15\,000$ €, $r = 0{,}03$, $t = 8$ años

c) $C = 30\,000$ €, $c = 15\,000$ €, $t = 10$ años

d) $C = 50\,000$ €, $c = 25\,000$ €, $r = 0{,}07$

a) $C = 10\,000 \cdot 1{,}05^6 = 13\,401$ €

b) $c \cdot 1{,}03^8 = 15\,000 \Rightarrow c = 11\,841{,}14$ €

c) $15\,000 \cdot (1 + r)^{10} = 30\,000$

$(1 + r)^{10} = 2$

$1 + r = \sqrt[10]{2}$

$1 + r = 1{,}072$

$r = 0{,}072 = 7{,}2\%$

d) $25\,000 \cdot 1{,}07^t = 50\,000$

$1{,}07^t = 2$

$t \log 1{,}07 = \log 2$

$t = 10{,}24$ años

97. Las medidas de las tarjetas de crédito están en proporción áurea, es decir, el cociente entre la medida del largo y la medida del ancho es $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Si miden 53 mm de ancho, ¿cuánto miden de largo?

$\text{Longitud} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot 53 = 86$ mm

98. Una ameba es un ser unicelular que se reproduce por bipartición. Si partimos de un cultivo de 2 000 amebas que se reproducen cada hora, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir para que tengamos $5 \cdot 10^{12}$ amebas?

$2\,000 \cdot 2^t = 5 \cdot 1\,012$

$2^t = 2{,}5 \cdot 109$

$t \log 2 = 9 + \log 2{,}5$

$t = 31{,}22$ horas

99. Supongamos que, en cada uno de los 10 años siguientes, el IPC es de un 2%. Si un producto cuesta actualmente 100 €, ¿cuánto costará al cabo de los 10 años?

$100 \cdot 1{,}02^{10} = 121{,}90$ €

PARA PROFUNDIZAR

100. Racionaliza:

a) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

a) $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}=$

$=\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$

b) $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}=$

$=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$

101. Una moto se devalúa un 15% cada año. Si nos ha costado 5 000 €, ¿qué valor tendrá al cabo de 10 años?

$5\,000 \cdot 0{,}85^{10} = 984{,}37$ €

102. Halla el área y el volumen de una esfera de radio *R* = 3,5 m

Área $= 4\pi \cdot R^2$

Área $= 4\pi \cdot 3{,}5^2 = 153{,}94\ m^2$

Volumen $= \dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$

Volumen $= \dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot 3{,}5^3 = 179{,}59\ m^3$

103. Se ha obtenido experimentalmente que la presión atmosférica viene dada por la función $p(x) = 0{,}9^x$, donde *x* es la altura sobre el nivel del mar. La altura se mide en kilómetros, y, la presión, en atmósferas.

a) Halla la presión en lo alto de una montaña de 3 500 m

b) Halla la altura a la que hay que subir para que la presión sea de 0,8 atmósferas.

a) $P(3{,}5) = 0{,}9^{3{,}5} = 0{,}69$ atmósferas.

b) $0{,}9^x = 0{,}8$

$x \log 0{,}9 = \log 0{,}8$

$x = 2{,}118$ km $= 2\,128$ m

104. La masa de un cuerpo radioactivo viene dada por la función $M = m(1/2)^t$, donde *t* es el número de períodos. Un período de semidesintegración es el tiempo necesario para que la masa se convierta en la mitad. Si tenemos 30 g de un cuerpo radioactivo que tiene un período de 25 años, ¿cuántos años han de transcurrir para que tengamos 5 g de dicho cuerpo?

$30(1/2)^t = 5$

$(1/2)^t = 1/6$

$t \log 1/2 = \log 1/6$

$t = 2{,}58$

N.º de años $= 2{,}58 \cdot 25 = 64{,}5$ años

APLICA TUS COMPETENCIAS

105. Se coloca un capital de 20 000 € al 3,5% anual. ¿Cuál es el capital final al cabo de 10 años?

$C = c(1 + r)^t$

$c = 20\,000$ €

$r = 3{,}5 : 100 = 0{,}035$

$t = 10$

$C = 20\,000 \cdot 1{,}035^{10} = 28\,211{,}98$ €

106. Se tiene un capital colocado durante 5 años al 2,8% anual y se obtiene un capital final de 6 658,76 €. Calcula el capital inicial.

$C = c(1 + r)^t$

$C = 6\,658{,}76$ €

$r = 2{,}8 : 100 = 0{,}028$

$t = 5$

$6\,658{,}76 = c \cdot 1{,}028^5 \Rightarrow 1{,}148c = 6\,658{,}76 \Rightarrow c = 5\,800$ €

107. Se tiene colocado un capital inicial de 7 500 € al 3% anual y se obtiene un capital final de 9 500 €. Calcula el tiempo que ha estado depositado.

$C = c(1 + r)^t$

$c = 7\,500$ €

$r = 3 : 100 = 0{,}03$

$9\,500 = 7\,500 \cdot 1{,}03^t \Rightarrow 1{,}03^t = 9\,500/7\,500 = 1{,}267 \Rightarrow$
$t \log 1{,}03 = \log 1{,}267 \Rightarrow t = 8$ años

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Define qué es un logaritmo decimal y pon un ejemplo.

Los logaritmos decimales son los logaritmos en los que la base es 10. En este caso la base 10, que es el subíndice, no se escribe.

$$\log p = x \Rightarrow 10^x = p$$

Ejemplo: $\log 1\,000 = 3$ porque $10^3 = 1\,000$

2. Escribe en forma de potencia de base 2:

a) 64 **b)** 1 **c)** 2 **d)** $\dfrac{1}{8}$

a) 2^6 b) 2^0 c) 2^1 d) 2^{-3}

3. Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{98}$ **b)** $\sqrt[3]{81x^8}$

c) $\sqrt[4]{128a^{15}b^{10}}$ **d)** $\sqrt[5]{64x^{18}y^{12}z^{10}}$

a) $7\sqrt{2}$ b) $3x^2\sqrt[3]{3x^2}$

c) $2a^3b^2\sqrt[4]{2^3a^3b^2}$ d) $2x^3y^2z^2\sqrt[5]{2x^3y^2}$

4. Racionaliza:

a) $\dfrac{12}{\sqrt{6}}$ **b)** $\dfrac{8}{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{12\sqrt{6}}{6}=2\sqrt{6}$

b) $\dfrac{8\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{8\sqrt[3]{2^2}}{2}=4\sqrt[3]{2^2}$

c) $\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\dfrac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}=$

$=\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$

5. Halla mentalmente el valor de *x* en los siguientes casos:

a) $2^{-4} = x$ **b)** $x^3 = -8$ **c)** $2^x = 1/8$

a) $x = \frac{1}{16}$ b) $x = -2$ c) $x = -3$

6. Sabiendo que log 2 = 0,3010, halla los siguientes logaritmos:

a) log 5 **b) log 50**

a) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$

b) $\log 50 = \log (5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = 0{,}6990 + 1 = 1{,}6990$

7. Halla la diagonal de un cubo de forma exacta, es decir, da el resultado en forma de un radical, cuando el volumen mide 5 m³

$V = a^3$

$a^3 = 5 \Rightarrow a = \sqrt[3]{5}$

$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

$d = \sqrt[3]{5}\,\sqrt{3} = \sqrt[6]{5^2}\,\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{5^2 3^3} = \sqrt[6]{675}$ m

8. Una célula se reproduce por bipartición cada 5 horas. Si se parte de 400 células, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir para que haya 1 millón de células?

$400 \cdot 2^t = 1\,000\,000$

$2^t = 2\,500$

$t \log 2 = \log 2\,500$

$t = \frac{\log 2\,500}{\log 2} = 11{,}29$

N.º de horas = 11,29 · 5 = 56,45 horas

WINDOWS/LINUX WIRIS

PRACTICA

117. Calcula:

a) $(12{,}7^2 + 83) \cdot \sqrt{34{,}2}$

b) $(5{,}6^3 - 5{,}2 \cdot 47{,}5) : \sqrt{333{,}3}$

a) 1428,6

b) –3,9101

118. Calcula con 15 dígitos:

a) $\sqrt{345{,}67}$ **b)** $\sqrt[3]{895{,}34}$ **c)** $\sqrt[4]{89{,}45}$ **d)** $\sqrt[5]{1\,000}$

a) 18,5922026667095 b) 9,63820137124493

c) 3,07535380288521 d) 3,98107170553497

119. Calcula:

a) $\sqrt{72} - \sqrt{50} + \sqrt{18}$

b) $2\sqrt{75} - 3\sqrt{12} + 5\sqrt{27}$

a) $4\sqrt{2}$ b) $19\sqrt{2}$

120. Racionaliza:

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{10}{\sqrt{5}}$ **c)** $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

a) $2 \cdot \sqrt{3}$ b) $2 \cdot \sqrt{5}$ c) $-\sqrt{3} + \sqrt{5}$

121. Calcula:

a) log 23,5 **b) log 267** **c) log 0,0456**

a) 1,3711 b) 2,4265 c) –1,341

122. Calcula:

a) ln 3 **b) ln 23,7** **c) ln 0,5**

a) 1,0986 b) 3,1655 c) –0,69315

123. Calcula:

a) $\log 3^{15}$ **b)** $\log \sqrt[7]{23}$ **c)** $\log (0{,}5^{30} \cdot 7^{23})$

a) 7,1568 b) 0,19453 c) 10,406

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

124. Una pecera tiene forma cúbica y la arista mide 75 cm. Si está llena, ¿cuántos litros de agua contiene?

$V = 7{,}5^3 = 421{,}88$ dm³ = 421,88 litros

125. Supongamos que en cada uno de los 10 años siguientes el IPC es de un 2%. Si un producto cuesta hoy 100 €, ¿cuánto costará al cabo de los 10 años?

$100 \cdot 1{,}02^{10} = 121{,}9$ €

126. Una ameba es un ser unicelular que se reproduce por bipartición. Si partimos de un cultivo de 2 000 amebas que se reproducen cada hora, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir para que tengamos $5 \cdot 10^{12}$ amebas?

$2\,000 \cdot 2^t = 5 \cdot 10^{12}$

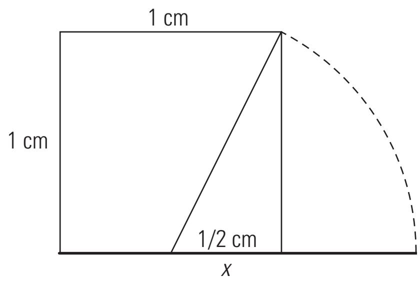
$t = 31{,}219$ horas

Evaluación de diagnóstico

BLOQUE I: ARITMÉTICA

Resuelve:

1. Calcula la longitud x del segmento rojo en el dibujo siguiente. Clasifica el resultado obtenido.



$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Es el número de oro ϕ

2. Escribe en forma de intervalo la desigualdad $|x+1| < 3$

$(-4, 2)$

3. En la medida de 1 m se ha cometido un error de 1 mm, y en 100 km, 100 m. ¿Qué error relativo es mayor?

1.ª medida:

Error relativo $= \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$

2.ª medida:

Error relativo $= \frac{100}{100\,000} = 0{,}001$

En ambos se ha cometido el mismo error relativo.

Elige la respuesta correcta:

4. Aplica las propiedades de las potencias y calcula en cuántos ceros acaba el número

$$125^4 \cdot 6^{13}$$

a) 4 b) 13 c) 12 d) 9

c) 12

5. El resultado de calcular

$$\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} + \sqrt{125}$$

es:

a) $15\sqrt{15}$ b) $\sqrt{5}$ c) $11\sqrt{5}$ d) $6\sqrt{5}$

d) $6\sqrt{5}$

6. La expresión $5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{8}$ es igual a:

a) $10\sqrt{3}$
b) $20\sqrt{3}$
c) $20\sqrt{6}$
d) $10\sqrt{6}$

b) $20\sqrt{3}$

7. La expresión $\frac{(-t)^4 t^{-2}}{t^{-3}}$ es igual a:

a) t^{-1} b) t^3 c) t^5 d) t^{-2}

c) t^5

8. El resultado de racionalizar la expresión

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

es:

a) $1+\sqrt{2}$ b) $-1+\sqrt{2}$
c) $-1-\sqrt{2}$ d) $1-\sqrt{2}$

b) $-1+\sqrt{2}$

9. El resultado de calcular $\sqrt[3]{x^4} : \sqrt[9]{x^6}$ es:

a) $\sqrt[3]{x}$ b) $\sqrt[9]{3x^2}$ c) $\sqrt[9]{x^2}$ d) $\sqrt[3]{x^2}$

d) $\sqrt[3]{x^2}$

10. Sabiendo que ln $a = 0{,}6$ y ln $b = 2{,}4$, calcula ln $\sqrt[3]{\frac{ab}{a^2}}$

a) $\frac{1}{3}$ b) 0,6 c) –1 d) 1

a) $\frac{1}{3}$

Resuelve los siguientes ejercicios:

11. Aplica la definición de logaritmo y calcula el valor de x en cada caso:

a) $x = \log_4 16$
b) $x = \log_3 \frac{1}{27}$
c) $\log_2 (8x) = 4$
d) $\log_x 125 = -3$

a) $x = 2$
b) $x = -3$
c) $x = 2$
d) $x = \frac{1}{5}$

12. Simplifica $\frac{m + 5\sqrt{m} + 6}{\sqrt{m} + 2} - 3$

$\sqrt{m}$

13. Un producto sube todos los años un 5%. Actualmente cuesta 2 €. ¿Cuántos años deben transcurrir para que el precio se duplique?

Observa la siguiente tabla y resuelve la ecuación:

Año	Precio inicial	Precio final
1	2	$2 \cdot 1{,}05$
2	$2 \cdot 1{,}05$	$2 \cdot 1{,}05^2$
3	$2 \cdot 1{,}05^2$	$2 \cdot 1{,}05^3$
…	…	…
t	$2 \cdot 1{,}05^{t-1}$	$2 \cdot 1{,}05^t = 4$

$2 \cdot 1{,}05^t = 4 \Rightarrow 1{,}05^t = 2 \Rightarrow t \log 1{,}05 = \log 2$

$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = 14{,}21$

El precio se duplicará antes de los 15 años.

14. El pH es un valor que se usa para indicar la acidez o alcalinidad de una sustancia. La escala de pH es una escala logarítmica. Oscila entre los valores de 0 (más acido) y 14 (más básico), siendo 7 neutro. El factor pH se define como el potencial de hidrógeno calculado como el logaritmo de la actividad o concentración molar de los iones hidrógeno [H⁺]:

$$pH = -\log [H^+]$$

Ejemplo:

La leche de vaca tiene una concentración molar de $3{,}9 \cdot 10^{-7}$ mol/L, luego tendrá:

$$pH = -\log [H^+] \Rightarrow pH = -\log (3{,}9 \cdot 10^{-7}) =$$
$$= -\log 3{,}9 - \log 10^{-7} = -\log 3{,}9 + 7 = 6{,}4$$

Como el pH es menor que 7, es ácido.

Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno:

	$[H^+]$	pH	Neutro, ácido o básico
Vinagre	$1{,}25 \cdot 10^{-3}$		
Agua		7	
Pasta de dientes		9,9	
Amoniaco	$3{,}16 \cdot 10^{-12}$		

	$[H^+]$	pH	Neutro, ácido o básico
Vinagre	$1{,}25 \cdot 10^{-3}$	2,9	Ácido
Agua	$1 \cdot 10^{-7}$	7	Neutro
Pasta de dientes	$1{,}25 \cdot 10^{-10}$	9,9	Básico
Amoniaco	$3{,}16 \cdot 10^{-12}$	11,5	Básico

Solucionario bloque II. Álgebra

3. Polinomios y fracciones algebraicas

1. Binomio de Newton

PIENSA Y CALCULA

Desarrolla mentalmente:

a) $(x+1)^2$ b) $(x-1)^2$ c) $(x+1)(x-1)$

a) x^2+2x+1 b) x^2-2x+1 c) x^2-1

APLICA LA TEORÍA

1. Desarrolla el binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$(x+1)^3$$

x^3+3x^2+3x+1

2. Desarrolla el binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$(x-2)^4$$

$x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

3. Desarrolla el binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$(x+y)^5$$

$x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

4. Desarrolla el binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$\left(\frac{x}{2}-y\right)^6$$

$$\frac{x^6}{64}-\frac{3x^5y}{16}+\frac{15x^4y^2}{16}-\frac{5x^3y^3}{2}+\frac{15x^2y^4}{4}+3xy^5+y^6$$

5. Halla el término séptimo en el desarrollo de:

$$(2x-y)^{10}$$

Como se pide el término 7, $r=6$

$T_7=T_{6+1}=(-1)^6\binom{10}{6}(2x)^4y^6=3\,360x^4y^6$

6. Calcula el término en el que el grado de x es 2 en el desarrollo de $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$

$T_{r+1}=\binom{12}{r}x^{12-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{12}{r}x^{12-2r}$

Luego

$12-2r=2\Rightarrow r=5$

El término que se pide es:

$T_6=T_{5+1}=\binom{12}{r}x^2=792x^2$

2. Teorema del resto y del factor

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el valor del polinomio

$$P(x)=x^3-4x^2+5x+9$$

para los valores siguientes:

a) $x=0$ b) $x=1$

a) $P(0)=9$ b) $P(1)=11$

APLICA LA TEORÍA

7. Calcula $P(x):Q(x)$, siendo:

$P(x)=4x^5-6x^4+2x^2+8$ $Q(x)=x^2-2x-1$

$C(x)=4x^3+2x^2+8x+20$

$R(x)=48x+28$

8. Halla $P(x):Q(x)$ por Ruffini, siendo:

$P(x)=2x^3+6x^2-3x-1$ $Q(x)=x+3$

$C(x)=2x^2-3$

$R=8$

9. Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para los valores que se indican:

$$P(x)=x^4-3x^3+5x-4$$

a) Para $x=2$ b) Para $x=-2$

a) $P(2)=-2$ b) $P(-2)=26$

10. ¿Cuál de estos números, 2 o –2, es raíz del polinomio $P(x)=3x^3-6x^2+12x-24$?

$P(2)=0\Rightarrow x=2$ es raíz de $P(x)$

$P(-2)=-96\neq0\Rightarrow x=-2$ no es raíz de $P(x)$

11. Halla, sin hacer la división, el resto de dividir el polinomio $P(x)=2x^3-4x^2+5$ entre $x-3$

Resto $=P(3)=23$

12. Comprueba mentalmente, y sin hacer la división, que el polinomio $P(x)=x^3+2x^2-7x+4$ es divisible entre $x-1$

Resto $=P(1)=0$; es divisible

13. Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 5

$$(x^4+kx^2-6x+2):(x+1)$$

Por el teorema del resto:

$P(-1)=5\Rightarrow k+9=5\Rightarrow k=-4$

14. Halla el valor de k para que el polinomio

$$P(x)=x^3-5x^2+kx+8$$

sea divisible entre $x-2$

Por el teorema del factor:

$P(2)=0\Rightarrow 2k-4=0\Rightarrow k=2$

3. Factorización de polinomios

PIENSA Y CALCULA

Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) x^2+2x b) x^2+6x+9 c) x^2-4x+4 d) x^2-4

a) $x(x+2)$
Raíces: $x=0$, $x=-2$

b) $(x+3)^2$
Raíces: $x=-3$

c) $(x-2)^2$
Raíces: $x=2$

d) $(x+2)(x-2)$
Raíces: $x=-2$, $x=2$

APLICA LA TEORÍA

15. Factoriza mentalmente los polinomios que se indican a continuación:

a) $x^2 + 5x$ **b)** $x^2 - 9$

c) $x^2 + 2x + 1$ **d)** $x^2 - 6x + 9$

a) $x(x + 5)$ b) $(x + 3)(x - 3)$

c) $(x + 1)^2$ d) $(x - 3)^2$

16. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces indicando su multiplicidad:

a) $x^3 - 4x$ **b)** $x^3 - 2x^2 + x$

c) $x^4 - 25x^2$ **d)** $x^3 + 6x^2 + 9x$

a) $x(x + 2)(x - 2)$
Las raíces son: $x_1 = 0$, multiplicidad 1
$x_2 = -2$, multiplicidad 1
$x_3 = 2$, multiplicidad 1

b) $x(x - 1)^2$
Las raíces son: $x_1 = 0$, multiplicidad 1
$x_2 = 1$, multiplicidad 2

c) $x^2(x + 5)(x - 5)$
Las raíces son: $x_1 = 0$, multiplicidad 2
$x_2 = -5$, multiplicidad 1
$x_3 = 5$, multiplicidad 1

d) $x(x + 3)^2$
Las raíces son: $x_1 = 0$, multiplicidad 1
$x_2 = -3$, multiplicidad 2

17. Factoriza los siguientes polinomios y calcula sus raíces indicando su multiplicidad:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ **b)** $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

c) $x^4 - 9x^2 + 4x + 12$ **d)** $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$
$x_1 = 1$, multiplicidad 1
$x_2 = -2$, multiplicidad 1
$x_3 = 3$, multiplicidad 1

b) $(x - 1)^2(x - 3)$
$x_1 = 1$, multiplicidad 2
$x_2 = 3$, multiplicidad 1

c) $(x + 1)(x - 2)^2(x + 3)$
$x_1 = -1$, multiplicidad 1
$x_2 = 2$, multiplicidad 2
$x_3 = -3$, multiplicidad 1

d) $(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x - 5)$
$x_1 = -1$, multiplicidad 1
$x_2 = 1$, multiplicidad 1
$x_3 = 3$, multiplicidad 1
$x_4 = 5$, multiplicidad 1

18. Halla un polinomio que tenga las siguientes raíces:

a) $x_1 = -1, x_2 = 3$

b) $x_1 = 2, x_2 = 0$

c) $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 3$

d) $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 2, x_4 = -3$

a) $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$

b) $x(x - 2) = x^2 - 2x$

c) $(x + 2)(x - 1)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d) $x(x - 2)^2(x + 3) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x$

19. Halla el M.C.D. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ $Q(x) = x^2 - x$

b) $P(x) = x^2 - 4$ $Q(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$

c) $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$ $Q(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x$

d) $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

a) $P(x) = (x - 1)^2(x - 2)$
$Q(x) = x(x - 1)$
M.C.D. $(P(x), Q(x)) = x - 1$
m.c.m. $(P(x), Q(x)) = x(x - 1)^2(x - 2)$

b) $P(x) = (x - 2)(x + 2)$
$Q(x) = (x + 2)^2(x - 3)$
M.C.D. $(P(x), Q(x)) = x + 2$
m.c.m. $(P(x), Q(x)) = (x - 2)(x + 2)^2(x - 3)$

c) $P(x) = x^2(x + 1)(x - 2)$
$Q(x) = x(x + 1)^2(x - 3)$
M.C.D. $(P(x), Q(x)) = x(x + 1)$
m.c.m. $(P(x), Q(x)) = x^2(x + 1)^2(x - 2)(x - 3)$

d) $P(x) = (x - 2)^2(x + 3)$
$Q(x) = (x - 2)^2(x - 1)$
M.C.D. $(P(x), Q(x)) = (x - 2)^2$
m.c.m. $(P(x), Q(x)) = (x - 2)^2(x - 1)(x + 3)$

4. FRACCIONES ALGEBRAICAS

PIENSA Y CALCULA

Factoriza mentalmente el numerador y el denominador, y simplifica la siguiente fracción:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 1}$$

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{x(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(x+1)}{x-1}$$

APLICA LA TEORÍA

20. Descompón mentalmente en factores el numerador y el denominador, y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2 - x}{3x - 3}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

a) $\dfrac{x(x-1)}{3(x-1)} = \dfrac{x}{3}$ b) $\dfrac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x-2}{x+2}$

21. Copia y completa para que se verifique la igualdad:

a) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{2x - 4}{\blacksquare}$

b) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 8} = \dfrac{\blacksquare}{x - 4}$

a) $2x^2 - 10x + 12$ b) $x + 1$

22. Calcula:

a) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x + 1}$ **b)** $\dfrac{3}{x^2 - 4} - \dfrac{x}{x - 2}$

a) $\dfrac{3x + 2}{x(x-1)}$ b) $\dfrac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4}$

23. Efectúa:

a) $\dfrac{x+1}{x-2}\cdot\dfrac{x^2}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x+2}{x+1}\cdot\dfrac{x^2+x}{x^2-4}$

a) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ b) $\dfrac{x}{x-2}$

24. Calcula:

a) $\dfrac{x+3}{x+2}:\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$ b) $\dfrac{2x^2+x}{x^2-1}:\dfrac{2x+1}{3x^2-4}$

a) $\dfrac{x-2}{x-3}$ b) $\dfrac{3x^3-4x}{x^2-1}$

25. Opera y simplifica:

a) $\left(x+\dfrac{4x-1}{x-4}\right)\dfrac{2}{x-1}$

b) $\left(\dfrac{1}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}\right):\left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)$

a) $\dfrac{2(x+1)}{x-4}$ b) $\dfrac{x+3}{x(x+2)}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. BINOMIO DE NEWTON

26. Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$(2x-y)^3$$

$8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

27. Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)^5$$

$\dfrac{5}{x}+\dfrac{10}{x^2}+\dfrac{10}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}+1$

28. Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$(x+2y)^6$$

$x^6+12x^5y+60x^4y^2+160x^3y^3+240x^2y^4+192xy^5+64y^6$

29. Halla el término octavo en el desarrollo de:

$$\left(x-\frac{y}{2}\right)^{12}$$

Como se pide el término 8, $r=7$

$T_8=T_{7+1}=(-1)^7\dbinom{12}{7}x^5\left(\dfrac{y}{2}\right)^7=-\dfrac{99}{16}x^5y^7$

30. Halla el coeficiente de x^5 en el desarrollo de:

$$\left(3x-\frac{1}{x}\right)^7$$

$T_{r+1}=(-1)^r\dbinom{7}{r}(3x)^{7-r}\dfrac{1}{x^r}=(-1)^r\dbinom{7}{r}3^{7-r}x^{7-2r}$

Luego

$7-2r=5\Rightarrow r=1$

El término que se pide es:

$T_2=T_{1+1}=-\dbinom{7}{1}(3x)^6=-5\,103x^5$

2. TEOREMA DEL RESTO Y DEL FACTOR

31. Calcula $P(x):Q(x)$, siendo:

$$P(x)=4x^5+2x^4-12x^3+10x^2+20x-25$$
$$Q(x)=2x^3-4x+1$$

$C(x)=2x^2+x-2$

$R(x)=12x^2+11x-23$

32. Calcula $P(x):Q(x)$, siendo:

$$P(x)=2x^7+x^6-8x^5-3x^4+x^2+4$$
$$Q(x)=x^3-2x^2+x-1$$

$C(x)=2x^4+5x^3-6x-7$

$R(x)=-7x^2+x-3$

33. Calcula $P(x):Q(x)$ por Ruffini, siendo:

$$P(x)=x^4-6x^3+2x-6$$
$$Q(x)=x-3$$

$C(x)=x^3-3x^2-9x-25$

$R=-81$

34. Halla $P(x):Q(x)$ por Ruffini, siendo:

$$P(x)=x^5-8x^3+2x-4$$
$$Q(x)=x+2$$

$C(x)=x^4-2x^3-4x^2+8x-14$

$R=24$

35. Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para los valores que se indican:

$$P(x)=x^5-x^3+3x^2-4x+1$$

a) Para $x=2$ **b) Para $x=-2$**

a) $P(2)=29$ b) $P(-2)=-3$

36. Halla si los valores 5 y 3 son raíces del siguiente polinomio:

$$P(x)=x^3-3x^2-13x+15$$

$P(5)=0\Rightarrow x=5$ es raíz de $P(x)$

$P(3)=-24\neq 0\Rightarrow x=3$ no es raíz de $P(x)$

37. Halla, sin hacer la división, el resto de dividir

$P(x)=x^4+2x^3-4x+5$ entre $x+3$

Por el teorema del resto: Resto $=P(-3)=44$

38. Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea -3

$$(x^4+kx^3-kx+5):(x-2)$$

Por el teorema del resto:
$P(2)=-3\Rightarrow 6k+21=-3\Rightarrow k=-4$

39. Comprueba, sin hacer la división, que el polinomio $P(x)=x^4+3x^3-3x^2-2x+21$ es divisible entre $x+3$

Por el teorema del factor: Resto $=P(-3)=0$

40. Halla el valor de k para que el polinomio

$$P(x)=2x^3-kx^2+x-6$$

sea divisible entre $x+2$

Por el teorema del factor:
$P(-2)=0\Rightarrow -4k-24=0\Rightarrow k=-6$

3. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

41. Factoriza mentalmente los polinomios:

a) $x^2 - 25$ **b)** $x^2 - 8x + 16$
c) $x^4 - 2x^2 + 1$ **d)** $x^2 + 10x + 25$

a) $(x-5)(x+5)$ b) $(x-4)^2$
c) $(x^2-1)^2 = (x+1)^2(x-1)^2$ d) $(x+5)^2$

42. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $16x^3 - 4x$ **b)** $x^4 + 2x^3 + x^2$
c) $2x^4 - 18x^2$ **d)** $2x^3 + 12x^2 + 18x$

a) $4x(4x^2-1) = 4x(2x+1)(2x-1)$
Las raíces son: $x_1 = 0$, $x_2 = -1/2$, $x_3 = 1/2$

b) $x^2(x+1)^2$
Las raíces son: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = -1$

c) $2x^2(x+3)(x-3)$
Las raíces son: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$

d) $2x(x+3)^2$
Las raíces son: $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = -3$

43. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^3 - x^2 - 5x - 3$
b) $x^3 - 2x^2 - 3x$
c) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$
d) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2$

a) $(x-3)(x+1)^2$
Las raíces son: $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = -1$

b) $x(x+1)(x-3)$
Las raíces son: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$

c) $(x-1)(x-2)^2(x+3)$
Las raíces son: $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = -3$

d) $x^2(x-1)^2(x-2)$
Las raíces son: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 2$

44. Halla un polinomio que tenga las siguientes raíces:

a) $x_1 = 2$, $x_2 = -3$
b) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$
c) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$
d) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 2$

a) $(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$
b) $(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$
c) $(x+1)(x-1)(x-3) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
d) $x(x-1)(x-2)^2 = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$

45. Halla el M.C.D. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 4x$
$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$
b) $P(x) = x^2 + 2x - 3$
$Q(x) = x^2 - 3x + 2$
c) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$
$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x$
d) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
$Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

a) $P(x) = x(x+2)(x-2)$
$Q(x) = x(x-2)^2$
M.C.D. $(P(x), Q(x)) = x(x-2)$
m.c.m. $(P(x), Q(x)) = x(x-2)^2(x+2)$

b) $P(x) = (x-1)(x+3)$
$Q(x) = (x-1)(x-2)$
M.C.D. $(P(x), Q(x)) = x-1$
m.c.m. $(P(x), Q(x)) = (x-1)(x-2)(x+3)$

c) $P(x) = x^2(x-1)(x-3)$
$Q(x) = x(x-1)^2$
M.C.D. $(P(x), Q(x)) = x(x-1)$
m.c.m. $(P(x), Q(x)) = x^2(x-1)^2(x-3)$

d) $P(x) = (x-1)^2(x-2)$
$Q(x) = (x-1)(x-2)^2$
M.C.D. $(P(x), Q(x)) = (x-1)(x-2)$
m.c.m. $(P(x), Q(x)) = (x-1)^2(x-2)^2$

4. FRACCIONES ALGEBRAICAS

46. Descompón mentalmente en factores el numerador y el denominador y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{(x+2)^2}{x^2-4}$ **b)** $\dfrac{x^2}{x^2-x}$
c) $\dfrac{4x^2-9}{2x-3}$ **d)** $\dfrac{9x^2+6x+1}{3x+1}$

a) $\dfrac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x+2}{x-2}$ b) $\dfrac{x^2}{x(x-1)} = \dfrac{x}{x-1}$
c) $\dfrac{(2x+3)(2x-3)}{2x-3} = 2x+3$ d) $\dfrac{(3x+1)^2}{3x+1} = 3x+1$

47. Calcula:

a) $\dfrac{2}{x+3} + \dfrac{2}{x-3}$ **b)** $\dfrac{8}{x^2+2x} - \dfrac{4x}{2x+4}$
c) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{x+1}{x^2+x}$ **d)** $\dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{x+1}{(2x-1)^2}$

a) $\dfrac{4x}{(x+3)(x-3)}$ b) $\dfrac{2(2-x)}{x}$
c) $\dfrac{1-x}{x^2}$ d) $\dfrac{x-2}{(2x-1)^2}$

48. Efectúa:

a) $\dfrac{2x}{x-2} \cdot \dfrac{x^2-4}{2}$ **b)** $\dfrac{3x+3}{3x} \cdot \dfrac{x^2-3}{x^2-9}$

a) $x(x+2)$ b) $\dfrac{x^3+x^2-3x-3}{x^3-9x}$

49. Calcula:

a) $\dfrac{3x}{2x-2} : \dfrac{2x}{x-1}$ **b)** $\dfrac{x^2-x}{x-3} : \dfrac{4x-4}{x^2-9}$

a) $\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{x(x+3)}{4}$

50. Opera y simplifica:

a) $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)\dfrac{3x^2}{x+2}$
b) $\left(x + \dfrac{x}{1-x}\right) : \left(x - \dfrac{x}{1-x}\right)$

a) 3 b) $\dfrac{x-2}{x}$

PARA AMPLIAR

51. Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^5$$

$$x^5+\frac{5x^4}{y}+\frac{10x^3}{y^2}+\frac{10x^2}{y^3}+\frac{5x}{y^4}+\frac{1}{y^5}$$

52. Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^4$$

$$\frac{x^8}{16}+\frac{x^7}{2}+\frac{3x^6}{2}-2x^5+x^4$$

53. Halla el término séptimo en el desarrollo del siguiente binomio:

$$\left(\frac{x}{2}+y\right)^{11}$$

Como se pide el término 7, $r=6$

$$T_7=T_{6+1}=\binom{11}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^5 y^6=\frac{231}{16}x^5y^6$$

54. Halla el término decimosegundo en el desarrollo de:

$$\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^{15}$$

Como se pide el término 12, $r=11$

$$T_{12}=T_{11+1}=(-1)^{11}\binom{15}{11}(2x)^4\left(\frac{1}{2x}\right)^{11}=-\frac{1\,365}{128x^7}$$

55. Calcula el coeficiente del término que tiene grado 9 en el desarrollo de:

$$(x-2x^2)^5$$

$$T_{r+1}=(-1)^r\binom{5}{r}x^{5-r}(2x^2)^r=(-1)^r\binom{5}{r}2^r x^{5+r}$$

Luego

$5+r=9 \Rightarrow r=4$

El término que se pide es:

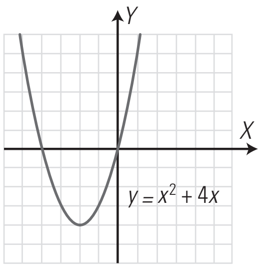
$$T_5=T_{4+1}=\binom{5}{4}x(2x^2)^4=80x^9$$

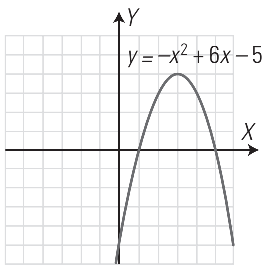
56. Halla un polinomio que al ser dividido entre x^3-4x+2 se obtenga de cociente x^2+2x-3 y de resto $5x+4$

$(x^3-4x+2)(x^2+2x-3)+5x+4=$
$=x^5+2x^4-7x^3-6x^2+21x-2$

57. Observando las gráficas siguientes, halla las raíces de los polinomios:

$$P(x)=x^2+4x$$
$$Q(x)=-x^2+6x-5$$





Las raíces de $P(x)$ son: $x_1=-4$, $x_2=0$

Las raíces de $Q(x)$ son: $x_1=1$, $x_2=5$

58. Halla el valor de k para que el siguiente polinomio $P(x)=x^4+2x^2+kx+3$ sea divisible por $x+3$

Por el teorema del factor:

$P(-3)=0 \Rightarrow 102-3k=0 \Rightarrow k=34$

59. Halla el valor de k para que el resto de la división del polinomio $P(x)=2x^3-x+k$ entre $x-2$ sea 3

Por el teorema del resto:

Resto $=P(2)=3 \Rightarrow k+14=3 \Rightarrow k=-11$

60. Di si son exactas las siguientes divisiones sin hacer la división:

a) $(x^4-1):(x+1)$ **b) $(x^5-32):(x+2)$**

a) Resto $=(-1)^4-1=0 \Rightarrow$ Es exacta.

b) Resto $=(-2)^5-32=-64 \Rightarrow$ No es exacta.

Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

61. x^4-2x^3-x+2

$(x-1)(x-2)(x^2+x+1)$

Las raíces reales son: $x_1=1$, $x_2=2$

62. x^4-2x^2+1

$(x+1)^2(x-1)^2$

Las raíces son: $x_1=x_2=-1$, $x_3=x_4=1$

63. $x^4+3x^3-5x^2-13x+6$

$(x-2)(x+3)(x^2+2x-1)$

Las raíces reales son: $x_1=2$, $x_2=-3$

64. x^3-3x^2-6x+8

$(x-1)(x+2)(x-4)$

Las raíces son: $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=4$

65. $x^4-3x^3-3x^2+11x-6$

$(x-1)^2(x+2)(x-3)$

Las raíces son: $x_1=x_2=1$, $x_3=-2$, $x_4=3$

66. $x^4-x^3-3x^2+5x-2$

$(x+2)(x-1)^3$

Las raíces son: $x_1=-2$, $x_2=x_3=x_4=1$

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

67. $\dfrac{2x-1}{4x^2-2x}$

$\dfrac{1}{2x}$

68. $\dfrac{x^2-x}{x^4-x^2}$

$\dfrac{1}{x(x+1)}$

69. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+6x+5}$

$\dfrac{x+2}{x+5}$

70. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+x+10}$

$\dfrac{x+3}{x^2-2x+5}$

71. $\dfrac{\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-4x}}{}$

$\dfrac{x+5}{x(x+2)}$

Efectúa las operaciones siguientes y simplifica los resultados:

72. $\dfrac{2x+1}{x+4}-\dfrac{2x-3}{x-2}$

$\dfrac{-8x+10}{x^2+2x-8}$

73. $\dfrac{2x-1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^3-x}$

$\dfrac{2x+1}{x^2+x}$

74. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x}$

$\dfrac{2}{x^3-x}$

75. $1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x+1}{x^2+x}$

$\dfrac{x^2-x+1}{x^2}$

76. $\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{x}{2}\right):\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$\dfrac{-x^2+x+2}{2}$

77. $\dfrac{2x+2}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-x}{x+2}$

$\dfrac{2x}{x+2}$

78. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{x}{x+1}\right):(x+2)$

$\dfrac{1}{x}$

79. $\left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x^2-4}\right):\left(4+\dfrac{12}{x-2}\right)$

$\dfrac{2x-1}{4x^2+12x+8}$

80. $\left(\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{1-x}{2x}\right):\left(\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{2}{x^2+x}\right)$

$\dfrac{x^2+x}{2}$

81. $\left(\dfrac{9-6x}{x^2}+1\right):\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{3}\right)$

$\dfrac{-3x+9}{x^2+3x}$

82. $\dfrac{3x+9}{x+6}\left(\dfrac{4}{3x-3}-\dfrac{x+2}{x^2+2x-3}\right)$

$\dfrac{1}{x-1}$

PROBLEMAS

83. Calcula los valores de *m* y *n* para que el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 + mx^2 - 3x + n$ sea divisible por $x + 1$ y $x - 2$

Por el teorema del factor:

$P(-1) = 0 \Rightarrow m + n + 3 = 0$

$P(2) = 0 \Rightarrow 4m + n + 18 = 0$

Resolviendo el sistema:

$m = -5,\ n = 2$

84. Calcula los valores de *m* y *n* para que el polinomio $P(x) = x^4 + mx^3 + 2x^2 + nx - 24$ sea divisible por $x + 2$ y $x - 3$

Por el teorema del factor:

$P(-2) = 0 \Rightarrow -8m - 2n = 0$

$P(3) = 0 \Rightarrow 27m + 3n + 75 = 0$

Resolviendo el sistema: $m = -5,\ n = 20$

85. Escribe un polinomio cuyas raíces sean los valores 2, –1 y 5

$(x-2)(x+1)(x-5) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

86. Escribe dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tales que:

M.C.D. $(P(x), Q(x)) = x - 2$

$P(x) = x - 2$

$Q(x) = x(x-2)$

87. Escribe dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tales que:

m.c.m. $(P(x), Q(x)) = x(x^2-1)(x-2)$

$P(x) = x(x^2-1)$

$Q(x) = x - 2$

88. Escribe en forma de polinomio en una variable cada uno de los enunciados siguientes:

a) El cubo de un número menos el cuadrado del número más 4 unidades.

b) El área de un rectángulo cuya base mide 5 unidades más que la altura *x*

c) El área de un triángulo cuya altura mide 2 unidades menos que la base *x*

a) $P(x) = x^3 - x^2 + 4$

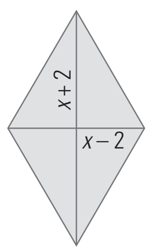
b) $A(x) = x(x+5) = x^2 + 5x$

c) $A(x) = \dfrac{x(x-2)}{2} = \dfrac{x^2-2x}{2}$

89. Dos números suman 8 unidades. Escribe el polinomio que expresa el producto de dichos números en función del número menor *x*

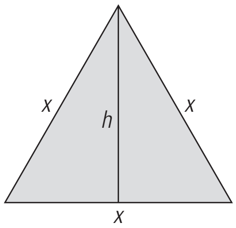
$P(x) = x(8-x) = 8x - x^2$

90. Dado el rombo siguiente, halla su área en función de *x*



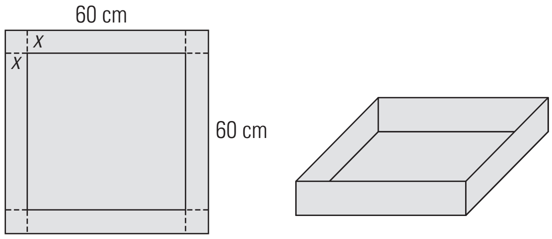
$A(x) = \dfrac{x^2-4}{2} = \dfrac{x^2}{2} - 2$

91. Escribe el polinomio que da el área de un triángulo equilátero en función del lado *x*



$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$

92. En una cartulina cuadrada de 60 cm de lado se recorta un cuadrado de lado *x* en las esquinas, para construir una caja sin tapa. Escribe el volumen de la caja en función de *x*

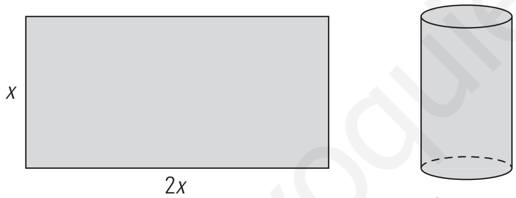


$V(x)=(60-2x)^2x=4x^3-240x^2+3\,600x$

93. Con una cartulina como la de la figura, se construye un cilindro sin tapas. Escribe:

a) el área lateral del cilindro en función de *x*

b) el volumen del cilindro en función de *x*



a) $A(x)=x\cdot 2x=2x^2$ b) $V(x)=\pi\left(\frac{x}{\pi}\right)^2x=\frac{x^3}{\pi}$

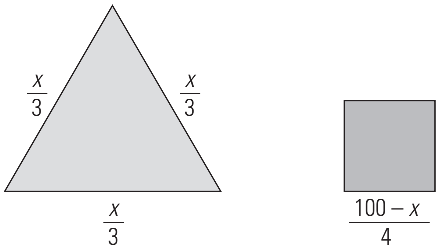
94. Dados dos números enteros consecutivos, escribe el polinomio que expresa en función del número menor *x*

a) la suma de los números;

b) el producto de los números.

a) $S(x)=x+x+1=2x+1$ b) $P(x)=x(x+1)=x^2+x$

95. Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos trozos, y se forman el triángulo equilátero y el cuadrado siguientes.



Escribe el polinomio que expresa la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función de *x*

$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2+\frac{(100-x)^2}{4^2}$

PARA PROFUNDIZAR

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

96. $\frac{4x^2y}{6xy^3}$

$\frac{2x}{3y^2}$

97. $\frac{2x^2-4xy}{2x^4-8x^2y^2}$

$\frac{1}{x(x+2y)}$

98. $\frac{a^2-2a+1}{a^2b^2-b^2}$

$\frac{a-1}{b^2(a+1)}$

99. $\frac{4x^2+4xy+y^2}{4x^3-4x^2y+xy^2}$

$\frac{1}{x}$

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

100. $\frac{2x}{x-y}\cdot\frac{x^2-y^2}{2}$

$x(x+y)$

101. $\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)\frac{x^2}{2x+y}$

$\frac{x}{y}$

102. $\frac{xy}{2x+2y}\cdot\frac{8y^3}{x}\cdot\frac{x^2-y^2}{2xy^3}$

$\frac{2y(x-y)}{x}$

103. $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}$

$\frac{4xy}{(x+y)(x+y)}$

104. $\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}-\frac{2y^2}{x^2-y^2}$

$\frac{2y}{x+y}$

APLICA TUS COMPETENCIAS

105. Halla el polinomio que define un movimiento uniformemente acelerado en el que:

$$a=4\text{ m/s}^2,\ v_0=5\text{ m/s y } e_0=2\text{ m}$$

$e(t)=\frac{1}{2}\cdot 4t^2+5t+2$

$e(t)=2t^2+5t+2$

106. Halla el monomio que define el movimiento de un cuerpo que se deja caer en el vacío en el que:

$$a=9{,}8\text{ m/s}^2,\ v_0=0\text{ m/s y } e_0=0\text{ m}$$

$e(t)=\frac{1}{2}\cdot 9{,}8t^2$

$e(t)=4{,}9t^2$

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Enuncia el teorema del resto y pon un ejemplo.

El resto que se obtiene al dividir el polinomio $P(x)$ entre el binomio $x - a$ es el valor numérico del polinomio para $x = a$

$$R = P(a)$$

Ejemplo:

Halla el resto de la siguiente división:

$$P(x) = x^3 - 5x + 17 \text{ entre } x + 3$$

Resto $= P(-3) = (-3)^3 - 5 \cdot (-3) + 17 = -27 + 15 + 17 = 5$

2. Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$\mathbf{(2x - 3)^4}$$

$16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$

3. Halla el coeficiente de x^{12} en el desarrollo de:

$$\mathbf{(x^2 + x)^8}$$

$T_{r+1} = \binom{8}{r} (x^2)^{8-r} \cdot x^r$

Luego

$16 - 2r + r = 12 \Rightarrow 16 - r = 12 \Rightarrow r = 4$

El término que se pide es:

$T_5 = T_{4+1} = \binom{8}{4} (x^2)^{8-4} x^4 = 70x^{12}$

4. Factoriza el siguiente polinomio y halla sus raíces:

$$\mathbf{P(x) = x^3 - 3x^2 + 4}$$

$x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$

Raíces: $x = -1$; $x = 2$

5. Halla el M.C.D. y el m.c.m. de los polinomios siguientes:

$$\mathbf{P(x) = x^3 - 4x}$$
$$\mathbf{Q(x) = x^3 + 2x^2}$$

$P(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$

$Q(x) = x^3 + 2x^2 = x^2(x + 2)$

M.C.D. $(P(x), Q(x)) = x(x + 2)$

m.c.m. $(P(x), Q(x)) = x^2(x + 2)(x - 2)$

6. Efectúa la operación siguiente y simplifica el resultado:

$$\left(\frac{x}{x-3} - \frac{x-1}{x^2-9}\right)\frac{1}{x+1}$$

$\dfrac{x+1}{x^2-9}$

7. Calcula el valor de k para que $P(x) = x^3 - 3x^2 + kx + 6$ sea divisible por $(x + 2)$

Por el teorema del factor:

$P(-2) = 0$

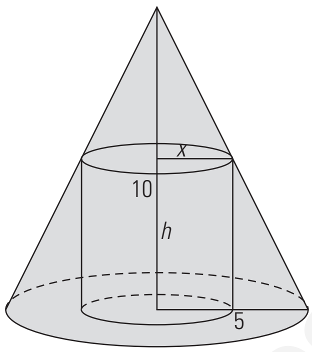
$(-2)^3 - 3(-2)^2 + (-2)k + 6 = 0$

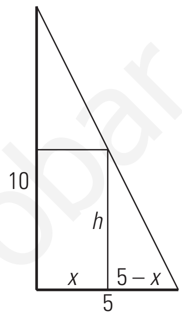
$-8 - 12 - 2k + 6 = 0$

$-14 - 2k = 0$

$k = -7$

8. Dado el cilindro inscrito en el cono de la figura siguiente, halla el polinomio que expresa el volumen del cilindro en función del radio x





Se tiene:

$\dfrac{10}{5} = \dfrac{h}{5-x} \Rightarrow h = 2(5 - x)$

El volumen es:

$V(x) = \pi x^2 \cdot 2(5 - x) = 10\pi x^2 - 2\pi x^3$

WINDOWS/LINUX WIRIS

PRACTICA

113. Desarrolla el siguiente binomio:

$$\mathbf{(x + y)^5}$$

$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

114. Calcula $P(x) : Q(x)$, siendo:

$$\mathbf{P(x) = 4x^5 - 6x^4 + 2x^2 + 8}$$
$$\mathbf{Q(x) = x^2 - 2x - 1}$$

$C(x) = 4x^3 + 2x^2 + 8x + 20$

$R(x) = 48x + 28$

115. Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para los valores que se indican:

$$\mathbf{P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 4}$$

a) Para $x = 2$ **b) Para $x = -2$**

a) $P(2) = -2$

b) $P(-2) = 26$

116. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $x^4 - 9x^2 + 4x + 12$

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$

b) $(x + 1)(x - 2)^2(x + 3)$

117. Halla las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

b) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$

a) $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 3$

b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$

118. Calcula:

a) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}$

b) $\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x^2-4}$

a) $\frac{3x+2}{x^2+x}$ b) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}$

119. Calcula:

a) $\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x^2}{x^2-1}$

b) $\frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x^2+x}{x^2-4}$

a) $\frac{x^2}{x^2-3x+2}$ b) $\frac{x}{x-2}$

120. Calcula:

$$\frac{x+3}{x+2} : \frac{x^2-9}{x^2-4}$$

$\frac{x-2}{x-3}$

121. Calcula:

$$\frac{2x^2+x}{x^2-1} : \frac{2x+1}{3x^2-3}$$

$3x$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

122. Halla el valor de *k* para que el resto de la siguiente división sea 5

$$(x^4 + kx^2 - 6x + 2) : (x + 1)$$

$P(-1) = 5$

$k = -4$

123. Halla el valor de *k* para que el polinomio $P(x) = x^3 - 5x^2 + kx + 8$ sea divisible entre $x - 2$

$P(2) = 0$

$k = 2$

4. Resolución de ecuaciones

1. Ecuaciones de 1.er y 2.º grado

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $x+3=8$ **b)** $5x=20$ **c)** $x^2=81$ **d)** $x(x-2)=0$

a) $x=5$ b) $x=4$ c) $x=\pm 9$ d) $x=0,\ x=2$

APLICA LA TEORÍA

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{x-2}{12}-\frac{x+1}{4}=-\frac{11}{4}$

$x=2$

2. $\frac{x+1}{3}-\frac{3x-2}{9}=\frac{2x-1}{18}+\frac{5}{9}$

$x=\frac{1}{2}$

3. $\frac{x+1}{4}-2\left(x-\frac{6}{5}\right)=\frac{3x-1}{5}+\frac{x}{2}$

$x=1$

4. $\frac{x}{3}-\frac{x-2}{12}-x=3x-\frac{7}{3}$

$x=\frac{2}{3}$

5. $\frac{3x+7}{24}-\frac{1-4x}{6}=-4-x-\frac{2x-5}{3}$

$x=-1$

6. $2x^2-3x=0$

$x_1=0,\ x_2=\frac{3}{2}$

7. $5x^2-14x-3=0$

$x_1=-\frac{1}{5},\ x_2=3$

8. $9x^2=4$

$x_1=-\frac{2}{3},\ x_2=\frac{2}{3}$

9. $5x^2-24x-5=0$

$x_1=-\frac{1}{5},\ x_2=5$

10. $(x-3)(x-1)=15$

$x_1=6,\ x_2=-2$

11. $\frac{3x}{2}+1+\frac{x^2+4}{4}=0$

$x_1=-4,\ x_2=-2$

12. Determina, sin resolverlas, cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+4x-5=0$

b) $2x^2-3x+7=0$

c) $x^2+6x+9=0$

d) $3x^2-4x+1=0$

a) $\Delta=36 \Rightarrow$ tiene dos soluciones reales.

b) $\Delta=-47 \Rightarrow$ no tiene soluciones reales.

c) $\Delta=0 \Rightarrow$ tiene una solución real.

d) $\Delta=4 \Rightarrow$ tiene dos soluciones reales.

13. Halla la descomposición factorial:

a) $2x^2-5x-3$ **b)** x^2-4x+4

c) $3x^2-x-2$ **d)** $5x^2-3x$

a) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)$ b) $(x-2)^2$

c) $3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)$ d) $5x\left(x-\frac{3}{5}\right)$

2. Ecuaciones bicuadradas, racionales e irracionales

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{x}=5$ **b)** $\frac{2x-1}{x}=1$ **c)** $\sqrt{x+1}=2$

a) $x=\frac{1}{5}$ b) $x=1$ c) $x=3$

APLICA LA TEORÍA

Resuelve las siguientes ecuaciones:

14. $x^4-10x^2+9=0$

$x_1=-3,\ x_2=3,\ x_3=-1,\ x_4=1$

15. $x^4-625=0$

$x_1=-5,\ x_2=5$

16. $x^4-17x^2+16=0$

$x_1=-4,\ x_2=4,\ x_3=-1,\ x_4=1$

17. $x^4-4x^2=0$

$x_1=-2,\ x_2=2,\ x_3=x_4=0$

18. $x^4-12x^2+32=0$

$x_1=-2,\ x_2=2,\ x_3=-2\sqrt{2},\ x_4=2\sqrt{2}$

19. $x^6-8x^3=0$

$x_1=0,\ x_2=2$

20. $x^6-26x^3-27=0$

$x_1=-1,\ x_2=3$

21. $\frac{2}{x}+x=-3$

$x_1=-2,\ x_2=-1$

22. $\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x}-\frac{1}{6}$

$x_1=-6,\ x_2=3$

23. $\frac{3x+2}{x+1}-2=\frac{3}{4}$

$x=3$

24. $\frac{4}{x+3}-\frac{1}{x-2}=2$

$x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=1$

25. $\frac{2}{x-1}+\frac{2x-3}{x^2-1}=\frac{7}{3}$

$x_1=-\frac{2}{7},\ x_2=2$

26. $\frac{x}{x+3}+\frac{x-2}{x-1}=1$

$x_1=-1,\ x_2=3$

27. $\dfrac{3x}{x+2}+\dfrac{x-1}{6}=x-\dfrac{2}{3}$

$x_1=-\dfrac{5}{7},\ x_2=2$

28. $x=2+\sqrt{x}$

$x=4$

29. $\sqrt{x-1}-x+7=0$

$x=10$

30. $x-\sqrt{25-x^2}=1$

$x=4$

31. $\sqrt{2x^2-4}-\sqrt{4x-6}=0$

No tiene solución.

32. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=7$

$x=4$

3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $3^x=9$ **b)** $3^x=\dfrac{1}{9}$

c) $3^x=3$ **d)** $3^x=1$

e) $\log_3 x=0$ **f)** $\log_3 x=1$

g) $\log_3 x=2$ **h)** $\log_3 x=-2$

a) $x=2$ b) $x=-2$

c) $x=1$ d) $x=0$

e) $x=1$ f) $x=3$

g) $x=9$ h) $x=\dfrac{1}{9}$

APLICA LA TEORÍA

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

33. a) $3^x=27$ **b)** $7^{x+1}=1$

a) $x=3$ b) $x=-1$

34. a) $5^{x-1}=25$ **b)** $2^x=\dfrac{1}{8}$

a) $x=3$ b) $x=-3$

35. a) $\log x=0$ **b)** $\log_2 x=4$

a) $x=1$ b) $x=16$

36. a) $\log_x 3=1$ **b)** $\ln x=1$

a) $x=3$ b) $x=e$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

37. $2^{x^2-1}=8$

$x_1=-2,\ x_2=2$

38. $2\cdot 2^x+4^x=80$

$x=3$

39. $5^x+5^{1-x}=6$

$x_1=0,\ x_2=1$

40. $2^{x+1}+2^x+2^{x-1}=14$

$x=2$

41. $9^x-6\cdot 3^{x+1}+81=0$

$x=2$

42. $4^x=6^{1-x}$

$x=\dfrac{\log 6}{\log 4+\log 6}=0{,}5638$

43. $2^4-2^{5x}=0$

$x=\dfrac{4}{5}$

44. $5^{x+1}=3^{1-2x}$

$x=\dfrac{\log 3-\log 5}{\log 5+2\log 3}=-0{,}1342$

45. $\log_x 16=2$

$x=4$

46. $\log x+\log 80=3$

$x=\dfrac{25}{2}$

47. $\log(22-x)=-1+\log x$

$x=20$

48. $3\log x=2\log x+\log 3$

$x=3$

4. Resolución de problemas

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente:

a) el lado de un cuadrado cuya área es de 36 m²

b) dos números enteros consecutivos cuya suma sea 15

a) $x=6$ m

b) Los números son 7 y 8

APLICA LA TEORÍA

49. Halla dos números que sumen 8 y cuyo producto sea 15

Número x

$x(8-x)=15$

$x=5$

Un número es 5

El otro número es 3

50. Se ha mezclado aceite de girasol de 0,8 €/L el litro con aceite de oliva de 3,5 €/L. Si se han obtenido 300 litros de mezcla a 2,6 €/L, calcula cuántos litros se han utilizado de cada clase de aceite.

	Girasol	Oliva	Mezcla
Capacidad (L)	x	$300-x$	$300-x$
Precio (€/L)	0,8	3,5	3,5
Dinero (€)	$0{,}8x+3{,}5(300-x)=300\cdot 2{,}6$		

$0{,}8x+3{,}5(300-x)=300\cdot 2{,}6\Rightarrow x=100$

Aceite de girasol: 100 L

Aceite de oliva: 200 L

51. Dos motos salen juntas de una ciudad para recorrer 560 km a velocidad constante. La segunda moto lleva una velocidad de 10 km/h más que la primera, y tarda una hora menos en hacer el recorrido. Calcula las velocidades de las dos motos.

Tiempo de la 1.ª moto = x

Tiempo de la 2.ª moto = $x - 1$

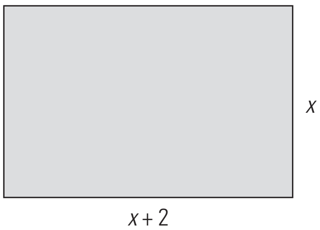
$\frac{560}{x} + 10 = \frac{560}{x-1} \Rightarrow x = 8,\ x = -7$

Velocidad primera moto = 560/8 = 70 km/h

Velocidad segunda moto = 80 km/h

La solución negativa no tiene sentido.

52. Halla las dimensiones de un rectángulo en el que la base es 2 cm mayor que la altura y cuya área sea de 24 cm²



$x(x+2) = 24$

$x = 4,\ x = -6$

Las dimensiones son 4 cm y 6 cm

La solución negativa no tiene sentido.

53. Dos grifos, abiertos a la vez, llenan un depósito en 6 h. El segundo tarda en llenarlo 5 h más que el primero, estando este cerrado. Calcula el tiempo que tardan en llenar el depósito por separado.

Tiempo del primer grifo = x

Tiempo del segundo grifo = $x + 5$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$

$x = 10,\ x = -3$

El primer grifo tarda 10 h

El segundo grifo tarda 15 h

La solución negativa no tiene sentido.

54. En una tienda se compraron unos adornos de porcelana por 629 €. Se rompieron tres y los que quedaron se han vendido a 4 € más de lo que costaron. Si se ha obtenido un beneficio de 85 €, ¿cuántos adornos se compraron?

N.º de adornos = x

$(x-3)\left(\frac{629}{x} + 4\right) = 629 + 85$

$x = 37,\ x = -\frac{51}{4}$

Se han comprado 37 adornos.

La solución negativa no tiene sentido.

Ejercicios y problemas propuestos

1. ECUACIONES DE 1.er Y 2.º GRADO

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

55. $4x^2 - 25 = 0$

$x_1 = -\frac{5}{2},\ x_2 = \frac{5}{2}$

56. $(x-2)(x+3) = 0$

$x_1 = 2,\ x_2 = -3$

57. $x\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{1}{2}$

58. $6x^2 - 5x = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{5}{6}$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

59. $\frac{x-2}{3} - \frac{x-4}{5} = \frac{x+3}{10}$

$x = 5$

60. $x + \frac{1}{6} + \frac{1-4x}{5} = \frac{2x-1}{3}$

$x = \frac{3}{2}$

61. $x(x-3) = 18$

$x_1 = 6,\ x_2 = -3$

62. $\frac{x-6}{5} = \frac{x-5}{4} + \frac{1-x}{6} - \frac{7}{10}$

$x = -5$

63. $\frac{x^2+3}{4} = 1 - \frac{x-1}{8}$

$x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = 1$

64. $3(x-2) + (x-2)x = 2x$

$x_1 = 3,\ x_2 = -2$

65. $\frac{x-2}{3} + x = \frac{x-4}{5} + \frac{5x+14}{10}$

$x = 2$

66. $(x+2)(x-1) = x + 7$

$x_1 = -3,\ x_2 = 3$

67. $\frac{x+1}{2} + x + \frac{1-x}{5} = 2$

$x = 1$

68. $\frac{5(1-x)(x-3)}{4} + 14 = 2(x-3)$

$x_1 = -\frac{13}{5},\ x_2 = 5$

69. $\frac{3x+2}{4} - \frac{2x-1}{6} + x = \frac{3x-1}{2} + \frac{3}{4}$

$x = 5$

70. $\frac{3x+2}{4} - (x-3) = \frac{x-1}{3} + \frac{2x-5}{4}$

$x = 4$

71. $(x+2)(x-2) = (x+3)^2 - 7$

$x = -1$

72. $\frac{x^2+1}{5} - \frac{x^2+x}{10} = \frac{5x-3}{10}$

$x_1 = 1,\ x_2 = 5$

73. $4(x-2)(x-1)+3(x^2-1)=9$

$x_1=-\frac{2}{7},\ x_2=2$

74. $2x(x+2)-(4-x)(x-1)=7x(x-1)$

$x_1=-\frac{1}{7},\ x_2=2$

2. ECUACIONES BICUADRADAS, RACIONALES E IRRACIONALES

Resuelve las siguientes ecuaciones:

75. $x^6-9x^3+8=0$

$x_1=1,\ x_2=2$

76. $x+\frac{12}{x}=7$

$x_1=3,\ x_2=4$

77. $x^4-8x^2-9=0$

$x_1=-3,\ x_2=3$

78. $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}=\frac{1}{2}$

$x_1=-5,\ x_2=2$

79. $x=-2+\sqrt{16+x^2}$

$x=3$

80. $x^4-25x^2+144=0$

$x_1=-4,\ x_2=4,\ x_3=-3,\ x_4=3$

81. $\frac{1}{x-3}=\frac{11}{2}-x$

$x_1=\frac{7}{2},\ x_2=5$

82. $x+\sqrt{x}=6$

$x=4$

83. $2x^4-3x^2-20=0$

$x_1=-2,\ x_2=2$

84. $\sqrt{9-x}=x-3$

$x=5$

85. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}=\frac{10}{3}$

$x_1=-\frac{8}{5},\ x_2=-\frac{1}{2}$

86. $\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{6}{x^2-9}$

$x=1$

87. $11+\sqrt{x^2-5x+1}=2x$

$x=8$

88. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=-\frac{4}{3(x-3)}$

$x_1=-\frac{9}{2},\ x_2=1$

89. $9x^4-5x^2-4=0$

$x_1=-1,\ x_2=1$

90. $\sqrt{x+1}-\sqrt{7x+4}=-3$

$x=3$

91. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{3}{2}$

$x_1=\frac{4}{3},\ x_2=3$

92. $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{8}{x^2-1}$

$x_1=-3,\ x_2=2$

93. $x^6-28x^3+27=0$

$x_1=1,\ x_2=3$

94. $\frac{x+2}{x-1}-\frac{4-x}{2x}=\frac{3}{2}$

$x=-2$

95. $36x^4-13x^2+1=0$

$x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=\frac{1}{3},\ x_3=-\frac{1}{2},\ x_4=\frac{1}{2}$

96. $\sqrt{5x-4}+\sqrt{2x+1}=7$

$x=4$

97. $2x+\sqrt{x^2-6x+2}=1$

$x_1=-1,\ x_2=\frac{1}{3}$

98. $\frac{x}{x+1}+\frac{4}{9}=\frac{x}{x+4}$

$x_1=-\frac{16}{7},\ x_2=\frac{1}{2}$

99. $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x}=-2$

$x=-1$

100. $\sqrt{5x^2+3x-4}=4x+24$

$x=-4$

101. $x^4-13x^2+36=0$

$x_1=-3,\ x_2=3,\ x_3=-2,\ x_4=2$

102. $\frac{x-1}{x}-\frac{3x}{3x-2}=\frac{3}{4}$

$x_1=-2,\ x_2=\frac{4}{9}$

103. $6\sqrt{x}=x\sqrt{x+5}$

$x_1=0,\ x_2=4$

3. ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

104. $4^x+2^5=3\cdot 2^{x+2}$

$x_1=2,\ x_2=3$

105. $2^{5-x^2}=\frac{1}{16}$

$x_1=-3,\ x_2=3$

106. $5^{2x-2}-6\cdot 5^x+125=0$

$x_1=2,\ x_2=3$

107. $2^x+2^{x+1}=3^x+3^{x-1}$

$x=2$

108. $1+9^x=3^{x+1}+3^{x-1}$

$x_1=-1,\ x_2=1$

109. $2^x+\frac{1}{2^{x-2}}=5$

$x_1=0,\ x_2=2$

110. $6^{2x} = 1\,296$

$x = 2$

111. $3^x + \dfrac{1}{3^{x-1}} = 4$

$x_1 = 0,\ x_2 = 1$

112. $5^{1-x} + 5^x = 6$

$x_1 = 0,\ x_2 = 1$

113. $3^x \cdot 9^x = 9^3$

$x = 2$

114. $2^{2x+5} - 5 \cdot 4^{2x-1} + 3\,125 = 53$

$x = 3$

115. $2^{x-2} + 28 = 2^{x+2} - 2$

$x = 3$

116. $3^{x-4} + 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 163$

$x = 4$

117. $9^x = 3^x + 6$

$x = 1$

118. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$

$x = 2$

119. $2^x = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}$

$x = \dfrac{\log 3}{\log 6} = 0{,}6131$

120. $5^{x^2+2x} = 1$

$x_1 = -2,\ x_2 = 0$

121. $e^{x-1} = 2^{x+1}$

$x = \dfrac{1 + \ln 2}{1 - \ln 2} = 5{,}5178$

122. $3^{3x-2} = 9^{x^2-2}$

$x_1 = -\dfrac{1}{2},\ x_2 = 2$

123. $\log (x^2 + 3x + 40) = 1 + \log (3x - 1)$

$x_1 = 2,\ x_2 = 25$

124. $\log x^2 - \log 3 = \log x + \log 5$

$x = 15$

125. $\log x + \log (3x + 5) = 2$

$x = 5$

126. $2 \log x - \log (x + 24) = 2$

$x = 120$

127. $2 \ln x + \ln (x^2 + 2) = \ln 3$

$x = 1$

128. $\log x + \log 4 = \log (x + 1) + \log 3$

$x = 3$

129. $2 \log x + \log x^4 = 6$

$x = 10$

130. $2 \ln x - \ln 5x = \ln 2$

$x = 10$

131. $2 \log x = 4 + \log \dfrac{x}{10}$

$x = 1\,000$

132. $3 \log 2x - 2 \log x = \log (4x + 1)$

$x = \dfrac{1}{4}$

133. $3 + \log \dfrac{3x}{2} = 2 \log x$

$x = 1\,500$

134. $\log (x - 2) = 1 + \log 2 - \log (x - 3)$

$x = 7$

135. $\log x = 1 - \log (7 - x)$

$x_1 = 2,\ x_2 = 5$

136. $3 \log (6 - x) - \log (72 - x^3) = 0$

$x_1 = 2,\ x_2 = 4$

137. $\log \sqrt{3x + 1} + \log 5 = 1 + \log \sqrt{2x - 3}$

$x = \dfrac{13}{5}$

138. $(x^2 - 5x + 5) \log 5 + \log 20 = \log 4$

$x_1 = 2,\ x_2 = 3$

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

139. Halla dos números tales que su suma sea 10 y la diferencia de sus cuadrados sea 60

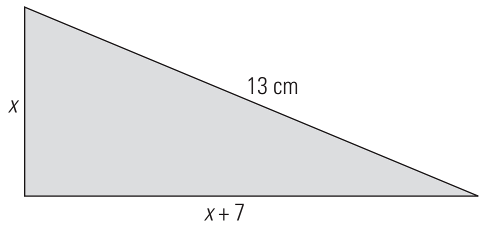
Número = x

$x^2 - (10 - x^2) = 60$

$x = 8$

Los números son 2 y 8

140. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm. Si el cateto mayor mide 7 cm más que el cateto menor, ¿cuál es la longitud de los catetos?



$x^2 + (x + 7)^2 = 13^2$

$x = 5,\ x = -12$

Los catetos miden 5 cm y 12 cm

La solución negativa no es válida.

141. Se mezcla avena de 0,4 €/kg y centeno de 0,25 €/kg para hacer pienso para vacas. Si se hacen 5 000 kg de pienso a 0,31 €/kg, ¿cuántos kilos de avena y de centeno se han utilizado?

	Avena	Centeno	Mezcla
Peso (kg)	x	5 000 – x	5 000
Precio (€/kg)	0,4	0,25	0,31
Dinero (€)	$0{,}4x + 0{,}25(5\,000 - x) = 5\,000 \cdot 0{,}31$		

$0{,}4x + 0{,}25(5\,000 - x) = 5\,000 \cdot 0{,}31$

$x = 2\,000$

Avena: 2 000 kg

Centeno: 3 000 kg

142. Un coche y una moto salen a la vez de dos ciudades, A y B, el uno hacia el otro por la misma carretera. La velocidad del coche es de 100 km/h y la de la moto es de 70 km/h. Si la distancia entre las ciudades es de 340 km, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

Tiempo = x

$100x + 70x = 340$

$x = 2$

Tardan 2 h en encontrarse.

143. Dos obreros, trabajando juntos, tardan 12 días en realizar una obra. Se sabe que el segundo obrero, trabajando solo, tardaría 10 días más que el primero. Calcula el tiempo que emplean en realizar dicha obra por separado.

Tiempo que tarda el primer obrero: x

Tiempo que tarda el segundo obrero: $x + 10$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12}$

$x = 20$, $x = -6$

El primer obrero tarda 20 días y el segundo 30 días.

La solución negativa no tiene sentido.

144. Varios amigos han preparado un viaje de vacaciones que cuesta 4 000 €. Un amigo tiene problemas y los demás deciden pagar 200 € más cada uno. Calcula el número de amigos que son.

N.º de amigos = x

$\frac{4\,000}{x} + 200 = \frac{4\,000}{x-1}$

$x = 5$, $x = -4$

El número de amigos es 5

La solución negativa no tiene sentido.

145. La edad de un padre es seis veces la del hijo. Si dentro de dos años la edad del padre será cinco veces la del hijo, calcula la edad de cada uno.

	Hoy	Dentro de 2 años
Edad del hijo	x	$x + 2$
Edad del padre	$6x$	$6x + 2$

$6x + 2 = 5(x + 2) \Rightarrow x = 8$

La edad del hijo: 8 años.

La edad del padre: 48 años.

PARA AMPLIAR

146. $\frac{9}{x+2} + \frac{9}{x^2+4x+4} = 10$

$x_1 = -\frac{13}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

147. $\sqrt[3]{4-x} = 2$

$x = -4$

148. $3^{x^2-4} + 3^{x^2-5} = 162 \cdot 2^{x^2-8}$

$x_1 = -3$, $x_2 = 3$

149. $\frac{x}{x+3} = \frac{3}{2} - \frac{4}{x+1}$

$x_1 = -5$, $x_2 = 3$

150. $\log \sqrt[4]{x^3} - \log \sqrt{10} = \frac{1}{4}$

$x = 10$

151. $2^{x-1} + \frac{1}{2^{x-3}} = 5$

$x_1 = 1$, $x_2 = 3$

152. $\frac{x+1}{x-3} + \frac{x-3}{x+1} = \frac{26}{5}$

$x_1 = -2$, $x_2 = 4$

153. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = 5$

$x = 7$

154. $3^{1-x} + 3^{2-x} = \frac{4}{27}$

$x = 4$

155. $\frac{x+3}{x-5} + 2 = -\frac{2}{x-3}$

$x_1 = \frac{11}{3}$, $x_2 = 1$

156. $x^2 - \frac{4x^2}{x^2+4x+4} = 0$

$x_1 = -4$, $x_2 = 0$

157. $4^x - 2^{x-1} - 14 = 0$

$x = 2$

158. $\frac{x-3}{1-x^2} - \frac{x+2}{1+x} = \frac{1}{1-x}$

$x_1 = -3$, $x_2 = 2$

159. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+2x+1} = \frac{4x+5}{4x}$

$x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = 1$

160. $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$

$x = 2$

161. $\sqrt{x^2-3x} + \sqrt{x^2-x+4} = 4$

$x_1 = -1$, $x_2 = 3$

162. $\frac{x}{\sqrt{x}} = x - \sqrt{x}$

$x = 4$

163. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} = \frac{5}{\sqrt{x+2}}$

$x = \frac{7}{9}$

164. $4^x = 3 \cdot 2^{x+1} - 8$

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$

165. $\frac{2\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} = \frac{3+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}$

$x = \frac{9}{7}$

166. $\sqrt{4+\sqrt{3x^2-2}} = x$

$x = 3$

167. $2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 504$

$x = 5$

168. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2}$

$x = \frac{\log 7 - \log 13 + \log 9}{\log 3 - \log 2} = 3{,}8923$

169. $\log\sqrt{7x+3}+\log\sqrt{4x+5}=\dfrac{1}{2}+\log 3$

$x = 1$

170. $\log\sqrt[3]{x}-\log\sqrt[3]{4}=\dfrac{1}{3}$

$x = 40$

171. $\dfrac{\log(10-x^2)}{\log(5-2x)}=2$

$x = 1$

PROBLEMAS

172. Halla las raíces de una ecuación de segundo grado, sabiendo que su suma es 10 y su producto es 21

Suma de las raíces: $S = 10$
Producto de las raíces: $P = 21$
$x^2 - 10x + 21 = 0$
$x_1 = 7,\ x_2 = 3$

173. Halla un número tal que al elevarlo al cuadrado sea 210 unidades mayor.

Número = x
$x + 210 = x^2$
$x = 15,\ x = -14$
El número es 15 o -14

174. Halla un número que exceda a su raíz cuadrada en 156 unidades.

Número = x
$x = \sqrt{x} + 156$
$x = 169$
El número es 169

175. Halla dos números enteros sabiendo que el mayor excede en 6 unidades al menor, y la suma de sus inversos es 4/9

Número menor = x
Número mayor = $x + 6$
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{4}{9}$
$x=-\dfrac{9}{2},\ x=3$
Los números son 3 y 9
La solución $-\dfrac{9}{2}$ no se acepta porque no es entera.

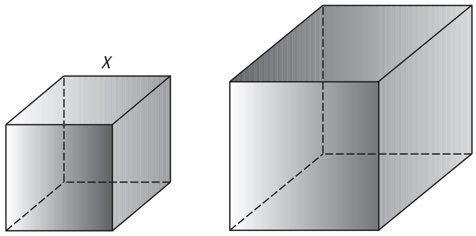
176. Halla dos números pares consecutivos cuyo producto exceda a su suma en 142 unidades.

Primer número = $2x$
Segundo número = $2x + 2$
$2x(2x+2) = 2x + 2x + 2 + 142$
$x = -6,\ x = 6$
Los números son 12, 14 y -12, -10

177. El dividendo de una división es 136 y el cociente y el resto son iguales. Si el divisor es el doble que el cociente, ¿cuál es el divisor?

Cociente = x
Resto = x
Divisor = $2x$
$2x \cdot x + x = 136$
$x=-\dfrac{17}{2},\ x=8$
El divisor es 16

178. Si se aumenta 2 cm la longitud de cada una de las aristas de un cubo, el volumen del mismo aumenta 218 cm³. Calcula la longitud de la arista.

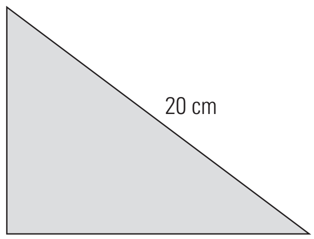


Arista = x
$(x+2)^3 = x^3 + 218$
$x = 5,\ x = -7$
La arista mide 5 cm
La solución negativa no tiene sentido.

179. Una finca rectangular tiene una superficie de 4 000 m². Si un lado de la finca tiene 30 m más que el otro, calcula las dimensiones de la finca.

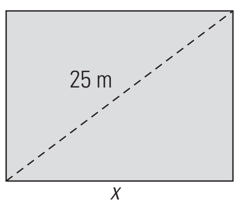
$x(x+30) = 4\,000$
$x = 50,\ x = -80$
Las dimensiones son 50 m por 80 m
La solución negativa no tiene sentido.

180. El perímetro de un triángulo rectángulo mide 48 cm, y su hipotenusa mide 20 cm. Calcula la longitud de los catetos.



$x^2 + (48 - 20 - x)^2 = 20^2$
$x = 12,\ x = 16$
Los catetos miden 12 cm y 16 cm

181. La diagonal de un rectángulo mide 25 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo, sabiendo que la altura es 4/3 de la base.



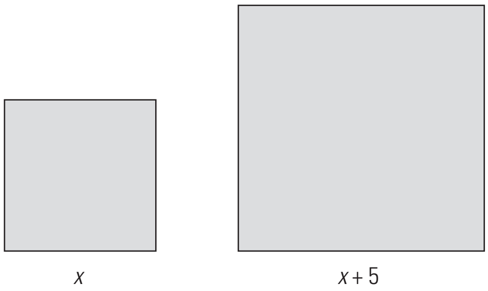
$$x^2+\left(\frac{4x}{3}\right)^2=25^2$$

$x = 15$, $x = -15$

Las dimensiones son 15 cm y 20 cm

La solución negativa no tiene sentido.

182. Se tiene un cuadrado cuyo lado es 5 cm mayor que el lado de otro cuadrado. Si entre los dos cuadrados se tienen 233 cm², calcula el área de cada uno de ellos.

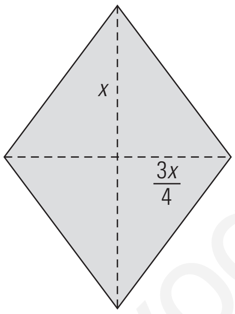


$x^2 + (x+5)^2 = 233$

$x = 8$, $x = -13$

Las áreas son de 64 cm² y 169 cm²

183. Calcula la longitud de las diagonales de un rombo de 96 cm² de área, sabiendo que la diagonal menor es 3/4 de la diagonal mayor.

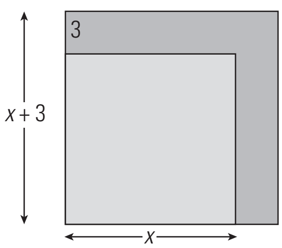


$$\frac{x\cdot\frac{3x}{4}}{2}=96$$

$x = -16$, $x = 16$

Las diagonales miden 12 cm y 16 cm

184. Si se aumenta en tres centímetros el lado de un cuadrado, el área aumenta en 81 cm². Calcula la longitud del lado del cuadrado inicial.

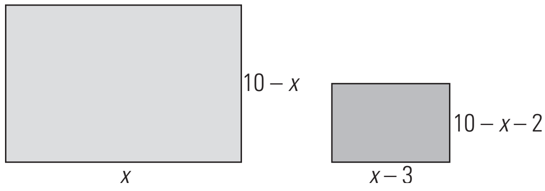


$(x+3)^2 = x^2 + 81$

$x = 12$

La longitud del cuadrado inicial es 12 cm

185. Se tiene un rectángulo de 20 cm de perímetro. Si se reduce en 3 cm la base y en 2 cm la altura, el área disminuye en 18 cm². Calcula las dimensiones del rectángulo.



$x(10-x) = (x-3)(10-x-2) + 18$

$x = 6$

Las dimensiones del rectángulo son 6 cm de base y 4 cm de altura.

186. Se funde plata de ley 0,7 con plata de ley 0,9 para conseguir una aleación de 100 g de una ley 0,74. Calcula la cantidad de cada tipo de plata que se ha usado.

	Plata	Plata	Aleación
Peso (g)	x	$100 - x$	100
Ley	0,7	0,9	0,74
	$0{,}7x + 0{,}9(100-x) = 100\cdot 0{,}74$		

$0{,}7x + 0{,}9(100-x) = 100\cdot 0{,}74$

$x = 80$

Plata de ley 0,7 pesa 80 g

Plata de ley 0,9 pesa 20 g

187. Se mezcla leche del tipo A, con un 4% de grasa, con otra leche del tipo B, con un 8% de materia grasa. Si se obtienen 40 L de mezcla con un 6% de materia grasa, ¿cuántos litros de cada tipo de leche se han utilizado?

	Leche A	Leche B	Mezcla
Capacidad (L)	x	$40 - x$	40
Grasa	0,04	0,08	0,06
	$0{,}04x + 0{,}08(40-x) = 40\cdot 0{,}06$		

$0{,}04x + 0{,}08(40-x) = 40\cdot 0{,}06$

$x = 20$

Leche A: 20 L

Leche B: 20 L

188. A las nueve de la mañana, Alba sale en bicicleta de una población A, a una velocidad de 12 km/h. Dos horas después, sale en su búsqueda Pablo con una motocicleta a 32 km/h. ¿A qué hora alcanzará Pablo a Alba?

Tiempo que emplea Alba = x

Tiempo que emplea Pablo = $x - 2$

$12x = 32(x-2)$

$$x=\frac{16}{5}=3{,}2$$

Se emplea 3 horas y 12 minutos, luego Pablo alcanza a Alba a las 12h 12 min

189. Dos autobuses de línea salen a la misma hora de dos ciudades, A y B, separadas por 400 km. Los dos autobuses salen por la misma carretera el uno hacia el otro. Si el autobús que sale de A lleva una velocidad de 90 km/h y el que sale de B lleva una velocidad de 110 km/h, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

Tiempo que tardan en encontrarse = x

$90x + 110x = 400$

$x = 2$

Tardan 2 horas en encontrarse.

190. Un grifo B tarda en llenar un depósito 4 h más que otro grifo A. Si a la vez llenan el depósito en 1 h 30 min, ¿cuánto tardarán en llenar el depósito por separado?

Tiempo que tarda en llenar el depósito el grifo A = x

Tiempo que tarda en llenar el depósito el grifo B = x

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{2}{3}$$

$x = -3,\ x = 2$

El grifo A tarda 2 horas, y el B, 6 horas.

La solución negativa no tiene sentido.

191. Dos desagües abiertos a la vez vacían un depósito en 15 h. Si se abre solo uno de ellos, tardaría en vaciar el depósito 16 h menos que el otro. Calcula el tiempo que tardan en vaciar el depósito los dos desagües por separado.

Tiempo que tarda en vaciar el depósito el primer desagüe = x

Tiempo que tarda en vaciar el depósito el segundo desagüe = $x - 16$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{15}$$

$x = 40,\ x = 6$

Tiempo que tarda en vaciar el depósito el primer desagüe = 40 h

Tiempo que tarda en vaciar el depósito el segundo desagüe = 24 h

La solución $x = 6$ no tiene sentido.

192. Se han comprado por 37 € unas zapatillas de deporte y un balón que costaba 50 €. Si en las zapatillas han rebajado el 20%, y en el balón, el 30%, ¿cuál era el precio inicial de cada producto?

Precio de las zapatillas = x

Precio del balón = $50 - x$

$0{,}8x + 0{,}7(50 - x) = 37$

$x = 20$

El precio de las zapatillas es 20 €, y el del balón, 30 €

193. Se han pagado 450 € por un lector de DVD y una tarjeta de red que ahora se deben cambiar. Si en la venta se pierde el 30% en el lector de DVD, y el 60% en la tarjeta, y se han obtenido 288 €, ¿cuál era el precio inicial de los dos artículos?

Precio del DVD = x

Precio de la tarjeta = $450 - x$

$0{,}7x + 0{,}4(450 - x) = 288$

$x = 360$

El precio del DVD es 360 €, y el de la tarjeta, 90 €

194. Un grupo de estudiantes alquila un piso por 500 € al mes. Si aumentase el grupo en uno más, se ahorrarían 25 € cada uno. ¿Cuántos estudiantes son?

Número de estudiantes = x

$$\frac{500}{x} = \frac{50}{x+1} + 25$$

$x = -5,\ x = 4$

Son 4 estudiantes.

La solución negativa no tiene sentido.

195. Pablo tiene 15 años, y su madre, 40. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la edad de la madre sea el doble que la de Pablo?

	Hoy	Dentro de x años
Pablo	15	$15 + x$
Madre	40	$40 + x$

$40 + x = 2(15 + x)$

$x = 10$

Dentro de 10 años.

196. Un padre tiene el quíntuplo de la edad de su hijo. Si el padre tuviera 20 años menos y el hijo 8 años más, la edad del padre sería el doble que la del hijo. Calcula la edad actual de cada uno.

	Hoy	
Edad del hijo	x	$x + 8$
Edad del padre	$5x$	$5x - 20$

$2(x + 8) = 5x - 20$

$x = 12$

El hijo tiene 12 años, y su padre, 60

197. La edad de una madre y un hijo suman 60 años, y dentro de dos años la edad de la madre será el triple de la del hijo. Calcula la edad actual de cada uno.

	Hoy	Dentro de 2 años
Edad del hijo	x	$x + 2$
Edad de la madre	$60 - x$	$60 - x + 2$

$3(x + 2) = 60 - x + 2$

$x = 14$

El hijo tiene 14 años, y su madre, 46

198. Se tiene un cultivo con células que se reproducen por bipartición cada hora. Si se tienen inicialmente 5 células, ¿cuántas horas han de transcurrir para que en el cultivo haya 5 120 células?

Tiempo = x

$5 \cdot 2^x = 5\,120$

$x = 10$

Deben transcurrir 10 horas.

199. Una población de peces se reproduce según la fórmula $N = 40 \cdot 3^t$, donde N es el número de peces y t es el número de años. ¿Cuántos años deben transcurrir para que haya más de 500 000 peces?

Tiempo = t

$40 \cdot 3^t = 500\,000$

$t = 8{,}59$ años.

Para que haya más de 500 000 deberán pasar 8,59 años.

PARA PROFUNDIZAR

200. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}=\frac{5}{2}$$

$x_1 = 3$, $x_2 = -2$ (no es válida)

201. Resuelve la siguiente ecuación:

$$5\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}=6$$

(Haz el cambio de variable $z=\sqrt[3]{x}$)

$x_1 = 8$, $x_2 = 27$

202. Halla un número tal que al sumarle 6 unidades sea un cuadrado perfecto, y al restarle 6 unidades su resultado sea la raíz cuadrada positiva del cuadrado perfecto anterior.

Número $= x$

$x - 6 = \sqrt{x+6}$

$x = 10$

203. Halla dos números enteros consecutivos tales que la diferencia de sus cubos sea 61

Primer número $= x$

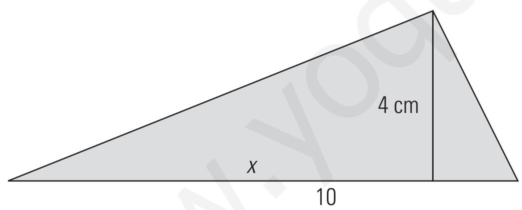
Segundo número $= x + 1$

$(x+1)^3 - x^3 = 61$

$x = -5$, $x = 4$

Los números son 4 y 5, o bien -4 y -5

204. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 10 cm, y su altura correspondiente mide 4 cm. ¿Cuánto miden los segmentos que el pie de dicha altura determina sobre la hipotenusa?

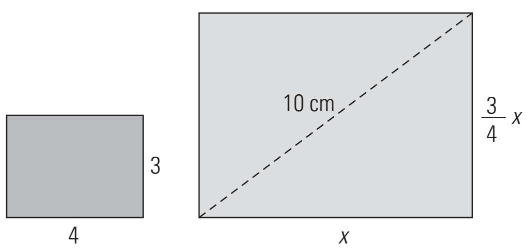


$x(10-x) = 4^2$

$x = 8$, $x = 2$

Los segmentos miden 8 cm y 2 cm

205. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Calcula las dimensiones de dicho rectángulo, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 3 cm y 4 cm



$$x^2+\left(\frac{3x}{4}\right)^2=10^2$$

$x = -8$, $x = 8$

Las dimensiones son 8 cm y 6 cm, respectivamente.

206. Se alean dos lingotes de oro. Uno de ellos con una ley 0,75, y otro con una ley 0,6. Si se han conseguido 500 gramos de aleación con una ley 0,69, ¿cuántos gramos pesaba cada lingote de oro?

	Oro	Oro	Aleación
Peso (g)	x	$500 - x$	500
Ley	0,75	0,6	0,69
	$0{,}75x + (500-x)0{,}6 = 500 \cdot 0{,}69$		

$0{,}75x + (500-x)0{,}6 = 500 \cdot 0{,}69$

$x = 300$

Oro de ley 0,75 pesa 300 g

Oro de ley 0,6 pesa 200 g

207. Una moto y un coche salen a la misma hora de la ciudad A en dirección a la ciudad B, que dista 80 km. La velocidad de la moto es 4/5 de la velocidad del coche, y llega 12 minutos más tarde que este. Calcula las velocidades de los dos vehículos.

Tiempo que tarda el coche $= x$

Tiempo que tarda la moto $= x + 0{,}2$

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{80}{x}=\frac{80}{x+0{,}2}$$

$x=\frac{4}{5}=0{,}8$ h $= 48$ min

El coche lleva una velocidad de 100 km/h, y la moto, de 80 km/h

208. Un alumno ha obtenido una nota final de 6,4 puntos en matemáticas. Los exámenes valen el 80% de la nota, y los trabajos, el 20%. Sabiendo que entre exámenes y trabajos suma 14 puntos, ¿qué nota sacó en cada apartado?

Nota de exámenes $= x$

Nota de trabajos $= 14 - x$

$0{,}8x + 0{,}2(14 - x) = 6{,}4$

$x = 6$

En los exámenes sacó un 6, y en los trabajos, un 8

209. Un padre tiene 45 años, y sus hijos, 10 y 8. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea igual a la suma de las edades de los hijos?

	Hoy	Dentro de *x* años
Edad del padre	45	$45 + x$
Edad del 1.er hijo	10	$10 + x$
Edad del 2.º hijo	8	$8 + x$

$45 + x = 10 + x + 8 + x$

$x = 27$

Deben transcurrir 27 años.

210. Una sustancia radiactiva tiene un período de semidesintegración de 10 años, es decir, que cada 10 años la masa de la sustancia se reduce a la mitad. Si se tienen 400 g de dicha sustancia, ¿en cuánto tiempo se transformarán en 25 g?

Período $= x$

$$400\left(\frac{1}{2}\right)^x=25$$

$x = 4$

Tienen que transcurrir $4 \cdot 10 = 40$ años.

211. Se ha comprado un ordenador por 1 200 €, y se sabe que su valor se deprecia un 20% cada año. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el ordenador valga menos de 400 €?

Tiempo = x

$1\,200 \cdot 0{,}8^x = 400$

$x = 4{,}92$

Tienen que transcurrir 4,92 años.

Aplica tus competencias

212. Unos solares cuestan 60 000 € y hay una inflación constante del 10%. ¿Cuántos años deberán transcurrir para que el terreno valga 87 846 €?

N.º de años = x

$60\,000 \cdot 1{,}1^x = 87\,846$

$x = 4$

Transcurrirán 4 años.

Comprueba lo que sabes

1. Escribe la expresión de la descomposición factorial del trinomio de 2.° grado. Pon un ejemplo.

La descomposición factorial del trinomio de 2.º grado es:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

donde x_1 y x_2 son raíces de la ecuación

$ax^2 + bx + c = 0$

Ejemplo:

Halla la descomposición factorial de

$x^2 - 2x - 15$

En primer lugar, se hallan las raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 15 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

La descomposición factorial es:

$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x+1}{4} - \dfrac{3x-2}{12} = \dfrac{x-1}{3} - \dfrac{1}{4}$

b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

a) $x = 3$

b) Haciendo $z = x^2$

$z^2 - 10z + 9 = 0 \Rightarrow z = 1,\ z = 9$

Si $z = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$

Si $z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3,\ x = 3$

Las soluciones son:

$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3$

3. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{x+3} + \frac{x-1}{x+2} = -\frac{5}{2}$$

m.c.m. $(x+3,\ x+2,\ 2) = 2(x+3)(x+2)$

$x \cdot 2(x+2) + (x-1) \cdot 2(x+3) = -5(x+3)(x+2)$

$4x^2 + 8x - 6 = -5x^2 - 25x - 30$

$9x^2 + 33x + 24 = 0$

$x = -\dfrac{8}{3},\ x = -1$

4. Resuelve la siguiente ecuación:

$$4 + \sqrt{x+2} = x$$

$4 + \sqrt{x+2} = x$

$\sqrt{x+2} = x - 4$

$x + 2 = x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 9x + 14 = 0$

$x = 7,\ x = 2$

Comprobación:

Si $x = 7 \Rightarrow \left.\begin{cases} 4+\sqrt{7+2} = 4+3 = 7 \\ x = 7 \end{cases}\right\} \Rightarrow 7 = 7$

Si $x = 2 \Rightarrow \left.\begin{cases} 4+\sqrt{2+2} = 4+2 = 6 \\ x = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow 6 \neq 2$

La solución es $x = 7$

5. Resuelve la siguiente ecuación:

$$9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

$3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$

Haciendo $z = 3^x$

$z^2 - 6z - 27 = 0$

$z = 9,\ z = -3$

Si $z = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

Si $z = -3 \Rightarrow 3^x \neq -3$ (3^x no puede ser negativo)

La solución es: $x = 2$

6. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\log(33 - x) = \log x - 1$$

$\log(33 - x) - \log x = \log \dfrac{1}{10}$

$\log \dfrac{33-x}{x} = \log \dfrac{1}{10}$

$\dfrac{33-x}{x} = \dfrac{1}{10}$

$330 - 10x = x \Rightarrow x = 30$

7. María tiene 12 años, y su madre, 40. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la edad de la madre sea el triple que la de María?

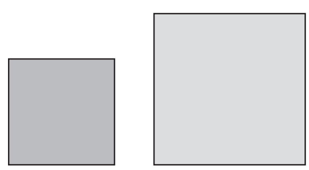
	Hoy	Dentro de x años
Edad de María	12	$12 + x$
Edad de la madre	40	$40 + x$

$3(12 + x) = 40 + x$

$x = 2$

Tienen que transcurrir 2 años.

8. Se tiene un cuadrado cuyo lado es 3 cm mayor que el lado de otro cuadrado. Si entre los dos cuadrados tienen 149 cm² de área, ¿cuál es el área de cada uno de ellos?



x $\qquad$ $x + 3$

$x^2 + (x+3)^2 = 149$

$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 149$

$2x^2 + 6x - 140 = 0$

$x = 7,\ x = -10$

Las áreas son 49 cm² y 100 cm²

WINDOWS/LINUX

PRACTICA

219. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{x-2}{2}-\frac{x+1}{6}+\frac{7}{3}=x+\frac{3}{4}$$

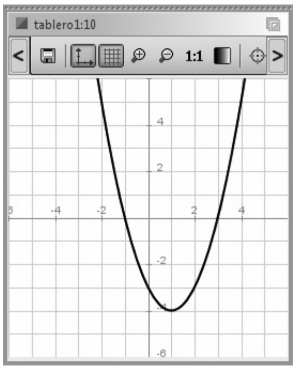
$x=\frac{5}{8}$

220. Resuelve la siguiente ecuación:

$$x^2-2x-3=0$$

Haz la interpretación gráfica para comprobarlo.

$x_1=3,\ x_2=-1$

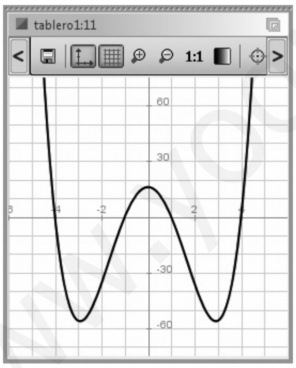


221. Resuelve la siguiente ecuación:

$$x^4-17x^2+16=0$$

Haz la interpretación gráfica para comprobarlo.

$x_1=-4,\ x_2=4,\ x_3=-1,\ x_4=1$

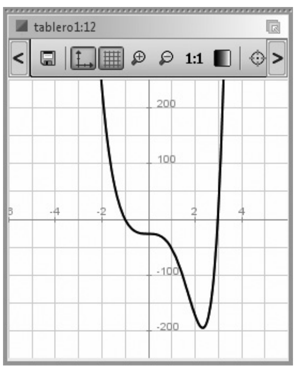


222. Resuelve la siguiente ecuación:

$$x^6-26x^3-27=0$$

Haz la interpretación gráfica para comprobarlo.

$x_1=-1,\ x_2=3$



223. Resuelve la ecuación:

$$\frac{x}{x+3}+\frac{x-2}{x-1}=1$$

$x_1=-1,\ x_2=3$

224. Resuelve la ecuación: $\sqrt{x-1}-x+7=0$

$x=10$

225. Resuelve la ecuación: $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=7$

$x=4$

226. Resuelve la ecuación: $2^{x+3}+2^x=72$

$x=3$

227. Resuelve la ecuación: log (22 – x) = log $x-1$

$x=20$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

228. Halla un número que exceda a su raíz cuadrada en 156 unidades.

Número = x

$x=\sqrt{x}+156$

$x=169$

El número es 169

229. En un triángulo rectángulo uno de los catetos mide 3 cm más que el otro, y la hipotenusa mide 3 cm más que el cateto mayor. Calcula la longitud de los tres lados.

Longitud del cateto menor: x

Longitud del cateto mayor: $x+3$

Longitud de la hipotenusa: $x+3+3=x+6$

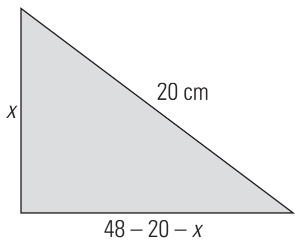
$x^2+(x+3)^2=(x+6)^2$

$x_1=9,\ x_2=-3$

Si la longitud del cateto menor es 9 cm, la del cateto mayor es 9 + 3 = 12 cm y la de la hipotenusa es 12 + 3 = 15 cm

La solución $x=-3$ no es válida porque no tiene sentido.

230. El perímetro de un triángulo rectángulo mide 48 cm, y su hipotenusa mide 20 cm. Calcula la longitud de los catetos.



$x^2+(48-20-x)^2=20^2$

$x=12,\ x=16$

Los catetos miden 12 cm y 16 cm

231. Se han pagado 450 € por un lector de DVD y una tarjeta de red que ahora se deben cambiar. Si en la venta se pierde el 30% en el lector de DVD, y el 60% en la tarjeta, y se han obtenido 288 €, ¿cuál era el precio inicial de los dos artículos?

Precio del DVD = x; precio de la tarjeta = $450 - x$

$0{,}7x + 0{,}4(450 - x) = 288$

$x = 360$

El precio del DVD es 360 €, y el de la tarjeta, 90 €

232. Una población de peces se reproduce según la fórmula $N = 40 \cdot 3^t$, donde N es el número de peces y t es el número de años. ¿Cuántos años deben transcurrir para que haya más de 500 000 peces?

Tiempo = t

$40 \cdot 3^t = 500\,000$

$t = 8{,}5867$

Para que haya más de 500 000 peces deberán pasar 8,59 años.

5. Sistemas de ecuaciones

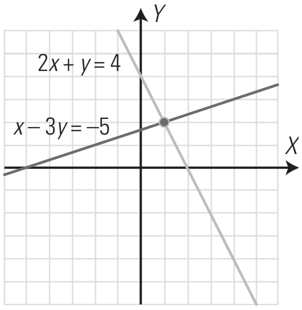
1. Sistemas lineales. Resolución gráfica

PIENSA Y CALCULA

Dado el sistema lineal formado por las ecuaciones del gráfico de la derecha:

a) ¿Cuántas soluciones tiene?

b) Halla la solución o las soluciones.



a) Solo tiene una solución.

b) La solución es $x = 1$, $y = 2$

APLICA LA TEORÍA

1. Resuelve gráficamente el siguiente sistema lineal y clasifícalo según el número de soluciones:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x + \ \ y} &= \mathbf{3} \\ \mathbf{x - 3y} &= \mathbf{5} \end{aligned}\right\}$$

• Primera ecuación:

$2x + y = 3$

$y = 3 - 2x$

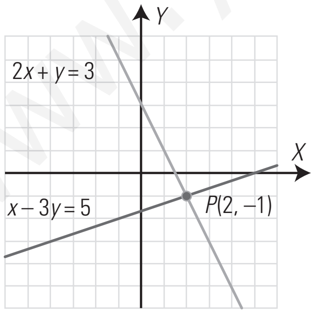
x	y	
0	3	$\Rightarrow A(0, 3)$
1	1	$\Rightarrow B(1, 1)$

• Segunda ecuación:

$x - 3y = 5$

$x = 3y + 5$

x	y	
5	0	$\Rightarrow C(5, 0)$
–4	–3	$\Rightarrow D(-4, -3)$



Solución $x = 2$, $y = -1$

Como tiene una solución, el sistema es compatible determinado.

2. Clasifica mentalmente el siguiente sistema lineal y resuélvelo gráficamente para comprobarlo:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x - 2y} &= \mathbf{3} \\ \mathbf{-x + \ \ y} &= \mathbf{3} \end{aligned}\right\}$$

Los coeficientes de las variables son proporcionales, y no lo son con los términos independientes; por tanto, el sistema es incompatible. Las rectas son paralelas.

$$\frac{2}{-1} = \frac{-2}{1} \neq \frac{3}{3}$$

Representación gráfica:

• Primera ecuación:

$2x - 2y = 3$

$y = x - \dfrac{3}{2}$

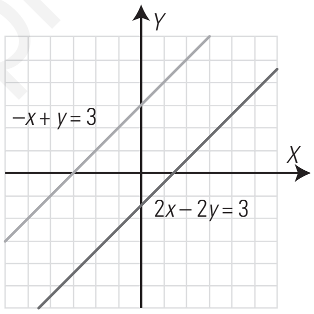
x	y	
0	$-\dfrac{3}{2}$	$\Rightarrow A\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$
5	$\dfrac{7}{2}$	$\Rightarrow B\left(5, -\dfrac{7}{2}\right)$

• Segunda ecuación:

$-x + y = 3$

$y = x + 3$

x	y	
0	3	$\Rightarrow C(0, 3)$
2	5	$\Rightarrow D(2, 5)$



3. Clasifica mentalmente el siguiente sistema lineal y resuélvelo gráficamente para comprobarlo:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x - \ \ y} &= \mathbf{\ \ 1} \\ \mathbf{-4x + 2y} &= \mathbf{-2} \end{aligned}\right\}$$

Los coeficientes de las variables son proporcionales, y lo son con los términos independientes; por tanto, el sistema es compatible indeterminado. Las dos rectas son la misma. Multiplicando la 1.ª ecuación por –2 se obtiene la 2.ª ecuación.

$$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$$

Representación gráfica:

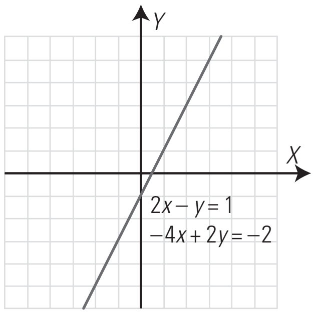
Solo representaremos la 1.ª recta, ya que ambas rectas son la misma.

• Primera ecuación:

$2x - y = 1$

$y = 2x - 1$

x	y	
0	–1	$\Rightarrow A(0, -1)$
2	3	$\Rightarrow B(2, 3)$



4. Clasifica mentalmente el siguiente sistema lineal y resuélvelo gráficamente para comprobarlo:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{3x + 2y = 6} \\ \mathbf{2x - y = 4} \end{aligned}\right\}$$

Los coeficientes de las variables no son proporcionales, por tanto, el sistema es compatible determinado. Las rectas son secantes.

$\frac{3}{2} \neq \frac{2}{-1}$

Representación gráfica:

- Primera ecuación:

$3x + 2y = 6$

$y = 3 - \frac{3x}{2}$

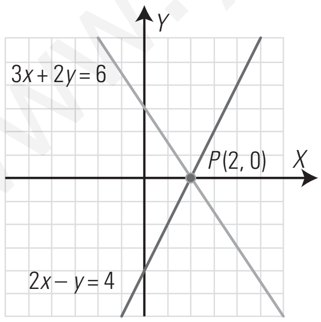
x	y	
0	3	$\Rightarrow A(0,3)$
2	0	$\Rightarrow B(2, 0)$

- Segunda ecuación:

$2x - y = 4$

$y = 2x - 4$

x	y	
0	-4	$\Rightarrow C(0, -4)$
3	2	$\Rightarrow D(3, 2)$



2. Resolución algebraica de sistemas lineales

PIENSA Y CALCULA

Halla mentalmente, sumando y restando, la solución del sistema:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x + y = 5} \\ \mathbf{x - y = 1} \end{aligned}\right\}$$

Sumando se obtiene: $2x = 6 \Rightarrow x = 3$

Restando se obtiene: $2y = 4 \Rightarrow y = 2$

APLICA LA TEORÍA

5. Resuelve por el método más adecuado el siguiente sistema y razona por qué eliges ese método:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x + 3y = 9} \\ \mathbf{y = 16 - 5x} \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por sustitución. Se sustituye el valor de y en la 1.ª ecuación.

Se obtiene: $x = 3$, $y = 1$

6. Resuelve por el método más adecuado el siguiente sistema y razona por qué eliges ese método:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{4x + 3y = -1} \\ \mathbf{5x - 3y = 19} \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por reducción; sumando las dos ecuaciones se elimina la incógnita y

Se obtiene: $x = 2$, $y = -3$

7. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\frac{x}{2} - \frac{x + y}{6} = \frac{11}{6}} \\ \mathbf{\frac{2x - 3y}{5} - \frac{1}{10} = \frac{33}{10}} \end{aligned}\right\}$$

Primero se eliminan los denominadores.

Se obtiene: $x = 4$, $y = -3$

8. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x + 4y = 7} \\ \mathbf{\frac{x}{3} - \frac{2x - 5y}{6} = \frac{5}{4}} \end{aligned}\right\}$$

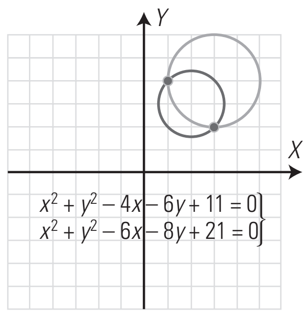
Primero se eliminan los denominadores.

Se obtiene: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$

3. Sistemas de ecuaciones no lineales

PIENSA Y CALCULA

Observando el dibujo, halla mentalmente la solución del sistema formado por las ecuaciones de las dos circunferencias.



Los puntos de corte son: $A(3, 2)$ y $B(1, 4)$. Por tanto, las soluciones son:

$x_1 = 3$, $y_1 = 2$

$x_2 = 1$, $y_2 = 4$

APLICA LA TEORÍA

9. Resuelve el siguiente sistema e interpreta la solución gráficamente:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{y = x^2 + 4x - 1} \\ \mathbf{y = 2x + 2} \end{aligned}\right\}$$

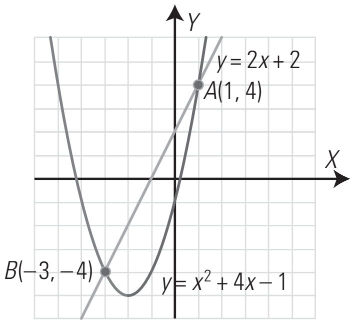
Se resuelve por igualación.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 1$, $y_1 = 4$

$x_2 = -3$, $y_2 = -4$

Interpretación gráfica:



Son una parábola y una recta.

La parábola y la recta son secantes, se cortan en dos puntos:

$A(1, 4)$ y $B(-3, -4)$

10. Resuelve el siguiente sistema formado por dos circunferencias e interpreta gráficamente el resultado:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 2y &= 20 \\ x^2 + y^2 - 12x + 2y &= -12 \end{aligned}\right\}$$

Se restan las dos ecuaciones y se obtiene una ecuación de 1.er grado. Se despeja en esta ecuación una incógnita y se sustituye en la ecuación de una de las circunferencias.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 6,\ y_1 = 4$

$x_2 = 2,\ y_2 = -4$

La interpretación gráfica es que las dos circunferencias son secantes. Se cortan en dos puntos: $A(6, 4)$ y $B(2, -4)$

11. Resuelve el siguiente sistema formado por una hipérbola y una recta e interpreta la solución gráficamente:

$$\left.\begin{aligned} xy &= 6 \\ 3x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

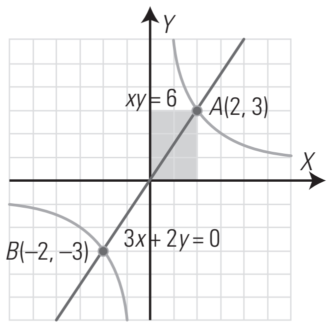
Se resuelve por sustitución, se despeja y de la 2.ª ecuación y se sustituye en la 1.ª ecuación.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 2,\ y_1 = 3$

$x_2 = -2,\ y_2 = -3$

Interpretación gráfica:



Son una hipérbola y una recta.

La hipérbola y la recta son secantes. Se cortan en dos puntos:

$A(2, 3)$ y $B(-2, -3)$

12. Resuelve el siguiente sistema formado por una hipérbola y una circunferencia e interpreta la solución gráficamente:

$$\left.\begin{aligned} xy &= 4 \\ x^2 + y^2 &= 17 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por sustitución, se despeja de la 1.ª ecuación la incógnita y, y se sustituye en la 2.ª ecuación.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 4,\ y_1 = 1$

$x_2 = -4,\ y_2 = -1$

$x_3 = 1,\ y_3 = 4$

$x_4 = -1,\ y_4 = -4$

La interpretación gráfica es que la hipérbola y la circunferencia son secantes. Se cortan en cuatro puntos: $A(4, 1)$, $B(-4, -1)$, $C(1, 4)$ y $D(-1, -4)$

4. SISTEMAS EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICOS

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $2^x = 2$	**b)** $2^x = 1$	**c)** $2^x = \frac{1}{2}$
d) $\log x = 1$	**e)** $\log x = 0$	**f)** $\log x = -1$
a) $x = 1$	b) $x = 0$	c) $x = -1$
d) $x = 10$	e) $x = 1$	f) $x = 0{,}1$

APLICA LA TEORÍA

13. Resuelve el siguiente sistema exponencial:

$$\left.\begin{aligned} 2^x + 3^y &= 7 \\ 2^x - 3^y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Se hacen los cambios de variable:

$2^x = u,\ 3^y = v$

Se obtiene el sistema lineal:

$$\left.\begin{aligned} u + v &= 7 \\ u - v &= 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u = 4, v = 3$$

Deshaciendo el cambio:

$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

$3^y = 3 \Rightarrow y = 1$

14. Halla dos números sabiendo que suman 12 y que su producto es 35

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 12 \\ xy &= 35 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve el sistema por sustitución, despejando la incógnita y de la 1.ª ecuación.

La soluciones del sistema son:

$x_1 = 7,\ y_1 = 5$

$x_2 = 5,\ y_2 = 7$

Por tanto, los números son 5 y 7

15. Resuelve el siguiente sistema logarítmico:

$$\left.\begin{aligned}\log x + \log y &= \log 12\\ \log x - \log y &= \log 3\end{aligned}\right\}$$

Sumando las dos ecuaciones se obtiene:

$2 \log x = \log 12 + \log 3$

$\log x^2 = \log 36$

$x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$

La solución negativa no sirve.

Restando las dos ecuaciones se obtiene:

$2 \log y = \log 12 - \log 3$

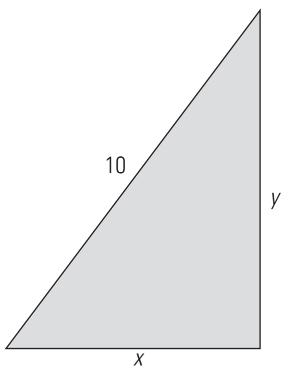
$\log y^2 = \log 4$

$y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

La solución negativa no sirve.

Solución: $x = 6$, $y = 2$

16. Halla los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 10 m y que los catetos son proporcionales a 3 y 4



Se aplica el teorema de Pitágoras.

$$\left.\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 10^2\\ \frac{x}{3} &= \frac{3}{4}\end{aligned}\right\}$$

Se resuelve el sistema por sustitución, despejando la incógnita y de la 2.ª ecuación.

Las soluciones del sistema son:

$x_1 = 6$, $y_1 = 8$

$x_2 = -6$, $y_2 = -8$

Las soluciones negativas no tienen sentido.

Por tanto, los catetos miden 6 m y 8 m

Ejercicios y problemas propuestos

1. SISTEMAS LINEALES. RESOLUCIÓN GRÁFICA

17. Resuelve gráficamente el siguiente sistema lineal y clasifícalo por el número de soluciones:

$$\left.\begin{aligned}3x + y &= 6\\ x - y &= -2\end{aligned}\right\}$$

- Primera ecuación:

$3x + y = 6$

$y = 6 - 3x$

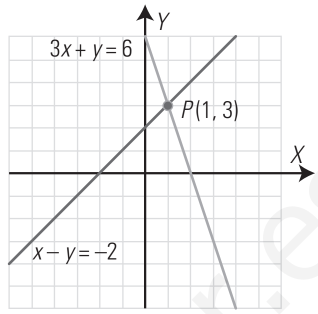
x	y	
0	6	$\Rightarrow A(0, 6)$
2	0	$\Rightarrow B(2, 0)$

- Segunda ecuación:

$x - y = -2$

$y = x + 2$

x	y	
0	2	$\Rightarrow C(0, 2)$
–2	0	$\Rightarrow D(-2, 0)$



Solución $x = 1$, $y = 3$

Como tiene una solución, el sistema es compatible determinado.

18. Clasifica mentalmente el siguiente sistema lineal y resuélvelo gráficamente para comprobarlo:

$$\left.\begin{aligned}x - 2y &= 1\\ -3x + 6y &= -3\end{aligned}\right\}$$

Los coeficientes de las variables son proporcionales, y lo son con los términos independientes; por tanto, el sistema es compatible indeterminado. Las dos rectas son la misma. Multiplicando la 1.ª ecuación por –3 se obtiene la 2.ª ecuación.

$$\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} = \frac{1}{-3}$$

Representación gráfica:

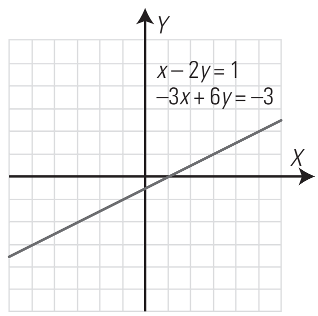
Solo representaremos la 1.ª recta, ya que ambas rectas son la misma.

- Primera ecuación:

$x - 2y = 1$

$x = 2y + 1$

x	y	
1	0	$\Rightarrow A(1, 0)$
5	2	$\Rightarrow B(5, 2)$



19. Clasifica mentalmente el siguiente sistema lineal y resuélvelo gráficamente para comprobarlo:

$$\left.\begin{aligned}3x - 4y &= -13\\ x + 3y &= 0\end{aligned}\right\}$$

Los coeficientes de las variables no son proporcionales; por tanto, el sistema es compatible determinado. Las rectas son secantes.

$\frac{3}{1} \neq \frac{-4}{3}$

Representación gráfica:

- Primera ecuación:

$3x - 4y = -13$

$y = \frac{3x + 13}{4}$

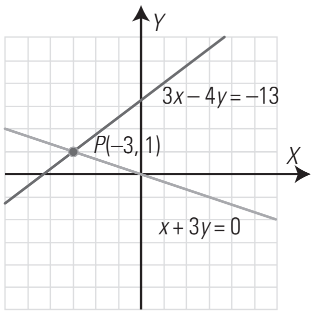
x	y	
1	4	$\Rightarrow A(1, 4)$
-3	1	$\Rightarrow B(-3, 1)$

- Segunda ecuación:

$x + 3y = 0$

$x = -3y$

x	y	
0	0	$\Rightarrow O(0, 0)$
3	-1	$\Rightarrow D(3, -1)$



20. Clasifica mentalmente el siguiente sistema lineal y resuélvelo gráficamente para comprobarlo:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ -2x + 3y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Los coeficientes de las variables son proporcionales, y no lo son con los términos independientes; por tanto, el sistema es incompatible. Las rectas son paralelas.

$\frac{2}{-2} = \frac{-3}{3} \neq \frac{5}{5}$

Representación gráfica:

- Primera ecuación:

$2x - 3y = 5$

$y = \frac{2x - 5}{3}$

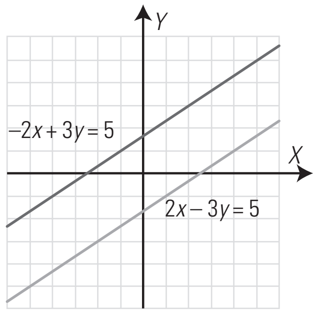
x	y	
4	1	$\Rightarrow A(4, 1)$
-2	-3	$\Rightarrow B(-2, -3)$

- Segunda ecuación:

$-2x + 3y = 5$

$y = \frac{2x + 5}{3}$

x	y	
4	1	$\Rightarrow C(5, 5)$
-2	-3	$\Rightarrow D(2, 3)$



2. RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE SISTEMAS LINEALES

21. Resuelve el siguiente sistema por el método más adecuado y razona por qué eliges ese método:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x + 10 \\ y &= x + 7 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por igualación, ya que la incógnita y está despejada en las dos ecuaciones.

Se obtiene: $x = -3$, $y = 4$

22. Resuelve el siguiente sistema por el método más adecuado y razona por qué eliges ese método:

$$\left.\begin{aligned} 4x - 3y &= 23 \\ 2x + 5y &= -21 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por reducción, multiplicando la 2.ª ecuación por 2 y restándosela a la 1.ª

Se obtiene: $x = 2$, $y = -5$

23. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - \frac{3x - y}{5} &= \frac{22}{5} \\ \frac{y}{3} + \frac{4x - 3y}{4} &= \frac{31}{12} \end{aligned}\right\}$$

Primero se eliminan los denominadores.

Se obtiene: $x = 3$, $y = 1$

24. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{x - y}{3} &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} + y - \frac{2x - 5y}{6} &= \frac{19}{12} \end{aligned}\right\}$$

Primero se eliminan los denominadores.

Se obtiene: $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$

3. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

25. Resuelve el siguiente sistema e interpreta la solución gráficamente:

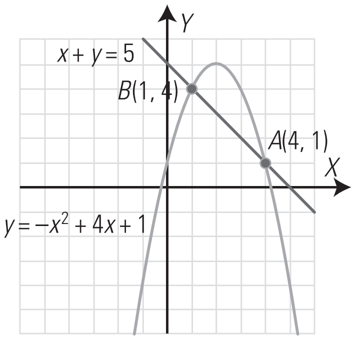
$$\left.\begin{aligned} y &= -x^2 + 4x + 1 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por igualación despejando y de la 2.ª ecuación.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 4$, $y_1 = 1$

$x_2 = 1$, $y_2 = 4$



Interpretación gráfica:

Son una parábola y una recta.

La parábola y la recta son secantes. Se cortan en dos puntos: $A(4, 1)$ y $B(1, 4)$

26. Resuelve el siguiente sistema formado por dos circunferencias e interpreta el resultado:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 18 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Se restan las dos ecuaciones y se obtiene una ecuación de 1.er grado. Se despeja en esta ecuación una incógnita y se sustituye en la ecuación de una de las circunferencias.

Se obtiene la solución: $x = 3$, $y = 3$

La interpretación gráfica es que las dos circunferencias son tangentes. Se cortan en un punto, $A(3, 3)$

27. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y &= -5 \\ xy - 2x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por sustitución, se despeja x de la 1.ª ecuación y se sustituye en la 2.ª ecuación.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 4$, $y_1 = 3$

$x_2 = -2$, $y_2 = 1$

28. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} xy &= 3 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por sustitución, se despeja la incógnita y de la 1.ª ecuación, y se sustituye en la 2.ª ecuación.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 3$, $y_1 = 1$

$x_2 = 1$, $y_2 = 3$

4. SISTEMAS EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICOS

29. Resuelve el siguiente sistema exponencial:

$$\left.\begin{aligned} 3^x + 5^y &= 28 \\ 8 \cdot 3^x - 5^y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Se hacen los cambios de variable:

$3^x = u$, $5^y = v$

Se obtiene el sistema lineal:

$$\left.\begin{aligned} u + v &= 28 \\ 8u - v &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u = 3, v = 25$$

Deshaciendo el cambio:

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$5^y = 25 \Rightarrow y = 2$

30. Halla dos números sabiendo que el doble del primero más el segundo es igual a 13, y que la suma de sus cuadrados es 34

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 13 \\ x^2 + y^2 &= 34 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve el sistema por sustitución, despejando la incógnita y de la 1.ª ecuación.

La soluciones del sistema son:

$x_1 = 5$, $y_1 = 3$

$x_2 = \dfrac{27}{5}$, $y_2 = \dfrac{11}{5}$

Como el problema pedía dos números, ambas soluciones son válidas.

31. Resuelve el siguiente sistema logarítmico:

$$\left.\begin{aligned} \log (x - 1) - \log (y + 3) &= 0 \\ 2 \log x + \log (y + 1) &= 4 \log 2 \end{aligned}\right\}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, se tiene:

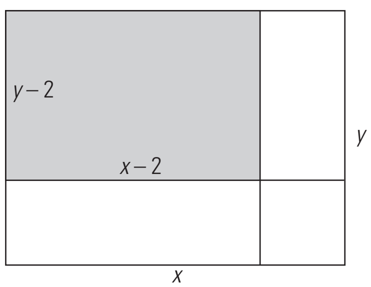
$$\left.\begin{aligned} \log \frac{x - 1}{y + 3} &= \log 1 \\ \log x^2(y + 1) &= \log 2^4 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - 1}{y + 3} &= 1 \\ x^2(y + 1) &= 2^4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x - 1 &= y + 3 \\ x^2(y + 1) &= 16 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por sustitución, se despeja la incógnita y de la 1.ª ecuación y se sustituye en la segunda.

Se obtiene solo la solución real: $x = 4$, $y = 0$

32. Una chapa tiene 28 m de perímetro. Si le cortamos 2 m de largo y otros 2 m de ancho, el área de la nueva chapa es de 24 m². Halla las dimensiones de la chapa inicial.



$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 28 \\ (x - 2)(y - 2) &= 24 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 14 \\ xy - 2x - 2y &= 20 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve el sistema por sustitución, despejando la incógnita y de la 1.ª ecuación.

La soluciones del sistema son:

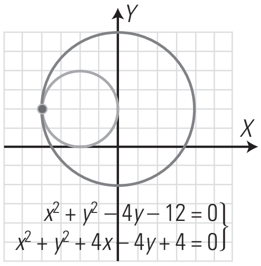
$x_1 = 8$, $y_1 = 6$

$x_2 = 6$, $y_2 = 8$

Por tanto, los lados de la plancha inicial miden 8 m y 6 m

PARA AMPLIAR

33. Resuelve gráficamente el sistema planteado en el siguiente gráfico:



Haz la interpretación gráfica.

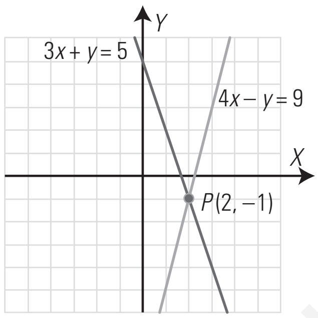
$x = -4$, $y = 2$

Las dos circunferencias se cortan en un punto $A(-4, 2)$ y, por tanto, son tangentes.

34. Resuelve gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}3x + y &= 5\\ 4x - y &= 9\end{aligned}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas y clasifica el sistema.



La solución es: $x = 2$, $y = -1$

Las dos rectas son secantes.

El sistema es compatible determinado.

35. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{5}{6}\\ 2x + y &= 8\end{aligned}\right\}$$

m.c.m. $(x, y, 6) = 6xy$

$$\left.\begin{aligned}6y + 6x &= 5xy\\ 2x + y &= 8\end{aligned}\right\}$$

Ahora se resuelve por sustitución, despejando la incógnita y de la 2.ª ecuación.

Las soluciones son:

$x_1 = 3$, $y_1 = 2$

$x_2 = \frac{8}{5}$, $y_2 = \frac{24}{5}$

36. Resuelve el siguiente sistema e interpreta gráficamente las soluciones obtenidas.

$$\left.\begin{aligned}y &= 0\\ y &= x^2 - 4\end{aligned}\right\}$$

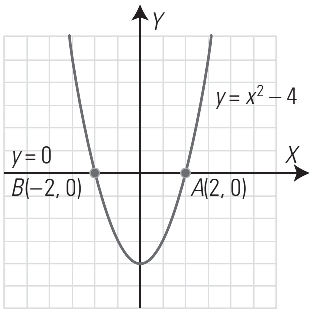
Se sustituye $y = 0$ en la 2.ª ecuación y se resuelve.

Las soluciones son:

$x_1 = 2$, $y_1 = 0$

$x_2 = -2$, $y_2 = 0$

Interpretación gráfica:



Las soluciones corresponden a los puntos de corte de la parábola con el eje X

37. Resuelve el siguiente sistema e interpreta gráficamente las soluciones obtenidas:

$$\left.\begin{aligned}x - y &= 0\\ x^2 + y &= 6\end{aligned}\right\}$$

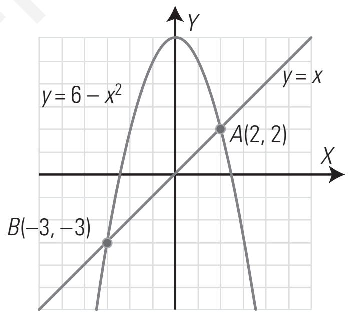
Se despeja la incógnita y de la 1.ª ecuación.

Las soluciones son:

$x_1 = 2$, $y_1 = 2$

$x_2 = -3$, $y_2 = -3$

Interpretación gráfica:

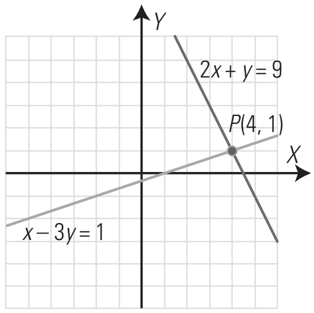


La recta y la parábola se cortan en dos puntos.

38. Resuelve gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}2x + y &= 9\\ x - 3y &= 1\end{aligned}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas y clasifica el sistema.



La solución es:

$x = 4$, $y = 1$

Las dos rectas son secantes.

El sistema es compatible determinado.

39. Resuelve el siguiente sistema exponencial:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{2^x + 3^y = 17} \\ \mathbf{5 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^y = 4} \end{array}\right\}$$

Se hacen los cambios de variable:

$2^x = u$, $3^y = v$

$$\left.\begin{array}{r} u + \ \ v = 17 \\ 5u - 4v = \ \ 4 \end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución; se obtiene:

$u = 8$, $v = 9$

Deshaciendo el cambio, se tiene:

$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

$3^y = 9 \Rightarrow y = 2$

40. Resuelve el siguiente sistema logarítmico:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{\log (x + 1) + \log y = 2 \log 2} \\ \mathbf{2 \log x + \log y = \log 2} \end{array}\right\}$$

Se le resta la 2.ª ecuación a la 1.ª:

$\log (x + 1) - 2 \log x = \log 2$

$\log \dfrac{x+1}{x^2} = \log 2$

$\dfrac{x+1}{x^2} = 2$

El valor negativo no tiene sentido.

Se sustituye el valor $x = 1$ en la primera ecuación:

$\log 2 + \log y = 2 \log 2$

$\log y = \log 2$

$y = 2$

La solución es:

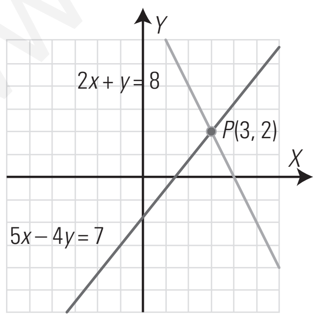
$x = 1$, $y = 2$

PROBLEMAS

41. Resuelve gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x + \ \ y = 8} \\ \mathbf{5x - 4y = 7} \end{array}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas y clasifica el sistema.



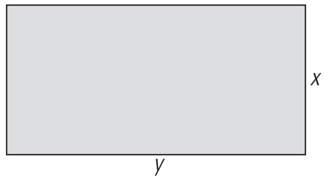
La solución es:

$x = 3$, $y = 2$

Las dos rectas son secantes.

El sistema es compatible determinado.

42. Un campo de fútbol tiene forma rectangular. El perímetro mide 300 m, y el largo es el doble del ancho. ¿Cuánto mide cada lado?



$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 300 \\ y = 2x \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 150 \\ y = 2x \end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución.

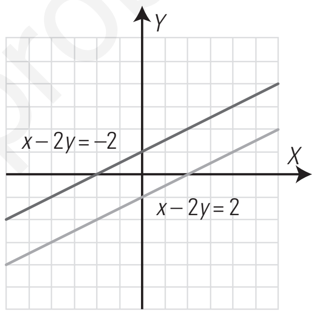
La solución es:

$x = 50$ m, $y = 100$ m

43. Resuelve gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x - 2y = \ \ 2} \\ \mathbf{x - 2y = -2} \end{array}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas y clasifica el sistema.



Las rectas son paralelas; no tiene solución.

El sistema es incompatible.

44. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{\dfrac{2}{x} + \dfrac{y}{3} = 2} \\ \mathbf{\dfrac{x + y}{5} + \dfrac{x - y}{2} = \dfrac{1}{2}} \end{array}\right\}$$

m.c.m. $(x, 3) = 3x$

La 1.ª ecuación se convierte en:

$6 + xy = 6x$

m.c.m. $(5, 2) = 10$

La 2.ª ecuación se convierte en:

$7x - 3y = 5$

Se despeja y de esta ecuación y se sustituye en la otra.

Las soluciones son:

$x_1 = 2$, $y_1 = 3$

$x_2 = \dfrac{9}{7}$, $y_2 = \dfrac{4}{3}$

45. Meli compra 3 DVD y 4 CD, y paga 100 €; y Ana compra 4 DVD y 3 CD en la misma tienda, y paga 110 €. ¿Cuánto cuesta cada DVD y CD?

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 100 \\ 4x + 3y = 110 \end{array}\right\}$$

La solución es: un DVD cuesta 20 € y un CD cuesta 10 €

46. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ x^2 + y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas.

Se resuelve por igualación, despejando la incógnita y de las dos ecuaciones.

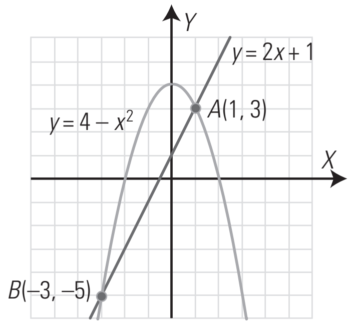
Las soluciones son:

$x_1 = 1,\ y_1 = 3$

$x_2 = -3,\ y_2 = -5$

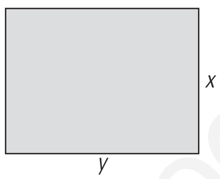
Interpretación gráfica:

Son una recta y una parábola.



La recta y la parábola son secantes, se cortan en dos puntos.

47. Un piso tiene forma rectangular y su área es de 108 m². Si el largo mide 3 m más que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del piso?



$$\left.\begin{aligned} xy &= 108 \\ y &= x + 3 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por sustitución.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 9,\ y_1 = 12$

$x_2 = -12,\ y_2 = -9$

Las soluciones negativas no tienen sentido.

El piso mide de largo 12 m y de ancho, 9 m

48. Halla los puntos de corte de las siguientes funciones: $y = x^2$, $y = x^3$

Hay que resolver el sistema formado por las ecuaciones; se resuelve por igualación.

$x^3 = x^2$

$x^3 - x^2 = 0$

$x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$

Las soluciones del sistema son:

$x_1 = 0,\ y_1 = 0$

$x_2 = 1,\ y_2 = 1$

Luego los puntos comunes de las dos funciones son:

$O(0, 0)$, $A(1, 1)$

49. La suma de dos números es 5, y la suma de sus inversos es 5/6. Halla ambos números.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{5}{6} \end{aligned}\right\}$$

m.c.m. $(x, y, 6) = 6xy$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 6x + 6y &= 5xy \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por sustitución:

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 2,\ y_1 = 3$

$x_2 = 3,\ y_2 = 2$

Los números son 2 y 3

50. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} y &= x \\ y &= \sqrt{x} \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por igualación.

$x = \sqrt{x}$

$x^2 = x$

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$

$x_1 = 0,\ y_1 = 0$

$x_2 = 1,\ y_2 = 1$

51. La suma de las edades de un padre y su hija es de 70 años. Dentro de 10 años la edad del padre será el doble de la edad de su hija. ¿Qué edad tiene ahora cada uno?

	Padre	Hija
Edad del hijo	x	y
Edad dentro de 10 años	$x + 10$	$y + 10$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 70 \\ x + 10 &= 2(y + 10) \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por igualación.

La solución es:

Edad del padre: $x = 50$ años.

Edad de la hija: $y = 20$ años.

52. Resuelve el siguiente sistema exponencial:

$$\left.\begin{aligned} 3^x + 5^y &= 4 \\ 7 \cdot 3^x - 2 \cdot 5^y &= 19 \end{aligned}\right\}$$

Se hacen los cambios de variable:

$3^x = u,\ 5^y = v$

$$\left.\begin{aligned} u + v &= 4 \\ 7u - 2v &= 19 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por sustitución; se obtiene:

$u = 3,\ v = 1$

Deshaciendo los cambios, se tiene:

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$5^y = 1 \Rightarrow y = 0$

53. Resuelve el siguiente sistema logarítmico:

$$\left.\begin{array}{r}\log x + \log y = 3 \log 2\\ \log x + \log y = \log 2\end{array}\right\}$$

Sumando ambas ecuaciones, se obtiene:

$2 \log x = 4 \log 2$

$\log x^2 = \log 2^4$

$x^2 = 2^4$

$x = 4$

Se sustituye el valor $x = 4$ en la 1.ª ecuación:

$\log 4 + \log y = 3 \log 2$

$\log y = 3 \log 2 - \log 4$

$\log y = \log \dfrac{2^3}{4}$

$y = \dfrac{2^3}{4}$

$y = 2$

La solución es:

$x = 4,\ y = 2$

54. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x^2 - 2y = 0\\ y + yx^2 = 1\end{array}\right\}$$

Se despeja la incógnita y de la 1.ª ecuación y se sustituye en la 2.ª

Las soluciones son:

$x_1 = 1,\ y_1 = \dfrac{1}{2}$

$x_2 = -1,\ y_1 = \dfrac{1}{2}$

55. Halla los puntos de corte de las siguientes funciones: $y = x^2 + 2x - 3$, $y = -x^2 + 1$

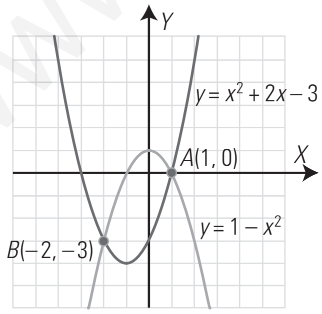
Haz la representación gráfica para comprobarlo.

Son las soluciones del sistema correspondiente, que se resuelve por igualación:

$x_1 = 1,\ y_1 = 0$

$x_2 = -2,\ y_2 = -3$

Los puntos de corte son: $A(1, 0)$ y $B(-2, -3)$



56. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}y = 2^x\\ y = 2^{-x}\end{array}\right\}$$

Se resuelve por igualación.

$2^x = 2^{-x} \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

Para $x = 0 \Rightarrow y = 2^0 = 1$

La solución es:

$x = 0,\ y = 1$

57. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}y = x^3 - x\\ 2x - y = 2\end{array}\right\}$$

Se resuelve por igualación.

Se obtiene una ecuación de 3.er grado:

$x^3 - 3x + 2 = 0$

Hay que resolverla aplicando el teorema del factor.

Tiene las raíces: $x_1 = 1,\ x_2 = -2$

Las soluciones del sistema son:

$x_1 = 1,\ y_1 = 0$

$x_2 = -2,\ y_2 = -6$

PARA PROFUNDIZAR

58. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}y = 3 - 2x\\ y = 2x - x^2\end{array}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas.

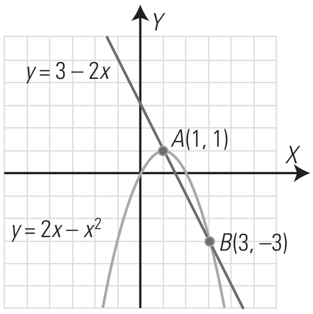
Se resuelve por igualación.

Las soluciones del sistema son:

$x_1 = 1,\ y_1 = 1$

$x_2 = 3,\ y_2 = -3$

Interpretación gráfica:



La recta y la parábola se cortan en dos puntos.

59. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 2\\[2mm] \dfrac{x+y}{3} = \dfrac{x}{2}\end{array}\right\}$$

m.c.m. $(x, y) = xy$

La 1.ª ecuación se convierte en:

$2y + x = 2xy$

m.c.m. $(2, 3) = 6$

La 2.ª ecuación se convierte en:

$x - 2y = 0$

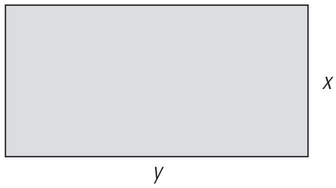
Se despeja x de esta ecuación y se sustituye en la otra.

Las soluciones son:

$x = 0,\ y = 0$ no es válida. No tiene sentido en la 1.ª ecuación.

La solución es: $x_1 = 2,\ y_1 = 1$

60. Un campo de baloncesto tiene forma rectangular. El largo más el ancho mide 60 m, y el área es de 800 m². **¿Cuánto mide cada lado?**



$$\left.\begin{array}{r} x + y = 60 \\ xy = 800 \end{array}\right\}$$

Las soluciones son:

$x_1 = 20,\ y_1 = 40$

$x_2 = 40,\ y_2 = 20$

Por tanto, el campo mide de largo 40 m, y de ancho, 20 m

61. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + 2y = 8} \\ \boldsymbol{xy = 6} \end{array}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas.

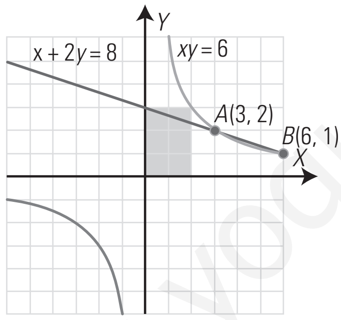
Se resuelve por igualación, despejando x de ambas ecuaciones:

Las soluciones son:

$x_1 = 2,\ y_1 = 3$

$x_2 = 6,\ y_2 = 1$

Son una recta y una hipérbola.



Se cortan en dos puntos.

62. La suma de dos números es 15, y la diferencia de sus cuadrados también es 15. Halla ambos números.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 15 \\ x^2 - y^2 = 15 \end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución, despejando y de la 1.ª ecuación.

Las soluciones son:

$x = 8,\ y = 7$

63. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{y = x^2} \\ \boldsymbol{y = x^4} \end{array}\right\}$$

Se resuelve por igualación:

$x^4 = x^2$

$x^4 - x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

Las soluciones son:

$x_1 = 0,\ y_1 = 0$

$x_2 = 1,\ y_2 = 1$

$x_3 = -1,\ y_3 = 1$

64. Halla los puntos de corte de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{y = 3x^2 - 6x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{y = -x^2 + 6x - 8}$

Representa ambas funciones para comprobarlo.

Consiste en resolver el sistema formado por las dos ecuaciones.

Se resuelve por igualación.

Las soluciones son:

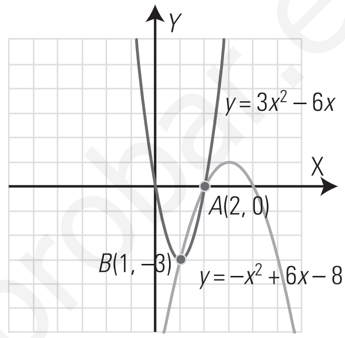
$x_1 = 2,\ y_1 = 0$

$x_2 = 1,\ y_2 = -3$

Los puntos de corte son:

$A(2, 0)$ y $B(1, -3)$

Representación gráfica:



Son dos parábolas.

65. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x^2 - 2x - y = -3} \\ \boldsymbol{2y - x^2 = 2} \end{array}\right\}$$

Se resuelve por igualación despejando la incógnita y de las dos ecuaciones.

La única solución es:

$x = 2,\ y = 3$

66. Resuelve el siguiente sistema exponencial:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{7^x - 5^y = 338} \\ \boldsymbol{2 \cdot 7^x - 3 \cdot 5^y = 671} \end{array}\right\}$$

Se hacen los cambios de variable:

$7^x = u,\ 5^y = v$

$$\left.\begin{array}{r} u - v = 338 \\ 2u - 3v = 671 \end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución; se obtiene:

$u = 343,\ v = 5$

Deshaciendo los cambios, se tiene:

$7^x = 343 \Rightarrow x = 3$

$5^y = 5 \Rightarrow y = 1$

67. Resuelve el siguiente sistema logarítmico:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{log}\ \boldsymbol{x} - \mathbf{log}\ \boldsymbol{y} = \mathbf{log\ 3} \\ \mathbf{2\ log}\ \boldsymbol{x} - \mathbf{3\ log}\ \boldsymbol{y} = \mathbf{log\ 3} \end{array}\right\}$$

Se multiplica la 1.ª ecuación por 3 y se resta la 2.ª; se obtiene:

$\log x = 2 \log 3$

$\log x = \log 3^2$

$x = 3^2$

$x = 9$

Se sustituye el valor $x = 9$ en la 1.ª ecuación:

$\log 9 - \log y = \log 3$

$\log y = \log 9 - \log 3$

$\log y = \log \dfrac{9}{3}$

$y = 3$

La solución es:

$x = 9,\ y = 3$

68. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y = e^{x+2} \\ y = e^{-x} \end{array}\right\}$$

Se resuelve por igualación:

$e^{x+2} = e^{-x}$

$x + 2 = -x$

$2x = -2$

$x = -1$

Para $x = -1 \Rightarrow y = e$

Solución del sistema:

$x = -1,\ y = e$

Aplica tus competencias

69. Un móvil A lleva un movimiento uniforme de ecuación $e = 2t$. Otro móvil B lleva un movimiento uniformemente acelerado de ecuación $e = t^2$. El tiempo se expresa en segundos, y el espacio, en metros. Halla en qué instantes se encuentran. Haz la representación gráfica.

Hay que resolver el sistema:

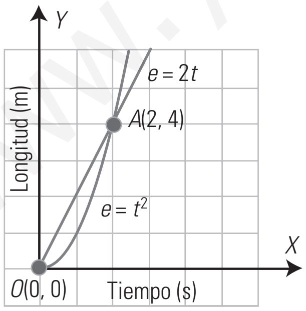
$$\left.\begin{array}{l} e = 2t \\ e = t^2 \end{array}\right\}$$

Se resuelve por igualación.

Las soluciones son:

$t_1 = 0$ s, $e_1 = 0$ m

$t_2 = 2$ s, $e_2 = 4$ m



70. Un móvil A lleva un movimiento uniforme de ecuación $e = \dfrac{5t}{4} - \dfrac{1}{2}$. Otro móvil B lleva un movimiento uniformemente acelerado de ecuación $e = \dfrac{t^2}{8} + \dfrac{t}{4} + 1$. El tiempo se expresa en segundos, y el espacio, en metros. Halla en qué instantes se encuentran.

Hay que resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} e = \dfrac{5t}{4} - \dfrac{1}{2} \\ e = \dfrac{t^2}{8} + \dfrac{t}{4} + 1 \end{array}\right\}$$

Se resuelve por igualación.

Las soluciones son:

$t_1 = 2$ s, $e_1 = 2$ m

$t_2 = 6$ s, $e_2 = 7$ m

Comprueba lo que sabes

1. Define qué es un sistema de ecuaciones no lineales y pon un ejemplo.

Un sistema de ecuaciones no lineales es un sistema de ecuaciones en el que, por lo menos, hay una ecuación que no es lineal.

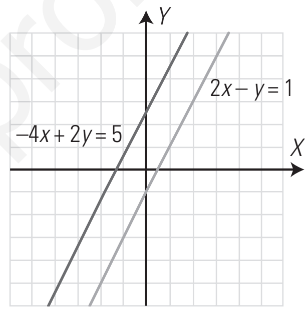
Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 7 \\ y = x - 3 \end{array}\right\}$$

2. Resuelve gráficamente el siguiente sistema lineal y clasifícalo por el número de soluciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = 5 \end{array}\right\}$$

Son dos rectas paralelas; por tanto, el sistema no tiene solución.



El sistema es lineal e incompatible.

3. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{4x - y}{6} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución, despejando la incógnita y de la 1.ª ecuación.

La solución es $x = 1,\ y = 3$

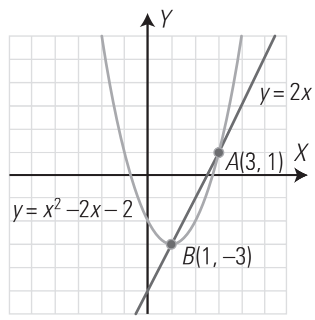
4. Resuelve el siguiente sistema e interpreta la solución gráficamente:

$$\left.\begin{array}{r} y = 2x - 5 \\ y = x^2 - 2x - 2 \end{array}\right\}$$

Se resuelve por igualación.

Las soluciones son:

$x_1 = 3,\ y_1 = 1;\ x_2 = 1,\ y_2 = -3$



La recta y la parábola se cortan en dos puntos.

5. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2^x + 3^y} &= \mathbf{9} \\ \mathbf{3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y} &= \mathbf{26} \end{aligned}\right\}$$

Se hacen los cambios de variable:

$2^x = u$, $3^y = v$

$$\left.\begin{aligned} u + v &= 9 \\ 3u + 2v &= 26 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por sustitución y se obtiene:

$u = 8$, $v = 1$

Deshaciendo el cambio, se tiene:

$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

$3^y = 1 \Rightarrow y = 0$

6. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\log x + \log y} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{3 \log x - \log y} &= \mathbf{-1 + 4 \log 2} \end{aligned}\right\}$$

Se suman las dos ecuaciones y se obtiene:

$4 \log x = 4 \log 2$

$\log x = \log 2$

$x = 2$

Se sustituye el valor $x = 2$ en la 1.ª ecuación:

$\log 2 + \log y = 1 \Rightarrow \log y = 1 - \log 2$

$\log y = \log 10 - \log 2$

$\log y = \log 5$

$y = 5$

La solución es $x = 2$, $y = 5$

7. Halla dos números sabiendo que su producto es 6 y la suma de sus cuadrados es 13

$$\left.\begin{aligned} xy &= 6 \\ x^2 + y^2 &= 13 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve el sistema por sustitución, despejando la incógnita y de la 1.ª ecuación: aparece una ecuación bicuadrada.

Las soluciones son:

$x_1 = 2$, $y_1 = 3$

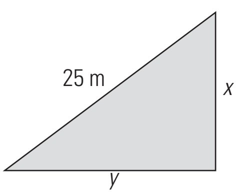
$x_2 = -2$, $y_2 = -3$

$x_3 = 3$, $y_3 = 2$

$x_4 = -3$, $y_4 = -2$

Los números pueden ser 2 y 3, y también -2 y -3

8. Los catetos de un triángulo rectángulo son proporcionales a 3 y 4, y la hipotenusa mide 25 m. Calcula cuánto mide cada cateto.



$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \frac{y}{4} \\ x^2 + y^2 &= 25^2 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve el sistema por sustitución, despejando la incógnita y de la 1.ª ecuación.

Las soluciones son:

$x_1 = 15$, $y_1 = 20$; $x_2 = -15$, $y_2 = -20$

Las soluciones negativas no tienen sentido.

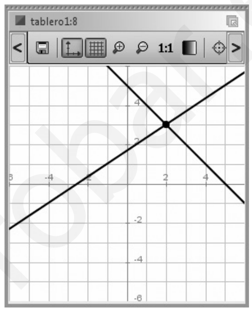
Los catetos miden 15 m y 20 m

WINDOWS/LINUX WIRIS

PRACTICA

76. Resuelve gráficamente el siguiente sistema, clasifícalo y, si es compatible, halla la solución:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x + y} &= \mathbf{5} \\ \mathbf{2x - 3y} &= \mathbf{-5} \end{aligned}\right\}$$

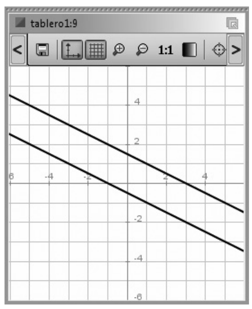


El sistema es compatible determinado.

Solución: $x = 2$, $y = 3$

77. Resuelve gráficamente el siguiente sistema, clasifícalo y, si es compatible, halla la solución:

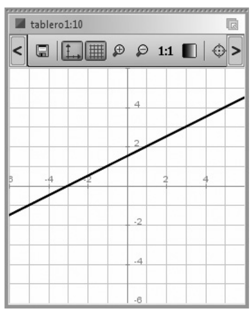
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x + 2y} &= \mathbf{3} \\ \mathbf{x + 2y} &= \mathbf{-1} \end{aligned}\right\}$$



El sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

78. Resuelve gráficamente el siguiente sistema, clasifícalo y, si es compatible, halla la solución:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{-x + 2y} &= \mathbf{3} \\ \mathbf{2x - 4y} &= \mathbf{-6} \end{aligned}\right\}$$



El sistema es compatible indeterminado.

Tiene infinitas soluciones: todos los puntos de dicha recta.

Por ejemplo:

$x = 1,\ y = 2$

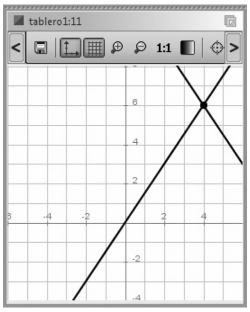
$x = 3,\ y = 3$

79. Resuelve algebraicamente el siguiente sistema y luego haz la representación gráfica para comprobar la solución obtenida:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} &= 4 \\ 3x &= 2y \end{aligned}\right\}$$

Se introduce una ecuación en cada cuadro de texto.

$x = 4,\ y = 6$

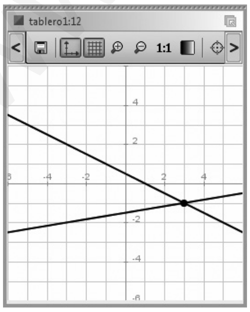


80. Resuelve algebraicamente el siguiente sistema y luego haz la representación gráfica para comprobar la solución obtenida:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{x+3y}{3} &= \frac{3}{2} \\ \frac{2x+y}{6} - \frac{x}{4} &= \frac{1}{12} \end{aligned}\right\}$$

Se introduce una ecuación en cada cuadro de texto.

$x = 3,\ y = -1$



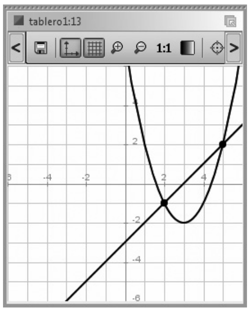
81. Resuelve algebraicamente el siguiente sistema y luego haz la representación gráfica para comprobar las soluciones obtenidas:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 7 \\ y &= x - 3 \end{aligned}\right\}$$

Se introduce una ecuación en cada cuadro de texto.

$x_1 = 2,\ y_1 = -1$

$x_2 = 5,\ y_2 = 2$



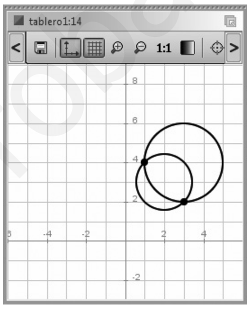
82. Resuelve algebraicamente el siguiente sistema y luego haz la representación gráfica para comprobar las soluciones obtenidas:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Se introduce una ecuación en cada cuadro de texto.

$x_1 = 1,\ y_1 = 4$

$x_2 = 3,\ y_2 = 2$



83. Resuelve el sistema exponencial:

$$\left.\begin{aligned} 2^x + 3^y &= 7 \\ 2^x - 3^y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$x = 2;\ y = 1$

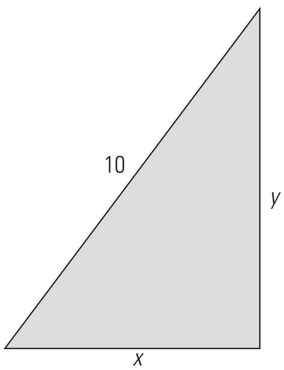
84. Resuelve el sistema logarítmico:

$$\left.\begin{aligned} \log x + \log y &= \log 12 \\ \log x - \log y &= \log 3 \end{aligned}\right\}$$

$x = 6;\ y = 2$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

85. Halla los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 10 m y que los catetos son proporcionales a 3 y 4



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10^2 \\ \frac{x}{3} &= \frac{y}{4} \end{aligned}\right\}$$

Las soluciones del sistema son:

$x_1 = 6,\ y_1 = 8$

$x_2 = -6,\ y_2 = -8$

Las soluciones negativas no tienen sentido.

Por tanto, los catetos miden 6 m y 8 m

86. Halla dos números sabiendo que suman 12 y que el producto es 35

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 12 \\ xy &= 35 \end{aligned}\right\}$$

La soluciones del sistema son:

$x_1 = 7,\ y_1 = 5$

$x_2 = 5,\ y_2 = 7$

Los números son 5 y 7

87. Meli compra 3 DVD y 4 CD, y paga 100 €; y Ana compra 4 DVD y 3 CD en la misma tienda, y paga 110 €. ¿Cuánto cuesta cada DVD y CD?

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 100 \\ 4x + 3y &= 110 \end{aligned}\right\}$$

Un DVD cuesta 20 €

Un CD cuesta 10 €

6. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

1. INECUACIONES DE 1.er GRADO

PIENSA Y CALCULA

Escribe todos los números enteros que verifiquen: $-5 < x \leq 6$

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

APLICA LA TEORÍA

1. Cambia mentalmente de signo las siguientes inecuaciones:

a) $2x \leq -7$ **b) $-3x > 4$**

a) $-2x \geq 7$ b) $3x < -4$

2. Multiplica o divide mentalmente las siguientes inecuaciones por el número que se indica:

a) $-\dfrac{x}{2} < 5$ **Multiplica por -2**

b) $-3x \geq -6$ **Divide entre -3**

a) $x > -10$ b) $x \leq 2$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones y haz la interpretación gráfica:

a) $3x + 3 > 5x - 3$ **b) $x + 1 \geq \dfrac{x-2}{3}$**

a) $3x - 5x > -3 - 3$

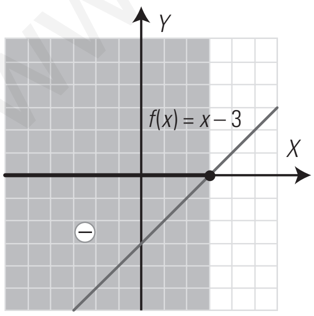
$-2x > -6$

$x < 3$

$(-\infty, 3) = \{x \in \mathbb{R}, x < 3\}$

Interpretación gráfica:

Son los valores de x para los que $f(x) = x - 3$ es negativa.



b) $3(x + 1) \geq x - 2$

$3x + 3 \geq x - 2$

$3x - x \geq -2 - 3$

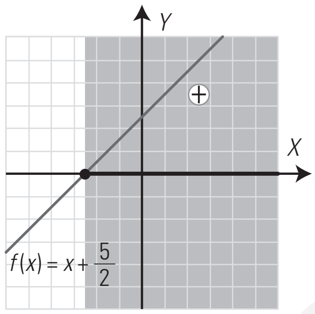
$2x \geq -5$

$x \geq -\dfrac{5}{2}$

$[-5/2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq -5/2\}$

Interpretación gráfica:

Son los valores de x para los que $f(x) = x + \dfrac{5}{2}$ es positiva o nula.



4. Resuelve la siguiente inecuación: $|x - 1| \leq 3$

Es el entorno cerrado de centro 1 y radio 3, $E(1, 3)$, es decir, el intervalo cerrado:

$[-2, 4] = \{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 4\}$

5. Resuelve la siguiente inecuación y haz la interpretación gráfica:

$$\frac{x-3}{4} \leq \frac{x-5}{6} + \frac{4x-3}{20}$$

$\dfrac{x-3}{4} \leq \dfrac{x-5}{6} + \dfrac{4x-3}{20}$

m.c.m. (4, 6, 20) = 60

$15(x - 3) \leq 10(x - 5) + 3(4x - 3)$

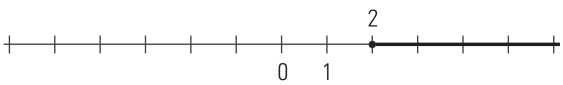
$15x - 45 \leq 10x - 50 + 12x - 9$

$15x - 10x - 12x \leq -50 - 9 + 45$

$-7x \leq -14$

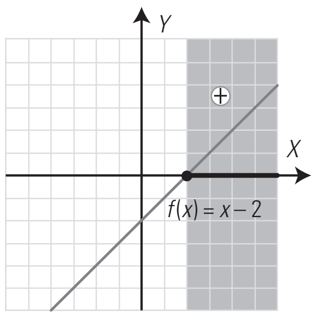
$x \geq 2$

$[2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$



Interpretación gráfica:

Son los valores de x para los que $f(x) = x - 2$ es positiva o nula.

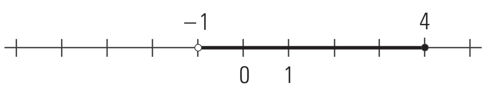


6. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 4 \leq 0 \\ x + 1 > 0 \end{aligned}\right\}$$

$x \leq 4, x > -1$

$(-1, 4] = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq 4\}$

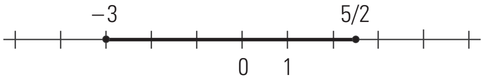


7. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x+3\geq 0} \\ \boldsymbol{2x-5\leq 0} \end{aligned}\right\}$$

$x \geq -3,\ x \leq \dfrac{5}{2}$

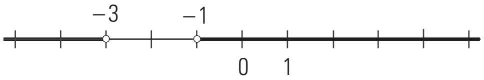
$[-3,\ 5/2] = \{x \in \mathbb{R},\ -3 \leq x \leq 5/2\}$



8. Resuelve la siguiente inecuación: $|x+2| > 1$

Es el exterior del entorno de centro -2 y radio 1, es decir, dos intervalos. No contiene a los extremos:

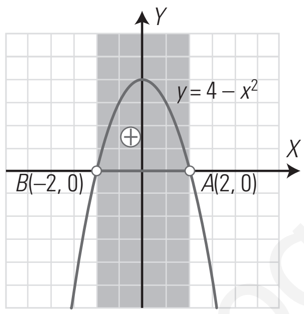
$(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$



2. INECUACIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES

PIENSA Y CALCULA

Halla el intervalo donde es positiva la función representada.



$(-2,\ 2) = \{x \in \mathbb{R},\ -2 < x < 2\}$

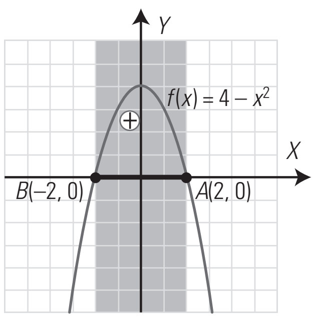
APLICA LA TEORÍA

9. Resuelve la siguiente inecuación y haz su interpretación gráfica: $4 - x^2 \geq 0$

$[-2,\ 2] = \{x \in \mathbb{R},\ -2 \leq x \leq 2\}$

Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola $y = 4 - x^2$ es positiva o cero.



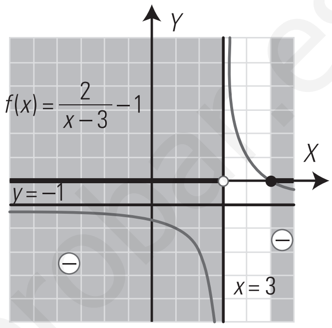
10. Resuelve la siguiente inecuación y haz su interpretación gráfica:

$$\frac{\boldsymbol{x-5}}{\boldsymbol{3-x}} \leq 0$$

$(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$

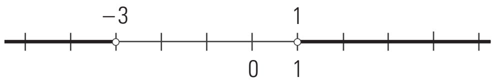
Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la hipérbola $y = \dfrac{x-5}{3-x}$ es negativa o nula.



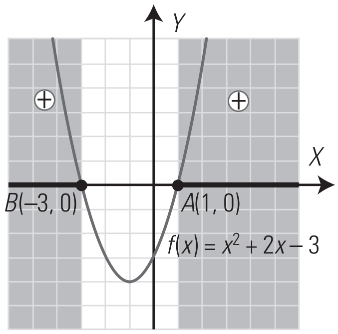
11. Resuelve la siguiente inecuación y haz su interpretación gráfica: $x^2 + 2x - 3 > 0$

$(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$



Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola $y = x^2 + 2x - 3$ es positiva.



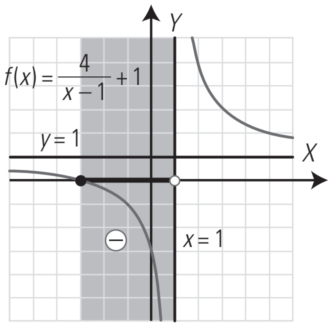
12. Resuelve la siguiente inecuación y haz su interpretación gráfica:

$$\frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{x-1}} \leq 0$$

$[-3,\ 1) = \{x \in \mathbb{R},\ -3 \leq x < 1\}$

Interpretación gráfica:

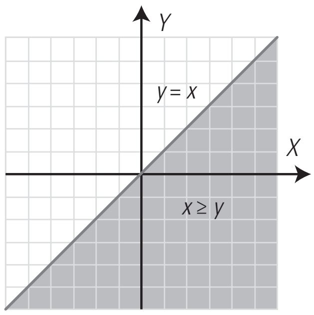
Es el intervalo donde la hipérbola $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ es negativa o nula.



3. INECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

PIENSA Y CALCULA

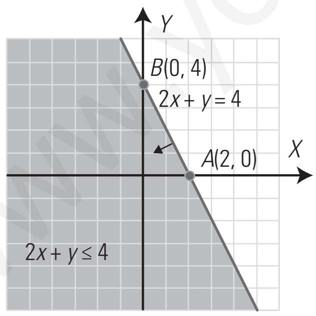
Representa en unos ejes de coordenadas todos los puntos del plano en los que la abscisa, *x*, sea mayor o igual que la ordenada, *y*



APLICA LA TEORÍA

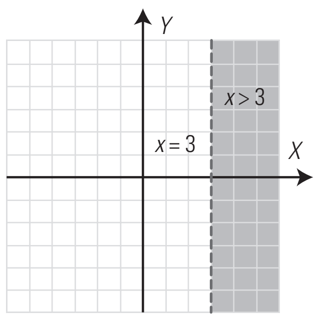
13. Resuelve la siguiente inecuación:

$$2x + y \le 4$$

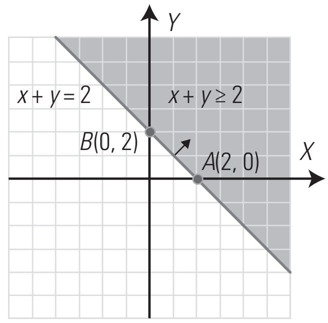


14. Resuelve la siguiente inecuación:

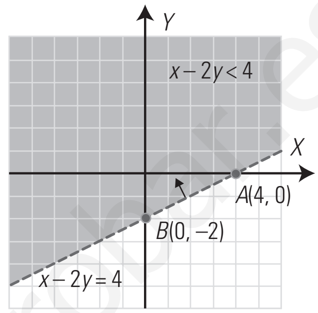
$$x > 3$$



15. Resuelve la siguiente inecuación: $x + y \ge 2$

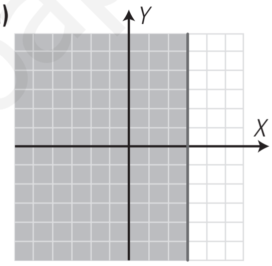


16. Resuelve la siguiente inecuación: $x - 2y < 4$

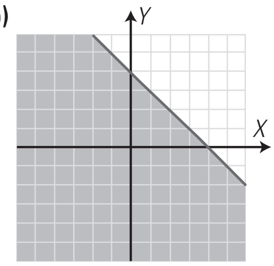


17. Escribe la inecuación correspondiente a la zona coloreada de cada una de las siguientes figuras:

a)



b)



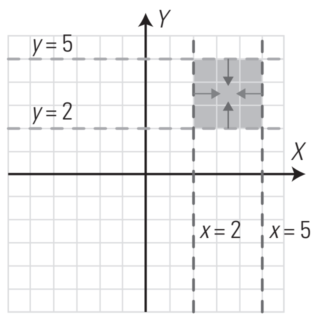
a) $x \le 3$ b) $x + y \le 4$

4. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

PIENSA Y CALCULA

Observando la representación gráfica, escribe las coordenadas enteras de todos los puntos que verifiquen al mismo tiempo que $x > 2$, $y > 2$, $x < 5$, $y < 5$

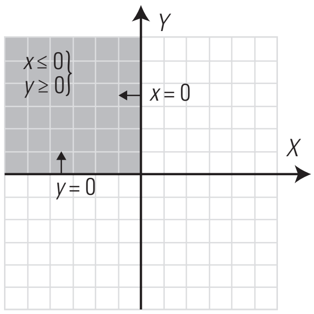
$A(3, 3)$, $B(3, 4)$, $C(4, 3)$ y $D(4, 4)$



APLICA LA TEORÍA

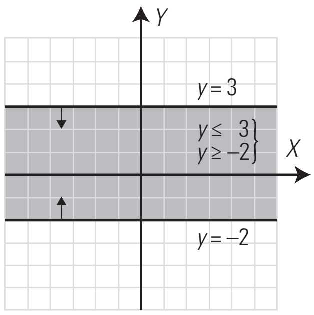
18. Resuelve mentalmente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x \le 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$



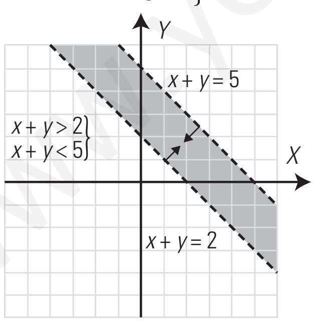
19. Resuelve mentalmente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} y \le 3 \\ y \ge -2 \end{array}\right\}$$



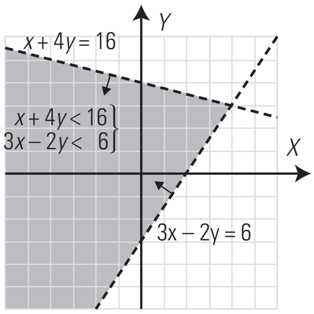
20. Resuelve mentalmente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y > 2 \\ x + y < 5 \end{array}\right\}$$



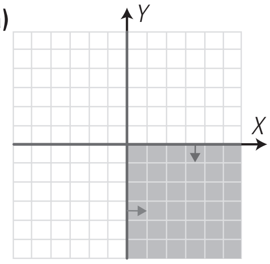
21. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y < 16 \\ 3x - 2y < 6 \end{array}\right\}$$

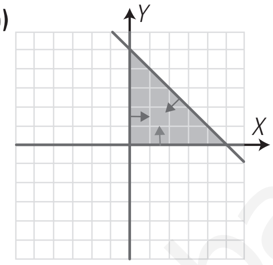


22. Escribe el sistema de inecuaciones correspondiente a la zona coloreada de cada gráfica:

a)



b)



a) $\left.\begin{array}{r} x \ge 0 \\ y \le 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 5 \end{array}\right\}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. INECUACIONES DE 1.er GRADO

23. Cambia mentalmente de signo las siguientes inecuaciones:

a) $-3x \le 2$

b) $-2x > -5$

a) $3x \ge -2$ b) $2x < 5$

24. Multiplica o divide mentalmente las siguientes inecuaciones por el número que se indica:

a) $-\frac{x}{3} < 1$ **Multiplica por –3**

b) $-2x \ge -6$ **Divide entre –2**

a) $x > -3$

b) $x \le 3$

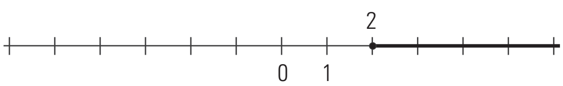
Resuelve las siguientes inecuaciones y haz la interpretación gráfica:

25. $3x - 3 \ge 2x - 1$

$3x - 2x \ge -1 + 3$

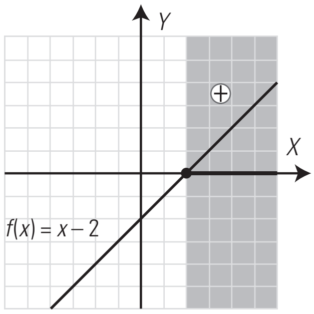
$x \ge 2$

$[2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R},\ x \ge 2\}$



Interpretación gráfica:

Son los valores de x para los que $f(x) = x - 2$ es positiva.



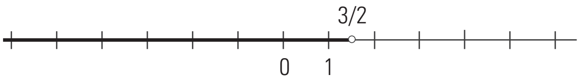
26. $\mathbf{5x - 4 < 3x - 1}$

$5x - 3x < -1 + 4$

$2x < 3$

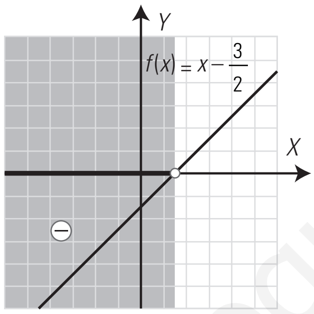
$x < \dfrac{3}{2}$

$(-\infty, 3/2) = \{x \in \mathbb{R}, x < 3/2\}$



Interpretación gráfica:

Son los valores de x para los que $f(x) = x - \dfrac{3}{2}$ es negativa.



27. $\mathbf{2x - 3(x + 2) \le 2(x - 1) - 1}$

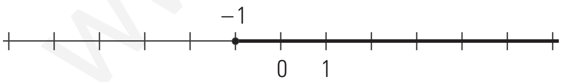
$2x - 3x - 6 \le 2x - 2 - 1$

$2x - 3x - 2x \le -2 - 1 + 6$

$-3x \le 3$

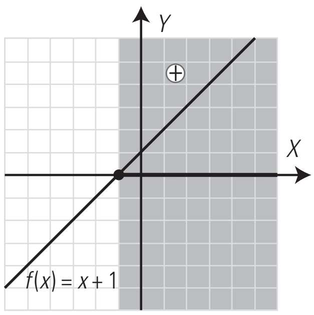
$x \ge -1$

$[-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \ge -1\}$



Interpretación gráfica:

Son los valores de x para los que $f(x) = x + 1$ es positiva o nula.



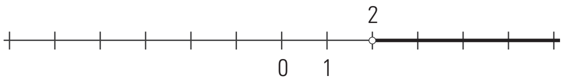
28. $\mathbf{x - 2(x - 1) > 10 - 2(x + 3)}$

$x - 2x + 2 > 10 - 2x - 6$

$x - 2x + 2x > 10 - 6 - 2$

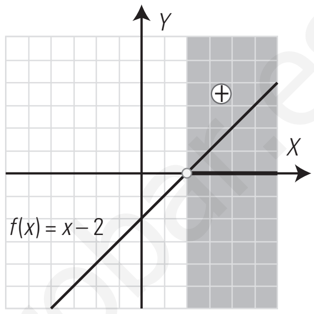
$x > 2$

$(2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > 2\}$



Interpretación gráfica:

Son los valores de x para los que $f(x) = x - 2$ es positiva.



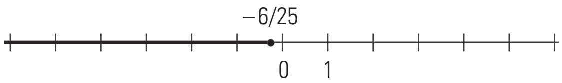
29. $\mathbf{\dfrac{1}{5} + \dfrac{3x}{2} \le \dfrac{2x}{3}}$

m.c.m. (2, 3, 5) = 30

$6 + 45x \le 20x$

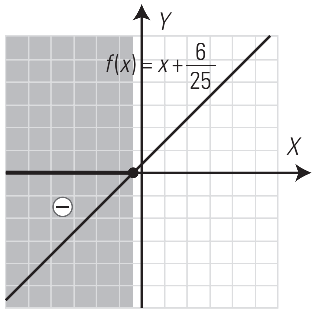
$45x - 20x \le -6$

$x \le -\dfrac{6}{25}$



Interpretación gráfica:

Son los valores de x para los que $f(x) = x + \dfrac{6}{25}$ es negativa o nula.



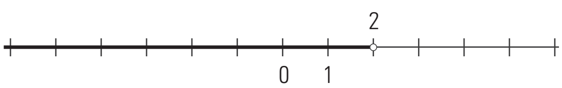
30. $\mathbf{x + \dfrac{x+2}{6} > \dfrac{4x}{3}}$

$x + \dfrac{x+2}{6} > \dfrac{4x}{6}$

m.c.m. (6, 3) = 6

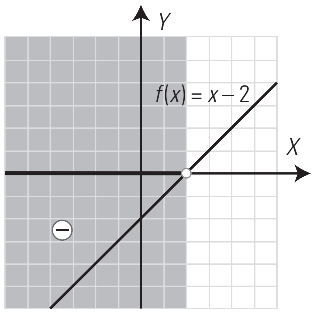
$-x > -2$

$x < 2$



Interpretación gráfica:

Son los valores de x para los que $f(x) = x - 2$ es negativa.



31. $\frac{2x}{3} + \frac{x+2}{6} < \frac{3x}{2} + 1$

$\frac{2x}{3} + \frac{x+2}{6} < \frac{3x}{2} + 1$

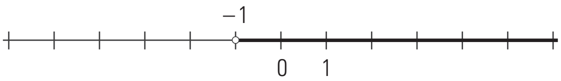
m.c.m. (3, 6, 2) = 6

$4x + x + 2 < 9x + 6$

$4x + x - 9x < 6 - 2$

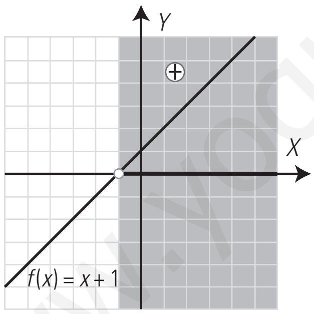
$-4x < 4$

$x > -1$



Interpretación gráfica:

Son los valores de x para los que $f(x) = x + 1$ es positiva.



32. $\frac{4x+1}{3} - \frac{2x+1}{2} \le \frac{x}{12} + \frac{5}{6}$

m.c.m. (3, 2, 12, 6) = 12

$4(4x + 1) - 6(2x + 1) \le x + 10$

$16x + 4 - 12x - 6 \le x + 10$

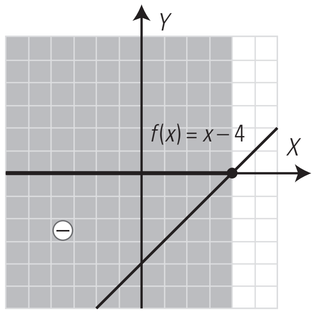
$16x - 12x - x \le 10 - 4 + 6$

$3x \le 12$

$x \le 4$

Interpretación gráfica:

Son los valores de x para los que $f(x) = x - 4$ es negativa o nula.



33. $\frac{x-1}{2} \le \frac{3x+10}{5} + \frac{5x+3}{15}$

m.c.m. (2, 5, 15) = 30

$15(x - 1) \le 6(3x + 10) + 2(5x + 3)$

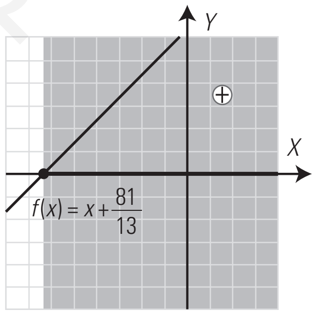
$15\,x - 15 \le 18x + 60 + 10x + 6$

$15\,x - 18x - 10x \le 60 + 6 + 15$

$-13x \le 81 \Rightarrow x \ge -\frac{81}{13}$

Interpretación gráfica:

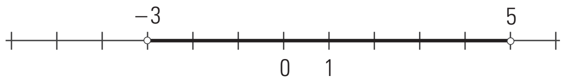
Son los valores de x para los que $f(x) = x + \frac{81}{13}$ es positiva o nula.



34. $|x - 1| < 4$

Es el entorno abierto de centro 1 y radio 4, $E(1, 4)$, es decir, el intervalo abierto:

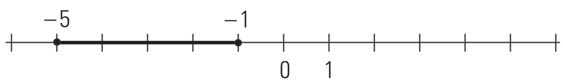
$(-3, 5) = \{x \in \mathbb{R}, -3 < x < 5\}$



35. $|x + 3| \le 2$

Es el entorno cerrado de centro −3 y radio 2, $E(-3, 2)$, es decir, el intervalo cerrado:

$[-5, -1] = \{x \in \mathbb{R}, -5 \le x \le -1\}$



36. $|x + 1| > 3$

Es lo que queda fuera del entorno de centro −1 y radio 3, es decir, los intervalos:

$(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

37. $|x - 2| \geq 1$

Es lo que queda fuera del entorno de centro 2 y radio 1, es decir, los intervalos:

$(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

Resuelve los siguientes sistemas:

38. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{x + 4 > 0} \\ \mathbf{2x - 3 \leq 1} \end{array}\right\}$

$x > -4$, $x \leq 2$

$(-4, 2] = \{x \in \mathbb{R}, -4 < x \leq 2\}$

39. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{x - 1 \geq 0} \\ \mathbf{x + 2 < 0} \end{array}\right\}$

$x \geq 1$, $x < -2$

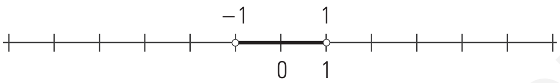
No hay solución; la intersección de los dos es el conjunto vacío, $\varnothing$

2. INECUACIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES

Resuelve las siguientes inecuaciones y haz la interpretación gráfica:

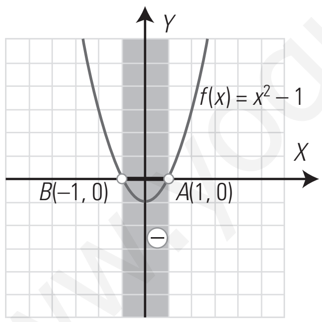
40. $x^2 - 1 < 0$

$(-1, 1) = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1\}$



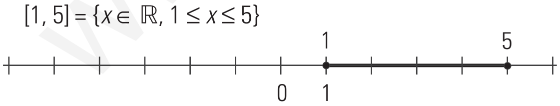
Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola $f(x) = x^2 - 1$ es negativa.



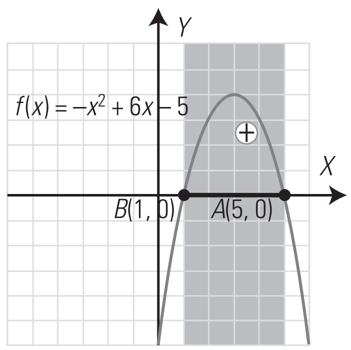
41. $-x^2 + 6x - 5 \geq 0$

$[1, 5] = \{x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 5\}$



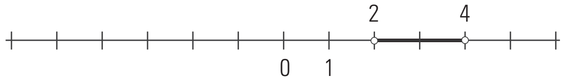
Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola $y = -x^2 + 6x - 5$ es positiva o nula.



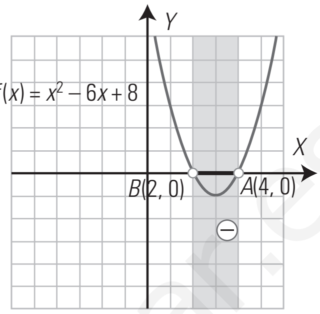
42. $x^2 - 6x + 8 < 0$

$(2, 4) = \{x \in \mathbb{R}, 2 < x < 4\}$



Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola $y = x^2 - 6x + 8$ es negativa.

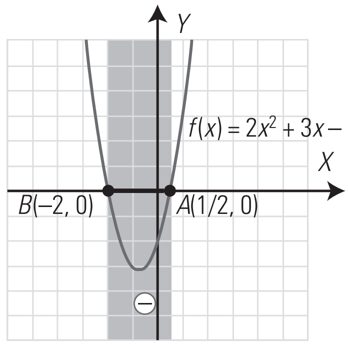


43. $2x^2 + 3x - 2 \leq 0$

$[-2, 1/2] = \{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 1/2\}$

Interpretación gráfica:

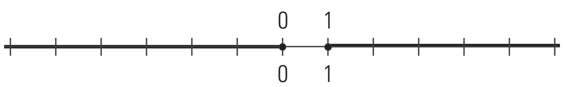
Es el intervalo donde la parábola $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ es negativa o nula.



44. $x^2 \geq x$

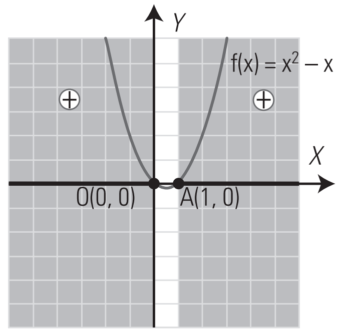
$x^2 - x \geq 0$

$(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$



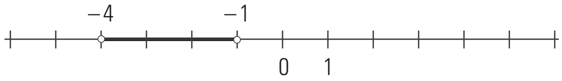
Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola $f(x) = x^2 - x$ es positiva o nula.



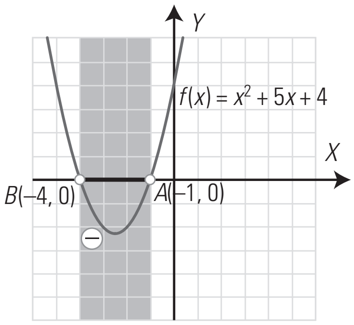
45. $x^2 + 5x + 4 < 0$

$(-4, -1) = \{x \in \mathbb{R}, -4 < x < -1\}$



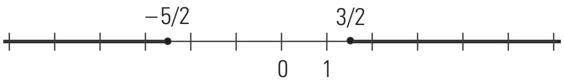
Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola $f(x) = x^2 + 5x + 4$ es negativa o nula.



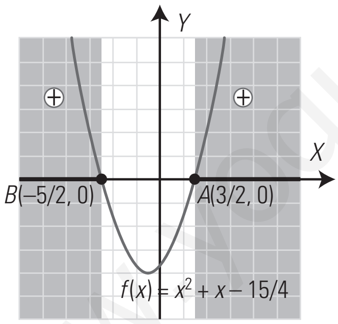
46. $x^2 + x \geq \frac{15}{4}$

$(-\infty, -5/2] \cup [3/2, +\infty)$



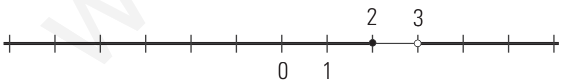
Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola $f(x) = x^2 + x - \frac{15}{4}$ es positiva o nula.



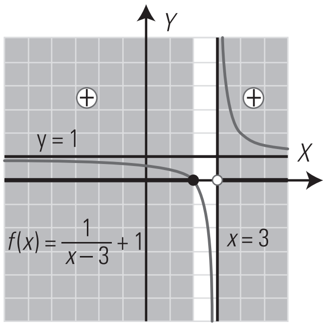
47. $\frac{x-2}{x-3} \geq 0$

$(-\infty, 2] \cup (3, +\infty)$



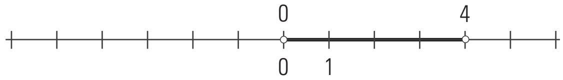
Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la hipérbola $y = \frac{x-2}{x-3}$ es positiva o nula.



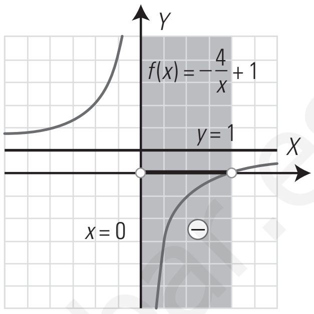
48. $\frac{x-4}{x} < 0$

$(0, 4) = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x < 4\}$



Interpretación gráfica:

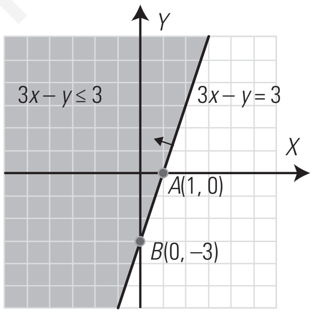
Es el intervalo donde la hipérbola $y = \frac{x-4}{x}$ es negativa.



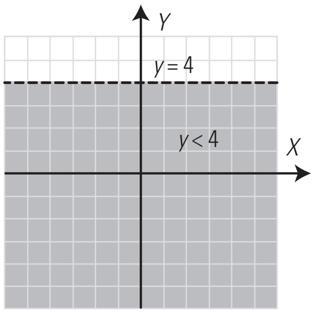
3. INECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Resuelve las siguientes inecuaciones:

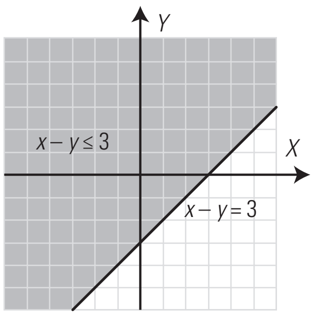
49. $3x - y \leq 3$



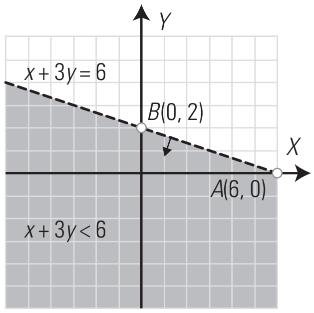
50. $y < 4$



51. $x - y \leq 3$

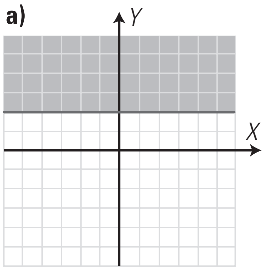


52. $x + 3y < 6$

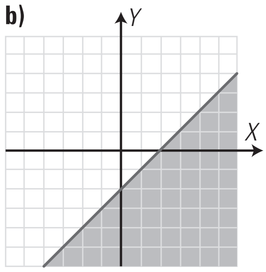


53. Escribe la inecuación correspondiente a la zona coloreada de las siguientes figuras:

a)



b)



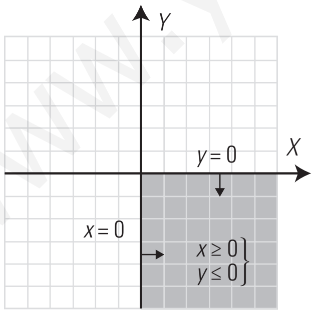
a) $y \geq 2$

b) $x - y \geq 2$

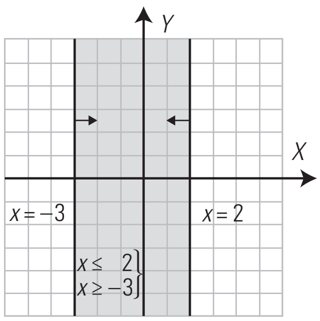
4. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Resuelve mentalmente los siguientes sistemas de inecuaciones:

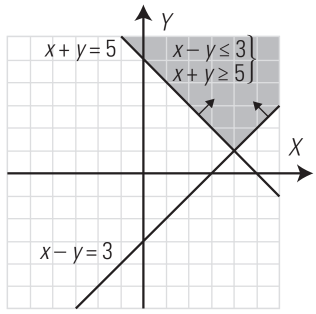
54. $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{array}\right\}$



55. $\left.\begin{array}{l} x \leq 2 \\ x \geq -3 \end{array}\right\}$

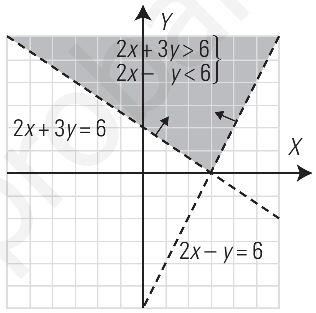


56. $\left.\begin{array}{l} x - y \leq 3 \\ x + y \geq 5 \end{array}\right\}$



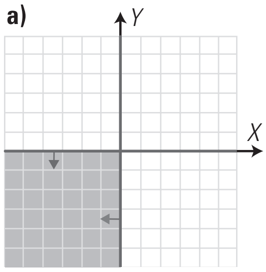
57. Resuelve mentalmente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y > 6 \\ 2x - \ \ y < 6 \end{array}\right\}$$

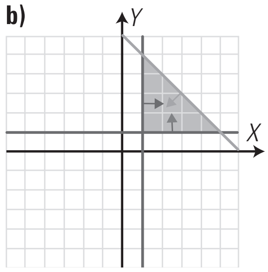


58. Escribe el sistema de inecuaciones correspondiente a la zona coloreada de cada una de las siguientes figuras:

a)



b)



a) $\left.\begin{array}{l} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ x + y \leq 6 \end{array}\right\}$

PARA AMPLIAR

Resuelve las siguientes inecuaciones:

59. $x - 3(x - 2) < 11 - 4x$

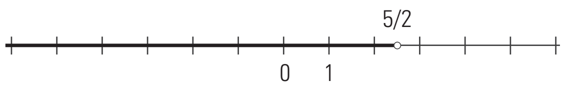
$x - 3x + 6 < 11 - 4x$

$x - 3x + 4x < 11 - 6$

$2x < 5$

$x < \dfrac{5}{2}$

$(-\infty, 5/2) = \{x \in \mathbb{R}, x < 5/2\}$



60. $\mathbf{3(2x-1) > 2x+6x+1}$

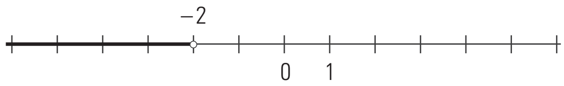
$6x-3 > 2x+6x+1$

$6x-2x-6x > 1+3$

$-2x > 4$

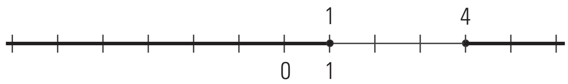
$x < -2$

$(-\infty, -2) = \{x \in \mathbb{R}, x < -2\}$



61. $\mathbf{x^2-5x+4 \geq 0}$

$(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$



62. $\mathbf{x^2+4x+5 < 0}$

La ecuación $x^2+4x+5=0$ no tiene soluciones reales; por tanto, la solución es el conjunto vacío, $\varnothing$, o toda la recta real, $\mathbb{R}$

Si se prueba un punto, $x=0$, quedaría:

$5 < 0$

Esto es falso, por tanto, la solución es el conjunto vacío, $\varnothing$

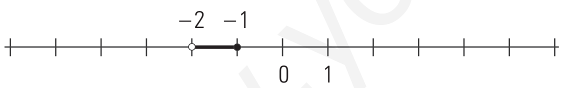
63. $\mathbf{\dfrac{3x+3}{x+2} \leq 0}$

Raíz del numerador: $x=-1$

Raíz del denominador: $x=-2$

Para $x=0 \Rightarrow 3/2$ que no es ≤ 0

$(-2, -1] = \{x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq -1\}$



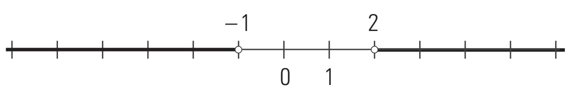
64. $\mathbf{\dfrac{2x+2}{x-2} > 0}$

Raíz del numerador: $x=-1$

Raíz del denominador: $x=2$

Para $x=0 \Rightarrow -1$ que no es >0

$(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$



Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

65. $\left.\begin{array}{r}\mathbf{2x+3>1}\\ \mathbf{4x+5\leq 9+3x}\end{array}\right\}$

Primera ecuación:

$2x+3 > 1$

$2x > -2$

$x > -1$

Segunda ecuación:

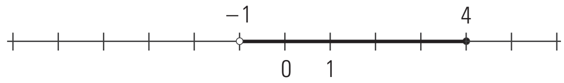
$4x+5 \leq 9+3x$

$4x-3x \leq 9-5$

$x \leq 4$

La solución es el intervalo:

$(-1, 4] = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq 4\}$



66. $\left.\begin{array}{r}\mathbf{-13x+21 \leq 2-3(5x-7)}\\ \mathbf{x+2(3x-5) > 6x-7}\end{array}\right\}$

Primera ecuación:

$-13x+21 \leq 2-3(5x-7)$

$-13x+21 \leq 2-15x+21$

$-13x+15x \leq 2+21-21$

$2x \leq 2$

$x \leq 1$

Segunda ecuación:

$x+2(3x-5) > 6x-7$

$x+6x-10 > 6x-7$

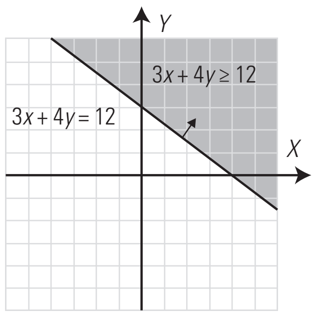
$x+6x-6x > -7+10$

$x > 3$

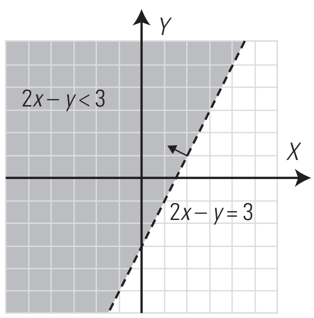
La solución es el conjunto vacío, $\varnothing$, ya que no hay puntos comunes a las soluciones de las dos ecuaciones que forman el sistema.

Resuelve gráficamente las inecuaciones:

67. $\mathbf{3x+4y \geq 12}$

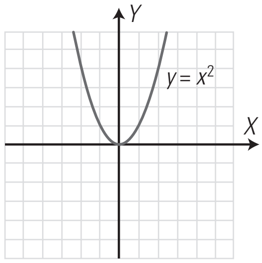


68. $\mathbf{2x-y < 3}$

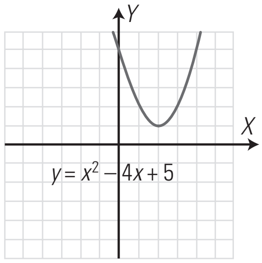


69. Observando las siguientes representaciones gráficas, escribe directamente las soluciones de las inecuaciones correspondientes:

a) $x^2 \geq 0$



b) $x^2 - 4x + 5 \leq 0$

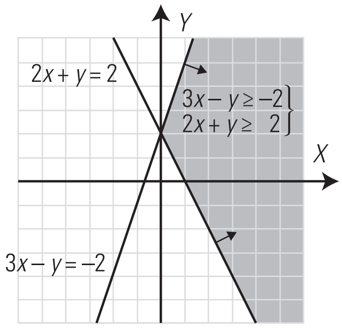


a) Es toda la recta real, $\mathbb{R}$

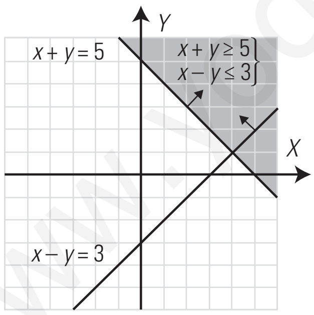
b) Es el conjunto vacío, $\varnothing$

Resuelve gráficamente los sistemas de inecuaciones:

70. $\left.\begin{array}{l} 3x - y \geq -2 \\ 2x + y \geq \ \ 2 \end{array}\right\}$

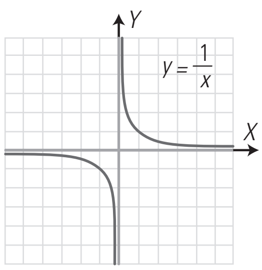


71. $\left.\begin{array}{l} x + y \geq 5 \\ x - y \leq 3 \end{array}\right\}$

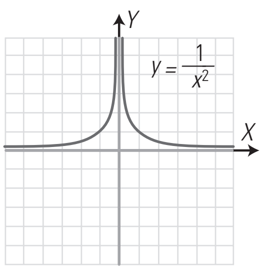


72. Observando las siguientes representaciones gráficas, escribe directamente las soluciones de las inecuaciones correspondientes:

a) $\dfrac{1}{x} \leq 0$



b) $\dfrac{1}{x^2} \geq 0$

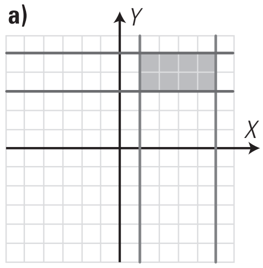


a) $(-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$

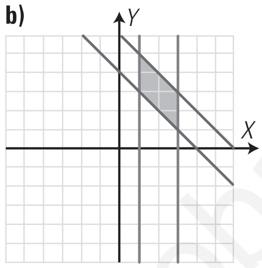
b) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

73. Escribe el sistema de inecuaciones correspondiente a la zona coloreada de cada una de las siguientes figuras:

a)



b)



a) $\left.\begin{array}{r} x \geq 1 \\ x \leq 5 \\ y \geq 3 \\ y \leq 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x \geq 1 \\ x \leq 3 \\ x + y \geq 4 \\ x + y \leq 6 \end{array}\right\}$

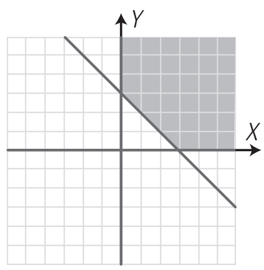
74. El perímetro de un triángulo equilátero es menor o igual que 18 m. Calcula cuánto puede medir el lado.

$3x \leq 18$

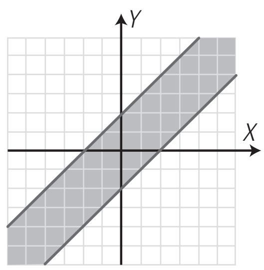
$x \leq 6$ m

75. Escribe el sistema de inecuaciones correspondiente a la zona coloreada de cada una de las siguientes figuras:

a)



b)



a) $\left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y \leq 2 \\ x - y \geq -2 \end{array}\right\}$

PROBLEMAS

76. Dada la función $f(x) = 2x - 6$, halla:

a) cuándo vale cero;

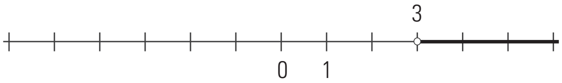
b) cuándo es positiva;

c) cuándo es negativa;

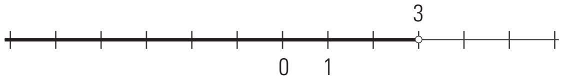
d) Represéntala para comprobarlo.

a) $2x - 6 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

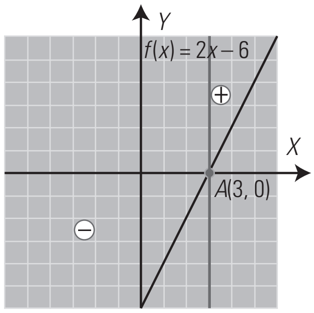
b) $2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3$



c) $2x - 6 < 0 \Rightarrow x < 3$



d) Representación:



77. Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, halla:

a) cuándo vale cero;

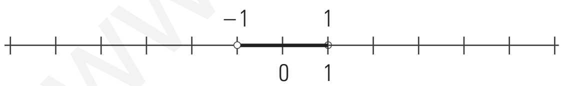
b) cuándo es positiva;

c) cuándo es negativa;

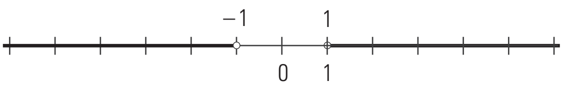
d) Represéntala para comprobarlo.

a) $1 - x^2 = 0 \Rightarrow -x^2 = -1$
$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

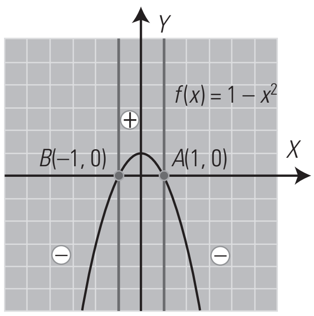
b) $(-1, 1) = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1\}$



c) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



d) Representación:



78. Dada la función: $f(x) = \dfrac{2}{x}$
Halla:

a) cuándo vale cero;

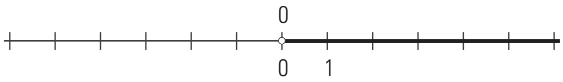
b) cuándo es positiva;

c) cuándo es negativa;

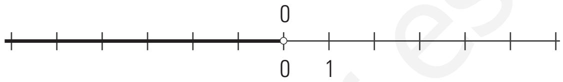
d) Represéntala para comprobarlo.

a) Nunca vale cero.

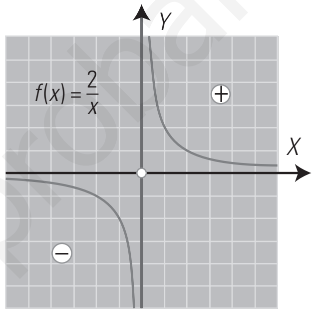
b) $(0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$



c) $(-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$



d) Representación:



79. El perímetro de un cuadrado es menor o igual que 20 m. Calcula cuánto puede medir el lado.

$4x \leq 20$

$x \leq 5$

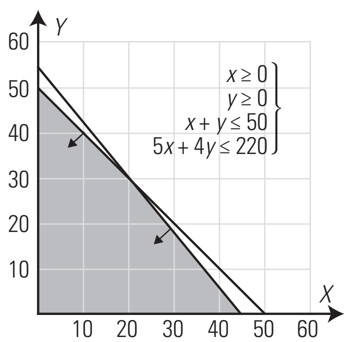
80. Un comerciante desea comprar frigoríficos y lavadoras, que cuestan 500 € y 400 €, respectivamente. Si solo dispone de sitio para almacenar 50 electrodomésticos, y de 22 000 € para invertir, representa en el plano el recinto de todas las posibles soluciones de la cantidad de frigoríficos y lavadoras que puede comprar.

Frigoríficos: x

Lavadoras: y

$$\left.\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x + y &\leq 50 \\ 500x + 400y &\leq 22\,000 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x + y &\leq 50 \\ 5x + 4y &\leq 220 \end{aligned}\right\}$$

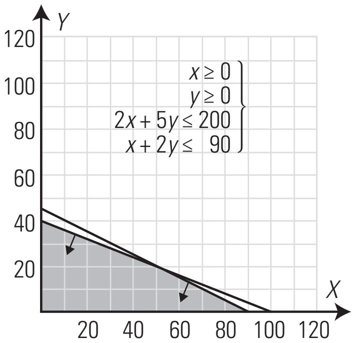


81. Un fabricante vende sillas y mesas. Para su fabricación, necesita 2 h y 5 h, respectivamente, de trabajo manual y 1 h y 2 h para pintarlas. Si el fabricante no puede superar las 200 horas de trabajo manual y 90 horas de pintura, representa en el plano el recinto de las posibles soluciones.

Sillas: x

Mesas: y

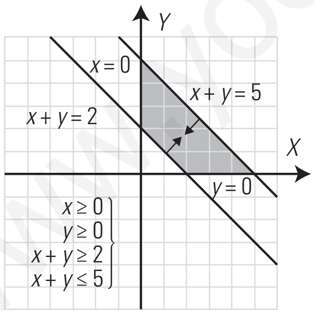
$$\left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 5y \leq 200 \\ x + 2y \leq 90 \end{array}\right\}$$



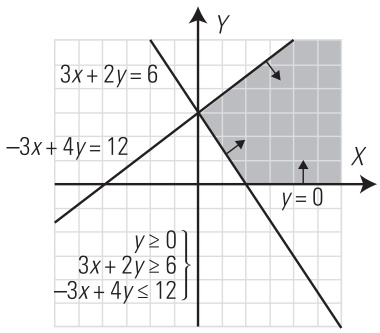
PARA PROFUNDIZAR

Resuelve gráficamente los sistemas de inecuaciones:

82. $$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x \geq 0} \\ \boldsymbol{y \geq 0} \\ \boldsymbol{x + y \geq 2} \\ \boldsymbol{x + y \leq 5} \end{array}\right\}$$



83. $$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{y \geq 0} \\ \boldsymbol{3x + 2y \geq 6} \\ \boldsymbol{-3x + 4y \leq 12} \end{array}\right\}$$



84. Dada la función $f(x) = |x|$, halla:

a) cuándo vale cero;

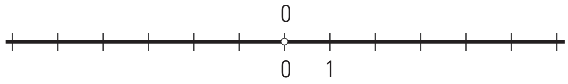
b) cuándo es positiva;

c) cuándo es negativa;

d) Represéntala para comprobarlo.

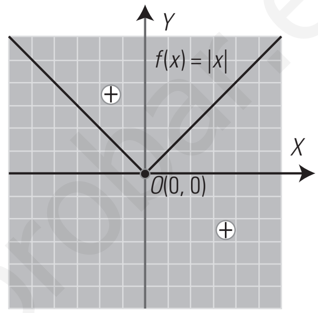
a) $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

b) $|x| > 0$ siempre que $x \neq 0$



c) $|x| < 0$ nunca, es decir, es el conjunto vacío, $\varnothing$

d) Representación:



85. Dada la función $f(x) = -x^2 + 2x - 1$, halla:

a) cuándo vale cero;

b) cuándo es positiva;

c) cuándo es negativa;

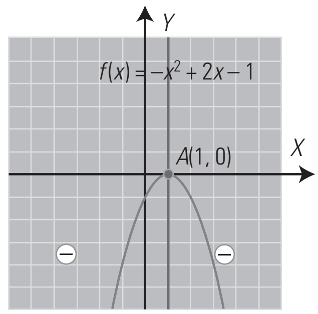
d) Represéntala para comprobarlo.

a) $-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$, raíz doble.

b) Nunca es positiva, es decir, es el conjunto vacío, $\varnothing$

c) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$

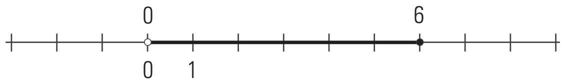
d) Representación:



86. El área de un cuadrado es menor o igual que 36 m². Calcula cuánto puede medir el lado.

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x^2 \leq 36 \end{array}\right\}$$

$(0, 6] = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 6\}$



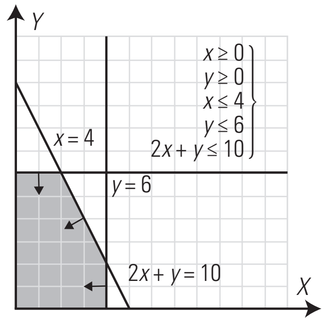
87. Un agricultor puede sembrar en sus tierras, como máximo, 4 hectáreas de trigo y 6 hectáreas de centeno. La producción de trigo, por cada hectárea sembrada, es de 4 toneladas, mientras que la producción de centeno, también por hectárea sembrada, es de 2 toneladas, y se puede producir un máximo de 20 toneladas entre los dos cereales. Representa en el plano el recinto de las posibles soluciones.

Hectáreas de trigo: x

Hectáreas de centeno: y

$$\left.\begin{array}{r} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x \le 4 \\ y \le 6 \\ 4x + 2y \le 20 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x \le 4 \\ y \le 6 \\ 2x + y \le 10 \end{array}\right\}$$

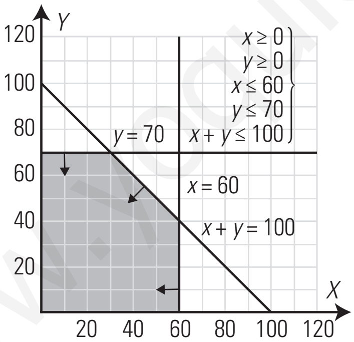


88. El número de unidades de dos productos A y B que una tienda puede vender es, como máximo, igual a 100. Dispone de 60 unidades de producto del tipo A y de 70 unidades del tipo B. Representa en el plano el recinto de las posibles soluciones.

Unidades producto A: x

Unidades producto B: y

$$\left.\begin{array}{r} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x \le 60 \\ y \le 70 \\ x + y \le 100 \end{array}\right\}$$



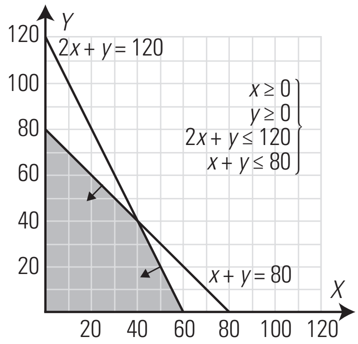
APLICA TUS COMPETENCIAS

89. Una fábrica monta ordenadores e impresoras. Un ordenador necesita 2 h para su montaje, y una impresora, 1 h. Diariamente dispone de 120 h de trabajo y de una capacidad de almacenaje de 80 unidades. Si el ordenador y la impresora tienen las mismas dimensiones y, por tanto, ocupan el mismo espacio en el almacén, ¿cuántos ordenadores e impresoras se pueden montar cada día?

Número de ordenadores: x

Número de impresoras: y

$$\left.\begin{array}{r} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 2x + y \le 120 \\ x + y \le 80 \end{array}\right\}$$

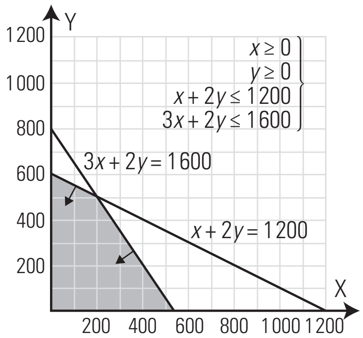


90. Los alumnos de un centro educativo pretenden vender dos tipos de lotes, A y B, para sufragar los gastos del viaje de estudios. Cada lote del tipo A consta de una caja de mantecadas y tres participaciones de lotería; cada lote del tipo B consta de dos cajas de mantecadas y dos participaciones de lotería. Por razones de almacenamiento, pueden disponer a lo sumo de 1 200 cajas de mantecadas. Los alumnos solo cuentan con 1 600 participaciones de lotería, y desean maximizar sus beneficios. ¿Cuántos lotes pueden hacer de cada tipo?

Unidades de lote A: x

Unidades de lote B: y

$$\left.\begin{array}{r} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + 2y \le 1\,200 \\ 3x + 2y \le 1\,600 \end{array}\right\}$$



COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Define qué es una inecuación racional y pon un ejemplo sin resolverlo.

Una inecuación racional es una expresión de la forma:

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$ $\quad$ $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios

donde el operador < puede ser: ≤, > o ≥

Ejemplo:

$\dfrac{x+1}{x-2} \ge 0$

2. Resuelve la inecuación: $2x + 7 \le 3(4x - 1)$

$2x + 7 \le 12x - 3$

$2x - 12x \le -3 - 7$

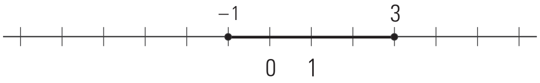
$-10x \le -10$

$x \ge 1$

$[1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R},\ x \ge 1\}$

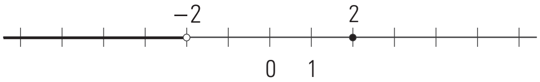
3. Resuelve la inecuación: $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$

$[-1, 3] = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 3\}$



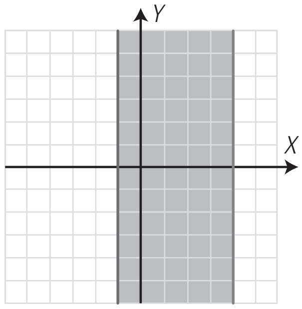
4. Resuelve la siguiente inecuación: $\dfrac{x-2}{x+2} \geq 0$

$(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$

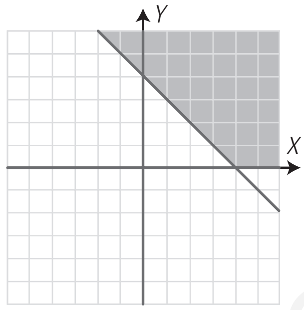


5. Escribe el sistema de inecuaciones correspondiente a la zona coloreada de cada una de las figuras:

a)



b)

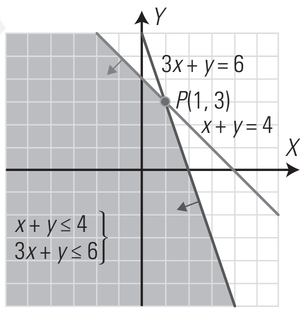


a) $\left.\begin{array}{r} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \end{array}\right\}$

6. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y \leq 4 \\ 3x + y \leq 6 \end{array}\right\}$$



7. Dada la función: $f(x) = 4 - x^2$, halla:

a) cuándo vale cero;

b) cuándo es positiva;

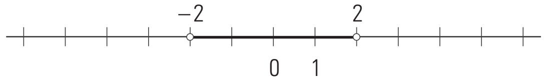
c) cuándo es negativa;

d) Represéntala para comprobarlo.

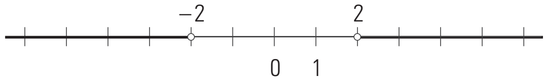
a) $4 - x^2 = 0 \Rightarrow -x^2 = -4$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

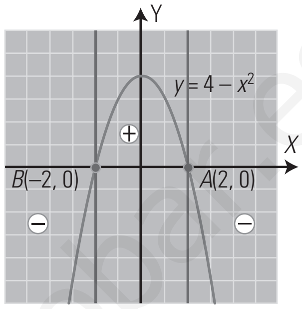
b) $(-2, 2) = \{x \in \mathbb{R}, -2 < x < 2\}$



c) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



d) Representación:



8. Un pastelero produce dos tipos de bollos. El tipo A lleva 400 g de harina y 100 g de azúcar, mientras que los del tipo B llevan 300 g de harina y 200 g de azúcar. Si el pastelero tiene para cada día 30 kg de harina y 10 kg de azúcar, ¿cuántos bollos puede producir de cada tipo?

$$\left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0{,}4x + 0{,}3y \leq 30 \\ 0{,}1x + 0{,}2y \leq 10 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 3y \leq 300 \\ x + 2y \leq 100 \end{array}\right\}$$

WINDOWS/LINUX WIRIS

PRACTICA

95. Resuelve la siguiente inecuación: $x + 7 \leq 3x + 4$

$x \geq 3/2$

Es el intervalo: $[3/2, +\infty)$

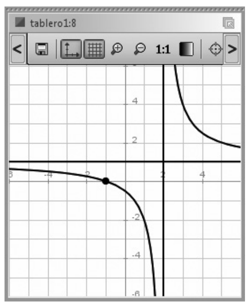
96. Resuelve la siguiente inecuación y haz la representación gráfica correspondiente:

$$\frac{x+1}{x-2} \geq 0$$

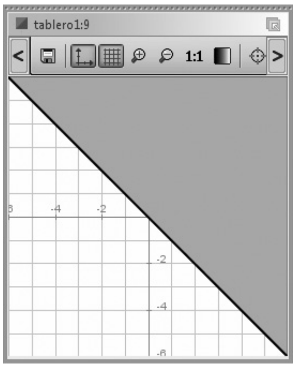
$x \leq -1 / x > 2$

Son los intervalos:

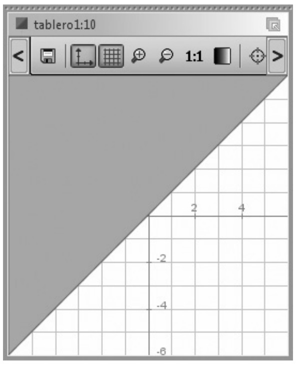
$(-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$



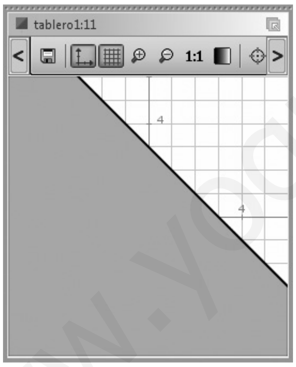
97. Resuelve la siguiente inecuación: $x + y \geq 0$



98. Resuelve la siguiente inecuación: $x - y \leq 0$

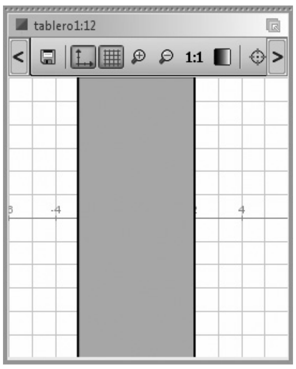


99. Resuelve la siguiente inecuación: $x + y \leq 3$



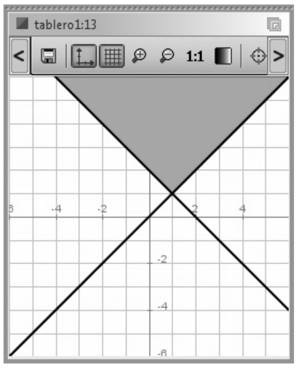
100. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 2 \\ x \geq -3 \end{array}\right\}$$



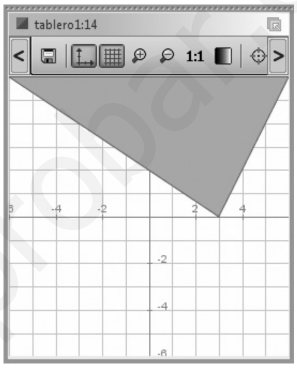
101. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 2 \\ x - y \geq 0 \end{array}\right\}$$



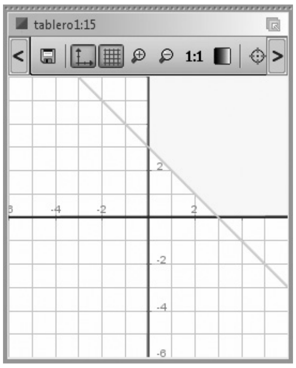
102. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y > 6 \\ 2x - \ \ y < 6 \end{array}\right\}$$



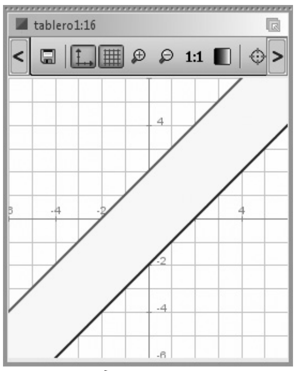
Halla mediante *ensayo-acierto* cada uno de los sistemas de inecuaciones correspondientes a la zona coloreada de cada una de las siguientes figuras:

103.



$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 3 \end{array}\right\}$$

104.



$$\left.\begin{array}{l} x - y \geq -2 \\ x - y \leq 2 \end{array}\right\}$$

Evaluación de diagnóstico

BLOQUE II: ÁLGEBRA

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. **Desarrolla el binomio:**

$$(2+x^2)^4$$

$x^8+8x^6+24x^4+32x^2+16$

2. **Factoriza el siguiente polinomio, halla sus raíces y su multiplicidad:**

$$P(x)=x^4-3x^3-3x^2+7x+6$$

$(x-3)(x-2)(x+1)^2$

Las raíces son:

$x_1=-1$, multiplicidad 2; $x_3=2$, multiplicidad 1; $x_4=3$, multiplicidad 1

3. **Calcula y simplifica:**

$$\left(\frac{2x+1}{2x-4}+\frac{2x+7}{2x+4}-2\right):\left(\frac{x-1}{x-2}-1\right)$$

$\dfrac{3x}{x+2}$

4. **Resuelve la siguiente ecuación:**

$$\frac{x-3}{4}+\frac{2}{x+3}=\frac{3}{4}$$

$x_1=-2,\ x_2=5$

5. **Resuelve la siguiente ecuación:**

$$x-\sqrt{16+x^2}=-2$$

$x=3$

6. **Resuelve la siguiente ecuación:**

$$25^x-30\cdot 5^x+125=0$$

$x_1=1,\ x_2=2$

7. **Resuelve la siguiente ecuación:**

$$2\log x=\log(5x-6)$$

$x_1=1,\ x_2=3$

8. **Resuelve el siguiente sistema:**

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{6}+\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{4}{3}\\[2ex]\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{y-6}{5}=2\end{array}\right\}$$

$x=4,\ y=1$

9. **Resuelve el siguiente sistema e interpreta geométricamente el resultado:**

$$\left.\begin{array}{l}y=x^2+2x-4\\ y=x-2\end{array}\right\}$$

$x=-2,\ y=-4;\ x=1,\ y=-1$

La recta y la parábola se cortan en los puntos $A(-2,-4)$ y $B(1,-1)$

10. **Resuelve el siguiente sistema:**

$$\left.\begin{array}{l}3^x-2^{y+1}=-5\\ 3^{x-1}+2^y=25\end{array}\right\}$$

$x=3,\ y=4$

11. **Resuelve la siguiente inecuación:**

$$\frac{x+5}{x-3}\geq 0$$

$(-\infty,-5)\cup(3,+\infty)$

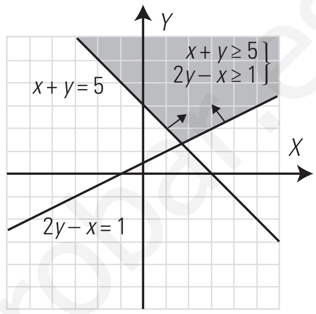
12. **Resuelve la siguiente inecuación:**

$$x^2+5x+4<0$$

$(-4,-1)$

13. **Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:**

$$\left.\begin{array}{r}x+y\geq 3\\ 2y-x\geq 1\end{array}\right\}$$



14. **Halla el valor de k para que el polinomio**

$$P(x)=x^4-kx^3+8x+3$$

sea divisible por el binomio

$$x-1$$

$k=12$

15. **Halla tres números enteros consecutivos tales que la diferencia entre su producto y el cubo del menor sea 901**

Los números son: 17, 18 y 19

16. **Hace 3 años la edad de un padre era el cuádruple de la de su hijo. Dentro de dos años, la edad que tenga el padre será el triple de la del hijo. Calcula la edad del padre y la del hijo actualmente.**

La edad del hijo es de 13 años y la del padre, 43 años.

17. **Halla las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que el largo más el ancho miden 16 m y su área es de 63 m²**

La base mide 9 m y la altura, 7 m

18. **Calcula la longitud del lado de un cuadrado sabiendo que su área es la novena parte del área de otro cuadrado cuyo lado es 8 cm más largo.**

El lado del cuadrado mide 4 cm

19. **En la compra de un ordenador y una impresora se han pagado 800 €. Si en el ordenador hubieran hecho un descuento del 25% y en la impresora, del 30%, se habrían pagado 590 €. ¿Cuál es el precio de cada objeto?**

El ordenador cuesta 600 € y la impresora, 200 €

20. Se mezclan 60 kg de café natural con 90 kg de café torrefacto y se vende a 7,04 €/kg. Si el café natural es 0,6 €/kg más caro que el torrefacto, ¿cuál era el precio de cada clase de café?

El café torrefacto cuesta 6,8 €/kg y el natural, 7,4 €/kg

21. Un problema de producción.

Una fábrica monta *tablets* de dos modelos. Un modelo A y otro B. Una *tablet* del modelo A necesita 3 horas para su montaje, y una del modelo B, 2 horas. La fábrica dispone de 120 horas de mano de obra diariamente y puede almacenar hasta 50 *tablets.*

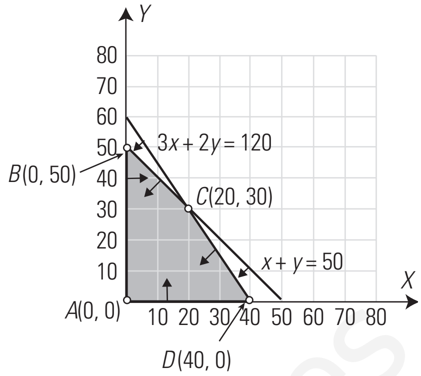
a) Represente en el plano el recinto de todas las posibles soluciones.

b) La fábrica obtiene un beneficio de 200 € en la venta de la *tablet* del modelo A, y un beneficio de 150 € en el modelo B. ¿Cuántas *tablets* deben montar de cada modelo para obtener el máximo beneficio?

a) Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

	Modelo A	Modelo B	Restricciones
N.º de *tablets* que se deben montar	x	y	$x \geq 0$ $y \geq 0$
N.º de horas de montaje	$3x$	$2y$	$3x + 2y \leq 120$
N.º de *tablets* almacenadas	x	y	$x + y \leq 50$
Beneficio	$200x$	$150y$	$P(x, y) = 200x + 150y$

• Copia en tu cuaderno y dibuja el recinto formado por las cuatro inecuaciones:



• Halla los vértices del polígono dibujado:

$A(0, 0)$, $B(0, 50)$, $C(20, 30)$, $D(40, 0)$

b) Halla los valores del polinomio beneficio para cada vértice del polígono anterior:

$P(0, 0) = 200 \cdot 0 + 150 \cdot 0 = 0$

$P(0, 50) = 200 \cdot 0 + 150 \cdot 50 = 7\,500$

$P(20, 30) = 200 \cdot 20 + 150 \cdot 30 = 8\,500$

$P(40, 30) = 200 \cdot 40 + 150 \cdot 0 = 8\,000$

• Copia y completa en tu cuaderno:

El número de *tablets* de cada modelo que maximiza el beneficio es: 20 **del modelo A y** 30 **del modelo B**

Solucionario bloque III.
Geometría

7. Semejanza y trigonometría

1. Teorema de Thales

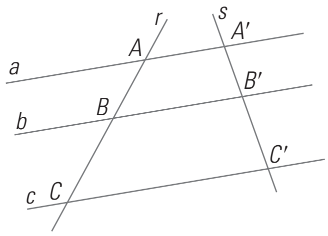
PIENSA Y CALCULA

Si una persona que mide 1,70 m proyecta una sombra de 3,40 m, y el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar la sombra de un árbol mide 15 m, ¿cuánto mide de alto el árbol?

Se observa que el objeto mide la mitad que la sombra; por tanto, el árbol mide 15 : 2 = 7,5 m

APLICA LA TEORÍA

1. Sabiendo que en el siguiente dibujo *AB* = 18 cm, *BC* = 24 cm y *A′B′* = 15 cm, halla la longitud del segmento *B′C′*. ¿Qué teorema has aplicado?



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{15}{18} = \frac{B'C'}{24}$$

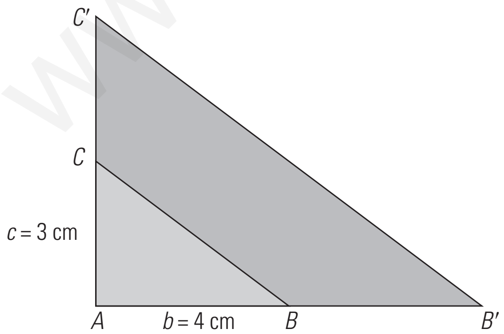
$B'C' = 20$ cm

Hemos aplicado el teorema de Thales.

2. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4 cm y 3 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo en posición de Thales de forma que el cateto mayor mida 8 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

$r = 8 : 4 = 2$

$c' = 2 \cdot 3 = 6$ cm



3. Dos ángulos de un triángulo miden 45° y 60° y otros dos ángulos de otro triángulo miden 75° y 60°. ¿Son semejantes ambos triángulos?

El 3.er ángulo del 1.er triángulo mide:

$180° - (45° + 60°) = 180° - 105° = 75°$

Es decir, los ángulos del 1.er triángulo miden 45°, 60° y 75°

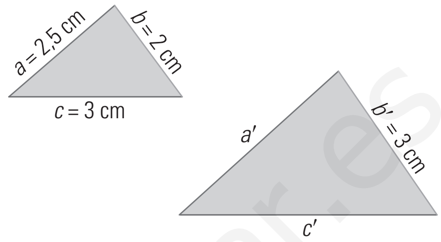
El 3.er ángulo del 2.º triángulo mide:

$180° - (75° + 60°) = 180° - 135° = 45°$

Es decir, los ángulos del 2.º triángulo miden 45°, 60° y 75°

Como los dos triángulos tienen sus ángulos iguales, son semejantes.

4. Los dos triángulos del siguiente dibujo son semejantes. Halla cuánto miden *a′* y *c′*



$r = b' : b$

$r = 3 : 2 = 1,5$

$a' = 1,5 \cdot 2,5 = 3,75$ cm

$c' = 1,5 \cdot 3 = 4,5$ cm

5. En una foto están Ana y su madre. Se sabe que Ana mide en la realidad 1,65 m. En la foto Ana mide 6,6 cm, y su madre, 6,88 cm. ¿Cuánto mide su madre en la realidad?

$$\frac{6,6}{165} = \frac{6,88}{x}$$

$x = 172$ cm $= 1,72$ m

6. Un palo vertical de 1,75 m proyecta una sombra de 2 m. Si la sombra de un edificio el mismo día, en el mismo sitio y a la misma hora mide 24 m, ¿cuánto mide de alto el edificio?

$$\frac{2}{1,75} = \frac{24}{x}$$

$x = 21$ m

7. La superficie de una esfera es de 15 m². Halla la superficie de otra esfera en la que el radio mide el triple.

$S' = 3^2 \cdot 15 = 135$ m^2

2. Teorema de Pitágoras

PIENSA Y CALCULA

¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

a) 3, 4 y 5 **b) 6, 7 y 8**

c) 6, 8 y 10 **d) 5, 12 y 13**

a) $3^2 + 4^2 = 5^2$ b) $6^2 + 7^2 \neq 8^2$

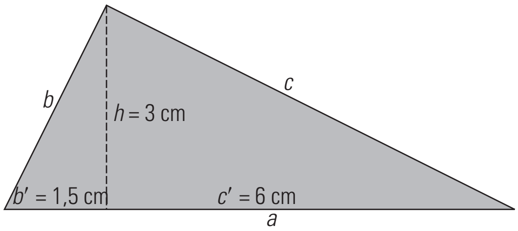
c) $6^2 + 8^2 = 10^2$ d) $5^2 + 12^2 = 13^2$

Son ternas pitagóricas a), c) y d)

APLICA LA TEORÍA

8. En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a esta en dos segmentos de longitudes 1,5 cm y 6 cm. Halla la longitud de dicha altura y dibuja el triángulo rectángulo.

$h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h^2 = 1,5 \cdot 6 \Rightarrow h = \sqrt{1,5 \cdot 6} = 3$ cm



9. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 m y la proyección del cateto *b* sobre ella mide 3,6 m. Halla:

a) la longitud del cateto *b*

b) la longitud de la proyección del cateto c sobre la hipotenusa;

c) la longitud del cateto *c*

d) la longitud de la altura relativa a la hipotenusa *h*

e) Dibuja el triángulo rectángulo.

a) $b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b^2 = 10 \cdot 3,6 \Rightarrow b = \sqrt{10 \cdot 3,6} = 6$ m

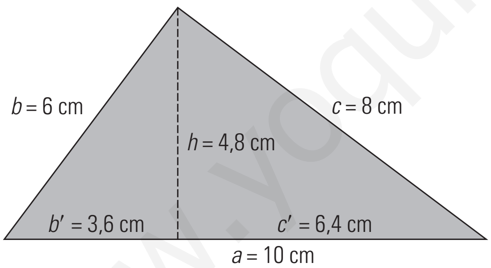
b) $c' = a - b'$

$c' = 10 - 3,6 = 6,4$ m

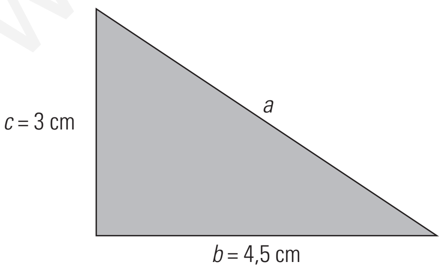
c) $c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c^2 = 10 \cdot 6,4 \Rightarrow c = \sqrt{10 \cdot 6,4} = 8$ m

d) $h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h^2 = 3,6 \cdot 6,4 \Rightarrow h = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = 4,8$ m

e)



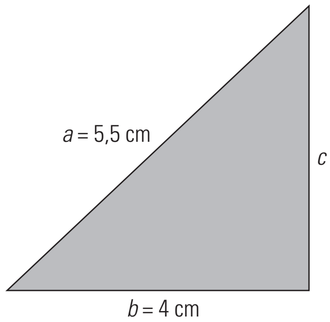
10. En un triángulo rectángulo los catetos miden 4,5 cm y 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa. Redondea el resultado a dos decimales.



$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4,5^2 + 3^2 = 29,25$

$a = \sqrt{29,25^2} = 5,41$ cm

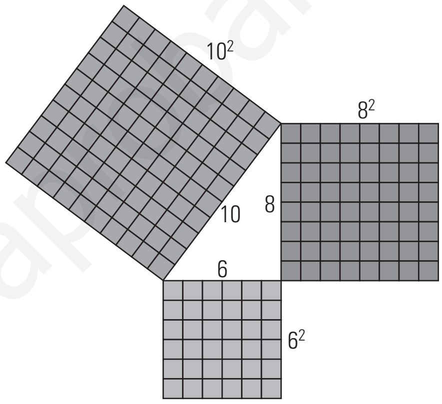
11. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5,5 cm, y un cateto, 4 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.



$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 5,5^2 - 4^2 = 14,25$

$c = \sqrt{14,25} = 3,77$ cm

12. Dibuja la interpretación gráfica del teorema de Pitágoras en el caso en que los lados midan 6, 8 y 10 centímetros.



$6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow 36 + 64 = 100$

13. ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

a) 2, 3 y 4 **b) 3, 4 y 5**

c) 4, 5 y 6 **d) 5, 12 y 13**

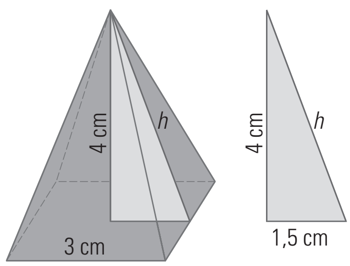
a) $2^2 + 3^2 \neq 4^2 \Rightarrow$ No

b) $3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow$ Sí

c) $4^2 + 5^2 \neq 6^2 \Rightarrow$ No

d) $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow$ Sí

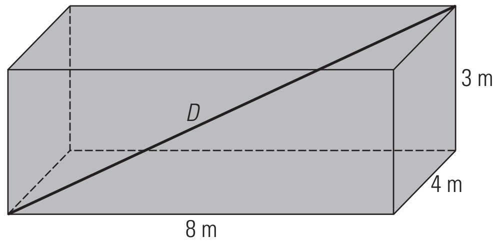
14. En una pirámide cuadrangular la arista de la base mide 3 cm, y la altura, 4 cm. Calcula el área lateral de dicha pirámide. Redondea el resultado a dos decimales.



$h^2 = 1,5^2 + 4^2 \Rightarrow h^2 = 18,25 \Rightarrow h = \sqrt{18,25} = 4,27$ cm

$A_L = 4 \cdot \dfrac{3 \cdot 4,27}{2} = 25,62$ cm^2

15. Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 8 m, 4 m y 3 m



Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

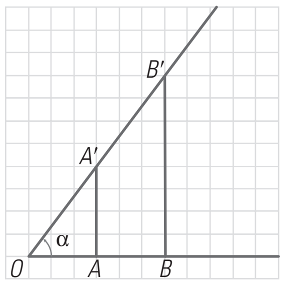
$D^2 = 8^2 + 4^2 + 3^2$

$D = 9,43$ m

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS O CIRCULARES

PIENSA Y CALCULA

Dado el ángulo α del dibujo:



a) aplica el teorema de Pitágoras y calcula mentalmente los segmentos *OA′* y *OB′*

b) halla las razones siguientes y di si hay alguna relación entre ellas: $\dfrac{AA'}{OA'}$ y $\dfrac{BB'}{OB'}$

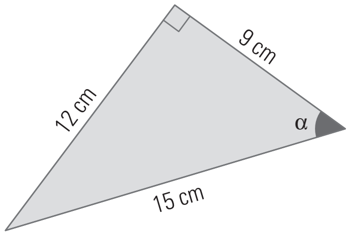
a) $OA' = 5$, $OB' = 10$

b) $\dfrac{AA'}{OA'} = \dfrac{4}{5}, \dfrac{BB'}{OB'} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

Las dos razones son iguales.

APLICA LA TEORÍA

16. Halla todas las razones trigonométricas del ángulo α en el siguiente triángulo:

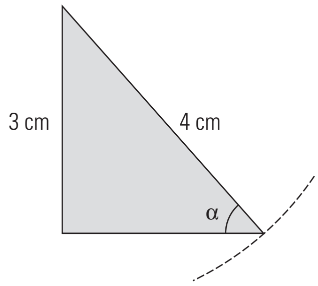


$\text{sen } \alpha = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{5}{4}$

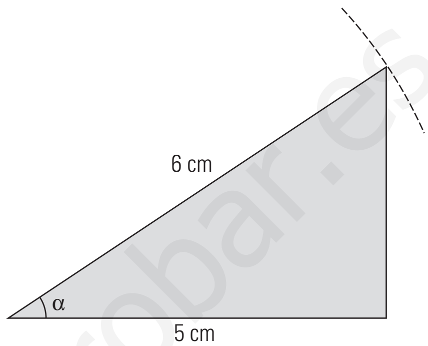
$\cos \alpha = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \sec \alpha = \dfrac{5}{3}$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \dfrac{3}{4}$

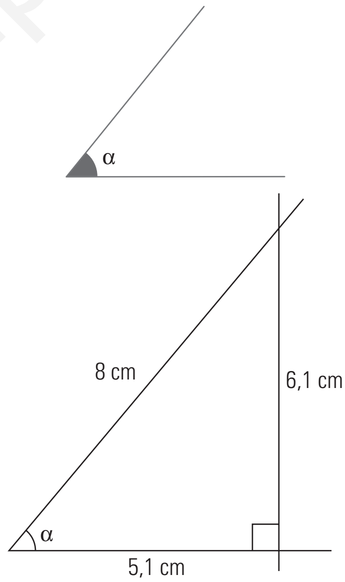
17. Dibuja un ángulo tal que sen α = 3/4



18. Dibuja un ángulo tal que cos α = 5/6



19. Calcula de forma aproximada el valor del sen α, cos α y tg α en el siguiente dibujo:

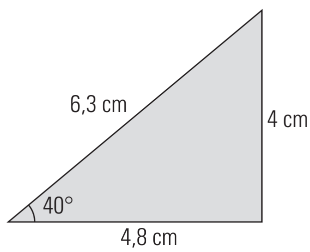


$\text{sen } \alpha = \dfrac{6,1}{8} = 0,76$

$\cos \alpha = \dfrac{5,1}{8} 5,1/8 = 0,64$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{6,1}{5,1} = 1,20$

20. Dibuja un triángulo rectángulo con un ángulo agudo α de 40° y aproxima, midiendo en el dibujo, el valor del sen α, cos α y tg α



$\text{sen } 40° = \dfrac{4}{6,3} = 0,63$

$\cos 40° = \dfrac{4,8}{6,3} = 0,76$

$\text{tg } 40° = \dfrac{4}{4,8} = 0,83$

21. Calcula, usando la calculadora, el valor de las siguientes razones trigonométricas. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) sen 32°

b) cos 68°

c) tg 85° 40′ 8″

d) sen 46° 35′ 12″

a) 0,5299 b) 0,3746

c) 13,2037 d) 0,7264

22. Calcula, usando la calculadora, la amplitud del ángulo agudo α:

a) sen α = 0,5765

b) cos α = 0,3907

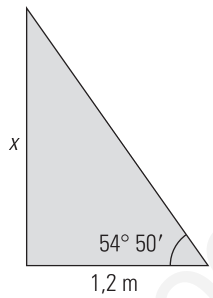
c) tg α = 1,8940

d) cos α = 0,3786

a) 35° 12′ 17′′ b) 67° 7′′

c) 62° 10′ d) 67° 45′ 11′′

23. Elisa y su sombra forman un ángulo recto. La sombra mide 1,2 m y el ángulo con el que se ve la parte superior de su cabeza desde el extremo de la sombra mide 54° 50′. Calcula la altura de Elisa.



$$\text{tg } 54° 50' = \frac{x}{1,2} \Rightarrow x = 1,2 \text{ tg } 54° 50' = 1,70 \text{ m}$$

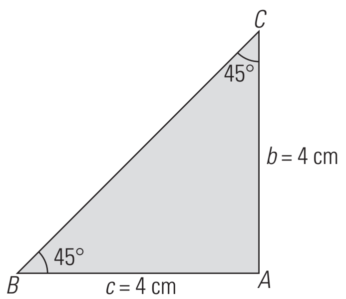
4. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

PIENSA Y CALCULA

Dibuja un triángulo rectángulo isósceles.

a) ¿Cuánto miden sus ángulos agudos?

b) Calcula el valor de la tangente de uno de sus ángulos agudos.



a) Los ángulos miden 90° : 2 = 45°

b) $\text{tg } 45° = \frac{4}{4} = 1$

APLICA LA TEORÍA

24. Sea α un ángulo agudo y sen α = 2/5. Calcula cos α

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

25. Sea α un ángulo agudo y sec α = 17/8. Calcula tg α

$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \left(\frac{17}{8}\right)^2$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{15}{8}$$

26. Sea α un ángulo agudo y tg α = 3. Calcula sen α

$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$3^2 + 1 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec^2 \alpha = 10 \Rightarrow \sec \alpha = \sqrt{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha \cdot \cos \alpha = 3\,\frac{\sqrt{10}}{10}$$

27. Calcula cos 40° sabiendo que se verifica que sen 50° = 0,7660

cos 40° = sen 50° = 0,7660

28. Sea α un ángulo agudo y sen α = 1/4. Calcula las restantes razones trigonométricas de α

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = 4$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{15}{16}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{4} : \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{15}{\sqrt{15}} = \sqrt{15}$$

29. Sabiendo que sen 20° = 0,3420 y cos 20° = 0,9397, calcula:

a) cos 70° b) sen 70° c) tg 20° d) tg 70°

a) cos 70° = sen 20° = 0,3420

b) sen 70° = cos 20° = 0,9397

c) $\text{tg } 20 = \frac{\text{sen } 20°}{\cos 20°} = 0,3639$

d) $\text{tg } 70° = \frac{\text{sen } 70°}{\cos 70°} = 2,7477$

30. Simplifica la siguiente expresión:

$$\cos \alpha + \text{sen } \alpha \cdot \text{tg } \alpha$$

$$\cos \alpha + \text{sen } \alpha \cdot \text{tg } \alpha = \cos \alpha + \text{sen } \alpha \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$$

31. Simplifica la siguiente expresión:

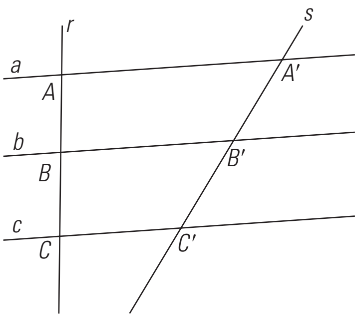
$$\frac{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\sec\alpha}$$

$$\frac{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\sec\alpha}=\frac{\sec^2\alpha}{\sec\alpha}=\sec\alpha$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. TEOREMA DE THALES

32. Sabiendo que *AB* = 7,5 cm, *BC* = 10 cm y *B′C′* = 12 cm, halla la longitud del segmento *A′B′*. ¿Qué teorema has aplicado?



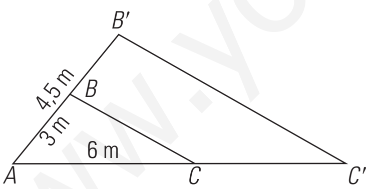
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{A'B'}{7{,}5}=\frac{12}{10}$$

$A'B' = 9$ cm

Hemos aplicado el teorema de Thales.

33. Sabiendo que *AB* = 3 m, *AC* = 6 m y que *AB′* = 4,5 m, halla la longitud del lado *AC′*. ¿Cómo están los triángulos *ABC* y *AB′C′*?



$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{AC'}{AC}$$

$$\frac{4{,}5}{3}=\frac{AC'}{6}$$

$AC' = 9$ cm

Los triángulos *ABC* y *AB′C′* están en posición de Thales.

34. Un ángulo de un triángulo mide 53° y los lados que lo forman miden *a* = 6 cm y *b* = 9 cm. En otro triángulo semejante se sabe que un ángulo mide 53° y que uno de los lados que lo forman mide *a′* = 15 cm, ¿Cuánto mide el otro lado del ángulo de 53°?

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$$

$$\frac{15}{6}=\frac{x}{9}$$

$x = 22{,}5$ cm

35. Un árbol de 1,6 m proyecta una sombra de 1,2 m. En el mismo sitio, el mismo día y a la misma hora, la sombra de una antena de telefonía móvil mide 52 m. ¿Cuánto mide de alto la antena de telefonía móvil?

$$\frac{1{,}2}{1{,}6}=\frac{52}{x}$$

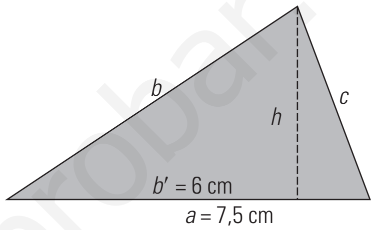
$x = 69{,}33$ cm

36. El volumen de una esfera es de 7,5 cm³. Calcula el volumen de otra esfera en la que el radio mide el doble.

$V' = 2^3 \cdot 7{,}5 = 60\ \mathrm{cm}^3$

2. TEOREMA DE PITÁGORAS

37. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 7,5 cm, y uno de los segmentos en que la divide la altura correspondiente mide 6 cm. Dibuja el triángulo rectángulo y halla la longitud de dicha altura.



$h^2 = b' \cdot c'$

$b' = 6$ cm

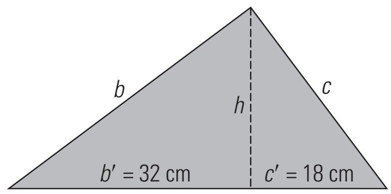
$c' = \alpha - b' = 7{,}5 - 6 = 1{,}5$ cm

$h^2 = 6 \cdot 1{,}5 = 9$

$h = 3$ cm

38. En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a esta en dos segmentos que miden *b′* = 32 cm y *c′* = 18 cm. Halla:

a) el cateto *b* **b) el cateto *c***



a) $b^2 = a \cdot b'$

$a = b' + c' = 32 + 18 = 50$ cm

$b^2 = 50 \cdot 32$

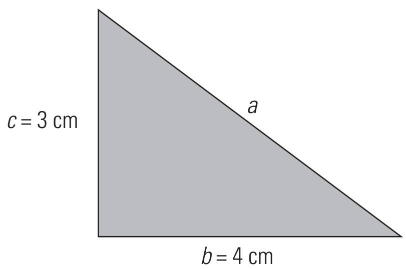
$b = 40$ cm

b) $c^2 = a \cdot c'$

$c^2 = 50 \cdot 18$

$c = 30$ cm

39. En un triángulo rectángulo los catetos miden 4 cm y 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa y el área del triángulo rectángulo.

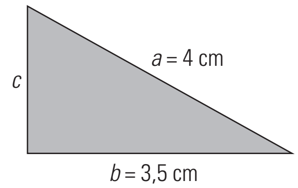


$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$a = \sqrt{25} = 5$ cm

$\text{Área} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$

40. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 4 cm, y un cateto, 3,5 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.



$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 4^2 - 3{,}5^2 = 3{,}75 \Rightarrow$
$\Rightarrow c = \sqrt{3{,}75} = 1{,}94$ cm

41. ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

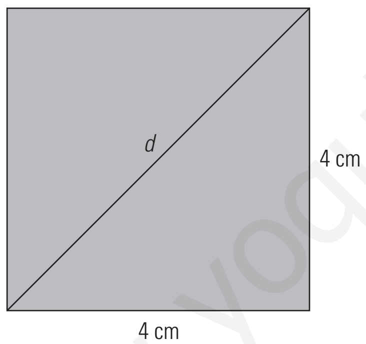
a) 5, 7 y 9 **b) 6, 8 y 10**

c) 7, 9 y 11 **d) 10, 24 y 26**

a) $5^2 + 7^2 \neq 9^2 \Rightarrow$ No. b) $6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow$ Sí.

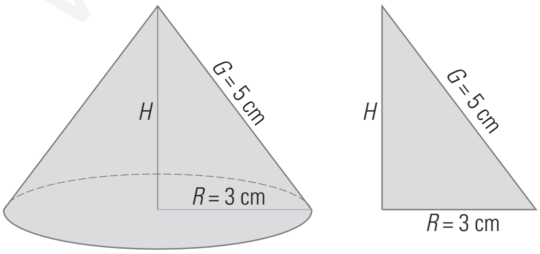
c) $7^2 + 9^2 \neq 11^2 \Rightarrow$ No. d) $10^2 + 24^2 = 26^2 \Rightarrow$ Sí.

42. Dibuja un cuadrado de 4 cm de lado y su diagonal. Halla la longitud de la diagonal. Redondea el resultado a un decimal y comprueba el resultado midiendo con una regla.



$d^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow d = \sqrt{32} = 5{,}7$ cm

43. Del siguiente cono se sabe que el radio de la base mide 3 cm y la generatriz mide 5 cm. Calcula el volumen de dicho cono. Redondea el resultado a dos decimales.



Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la altura H

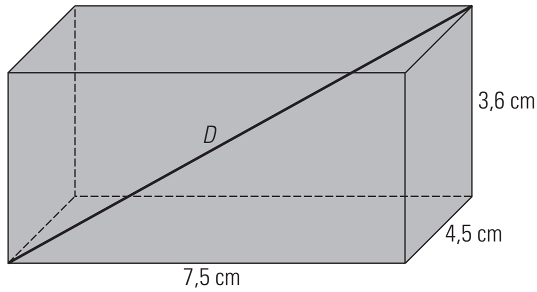
$R^2 + H^2 = G^2 \Rightarrow H^2 = 5^2 - 3^2 = 16$

$H = \sqrt{16} = 4$ cm

$V = \dfrac{1}{3} A_B \cdot \text{H}$

$V = \dfrac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 37{,}70 \text{ cm}^2$

44. Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 7,5 cm, 4,5 cm y 3,6 cm



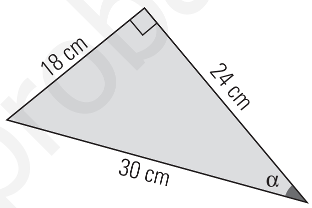
Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 7{,}5^2 + 4{,}5^2 + 3{,}6^2$

$D = 9{,}46$ cm

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS O CIRCULARES

45. Halla todas las razones trigonométricas del ángulo α en el siguiente triángulo:

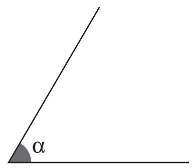


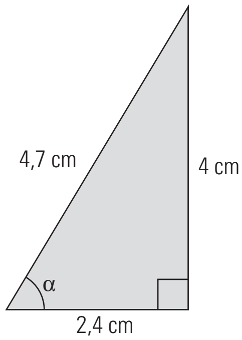
$\text{sen } \alpha = \dfrac{18}{30} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \dfrac{5}{3}$

$\cos \alpha = \dfrac{24}{30} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \sec \alpha = \dfrac{5}{4}$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \dfrac{4}{3}$

46. Calcula el valor del seno, el coseno y la tangente del siguiente ángulo:



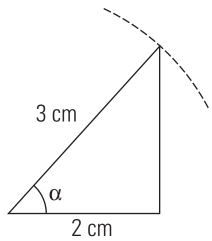


$\text{sen } \alpha = \dfrac{4}{4{,}7} = 0{,}85$

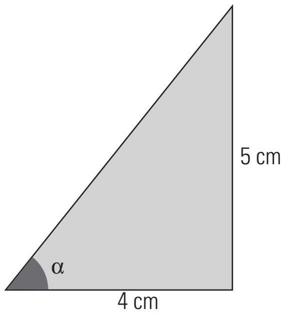
$\cos \alpha = \dfrac{2{,}4}{4{,}7} = 0{,}51$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{4}{2{,}4} = 1{,}67$

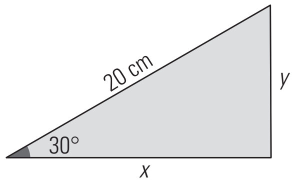
47. Dibuja un ángulo agudo α tal que $\cos \alpha = 2/3$



48. Dibuja un ángulo agudo α tal que tg α = 5/4



49. Calcula la longitud de los catetos en el siguiente triángulo rectángulo sabiendo que se verifica que sen 30° = 0,5 y cos 30° = 0,8660



$\text{sen } 30° = \dfrac{y}{20}$

$0{,}5 = \dfrac{y}{20} \Rightarrow y = 0{,}5 \cdot 20 = 10 \text{ cm}$

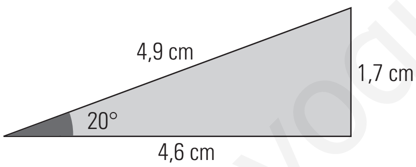
$\cos 30° = \dfrac{x}{20}$

$0{,}8660 = \dfrac{x}{20} \Rightarrow x = 0{,}8660 \cdot 20 = 17{,}32 \text{ cm}$

50. Dibuja los siguientes ángulos y aproxima midiendo en el dibujo el valor del seno, el coseno y la tangente. Aproxima el resultado a dos decimales:

a) 20° **b) 50°**

a)

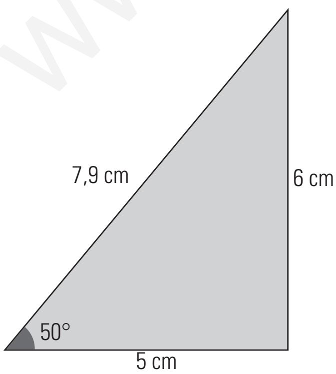


$\text{sen } 20° = \dfrac{1{,}7}{4{,}9} = 0{,}35$

$\cos 20° = \dfrac{4{,}6}{4{,}9} = 0{,}94$

$\text{tg } 20° = \dfrac{1{,}7}{4{,}6} = 0{,}37$

b)



$\text{sen } 50° = \dfrac{6}{7{,}9} = 0{,}76$

$\cos 50° = \dfrac{5}{7{,}9} = 0{,}63$

$\text{tg } 50° = \dfrac{6}{5} = 1{,}2$

51. Halla, usando la calculadora, el valor de las siguientes razones trigonométricas. Redondea los resultados a cuatro decimales.

a) sen 42° 25′ 30″ **b) cos 72° 40′ 10″**

c) tg 65° 30′ 18″ **d) sen 16° 23′ 42″**

a) 0,6746 b) 0,2979

c) 2,1948 d) 0,2823

52. Halla, usando la calculadora, la amplitud del ángulo agudo α:

a) sen α = 0,8530 **b) cos α = 0,4873**

c) tg α = 0,7223 **d) cos α = 0,7970**

a) α = 58° 32′ 22′′ b) α = 60° 50′ 12′′

c) α = 35° 50′ 26′′ d) α = 37° 9′ 20′′

4. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

53. Sabiendo que sen α = 5/13, calcula cos α

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\left(\dfrac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{12}{13}$

54. Sabiendo que cos α = 9/15, calcula tg α

$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \left(\dfrac{15}{9}\right)^2$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{4}{3}$

55. Sabiendo que tg α = 3/2, calcula sen α

$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 1 = \sec^2 \alpha$

$\sec \alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$\cos \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$

$\text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha \cdot \cos \alpha = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{13}}{13} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

56. Sabiendo que cos 72° = 0,3090, calcula sen 18º

$\text{sen } 18° = \cos 72° = 0{,}3090$

57. Sabiendo que cos α = 1/5, calcula las restantes razones trigonométricas.

$\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} = 5$

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\text{sen}^2 \alpha + \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = 1$

$\text{sen } \alpha = \dfrac{\sqrt{24}}{5}$

$\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} = \dfrac{5}{\sqrt{24}} = \dfrac{5\sqrt{24}}{24}$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\sqrt{24}}{5} : \dfrac{1}{5} = \sqrt{24}$

$\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{24}} = \dfrac{\sqrt{24}}{24}$

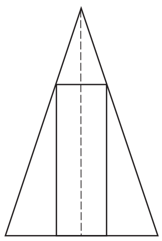
58. Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

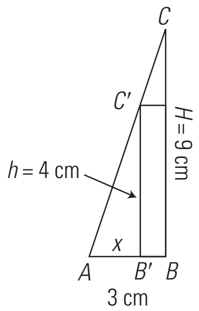
$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{-(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} = -1$$

PARA AMPLIAR

59. Se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles, como se indica en la siguiente figura:



Si la base del triángulo es *B* = 6 cm, y la altura, *H* = 9 cm, y la altura del rectángulo, *h* = 4 cm, halla cuánto mide la base del rectángulo.



Los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes.

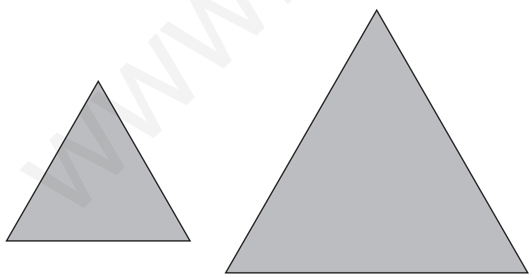
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{4}{9}$$

$x = 1{,}33$ cm

Base del rectángulo: $2(3 - 1{,}33) = 3{,}34$ cm

60. Dibuja dos triángulos equiláteros distintos. Razona si son semejantes.



Sí, son semejantes porque los ángulos de uno son iguales a los ángulos del otro.

61. Los lados de un triángulo miden *a* = 5 cm, *b* = 7,5 cm y *c* = 9 cm. Halla la medida de los lados *a′*, *b′* y *c′* de un triángulo semejante en el que *r* = 1,5

$a' = 1{,}5 \cdot a$

$a' = 1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$ cm

$b' = 1{,}5 \cdot b$

$b' = 1{,}5 \cdot 7{,}5 = 11{,}25$ cm

$c' = 1{,}5 \cdot c$

$c' = 1{,}5 \cdot 9 = 13{,}5$ cm

62. Un palo de un metro de longitud colocado verticalmente proyecta una sombra de un metro. Si el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar la sombra de la pirámide Kefrén mide 136 m, calcula mentalmente lo que mide de alto dicha pirámide.

La pirámide de Kefrén mide lo mismo que la sombra, es decir, 136 m

63. El radio de una circunferencia mide *x* metros, y el radio de otra circunferencia es el triple. Calcula cuántas veces es mayor la longitud de la segunda circunferencia y el área del círculo correspondiente.

Longitud:

$$\frac{L'}{L} = 3$$

$L' = 3L$

La longitud es el triple.

Área:

$$\frac{A'}{A} = 3^2$$

$A' = 9A$

El área es nueve veces mayor.

64. Clasifica los siguientes triángulos en acutángulos, rectángulos y obtusángulos:

a) *a* = 1 cm, *b* = 1,5 cm, *c* = 2 cm

b) *a* = 1,5 cm, *b* = 2 cm, *c* = 2,5 cm

c) *a* = 2 cm, *b* = 2,5 cm, *c* = 3 cm

d) *a* = 2,5 cm, *b* = 6 cm, *c* = 6,5 cm

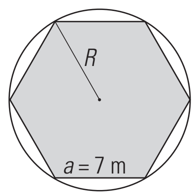
a) $1^2 + 1{,}5^2 = 3{,}25 < 2^2 = 4 \Rightarrow$ Obtusángulo.

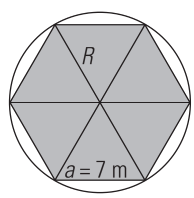
b) $1{,}5^2 + 2^2 = 2{,}5^2 \Rightarrow$ Rectángulo.

c) $2^2 + 2{,}5^2 = 10{,}25 > 3^2 = 9 \Rightarrow$ Acutángulo.

d) $2{,}5^2 + 6^2 = 6{,}5^2 \Rightarrow$ Rectángulo.

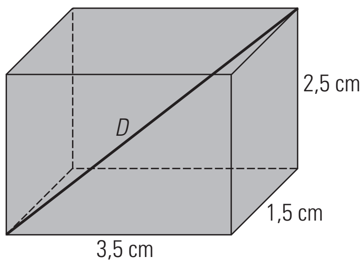
65. Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente hexágono:





En el hexágono coincide la longitud del lado y del radio de la circunferencia circunscrita; por tanto, $R = 7$ m

66. Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 3,5 cm, 1,5 cm y 2,5 cm



Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 3{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2$

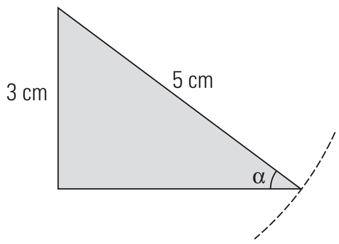
$D = 4{,}56$ cm

67. Dibuja un ángulo agudo α que cumpla:

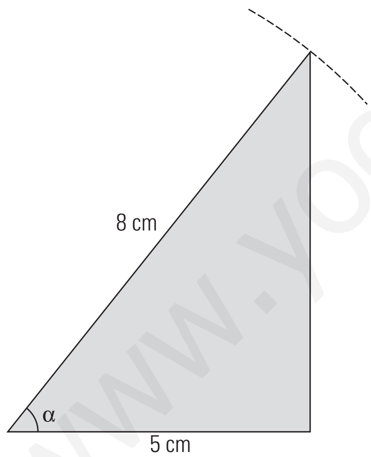
a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$

b) $\cos \alpha = \frac{5}{8}$

a)



b)

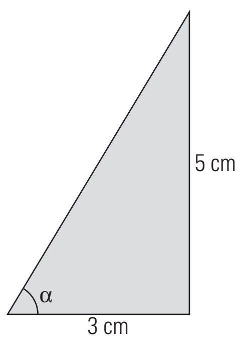


68. Dibuja un ángulo agudo α que cumpla:

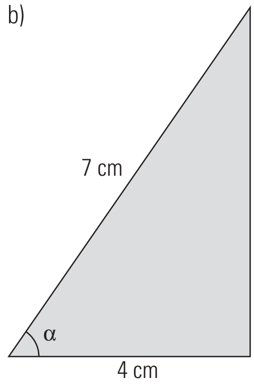
a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3}$

b) $\sec \alpha = \frac{7}{4}$

a)



b)



69. Halla cos α y tg α sabiendo que sen α = 3/5

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos \alpha = \frac{4}{5}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$

70. Calcula sen α y tg α sabiendo que se verifica que cos α = 2/5

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1$

$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{21}}{2}$

71. Si tg α = 4, calcula las restantes razones trigonométricas.

$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{4}$

$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

$4^2 + 1 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec^2 \alpha = 17$

$\sec \alpha = \sqrt{17} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$

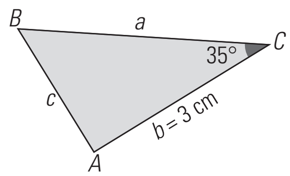
$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = 4\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\sqrt{17}}{4}$

72. Simplifica la expresión: $\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$

$\cancel{\cos^3} \alpha + \cos \alpha(1 - \cos^2 \alpha) = \cos^3 \alpha + \cos \alpha - \cancel{\cos^3} \alpha = \cos \alpha$

73. Calcula *a*, *c* y *B* en el siguiente triángulo rectángulo, sabiendo que tg 35° = 0,7002 y sen 35° = 0,5736. Aproxima el resultado a dos decimales.



$\operatorname{tg} 35° = \frac{c}{3} = 0{,}7002$

$c = 3 \cdot 0{,}7002 = 2{,}10$ cm

$\operatorname{sen} 35° = \frac{c}{a} = 0{,}5736$

$a = \frac{2{,}10}{0{,}5736} = 3{,}66$ cm

$B = 55°$

CON CALCULADORA

74. Calcula redondeando a cuatro decimales:

a) cos 17° 30′ 20″

b) tg 20° 30′ 40″

c) sen 39° 40′

a) 0,9537 b) 0,3741 c) 0,6383

75. Calcula redondeando a cuatro decimales:

a) sen 21° 50′

b) cos 32° 30″

c) tg 15° 20′ 30″

a) 0,3719 b) 0,8480 c) 0,2744

76. Calcula redondeando a cuatro decimales:

a) sec 50°

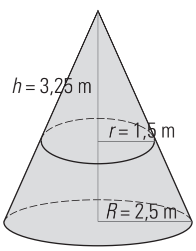
b) cotg 15° 40′

c) cosec 43° 12″

a) 1,5557 b) 3,5656 c) 1,4662

PROBLEMAS

77. Dado el siguiente dibujo, calcula la medida de la altura *H* del cono grande.



$\frac{R}{r} = \frac{H}{h} \Rightarrow \frac{2,5}{1,5} = \frac{H}{3,25}$

$H = 5,42$ m

78. Los lados de un triángulo miden *a* = 2 cm, *b* = 2,5 cm y *c* = 3,5 cm. Sabiendo que en otro triángulo semejante *a′* = 5 cm, halla la medida de los lados *b′* y *c′*

Razón de semejanza:

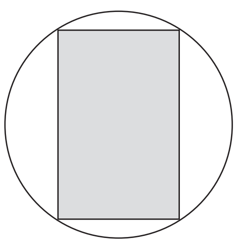
$r = \frac{a'}{a}$

$r = \frac{5}{2} = 2,5$

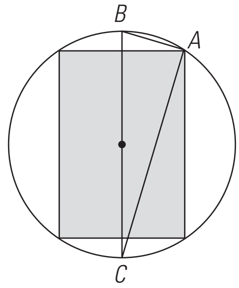
$b' = 2,5 \cdot 2,5 = 6,25$ cm

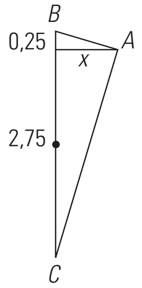
$c' = 2,5 \cdot 3,5 = 8,75$ cm

79. Se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el radio de la circunferencia es *R* = 1,5 cm y que la altura del rectángulo es *h* = 2,5 cm, halla cuánto mide la base del rectángulo.





El triángulo dibujado es rectángulo en *A* porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente:

$$\frac{180°}{2} = 90°$$

Aplicando el teorema de la altura:

$x^2 = 2,75 \cdot 0,25$

$x = 0,83$ cm

Base del rectángulo: $2x = 2 \cdot 0,83 = 1,66$ cm

80. En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide esta en dos segmentos que miden *b′* = 18 cm y *c′* = 32 cm. Halla:

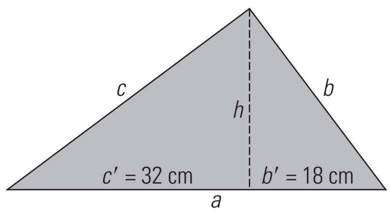
a) la longitud de la hipotenusa *a*

b) la longitud de la altura relativa a la hipotenusa;

c) el cateto *b*

d) el cateto *c*

e) el área de dicho triángulo rectángulo.



a) $a = b' + c'$
$a = 18 + 32 = 50$ cm

b) $h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h^2 = 18 \cdot 32 = 576$
$h = \sqrt{576} = 24$ cm

c) $b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b^2 = 50 \cdot 18 = 900$
$b = \sqrt{900} = 30$ cm

d) $c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c^2 = 50 \cdot 32 = 1\,600$
$c = \sqrt{1\,600} = 40$ cm

e) $\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$

$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 = 600 \text{ cm}^2$

81. Un rectángulo mide 400 m de perímetro y 2 500 m² de área. Halla el área de otro rectángulo semejante que mide 1 000 m de perímetro.

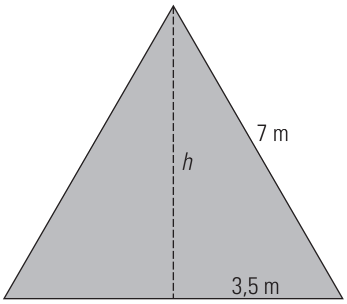
$r = \frac{P'}{P}$

$r = \frac{1\,000}{400} = 2,5$

$A' = r^2 \cdot A$

$A' = 2,5^2 \cdot 2\,500 = 15\,625 \text{ m}^2$

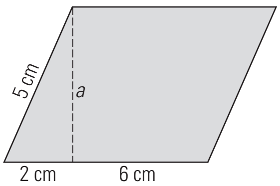
82. Halla la altura de un triángulo equilátero de 7 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.



$h^2 + 3{,}5^2 = 7^2$

$h = 6{,}06$ m

83. Halla el área del siguiente romboide:

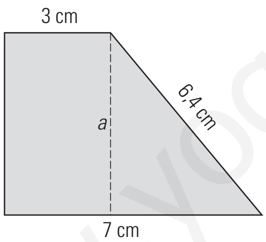


$a^2 + 2^2 = 5^2$

$a = 4{,}58$ cm

Área: $8 \cdot 4{,}58 = 36{,}64$ cm^2

84. Halla el área del siguiente trapecio rectángulo:

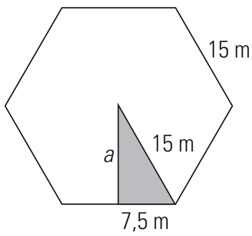


$a^2 + 4^2 = 6{,}4^2$

$a = 5{,}00$ cm

Área $= \dfrac{7+3}{2} \cdot 5 = 25$ cm^2

85. Halla el área de un hexágono regular de 15 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.

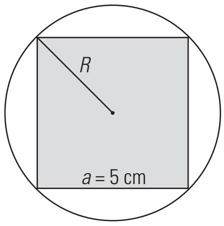


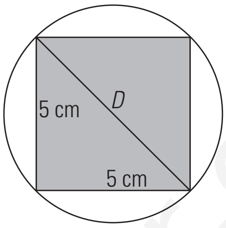
$a^2 + 7{,}5^2 = 15^2$

$a = 12{,}99 = 13{,}00$ m

Área $= \dfrac{6 \cdot 15}{2} \cdot 13 = 585$ cm^2

86. Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente cuadrado:





$D^2 = 5^2 + 5^2$

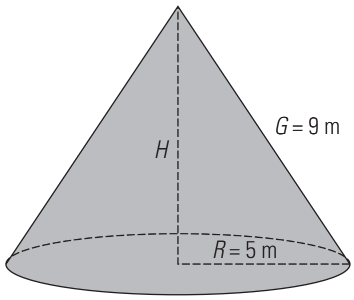
$D = 7{,}07$ cm

$R = \dfrac{D}{2} = 3{,}54$ cm

87. Una antena de radio proyecta una sombra de 57 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, Sonia, que mide 1,75 m, proyecta una sombra de 2,20 m. Calcula la altura de la antena de radio.

$\dfrac{2{,}20}{1{,}75} = \dfrac{57}{x} \Rightarrow x = 45{,}34$ m

88. Halla el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 5 m y la generatriz mide 9 m. Redondea el resultado a dos decimales.



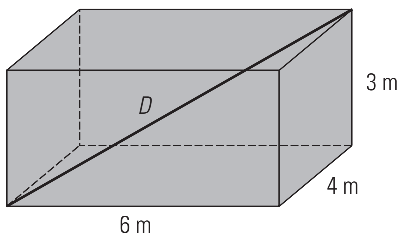
$H^2 + 5^2 = 9^2$

$H = 7{,}48$ m

$V = \dfrac{1}{3} A_B \cdot H$

$V = \dfrac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 7{,}48 = 195{,}83$ m^3

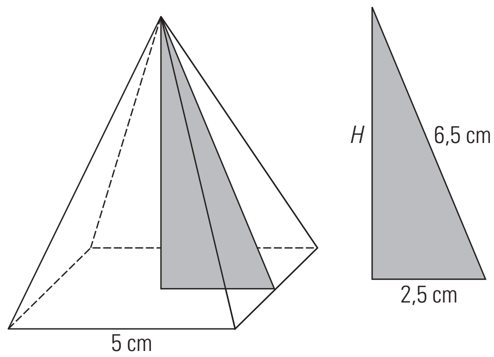
89. Calcula la diagonal de una habitación cuyas dimensiones son 6 m × 4 m × 3 m



Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 6^2 + 4^2 + 3^2 \Rightarrow D = 7{,}81$ m

90. Dibuja una pirámide regular cuadrangular en la que la arista de la base mide 5 cm y la apotema mide 6,5 cm. Calcula su volumen.



Se aplica el teorema de Pitágoras:

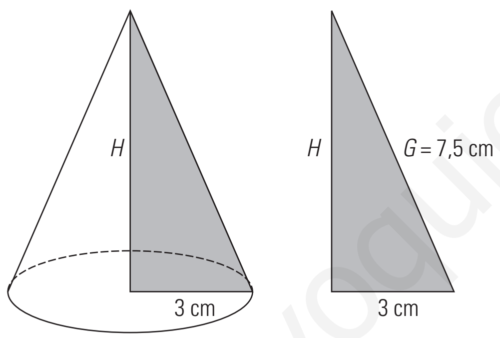
$H^2 + 2{,}5^2 = 6{,}5^2$

$H = 6$ cm

$V = \dfrac{1}{3} A_B \cdot \text{H}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 6 = 50 \text{ cm}^2$

91. Dibuja un cono recto en el que el radio de la base mide 3 cm y la generatriz mide 7,5 cm. Halla su altura.

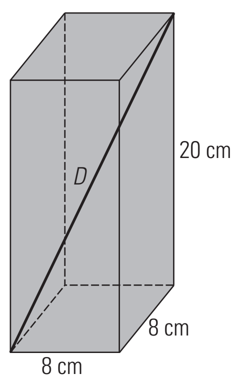


Se aplica el teorema de Pitágoras:

$H^2 + 3^2 = 7{,}5^2$

$H = 6{,}87$ cm

92. Calcula la diagonal de un prisma recto cuadrangular cuya base tiene 8 cm de arista y 20 cm de altura.

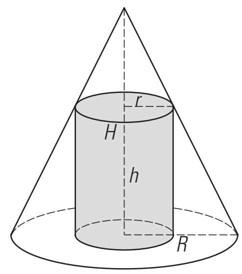


Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 8^2 + 8^2 + 20^2$

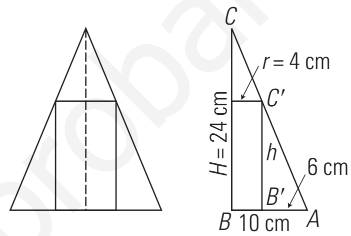
$D = 22{,}98$ cm

93. Se tiene un cilindro inscrito en un cono como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que la altura del cono es $H = 24$ cm, el radio del cono es $R = 10$ cm, y que el radio del cilindro mide $r = 4$ cm, halla cuánto mide la altura h del cilindro.

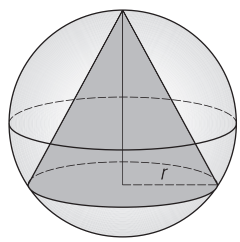
Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles.



Los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes.

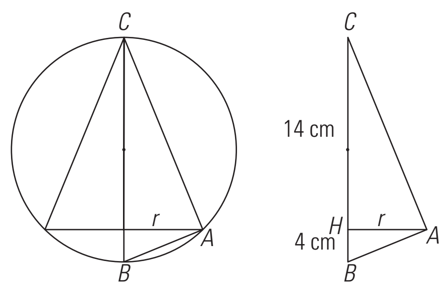
$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} \Rightarrow \dfrac{6}{10} = \dfrac{h}{24} \Rightarrow h = 14{,}4$ cm

94. Se tiene un cono inscrito en una esfera, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el radio de la esfera es $R = 9$ cm y que la altura del cono es $h = 14$ cm, halla cuánto mide el radio de la base del cono.

Haciendo una sección se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia.

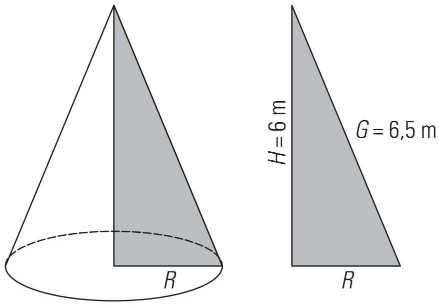


El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: 180°/2 = 90°

Aplicando el teorema de la altura:

$r^2 = 14 \cdot 4 = 56 \Rightarrow r = 7{,}48$ cm

95. Halla el radio de la base de un cono recto en el que la altura mide 6 m, y la generatriz, 6,5 m

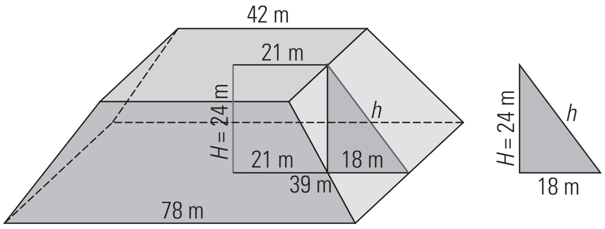


Se aplica el teorema de Pitágoras:

$R^2 + 6^2 = 6,5^2$

$R = 2,5$ m

96. Calcula el área del siguiente tronco de pirámide:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$h^2 = 18^2 + 24^2$

$h = 30$ m

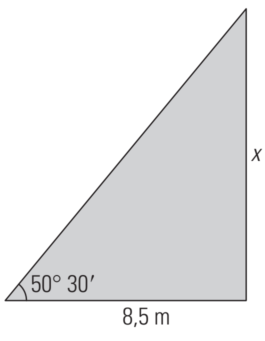
$A_{B_1} = 78^2 = 6\,084$ m^2

$A_{B_2} = 42^2 = 1\,764$ m^2

$A_L = 4 \cdot \frac{78+42}{2} \cdot 30 = 7\,200$ m^2

$A_T = 6\,084 + 1\,764 + 7\,200 = 15\,048$ m^2

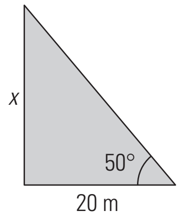
97. Un árbol forma con su sombra un ángulo recto. Si la sombra mide 8,5 m, y el ángulo con el que se ve la parte superior del árbol, desde el extremo de la sombra, mide 50° 30′, calcula la altura del árbol.



$\text{tg } 50° \, 30' = \frac{x}{8,5}$

$x = 8,5 \text{ tg } 50° \, 30' = 10,31$ m

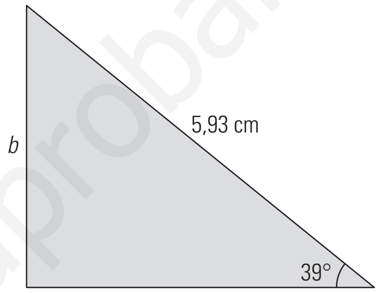
98. Desde un punto en el suelo situado a 20 m del pie de la fachada de un edificio se ve el tejado del mismo con un ángulo de 50°. Calcula la altura del edificio.



$\text{tg } 50° = \frac{x}{20}$

$x = 20 \text{ tg } 50° = 23,84$ m

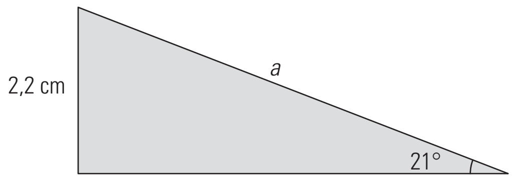
99. Calcula en un triángulo rectángulo el lado *b*, siendo *a* = 5,93 cm y *B* = 39°



$\text{sen } 39° = \frac{b}{5,93}$

$b = 5,93 \text{ sen } 39° = 3,73$ cm

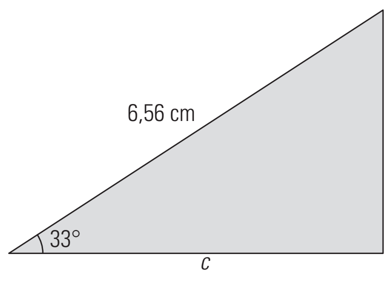
100. Calcula en un triángulo rectángulo el lado *a*, siendo *b* = 2,2 cm y *B* = 21°



$\text{sen } 21° = \frac{2,2}{a}$

$a = \frac{2,2}{\text{sen } 21°} = 6,14$ cm

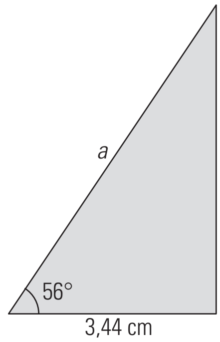
101. Calcula en un triángulo rectángulo el lado *c*, siendo *a* = 6,56 cm y *B* = 33°



$\cos 33° = \frac{c}{6,56}$

$c = 6,56 \, \cos 33° = 5,50$ cm

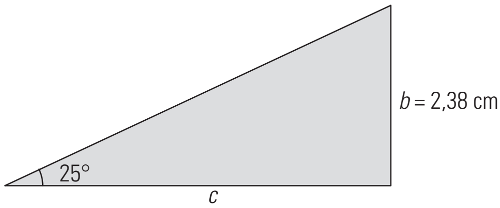
102. Calcula en un triángulo rectángulo el lado *a*, siendo *c* = 3,44 cm y *B* = 56°



$$\cos 56° = \frac{3{,}44}{a}$$

$$a = \frac{3{,}44}{\cos 56°} = 6{,}15 \text{ cm}$$

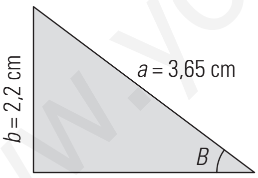
103. Calcula en un triángulo rectángulo el lado *c*, siendo *b* = 2,38 cm y *B* = 25°



$$\text{tg } 25° = \frac{2{,}38}{c}$$

$$c = \frac{2{,}38}{\text{tg } 25°} = 5{,}10 \text{ cm}$$

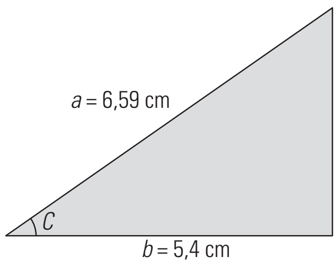
104. Calcula en un triángulo rectángulo el ángulo *B*, siendo *a* = 3,65 cm y *b* = 2,2 cm



$$\text{sen } B = \frac{2{,}2}{3{,}65}$$

$B = 37°\ 3'\ 59''$

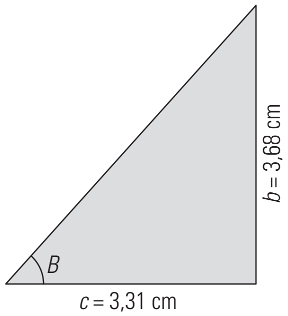
105. Calcula en un triángulo rectángulo el ángulo *C*, siendo *a* = 6,59 cm y *b* = 5,4 cm



$$\cos C = \frac{5{,}4}{6{,}59}$$

$C = 34°\ 58'\ 22''$

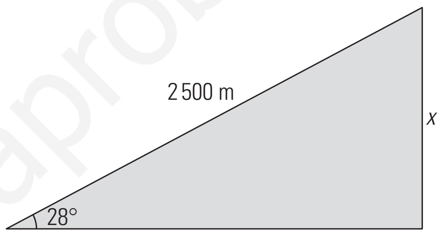
106. Calcula en un triángulo rectángulo el ángulo *B*, siendo *b* = 3,68 cm y *c* = 3,31 cm



$$\text{tg } B = \frac{3{,}68}{3{,}31}$$

$B = 48°\ 1'\ 48''$

107. Desde un barco se mide con un radar la distancia a la cima de una montaña, que es de 2 500 m. El ángulo de elevación con el que se ve la cima desde el barco es de 28°. Calcula la altura de la montaña.



$$\text{sen } 28° = \frac{x}{2\,500}$$

$x = 2\,500 \text{ sen } 28° = 1\,173{,}68$ m

108. Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{1 - \cos\alpha}$

$$\frac{1 - \cos^2\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{(1 + \cos\alpha)\cancel{(1 - \cos\alpha)}}{\cancel{1 - \cos\alpha}} = 1 + \cos\alpha$$

PARA PROFUNDIZAR

109. ¿Existe algún ángulo α tal que sen α = 4/5 y cos α = 3/4?

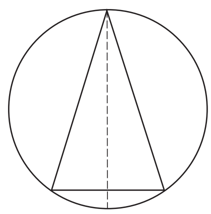
Para que sea posible se debe cumplir la propiedad fundamental:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

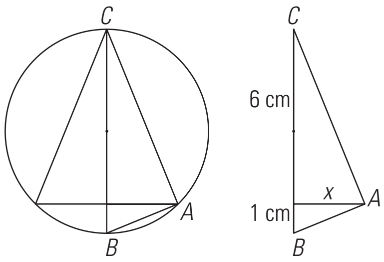
$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{481}{400} \neq 1$$

No se cumple.

110. Se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el diámetro de la circunferencia es *D* = 7 cm y que la altura del triángulo es *h* = 6 cm, halla cuánto mide la base del triángulo isósceles.



El triángulo dibujado *ABC* es rectángulo en *A* porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: 180°/2 = 90°

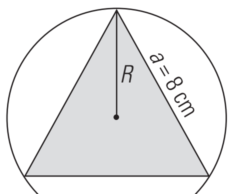
Aplicando el teorema de la altura:

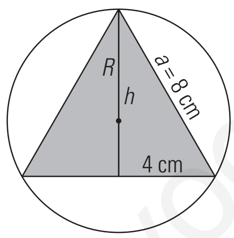
$x^2 = 6 \cdot 1$

$x = 2,45$ cm

Base del triángulo: $2x = 2 \cdot 2,45 = 4,90$ cm

111. Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente triángulo equilátero.





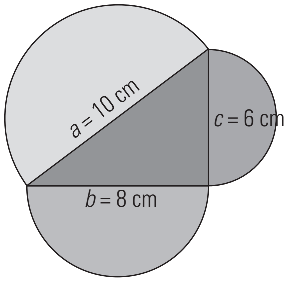
$h^2 + 4^2 = 8^2$

$h = 6,93$ cm

El radio es los 2/3 de la altura por una propiedad de las medianas de un triángulo.

$R = \frac{2}{3} \cdot 6,93 = 4,62$ cm

112. Se tiene un triángulo rectángulo cuyos lados miden *a* = 10 cm, *b* = 8 cm y *c* = 6 cm. En la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, cambia el cuadrado por un semicírculo. Calcula el área de los tres semicírculos y comprueba si se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.



Área del semicírculo de radio $a = 5$ cm

$A_1 = \pi \cdot \frac{5^2}{2} = 39,27 \text{ cm}^2$

Área del semicírculo de radio $b = 4$ cm

$A_2 = \pi \cdot \frac{4^2}{2} = 25,13 \text{ cm}^2$

Área del semicírculo de radio $c = 3$ cm

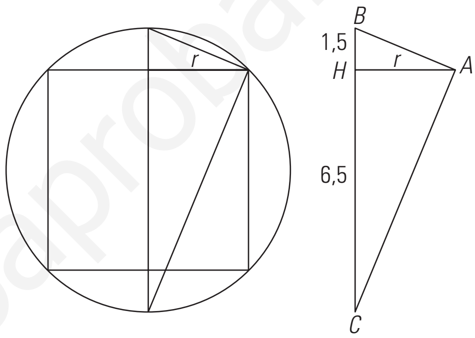
$A_3 = \pi \cdot \frac{3^2}{2} = 14,14 \text{ cm}^2$

$A_2 + A_3 = 25,13 + 14,14 = 39,27 = A_1$

Vemos que se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.

113. Se tiene un cilindro inscrito en una esfera. Sabiendo que el radio de la esfera es *R* = 4 cm y la altura del cilindro es *h* = 5 cm, halla cuánto mide el radio de la base del cilindro.

Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia.



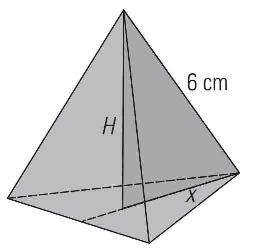
El triángulo dibujado *ABC* es rectángulo en *A* porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: 180°/2 = 90°

Aplicando el teorema de la altura:

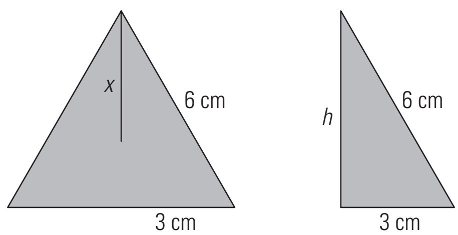
$r^2 = 6,5 \cdot 1,5 = 9,75$

$r = 3,12$ cm

114. Calcula la altura de un tetraedro de arista 6 cm



En primer lugar tenemos que hallar la altura del triángulo equilátero de la base, para poder hallar posteriormente *x*



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$h^2 + 3^2 = 6^2$

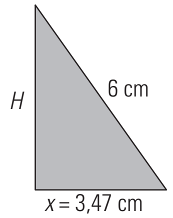
$h = 5,20$ cm

Por la propiedad de las medianas de un triángulo, estas se cortan en un punto que está a 2/3 del vértice. Se tiene:

$x = \frac{2}{3} \cdot h$

$x = \frac{2}{3} \cdot 5{,}20 = 3{,}47$ cm

Se obtiene otro triángulo rectángulo formado por *x*, *H* y una arista:

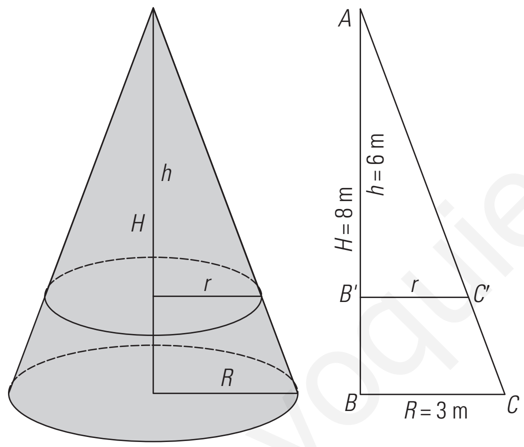


Se aplica el teorema de Pitágoras:

$H^2 + 3{,}47^2 = 6^2$

$H = 4{,}89$ cm

115. El radio de la base de un cono mide 3 cm y la altura mide 8 m. Se corta por un plano paralelo a la base a 2 m de la misma. ¿Qué radio tendrá la circunferencia que hemos obtenido en el corte?



Los triángulos *ABC* y *AB′C′* son semejantes porque tienen los ángulos iguales; por tanto, los lados son proporcionales:

$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$

$\frac{6}{8} = \frac{r}{3}$

$r = 2{,}25$ m

Aplica tus competencias

116. Calcula las dimensiones de una hoja Din-A3

Ancho: 29,7 cm, largo: 42 cm

117. Calcula las dimensiones de una hoja Din-A5

Ancho: 14,8 cm, largo: 21 cm

118. Calcula las dimensiones de una hoja Din-A1

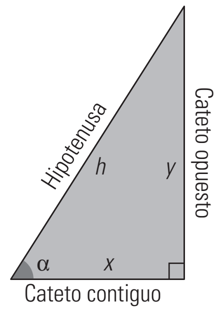
Ancho: 59,4 cm, largo: 84,1 cm

119. Calcula las dimensiones de una hoja Din-A0

Ancho: 84,1 cm, largo: 118,9 cm

Comprueba lo que sabes

1. Define las razones sen α, cos α y tg α en un triángulo rectángulo y pon un ejemplo.



- El seno del ángulo α es la razón entre el cateto opuesto al ángulo α y la hipotenusa.

$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \text{sen}\,\alpha = \frac{y}{h}$

- El coseno del ángulo α es la razón entre el cateto contiguo al ángulo α y la hipotenusa.

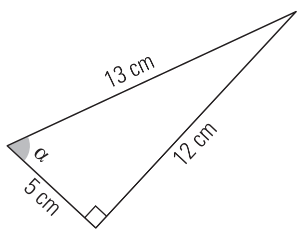
$\cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}, \cos\alpha = \frac{x}{h}$

- La tangente del ángulo α es la razón entre el cateto opuesto y el cateto contiguo.

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}, \text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$

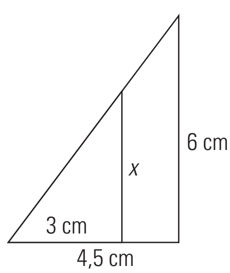
Ejemplo:

Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α en el triángulo rectángulo de la figura.



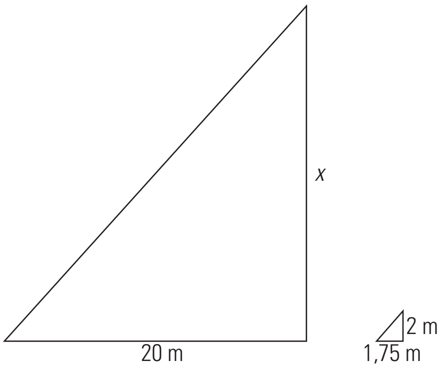
$\text{sen}\,\alpha = \frac{12}{13}$ $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ $\text{tg}\,\alpha = \frac{12}{5}$

2. Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4,5 cm y 6 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo menor en posición de Thales tal que su cateto menor mida 3 cm. Calcula la longitud del otro cateto.



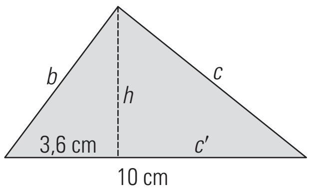
$\frac{6}{x} = \frac{4{,}5}{3} \Rightarrow x = 4$ cm

3. Un edificio proyecta una sombra de 20 m. El mismo día, y a la misma hora, un palo de 2 m proyecta una sombra de 1,75 m en el mismo lugar. Calcula la altura del edificio.



$\frac{20}{x} = \frac{1,75}{2} \Rightarrow x = 22,86$ cm

4. Calcula *b*, *c*, *c′* y *h* en el triángulo rectángulo de la figura:



$b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot b'}$

$b = \sqrt{10 \cdot 3,6} = 6$ cm

$c' = a - b'$

$c' = 10 - 3,6 = 6,4$ cm

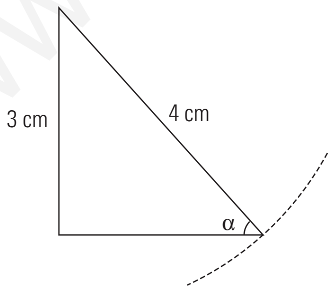
$c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot c'}$

$c = \sqrt{10 \cdot 6,4} = 8$ cm

$h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$

$h = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = 4,8$ cm

5. Dibuja un ángulo agudo α en un triángulo rectángulo tal que cumpla que sen α = 3/4. ¿Cuántos triángulos puedes dibujar con esa condición?



Se pueden dibujar infinitos triángulos, ya que el seno depende del ángulo y no depende del tamaño del triángulo.

6. Sabiendo que α es un ángulo agudo y que cos α = 0,4, calcula sen α y tg α

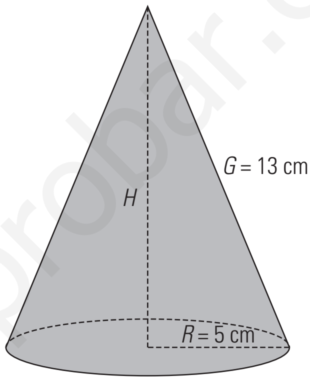
$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\text{sen}^2\,\alpha + 0,4^2 = 1$

$\text{sen}\,\alpha = 0,92$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,92}{0,4}$

7. Calcula el volumen de un cono en el que el radio de la base mide 5 cm y la generatriz mide 13 cm



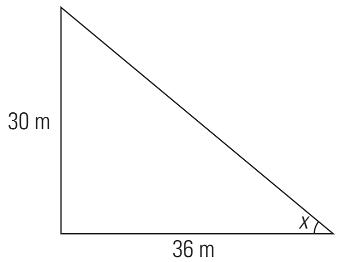
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$5^2 + H^2 = 13^2$

$H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 314,16\ \text{cm}^3$

8. ¿Con qué ángulo de inclinación se verá el tejado de un edificio, que tiene 30 m de altura, desde una distancia de 36 m de la fachada?



$\text{tg}\,x = \frac{30}{36} = 0,8333$

$x = 39°\ 48'\ 16''$

8. Resolución de triángulos rectángulos

1. CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA

PIENSA Y CALCULA

Escribe la fórmula de la longitud de un arco de circunferencia de radio 1 m, y calcula, en función de π, la longitud del arco correspondiente a:

a) 90° b) 180° c) 270° d) 360°

$$L = \frac{2\pi}{360°} \cdot n°$$

a) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 90° = \frac{\pi}{2}$ m

b) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 180° = \pi$ m

c) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 270° = \frac{3\pi}{2}$ m

d) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 360° = 2\pi$ m

APLICA LA TEORÍA

1. Pasa los ángulos siguientes a radianes:

a) 30° b) 120° c) 270° d) 315°

a) $30° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{6}$ rad

b) $120° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{2\pi}{3}$ rad

c) $270° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{3\pi}{3}$ rad

d) $315° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{7\pi}{4}$ rad

2. Pasa los ángulos siguientes a grados:

a) 0,5 rad b) 1 rad c) 1,5 rad d) 2,5 rad

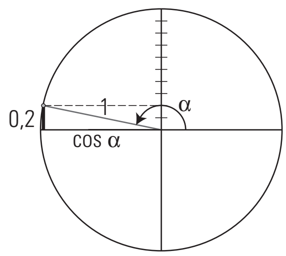
a) $0{,}5 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 28°\ 38'\ 52''$

b) $1 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 57°\ 17'\ 45''$

c) $1{,}5 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 85°\ 56'\ 37''$

d) $2{,}5 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 143°\ 14'\ 22''$

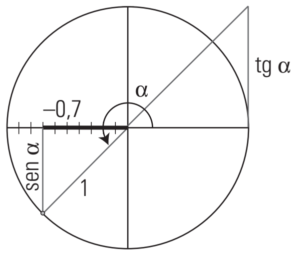
3. Determina cos α sabiendo que el ángulo α está en el 2.º cuadrante y que sen α = 0,2



$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$0{,}2^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha \cos\alpha = -0{,}9798$

4. Calcula tg α, sabiendo que el ángulo α está en el 3.er cuadrante y que cos α = –0,7

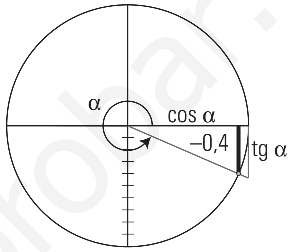


$1 + \text{tg}^2\,\alpha = \sec^2\alpha$

$1 + \text{tg}^2\,\alpha = \left(-\frac{1}{0{,}7}\right)$

$\text{tg}\,\alpha = 1{,}0202$

5. Determina las razones trigonométricas del ángulo α si está en el 4.º cuadrante y sen α = –0,4



$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(-0{,}4)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}9165$

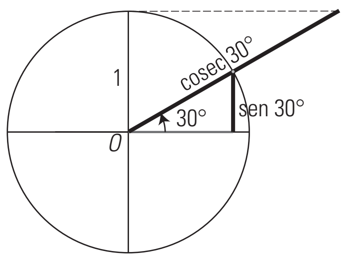
$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -0{,}4364$

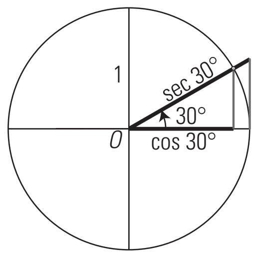
$\sec\alpha = 1{,}0911$

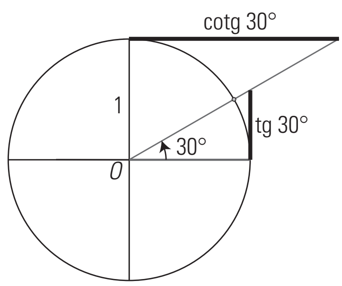
$\text{cosec}\,\alpha = -2{,}5$

$\text{cotg}\,\alpha = -2{,}2915$

6. Dibuja en la circunferencia unidad el ángulo de 30° y dibuja el segmento que representa a cada una de las razones trigonométricas.



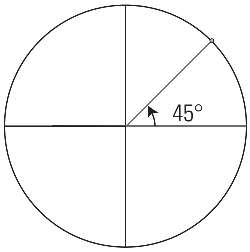




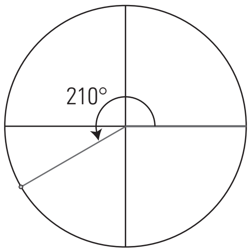
7. Dibuja en la circunferencia unidad los ángulos siguientes:

a) 1 485° **b) 2 370°** **c) 2 100°**

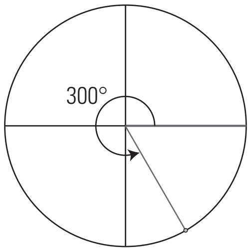
a) 1 485° = 45° + 4 · 360°



b) 2 370° = 210° + 6 · 360°



c) 2 100° = 300° + 5 · 360°



2. REDUCCIÓN DE RAZONES, IDENTIDADES Y ECUACIONES

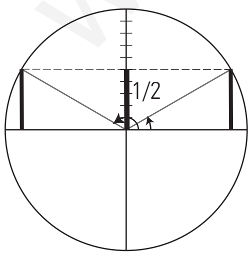
PIENSA Y CALCULA

Dibuja en la circunferencia unidad todos los ángulos que cumplen que:

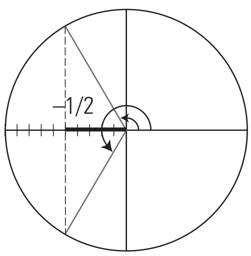
a) sen $\alpha = \frac{1}{2}$

b) cos $\alpha = -\frac{1}{2}$

a)



b)



APLICA LA TEORÍA

8. Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan:

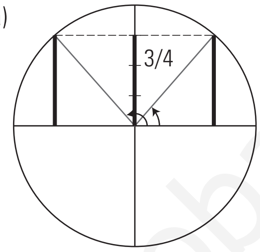
a) sen $\alpha = \frac{3}{4}$

b) cos $\alpha = -\frac{1}{4}$

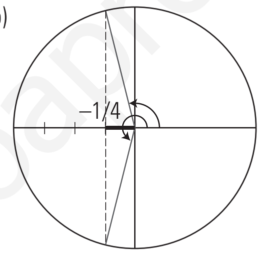
c) sec $\alpha = 2{,}5$

d) tg $\alpha = 2$

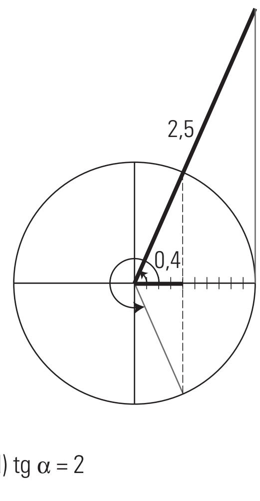
a)



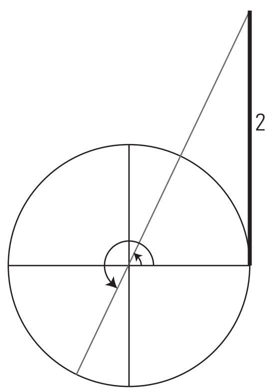
b)



c) sec $\alpha = 2{,}5\ \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 0{,}4$



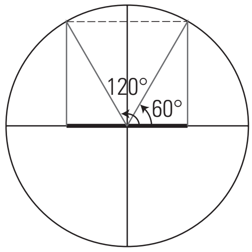
d) tg $\alpha = 2$



9. Calcula, reduciendo al 1.er cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

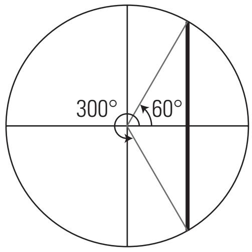
a) cos 120° **b) sen 300°**

a)



$\cos 120° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

b)

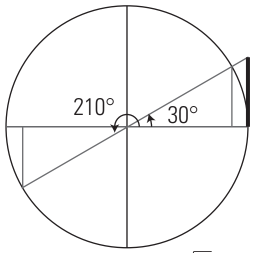


$\text{sen } 300° = -\text{sen } 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10. Calcula, reduciendo al 1.er cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

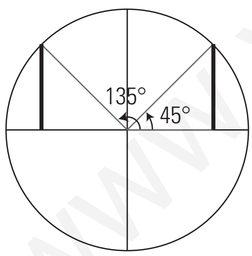
a) tg 210° **b) sen 135°**

a)



$\text{tg } 210° = \text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b)

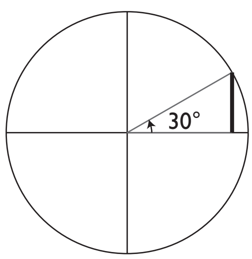


$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11. Calcula, reduciendo al 1.er cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

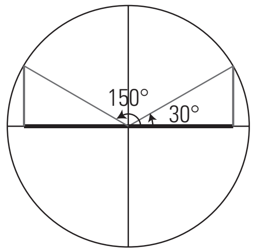
a) sen 1 830° b) cos 1 230° c) tg 2 385° d) cos 2 820°

a) $1\,830° = 30° + 5 \cdot 360°$



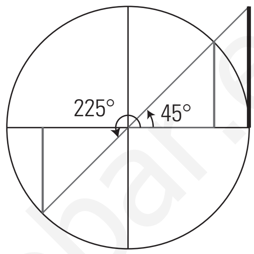
$\text{sen } 1\,830° = \text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$

b) $1\,230° = 150° + 3 \cdot 360°$



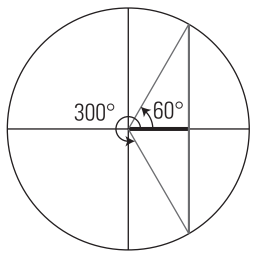
$\cos 1\,230° = \cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $2\,385° = 225° + 6 \cdot 360°$



$\text{tg } 2\,385° = \text{tg } 225° = \text{tg } 45° = 1$

d) $2\,820° = 300° + 7 \cdot 360°$



$\cos 2\,820° = \cos 300° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

12. Demuestra que:

a) $\sec^2 x - \text{tg}^2 x = 1$

b) $(\text{cosec } x + \text{tg } x) \cos x = \text{sen } x + \text{cotg } x$

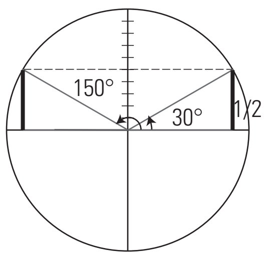
a) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$

b) $\left(\dfrac{1}{\text{sen } x} + \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}\right)\cos x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} + \text{sen } x = \text{cotg } x + \text{sen } x$

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

13. 2 sen x = 1

$\text{sen } x = \dfrac{1}{2}$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

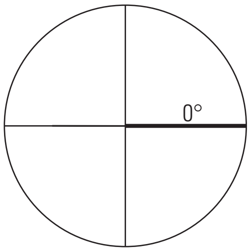
14. cos *x* = sec *x*

$\cos x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\cos^2 x = 1$

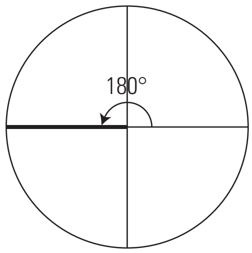
$\cos x = \pm 1$

a) $\cos x = 1$



$x_1 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

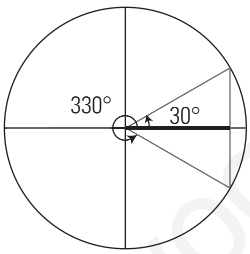
b) $\cos x = -1$



$x_2 = 180° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

15. 2 cos *x* = $\sqrt{3}$

$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$x_1 = 30° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 330° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

16. 3 sen *x* – 2 cos² *x* = 0

$3 \operatorname{sen} x - 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 0$

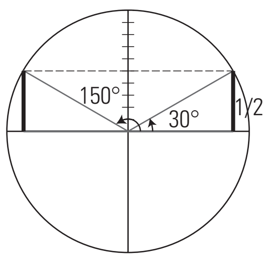
$3 \operatorname{sen} x - 2 + 2 \operatorname{sen}^2 x = 0$

$2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0 \pm$

$$\operatorname{sen}\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$$

La solución $\operatorname{sen} x = -2$ no tiene sentido, porque $|\operatorname{sen} x| \le 1$

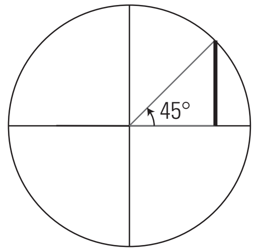
$\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$



$x_1 = 30° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

17. sen 2*x* = 1



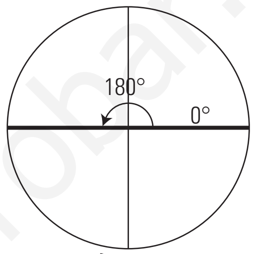
$2x = 90°$

$x = 45°$

18. sen *x* · cos *x* = 0

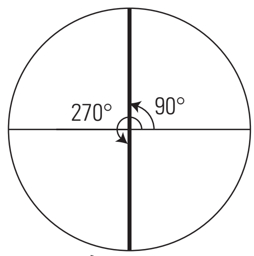
$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$

a) $\operatorname{sen} x = 0$



$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = 0$

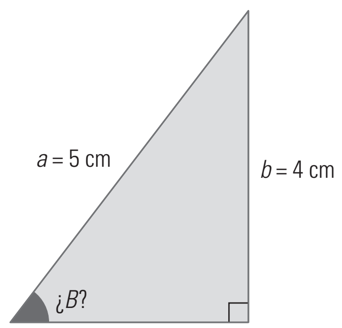


$\left.\begin{array}{l} x_3 = 90° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = 270° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 90° + 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$

3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

PIENSA Y CALCULA

Escribe la razón trigonométrica que relaciona directamente el valor de los datos conocidos en el triángulo siguiente y el ángulo correspondiente. Utilizando la calculadora, halla dicho ángulo.

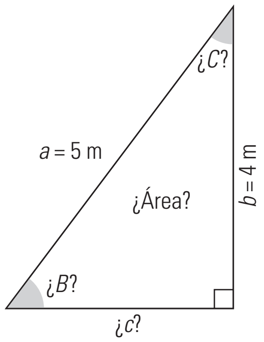


$\operatorname{sen} B = \dfrac{4}{5}$

$B = 53°\ 7'\ 48''$

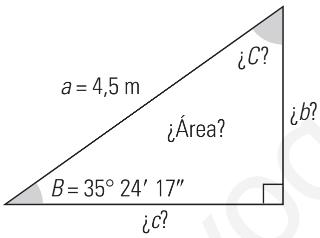
APLICA LA TEORÍA

19. En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa $a = 5$ m y un cateto $b = 4$ m. Calcula los demás elementos.



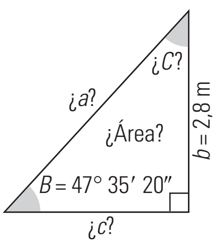
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 5$ m $b = 4$ m	c	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ m
	B	$\text{sen } B = \frac{b}{a}$	$\text{sen } B = \frac{4}{5} \Rightarrow$ $B = 53° \, 7' \, 48''$
	C	$C = 90° - B$	$C = 36° \, 52' \, 12''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ m}^2$

20. En un triángulo rectángulo se conocen los valores de la hipotenusa $a = 4,5$ m y el ángulo $B = 35° \, 24' \, 17''$. Calcula los demás elementos.



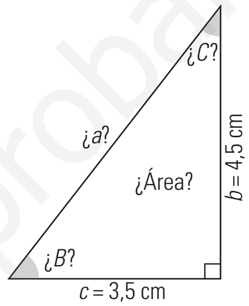
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 4,5$ m $B = 36° \, 52' \, 12''$	C	$C = 90° - B$	$C = 54° \, 35' \, 43''$
	b	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow$ $b = a \text{ sen } B$	$b = 4,5 \text{ sen } 35° \, 24' \, 17'' =$ $= 2,61$ m
	c	$\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow$ $c = a \cos B$	$c = 4,5 \cos 35° \, 24' \, 17'' =$ $= 3,67$ m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2,61 \cdot 3,67 =$ $= 4,79 \text{ m}^2$

21. En un triángulo rectángulo se conocen el cateto $b = 2,8$ m y el ángulo opuesto $B = 47° \, 35' \, 20''$. Calcula los demás elementos.



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 2,8$ m $B = 47° \, 35' \, 20''$	C	$C = 90° - B$	$C = 54° \, 35' \, 43''$
	a	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow$ $a = \frac{b}{\text{sen } x}$	$a = \frac{2,8}{\text{sen } 47° \, 35' \, 20''} =$ $= b = 3,67$ m
	c	$\text{tg } C = \frac{c}{b} \Rightarrow$ $c = b \text{ tg } C$	$c = 2,8 \text{ tg } 42° \, 24' \, 40'' =$ $= 2,56$ m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2,8 \cdot 2,56 =$ $= 3,58 \text{ m}^2$

22. En un triángulo rectángulo se conocen los dos catetos $b = 4,5$ cm y $c = 3,5$ cm. Calcula los demás elementos.

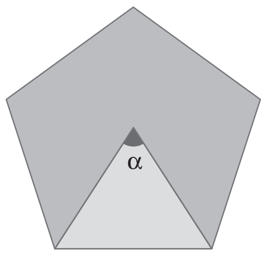


Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 4,5$ cm $c = 3,5$ cm	a	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$ $c = \sqrt{a^2 + c^2}$	$c = \sqrt{4,5^2 + 3,5^2} =$ $= 5,70$ cm
	B	$\text{tg } B = \frac{b}{c}$	$\text{sen } B = \frac{4}{5} \Rightarrow$ $B = 53° \, 7' \, 48''$
	C	$C = 90° - B$	$C = 37° \, 52' \, 30''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 3,5 =$ $= 7,88 \text{ cm}^2$

4. APLICACIONES AL CÁLCULO DE DISTANCIAS, ÁREAS Y VOLÚMENES

PIENSA Y CALCULA

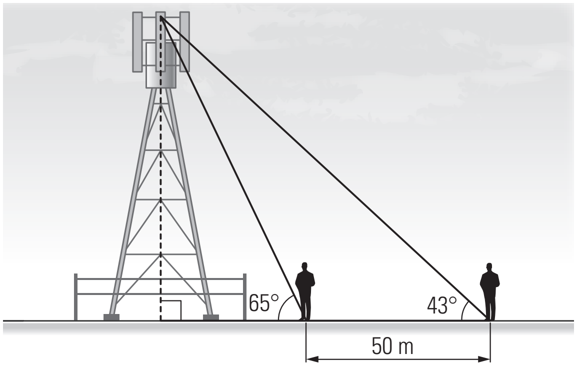
Calcula mentalmente el ángulo coloreado de rojo del pentágono regular.

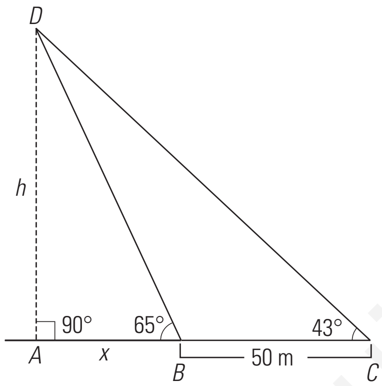


$\alpha = 360° : 5 = 72°$

APLICA LA TEORÍA

23. Una antena de telefonía móvil está en una llanura dentro de una cerca en la que está prohibido entrar. Para hallar su altura, medimos desde un punto exterior el ángulo de elevación y se obtienen 65°. Nos alejamos 50 m y el nuevo ángulo de elevación es de 43°. Calcula la altura de la antena de telefonía móvil.





$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 65° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 43° = \dfrac{h}{50+x} \end{array}\right\}$$

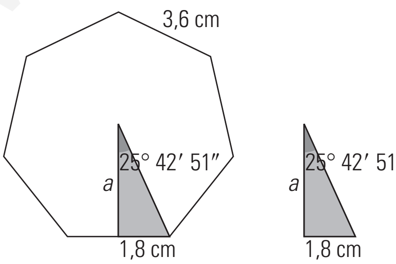
$x = 38{,}47$ m

$h = 82{,}50$ m

La antena de telefonía móvil mide 82,5 m de alto.

24. Calcula el área de un heptágono regular en el que el lado mide 3,6 cm

360° : 14 = 25° 42′ 51″



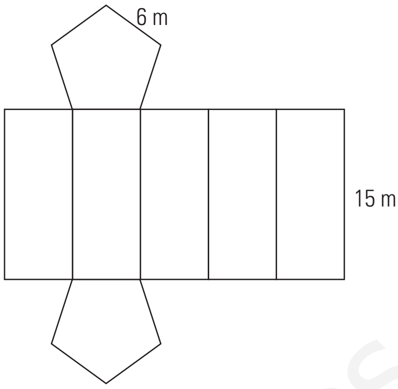
$\text{tg } 25° 42' 51'' = \dfrac{1{,}8}{a}$

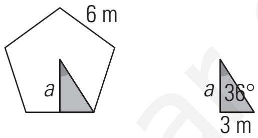
$a = 3{,}74$ cm

$\text{Área} = \dfrac{P \cdot a}{2}$

$\text{Área} = \dfrac{7 \cdot 3{,}6 \cdot 3{,}74}{2} = 47{,}12 \text{ cm}^2$

25. Calcula el área de un prisma regular pentagonal en el que la arista de la base mide 6 m, y la altura, 15 m





$\text{tg } 36° = \dfrac{3}{a}$

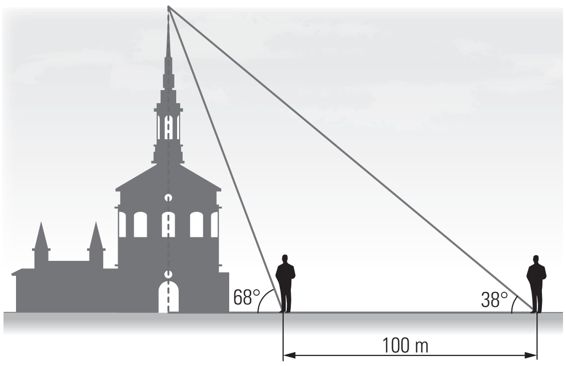
$a = 4{,}13$ m

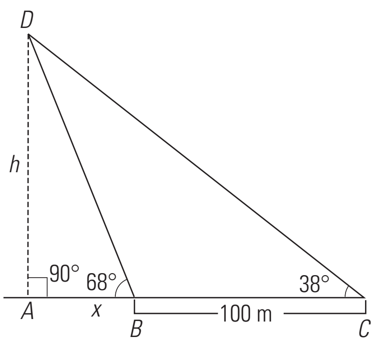
$A_B = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 4{,}13}{2} = 61{,}95 \text{ m}^2$

$A_L = 5 \cdot 6 \cdot 15 = 450 \text{ m}^2$

$A_T = 2 \cdot 61{,}95 + 450 = 573{,}90 \text{ m}^2$

26. Para medir la altura de una catedral, medimos el ángulo de elevación de la parte más alta desde un punto determinado y obtenemos 68°; nos alejamos en la misma dirección 100 m y el nuevo ángulo de elevación es de 38°. Halla la altura de la catedral.





$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 68° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 38° = \dfrac{h}{100+x} \end{array}\right\}$$

$x = 46{,}13$ m

$h = 114{,}17$ m

La catedral mide 114,17 m de alto.

Ejercicios y problemas propuestos

1. CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA

27. Pasa los ángulos siguientes a radianes:

a) 45° **b) 150°**

c) 210° **d) 330°**

a) $45° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{4}$ rad

b) $150° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{5\pi}{6}$ rad

c) $210° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{7\pi}{6}$ rad

d) $330° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{11\pi}{6}$ rad

28. Pasa los ángulos siguientes a grados

a) 2 rad

b) $\frac{\pi}{9}$ rad

c) $\frac{5\pi}{3}$ rad

d) 1,7 rad

a) $2 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 114° \, 35' \, 30''$

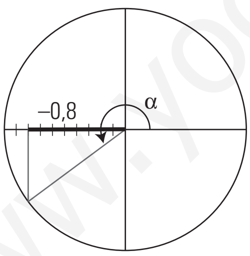
b) $\frac{\pi}{9} \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 20°$

c) $\frac{5\pi}{9} \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 300°$

d) $1{,}7 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 97° \, 24' \, 10''$

29. Determina todas las razones trigonométricas del ángulo α si $\cos \alpha = -0{,}8$ y el ángulo α está en el 3.er cuadrante.

$\cos \alpha = -0{,}8$



$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\text{sen}^2 \alpha + (-0{,}8)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = -0{,}6$

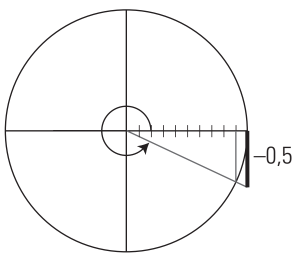
$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = 0{,}75$

$\sec \alpha = -1{,}25$

$\text{cosec } \alpha = -1{,}6667$

$\text{cotg } \alpha = 1{,}3333$

30. Si $\text{tg } \alpha = -0{,}5$ y α está en el 4.º cuadrante, determina el resto de las razones trigonométricas.



$\text{tg } \alpha = -0{,}5$

$1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

$1 + (-0{,}5)^2 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec \alpha = 1{,}1180$

$\cos \alpha = 0{,}8944$

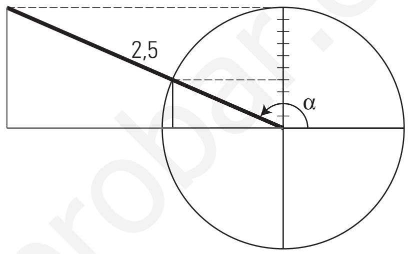
$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = -0{,}4472$

$\text{cosec } \alpha = -2{,}2361$

$\text{cotg } \alpha = -2$

31. Si el ángulo α está en el 2.º cuadrante y tenemos $\text{cosec } \alpha = 2{,}5$, determina las razones trigonométricas del ángulo α

$\text{cosec } \alpha = 2{,}5 \ \alpha \ \text{sen } \alpha = 0{,}4$



$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

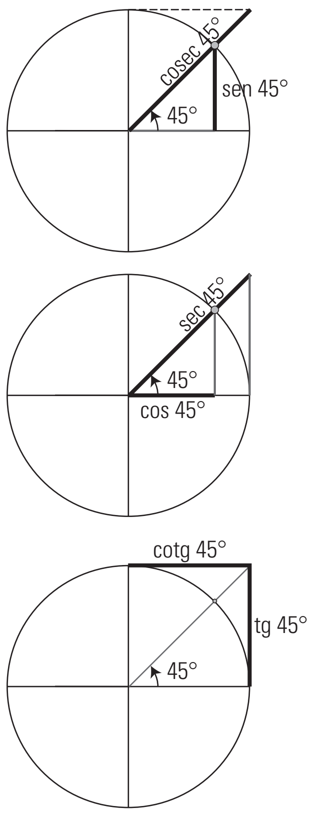
$0{,}4^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -0{,}9165$

$\sec \alpha = -1{,}0911$

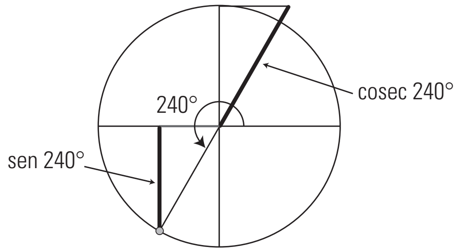
$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = -0{,}4364$

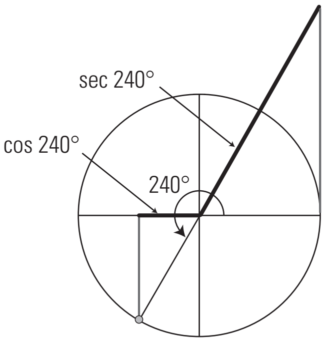
$\text{cotg } \alpha = -2{,}2915$

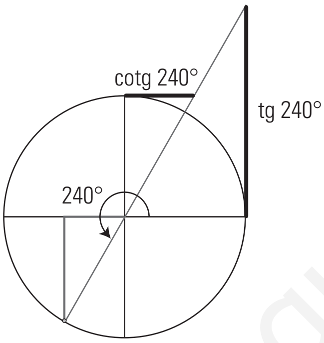
32. Dibuja en la circunferencia unidad el ángulo de 45° y dibuja el segmento que representa a cada una de las razones trigonométricas.



33. Dibuja en la circunferencia unidad el ángulo de 240° y dibuja el segmento que representa a cada una de las razones trigonométricas.







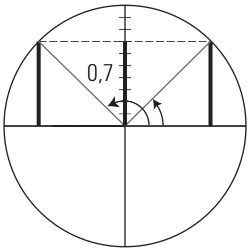
2. REDUCCIÓN DE RAZONES, IDENTIDADES Y ECUACIONES

34. Dibuja en la circunferencia unidad los ángulos que cumplan que:

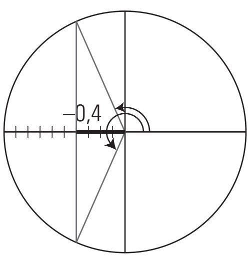
a) sen α = 0,7

b) cos α = –0,4

a)



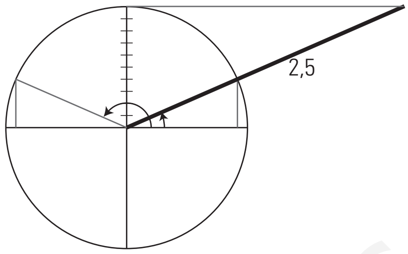
b)



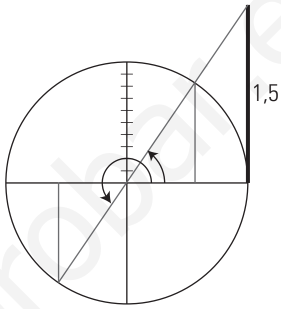
35. Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan que:

a) cosec α = 2,5 **b) tg α = 1,5**

a) cosec α = 2,5



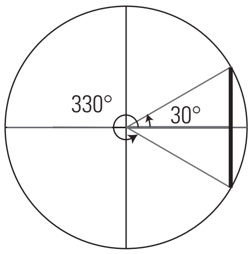
b) tg α = 1,5



36. Calcula, reduciendo al 1.er cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

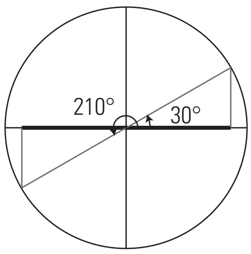
a) sen 330° **b) cos 210°** **c) tg 120°** **d) sen 240°**

a)



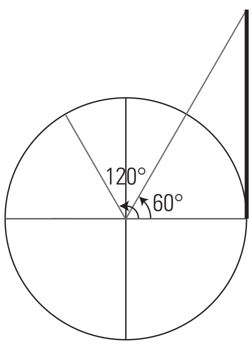
$\text{sen } 330° = -\text{sen } 30° = -\dfrac{1}{2}$

b)



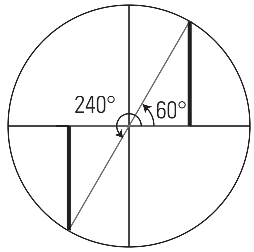
$\cos 210° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c)



$\text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

d)



$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

37. Demuestra la siguiente identidad:

$$\cos^3 \alpha + \cos \alpha \text{ sen}^2 \alpha = \cos \alpha$$

$\cos^3 \alpha + \cos \alpha \text{ sen}^2 \alpha = \cos^3 \alpha + \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) =$

$= \cancel{\cos^3 \alpha} + \cos \alpha - \cancel{\cos^3 \alpha} = \cos \alpha$

38. Demuestra la siguiente identidad:

$$\text{tg } \alpha \text{ cosec } \alpha (\cos \alpha - \text{sen } \alpha) = 1 - \text{tg } \alpha$$

$\text{tg } \alpha \text{ cosec } \alpha (\cos \alpha - \text{sen } \alpha) =$

$= \text{tg } \alpha \cdot \frac{1}{\text{sen } \alpha} \cdot (\cos \alpha - \text{sen } \alpha) =$

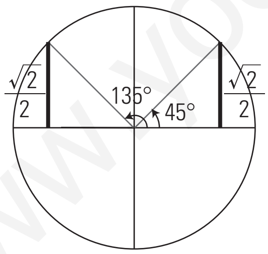
$= \text{tg } \alpha \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} - \text{tg } \alpha = 1 - \text{tg } \alpha$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

39. $2 \text{ sen}^2 x = 1$

$\text{sen } x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

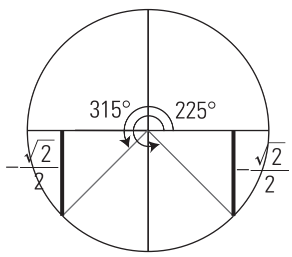
a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$x_1 = 45° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 135° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

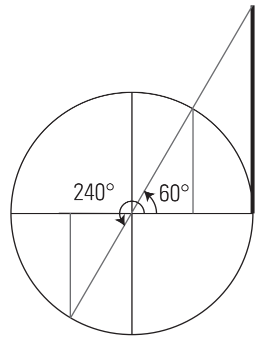


$x_3 = 225° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 315° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

40. $\text{tg } 2x = \sqrt{3}$

Se considera la raíz positiva.



$2x_1 = 60° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $2x_2 = 240° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 30° + 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $x_2 = 120° + 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$

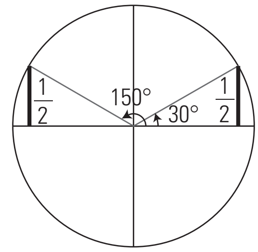
41. $4 \text{ sen } x = \text{cosec } x$

$4 \text{ sen } x = \frac{1}{\text{sen } x}$

$4 \text{ sen}^2 x = 1$

$\text{sen } x = \pm \frac{1}{2}$

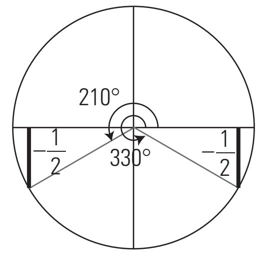
a) $\text{sen } x = \frac{1}{2}$



$x_1 = 30° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$



$x_3 = 210° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 330° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

42. $2 \text{ sen } x + 1 = 3 \text{ cosec } x$

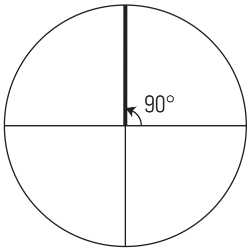
$2 \text{ sen } x + 1 = \frac{3}{\text{sen } x}$

$2 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 3 = 0$

$\text{sen } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

$\text{sen } x = -\frac{3}{2}$ no tiene sentido, porque $|\text{sen } x| \leq 1$

$\text{sen } x = 1$



$x = 90° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

43. $\mathbf{sen}\ x = \cos^2 x + 1$

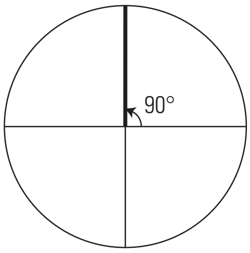
$\operatorname{sen} x = 1 - \operatorname{sen}^2 x + 1$

$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2 = 0$

$\operatorname{sen} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$\operatorname{sen} x = -2$ no tiene sentido, porque $|\operatorname{sen} x| \leq 1$

$\operatorname{sen} x = 1$



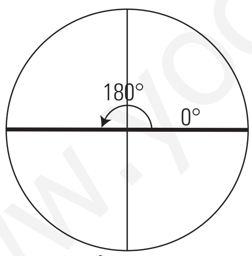
$x = 90° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

44. $\mathbf{sen}\ x \cos x = \mathbf{sen}\ x$

$\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0$

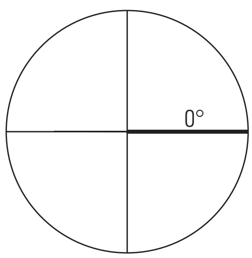
$\operatorname{sen} x (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$

a) $\operatorname{sen} x = 0$



$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$

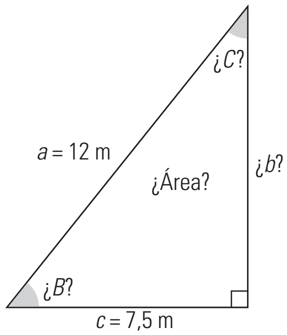
b) $\cos x = 1$



$x_3 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

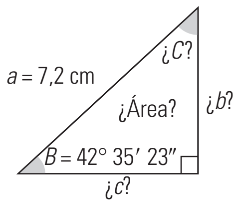
3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

45. En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa *a* = 12 m y un cateto *c* = 7,5 m. Calcula los demás elementos.



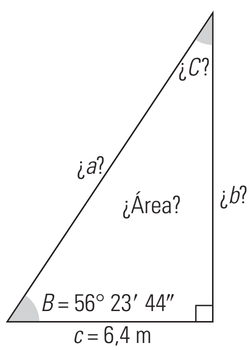
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 12$ m $b = 7,5$ m	b	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$ $b = \sqrt{a^2 - c^2}$	$b = \sqrt{12^2 - 7,5^2} = 9,37$ m
	B	$\cos B = \dfrac{c}{a}$	$\cos B = \dfrac{7,5}{12} \Rightarrow B = 51°\ 19'\ 4''$
	C	$C = 90° - B$	$C = 36°\ 40'\ 56''$
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 9,37 \cdot 7,5 = 35,14\ \text{m}^2$

46. En un triángulo rectángulo se conocen los valores de la hipotenusa *a* = 7,2 cm y el ángulo *B* = 42° 35′ 23″. Calcula los demás elementos.



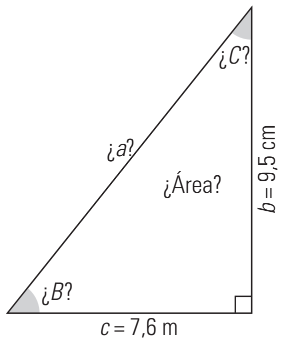
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 7,2$ cm $B = 42°\ 35'\ 23''$	C	$C = 90° - B$	$C = 47°\ 24'\ 37''$
	b	$\operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a} \Rightarrow$ $b = a \operatorname{sen} B$	$b = 7,2 \operatorname{sen} 42°\ 35'\ 23'' =$ $= 4,87$ cm
	c	$\cos B = \dfrac{c}{a} \Rightarrow$ $c = a \cos B$	$c = 7,2 \cos 42°\ 35'\ 23'' =$ $= 5,30$ cm
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 4,87 \cdot 5,30 =$ $= 12,91\ \text{cm}^2$

47. En un triángulo rectángulo se conocen el cateto *c* = 6,4 m y el ángulo contiguo *B* = 56° 23′ 44″. Calcula los demás elementos.



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 6{,}4$ m $B = 56°\ 23'\ 44''$	C	$C = 90° - B$	$C = 47°\ 24'\ 37''$
	a	$\text{sen}\ B = \dfrac{c}{a} \Rightarrow$ $a = \dfrac{c}{\cos B}$	$a = \dfrac{6{,}4}{\cos 56°\ 23'\ 44''} =$ $= 11{,}56$ m
	b	$\text{tg}\ B = \dfrac{b}{c} \Rightarrow$ $b = c\ \text{tg}\ B$	$b = 6{,}4\ \text{tg}\ 56°\ 23'\ 44'' =$ $= 9{,}63$ m
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2}\, b \cdot c$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}5 \cdot 7{,}6 =$ $= 36{,}10\ \text{cm}^2$

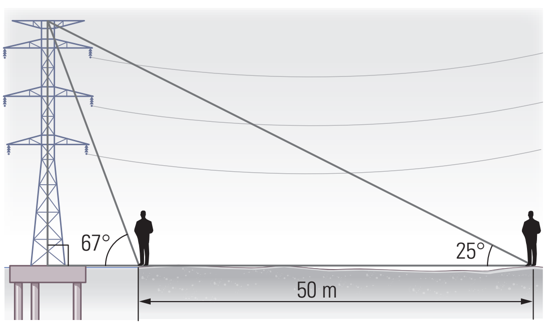
48. En un triángulo rectángulo se conocen los dos catetos *b* = 9,5 cm y *c* = 7,6 cm. Calcula los demás elementos.

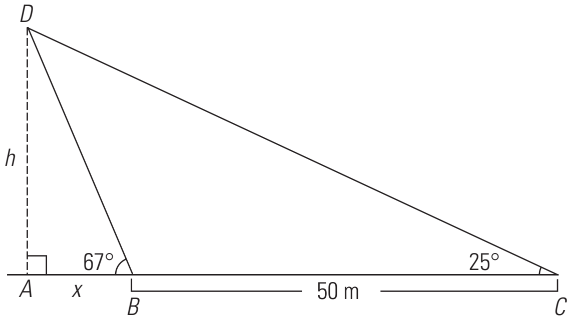


Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 9{,}5$ cm $c = 7{,}6$ cm	a	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$ $c = \sqrt{b^2 + c^2}$	$c = \sqrt{9{,}5^2 + 7{,}6^2} =$ $= 12{,}17$ cm
	B	$\text{tg}\ B = \dfrac{b}{c}$	$\text{tg}\ B = \dfrac{9{,}5}{7{,}6} \Rightarrow$ $B = 51°\ 20'\ 25''$
	C	$C = 90° - B$	$C = 38°\ 39'\ 35''$
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2}\, b \cdot c$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}5 \cdot 7{,}6 =$ $= 36{,}10\ \text{cm}^2$

4. APLICACIONES AL CÁLCULO DE DISTANCIAS, ÁREAS Y VOLÚMENES

49. Una torre de alta tensión está colocada dentro del mar sobre un soporte. Desde la orilla de la playa se mide el ángulo de elevación de la parte más alta y se obtiene 67°. Alejándose en la misma dirección 50 m, el nuevo ángulo de elevación es de 25°. Calcula la altura de la torre.





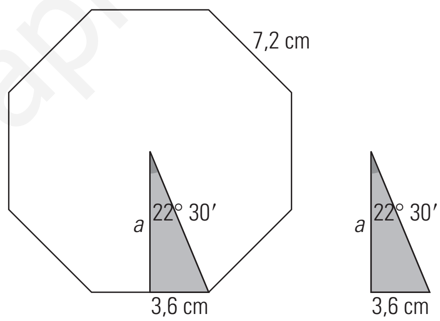
$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\ 67° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg}\ 25° &= \frac{h}{50 + x} \end{aligned}\right\}$$

$x = 12{,}34$ m

$h = 29{,}07$ m

La torre de alta tensión mide 29,07 m de alto.

50. Calcula la apotema de un octógono regular en el que el lado mide 7,2 cm

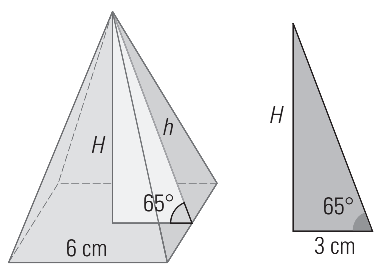


$360° : 16 = 22°\ 30'$

$\text{tg}\ 22°\ 30' = \dfrac{3{,}6}{a}$

$a = 8{,}69$ cm

51. Calcula el volumen de una pirámide regular cuadrangular en la que la arista de la base mide 6 cm y el ángulo que forma la base con las caras laterales es de 65°



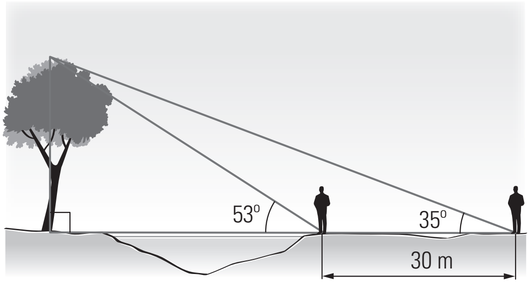
$\text{tg}\ 65° = \dfrac{H}{3}$

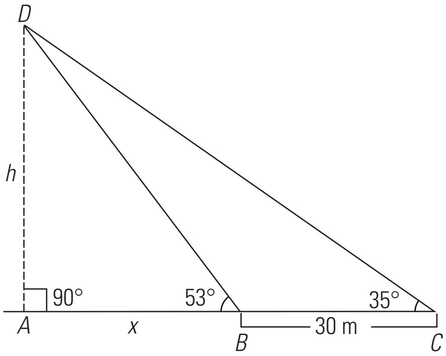
$H = 6{,}43$ cm

$A_B = 6^2 = 36\ \text{cm}^2$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6{,}43 = 77{,}16\ \text{cm}^2$

52. Se quiere medir la anchura de un río. Para ello se observa un árbol que está en la otra orilla. Se mide el ángulo de elevación desde esta orilla a la parte más alta del árbol y se obtienen 53°. Alejándose 30 m del río se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 35°. Calcula la anchura del río.





$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 53° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 35° = \dfrac{h}{30 + x} \end{array}\right\}$$

$x = 33{,}51$ m

h = 44,47 m

El río mide de ancho 33,51 m

PARA AMPLIAR

53. Pasa los ángulos siguientes a radianes:

a) 120° **b) 135°**

c) 240° **d) 300°**

a) $120° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{2\pi}{3}$ rad

b) $135° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad

c) $240° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{4\pi}{3}$ rad

d) $300° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{5\pi}{3}$ rad

54. Pasa los ángulos siguientes a grados:

a) 3,5 rad **b) 3 rad** **c) 2,6 rad** **d) 0,4 rad**

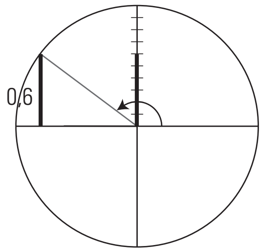
a) $3{,}5 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 200°\ 32'\ 7''$

b) $3 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 171°\ 53'\ 14''$

c) $2{,}6 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 148°\ 58'\ 9''$

d) $0{,}4 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 22°\ 55'\ 6''$

55. Calcula todas las razones trigonométricas de α sabiendo que sen α = 0,6 y α está en el 2.º cuadrante.



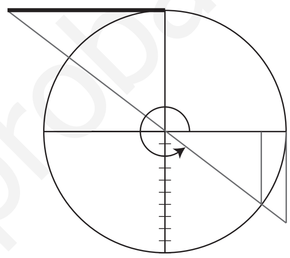
$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$

$0{,}6^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -0{,}8$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = -0{,}75$

$\sec\alpha = -1{,}25$

56. Calcula todas las razones trigonométricas de α sabiendo que cotg α = –3/2 y α está en el 4.º cuadrante.



$1 + \text{cotg}^2\ \alpha = \text{cosec}^2\ \alpha$

$1 + \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \text{cosec}^2\ \alpha$

$\text{cosec}\ \alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}} = -\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

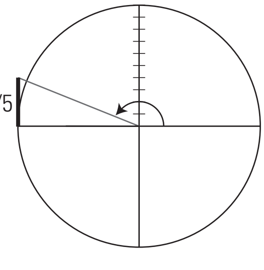
$\text{tg}\ \alpha = -\dfrac{2}{3}$

$\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \text{cotg}\ \alpha\ \text{sen}\ \alpha$

$\cos\alpha = -\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\right) = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

$\sec\alpha = \dfrac{13}{3\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

57. Calcula todas las razones trigonométricas de α sabiendo que tg α = – 2/5 y α está en el 2.º cuadrante.



$1 + \text{tg}^2\ \alpha = \sec^2\ \alpha$

$1 + \left(-\dfrac{2}{5}\right)^2 = \sec^2\ \alpha$

$\sec\alpha = -\dfrac{\sqrt{29}}{5}$

$\cos\alpha = -\dfrac{5}{\sqrt{29}} = -\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \cos\alpha\ \text{tg}\,\alpha$

$\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{5\sqrt{29}}{29}\left(-\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{2\sqrt{29}}{29}$

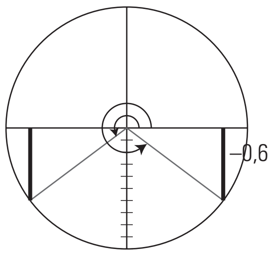
$\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{29}{2\sqrt{29}} = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$

58. Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan que:

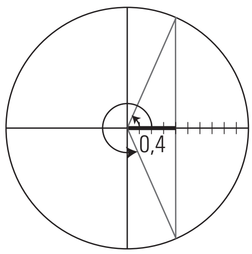
a) sen α = –0,6

b) cos α = 0,4

a)



b)

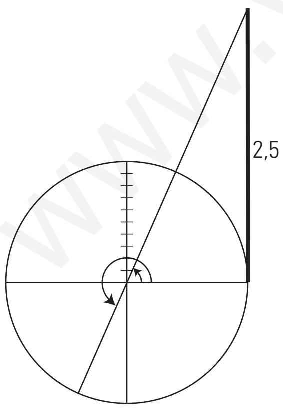


59. Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan que:

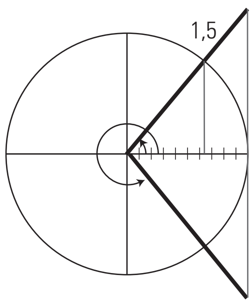
a) tg α = 2,5

b) sec α = 1,5

a)



b)



60. Calcula, reduciendo al 1.er cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

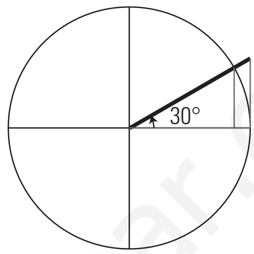
a) sec 3 270°

b) cos 3 000°

c) tg 2 040°

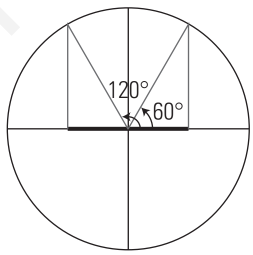
d) sen 2 850°

a) 3 270° = 30° + 9 · 360°



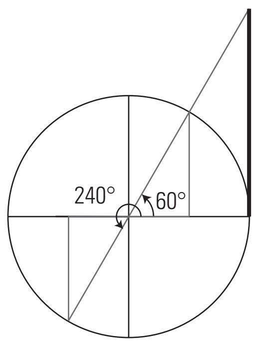
$\sec 3\,270° = \sec 30° = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) 3 000° = 120° + 8 · 360°



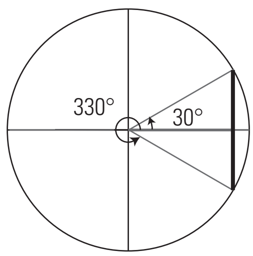
$\cos 3\,000° = \cos 120° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

c) 2 040° = 240° + 5 · 360°



$\text{tg}\,2\,040° = \text{tg}\,240° = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

d) 2 850° = 330° + 7 · 360°



$\text{sen}\,2\,850° = \text{sen}\,330° = -\text{sen}\,30° = -\dfrac{1}{2}$

61. Calcula las razones trigonométricas siguientes sabiendo que sen 15° = 0,2588:

a) sen 165°

b) sen 195°

c) sen 345°

d) cos 105°

e) cos 255°

f) cos 285°

a) $\text{sen } 165° = \text{sen } (180° - 15°) = \text{sen } 15° = 0{,}2588$

b) $\text{sen } 195° = \text{sen } (180° + 15°) = -\text{sen } 15° = -0{,}2588$

c) $\text{sen } 345° = \text{sen } (360° - 15°) = -\text{sen } 15° = -0{,}2588$

d) $\cos 105° = \cos (180° - 75°) = -\cos 75° =$
$= -\text{sen } 15° = -0{,}2588$

e) $\cos 255° = \cos(180° + 75°) = -\cos 75° =$
$= -\text{sen } 15° = -0{,}2588$

f) $\cos 285° = \cos (360° - 75°) = \cos 75° = \text{sen } 15° = 0{,}2588$

62. Sabiendo que sen α = 0,4 y α es un ángulo del 1.er cuadrante, calcula:

a) sen (180° – α)

b) sen (360° – α)

c) sen (90° + α)

a) $\text{sen } (180° - \alpha) = \text{sen } \alpha = 0{,}4$

b) $\text{sen } (360° - \alpha) = -\text{sen } \alpha = -0{,}4$

c) $\text{sen } (90° + \alpha) = \cos \alpha$

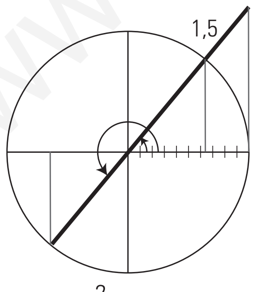
Se calcula cos α

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$0{,}4^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos \alpha = 0{,}9165$

63. Dibuja en la circunferencia un ángulo α tal que sec α = 3/2. Calcula cos (α + π)



$\cos (\alpha + \pi) = -\cos \alpha = -\dfrac{2}{3}$

64. Demuestra la siguiente identidad:

$$\text{tg } \alpha \, (\cos \alpha + \text{cosec } \alpha - \text{sen } \alpha) = \text{sen } \alpha + \cos \alpha$$

$\dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \cdot (\cos \alpha + \text{cosec } \alpha - \text{sen } \alpha)$

$\text{sen } \alpha + \dfrac{1}{\cos \alpha} - \dfrac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha}$

$\text{sen } \alpha + \sec \alpha - \dfrac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$

$\text{sen } \alpha + \sec \alpha - \sec \alpha + \cos \alpha$

$\text{sen } \alpha + \cos \alpha$

65. Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{2 \text{ tg}^2 \alpha}{\text{sen}(1 + \text{tg}^2 \alpha)} = 2 \text{ sen } \alpha$$

$\dfrac{2 \text{ tg}^2 \alpha}{\text{sen } \alpha \sec^2 \alpha} = \dfrac{2 \text{ sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} : \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos^2 \alpha} =$

$= \dfrac{2 \cancel{\text{sen}^2} \alpha}{\cancel{\cos^2 \alpha}} \cdot \dfrac{\cancel{\cos^2 \alpha}}{\cancel{\text{sen } \alpha}} = 2 \text{ sen } \alpha$

66. Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{1 + \text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 - \text{sen } \alpha}$$

$(1 + \text{sen } \alpha)(1 - \text{sen } \alpha) = \cos^2 \alpha$

$1 - \text{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

67. Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{1 - \text{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

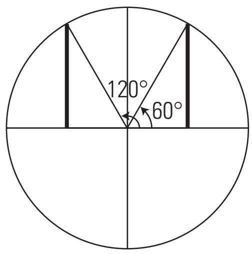
$\dfrac{1 - \text{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha} = \dfrac{1 - \dfrac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha} = \dfrac{\dfrac{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha}$

$= \dfrac{\cancel{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha \cdot \cancel{(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha)}} = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

68. $\text{sen } (x + 45°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Se toma la raíz positiva.



$x_1 + 45° = 60° + 360°k, \; k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 15° + 360°k, \; k \in \mathbb{Z}$

$x_2 + 45° = 120° + 360°k, \; k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 75° + 360°k, \; k \in \mathbb{Z}$

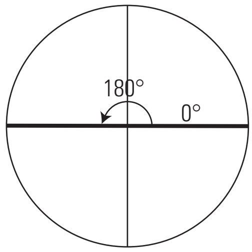
69. $\cos^2 x = 1 + \text{sen}^2 x$

$\cos^2 x = 1 + \text{sen}^2 x$

$1 - \text{sen}^2 x = 1 + \text{sen}^2 x$

$2\text{sen}^2 x = 0$

$\text{sen } x = 0$



$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k, \; k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k, \; k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k, \; k \in \mathbb{Z}$

70. $\mathbf{3\ tg\ } \boldsymbol{x} \mathbf{= 2\ cos\ } \boldsymbol{x}$

$3 \text{ sen } x = 2 \cos^2 x$

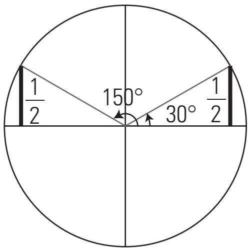
$3 \text{ sen } x = 2(1 - \text{sen}^2 x)$

$2 \text{ sen}^2 x + 3 \text{ sen } x - 2 = 0$

$$\text{sen } x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$$

La solución sen $x = -2$ no es válida.

$\text{sen } x = \frac{1}{2}$



$x_1 = 30° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

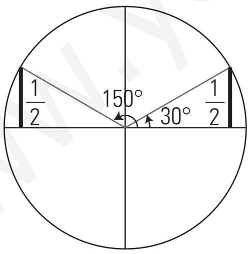
71. $\mathbf{cos^2\ } \boldsymbol{x} \mathbf{- sen^2\ } \boldsymbol{x} \mathbf{= sen\ } \boldsymbol{x}$

$1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x = \text{sen } x$

$2 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$

$$\text{sen } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

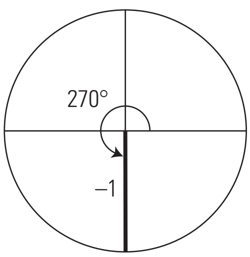
a) $\text{sen } x = \frac{1}{2}$



$x_1 = 30° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{sen } x = -1$



$x_3 = 270° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

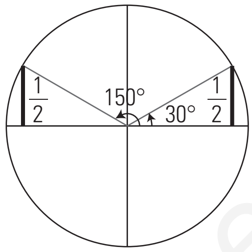
72. $\mathbf{sen^2\ } \boldsymbol{x} \mathbf{- cos^2\ } \boldsymbol{x} \mathbf{= -\frac{1}{2}}$

$\text{sen}^2 x - 1 + \text{sen}^2 x = -\frac{1}{2}$

$2 \text{ sen}^2 x = \frac{1}{2}$

$\text{sen } x = \pm \frac{1}{2}$

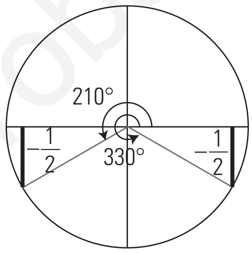
a) $\text{sen } x = \frac{1}{2}$



$x_1 = 30° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$



$x_3 = 210° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 330° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

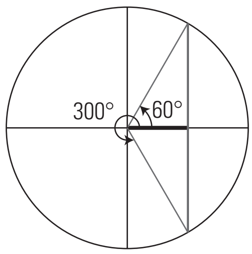
73. $\mathbf{cos^2\ } \boldsymbol{x} \mathbf{+ cos\ } \boldsymbol{x} \mathbf{= sen^2\ } \boldsymbol{x}$

$\cos^2 x + \cos x = 1 - \cos^2 x$

$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$$\text{sen } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

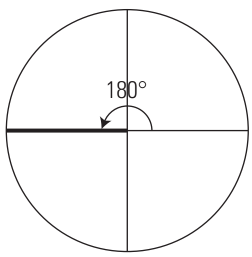
a) $\cos x = \frac{1}{2}$



$x_1 = 60° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 300° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = -1$



$x_3 = 180° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

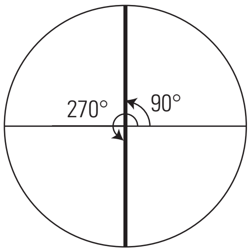
74. sen *x* cos *x* = 2 cos *x*

sen x cos x − 2 cos x = 0

cos x (sen x − 2) = 0 ⇒ cos x = 0

sen x − 2 ≠ 0 para todo valor de x

Si cos x = 0



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 270° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$$

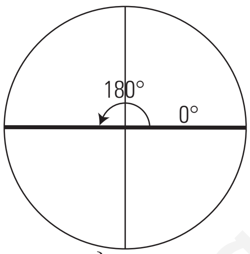
75. tg *x* = 2 sen *x* cos *x*

sen x = 2 sen $x \cos^2 x$

sen x − 2 sen $x \cos^2 x = 0$

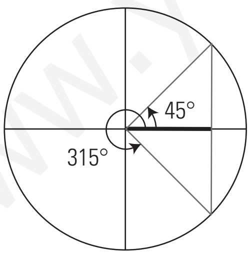
$$\text{sen } x(1 - 2\cos^2 x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ 1 - 2 \cos 2x = 0 \Rightarrow \\ \cos x = -\sqrt{\dfrac{2}{2}} \end{cases}$$

a) sen x = 0



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$$

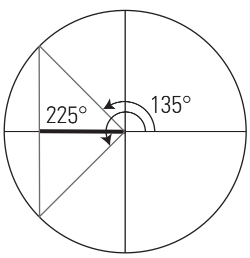
b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$x_3 = 45° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 315° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$x_5 = 135° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

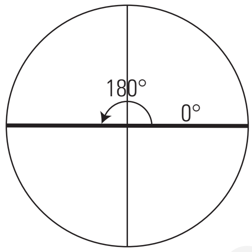
$x_6 = 225° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

76. tg *x* − sen *x* = 0

sen x − sen x cos x = 0

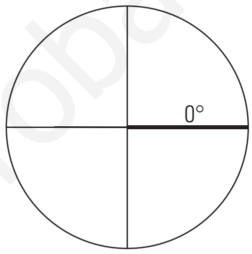
$$\text{sen } x(1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ 1 - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \end{cases}$$

a) sen x = 0



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$$

b) cos x = 1



$x_3 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

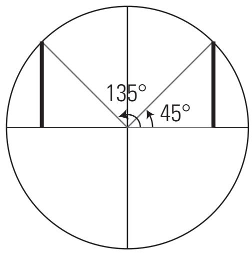
Es la misma que una anterior.

77. sen *x* − cos *x* = 0

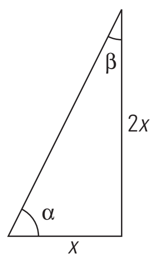
sen x = cos x

$\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = 1$

tg x = 1



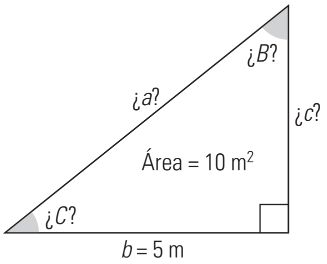
78. En un triángulo rectángulo un cateto mide el doble que el otro. Calcula la amplitud de sus ángulos agudos.



$\text{tg } \alpha = \dfrac{2x}{x} = 2 \Rightarrow \alpha = 63°\ 26'\ 6''$

$\beta = 90° - 63°\ 33'\ 54'' = 26°\ 33'\ 54''$

79. En un triángulo rectángulo un cateto mide 5 m, y el área, 10 m². Halla los demás elementos del triángulo rectángulo.



$\text{Área} = \frac{1}{2}bc$

$\frac{1}{2}5c = 10$

$5c = 20$

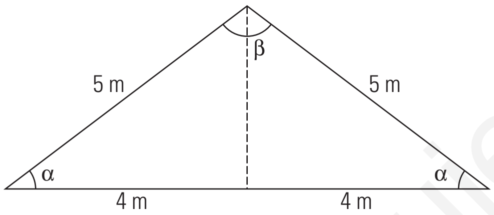
$c = 4$ m

$a = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} = 6{,}40$ m

$\text{tg } B = \frac{5}{4} \Rightarrow B = 51° \, 20' \, 25''$

$C = 90° - 51° \, 20' \, 25'' = 38° \, 39' \, 35''$

80. En un triángulo isósceles, cada uno de los lados iguales miden 5 m, y el desigual, 8 m. Halla la amplitud de sus ángulos.



$\cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 36° \, 52' \, 12''$

$\beta = 180° - 2 \cdot 36° \, 52' \, 12'' = 106° \, 15' \, 36''$

CON CALCULADORA

81. Calcula el ángulo correspondiente en cada uno de los siguientes casos:

a) sen α = 0,4 estando α en el 1.^er^ cuadrante.

b) cos α = –0,65 estando α en el 2.º cuadrante.

c) tg α = 1,4 estando α en el 3.^er^ cuadrante.

d) cos α = 0,8 estando α en el 4.º cuadrante.

a) 23° 34′ 41″

b) 130° 32′ 30″

c) 234° 27′ 44″

d) 323° 7′ 48″

82. Calcula el ángulo correspondiente en cada uno de los siguientes casos:

a) cos α = 0,2 estando α en el 1.^er^ cuadrante.

b) tg α = –1,6 estando α en el 2.º cuadrante.

c) sen α = –0,7 estando α en el 3.^er^ cuadrante.

d) tg α = –0,5 estando α en el 4.º cuadrante.

a) 78° 27′ 47″ b) 122° 19″

c) 224° 25′ 37″ d) 333° 26′ 6″

83. Calcula el ángulo correspondiente en cada uno de los siguientes casos:

a) tg α = 2 estando α en el 1.^er^ cuadrante.

b) sen α = 0,9 estando α en el 2.º cuadrante.

c) cos α = –0,4 estando α en el 3.^er^ cuadrante.

d) sen α = –0,3 estando α en el 4.º cuadrante.

a) 63° 26′ 6″

b) 115° 50′ 31″

c) 246° 25′ 19″

d) 342° 32′ 33″

PROBLEMAS

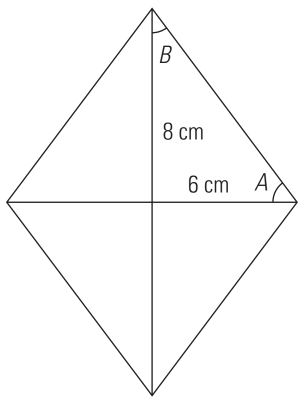
84. Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 80° en una circunferencia de 20 cm de radio.

$\frac{20\pi}{180°} \cdot 80° = 27{,}93$ cm

85. En una circunferencia de 8 cm de radio, el arco correspondiente a un ángulo central mide 32 cm. Calcula en radianes lo que mide dicho ángulo.

$\frac{32}{8} = 4$ rad

86. Las diagonales de un rombo miden 12 cm y 16 cm. Calcula los ángulos del rombo.

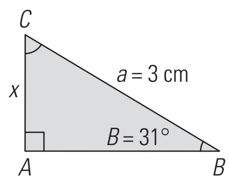


$\text{tg } A = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$A = 53° \, 7' \, 48''$

$B = 90° - 53° \, 7' \, 48'' = 36° \, 52' \, 12''$

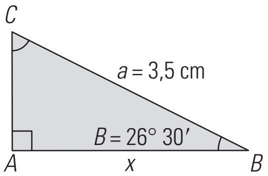
87. Halla el valor de *x* en el siguiente triángulo rectángulo:



$\text{sen } 31° = \frac{x}{3}$

$x = 3 \text{ sen } 31° = 1{,}55$ cm

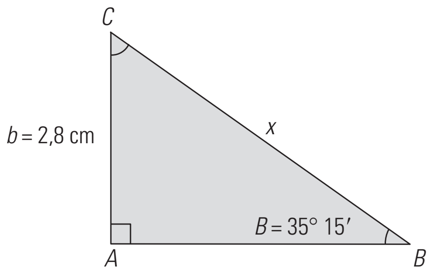
88. Halla el valor de *x* en el siguiente triángulo rectángulo:



$\cos 26° 30' = \dfrac{x}{3,5}$

$x = 3,5 \cos 26° 30' = 3,13$ cm

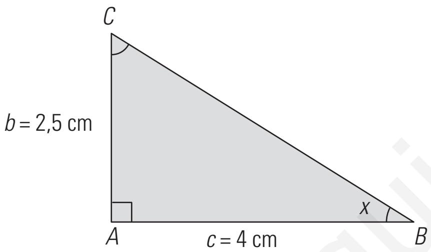
89. Halla el valor de *x* en el siguiente triángulo rectángulo:



$\text{sen } 35° 15' = \dfrac{2,8}{x}$

$x = \dfrac{2,8}{\text{sen } 35° 15'} = 4,85$ cm

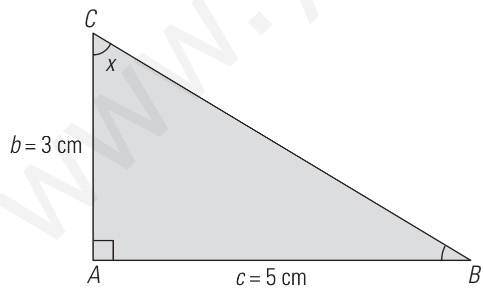
90. Halla el valor de *x* en el siguiente triángulo rectángulo:



$\text{tg } x = \dfrac{2,5}{4}$

$x = 32° 19''$

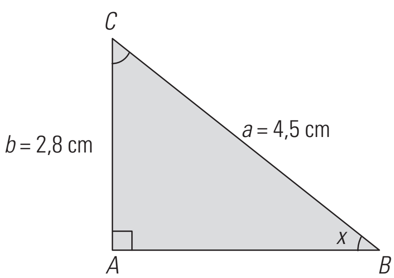
91. Halla el valor de *x* en el siguiente triángulo rectángulo:



$\text{tg } x = \dfrac{5}{3}$

$x = 59° 2' 10''$

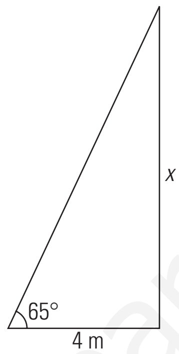
92. Halla el valor de *x* en el siguiente triángulo rectángulo:



$\text{sen } x = \dfrac{2,8}{4,5}$

$x = 38° 28' 43''$

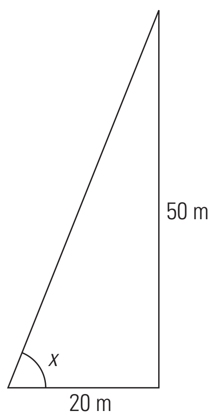
93. El extremo de una escalera está apoyado sobre la pared de un edificio, y su base se encuentra a 4 m de la pared. Si el ángulo que forma la escalera con la pared es de 65°, ¿a qué altura del suelo llega la escalera?



$\text{tg } 65° = \dfrac{x}{4}$

$x = 4 \text{ tg } 65° = 8,58$ m

94. Una torre de 50 m de altura proyecta un sombra de 20 m a cierta hora del día. Calcula el ángulo con el que se verá el extremo superior de la torre desde el extremo de la sombra.

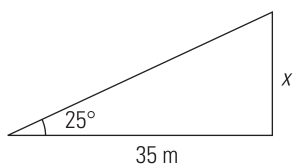


$\text{tg } x = \dfrac{50}{50}$

$\text{tg } x = 2,5$

$x = 68° 11' 55''$

95. A una distancia de 35 m del pie de una chimenea se ve el extremo de la misma con un ángulo de 25°. Calcula la altura de la chimenea.

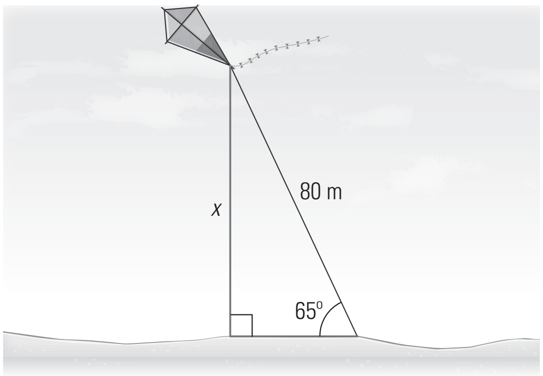


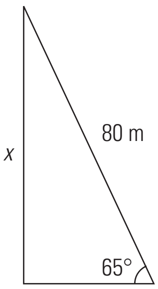
$\text{tg } 25° = \dfrac{x}{25}$

$x = 35 \text{ tg } 25°$

$x = 16,32$ m

96. Una cometa está sujeta al suelo con una cuerda de 80 m de largo y esta forma con el suelo un ángulo de 65°. Si la cuerda está recta, ¿a qué altura del suelo está la cometa?



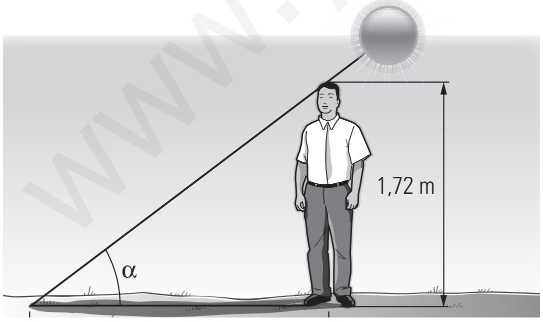


$\text{sen } 65° = \dfrac{x}{80}$

$x = 80 \text{ sen } 65°$

$x = 72{,}50 \text{ m}$

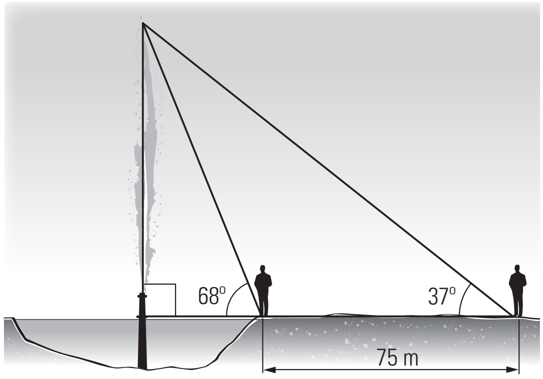
97. Una persona que mide 1,72 cm proyecta una sombra de 2,25 cm. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol en ese momento?

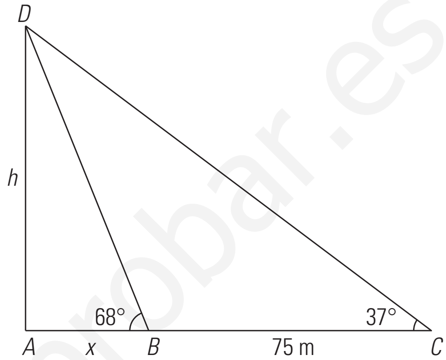


$\text{tg } \alpha = \dfrac{1{,}72}{2{,}25}$

$\alpha = 37° \; 23' \; 45''$

98. En el centro de un lago sale verticalmente un chorro de agua, y se quiere medir su altura. Para ello, se mide el ángulo de elevación desde la orilla a la parte más alta del chorro de agua y se obtienen 68°; alejándose 75 m del lago se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 37°. Calcula la altura del chorro de agua.





$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 68° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 37° = \dfrac{h}{x+75} \end{array}\right\}$$

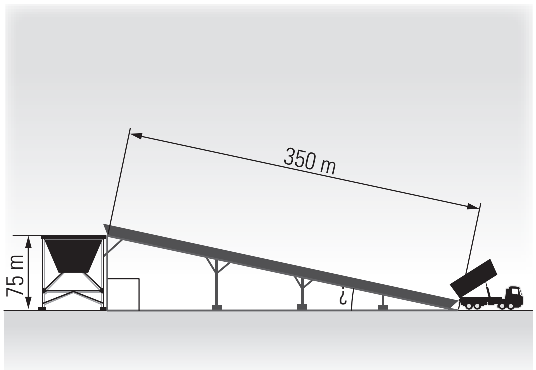
$$\left.\begin{array}{l} h = x \text{ tg } 68° \\ h = (x+75) \text{ tg } 37° \end{array}\right\}$$

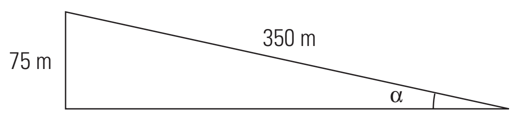
$$\left.\begin{array}{l} h = 2{,}48x \\ h = 0{,}75(x+75) \end{array}\right\}$$

$x = 32{,}51 \text{ m}$

$h = 80{,}64 \text{ m}$

99. Una cinta transportadora de sacos de cemento mide 350 m y se quiere que eleve el cemento a 75 m de altura. ¿Qué ángulo de elevación debe llevar la cinta?

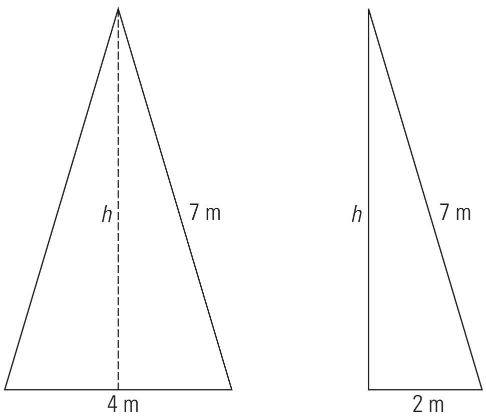




$\text{sen } \alpha = \dfrac{75}{350}$

$\alpha = 12° \; 22' \; 25''$

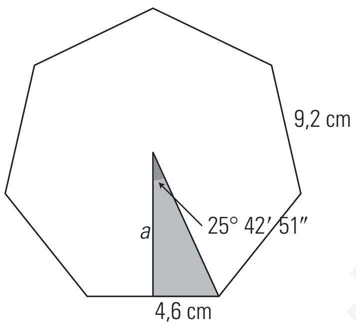
100. Dado un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden 7 m, y el desigual, 4 m, calcula la altura relativa al lado desigual.



$h = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = 6{,}71$ m

101. Calcula la apotema y el área de un heptágono regular cuyo lado mide 9,2 cm

360° : 14 = 25° 42′ 51″

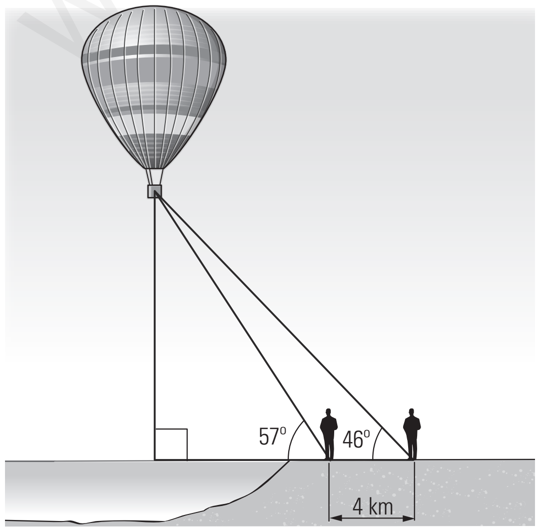


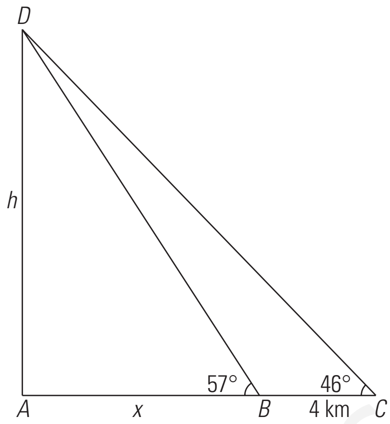
$\text{tg } 25° \, 42' \, 51'' = \dfrac{4{,}6}{a}$

$a = 9{,}55$ cm

$\text{Área} = \dfrac{7 \cdot 9{,}2 \cdot 9{,}55}{2} = 307{,}51 \text{ cm}^2$

102. Dos personas están en una playa y ven un globo desde los puntos *A* y *B*, respectivamente, de forma que las dos personas y el globo están en un plano perpendicular al suelo. La distancia entre las dos personas es de 4 km. El ángulo de elevación del globo desde el punto *A* es de 57°, y desde el punto *B*, de 46°. Calcula la altura a la que se encuentra el globo.





$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 57° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg } 46° &= \frac{h}{x+4} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= x \text{ tg } 57° \\ h &= (x+4) \text{ tg } 46° \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= 1{,}54x \\ h &= 1{,}04(x+4) \end{aligned}\right\}$$

$x = 8{,}32$ km

$h = 12{,}81$ km

PARA PROFUNDIZAR

103. Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{1 + \text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \text{sen } \alpha} = 2 \sec \alpha$$

$$\frac{1+\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1+\text{sen } \alpha} = \frac{(1+\text{sen } \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1+\text{sen } \alpha)} =$$

$$= \frac{1 + 2 \text{ sen } \alpha + \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \text{sen } \alpha)} = \frac{2 + 2 \text{ sen } \alpha}{\cos \alpha (1 + \text{sen } \alpha)} =$$

$$= \frac{2(1+\text{sen } \alpha)}{\cos \alpha (1+\text{sen } \alpha)} = \frac{2}{\cos \alpha} = 2 \sec \alpha$$

104. Resuelve la ecuación trigonométrica:

$$\textbf{tg } x + 3 \textbf{ cotg } x = 4$$

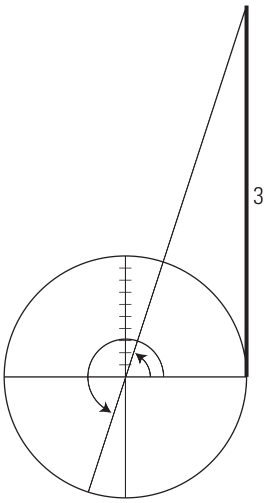
$\text{tg } x + \dfrac{3}{\text{tg } x} = 4$

$\text{tg}^2 x + 3 = 4 \text{ tg } x$

$\text{tg}^2 x - 4 \text{ tg } x + 3 = 0$

$\text{tg } x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

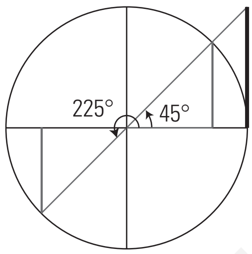
a) tg $x = 3$



$x_1 = 71° \, 33' \, 54'' + 360°k, \; k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 251° \, 33' \, 54'' + 360°k, \; k \in \mathbb{Z}$

b) tg $x = 1$



$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 45° + 360°k, \; k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = 225° + 360°k, \; k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 45° + 180°k, \; k \in \mathbb{Z}$$

105. Resuelve la ecuación trigonométrica:

$$\mathbf{tg}\, x \,\mathbf{sec}\, x = \sqrt{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{2} \cos^2 x$$

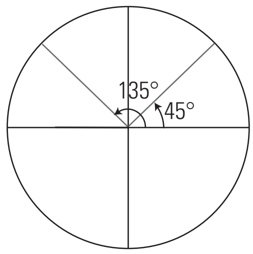
$$\operatorname{sen} x = \sqrt{2}\,(1 - \operatorname{sen}^2 x)$$

$$\sqrt{2} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - \sqrt{2} = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1 \pm 3}{2\sqrt{2}} \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}$$

$\operatorname{sen} x = -\sqrt{2}$ no tiene sentido porque $|\operatorname{sen} x| \le 1$

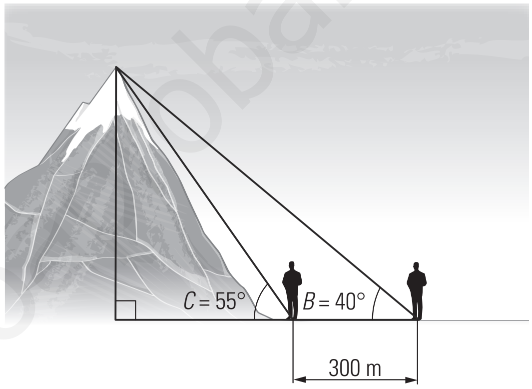
$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

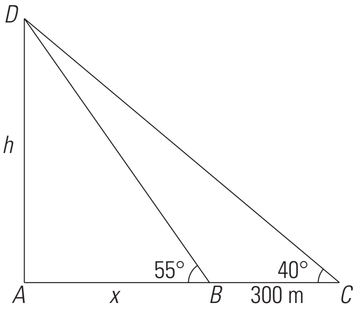


$x_1 = 45° + 360°k, \; k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 135° + 360°k, \; k \in \mathbb{Z}$

106. En una llanura, desde un punto cualquiera se mide el ángulo *B* de elevación de una montaña y se obtiene 40°. Acercándose a la montaña una distancia de 300 m, se vuelve a medir el ángulo *C* de elevación y se obtiene 55°. Calcula la altura de la montaña.





$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} 55° = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 40° = \dfrac{h}{x+300} \end{array}\right\}$$

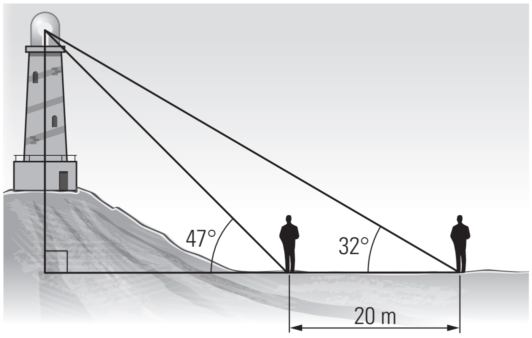
$$\left.\begin{array}{l} h = x \operatorname{tg} 55° \\ h = (x+300) \operatorname{tg} 40° \end{array}\right\}$$

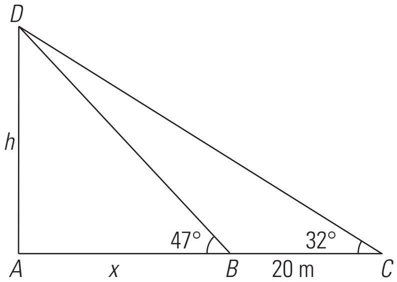
$$\left.\begin{array}{l} h = 1{,}43x \\ h = 0{,}84(x+300) \end{array}\right\}$$

$x = 427{,}12$ m

$h = 610{,}78$ m

107. Un faro está colocado sobre un montículo. Al lado del montículo hay una pequeña llanura y desde ella se mide el ángulo de elevación del punto más alto del faro y se obtiene 47°. Nos alejamos en la misma dirección 20 m, se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtiene 32°. Calcula la altura del faro más el montículo.





$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 47° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg } 32° &= \frac{h}{x+20} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= x \text{ tg } 47° \\ h &= (x+20) \text{ tg } 32° \end{aligned}\right\}$$

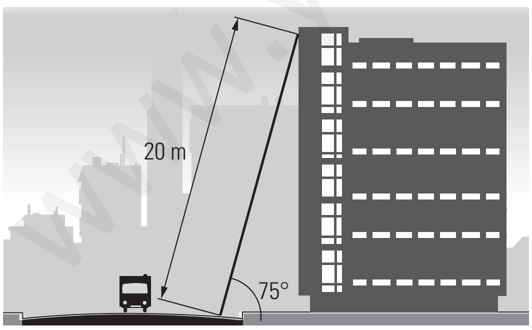
$$\left.\begin{aligned} h &= 1{,}07x \\ h &= 0{,}62(x+20) \end{aligned}\right\}$$

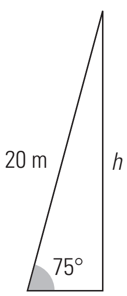
$x = 27{,}56$ m

$h = 29{,}49$ m

APLICA TUS COMPETENCIAS

108. Una escalera de bomberos que mide 20 m de longitud se apoya sobre una fachada. El ángulo que forma el suelo con la escalera es de 75°. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la fachada?



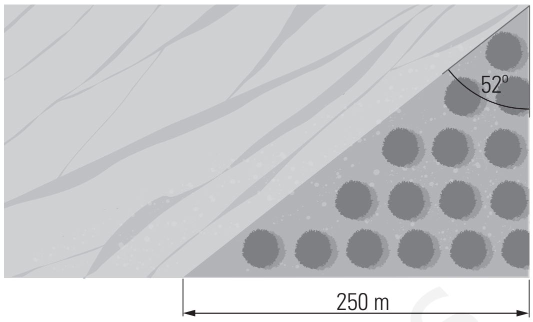


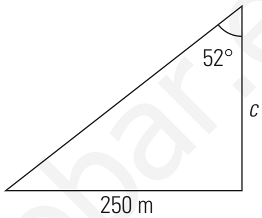
$\text{sen } 75° = \dfrac{h}{20}$

$h = 20 \cdot \text{sen } 75°$

$h = 19{,}32$ m

109. Una finca tiene forma de triángulo rectángulo. Uno de los catetos mide 250 m, y el ángulo opuesto, 52°. Calcula el área de la finca.





$\text{tg } 52° = \dfrac{250}{c}$

$c = 195{,}32$ m

$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 250 \cdot 195{,}32$

$\text{Área} = 24\,415 \text{ m}^2$

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Define qué es una identidad trigonométrica y pon un ejemplo.

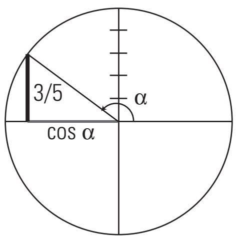
Una identidad trigonométrica es un igualdad que se verifica para cualquier valor de la variable.

Ejemplo: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

2. Un ángulo mide 1,23 rad. ¿Cuántos grados son?

$1{,}23 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 70°\ 28'\ 26''$

3. Sabiendo que sen α = 3/5 y que el ángulo está en el 2.º cuadrante, halla el valor del cos α



$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{9}{25}$

$\cos^2 \alpha = \dfrac{16}{25}$

$\cos \alpha = -\dfrac{4}{5}$

4. Calcula el ángulo α en los siguientes casos:

a) sen α = 0,5678 y el ángulo está en el 2.º cuadrante.

b) cos α = –0,4321 y el ángulo está en el 3.er cuadrante.

c) tg α = –1,2345 y el ángulo está en el 4.º cuadrante.

a) $\alpha = 145° \, 24' \, 11''$

b) $\alpha = 244° \, 23' \, 57''$

c) $\alpha = 309° \, 32''$

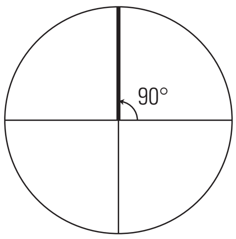
5. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\text{sen}^2 x + 2 = \cos^2 x + 3 \,\text{sen}\, x$$

$2 \,\text{sen}^2 x - 3 \,\text{sen}\, x + 1 = 0$

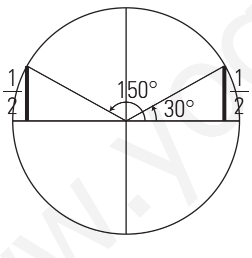
$\text{sen}\, x = 1$, $\text{sen}\, x = \dfrac{1}{2}$

a) $\text{sen}\, x = 1$



$x_1 = 90° + 360°k, \; k \in \mathbb{Z}$

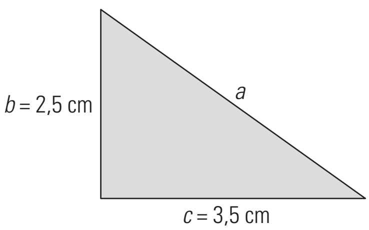
b) $\text{sen}\, x = \dfrac{1}{2}$



$x_2 = 30° + 360°k, \; k \in \mathbb{Z}$

$x_3 = 150° + 360°k, \; k \in \mathbb{Z}$

6. Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:



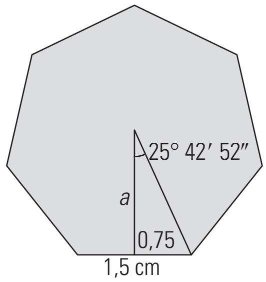
$\text{tg}\, \alpha = \dfrac{2,5}{3,5} \Rightarrow \alpha = 35° \, 32' \, 16''$

$\beta = 90° - 35° \, 32' \, 16'' = 54° \, 27' \, 44''$

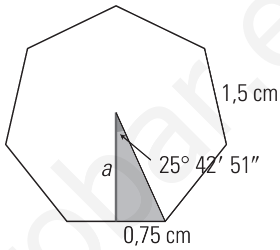
$a^2 = 2,5^2 + 3,5^2 \Rightarrow a = 4,30$ cm

$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 3,5 = 4,38 \text{ cm}^2$

7. Calcula el área de un heptágono regular en el que el lado mide 1,5 cm



$360° : 14 = 25° \, 42' \, 51''$

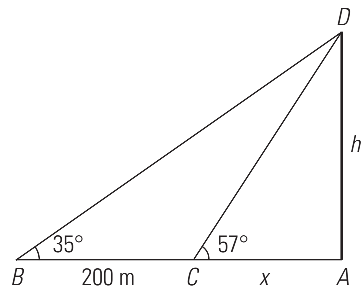


$\text{tg}\, 25° \, 42' \, 51'' = \dfrac{0,75}{a}$

$a = 1,56$ cm

$\text{Área} = \dfrac{7 \cdot 1,5 \cdot 1,57}{2} = 8,24 \text{ cm}^2$

8. En la llanura, desde un punto cualquiera, se mide el ángulo *B* de elevación de una montaña y se obtiene 35°. Acercándose a la montaña una distancia de 200 m, se vuelve a medir el ángulo *C* de elevación y se obtiene 57°. ¿Cuánto mide de alto la montaña?



$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\, 57° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg}\, 35° &= \frac{h}{x+200} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= x \,\text{tg}\, 57° \\ h &= (x+200)\,\text{tg}\, 35° \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= 1,54x \\ h &= 0,62(x+200)0,7 \end{aligned}\right\}$$

$x = 166,67$ m

$h = 256,67$ m

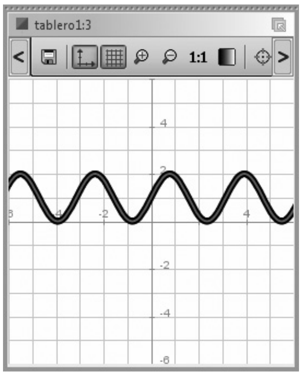
La montaña mide 256,67 m de alto.

WINDOWS/LINUX GEOGEBRA

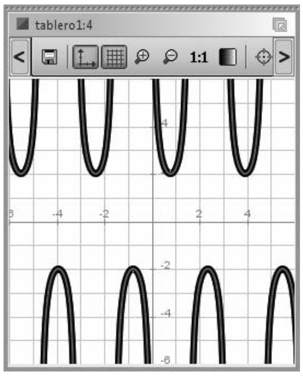
PRACTICA

Demuestra las siguientes identidades; primero dibuja el 1.er miembro, y luego, el 2.º

114. $(\text{sen } x + \cos x)^2 = 1 + 2 \text{ sen } x \cos x$



115. $\text{tg } x + \text{cotg } x = \sec x \text{ cosec } x$



Resuelve las siguientes ecuaciones:

116. $3 \text{ sen } x - 2 \cos^2 x = 0$

$x_1 = \frac{\pi}{6};\ x_2 = \frac{5\pi}{6}$

117. $\text{sen } x \cos x = 0$

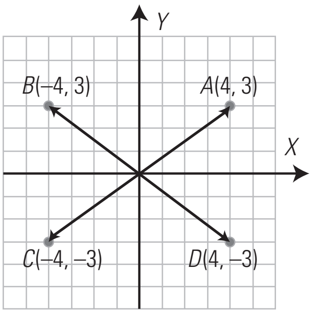
$x_1 = 0;\ x_2 = -\pi;\ x_3 = \pi;\ x_4 = \frac{\pi}{2};\ x_5 = -\frac{\pi}{2}$

9. Geometría analítica

1. Vectores

PIENSA Y CALCULA

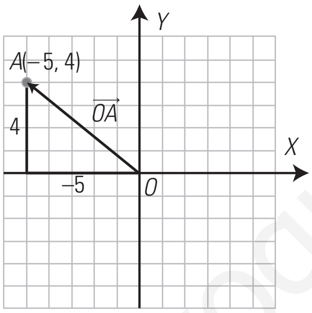
Dibuja en unos ejes coordenados los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen sus extremos en los puntos: *A*(4, 3), *B*(–4, 3), *C*(–4, –3) y *D*(4, –3)



APLICA LA TEORÍA

1. Dado el punto *A*(–5, 4), halla el vector $\overrightarrow{OA}$, represéntalo y halla sus componentes.

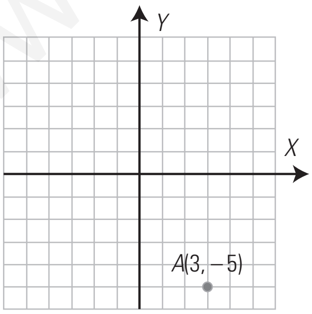
$\overrightarrow{OA}(-5, 4)$



La componente horizontal es –5, y la vertical, 4

2. Dado el vector $\vec{v}(3, -5)$, halla el punto *A* tal que el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$, y represéntalo.

A(3, –5)



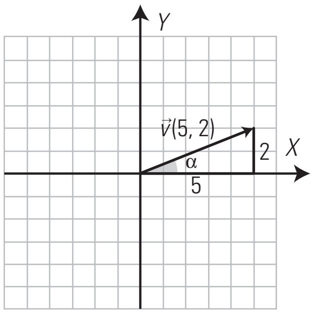
3. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

a) $\vec{v}(5, 2)$

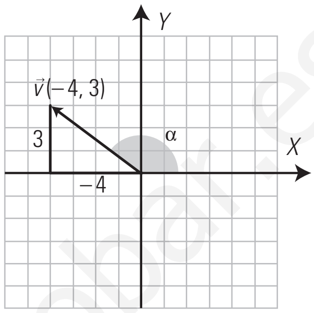
b) $\vec{v}(-4, 3)$

a) $|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5{,}39$ unidades.

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \alpha = 21°\ 48'\ 5''$



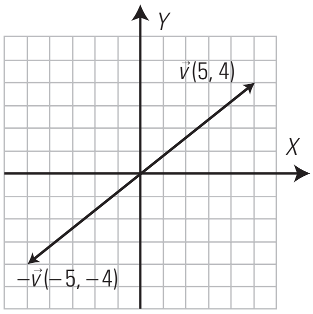
b) $|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$ unidades.



$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{3}{-4} \Rightarrow \alpha = 143°\ 7'\ 48''$

4. Halla el vector opuesto del vector $\vec{v}(5, 4)$ y represéntalos en unos mismos ejes coordenados.

$-\vec{v} = (-5, -4)$



5. Dados los siguientes vectores:

$$\vec{u}(-3, 2) \text{ y } \vec{v}(4, 3)$$

calcula analítica y geométricamente:

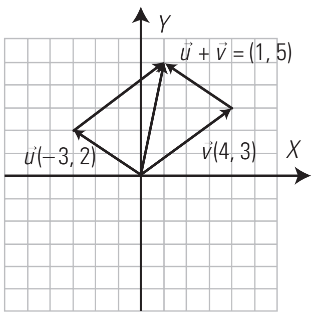
a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$

a) Analíticamente:

$\vec{u} + \vec{v} = (-3, 2) + (4, 3) = (1, 5)$

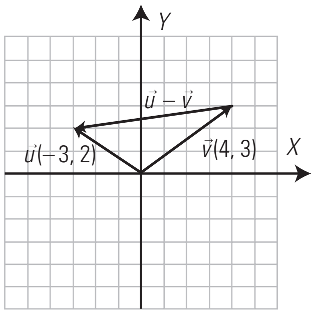
Geométricamente:



b) Analíticamente:

$\vec{u} - \vec{v} = (-3, 2) - (4, 3) = (-7, -1)$

Geométricamente:

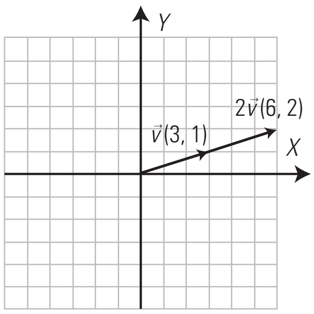


6. Dado el vector $\vec{v}$(3, 1), calcula analítica y geométricamente:

a) $2\vec{v}$ **b) $-2\vec{v}$**

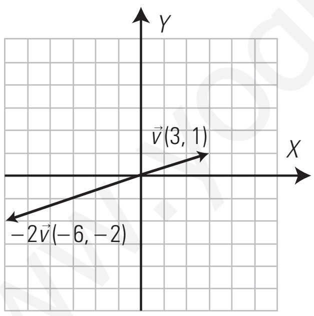
a) Analíticamente: $2\vec{v} = 2(3, 1) = (6, 2)$

Geométricamente:



b) Analíticamente: $-2\vec{v} = -2(3, 1) = (-6, -2)$

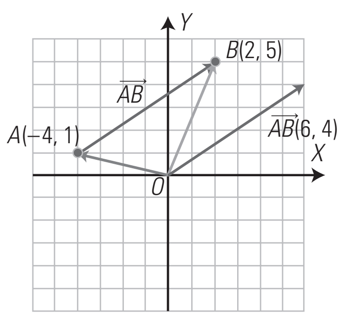
Geométricamente:



2. Ecuaciones de la recta

PIENSA Y CALCULA

Halla la pendiente del vector $\overrightarrow{AB}$ del dibujo y simplifica el resultado.

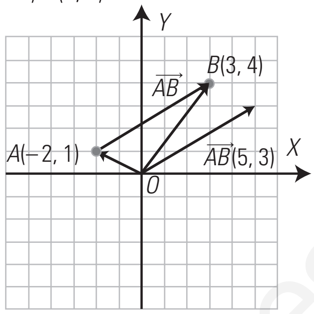


$\overrightarrow{AB}(6, 4) \Rightarrow m = \text{tg } \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

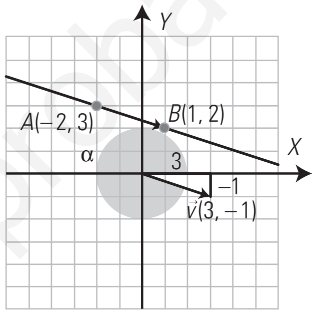
APLICA LA TEORÍA

7. Dados los puntos $A(-2, 1)$ y $B(3, 4)$, calcula el vector $\overrightarrow{AB}$.
Haz la representación gráfica.

$\overrightarrow{AB}(3 + 2, 4 - 1) = (5, 3)$



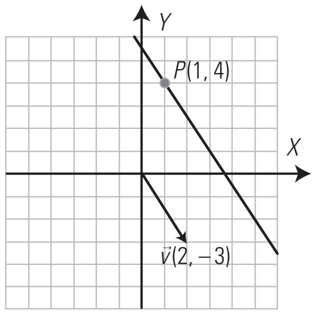
8. Representa la recta que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(1, 2)$. Halla un vector director y la pendiente de dicha recta.



$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(1 + 2, 2 - 3) = (3, -1)$

$m = \text{tg } \alpha = -\frac{1}{3}$

9. Representa la recta que pasa por el punto $P(1, 4)$ y tiene como vector director $\vec{v}(2, -3)$. Halla las distintas ecuaciones de dicha recta.



Ecuación vectorial:

$(x, y) = (1, 4) + t(2, -3);\ t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 4 - 3t \end{array}\right\};\ t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua:

$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 4}{-3}$

Ecuación general:

$-3x + 3 = 2y - 8$

$3x + 2y - 11 = 0$

Ecuación explícita:

$2y = -3x + 11$

$y = -\frac{3x}{2} + \frac{11}{2}$

10. Dada la recta $2x + 3y = 6$, ¿qué tipo de ecuación es? Halla un punto, un vector normal, un vector director y la pendiente. Haz la representación gráfica.

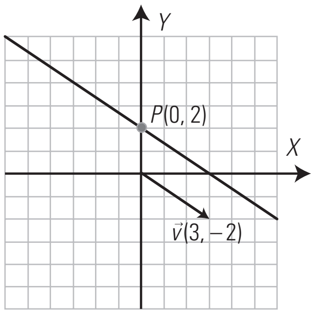
Es la ecuación general.

Para $x = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(0, 2)$

$\vec{n}(A, B) \Rightarrow \vec{n}(2, 3)$

$\vec{v}(B, -A) \Rightarrow \vec{v}(3, -2)$

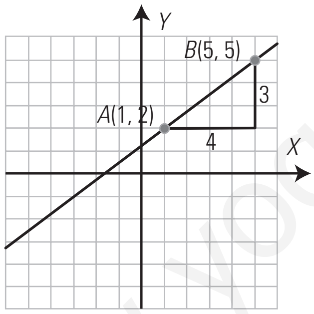
$m = \text{tg}\ \alpha = -\dfrac{2}{3}$



3. OTRAS ECUACIONES DE LA RECTA

PIENSA Y CALCULA

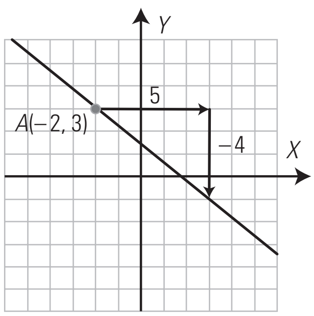
Dibuja la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(5, 5)$ y halla su pendiente.



$m = \dfrac{3}{4}$

APLICA LA TEORÍA

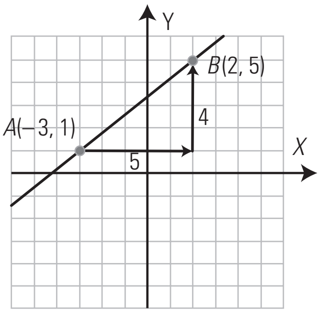
11. Dibuja la recta que pasa por el punto $A(-2, 3)$ y que tiene de pendiente $-4/5$. Halla la ecuación de dicha recta.



$y = -\dfrac{4}{5}(x + 2) + 3$

$y = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{7}{5}$

12. Dibuja la recta que pasa por los puntos $A(-3, 1)$ y $B(2, 5)$. Halla la ecuación de dicha recta.

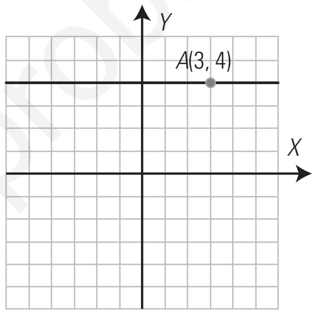


$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(5, 4) \Rightarrow m = \dfrac{4}{5}$

$y = \dfrac{4}{5}(x + 3) + 1$

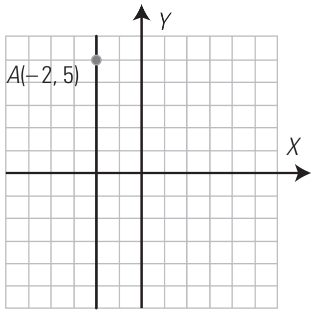
$y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{17}{5}$

13. Dibuja la recta que es paralela al eje *X* y que pasa por el punto $A(3, 4)$. Escribe su ecuación vectorial.



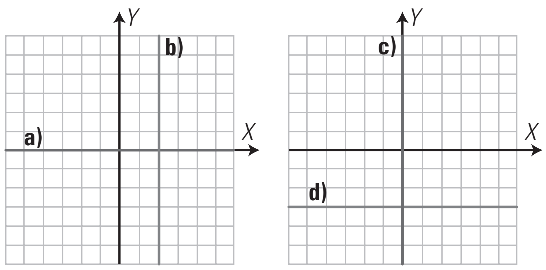
$(x, y) = (3, 4) + t(1, 0);\ t \in \mathbb{R}$

14. Dibuja la recta que es paralela al eje *Y* y que pasa por el punto $A(-2, 5)$. Escribe su ecuación paramétrica.



$$\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 5 + t \end{array}\right\};\ t \in \mathbb{R}$$

15. Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:



a) $y = 0$

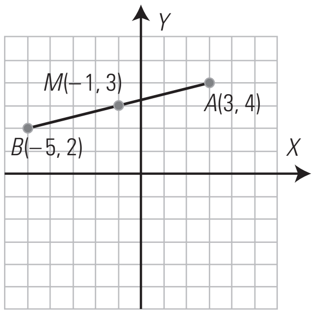
b) $x = 2$

c) $x = 0$

d) $y = -3$

16. Halla el punto medio del segmento de extremos *A*(3, 4) y *B*(–5, 2). Haz la representación gráfica.

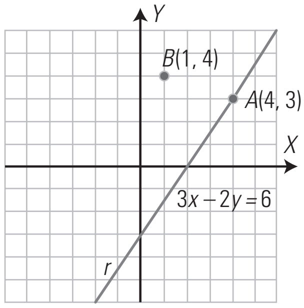
$M(-1, 3)$



4. POSICIONES, DISTANCIA Y CIRCUNFERENCIA

PIENSA Y CALCULA

Halla todos los puntos de coordenadas enteras en la recta del dibujo.



$A(4, 3)$; $B(6, 6)$; $C(2, 0)$; $D(0, -3)$; $E(-2, -6)$

APLICA LA TEORÍA

17. Estudia analítica y gráficamente la posición relativa de los puntos *A*(1, 2) y *B*(–3, 4) respecto de la siguiente recta:

$$r \equiv 2x + 3y = 6$$

$A(1, 2) \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8 \neq 6 \Rightarrow A(1, 2) \notin r$

$B(-3, 4) \Rightarrow 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = -6 + 12 = 6 \Rightarrow B(-3, 4) \in r$

18. Estudia analíticamente la posición relativa de las siguientes pares de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 2x - 3y &= 11 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ -2x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$

Representa ambas rectas para comprobarlo.

a) Analíticamente:

$\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{3}{-3} \Rightarrow$ rectas secantes.

Para hallar el punto de corte hay que resolver el sistema.

Se resuelve por reducción.

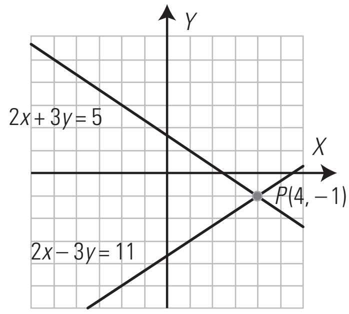
Sumando se obtiene:

$4x = 16 \Rightarrow x = 4$

$x = 4 \Rightarrow y = -1$

Se cortan en el punto $A(4, -1)$

Representación:

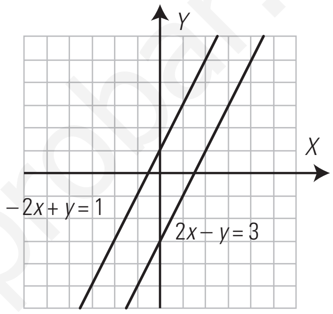


b) Analíticamente:

$\dfrac{2}{-2} = \dfrac{-1}{1} \neq \dfrac{3}{1} \Rightarrow$ rectas paralelas.

No se cortan.

Representación:



19. Dada la recta $r \equiv 3x + y = 2$, halla una recta *s*, paralela a *r*, y otra perpendicular *t*, que pasen por el punto *P*(2, –1). Haz la representación gráfica.

La recta *s* tendrá la misma pendiente que la recta *r*, que es:

$m = -\dfrac{A}{B} = -3$

Su ecuación será:

$y = -3(x - 2) - 1$

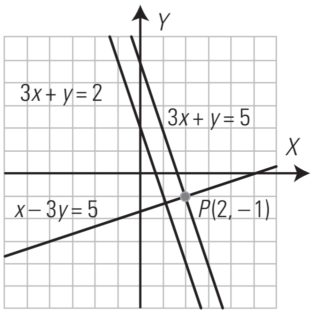
$3x + y = 5$

La recta *t* tendrá la pendiente inversa y opuesta a la de la recta *r*:

Si la pendiente de *r* es: $m_r = -3$, la pendiente de *t* será: $m_t = \dfrac{1}{3}$

$y = \dfrac{1}{3}(x - 2) - 1$

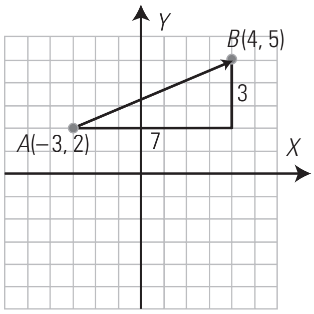
$x - 3y = 5$



20. Halla la distancia que hay entre los puntos *A*(–3, 2) y *B*(4, 5). Haz la representación gráfica.

$\overrightarrow{AB}(7, 3)$

$d(A, B) = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58} = 7{,}62$ unidades.



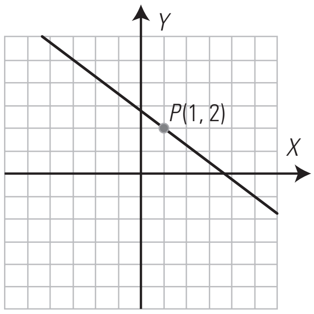
21. Halla el coeficiente *a* para que la recta *ax* + 4*y* = 11 pase por *P*(1, 2). Haz la representación gráfica.

$a \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$

$a + 8 = 11$

$a = 3$

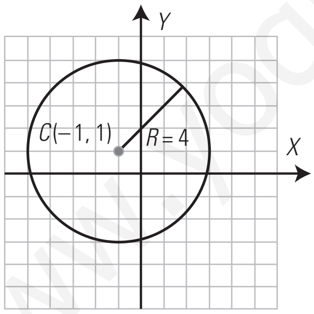
La ecuación de la recta será: $3x + 4y = 11$



22. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto *C*(–1, 1), y de radio, 4. Haz el dibujo.

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 14$

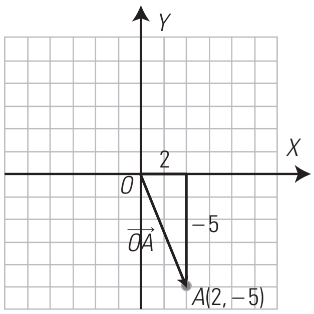


EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. VECTORES

23. Dado el punto *A*(2, –5), halla el vector $\overrightarrow{OA}$, represéntalo y halla sus componentes.

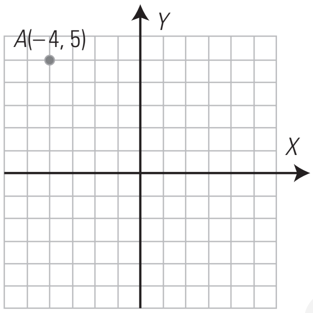
$\overrightarrow{OA}(2, -5)$



La componente horizontal es 2, y la vertical, –5

24. Dado el vector $\vec{v}(-4, 5)$, halla el punto *A*, tal que el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$, y represéntalo.

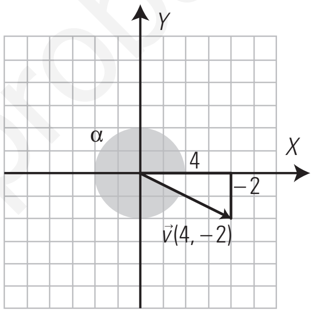
$A(-4, 5)$



25. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

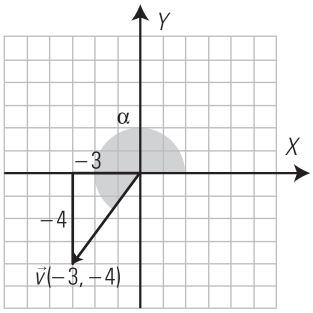
a) $\vec{v}(4, -2)$

b) $\vec{v}(-3, -4)$



a) $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{-2}{4} \Rightarrow \alpha = 333°\ 26'\ 6''$

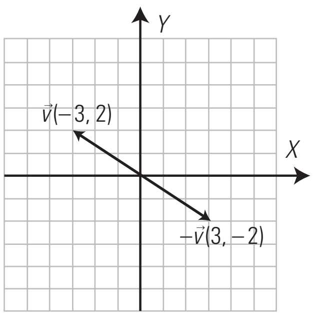


b) $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{-4}{-3} \Rightarrow \alpha = 233°\ 7'\ 48''$

26. Halla el vector opuesto del vector $\vec{v}(-3, 2)$ y represéntalos en unos mismos ejes coordenados.

$-\vec{v} = (3, -2)$



27. Dados los siguientes vectores:

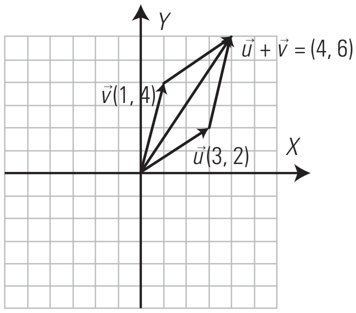
$$\vec{u}(3, 2) \quad \text{y} \quad \vec{v}(1, 4)$$

calcula analítica y geométricamente:

a) $\vec{v} + \vec{v}$ **b)** $\vec{u} - \vec{v}$

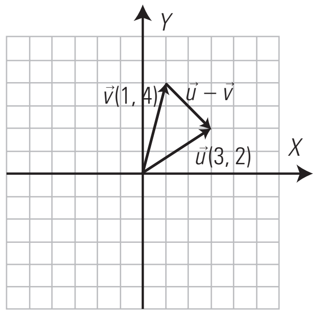
a) Analíticamente: $\vec{u} + \vec{v} = (3, 2) + (1, 4) = (4, 6)$

Geométricamente:



b) Analíticamente: $\vec{u} - \vec{v} = (3, 2) - (1, 4) = (2, -2)$

Geométricamente:

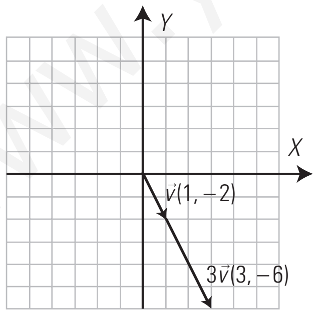


28. Dado el vector $\vec{v}(1, -2)$**, calcula analítica y geométricamente:**

a) $3\vec{v}$ **b)** $-3\vec{v}$

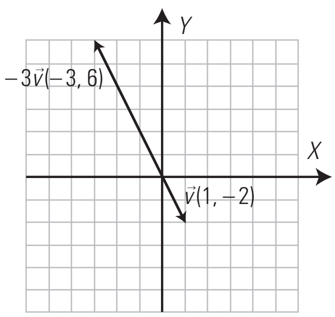
a) Analíticamente: $3\vec{v} = 3(1, -2) = (3, -6)$

Geométricamente:



b) Analíticamente: $-3\vec{v} = -3(1, -2) = (-3, 6)$

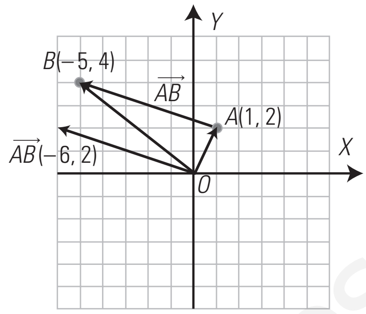
Geométricamente:



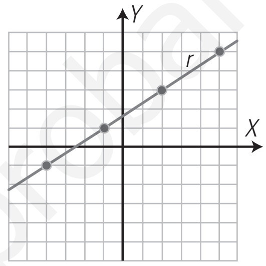
2. ECUACIONES DE LA RECTA

29. Dados los puntos $A(1, 2)$ **y** $B(-5, 4)$**, calcula el vector** $\overrightarrow{AB}$**. Haz la representación gráfica.**

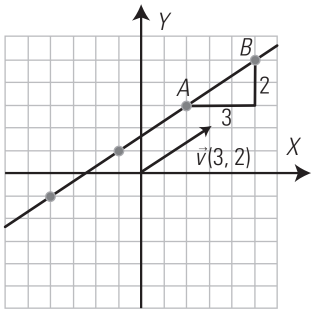
$\overrightarrow{AB}(-5 - 1, 4 - 2) = (-6, 2)$



30. Halla un vector director y la pendiente de la siguiente recta:



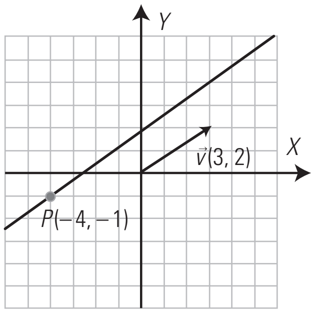
Se dibuja un vector de la recta y se hallan sus componentes.



$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(3, 2)$

$m = \text{tg}\ \alpha = \dfrac{2}{3}$

31. Representa la recta que pasa por el punto $P(-4, -1)$ **y tiene como vector director** $\vec{v}(3, 2)$**. Halla las distintas ecuaciones de dicha recta.**



Ecuación vectorial:

$(x, y) = (-4, -1) + t(3, 2);\ t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= -4 + 3t \\ y &= -1 + 2t \end{aligned}\right\};\ t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x+4}{3}=\frac{y+1}{2}$$

Ecuación general:

$2x+8=3y+3$

$2x-3y+5=0$

Ecuación explícita:

$-3y=-2x-5$

$3y=2x+5$

$$y=\frac{2x}{3}+\frac{5}{3}$$

32. Dada la recta $y = 2x + 5$, ¿qué tipo de ecuación es? Halla un punto, la pendiente, un vector director y un vector normal. Haz la representación gráfica.

Solución:

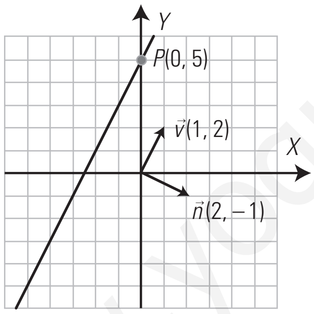
Es la ecuación explícita.

Para $x=0 \Rightarrow y=5 \Rightarrow P(0,5)$

$m=\text{tg}\ \alpha=2$

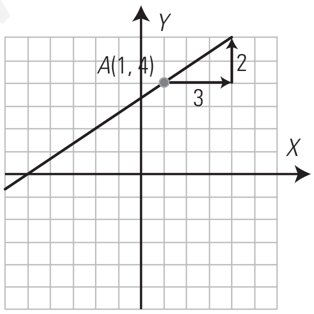
$\vec{v}(1,2)$

$\vec{n}(2,-1)$



3. OTRAS ECUACIONES DE LA RECTA

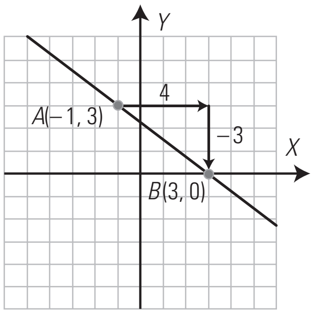
33. Dibuja la recta que pasa por el punto $A(1, 4)$ y tiene de pendiente 2/3. Halla la ecuación de dicha recta.



$$y=\frac{2}{3}(x-1)+4$$

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$$

34. Dibuja la recta que pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(3, 0)$. Halla la ecuación de dicha recta.

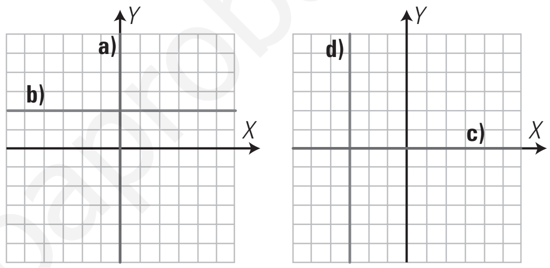


$$\vec{v}=\overrightarrow{AB}(4,-3) \Rightarrow m=-\frac{3}{4}$$

$$y=-\frac{3}{4}(x+1)+3$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$$

35. Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:



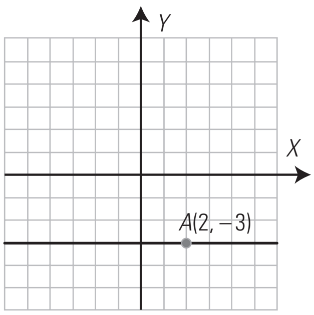
a) $x=0$

b) $y=2$

c) $y=0$

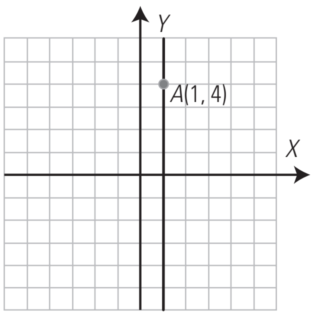
d) $x=-3$

36. Dibuja la recta que es paralela al eje X y que pasa por el punto $A(2, -3)$. Escribe su ecuación general.



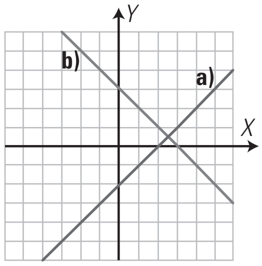
$y=-3$

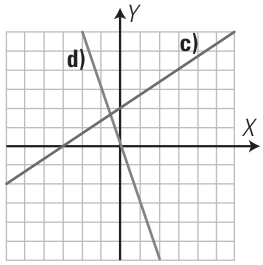
37. Dibuja la recta que es paralela al eje Y y que pasa por el punto $A(1, 4)$. Escribe su ecuación general.



$x=1$

38. Halla la ecuación explícita de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:





a) $y = x - 2$

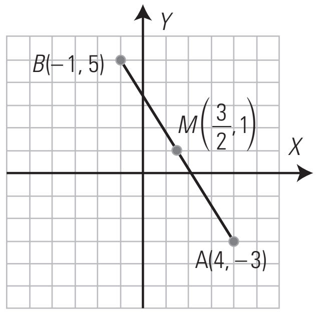
b) $y = -x + 3$

c) $y = \frac{2}{3}x + 2$

d) $y = -3x$

39. Halla mentalmente el punto medio del segmento de extremos *A*(4, –3) y *B*(–1, 5). Haz la representación gráfica.

$M\left(\frac{3}{2}, 1\right)$



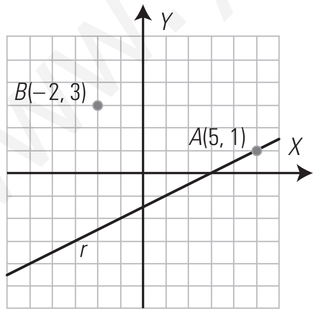
4. POSICIONES, DISTANCIA Y CIRCUNFERENCIA

40. Estudia analítica y gráficamente la posición relativa de los puntos *A*(5, 1) y *B*(–2, 3) respecto de la siguiente recta:

$$r \equiv x - 2y = 3$$

$A(5, 1) \Rightarrow 5 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3 \Rightarrow A(5, 1) \in r$

$B(-2, 3) \Rightarrow -2 - 2 \cdot 3 = -2 - 6 = -8 \neq 3 \Rightarrow B(-2, 3) \notin r$



41. Estudia analíticamente la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

a) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ -x + 2y &= -3 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 5 \\ 2x - y &= -4 \end{aligned}\right\}$

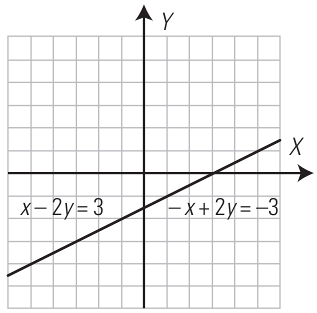
Representa ambas rectas para comprobarlo.

a) Analíticamente:

$\frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = \frac{3}{-3} \Rightarrow$ rectas coincidentes.

Todos los puntos son comunes.

Representación:



b) Analíticamente:

$\frac{3}{2} \neq \frac{4}{-1} \Rightarrow$ rectas secantes.

Para hallar el punto de corte hay que resolver el sistema.

Se resuelve por reducción.

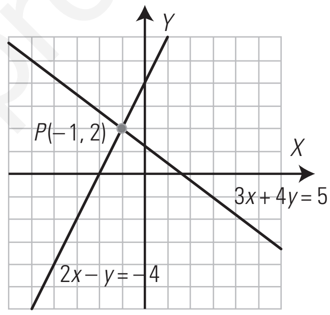
Se multiplica la 2.ª ecuación por 4 y sumando se obtiene:

$11x = -11 \Rightarrow x = -1$

$x = -1 \Rightarrow y = 2$

Se cortan en el punto $A(-1, 2)$

Representación:



42. Dada la recta $r \equiv x - 3y = 1$, halla una recta *s*, paralela a *r*, que pase por el punto *P*(2, 5). Haz la representación gráfica.

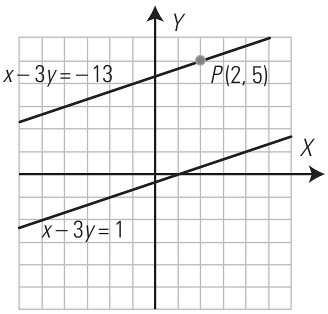
La recta *s* tendrá la misma pendiente que la recta *r*, que es:

$m = -\frac{A}{B} = \frac{1}{3}$

Su ecuación será:

$y = \frac{1}{3}(x - 2) + 5$

$x - 3y = -13$



43. Dada la recta $r \equiv 2x + y = 1$, halla una recta *t*, perpendicular a *r*, que pase por el punto *P*(3, 2). Haz la representación gráfica.

La recta *t* tendrá de vector director:

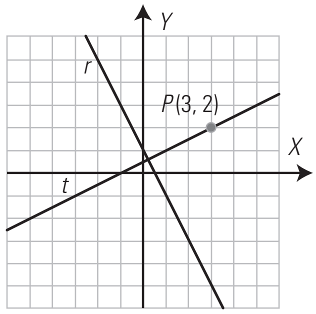
$\vec{n}(2, 1)$

$m = \frac{1}{2}$

Su ecuación será:

$y = \frac{1}{2}(x - 3) + 2$

$x - 2y = -1$



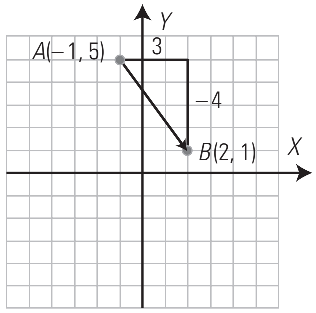
44. Halla la distancia que hay entre los siguientes puntos:

***A*(–1, 5) y *B*(2, 1)**

Haz la representación gráfica.

$\overrightarrow{AB}(3, -4)$

$d(A, B) = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ unidades.



45. Halla el coeficiente *a* para que la recta:

$$4x + ay = 7$$

pase por el punto *P*(–2, 3). Haz la representación gráfica.

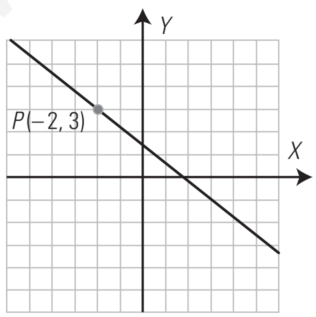
$4 \cdot (-2) + a \cdot 3 = 7$

$-8 + 3a = 7$

$a = 5$

La ecuación de la recta será:

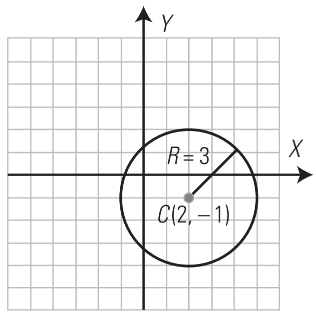
$4x + 5y = 7$



46. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto *C*(2, –1), y de radio, 3. Haz el dibujo.

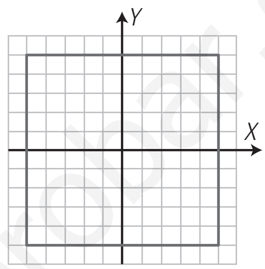
$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$

$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$



PARA AMPLIAR

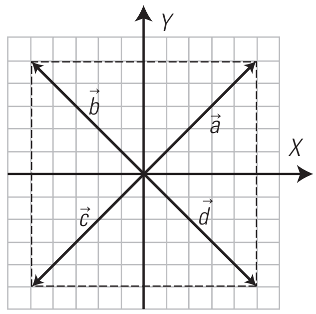
47. Dado el siguiente cuadrado de centro el origen de coordenadas y lado de longitud 10:



a) representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo uno de los vértices del cuadrado;

b) escribe la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

a) Vectores:



b) $\vec{a}(5, 5)$, $\vec{b}(-5, 5)$, $\vec{c}(-5, -5)$, $\vec{d}(5, -5)$

48. Calcula mentalmente las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ en los siguientes casos:

a) *A*(3, 4), *B*(5, 7)

b) *A*(–4, 1), *B*(2, –5)

c) *A*(0, 5), *B*(–7, 2)

d) *A*(0, 0), *B*(3, 5)

a) $\overrightarrow{AB}(2, 3)$

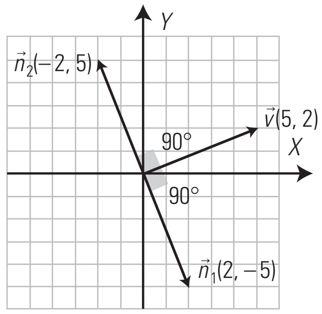
b) $\overrightarrow{AB}(6, -6)$

c) $\overrightarrow{AB}(-7, -3)$

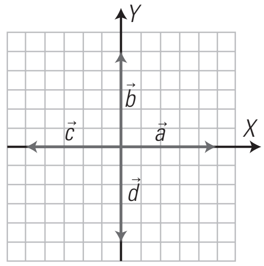
c) $\overrightarrow{AB}(3, 5)$

49. Halla mentalmente dos vectores perpendiculares al vector $\vec{v}(5, 2)$ y represéntalos gráficamente.

$\vec{n}_1(2, -5)$, $\vec{n}_2(-2, 5)$



50. Calcula mentalmente el módulo y el argumento de los siguientes vectores:



$\vec{a}$: módulo = 5, argumento = 0°

$\vec{b}$: módulo = 5, argumento = 90°

$\vec{c}$: módulo = 5, argumento = 180°

$\vec{d}$: módulo = 5, argumento = 270°

51. Dada la siguiente recta:

$$(x, y) = (-4, 1) + t(2, 3);\ t \in \mathbb{R}$$

halla:

a) el tipo de ecuación;

b) un punto;

c) el vector director;

d) un vector normal;

e) la pendiente.

f) Represéntala.

a) Vectorial.

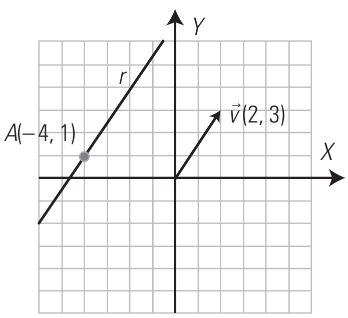
b) $P(-4, 1)$

c) $\vec{v}(2, 3)$

d) $\vec{n}(3, -2)$

e) $m = \dfrac{3}{2}$

f) Representación:



52. Halla mentalmente un vector normal y un vector director de cada una de las siguientes rectas:

a) $2x + 3y = 5$ **b) $-x - 2y = 4$**

c) $-3x + y = 1$ **d) $5x - 4y = 2$**

a) $\vec{n}(2, 3)$, $\vec{v}(3, -2)$

b) $\vec{n}(-1, -2) \parallel (1, 2)$, $\vec{v}(2, -1)$

c) $\vec{n}(-3, 1)$, $\vec{v}(1, 3)$

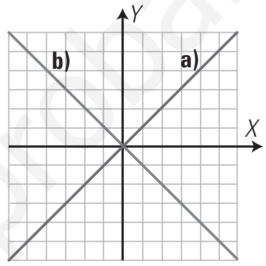
d) $\vec{n}(5, -4)$, $\vec{v}(4, 5)$

53. Halla mentalmente las ecuaciones generales de las siguientes rectas:

a) Eje *X* **b) Eje *Y***

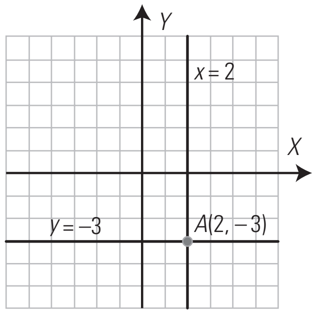
a) $y = 0$ b) $x = 0$

54. Halla la ecuación explícita de las siguientes rectas representadas en los ejes de coordenadas.

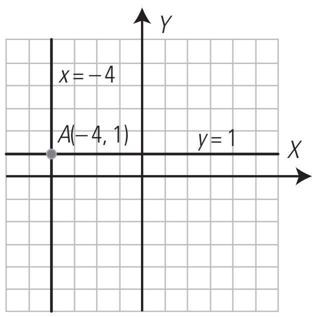


a) $y = x$ b) $y = -x$

55. Representa y halla mentalmente las ecuaciones generales de las rectas paralelas a los ejes coordenados, que pasan por el punto *A*(2, –3)



56. Representa y halla mentalmente las ecuaciones generales de las rectas paralelas a los ejes coordenados, que pasan por el punto *A*(–4, 1)



57. Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ -4x + 2y = -1 \end{array}\right\}$$

Son paralelas porque los coeficientes de las variables son proporcionales, y no lo son con los términos independientes.

$$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-1}$$

58. Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 6y &= 3 \\ -x + 2y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

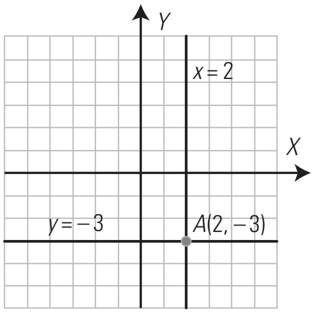
Son coincidentes porque todos los coeficientes son proporcionales:

$$\frac{3}{-1} = \frac{-6}{2} = \frac{3}{-1}$$

59. Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -3 \end{aligned}\right\}$$

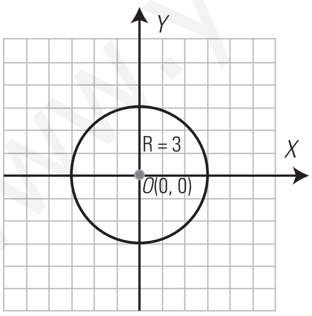
Represéntalas y halla el punto de corte.



Se cortan, porque la primera es vertical y la segunda es horizontal.

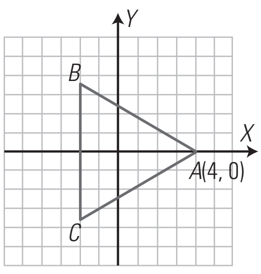
60. Halla mentalmente la ecuación de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio $R = 3$ unidades. Represéntala.

$x^2 + y^2 = 9$



PROBLEMAS

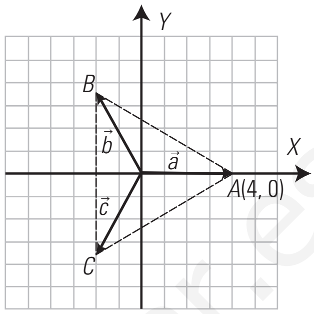
61. Dado el triángulo equilátero siguiente, de centro el origen de coordenadas y vértice $A(4, 0)$:



a) representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo uno de los vértices del triángulo equilátero;

b) aplicando las razones trigonométricas, halla la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

a) Vectores:



b) $\vec{a}(4, 0)$

$\vec{b}(4 \cos 120°, 4 \text{ sen } 120°) =$

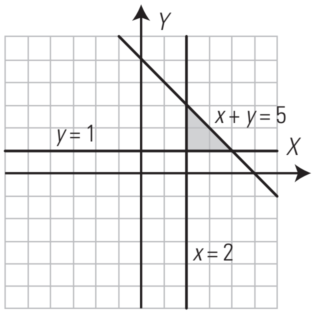
$= \left[4 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right), 4\sqrt{\frac{3}{2}}\right] = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$

$\vec{c}(4 \cos 240°, 4 \text{ sen } 240°) =$

$= \left[4 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right), 4\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right] = \left(-2, -2\sqrt{3}\right)$

62. Dibuja y calcula el área del triángulo comprendido entre las rectas siguientes:

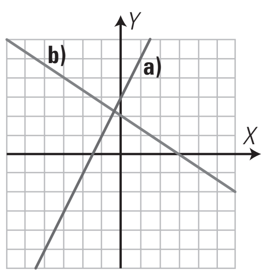
$$x = 2,\ y = 1,\ x + y = 5$$



Es un triángulo rectángulo, la base mide 2 unidades y la altura también mide 2 unidades.

Área $= \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$ unidades cuadradas.

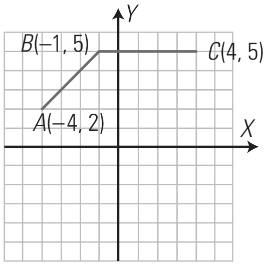
63. Halla la ecuación general de las siguientes rectas representadas en los ejes de coordenadas:



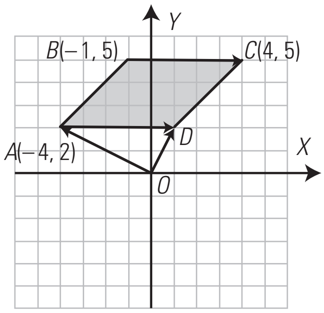
a) $y = 2x + 3$

b) $y = -\frac{2}{3}x + 2$

64. De un paralelogramo se conocen tres vértices consecutivos: *A*(−4, 2), *B*(−1, 5) y *C*(4, 5)



Halla las coordenadas del cuarto vértice *D* utilizando la suma de vectores.



$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OA}(-4, 2)$

$\overrightarrow{BC}(5, 0)$

$\overrightarrow{OD} = (-4, 2) + (5, 0) = (1, 2)$

65. Halla analíticamente un vector director y la pendiente de las rectas que están definidas por los dos puntos siguientes:

a) *A*(0, 0), *B*(3, 4) **b) *A*(2, −1), *B*(4, 6)**

c) *A*(−2, 5), *B*(3, −4) **d) *A*(3, −2), *B*(4, −1)**

a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(3, 4)$, $m = \frac{4}{3}$

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(2, 7)$, $m = \frac{7}{2}$

c) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(5, -9)$, $m = \frac{-9}{5}$

d) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(1, 1)$, $m = 1$

66. Dada la siguiente recta:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$$

halla:

a) el tipo de ecuación;

b) un punto;

c) el vector director;

d) un vector normal;

e) la pendiente.

f) Represéntala.

a) Continua.

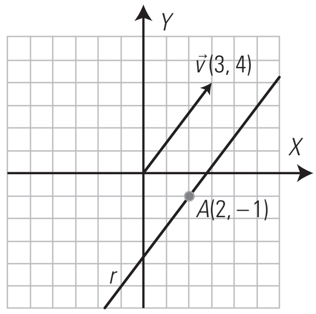
b) $P(2, -1)$

c) $\vec{v}(3, 4)$

d) $\vec{n}(4, -3)$

e) $m = \frac{4}{3}$

f) Representación:



67. Dada la siguiente recta:

$$y = 2x - 3$$

halla:

a) el tipo de ecuación; **b) un punto;**

c) la pendiente; **d) un vector director;**

e) un vector normal. **f) Represéntala.**

a) Explícita.

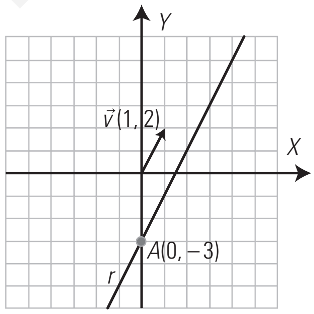
b) $P(0, -3)$

c) $m = 2$

d) $\vec{v}(1, 2)$

e) $\vec{n}(2, -1)$

f) Representación:

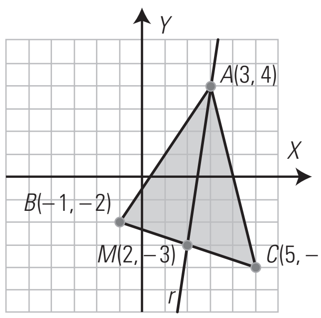


68. Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos *A*(3, 4), *B*(−1, −2) y *C*(5, −4):

a) representa dicho triángulo y dibuja la recta que contiene la mediana definida por el vértice *A*

b) halla la ecuación de dicha recta.

a) Dibujo:



b) La recta *r* pasa por los puntos $M(2, -3)$ y $A(3, 4)$

$\vec{v} = \overrightarrow{MB}(1, 7)$

$m = 7$

Se aplica la recta en la forma punto-pendiente:

$y = 7(x - 2) - 3$

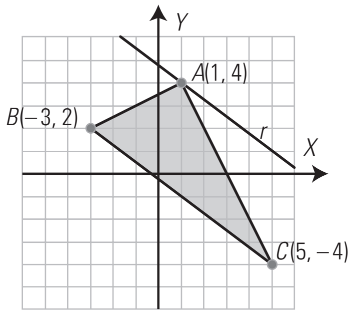
$y = 7x - 17$

69. Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos $A(1, 4)$, $B(-3, 2)$ y $C(5, -4)$:

a) representa dicho triángulo y dibuja la recta paralela al lado BC, que pasa por el vértice A

b) halla la ecuación de dicha recta.

a) Dibujo:



b) La recta r pasa por el punto $A(1, 4)$ y tiene la misma pendiente que el lado BC

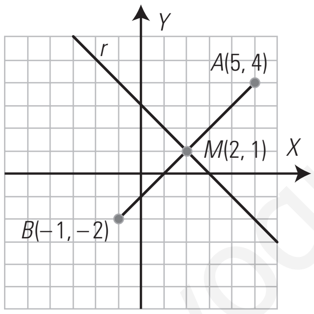
$\vec{v} = \overrightarrow{BC}(8, -6) \parallel (4, -3)$

$m = \dfrac{-3}{4}$

$y = -\dfrac{3}{4}(x - 1) + 4$

$3x + 4y = 19$

70. Dibuja el segmento de extremos los puntos $A(5, 4)$ y $B(-1, -2)$ y su mediatriz. Halla la ecuación de la mediatriz.



La recta r pasa por el punto medio del segmento $\overrightarrow{AB}$

$M(2, 1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(-6, -6) \parallel (1, 1)$

$m = 1$

Como la recta r es perpendicular, su pendiente será inversa y opuesta:

$m_r = -1$

Se aplica la recta en la forma punto-pendiente:

$y = -(x - 2) + 1$

$y = -x + 3$

71. Halla el coeficiente k para que la recta:

$$kx + 3y = 8$$

pase por el punto $A(1, 2)$

$k \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$

$k = 2$

72. Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 12 \\ 2x + \ \ y &= \ \ 3 \end{aligned}\right\}$$

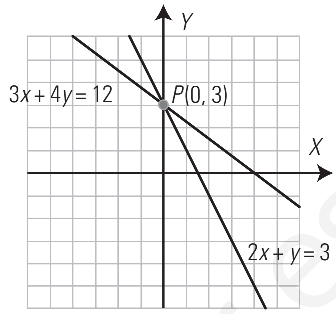
Represéntalas y halla el punto de corte.

Las rectas son secantes porque los coeficientes de las variables no son proporcionales.

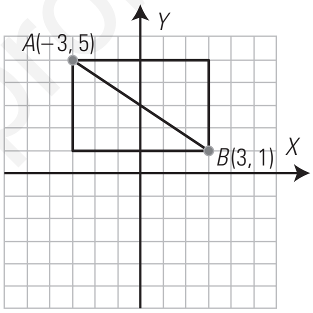
$\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{4}{1}$

El sistema se resuelve por sustitución despejando y de la segunda ecuación.

La solución es $x = 0$, $y = 3$



73. Dibuja un rectángulo sabiendo que tiene los lados paralelos a los ejes coordenados, y que las coordenadas de dos vértices opuestos son $A(-3, 5)$ y $B(3, 1)$. Dibuja y halla la longitud de la diagonal.



$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3+3)^2 + (1-5)^2} =$

$= \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} = 7{,}21$ unidades

74. Halla el valor de k para que las siguientes rectas sean paralelas:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ kx - 6y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Para que sean paralelas, los coeficientes de las variables tienen que ser proporcionales.

$\dfrac{2}{k} = \dfrac{3}{-6}$

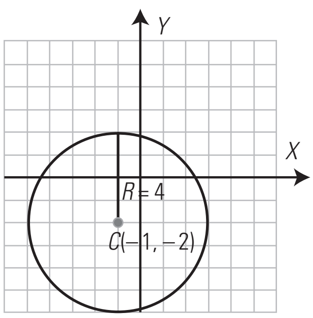
$3k = -12$

$k = -4$

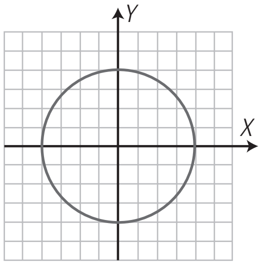
75. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto $A(-1, -2)$, y de radio, 4 unidades. Haz el dibujo.

$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 11 = 0$



76. Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:

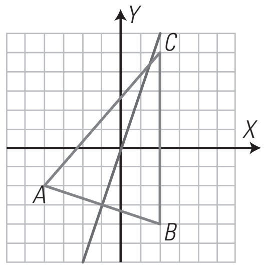


Tiene el centro en $O(0, 0)$ y radio $R = 4$

$x^2 + y^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 = 16$

77. Dado el triángulo de la siguiente figura:



halla la ecuación de la mediatriz del lado *AB*

La mediatriz del lado AB pasa por el punto medio M de AB y es perpendicular a dicho lado. Luego tendrá pendiente inversa y opuesta de la que tiene dicho lado.

$A(-4, -2)$, $B(2, -4) \Rightarrow M(-1, -3)$

Pendiente del lado AB:

$\overrightarrow{AB}(6, -2) \parallel (3, -1)$

$m_{AB} = -\dfrac{1}{3}$

Pendiente de la mediatriz:

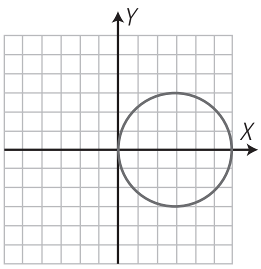
$m_{\perp} = 3$

Ecuación de la mediatriz:

$y = 3(x + 1) - 3$

$y = 3x$

78. Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



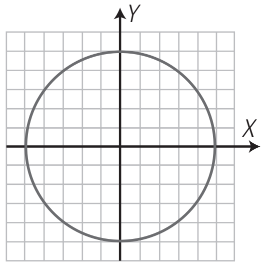
El centro es el punto $C(3, 0)$ y el radio, $R = 3$

$(x - 3)^2 + y^2 = 3^2$

$x^2 + y^2 - 6x = 0$

PARA PROFUNDIZAR

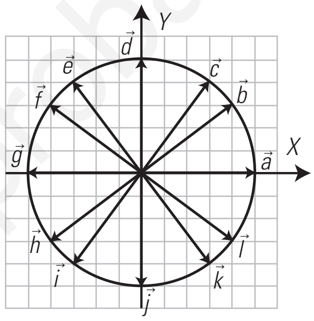
79. Dada la circunferencia de centro el origen de coordenadas, y radio, 5



a) representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo un punto de la circunferencia de coordenadas enteras;

b) escribe la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

a) Representación:



b) Expresión analítica:

$\vec{a}(5, 0)$	$\vec{b}(4, 3)$
$\vec{c}(3, 4)$	$\vec{d}(0, 5)$
$\vec{e}(-3, 4)$	$\vec{f}(-4, 3)$
$\vec{g}(-5, 0)$	$\vec{h}(-4, -3)$
$\vec{i}(-3, -4)$	$\vec{j}(0, -5)$
$\vec{k}(3, -4)$	$\vec{l}(4, -3)$

80. Dados los vectores:

$$\vec{u}(2, -3) \text{ y } \vec{v}(-1, 4)$$

calcula analíticamente:

a) $3\vec{u} + 5\vec{v}$ **b)** $5\vec{u} - 3\vec{v}$

a) $3(2, -3) + 5(-1, 4) = (1, 11)$

b) $5(2, -3) - 3(-1, 4) = (13, -27)$

81. Dada la siguiente recta:

$$5x - 2y + 9 = 0$$

halla:

a) el tipo de ecuación; **b) un punto;**

c) un vector normal; **d) un vector director;**

e) la pendiente. **f) Represéntala.**

a) Ecuación general.

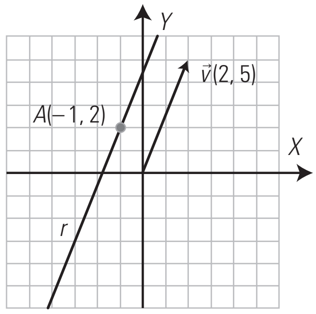
b) $P(-1, 2)$

c) $\vec{n}(5, -2)$

d) $\vec{v}(2, 5)$

e) $m = \dfrac{5}{2}$

f) Representación:

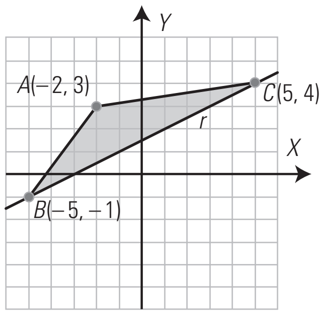


82. Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos *A*(–2, 3), *B*(–5, –1) y *C*(5, 4)

a) representa dicho triángulo y dibuja la recta que contiene al lado *BC*

b) halla la ecuación de dicha recta.

a) Representación:



b) Pendiente del lado *BC*:

$\overrightarrow{BC}(10, 5) \parallel (2, 1)$

$m = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}(x + 5) - 1$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

83. Halla el coeficiente *k* para que la recta:

$$5x + ky = 1$$

pase por el punto *A*(–3, 4)

$5 \cdot (-3) + k \cdot 4 = 1$

$k = 4$

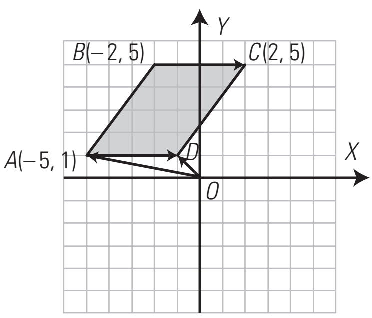
84. Un romboide tiene tres vértices en los puntos *A*(–5, 1), *B*(–2, 5) y *C*(2, 5)

Halla:

a) el cuarto vértice;

b) la longitud de sus diagonales.

a) Vértice *D*



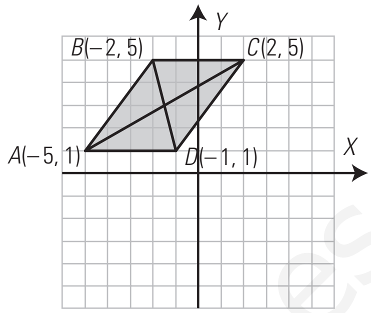
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OA}(-5, 1)$

$\overrightarrow{BC}(4, 0)$

$\overrightarrow{OD} = (-5, 1) + (4, 0) = (-1, 1)$

b) Longitud de las diagonales.



$d(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65} = 8{,}06$ u

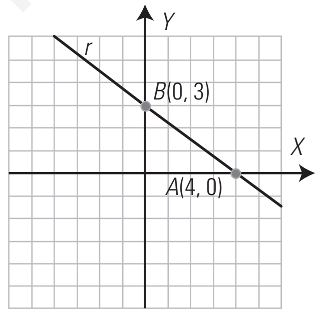
$d(B, D) = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17} = 4{,}12$ u

85. Halla la longitud del segmento determinado por los puntos de corte con los ejes coordenados de la recta siguiente:

$$3x + 4y = 12$$

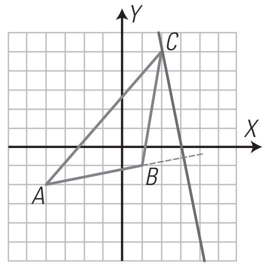
Para $y = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0)$

Para $x = 0 \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0, 3)$



$d(A, B) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ unidades.

86. Dado el triángulo de la siguiente figura:



Halla la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al vértice *C*

Se aplica la forma punto-pendiente.

Punto *C*(2, 5)

Pendiente: la altura es perpendicular a la base *AB*, luego su pendiente es inversa y opuesta de la pendiente del lado *AB*

$\overrightarrow{AB}(5, 1) \Rightarrow m_{AB} = \frac{1}{5}$

$m_{\perp} = -5$

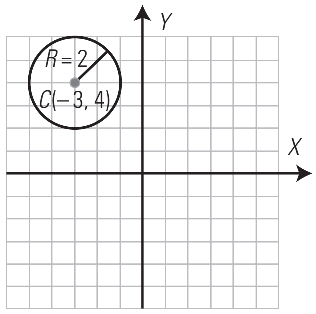
$y = -5(x - 2) + 5$

$y = -5x + 15$

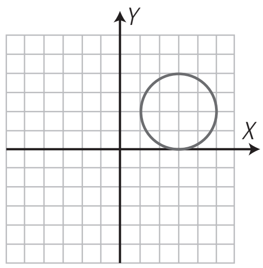
87. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto *C*(–3, 4), y de radio, 2 unidades. Haz el dibujo.

$(x+3)^2+(y-4)^2=2^2$

$x^2+y^2+6x-8y+21=0$



88. Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



Tiene el centro en el punto $C(3, 2)$ y radio, $R=2$

$(x-3)^2+(y-2)^2=2^2$

$x^2+y^2-6x-4y+9=0$

APLICA TUS COMPETENCIAS

89. Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:

$$x^2+y^2-6x-4y-12=0$$

$C(3, 2)$, $R=5$

90. Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:

$$x^2+y^2+8x+7=0$$

$C(-4, 0)$, $R=3$

91. Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:

$$x^2+y^2-2x+6y+6=0$$

$C(1, -3)$, $R=2$

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Explica cómo se hallan las componentes de un vector definido por dos puntos. Pon un ejemplo.

El vector definido por dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es el que se obtiene al restar al vector de posición del extremo el del origen.

$$AB=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

Sus coordenadas son:

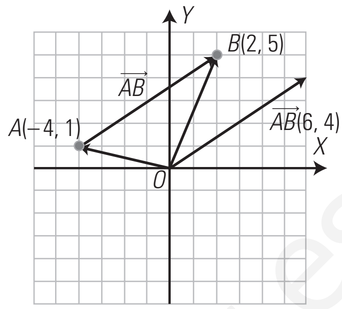
$$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1, y_2-y_1)$$

Ejemplo:

Dados los puntos $A(-4, 1)$ y $B(2, 5)$, calcula el vector $\overrightarrow{AB}$

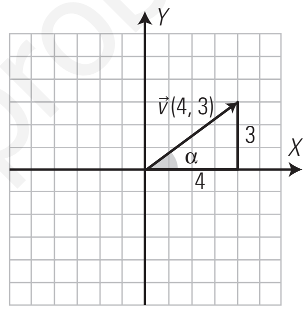
$\overrightarrow{AB}(2-(-4), 5-1)$

$\overrightarrow{AB}(6, 4)$



2. Calcula el módulo y el argumento del vector $\vec{v}(4, 3)$

Representación gráfica:



$|\vec{v}|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{4}$

$\alpha=36°\ 52'\ 12''$

3. Dada la recta $4x-3y=12$, ¿qué tipo de ecuación es? Halla dos puntos, un vector normal, un vector director y la pendiente. Haz la representación gráfica.

Es la ecuación general.

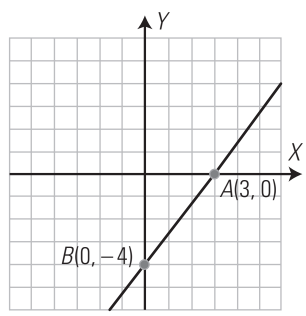
Para $y=0 \Rightarrow 4x=12 \Rightarrow x=3 \Rightarrow A(3, 0)$

Para $x=0 \Rightarrow -3y=12 \Rightarrow y=-4 \Rightarrow B(0, -4)$

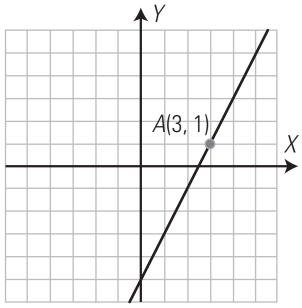
$\vec{n}(4, -3)$

$\vec{v}(3, 4)$

$m=\dfrac{4}{3}$



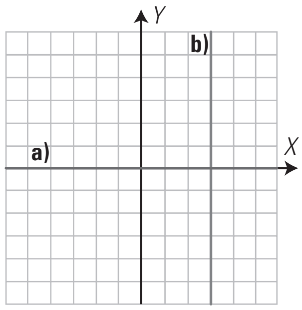
4. Dibuja la recta que pasa por el punto *A*(3, 1) y tiene de pendiente 2. Halla la ecuación de la recta.

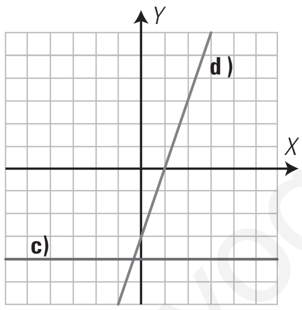


Se aplica la ecuación punto-pendiente

$y = 2(x - 3) + 1 \Rightarrow y = 2x - 5$

5. Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:





a) $y = 0$ b) $x = 3$

c) $y = -4$ d) $y = 3x - 3$

6. Estudia analíticamente la posición relativa del siguiente par de rectas.

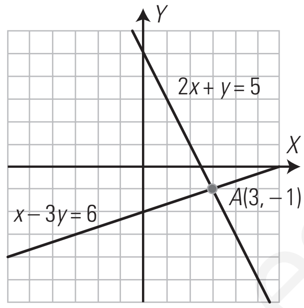
$$\left.\begin{aligned} 2x + \ \ y &= 5 \\ x - 3y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Si se cortan, halla el punto de corte y representa ambas rectas para comprobarlo.

Analíticamente:

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-3} \Rightarrow$ Rectas secantes.

Resolviendo el sistema se halla el punto de corte: $A(3, -1)$



7. Dada la recta 2*x* – 3*y* = 6, halla su ecuación vectorial.

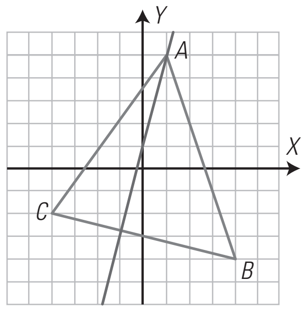
Un punto es: $P(3, 0)$

El vector normal es: $\vec{n}(2, -3) \Rightarrow \vec{v}(3, 2)$

Ecuación vectorial:

$(x, y) = (3, 0) + t(3, 2);\ t \Rightarrow \mathbb{R}$

8. Dado el triángulo de la figura, halla la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al vértice *A*



Punto: $A(1, 5)$

La altura es perpendicular al lado BC; por tanto, su pendiente es la inversa y opuesta a la de dicho lado.

$\overrightarrow{BC}(8, -2) \parallel (4, -1) \Rightarrow m_{BC} = -\frac{1}{4}$

$m_{\perp} = 4$

$y = 4(x - 1) + 5 \Rightarrow y = 4x + 1$

Evaluación de diagnóstico

BLOQUE III: GEOMETRÍA

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. **La razón de las áreas de dos círculos semejantes es 25/16. Si el radio de unos de los círculos mide 8 cm, ¿cuánto mide el radio del otro círculo?**

   $r = 5/4$; $R' = 10$ cm

2. **Una persona que mide 1,60 m proyecta una sombra de 40 cm. En ese día, en el mismo sitio y a la misma hora, un árbol proyecta una sombra de 2,50 m. ¿Cuánto mide la altura del árbol?**

   10 m

3. **La diagonal de un rectángulo mide 20 cm y el perímetro, 56 cm. Halla los lados del rectángulo.**

   12 cm, 16 cm

4. **En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 13 m y uno de los catetos, 5 m. Calcula la longitud de:**

   a) el otro cateto;

   b) las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa;

   c) la altura sobre la hipotenusa.

   a) 12 m

   b) $b' = 1{,}92$ m, $c' = 11{,}08$ m

   c) $h = 4{,}61$ m

5. **A una distancia en horizontal de 20 m de la base de un poste, el extremo superior se observa desde el suelo con una inclinación de 25°. ¿Qué altura tiene el poste?**

   9,33 m

6. **Expresa en radianes 135°**

   $135° = \dfrac{3\pi}{4}$ rad = 2,3562 rad

7. **Expresa en grados 2 rad**

   2 rad = 114° 35′ 30″

8. **Un ángulo α está en el 2.º cuadrante y sen $\alpha = 0{,}3$. Calcula cos α y tg α**

   $\cos\alpha = -0{,}9539$

   $\text{tg}\,\alpha = -0{,}3145$

9. **Se dibuja con un radio de 5 cm un arco correspondiente a un ángulo que mide 1,8 rad. ¿Cuánto mide la longitud del arco?**

   $1{,}8 \cdot 5 = 9$ cm

10. **Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:**

    $$7\cos^2 x - \text{sen}^2\, x = 1$$

    $x_1 = 60° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = 120° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

    $x_3 = 240° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_4 = 300° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

11. **Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:**

    $$3\,\text{tg}\,x = 2\cos x$$

    $x_1 = 30° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

    $x_2 = 150° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

12. **Comprueba la siguiente identidad trigonométrica:**

    $$\frac{1 + \text{tg}\,x}{\sec x} = \text{sen}\,x + \cos x$$

    Desarrollando el 2.º miembro:

    $$\frac{1 + \text{tg}\,x}{\sec x} = \left(1 + \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\right) : \sec x =$$

    $$= \frac{\cos x + \text{sen}\,x}{\cos x} \cdot \cos x = \cos x + \text{sen}\,x$$

13. **En un triángulo rectángulo se conoce la hipotenusa $a = 10$ m y un cateto $c = 7$ m. Calcula los demás elementos.**

    $b = 7{,}14$ m

    $B = 45°\ 34'\ 23''$

    $C = 44°\ 25'\ 37''$

    Área = 24,99 m^2

14. **Inés y Carlos ven desde sus casas una torre que está entre ellas con ángulos de elevación de 40° y 60°. La distancia entre sus casas es de 120 m. Halla la altura de la torre.**

    $h = 67{,}83$ m

15. **Halla el área de un pentágono regular de lado 10 m**

    $A = 172$ m^2

16. **Calcula el vértice *D* del paralelogramo *ABCD* sabiendo que *A*(1, 2), *B*(3, 1) y *C*(6, 5)**

    $D(4, 6)$

17. **Dada la ecuación de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2}$ determina un punto, un vector director, la pendiente de dicha recta y la ecuación general.**

    $P(1, 0)$, $\vec{v}(3, 2)$, $m = \dfrac{2}{3}$

    $2x - 3y - 2 = 0$

18. **Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(2, 1) y *B*(−4, 2)**

    $x + 6y - 8 = 0$

19. **Determina si los puntos *A*(−2, −1) *B*(1, 1) y *C*(4, 3) están alineados.**

    Sí.

20. **Halla el valor de *k* para que la recta:**

    $$r \equiv kx - y - 2 = 0$$

    pase por el punto *P*(2, 4)

    $k = 3$

21. Determina la posición relativa de las rectas siguientes:

$$\boldsymbol{r \equiv 2x - y + 5 = 0}$$

$$\boldsymbol{s \equiv 4x - 2y + 1 = 0}$$

Son rectas paralelas.

22. Los vértices de un triángulo están en los puntos $A(-4, 3)$, $B(4, 5)$ y $C(3, -2)$. Halla la recta que soporta a la mediana relativa al lado AB

$2x + y - 4 = 0$

23. Dados los puntos $A(2, 5)$, $B(-1, 1)$, $C(2, -3)$ y $D(5, 1)$ comprueba que forman un rombo.

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$

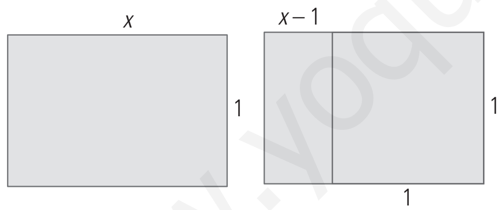
$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = 5$

24. Dada la recta $r \equiv 3x - 4y + 2 = 0$, halla la recta perpendicular a r que pasa por el origen de coordenadas.

$4x + 3y = 0$

25. Rectángulo áureo o de oro.

Un rectángulo áureo o de oro es aquel cuyos lados están en una proporción igual a la razón áurea. El rectángulo áureo tiene una propiedad muy interesante. A partir de él se puede obtener una infinidad de nuevos rectángulos áureos. El proceso consiste en quitar a cada rectángulo áureo un cuadrado, el rectángulo que queda después de hacer esto es un nuevo rectángulo áureo.

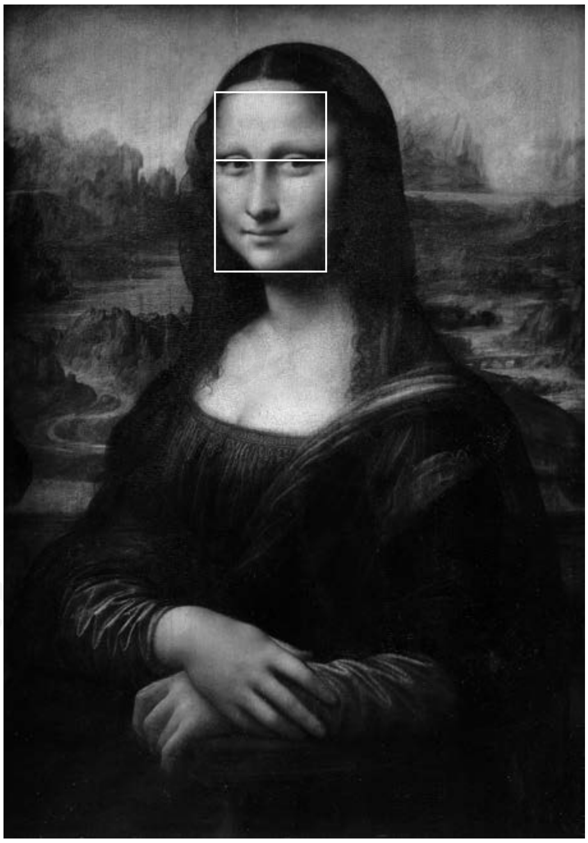


Comprueba que el rectángulo inicial y el que queda al quitar el cuadrado son semejantes y su proporción es la razón áurea.

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x(x-1) = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

26. Toma medidas en el rectángulo superpuesto sobre la imagen del cuadro de la Gioconda y determina si los rectángulos son de oro.



$\frac{2,3}{1,4}$ que es aproximadamente el número de oro 1,618

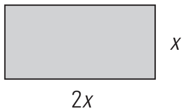
SOLUCIONARIO BLOQUE IV. FUNCIONES

10. Funciones. Rectas y parábolas

1. FUNCIONES

PIENSA Y CALCULA

Dado el rectángulo de la figura, calcula:



a) el perímetro; **b) el área.**

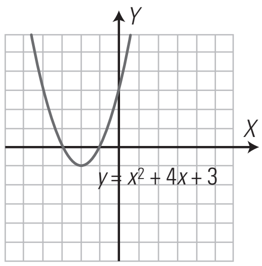
Perímetro $= 2(2x + x) = 6x$

Área $= 2x \cdot x = 2x^2$

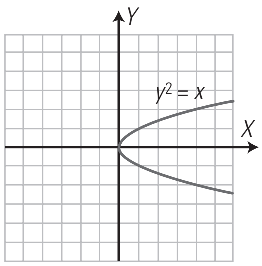
APLICA LA TEORÍA

1. Indica cuál de las siguientes gráficas es función:

a)



b)



a Sí es función.

b) No es función. Hay valores de x para los que existen dos valores de y. Por ejemplo, para $x = 4$, $y = -2$, $y = 2$

2. Clasifica las siguientes funciones:

a) $y = x^2 - 2x + 1$ **b)** $y = \log(x + 1)$

c) $y = \sqrt{x+2}$ **d)** $y = \cos 2x$

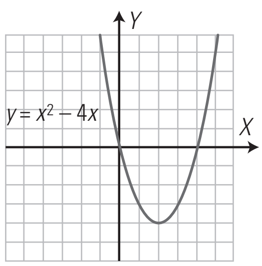
e) $y = \dfrac{2}{x-3}$ **f)** $y = 2^{x+1}$

a) Polinómica. b) Logarítmica.

c) Irracional. d) Trigonométrica.

e) Racional. f) Exponencial.

3. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A(4, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:

   Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

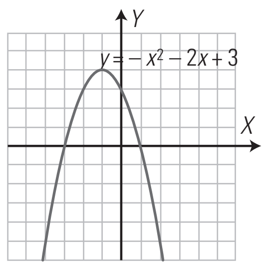
   Negativa (–): $(0, 4)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $B(2, -4)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 2)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

4. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen $O(0, 0)$

6 Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.

7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-3, 0)$, $B(1, 0)$
   - Eje Y: $C(0, 3)$

   Signo:

   Positiva (+): $(-3, 1)$

   Negativa (–): $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $D(-1, 4)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1)$
   - Decreciente (↘): $(-1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$

2. FUNCIÓN LINEAL Y FUNCIÓN AFÍN

PIENSA Y CALCULA

Dada la función $f(x) = 2x$, indica si es lineal o afín y calcula la pendiente.

Función lineal.

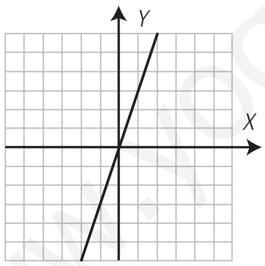
Pendiente: $m = 2$

APLICA LA TEORÍA

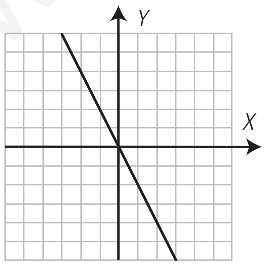
5. Dadas las funciones lineales siguientes, halla su pendiente e indica si son crecientes o decrecientes. Represéntalas:

a) $y = 3x$ b) $y = -2x$ c) $y = \frac{2x}{3}$

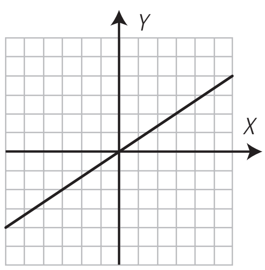
a) $m = 3 \Rightarrow$ Creciente.



b) $m = -2 \Rightarrow$ Decreciente.

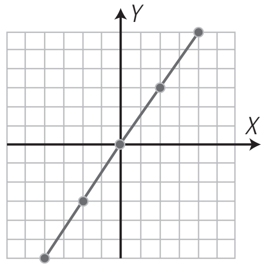


c) $m = \frac{2}{3} \Rightarrow$ Creciente.

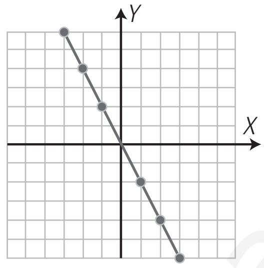


6. Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

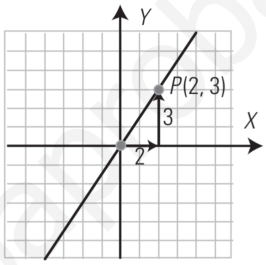
a)



b)

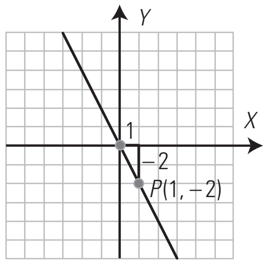


a)



$m = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$

b)



$m = -2 \Rightarrow y = -2x$

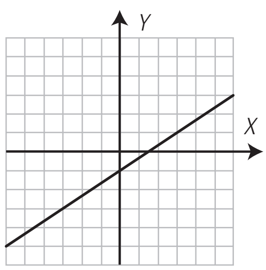
7. Dadas las funciones afines siguientes, halla su pendiente y la ordenada en el origen, e indica si son crecientes o decrecientes. Represéntalas.

a) $y = \frac{2x}{3} - 1$

b) $y = -\frac{3x}{4} + 2$

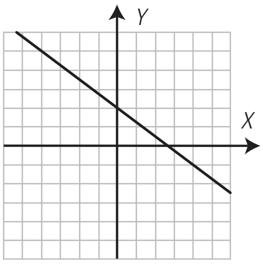
a) $m = \frac{2}{3} \Rightarrow$ Creciente.

$b = -1$



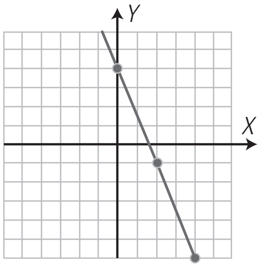
b) $m = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow$ Decreciente.

$b = 2$

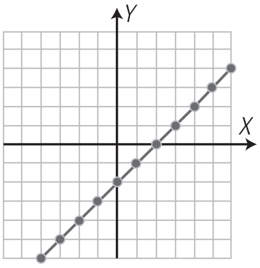


8. Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

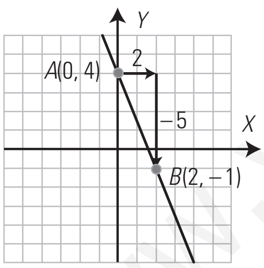
a)



b)



a)

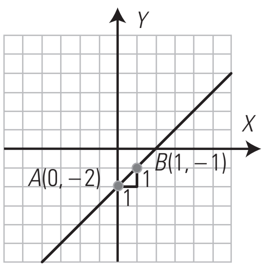


$m = \dfrac{-1-4}{2-0} = -\dfrac{5}{2}$

$b = 4$

$y = -\dfrac{5}{2}x + 4$

b)



$m = \dfrac{-1-(-2)}{1-0} = 1$

$b = -2$

$y = x - 2$

3. FUNCIÓN CUADRÁTICA

PIENSA Y CALCULA

Dada la función $f(x) = x^2 - 4$ representada en el margen, indica:

a) la ecuación del eje de simetría;

b) las coordenadas del vértice, y si este es un máximo o un mínimo relativo.

a) $x = 0$ b) $V(0, -4)$ es un mínimo.

APLICA LA TEORÍA

9. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo en las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 3x^2 - 6x - 1$ **b) $y = -2x^2 + 8x - 5$**

c) $y = x^2 - 9$ **d) $y = x^2 + 2x$**

a) Eje de simetría: $x = 1$
$V(1, -4)$ es un mínimo.

b) Eje de simetría: $x = 2$
$V(2, 3)$ es un máximo.

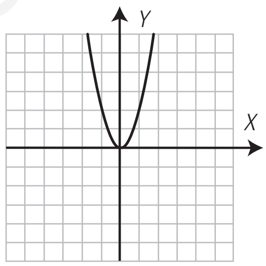
c) Eje de simetría: $x = 0$
$V(0, -9)$ es un mínimo.

d) Eje de simetría: $x = -1$
$V(-1, -1)$ es un mínimo.

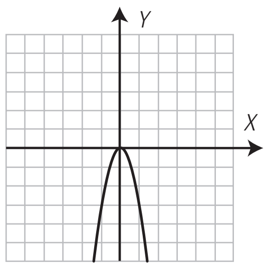
10. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = 2x^2$ **b) $y = -3x^2$**

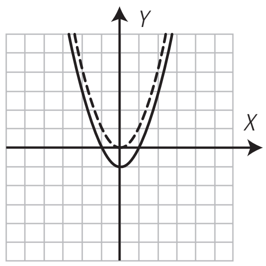
a)



b)



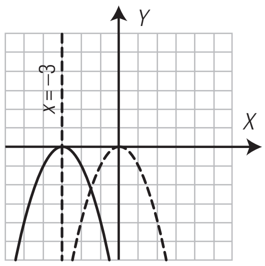
11. Representa la parábola $y = x^2$; a partir de ella, representa la parábola $y = x^2 - 1$. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.



Eje de simetría: $x = 0$

$V(0, -1)$ es un mínimo.

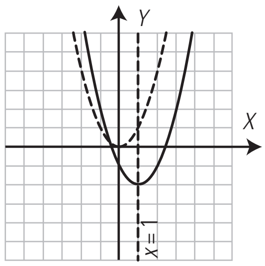
12. Representa la parábola $y = -x^2$; a partir de ella, representa la parábola $y = -(x + 3)^2$. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.



Eje de simetría: $x = -3$

$V(-3, 0)$ es un máximo.

13. Representa la parábola $y = x^2$; a partir de ella, representa la parábola $y = (x - 1)^2 - 2$. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.



Eje de simetría: $x = 1$

$V(1, -2)$ es un mínimo.

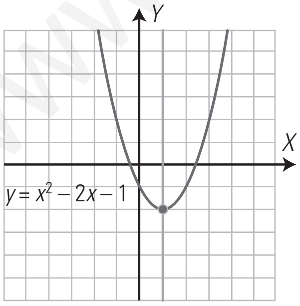
4. LA PARÁBOLA

PIENSA Y CALCULA

Dada la función $f(x) = x^2 - 2x - 1$ representada a continuación, indica:

a) la ecuación del eje de simetría;

b) las coordenadas del vértice y si este es máximo o mínimo.



Eje de simetría: $x = 1$

$V(1, -2)$ es un mínimo.

APLICA LA TEORÍA

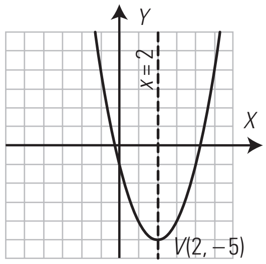
14. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, indicando si este es un máximo o un mínimo, de las siguientes funciones cuadráticas, y represéntalas:

a) $y = x^2 - 4x - 1$ **b)** $y = -3x^2 - 6x + 2$

c) $y = x^2 + 4x + 3$ **d)** $y = -2x^2 + 8x - 5$

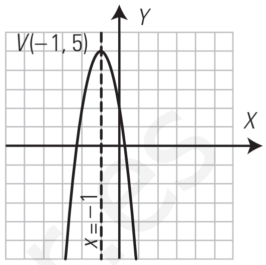
a) Eje de simetría: $x = 2$

$V(2, -5)$ es un mínimo.



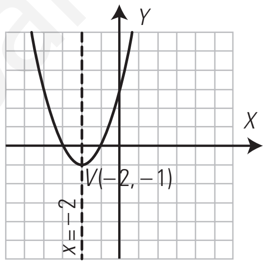
b) Eje de simetría: $x = -1$

$V(-1, 5)$ es un máximo.



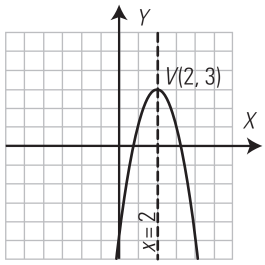
c) Eje de simetría: $x = -2$

$V(-2, -1)$ es un mínimo.

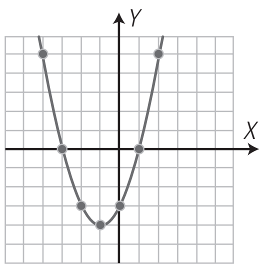


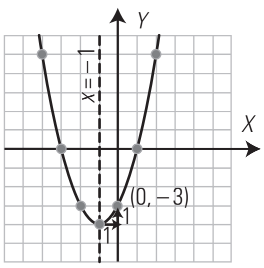
d) Eje de simetría: $x = 2$

$V(2, 3)$ Es un máximo.



15. Halla la ecuación de la siguiente parábola:





$a = 1$

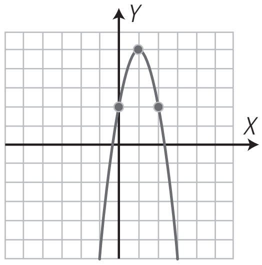
Eje de simetría:

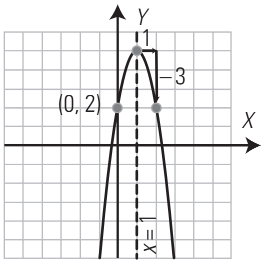
$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 2$

$c = -3$

$y = x^2 + 2x - 3$

16. Halla la ecuación de la siguiente parábola:



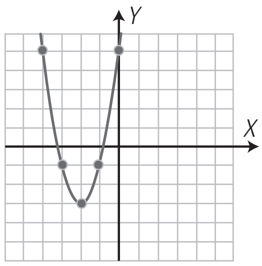


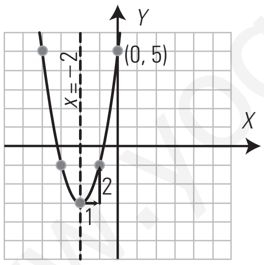
$a = -3$

Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 6$

17. Halla la ecuación de la siguiente parábola:





$a = 2$

Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 8$

$c = 5$

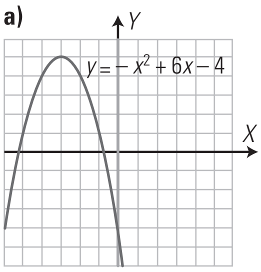
$y = 2x^2 + 8x + 5$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

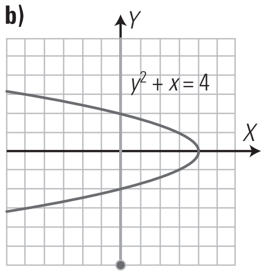
1. FUNCIONES

18. Indica cuál de las siguientes gráficas es función:

a)



b)



a) Sí es función.

b) No es función. Hay valores de x para los que existen dos valores de y. Por ejemplo, para $x = 0$, $y = -2$, $y = 2$

19. Clasifica las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - x + 2$ **b)** $y = \log(x - 3)$

c) $y = \sqrt{x - 5}$ **d)** $y = \operatorname{sen}(x + \pi)$

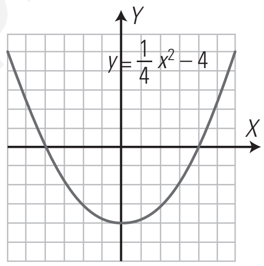
e) $y = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$ **f)** $y = 3^{x-2}$

a) Polinómica. b) Logarítmica.

c) Irracional. d) Trigonométrica.

e) Racional. f) Exponencial.

20. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$
   - Eje Y: $C(0, -4)$

   Signo:

   Positiva (+): $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

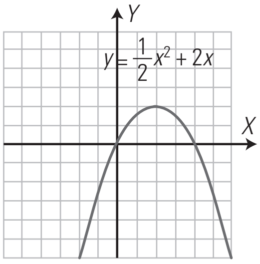
   Negativa (–): $(-4, 4)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $C(0, -4)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $\varnothing$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

21. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A(4, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:

   Positiva (+): $(1, 4)$

   Negativa (–): $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $B(2, 2)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 2)$
   - Decreciente (↘): $(2, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 2]$

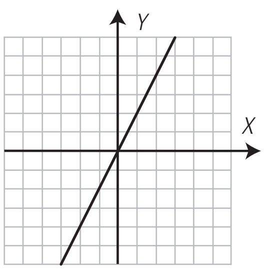
2. FUNCIÓN LINEAL Y FUNCIÓN AFÍN

22. Halla mentalmente la pendiente de las funciones lineales o de proporcionalidad directa siguientes, di si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

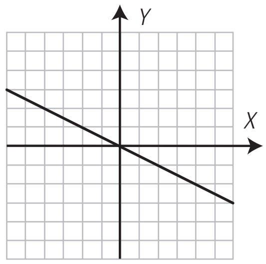
a) $y = 2x$ **b)** $y = -\frac{x}{2}$

c) $y = \frac{4x}{3}$ **d)** $y = -\frac{5x}{4}$

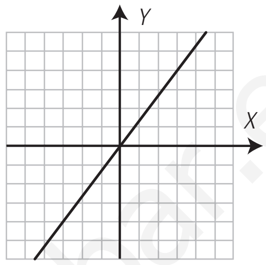
a) $m = 2 \Rightarrow$ Creciente.



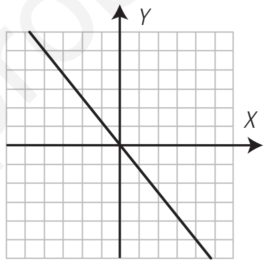
b) $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Decreciente.



c) $m = \frac{4}{3} \Rightarrow$ Creciente.

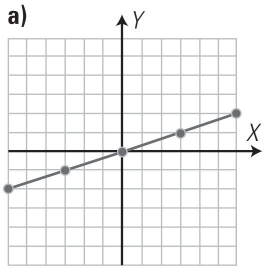


d) $m = -\frac{5}{4} \Rightarrow$ Decreciente.

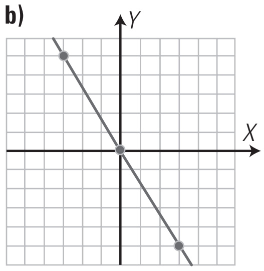


23. Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

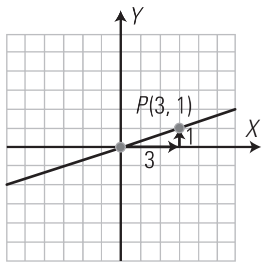
a)



b)

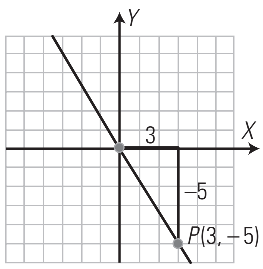


a)



$m = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x$

b)



$m = \frac{-5}{3} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x$

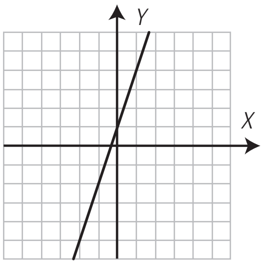
24. Halla mentalmente la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones afines, di si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

a) $y = 3x + 1$ **b)** $y = -\frac{x}{2} + 3$

c) $y = \frac{3x}{2} - 1$ **d)** $y = -\frac{4x}{3} + 2$

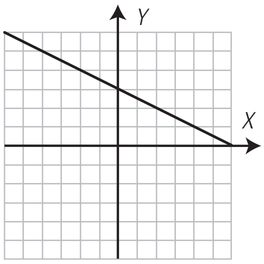
a) $m = 3 \Rightarrow$ Creciente.

$b = 1$



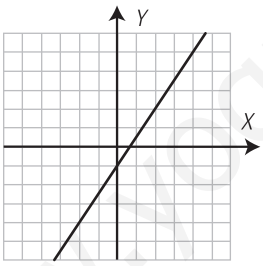
b) $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Decreciente.

$b = 3$



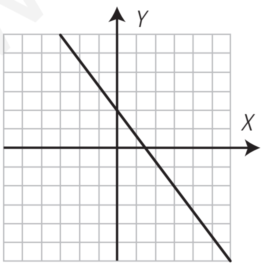
c) $m = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Creciente.

$b = -1$



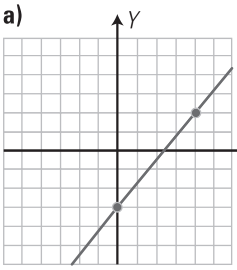
d) m $= -\frac{4}{3} \Rightarrow$ Decreciente.

$b = 2$

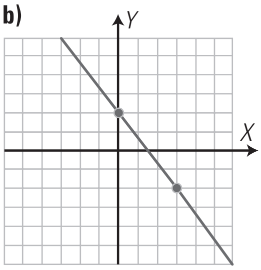


25. Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

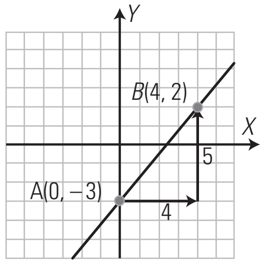
a)



b)



a)

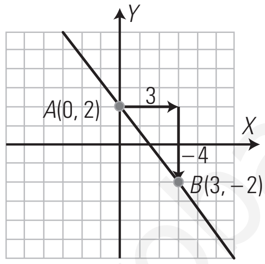


$m = \frac{2-(-3)}{4-0} = \frac{5}{4}$

$b = -3$

$y = \frac{5}{4}x - 3$

b)



$m = \frac{-2-2}{3-0} = \frac{5}{4}$

$b = 2$

$y = -\frac{4}{3}x + 2$

3. FUNCIÓN CUADRÁTICA

26. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo en las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 4x^2 - 16x + 11$ **b)** $y = -x^2 + 2x - 3$

c) $y = x^2 + 2$ **d)** $y = x^2 + 4x$

a) Eje de simetría: $x = 2$
$V(2, -5)$ es un mínimo.

b) Eje de simetría: $x = 1$
$V(1, -2)$ es un máximo.

c) Eje de simetría: $x = 0$
$V(0, 2)$ es un mínimo.

d) Eje de simetría: $x = -2$
$V(-2, -4)$ es un mínimo.

27. Representa la siguiente parábola:

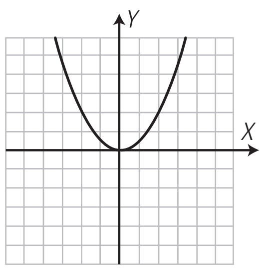
$$y = \frac{x^2}{2}$$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?



a) $x = 0$

b) $V(0, 0)$ es un mínimo.

c) Creciente (↗): $(0, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$

d) Es convexa (∪)

28. Representa la siguiente parábola:

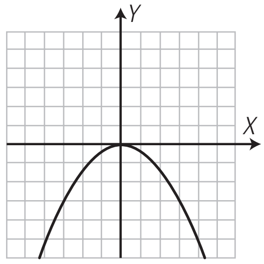
$$y = -\frac{x^2}{3}$$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?



a) $x = 0$

b) $V(0, 0)$ es un máximo.

c) Creciente (↗): $(-\infty, 0)$

Decreciente (↘): $(0, +\infty)$

d) Es cóncava (∩)

29. Representa la parábola $y = -x^2$

A partir de ella, representa la siguiente parábola:

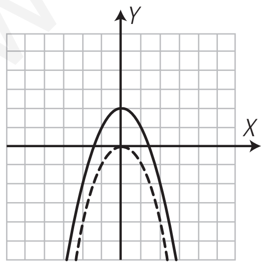
$$y = -x^2 + 2$$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?



a) $x = 0$

b) $V(0, 2)$ es un máximo.

c) Creciente (↗): $(-\infty, 0)$

Decreciente (↘): $(0, +\infty)$

d) Es cóncava (∩)

30. Representa la función $y = x^2$

A partir de ella, representa la siguiente parábola:

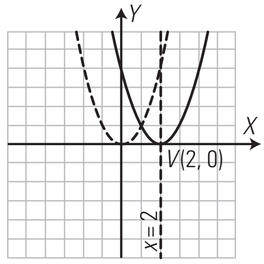
$$y = (x - 2)^2$$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?



a) $x = 2$

b) $V(2, 0)$ es un mínimo.

c) Creciente (↗): $(2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 2)$

d) Es convexa (∪)

31. Representa la función $y = x^2$

A partir de ella, representa la siguiente parábola:

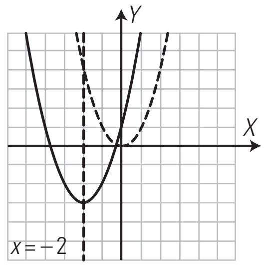
$$y = (x + 2)^2 - 3$$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?



a) $x = -2$

b) $V(-2, -3)$ es un mínimo.

c) Creciente (↗): $(-2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, -2)$

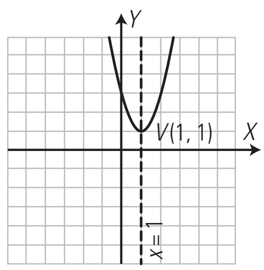
d) Es convexa (∪)

4. LA PARÁBOLA

32. Representa la siguiente parábola: $y = 2x^2 - 4x + 3$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.



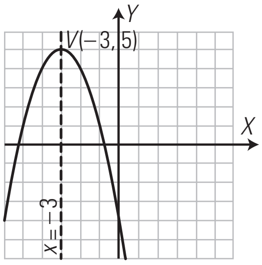
a) $x = 1$ b) $V(1, 1)$ es un mínimo.

33. Representa la siguiente parábola:

$$y = -x^2 - 6x - 4$$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.



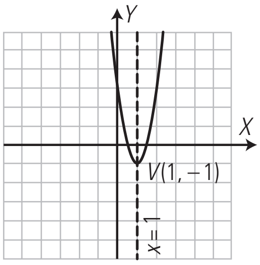
a) $x = -3$

b) $V(-3, 5)$ es un máximo.

34. Representa la siguiente parábola: $y = 4x^2 - 8x + 3$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.



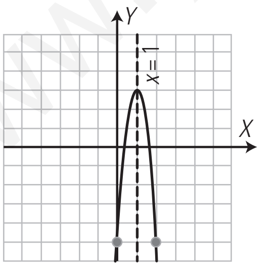
a) $x = 1$

b) $V(1, -1)$ es un mínimo.

35. Representa la siguiente parábola: $y = -8x^2 + 16x - 5$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.

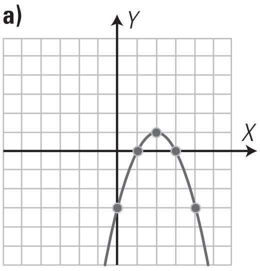


a) $x = 1$

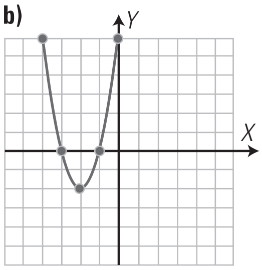
b) $V(1, 3)$ es un máximo.

36. Halla la ecuación de las siguientes parábolas:

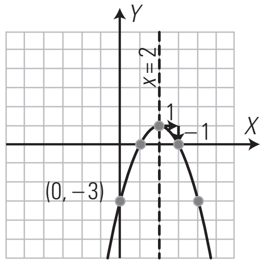
a)



b)



a)



$a = -1$

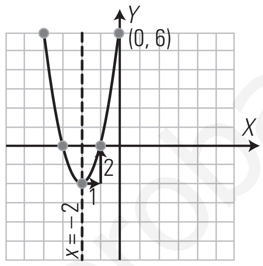
Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 4$

$c = -3$

$y = -x^2 + 4x - 3$

b)



$a = 2$

Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 8$

$c = 6$

$y = 2x^2 + 8x + 6$

PARA AMPLIAR

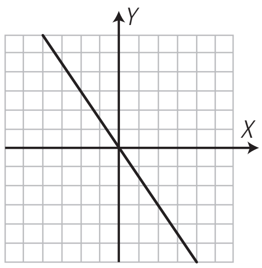
37. Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines. Halla mentalmente la pendiente, di si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

a) $y = -\dfrac{3x}{2}$ **b)** $y = -2x - 1$

c) $y = \dfrac{x}{3} - 4$ **d)** $y = \dfrac{x}{4}$

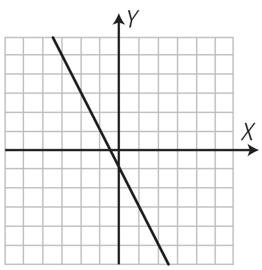
a) Función lineal.

$m = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow$ Decreciente.



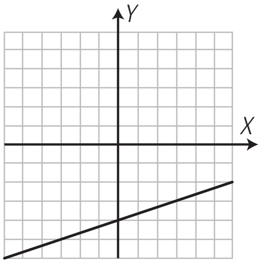
b) Función afín.

$m = -2 \Rightarrow$ Decreciente.



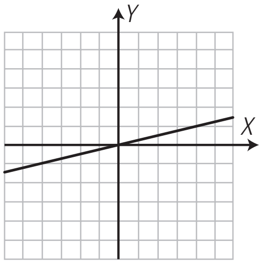
c) Función afín.

$m = \frac{1}{3} \Rightarrow$ Creciente.



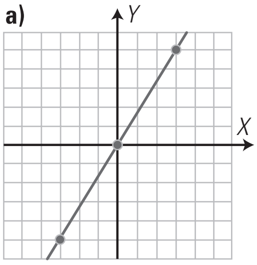
d) Función lineal.

$m = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Creciente.

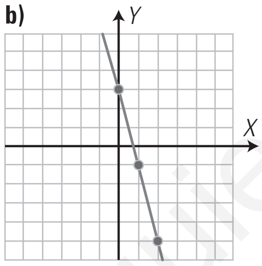


38. Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

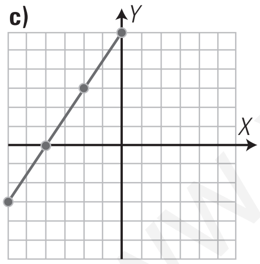
a)



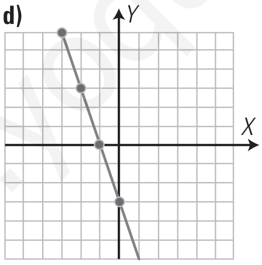
b)



c)



d)



a) $y = \frac{5}{3}x$

b) $y = -4x + 3$

c) $y = \frac{3}{2}x + 6$

d) $y = -3x - 3$

39. Represента la siguiente parábola:

$$y = 2x^2$$

A partir de ella, representa la parábola:

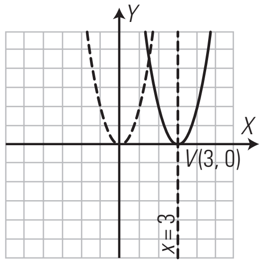
$$y = 2(x-3)^2$$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?



a) $x = 3$

b) $V(3, 0)$ es un mínimo.

c) Creciente (↗): $(3, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 3)$

d) Es convexa (∪)

40. Representa la siguiente parábola:

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

A partir de ella representa la parábola:

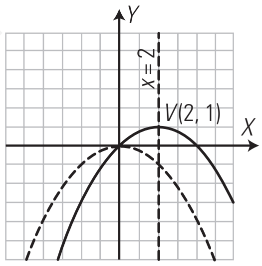
$$y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?



a) $x = 2$

b) $V(2, 1)$ es un máximo.

c) Creciente (↗): $(-\infty, 2)$

Decreciente (↘): $(2, +\infty)$

d) Es cóncava (∩)

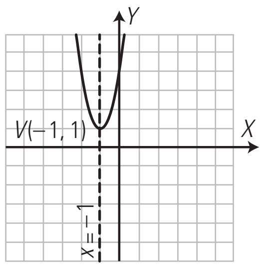
41. Representa la siguiente parábola: $y = 3x^2 + 6x + 4$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si este es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?



a) $x = -1$

b) $V(-1, 1)$ es un mínimo.

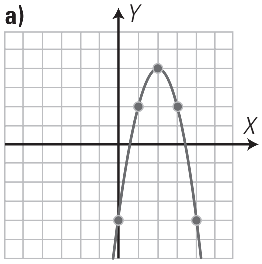
c) Creciente (↗): $(-1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, -1)$

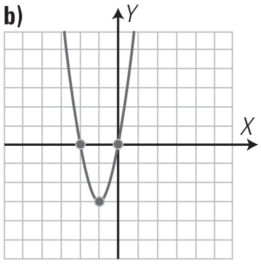
d) Es convexa (∪)

42. Halla la ecuación de las siguientes parábolas:

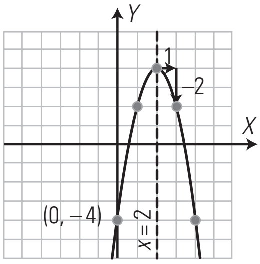
a)



b)



a)



$a = -2$

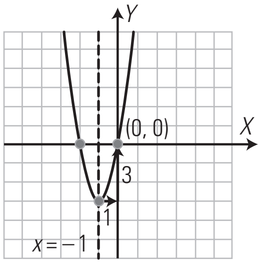
Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 8$

$c = -4$

$y = -2x^2 + 8x - 4$

b)



$a = 3$

Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow \mathrm{b} = -2\mathrm{ax} \Rightarrow \mathrm{b} = 6$

$c = 0$

$y = 3x^2 + 6x$

43. Halla algebraicamente los puntos de corte de las siguientes parábolas con los ejes de coordenadas, representa las parábolas y comprueba el resultado.

a) $\boldsymbol{y = x^2 + 4x + 3}$ **b)** $\boldsymbol{y = x^2 - 2x}$

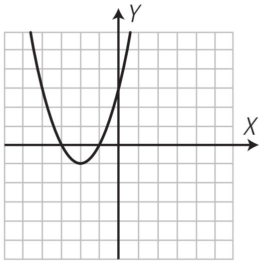
c) $\boldsymbol{y = x^2 + 4x + 4}$ **d)** $\boldsymbol{y = x^2 - 2x + 2}$

a) Eje X:

$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3,\ x = -1$

$A(-3, 0)$, $B(-1, 0)$

Eje Y: $C(0, 3)$

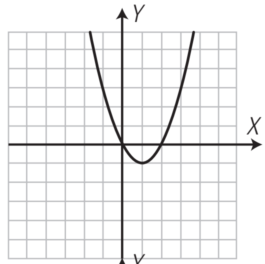


b) Eje X:

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$

$O(0, 0)$, $B(2, 0)$

Eje Y: $O(0, 0)$

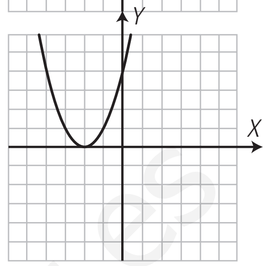


c) Eje X:

$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$

$A(-2, 0)$

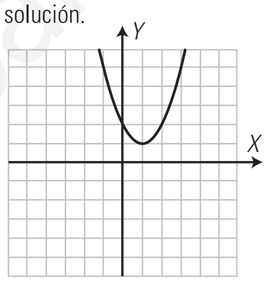
Eje Y: $B(0, 4)$



d) Eje X:

$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución.

Eje Y: $A(0, 2)$



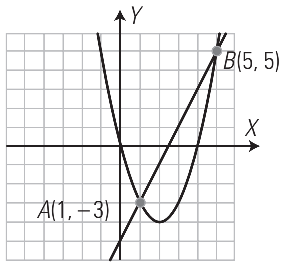
44. Halla algebraicamente los puntos de corte de la recta y la parábola siguientes, representa las gráficas y comprueba el resultado:

$$\boldsymbol{y = 2x - 5} \qquad \boldsymbol{y = x^2 - 4x}$$

Se resuelve el sistema formado por la ecuación de la recta y de la parábola:

$x = 1,\ y = -3 \Rightarrow A(1, -3)$

$x = 5,\ y = 5 \Rightarrow B(5, 5)$



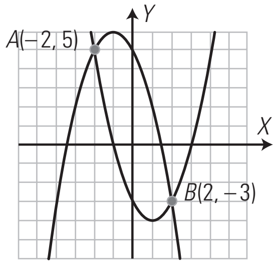
45. Halla algebraicamente los puntos de corte de las siguientes parábolas, representa las parábolas y comprueba el resultado:

$$\boldsymbol{y = x^2 - 2x - 3} \qquad \boldsymbol{y = -x^2 - 2x + 5}$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de las dos parábolas:

$x = -2,\ y = 5 \Rightarrow A(-2, 5)$

$x = 2,\ y = -3 \Rightarrow B(2, -3)$



PROBLEMAS

46. La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas.

a) ¿Cuánto vale c?

b) Si la parábola pasa además por los puntos $A(-3, -3)$ y $B(1, 5)$, calcula el valor de los coeficientes a y b

c) Escribe la ecuación de la parábola.

d) Represéntala gráficamente.

a) $c = 0$

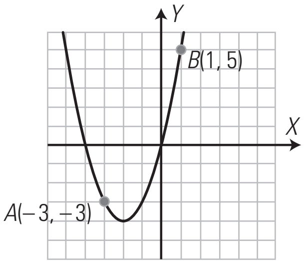
b) Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 9a - 3b = -3 \\ a + b = 5 \end{array}\right\}$$

$a = 1$, $b = 4$

c) $y = x^2 + 4x$

d)



47. Sea la parábola $y = x^2 + bx + c$

a) Calcula los valores de b y c sabiendo que pasa por los puntos $A(4, 3)$ y $B(2, -1)$

b) Escribe la ecuación de la parábola.

c) Represéntala gráficamente.

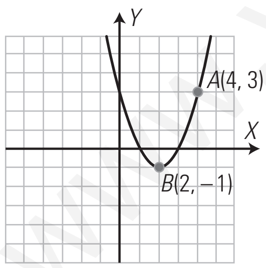
a) Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 16 + 4b + c = 3 \\ 4 + 2b + c = -1 \end{array}\right\}$$

$b = -4$, $c = 3$

b) $y = x^2 - 4x + 3$

c)

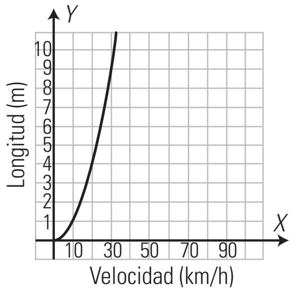


48. La distancia de seguridad que deben guardar los coches entre sí, en circulación, se recoge en la tabla siguiente:

Velocidad (km/h)	Distancia de seguridad (m)
10	1
20	4
30	9
40	16
50	25
…	…

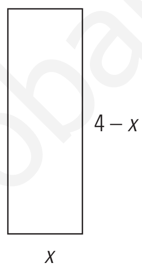
Expresa la distancia de seguridad en función de la velocidad, y representa la gráfica.

$$y = \left(\frac{x}{10}\right)^2$$



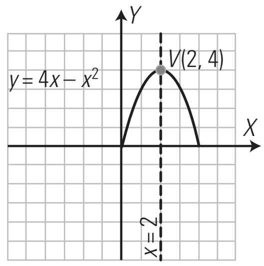
49. El perímetro de un rectángulo mide 8 m. Expresa el área del rectángulo, en función del lado x de la base. Representa la función e indica el valor del lado de la base para el que el área se hace máxima.

Si el perímetro mide 8 m, la base más la altura mide 4 m



$y = x(4 - x)$

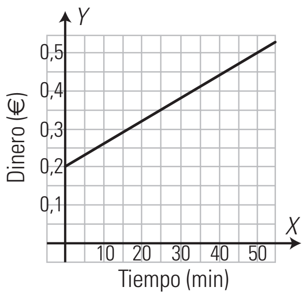
$y = 4x - x^2$



El máximo se obtiene para $x = 2$, que forma un cuadrado de área 4 m^2

50. Un servicio de telefonía cobra 0,2 € por el uso del servicio y 0,06 € por cada minuto. Escribe la fórmula de la función que expresa el dinero que se paga en función del tiempo y representa su gráfica.

$y = 0{,}2 + 0{,}06x$



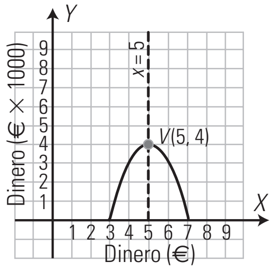
51. El beneficio, en miles de euros, que se obtiene al vender a x € una unidad de un determinado producto viene dado por la fórmula

$$B(x) = -x^2 + 10x - 21$$

a) Representa la función $B(x)$

b) Determina el precio al que hay que vender el producto para obtener el máximo beneficio.

a)

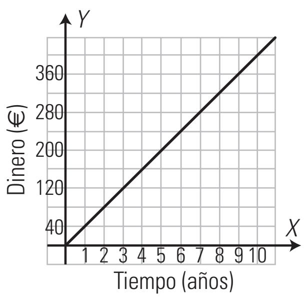


b) A 5 € la unidad, se obtiene el máximo beneficio, que es de 4 000 €

52. Se depositan 2 000 € a un 2% de interés simple anual. Expresa el interés en función del tiempo y representa la gráfica.

$y = 2\,000 \cdot 0{,}02 \cdot x$

$y = 40x$



53. La energía cinética de un móvil de masa *m* viene dada por la siguiente fórmula:

$$E(v) = \frac{1}{2}mv^2$$

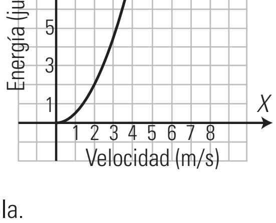
donde *v* es la velocidad del móvil en m/s; *m*, la masa en kilos, y *E*, la energía en julios. Dibuja la gráfica que expresa la energía cinética en función de la velocidad de un cuerpo de 1 kg de masa. ¿Qué tipo de gráfica es?

$E = \frac{1}{2}mv^2$

Si $m = 1$ kg

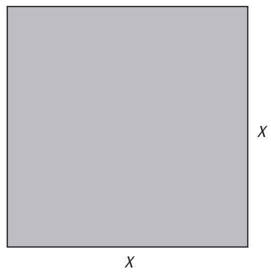
$E = \frac{1}{2}v^2$

Velocidad (m/h)	0	1	2	3	4
Energía (julios)	0	1/2	2	9/2	8

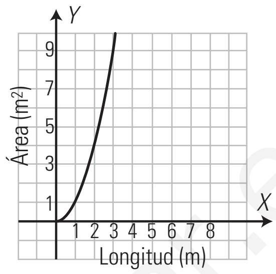


Es una parábola.

54. Halla el área de un cuadrado en función del lado *x*. Represéntala gráficamente.

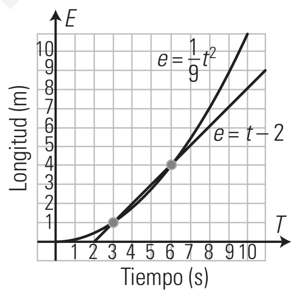


$y = x^2$



PARA PROFUNDIZAR

55. Dos móviles inician su movimiento desde un punto *O*. El primero se desplaza según la fórmula $e = \frac{1}{9}t^2$ y el segundo móvil según $e = t$; donde *t* se mide en segundos, y *e*, en metros. Representa las gráficas de sus movimientos e interpreta el resultado sabiendo que el segundo móvil parte 2 s más tarde que el primero.



El 2.º móvil alcanza al primero a los 2 s y está por delante hasta los 6 s, cuando se vuelven a encontrar a los 4 m del recorrido. A partir de ese instante, el 1.er móvil va por delante del 2.º.

56. Escribe la ecuación de la parábola que tiene el vértice en *V*(2, 2) y pasa por *P*(1, 3)

Si el vértice es $V(2, 2)$ y pasa por $P(1, 3) \Rightarrow a = 1$

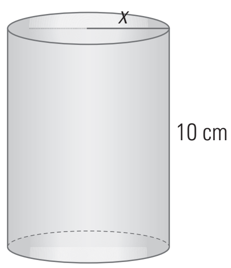
Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4 + 2b + c = 2 \\ 1 + b + c = 3 \end{array}\right\}$$

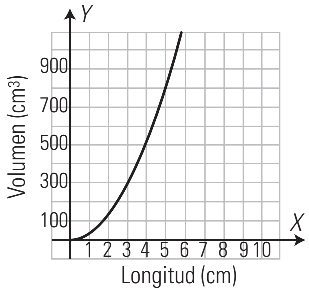
$b = -4,\ c = 6$

$y = x^2 - 4x + 6$

57. Escribe la función que da el volumen de un cilindro de 10 cm de altura en función del radio de la base. Represéntala.



$y = 10\pi x^2$



58. La demanda y la oferta de un determinado producto en función del precio *x* son:

Oferta: $y = \frac{1}{4}x^2$

Demanda: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

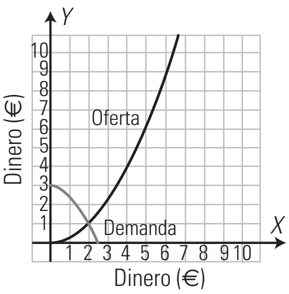
donde *x* se expresa en euros, e *y* es la cantidad ofertada o demandada.

a) Halla el punto de equilibrio algebraicamente.

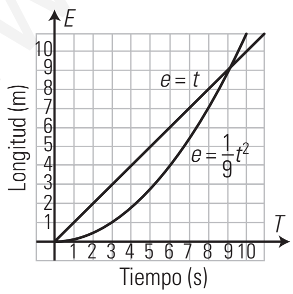
b) Representa las funciones y comprueba el resultado.

a) Se resuelve el sistema de las dos ecuaciones: $x = 2$, $y = 1$

b)



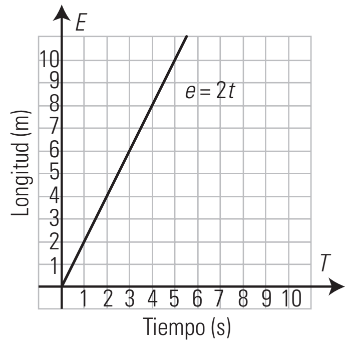
59. Dos móviles inician su movimiento desde un punto *O*. El primer móvil se desplaza según la fórmula $e = \frac{1}{9}t^2$ y el segundo móvil según $e = t$; donde *t* se mide en segundos, y *e*, en metros. Representa las gráficas de sus movimientos e interpreta el resultado.



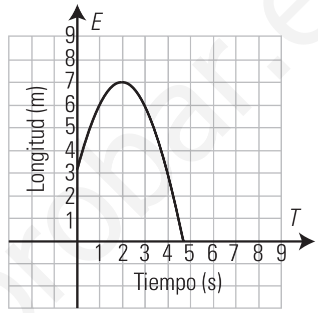
Al principio, el 2.º móvil recorre un mayor espacio en el mismo tiempo; éste se iguala a los 9 s, y a partir de los 9 s, el 1.er móvil recorre un espacio mayor.

Aplica tus competencias

60. Un móvil se desplaza con una velocidad constante de 2 m/s. Halla la ecuación y representa la gráfica que expresa el espacio en función del tiempo.



61. Un móvil se desplaza según la fórmula $e = -t^2 + 4t + 3$. Representa la gráfica e indica el valor del espacio inicial, la velocidad inicial y la aceleración.



$e_0 = 3$ m

$v_0 = 4$ m/s

$a = -2$ m/s^2

Comprueba lo que sabes

1. Define función cuadrática, pon un ejemplo e indica sus características.

Una función cuadrática es una función polinómica de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$, siendo a, b y c números reales y $a \neq 0$. Su representación gráfica es una parábola que tiene las siguientes características:

a) Tiene un eje de simetría cuya fórmula es:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

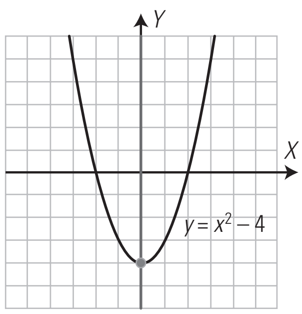
b) Corta al eje X en dos puntos, uno o ninguno, según el número de raíces reales de $ax^2 + bx + c = 0$, y corta al eje Y en el punto $(0, c)$

c) El vértice es un mínimo si $a > 0$, y un máximo si $a < 0$; por una parte del eje es creciente, y por la otra es decreciente.

d) Es convexa ($\cup$) si $a > 0$ y cóncava ($\cap$) si $a < 0$

e) Al aumentar a en valor absoluto, se hace más estrecha.

Ejemplo: $y = x^2 - 4$

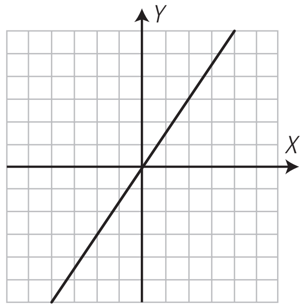


2. Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines, halla mentalmente la pendiente, indica si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

a) $y = \dfrac{3x}{2}$ **b)** $y = -\dfrac{x}{2} + 1$

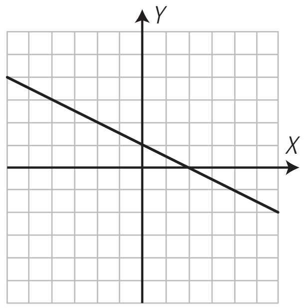
a) Función lineal.

$m = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ Creciente.

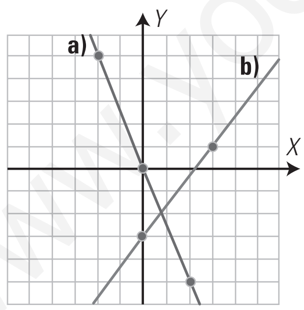


b) Función afín.

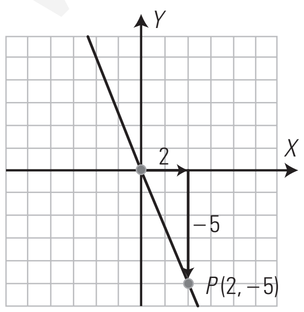
$m = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Decreciente.



3. Halla las ecuaciones de las siguientes rectas y clasifícalas.



a)

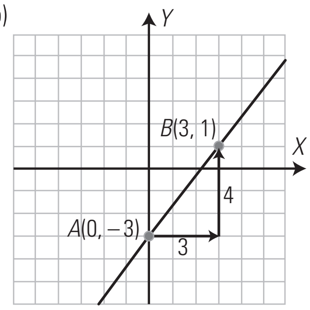


$m = -\dfrac{5}{2}$

$y = -\dfrac{5}{2}x$

Función lineal.

b)



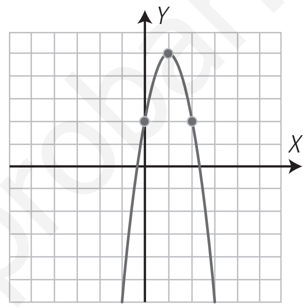
$m = \dfrac{1-(-3)}{3-0} = \dfrac{4}{3}$

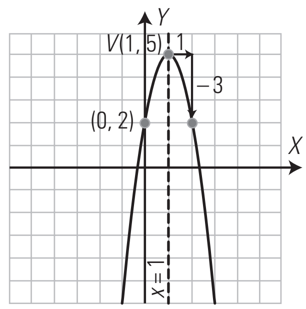
$b = -3$

$y = \dfrac{4}{3}x - 3$

Función afín.

4. Halla la fórmula de la parábola siguiente.





$a = -3$

Eje de simetría: $x = -\dfrac{a}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 6$

$c = 2$

$y = -3x^2 + 6x + 2$

5. Representa la parábola $y = 2x^2$, y a partir de ella, dibuja la parábola:

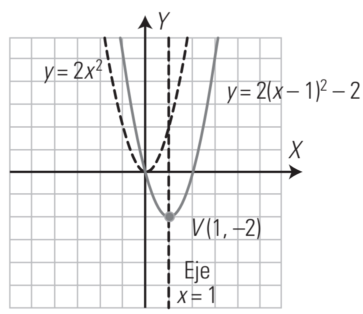
$$y = 2(x-1)^2 - 2$$

a) Halla el eje de simetría.

b) ¿Cuándo es creciente y cuándo es decreciente?

c) Halla el vértice y di si este es un máximo o un mínimo.

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?



a) $x = 1$

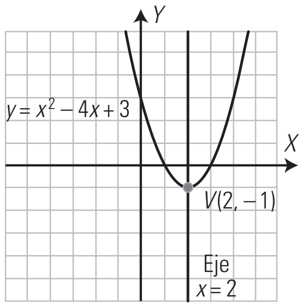
b) Creciente (↗): $(1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 1)$

c) $V(1, -2)$ es un mínimo.

d) Es convexa (∪)

6. Representa la parábola $y = x^2 - 4x + 3$, halla el eje de simetría e indica si el vértice es un máximo o un mínimo.



Eje de simetría: $x = 2$

$V(2, -1)$ es un mínimo.

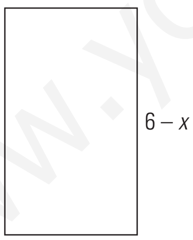
7. Un cristalero quiere hacer marcos rectangulares para espejos que tengan 12 m de perímetro.

a) Escribe la fórmula que expresa el área de los rectángulos en función del lado x

b) Representa la gráfica.

c) ¿Para qué valor de x se hace máxima el área del espejo?

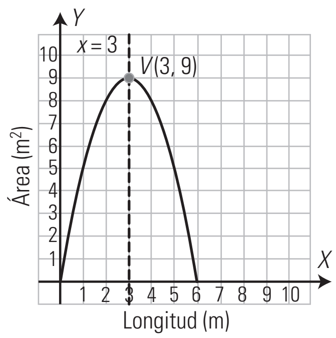
a) Si el perímetro mide 12 m, la base más la altura miden 6 m; por tanto, si la base es x, la altura será $6 - x$



$y = x(6 - x)$

$y = 6x - x^2$

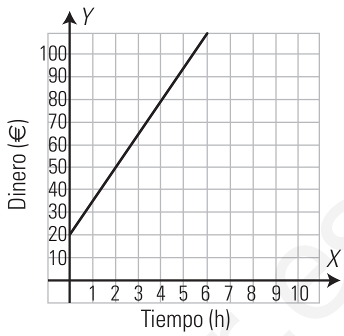
b)



c) El máximo se alcanza cuando el rectángulo es un cuadrado de 3 m de lado y tiene un área de 9 m^2

8. Un técnico cobra 20 € por desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo. Halla la ecuación que calcula el dinero que cobra en función del tiempo que tarda en hacer un trabajo, y represéntala.

$y = 15x + 20$

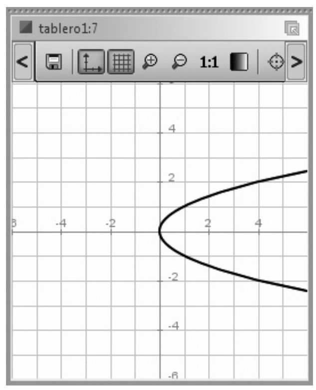


Windows/Linux GeoGebra

PRACTICA

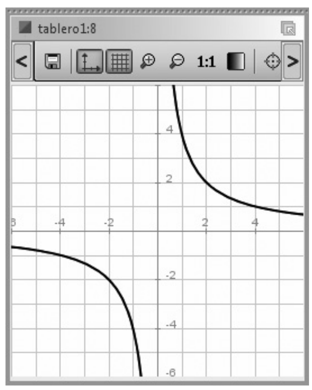
Representa las siguientes funciones y di cuál es función y cuál no.

66. $y^2 = x$



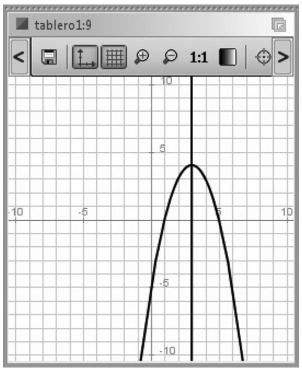
No es función porque hay valores de x para los que les corresponden dos valores de y

67. $y = \dfrac{4}{x}$



Sí es función porque no hay valores de x a los que les correspondan más de un valor de y

68. Dada la función $y = -x^2 + 6x - 5$, represéntala y analiza todas sus características.



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto de la recta $x = 3$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(1, 0)$, $B(5, 0)$
   - Eje Y: $C(0, -5)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, 5)$
   - Decreciente (–): $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $D(3, 4)$
   - Mínimo relativo: no tiene

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 1)$
   - Decreciente (↘): $(5, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): nunca.
   - Cóncava (∩): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

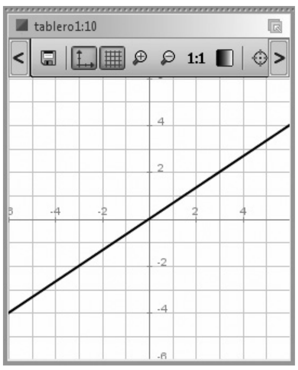
    $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 4]$

Dadas las funciones siguientes, clasifícalas, halla su pendiente, estudia el crecimiento y si son afines halla la ordenada en el origen. Represéntalas.

69. $y = \dfrac{2x}{3}$

a) Es una función lineal.

b) Pendiente: $m = \dfrac{2}{3} > 0 \Rightarrow$ creciente.

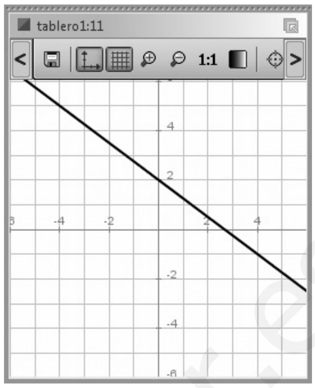


70. $y = -\dfrac{3x}{4} + 2$

a) Es una función afín.

b) Pendiente. $m = -\dfrac{3}{4} < 0 \Rightarrow$ decreciente.

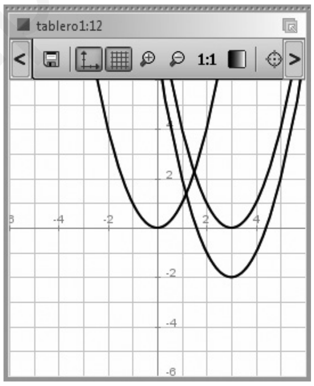
c) Ordenada en el origen: $b = 2$



71. Representa la parábola $y = x^2$, halla la ecuación de la trasladada a la derecha 3 unidades y dibújala. Halla la ecuación de la trasladada de esta última 2 unidades hacia abajo y represéntala también.

$y = (x - 3)^2$

$y = (x - 3)^2 - 2$

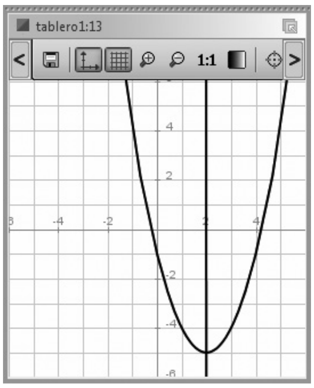


Halla el eje de simetría, las coordenadas del vértice indicando si en un máximo o un mínimo relativo y representa las siguientes funciones cuadráticas:

72. $y = x^2 - 4x - 1$

a) Eje de simetría: $x = 2$

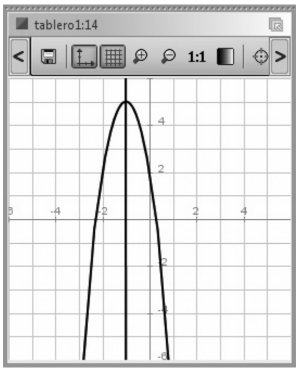
b) Vértice: $V(2, -5)$, mínimo relativo.



73. $y = -3x^2 - 6x + 2$

a) Eje de simetría: $x = -1$

b) Vértice: $V(-1, 5)$, máximo relativo.



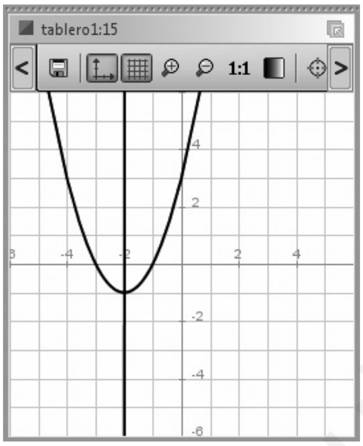
74. $\boldsymbol{y = x^2 + 4x + 3}$

a) Eje de simetría:

$$x = -2$$

b) Vértice:

$V(-2, -1)$, mínimo relativo.



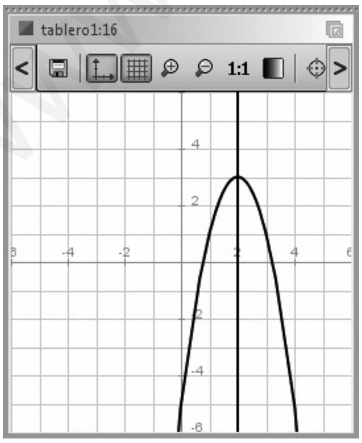
75. $\boldsymbol{y = -2x^2 + 8x - 5}$

a) Eje de simetría:

$$x = 2$$

b) Vértice:

$V(2, 3)$, máximo relativo.

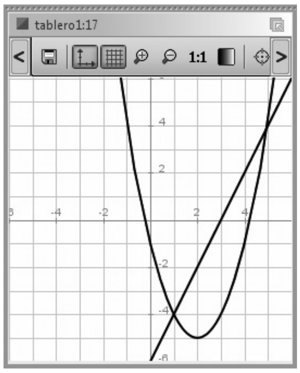


76. Halla los puntos de corte de la recta y parábola siguientes y represéntalas:

$$\boldsymbol{y = 2x - 6}$$

$$\boldsymbol{y = x^2 - 4x - 1}$$

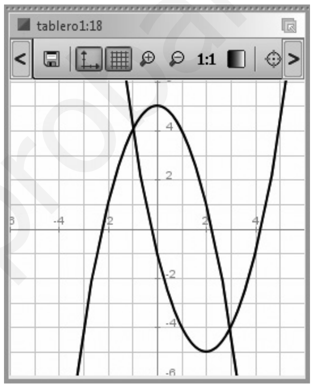
Los punto de corte son: $A(1, -4)$, $B(5, 4)$



77. Halla los puntos de corte de las siguientes parábolas y represéntalas:

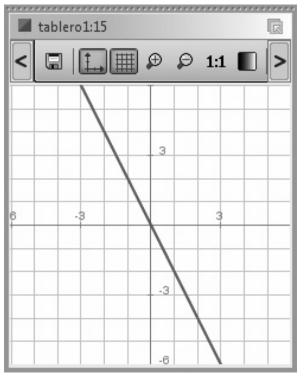
$$\boldsymbol{y = x^2 - 4x - 1} \qquad \boldsymbol{y = -x^2 + 5}$$

Los punto de corte son: $A(-1, 4)$, $B(3, -4)$



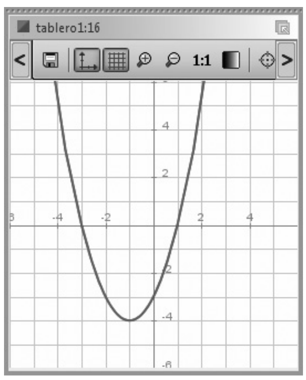
Identifica las siguientes gráficas y halla mediante *ensayo-acierto* su fórmula:

78.

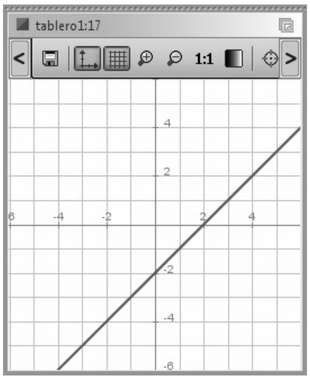


$y = -2x$

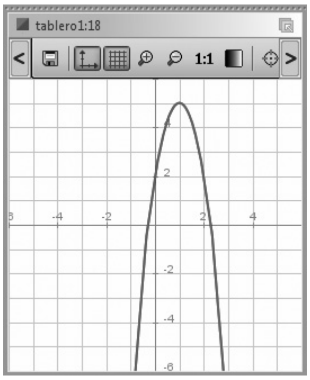
79.



$y = x^2 + 2x - 3$

80. 

$y = x - 2$

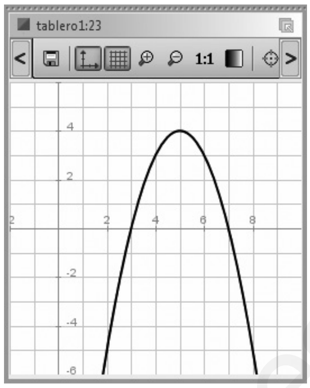
81. 

$y = -3x^2 + 6x + 2$

82. El beneficio, en miles de euros, que se obtiene al vender a x € una unidad de un determinado producto viene dado por la fórmula

$$B(x) = -x^2 + 10x - 21$$

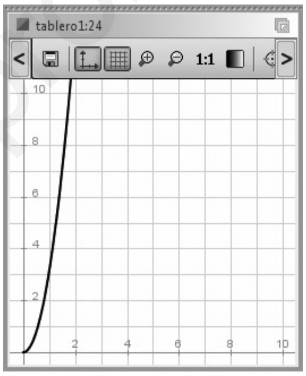
Representa la función $B(x)$ y determina el precio al que hay que vender el producto para obtener el máximo beneficio.



Hay que vender la unidad de producto a 5 €

83. Escribe la función que da el volumen de un cilindro de 1 m de altura en función del radio de la base. Represéntala.

$V = \pi R^2 h \Rightarrow V = \pi \cdot R^2\ 1 \Rightarrow V = \pi R^2$



11. Funciones racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas

1. Funciones racionales

PIENSA Y CALCULA

Despeja *y* de la expresión *xy* = 6. ¿Qué tipo de función es?

$y = \dfrac{6}{x}$

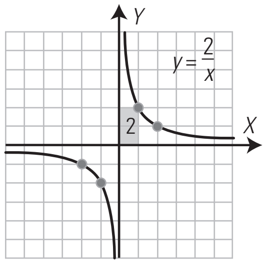
Es una función racional que corresponde a una función de proporcionalidad inversa.

APLICA LA TEORÍA

1. Representa la gráfica de la función $y = 2/x$, calcula el valor de la constante de proporcionalidad, e indica si esta es creciente o decreciente.

Tabla de valores:

x	…	–2	–1	…	1	2	…
x = 2x	…	–1	–2	…	2	1	…



Constante de proporcionalidad

$k = 2 > 0 \Rightarrow$ decreciente

2. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$

Halla:

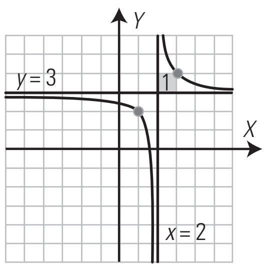
a) su dominio;

b) las ecuaciones de las asíntotas;

c) las discontinuidades.

Haciendo la división se obtiene:

$f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2}$



a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b) Asíntotas

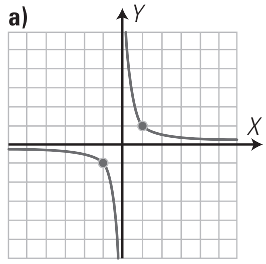
Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 3$

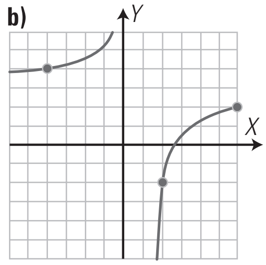
c) Es discontinua en $x = 2$

3. Halla la ecuación de las siguientes funciones:

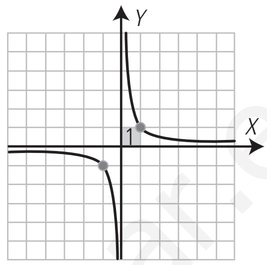
a)



b)



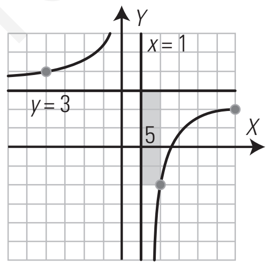
a) Se dibuja un rectángulo.



Como es decreciente k es positivo.

$y = \dfrac{1}{x}$

b) Se dibujan las asíntotas y un rectángulo.



Como es creciente k es negativo.

$y = 3 - \dfrac{5}{x-1}$

$y = \dfrac{3x-8}{x-1}$

2. Operaciones con funciones. Funciones irracionales

PIENSA Y CALCULA

Desarrolla los siguientes polinomios y calcula su suma:

$$(x-3)^2 + (x+3)(x-3)$$

$2x^2 - 6x$

APLICA LA TEORÍA

4. Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = (x+5)^2$ $\qquad$ $g(x) = (x-5)^2$

calcula:

a) *f* + *g* $\qquad$ **b) *f* – *g***

a) $(f+g)(x) = 2x^2 + 50$ $\qquad$ b) $(f-g)(x) = 20x$

5. Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = (x+1)^2$ $\qquad$ $g(x) = (x+1)(x-1)$

calcula:

a) *f* · *g* $\qquad$ **b) *f*/*g*** $\qquad$ **c) Dom (*f*/*g*)**

a) $(f \cdot g)(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

b) $(f/g)(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

c) $\text{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

6. Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = 2x + 5$ $\qquad$ $g(x) = x^2$

calcula:

a) $g \circ f$ $\qquad$ b) $f \circ g$

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) = (2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 5$

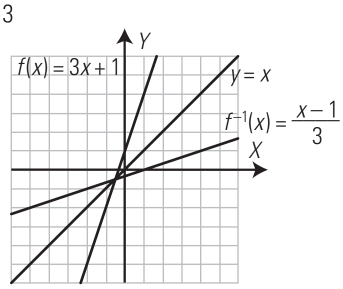
7. Dada $f(x) = 3x + 1$, calcula f^{-1}, representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

$x = 3y + 1$

$-3y = -x + 1$

$3y = x - 1 \Rightarrow y = \dfrac{x-1}{3}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$

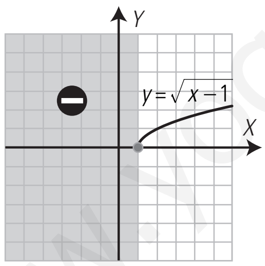


Se observa que $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$

8. Clasifica la función $f(x) = \sqrt{x-1}$, halla su dominio y represéntala.

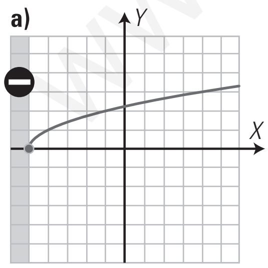
La función es irracional.

$\text{Dom}(f) = [1, +\infty)$

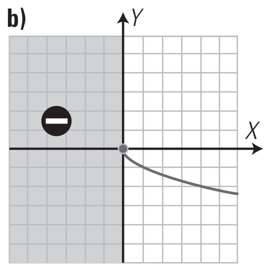


9. Halla la fórmula de las siguientes funciones:

a)



b)



a) $y = \sqrt{x+5}$

b) $y = -\sqrt{x}$

3. FUNCIONES EXPONENCIALES

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente las 10 primeras potencias enteras positivas de 2

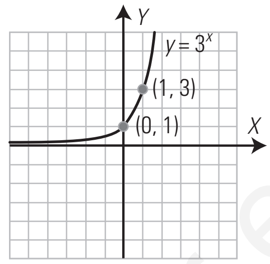
2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024

APLICA LA TEORÍA

10. Representa la siguiente función: $f(x) = 3^x$

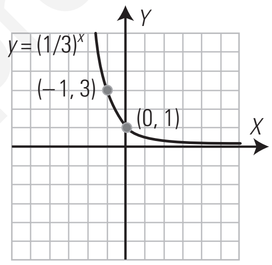
Tabla de valores:

x	…	–2	–1	0	1	2	…
$y = 3^x$	…	1/9	1/3	1	3	9	…



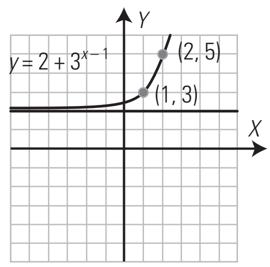
11. Representa la siguiente función: $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

x	…	–2	–1	0	1	2	…
$y = (1/3)^x$	…	1/9	1/3	1	3	9	…



12. Representa la siguiente función: $f(x) = 2 + 3^{x-1}$

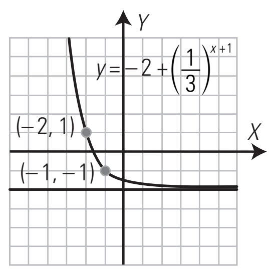
Es la función $y = 3^x$ trasladada dos unidades hacia arriba y una hacia la derecha.



13. Representa la siguiente función:

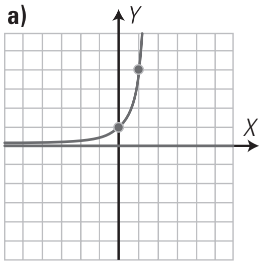
$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$$

Es la función $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ trasladada dos unidades hacia abajo y una hacia la izquierda.

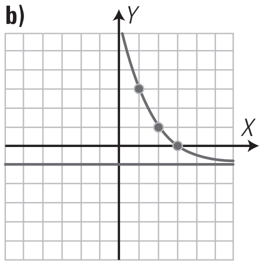


14. Halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

a)



b)



a) $y = 4^x$

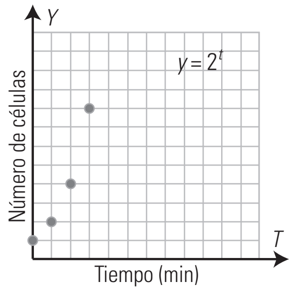
b) $y = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$

15. Una célula se reproduce por bipartición cada minuto. Halla la función que expresa el número de células en función del tiempo, y represéntala gráficamente.

$y = 2^t$, $t \geq 0$

t	0	1	2	3	4	5	…
$y = 2^t$	1	2	4	8	16	32	…

Como no puede haber fracciones de células, será una función discreta.



4. Funciones logarítmicas

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 8$ **b)** $\log_2 1/8$ **c)** $\log_{1/2} 8$ **d)** $\log_{1/2} 1/8$ **e)** $\log_2 1$

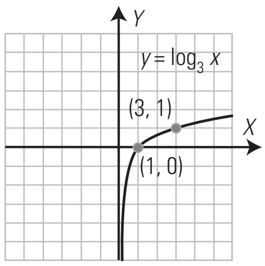
a) 3 b) –3 c) –3 d) 3 e) 0

APLICA LA TEORÍA

16. Representa la siguiente función: $f(x) = \log_3 x$

Tabla de valores

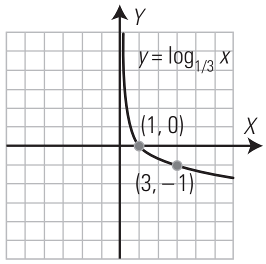
x	…	1/9	1/3	1	3	9	…
$y = \log_3 x$	…	–2	–1	0	1	2	…



17. Representa la siguiente función: $f(x) = \log_{1/3} x$

Tabla de valores

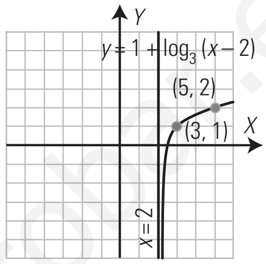
x	…	1/9	1/3	1	3	9	…
$y = \log_{1/3} x$	…	2	1	0	–1	–2	…



18. Representa la siguiente función:

$$f(x) = 1 + \log_3 (x - 2)$$

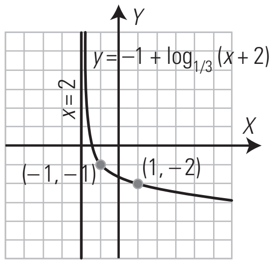
Es la función $y = \log_3 x$ trasladada una unidad hacia arriba y dos hacia la derecha.



19. Representa la siguiente función:

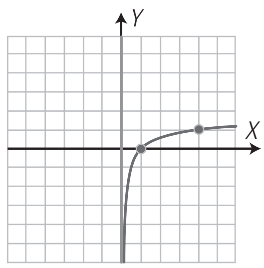
$$f(x) = -1 + \log_{1/3} (x + 2)$$

Es la función $y = \log_{1/3} x$ trasladada una unidad hacia abajo y dos hacia la izquierda.

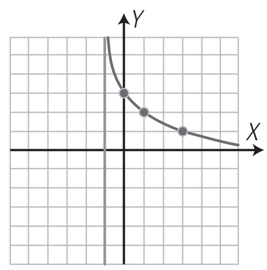


20. Halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

a)



b)



a) $y = \log_4 x$

b) $y = 3 + \log_{1/2} (x + 1)$

21. Halla la función inversa de $y = 3 + 2^{x-1}$. Representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas en las gráficas?

Se cambian las letras

$x = 3 + 2^{y-1}$

Se despeja y

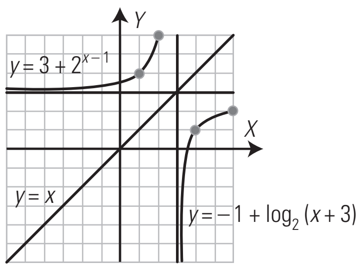
$-2^{y-1} = -x + 3$

$2^{y-1} = x - 3$

$y - 1 = \log_2(x - 3)$

$y = 1 + \log_2(x - 3)$

$f^{-1}(x) = 1 + \log_2(x - 3)$



Ambas gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. FUNCIONES RACIONALES

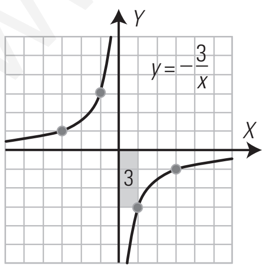
22. Representa la gráfica de la función $y = -3/x$. Calcula el valor de la constante de proporcionalidad e indica si es creciente o decreciente.

Tabla de valores:

x	…	−3	−1	…	1	3	…
y = −3/x	…	1	3	…	−3	−1	…

Constante de proporcionalidad

$k = -3 > 0 \Rightarrow$ creciente



23. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$

Halla:

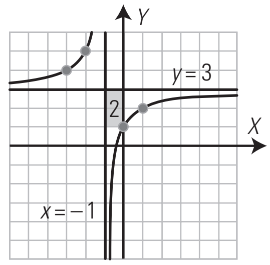
a) su dominio;

b) las ecuaciones de las asíntotas;

c) las discontinuidades.

Haciendo la división se obtiene:

$f(x) = 3 - \dfrac{2}{x-1}$



a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

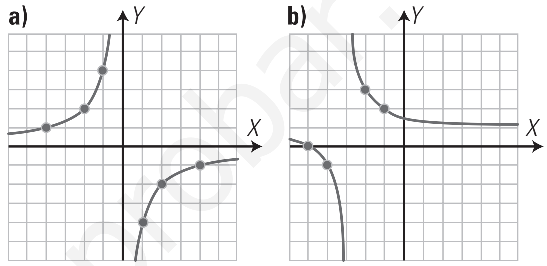
b) Asíntotas

Asíntota vertical: $x = -1$

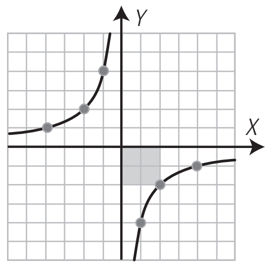
Asíntota horizontal: $y = 3$

c) Es discontinua en $x = -1$

24. Halla la ecuación de las siguientes funciones:



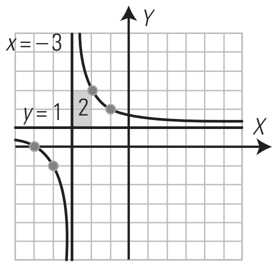
a) Se dibuja un rectángulo.



Como es creciente, k es negativo.

$y = -\dfrac{4}{x}$

b) Se dibujan las asíntotas y un rectángulo.



Como es decreciente, k es positivo.

$y = 1 + \dfrac{2}{x+3}$

$y = \dfrac{x+5}{x+3}$

2. OPERACIONES CON FUNCIONES. FUNCIONES IRRACIONALES

25. Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = (x-3)^2$ $\quad$ $g(x) = x^2 - 9$

calcula:

a) $f + g$ $\quad$ b) $f - g$

a) $(f+g)(x) = 2x^2 - 6x$ $\quad$ b) $(f-g)(x) = -6x + 18$

26. Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 - 16$ $\qquad\qquad$ $g(x) = (x + 4)^2$

calcula:

a) $f \cdot g$

b) f/g

c) $\mathrm{Dom}(f/g)$

a) $(f \cdot g)(x) = x^4 + 8x^3 - 128x - 256$

b) $(f/g)(x) = \dfrac{x-4}{x+4}$

c) $\mathrm{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{-4\} = (-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$

27. Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = 5x - 4$ $\qquad\qquad$ $g(x) = x^2 + 3x - 1$

calcula:

a) $g \circ f$

b) $f \circ g$

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x - 4) =$
$= (5x - 4)^2 + 3(5x - 4) - 1 = 25x^2 - 25x + 3$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3x - 1) =$
$= 5(x^2 + 3x - 1) - 4 = 5x^2 + 15x - 9$

28. Calcula f^{-1} dada la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{x+5}$$

Representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

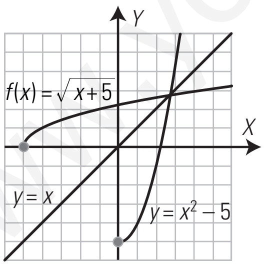
$x = \sqrt{y+5}$

$x^2 = y + 5$

$-y = -x^2 + 5$

$y = x^2 - 5$

$f^{-1}(x) = x^2 - 5,\ x \geq 0$

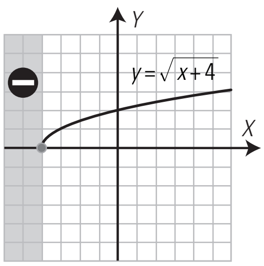


Se observa que $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$

29. Clasifica la función $f(x) = \sqrt{x+4}$, halla su dominio y represéntala.

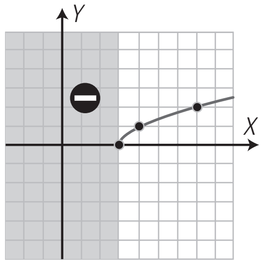
La función es irracional.

$\mathrm{Dom}(f) = [-4, +\infty)$

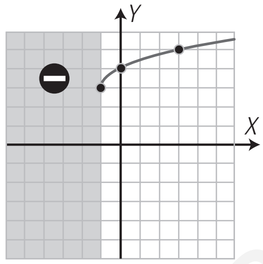


30. Halla la fórmula de las siguientes funciones:

a)



b)



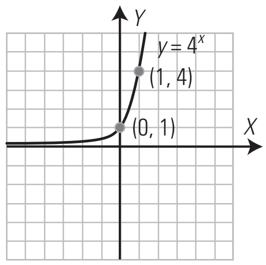
a) $y = \sqrt{x-3}$ $\qquad\qquad$ b) $y = 3 + \sqrt{x+1}$

3. FUNCIONES EXPONENCIALES

31. Representa la función $f(x) = 4^x$

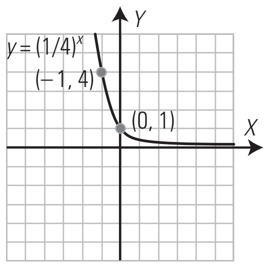
Tabla de valores

x	...	−2	−1	0	1	2	...
$y = 4^x$	...	1/16	1/4	1	4	16	...



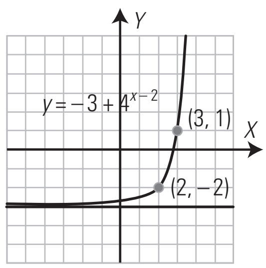
32. Representa la función $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

x	...	−2	−1	0	1	2	...
$y = (1/4)^x$	...	16	4	1	1/4	1/16	...



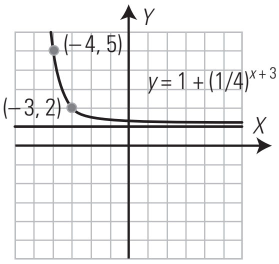
33. Representa la función $f(x) = -3 + 4^{x-2}$

Es la función $y = 4^x$ trasladada tres unidades hacia abajo y dos hacia la derecha.



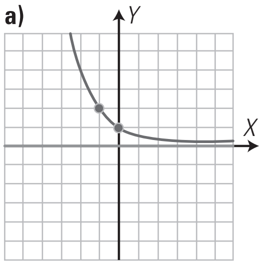
34. Representa la función $f(x) = 1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+3}$

Es la función $y = (1/4)^x$ trasladada 1 unidad hacia arriba y tres hacia la izquierda.

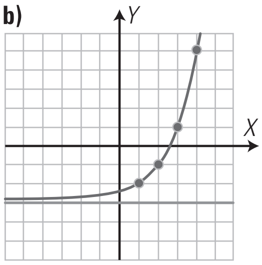


35. Halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica.

a)



b)



a) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

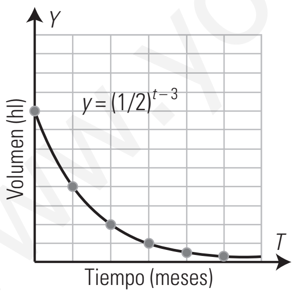
b) $y = -3 + 2^{x-1}$

36. Un estanque contiene 8 hectolitros de agua y cada mes se gasta la mitad de su contenido. Halla la función que define la capacidad que queda en el estanque en función del tiempo y represéntala gráficamente.

$y = (1/2)^{t-3}$, $t \geq 0$

t	0	1	2	3	4	5	6	…
$y = (1/2)^{t-3}$	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1

Como el agua disminuye continuamente, será una función continua.

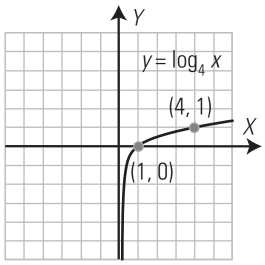


4. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

37. Representa la siguiente función: $f(x) = \log_4 x$

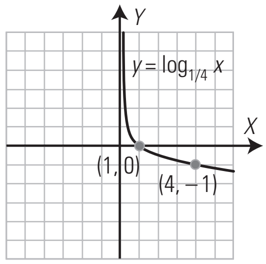
Tabla de valores

x	…	1/16	1/4	1	4	16	…
$y = \log_4 x$	…	–2	–1	0	1	2	…



38. Representa la siguiente función: $f(x) = \log_{1/4} x$

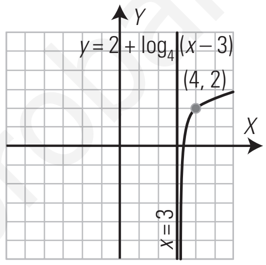
x	…	1/16	1/4	1	4	16	…
$y = \log_{1/4} x$	…	2	1	0	–1	–2	…



39. Representa la siguiente función:

$$f(x) = 2 + \log_4 (x - 3)$$

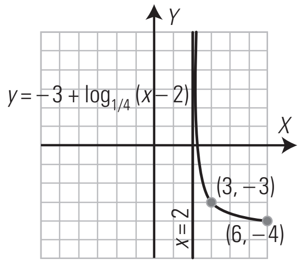
Es la función $y = \log_4 x$ trasladada dos unidades hacia arriba y tres hacia la derecha.



40. Representa la siguiente función:

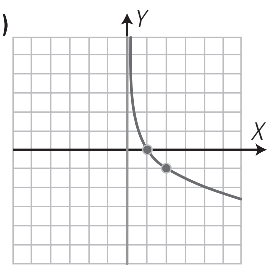
$$f(x) = -3 + \log_{1/4} (x - 2)$$

Es la función $y = \log_{1/4} x$ trasladada tres unidades hacia abajo y dos hacia la derecha.

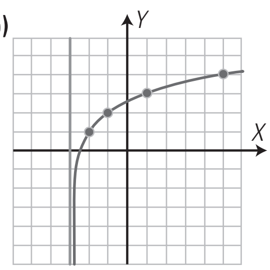


41. Halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

a)



b)



a) $y = \log_{1/2} x$

b) $y = 1 + \log_2 (x + 3)$

42. Halla la función inversa de $y = 3 + \log_2 (x - 1)$, representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas en las gráficas?

Se cambian las letras

$x = 3 + \log_2 (y - 1)$

Se despeja y

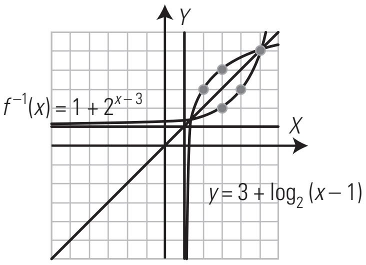
$-\log_2 (y - 1) = -x + 3$

$\log_2 (y - 1) = x - 3$

$y - 1 = 2^{x-3}$

$y = 1 + 2^{x-3}$

$f^{-1}(x) = 1 + 2^{x-3}$



Ambas gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$

43. Dada la función siguiente:

$$y = -1 + 2^{x-3}$$

calcula la función inversa, representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas en las gráficas?

a) $x = -1 + 2^{y-3}$

b) $2^{y-3} = x + 1$

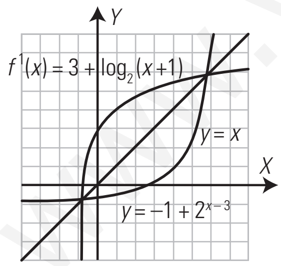
$(y - 3) \log_2 2 = \log_2 (x + 1)$

$y - 3 = \log_2 (x + 1)$

$y = 3 + \log_2 (x + 1)$

c) $f^{1}(x) = 3 + \log_2 (x + 1)$

d)



Las dos gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$

PARA AMPLIAR

44. Halla el dominio de las funciones:

a) $y = \dfrac{2x - 7}{x - 3}$ **b) $y = \sqrt{x - 2}$**

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

b) $\text{Dom}(f) = [2, +\infty)$

45. Halla el dominio de las funciones:

a) $y = 3^{x+5}$ **b) $y = \log_2 (x - 1)$**

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) $\text{Dom}(f) = (1, +\infty)$

46. Halla las discontinuidades de las funciones:

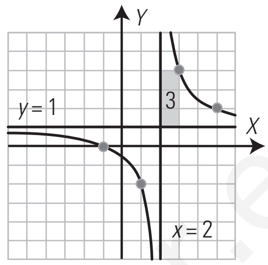
a) $y = \dfrac{x + 1}{x - 4}$ **b) $y = \dfrac{x - 5}{x + 3}$**

a) $x = 4$ b) $x = -3$

Clasifica las siguientes funciones. Represéntalas y halla su crecimiento:

47. a) $y = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ **b) $y = \sqrt{x - 2}$**

a) Función racional.

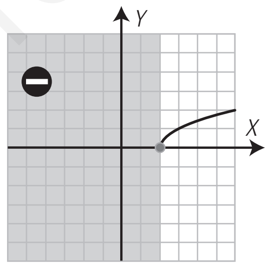


$y = \dfrac{x + 1}{x - 2} \Rightarrow y = 1 + \dfrac{3}{x - 2}$

Creciente (↗): $\varnothing$

Decreciente (↘): $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b) Función irracional.

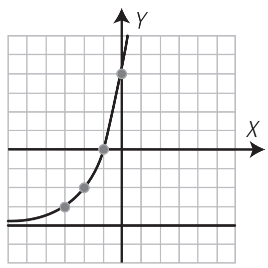


Creciente (↗): $[2, +\infty)$

Decreciente (↘): $\varnothing$

48. a) $y = -4 + 2^{x+3}$ **b) $y = \dfrac{-2x + 1}{x + 1}$**

a) Función exponencial.

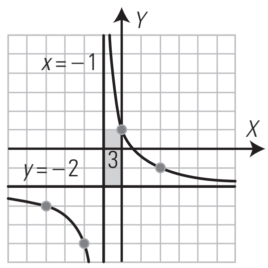


Creciente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Decreciente (↘): $\varnothing$

b) Función racional.

$y = \dfrac{-2x + 1}{x + 1} \Rightarrow y = -2 + \dfrac{3}{x + 1}$



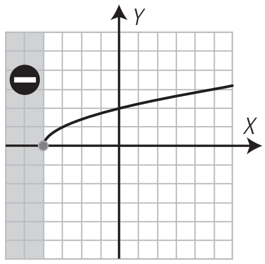
Creciente (↗): $\varnothing$

Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

49. a) $y = \sqrt{x+4}$

b) $y = 3 + \log_2 (x + 2)$

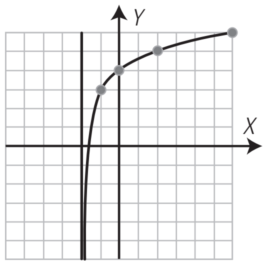
a) Función irracional.



Creciente (↗): $[-4, +\infty)$

Decreciente (↘): $\varnothing$

b) Función logarítmica.



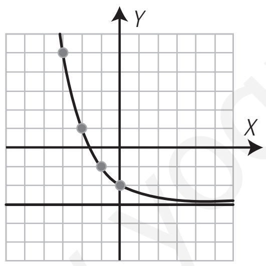
Creciente (↗): $(-2, +\infty)$

Decreciente (↘): $\varnothing$

50. a) $y = -3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

b) $y = \log_{1/2} (x - 3)$

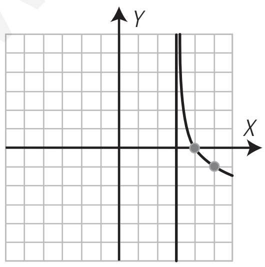
a) Función exponencial.



Creciente (↗) : $\varnothing$

Decreciente (↘) : $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) Función logarítmica.



Creciente (↗): $\varnothing$

Decreciente (↘): $(3, +\infty)$

51. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = 7x^2 - 3x \qquad g(x) = -5x^2 + 6x - 1$$

calcula:

a) $f + g$ **b)** $f - g$

a) $(f + g)(x) = 2x^2 + 3x - 1$

b) $(f - g)(x) = 12x^2 - 9x + 1$

52. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = x - 7 \qquad g(x) = x + 7$$

calcula:

a) $f \cdot g$

b) f/g

c) Dom (f/g)

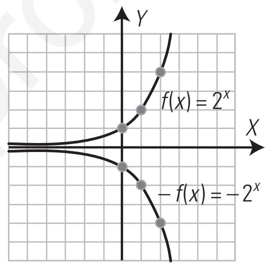
a) $(f \cdot g)(x) = x^2 - 49$

b) $(f/g)(x) = \dfrac{x-7}{x+7}$

c) $\text{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{-7\} = (-\infty, -7) \cup (-7, +\infty)$

53. Representa la función $f(x) = 2^x$, multiplica dicha función por -1 y represéntala en los mismos ejes coordenados. ¿Qué observas en las gráficas de ambas funciones?

La gráfica de la función $-f(x) = -2^x$ es la simétrica de la función $f(x) = 2^x$ respecto del eje X



54. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = x - 3 \qquad g(x) = 5x^2 + 1$$

calcula: a) $g \circ f$

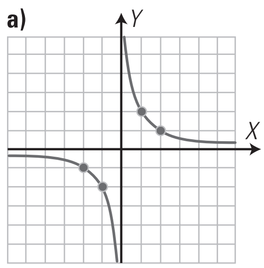
b) $f \circ g$

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 3) = 5(x - 3)^2 + 1 = 5x^2 - 30x + 46$

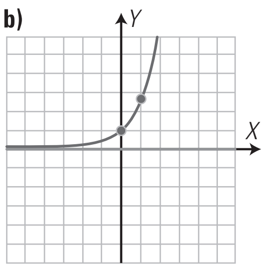
b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x^2 + 1) = 5x^2 + 1 - 3 = 5x^2 - 2$

Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

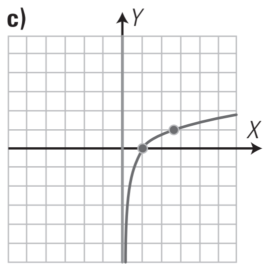
55. a)



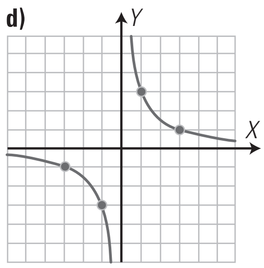
b)



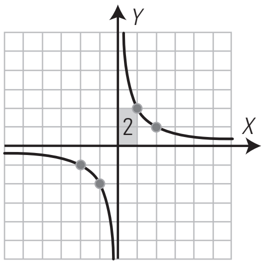
c)



d)



a) Función racional.



$y = \frac{2}{x}$

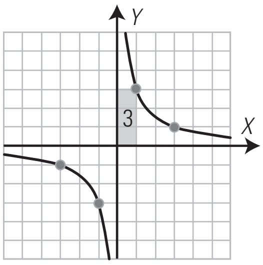
b) Función exponencial.

$y = e^x$

c) Función logarítmica

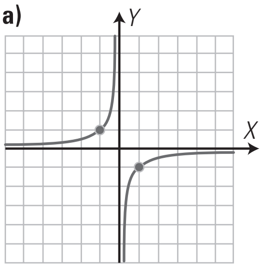
$y = \ln x$

d) Función racional.

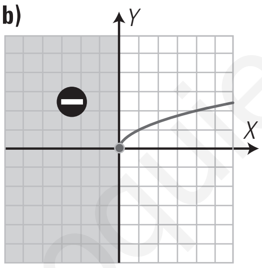


$y = \frac{3}{x}$

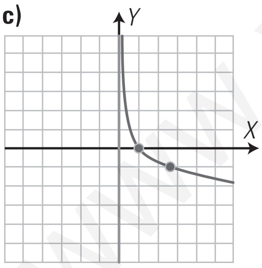
56. a)



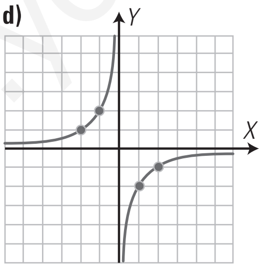
b)



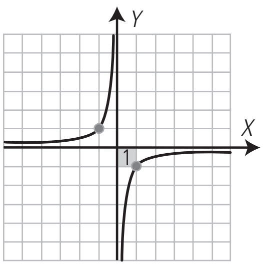
c)



d)



a) Función racional.



$y = -\frac{1}{x}$

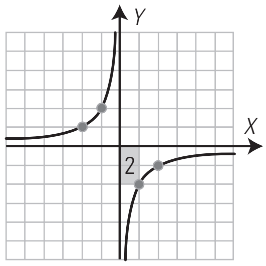
b) Función irracional.

$y = \sqrt{x}$

c) Función logarítmica.

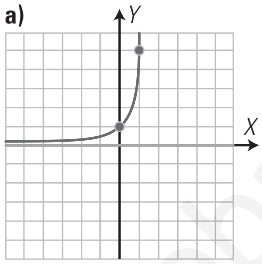
$y = \log_{1/e} x$

d) Función racional.

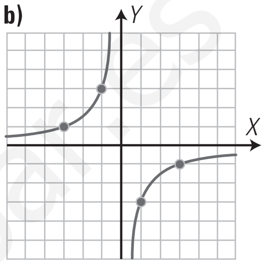


$y = -\frac{2}{x}$

57. a)



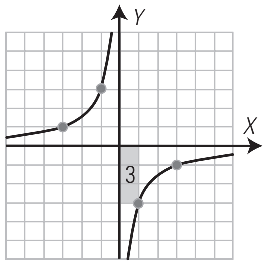
b)



a) Función exponencial.

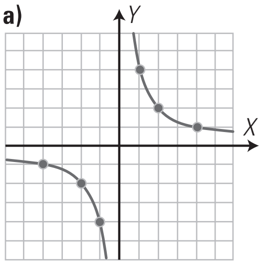
$y = 5^x$

b) Función racional.

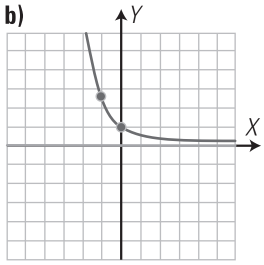


$y = -\frac{3}{x}$

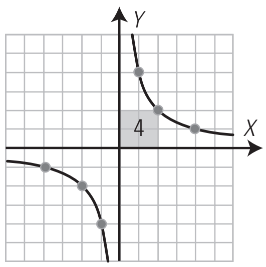
58. a)



b)



a) Función racional.

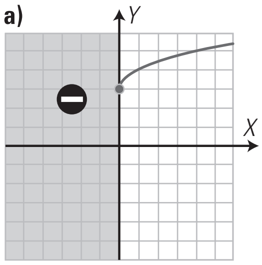


$y = \frac{4}{x}$

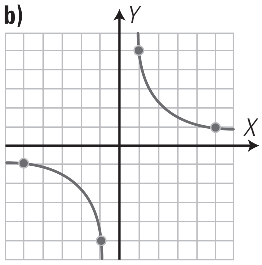
b) Función exponencial.

$y = (1/e)^x$

59. a)



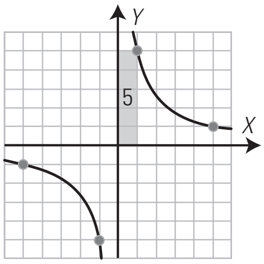
b)



a) Función irracional.

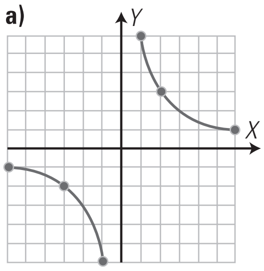
$y = 3 + \sqrt{x}$

b) Función racional.

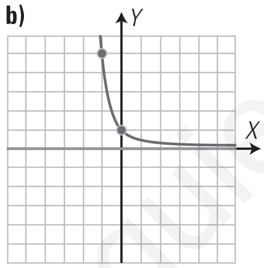


$y = \frac{5}{x}$

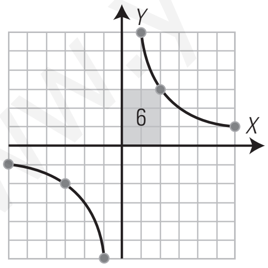
60. a)



b)



a) Función racional.

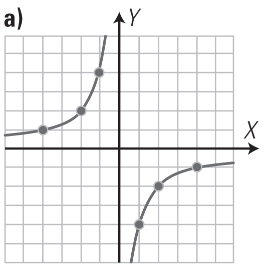


$y = \frac{6}{x}$

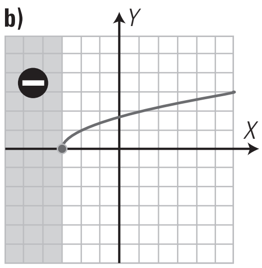
b) Función exponencial.

$y = (1/5)^x$

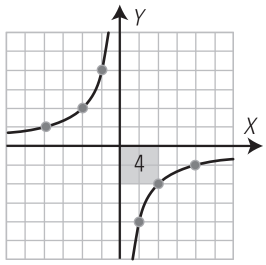
61. a)



b)



a) Función racional.

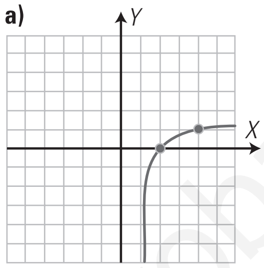


$y = -\frac{4}{x}$

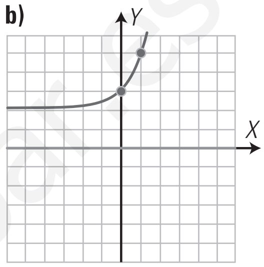
b) Función irracional.

$y = \sqrt{x+3}$

62. a)



b)

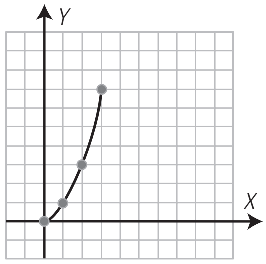


a) $y = \log_3 (x - 1)$ b) $y = 2 + 3^x$

PROBLEMAS

63. Un árbol crece durante los tres primeros años, según la función $y = 2^{x-1}$. Representa dicha función en los tres primeros años de vida del árbol.

x	0	1	2	3
$y = 2^x - 1$	0	1	3	7



64. Dadas las funciones:

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = \sqrt{x-1},\ x \geq 1$$

calcula:

a) $g \circ f$

b) $f \circ g$

c) ¿Qué puedes afirmar del resultado obtenido?

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{x^2+1-1} = \sqrt{x^2} = x$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x-1}\right) = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 1 =$
$= x - 1 + 1 = x$

c) Que las funciones f y g son una inversa de la otra.

65. Dada la siguiente función: $f(x) = \frac{1}{x}$

calcula:

a) $f \circ f$

b) ¿Qué puedes afirmar del resultado obtenido?

a) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = x$

b) Que la función f es inversa de sí misma.

66. Calcula la función inversa de $f(x) = x^2 - 5$, $x \geq 0$. Representa ambas funciones en unos mismos ejes coordenados, y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

$y = x^2 - 5$, $x \geq 0$

Se cambian las letras.

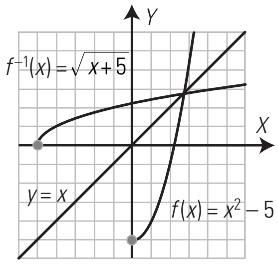
$x = y^2 - 5$

Se despeja la y

$-y^2 = -x - 5$

$y = \sqrt{x+5}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+5}$



Se observa que ambas gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$

67. Calcula la función inversa de $f(x) = \sqrt{x+1}$. Representa ambas funciones en unos mismos ejes coordenados, y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

$y = \sqrt{x+1}$

Se cambian las letras.

$x = \sqrt{y+1}$

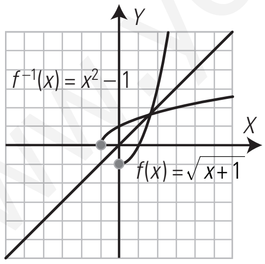
Se despeja la y

$x^2 = y + 1$

$-y = -x^2 + 1$

$y = x^2 - 1$

$f^{-1}(x) = x^2 - 1$

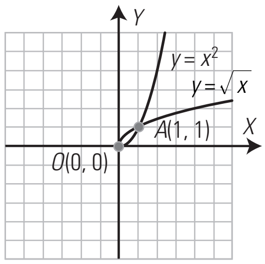


Se observa que ambas gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$

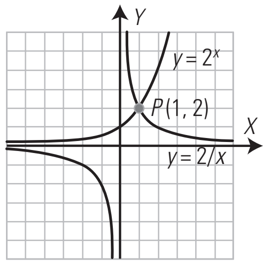
Representa en unos mismos ejes coordenados las siguientes funciones y luego halla los puntos de corte:

68. $y = x^2$ $\quad$ $y = \sqrt{x}$

Los puntos de corte son: $O(0, 0)$ y $A(1, 1)$

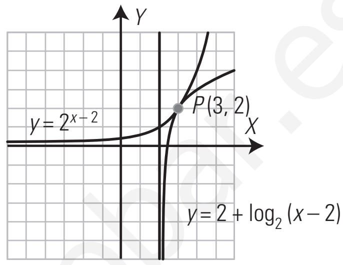


69. $y = 2^x$ $\quad$ $y = \dfrac{2}{x}$



El único punto de corte es $P(1, 2)$

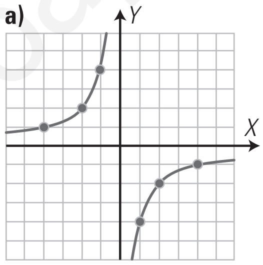
70. $y = 2^{x-2}$ $\quad$ $y = 2 + \log_2(x - 2)$



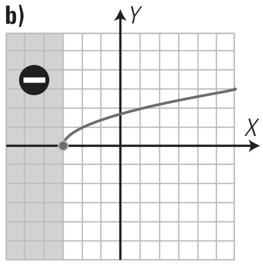
El único punto de corte es $P(3, 2)$

Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

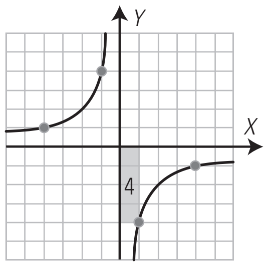
71. a)



b)



a) Función racional.

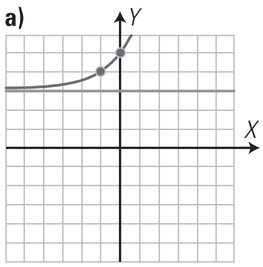


$y = -\dfrac{4}{x}$

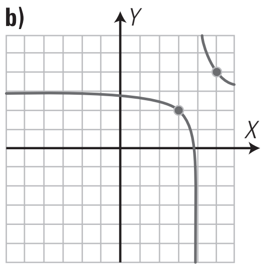
b) Función irracional.

$y = \sqrt{x+3}$

72. a)



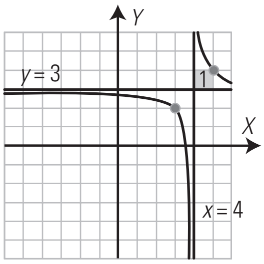
b)



a) Función exponencial.

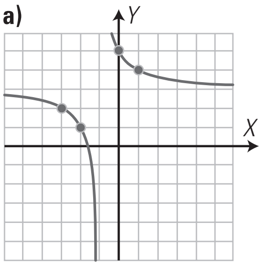
$y = 3 + 2^{x+1}$

b) Función racional.

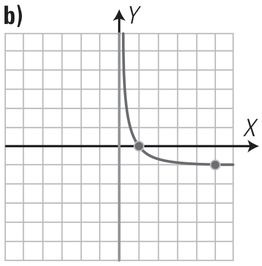


$$y = 3 + \frac{1}{x-4} = \frac{3x-11}{x-4}$$

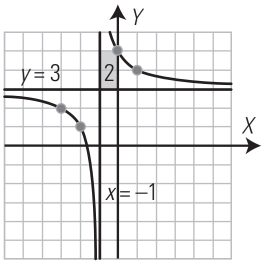
73. a)



b)



a) Función racional.

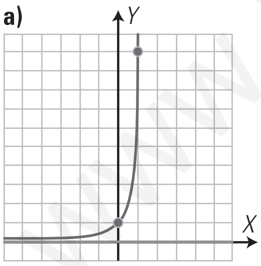


$$y = 3 + \frac{2}{x+1} = \frac{3x+5}{x+1}$$

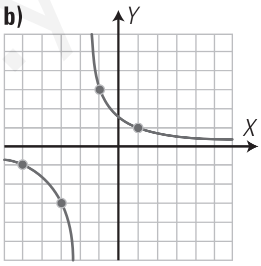
b) Función logarítmica.

$$y = \log_{1/5} x$$

74. a)



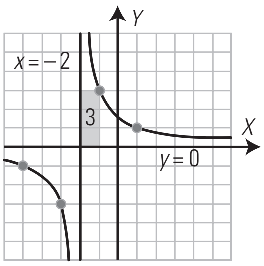
b)



a) Función exponencial.

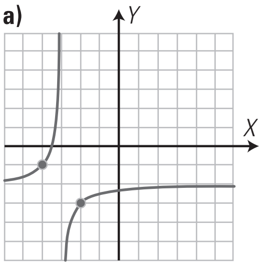
$$y = 10^x$$

b) Función racional.

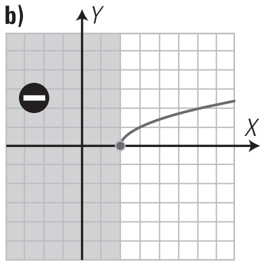


$$y = \frac{3}{x+2}$$

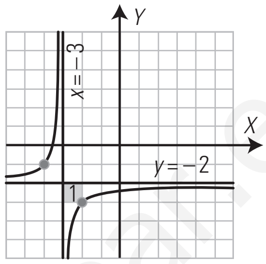
75. a)



b)



a) Función racional.

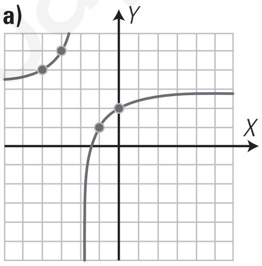


$$y = -2 - \frac{1}{x+3} = -\frac{2x+7}{x+3}$$

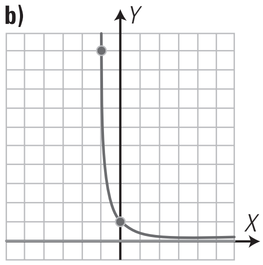
b) Función irracional.

$$y = \sqrt{x-2}$$

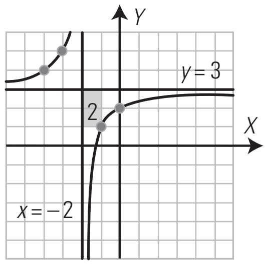
76. a)



b)



a) Función racional.

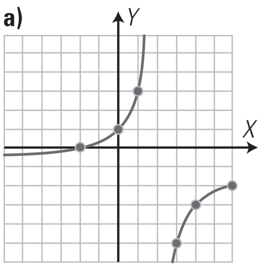


$$y = 3 - \frac{2}{x+2} = \frac{3x+4}{x+2}$$

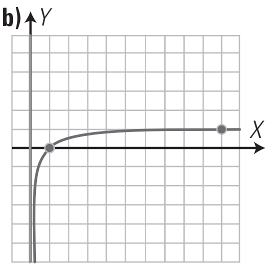
b) Función exponencial.

$$y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$$

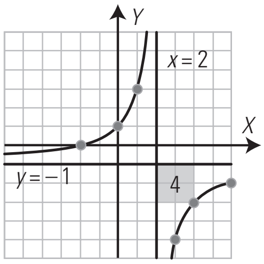
77. a)



b)



a) Función racional.

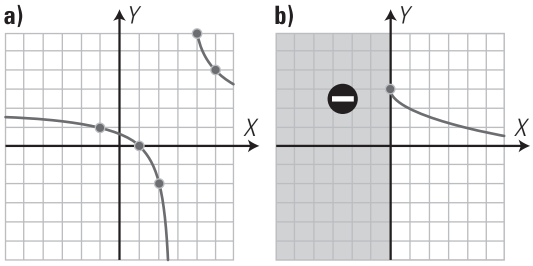


$$y = -1 - \frac{4}{x-2} = -\frac{x+2}{x-2}$$

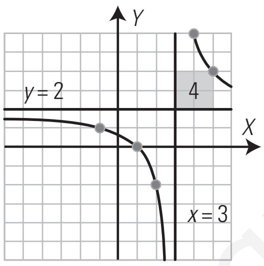
b) Función logarítmica.

$y = \log x$

78. a) **b)**



a) Función racional.

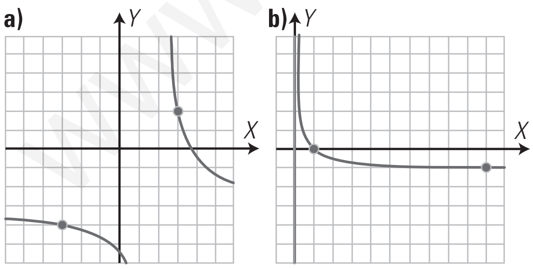


$$y = 2 + \frac{4}{x-3} = \frac{2x-2}{x-3}$$

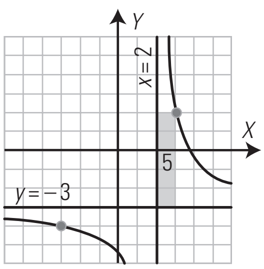
b) Función irracional.

$y = 3 - \sqrt{x}$

79. a) **b)**



a) Función racional.



$$y = -3 + \frac{5}{x-2} = -\frac{3x-11}{x-2}$$

b) Función logarítmica.

$y = \log_{1/10} x$

80. En una granja se dispone de pienso para alimentar 1 000 pollos durante 40 días. Calcula la función que da el número de días en función del número de pollos. Clasifica dicha función.

$xy = 40\,000 \Rightarrow y = \dfrac{40\,000}{x}$

Es una función racional. Es de proporcionalidad inversa.

81. La bacteria *Eberthella typhosa* se reproduce por bipartición cada hora. Si partimos de un millón de bacterias, calcula:

a) la función que expresa el número de bacterias en función del tiempo;

b) ¿cuántas bacterias habrá al cabo de 24 horas? Da el resultado en notación científica.

c) ¿qué tiempo tiene que transcurrir para tener 1 024 millones de bacterias.

a) $y = 10^6 \cdot 2^x$

b) $y = 10^6 \cdot 2^{24} = 1{,}6777216 \cdot 10^{13}$

c) $10^6 \cdot 2^x = 1\,024 \cdot 10^6$

$2^x = 1\,024$

$2^x = 2^{10}$

$x = 10$ horas.

82. Los ingresos y gastos, en millones de euros, de una empresa en función del número de años que llevan funcionando vienen dados por:

$$i(x) = 8x - x^2$$

$$g(x) = 3x$$

a) Calcula la función que da los beneficios de dicha empresa.

b) ¿Cuándo empieza a ser deficitaria la empresa?

a) $b(x) = i(x) - g(x)$

$b(x) = 5x - x^2$

b) Empieza a ser deficitaria a partir de que los beneficios sean cero.

$5x - x^2 = 0$

$x(5 - x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 5$

Para $x = 0$ es cuando empieza a funcionar.

A partir de los 5 años empezará a ser deficitaria.

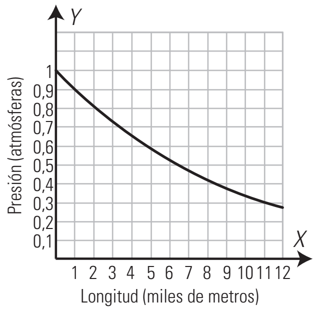
83. Las diferencias de presiones, que aparecen al ascender por una montaña, son la causa del mal de montaña y del dolor de oídos. Se ha probado experimentalmente que la presión viene dada por la fórmula $y = 0{,}9^x$, donde y se mide en atmósferas, y x, en miles de metros.

a) Representa dicha función.

b) ¿Qué presión hay a 3 000 m de altura?

c) ¿A qué altura tendremos que ascender para que la presión sea de 0,59 atmósferas?

a) Gráfica



b) $y = 0{,}9^3 = 0{,}729$ atmósferas.

c) $0{,}9^x = 0{,}59$

$x \log 0{,}9 = \log 0{,}59$

$x = \dfrac{\log 0{,}59}{\log 0{,}9} = 5$

Altura = 5 000 m

84. Halla la función que calcula la longitud del lado de un cuadrado de área x m². Clasifica la función obtenida.

$y = \sqrt{x}$

Es una función irracional.

85. Un barco de vela deportivo cuesta un millón de euros. Si se devalúa un 18% anualmente, calcula:

a) la función que expresa el valor en función del número de años;

b) el valor que tendrá al cabo de 10 años;

c) ¿cuántos años tendrán que transcurrir para que valga la mitad del precio inicial?

a) $y = 10^6 \cdot 0{,}82^x$

b) $y = 10^6 \cdot 0{,}82^{10} = 137\,448$ €

c) $10^6 \cdot 0{,}82^x = 0{,}5 \cdot 10^6$

$0{,}82^x = 0{,}5$

$x \log 0{,}82 = \log 0{,}5$

$x = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}82} = 3{,}49$ años

Aproximadamente 3 años y medio.

86. El alquiler de un piso es de 500 € mensuales. Si en el contrato se hace constar que se subirá un 3% anual, calcula:

a) la función que expresa el precio del alquiler en función del número de años;

b) el precio del alquiler al cabo de 10 años;

c) ¿cuántos años tendrán que transcurrir para que se duplique el alquiler?

a) $y = 500 \cdot 1{,}03^x$

b) $y = 500 \cdot 1{,}03^{10} = 671{,}96$ €

c) $500 \cdot 1{,}03^x = 1\,000$

$1{,}03^x = 2$

$x \log 1{,}03 = \log 2$

$x = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}03} = 23{,}45$ años.

87. Un bosque tiene 5 m³ de madera. Si el ritmo de crecimiento es de un 10% al año, calcula:

a) la función que expresa el volumen de madera en función del número de años;

b) el volumen que tendrá al cabo de 15 años;

c) ¿cuántos años tendrán que transcurrir para que se triplique el volumen?

a) $y = 5 \cdot 1{,}1^x$

b) $y = 5 \cdot 1{,}1^{15} = 20{,}89$ m³

c) $5 \cdot 1{,}1^x = 15$

$1{,}1^x = 3$

$x \log 1{,}1 = \log 3$

$x = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}1} = 11{,}53$ años.

PARA PROFUNDIZAR

88. Calcula la función inversa de $f(x) = e^x$. Representa ambas funciones en unos mismos ejes coordenados, y la recta $y = x$. ¿Qué observas en las gráficas?

$y = e^x$

Se cambian las letras.

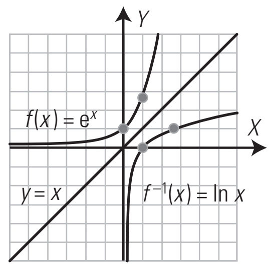
$x = e^y$

Se despeja la y

$e^y = x$

$y = \ln x$

$f^{-1}(x) = \ln x$



Se observa que ambas gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$

89. Calcula la función inversa de $f(x) = \dfrac{4}{x}$. ¿Qué puedes afirmar viendo el resultado que has obtenido?

$y = \dfrac{4}{x}$

Se cambian las letras.

$x = \dfrac{4}{y}$

Se despeja la y

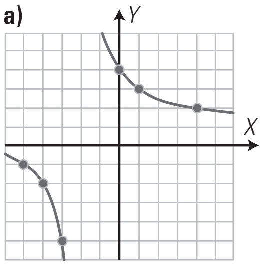
$y = \dfrac{4}{x}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x}$

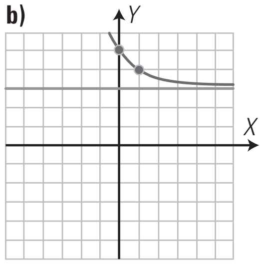
Se puede afirmar que dicha función coincide con su inversa.

Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

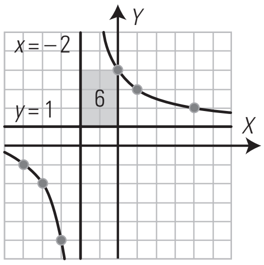
90. a)



b)



a) Función racional.

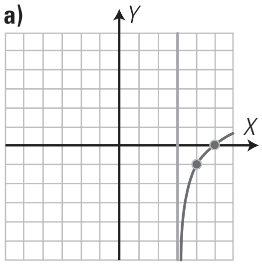


$y = 1 + \dfrac{6}{x+2} = \dfrac{x+8}{x+2}$

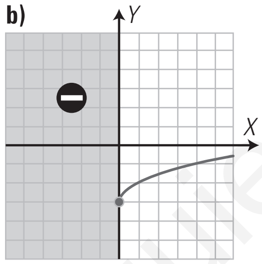
b) Función exponencial.

$y = 3 + (1/2)^{x-1}$

91. a)



b)



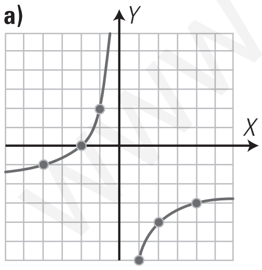
a) Función logarítmica.

$y = -1 + \log_2 (x - 3)$

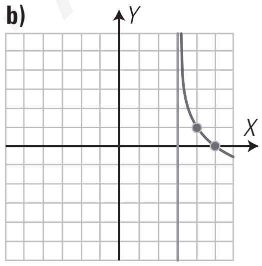
b) Función irracional.

$y = -3 + \sqrt{x}$

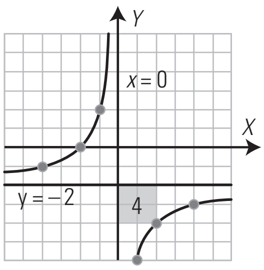
92. a)



b)



a) Función racional.

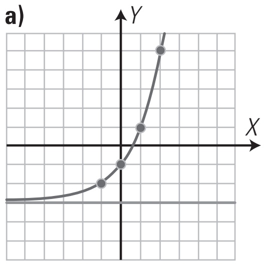


$y = -2 - \dfrac{4}{x} = -\dfrac{2x+4}{x}$

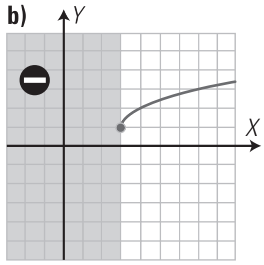
b) Función logarítmica.

$y = 1 + \log_{1/2} (x - 3)$

93. a)



b)



a) Función exponencial.

$y = -3 + 2^{x+1}$

b) Función irracional.

$y = 1 + \sqrt{x-3}$

94. Para recolectar las fresas de una huerta, 20 trabajadores tardan 5 días. Calcula la función que da el número de días en función del número de trabajadores. Clasifica la función obtenida.

$xy = 100$

$y = \dfrac{100}{x}$

Es una función racional. Es de proporcionalidad inversa.

95. Halla la función que calcula la longitud del radio de un círculo de área x m². Clasifica la función obtenida.

$\pi R^2 = x$

$R^2 = \dfrac{x}{\pi}$

$R = \sqrt{\dfrac{x}{\pi}}$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{\pi}}$

Función irracional.

96. Se define el período radioactivo como el tiempo necesario para que la mitad de los átomos de un isótopo se hayan desintegrado, emitiendo radiaciones. El actinio tiene un período de desintegración de 30 años. Escribe la función que calcula la cantidad de actinio en función del número de años. Si tenemos inicialmente 25 g de actinio, al cabo de 150 años ¿cuánto actinio tendremos?

$y = 25 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/30}$

$y = 25 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{150/30} = 0{,}78$ g

97. Un capital de 30 000 € se deposita en un banco a interés compuesto del 5%. Calcula:

a) la función que expresa el valor del capital en función del número de años;

b) el valor que tendrá al cabo de 15 años;

c) ¿cuántos años tendrán que transcurrir para que se duplique el capital inicial?

a) $C = 30\,000 \cdot 1{,}05^t$

b) $C = 30\,000 \cdot 1{,}05^{15} = 62\,368$ €

c) $30\,000 \cdot 1{,}05^t = 60\,000$

$1{,}05^t = 2$

$t \log 1{,}05 = \log 2$

$t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}05} = 14{,}2$ años

APLICA TUS COMPETENCIAS

98. Escribe la fórmula que relaciona la presión y el volumen dada por la ley de Boyle-Mariotte, y clasifícala.

$PV = k$

$P = \dfrac{k}{V}$

Es una función racional; es de proporcionalidad inversa.

99. Escribe la fórmula que relaciona la presión y el volumen dada por la ley de Boyle-Mariotte, sabiendo que para una determinada cantidad de gas *P* = 3 atmósferas, *V* = 4 litros. Represéntala gráficamente.

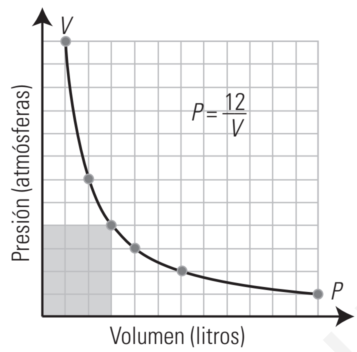
$PV = 12$

$P = \dfrac{12}{V}$

Tabla de valores:

V	1	2	3	4	6	12
P	…	2	1	0	−1	−2

Gráfica:



COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Define función exponencial y pon un ejemplo.

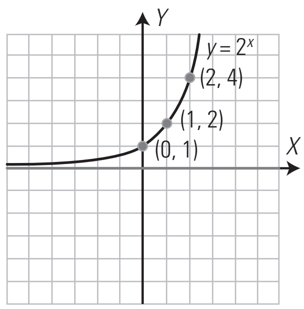
Una función es exponencial si la variable independiente está en el exponente. Es de la forma:

$$f(x) = a^x \text{ siendo } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Ejemplo: Representa la función $f(x) = 2^x$

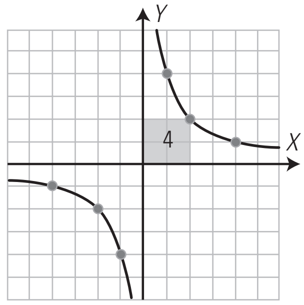
Se hace una tabla de valores:

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y = 2^x$	…	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	…



2. Clasifica y representa la función *y* = 4/*x*, calcula el valor de la constante de proporcionalidad, indica si la función es creciente o decreciente y di si es continua.

Es una función racional.



$k = 4 > 0 \Rightarrow$ decreciente.

Es discontinua en $x = 0$

3. Halla la función inversa de $f(x) = x^2 - 1$, $x \geq 0$. Representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

Se cambian las letras.

$x = y^2 - 1$

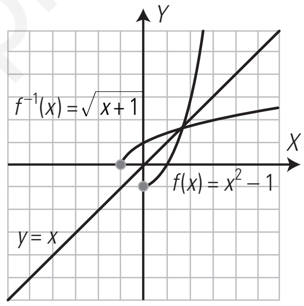
Se despeja la y

$-y^2 = -x - 1$

$y^2 = x + 1$

$y = \sqrt{x+1}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

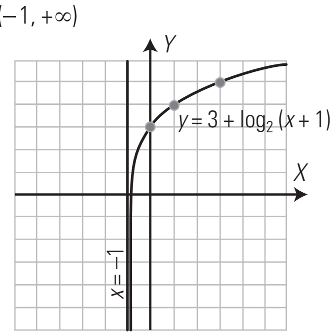


Ambas son simétricas respecto de la recta $y = x$

4. Clasifica, halla el dominio y representa la función $f(x) = 3 + \log_2(x + 1)$

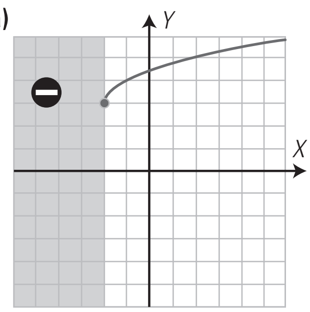
Es una función logarítmica.

$\text{Dom}(f) = (-1, +\infty)$

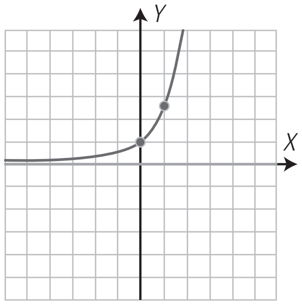


5. Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica.

a)



b)



a) Función irracional.

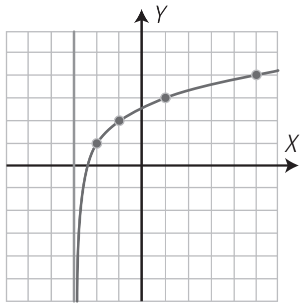
$y = 3 + \sqrt{x+2}$

b) Función exponencial.

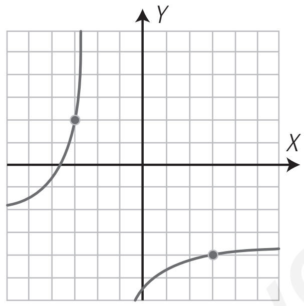
$y = e^x$

6. Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica.

a)



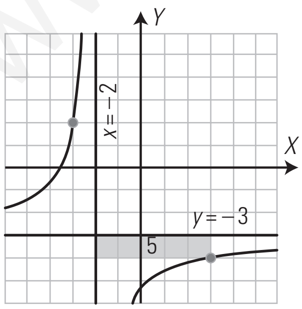
b)



a) Función logarítmica.

$y = 1 + \log_2 (x+3)$

b) Función racional.



$$y = -3 - \frac{5}{x+2} = -\frac{3x+11}{x+2}$$

7. Para hacer la revista del centro, 8 alumnos tardan 6 días. Calcula la función que expresa el número de días en función del número de alumnos. Clasifica la función obtenida.

$xy = 48 \Rightarrow y = \dfrac{48}{x}$

Es una función racional. Es de proporcionalidad inversa.

8. Una ciudad tiene un índice de crecimiento de población del 0,5%. Si en el año 2000 tenía 3 millones de habitantes, escribe la función que calcula la población en función del número de años. ¿Cuántos habitantes tendrá en el año 2050?

$P = 3 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005^{t-2\,000}$

$P = 3 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005^{50} = 3{,}849677 \cdot 10^6 = 3849677$ habitantes.

Windows/Linux WIRIS

PRACTICA

104. Dada la función:

$$y = 2 + \frac{-3}{x+4}$$

a) clasifícala;

b) represéntala;

c) descríbela como traslación;

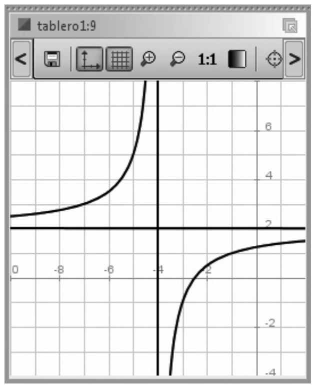
d) halla y representa las asíntotas;

e) halla el dominio;

f) halla las discontinuidades;

g) halla el crecimiento.

Ejercicio 104
a) Función racional.
b) Gráfica
tablero({centro = punto(−4, 2), anchura = 12, altura = 12});
dibujar($y = 2 - \frac{3}{x+4}$, {color = rojo, anchura_linea = 2});
c) Es la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{-3}{x}$, k = −3, trasladada dos unidades hacia arriba y 4 hacia la izquierda.
c) Asíntotas:
dibujar(x = −4, {anchura_linea = 2, color = verde});
dibujar(y = 2, {anchura_linea = 2, color = verde});
e) Dom(f) = ℝ − {−4} = (−∞, −4) ∪ (4, +∞)
f) Discontinuidades: x = −4
g) Crecimiento: es siempre creciente.



Dadas las siguientes funciones:

a) Clasifícalas.

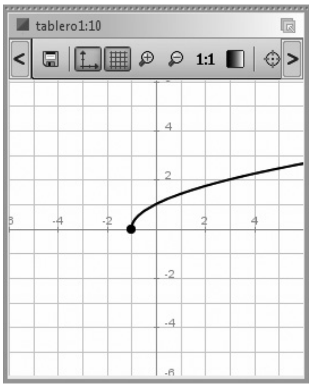
b) Represéntalas y si tienen asíntota represéntalas.

c) Halla el dominio.

d) Halla el crecimiento.

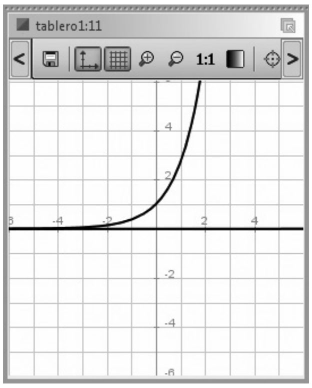
105. $y = \sqrt{x+1}$

Ejercicio 105
a) Función irracional.
b) Gráfica:
tablero({centro = punto(0, 0), anchura = 12, altura = 12});
dibujar($y = \sqrt{x+1}$, {color = rojo, anchura_linea = 2});
dibujar(punto(−1, 0), {color = rojo, tamaño_punto = 8});
c) Dom(f) = [−1, +∞)
d) Crecimiento: es creciente



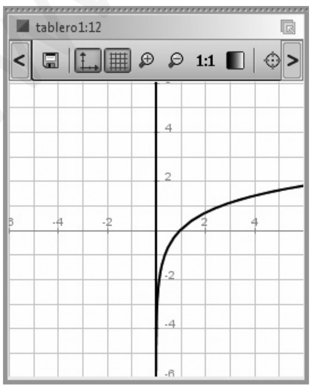
106. $y = e^x$

Ejercicio 106
a) Función exponencial
b) Gráfica :
tablero({centro = punto(0, 0), anchura = 12, altura = 12});
dibujar(y = e^x, {color = rojo, anchura_linea = 2});
dibujar(y = 0, {color = verde, anchura_linea = 2});
c) Dom(f) = ℝ
d) Crecimiento : es creciente



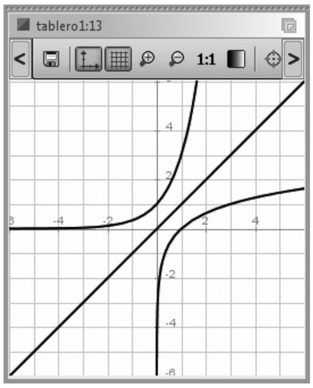
107. $y = \ln x$

Ejercicio 107
a) Función logarítmica
b) Gráfica :
tablero({centro = punto(0, 0), anchura = 12, altura = 12});
dibujar(y = ln(x), {color = rojo, anchura_linea = 2});
dibujar(x = 0, {color = verde, anchura_linea = 2});
c) Dom(f) = (0, +∞)
d) Crecimiento : es creciente



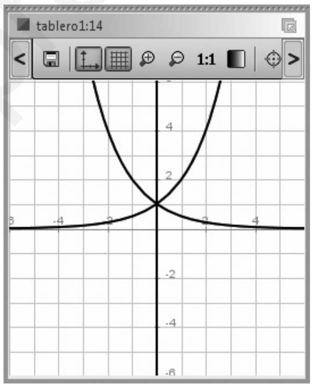
108. Representa en unos mismos ejes coordenados las funciones $y = 3^x$, $y = \log_3 x$, $y = x$. ¿Qué observas?

Ejercicio 108
tablero({centro = punto(0, 0), anchura = 12, altura = 12});
dibujar(y = 3^x, {color = rojo, anchura_linea = 2});
dibujar(y = $\log_3$ x, {color = azul, anchura_linea = 2});
dibujar(y = x, {color = verde, anchura_linea = 2});
Se observa que las funciones exponenciales y logarítmicas son inversas.



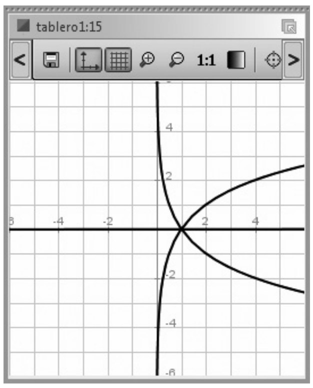
109. Representa en unos mismos ejes coordenados las funciones $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$. ¿Qué observas?

Ejercicio 109
tablero({centro = punto(0, 0), anchura = 12, altura = 12});
dibujar(y = 2^x, {color = rojo, anchura_linea = 2});
dibujar$\left(y = \left(\frac{1}{2}\right)^x\right.$, {color = azul, anchura_linea = 2}$\left.\right)$;
dibujar(x = 0, {color = verde, anchura_linea = 2});
Se observa que las funciones son simétricas respecto del eje Y



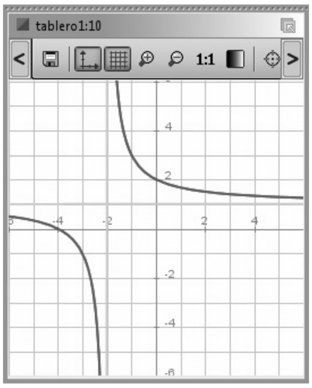
110. Representa en unos mismos ejes coordenados las funciones $y = \log_2 x$, $y = \log_{1/2} x$. ¿Qué observas?

Ejercicio 110
tablero({centro = punto(0, 0), anchura = 12, altura = 12});
dibujar(y = $\log_2$(x), {color = rojo, anchura_linea = 2});
dibujar(y = $\log_{1/2}$(x), {color = azul, anchura_linea = 2});
dibujar(y = 0, {color = verde, anchura_linea = 2});
Se observa que las funciones son simétricas respecto del eje X



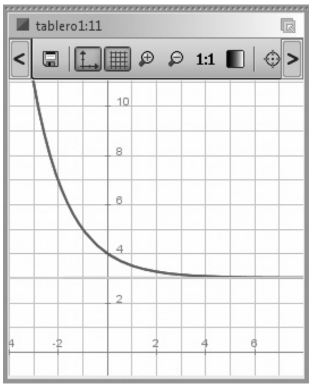
Clasifica y halla mediante *ensayo-acierto* la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica en rojo:

111.



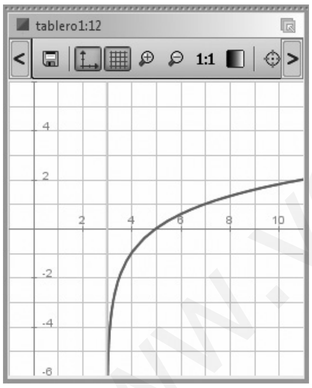
$y = \frac{x+4}{x+2}$

112.



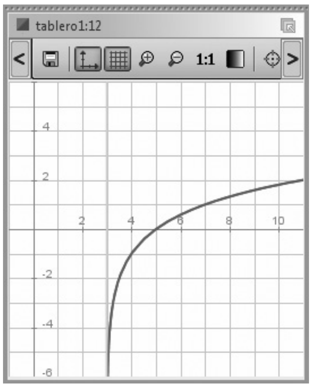
$y = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

113.



$y = -1 + \log_2 (x-3)$

114.



$y = -3 + \sqrt{x}$

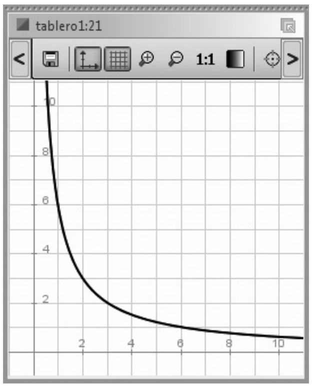
Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

115. Una célula se reproduce por bipartición cada minuto. Halla la función que define el número de células y represéntala gráficamente.

$N(t) = 2^t;\ t \geq 0$

116. Escribe la fórmula que relaciona la presión y el volumen dada por la Ley de Boyle-Mariotte, sabiendo que para una determinada cantidad de gas *P* = 2 atmósferas, *V* = 3 litros. Represéntala gráficamente. Representa el volumen por *x* y la presión por *y*. ¿Qué curva se obtiene?

$y = \frac{6}{x};\ x > 0$



12. Límites y derivadas

1. Funciones especiales

PIENSA Y CALCULA

Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente:

x	$-3{,}6$	$3{,}6$	$0{,}8$	$-0{,}8$
Ent(x)				
Dec(x)				
$\lvert x\rvert$				
Signo(x)				

x	$-3{,}6$	$3{,}6$	$0{,}8$	$-0{,}8$
Ent(x)	-4	3	0	-1
Dec(x)	0,4	0,6	0,8	0,2
$\lvert x\rvert$	3,6	3,6	0,8	0,8
Signo(x)	-1	1	1	-1

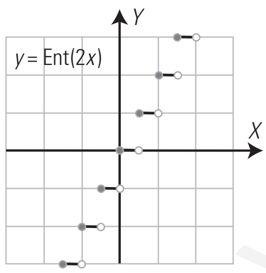
APLICA LA TEORÍA

1. Representa las siguientes funciones:

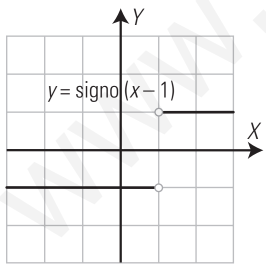
a) $y = \text{Ent}(2x)$

b) $y = \text{Signo}(x-1)$

a)



b)

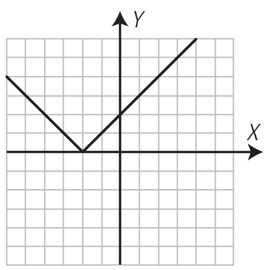


2. Representa las siguientes funciones:

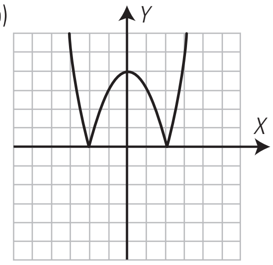
a) $y = |x+2|$

b) $y = |-x^2+4|$

a)



b)

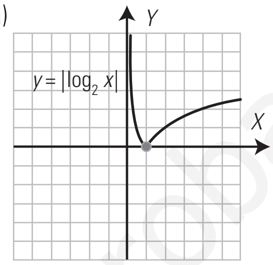


3. Representa las siguientes funciones:

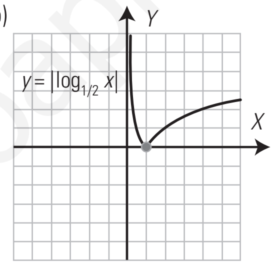
a) $y = |\log_2 x|$

b) $y = |\log_{1/2} x|$

a)

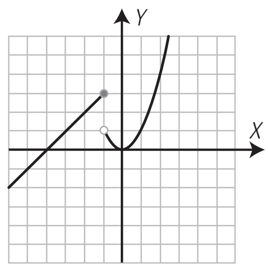


b)



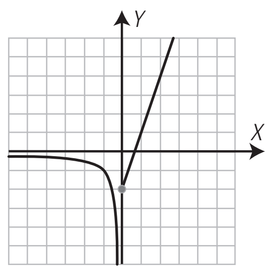
4. Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$



5. Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3x-2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$



2. LÍMITES

PIENSA Y CALCULA

Copia en tu cuadereno y completa la tabla y estima el valor al que tiende la función cuando *x* tiende al infinito:

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	…	$x \to +\infty$
$y = 1/x$								$y \to$

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	…	$x \to +\infty$
$y = 1/x$	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	…	$y \to 0$

APLICA LA TEORÍA

6. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5) = +\infty$

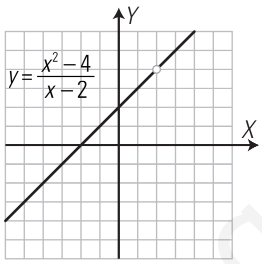
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5) = +\infty$

7. Calcula los siguientes límites y representa la función correspondiente:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 4x}$

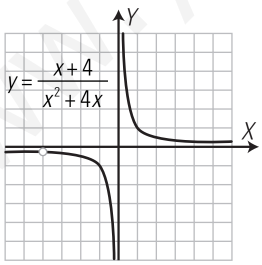
a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

Gráfica:



b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 4x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\cancel{x+4}}{x\cancel{(x+4)}} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{4}$

Gráfica:



8. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4n^3 + 1}{2n^3 - 1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{n^2 + 5}{4n^3 - 3}$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1} = \dfrac{5}{2}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4n^3 + 1}{2n^3 - 1} = 2$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{n^2 + 5}{4n^3 - 3} = 0$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1} = \dfrac{5}{2}$

3. LA DERIVADA

PIENSA Y CALCULA

Un coche va de Asturias a Andalucía; recorre 800 km en 8 horas. ¿Cuál es su velocidad media?

Velocidad media $= \dfrac{800}{8} = 100$ km/h

APLICA LA TEORÍA

Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

9. $f(x) = 3x + 1$ **en [2, 4]**

$\text{TVM}[2, 4] = \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \dfrac{13 - 7}{2} = 3$

10. $f(x) = x^2 - 1$ **en [2, 3]**

$\text{TVM}[2, 3] = \dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \dfrac{8 - 3}{1} = 5$

11. $f(x) = \dfrac{2}{x}$ **en [1, 3]**

$\text{TVM}[1, 3] = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{2/3 - 2}{2} = -\dfrac{2}{3}$

12. $f(x) = \sqrt{x}$ **en [0, 4]**

$\text{TVM}[0, 4] = \dfrac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \dfrac{2 - 0}{4} = -\dfrac{1}{2}$

Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

13. $f(x) = 2x + 3$ **en** $x = 1$

$f'(1) = 2$

14. $f(x) = -3x + 1$ **en** $x = 2$

$f'(2) = -3$

15. $f(x) = x^2$ **en** $x = 3$

$f'(3) = 6$

16. $f(x) = -x^2 + 3$ **en** $x = 2$

$f'(2) = -4$

Calcula la función derivada aplicando la tabla de derivadas:

17. $y = 3$

$y' = 0$

18. $y = x$

$y' = 1$

19. $y = x^2$

$y' = 2x$

20. $y = x^5$

$y' = 5x^4$

21. $y = x^5 + x^2 + x + 3$

$y' = 5x^4 + 2x + 1$

22. $y = 5x^2 - 7x + 3$

$y' = 10x - 7$

23. $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

$y' = 3x^2 + 6x - 4$

24. $y = (3x + 5)^4$

$y' = 12(3x + 5)^3$

25. $y = e^x$

$y' = e^x$

26. $y = e^{3x-5}$

$y' = 3e^{3x-5}$

27. $y = \ln x$

$y' = \dfrac{1}{x}$

28. $y = \ln(3x-1)$

$y' = \dfrac{3}{3x-1}$

29. $y = \ln(x^2+5x-6)$

$y' = \dfrac{2x+5}{x^2+5x-6}$

30. $y = 7x$

$y' = 7$

31. $y = x\,e^x$

$y' = (x+1)e^x$

32. $y = x \ln x$

$y' = 1 + \ln x$

33. $y = e^x \ln x$

$y' = e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x}$

34. $y = \dfrac{e^x}{x}$

$y' = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

35. $y = \dfrac{2x+3}{x}$

$y' = -\dfrac{3}{x^2}$

36. $y = \dfrac{5x-1}{3x+2}$

$y' = \dfrac{13}{(3x+2)^2}$

4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

PIENSA Y CALCULA

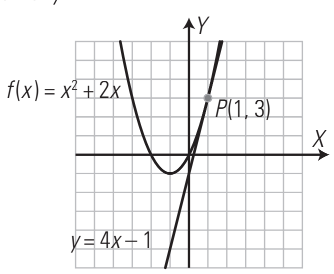
Si la pendiente de una recta es $m = 2$, calcula la pendiente $m_\perp$ de cualquier recta perpendicular.

Las pendientes son inversas y opuestas, $m_\perp = -\dfrac{1}{2}$

APLICA LA TEORÍA

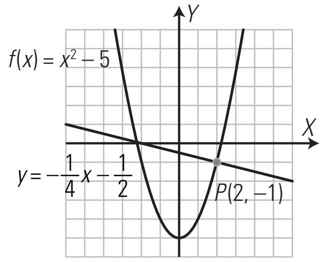
37. Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 + 2x$ para $x = 1$. Dibuja la función y la recta tangente.

Recta tangente: $y = 4x - 1$



38. Calcula la recta normal a la curva $y = x^2 - 5$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta normal.

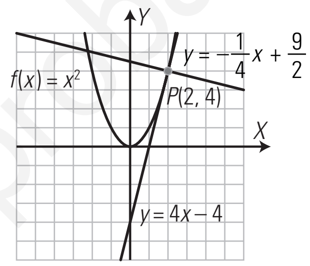
Recta normal: $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$



39. Halla las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ para $x = 2$. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

Recta tangente: $y = 4x - 4$

Recta normal: $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{2}$



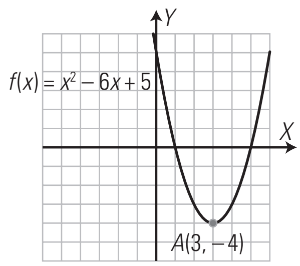
40. Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2 - 6x + 5$. Dibuja la función.

$y' = 2x - 6$

$2x - 6 = 0,\ x = 3,\ y = -4,\ A(3, -4)$

$y'' = 2$

$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow A(3, -4)$ mínimo relativo.



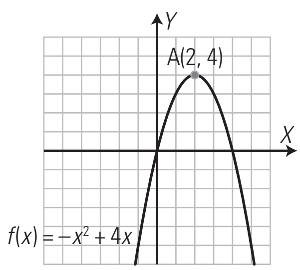
41. Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2 + 4x$. Dibuja la función.

$y' = -2x + 4$

$-2x + 4 = 0,\ x = 2,\ y = 4,\ A(2, 4)$

$y'' = -2$

$f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow A(2, 4)$ Máximo relativo.



42. Calcula el crecimiento de la función $y = x^2 - 2x - 3$. Dibuja la función.

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = 2x - 2$

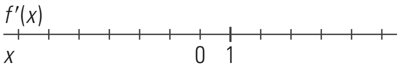
$2x - 2 = 0$, $x = 1$, $y = -4$, $A(1, -4)$

$y'' = -2$

$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow A(1, -4)$ mínimo relativo.

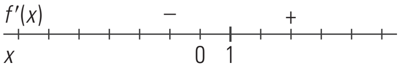
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



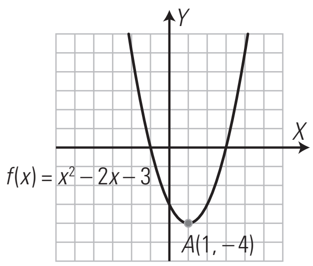
$y' = 2x - 2$

$f'(0) = -$



$(\nearrow) = (1, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, 1)$



43. Halla el crecimiento de la función $y = -x^2 + 6x - 4$. Dibuja la función.

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = -2x + 6$

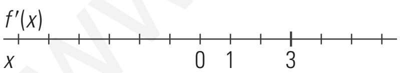
$-2x + 6 = 0$, $x = 3$, $y = 5$, $A(3, 5)$

$y'' = -2$

$f''(3) = -2 < 0 \Rightarrow A(3, 5)$ Máximo relativo.

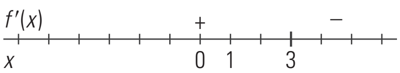
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



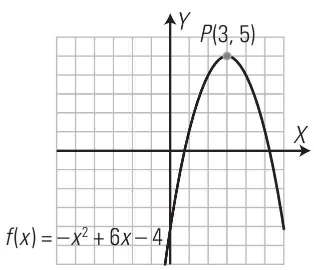
$y' = -2x + 6$

$f'(0) = +$



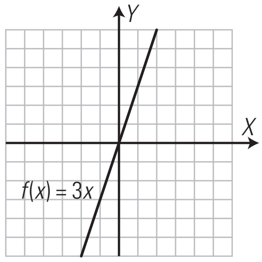
$(\nearrow) = (-\infty, 3)$

$(\searrow) = (3, +\infty)$



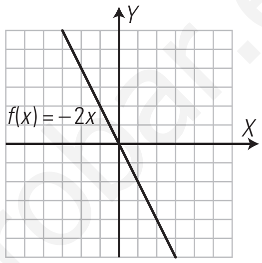
44. Calcula el crecimiento de la función $y = 3x$. Dibuja la función.

$y' = 3 > 0$, es siempre creciente.



45. Halla el crecimiento de la función $y = -2x$. Dibuja la función.

$y' = -2 < 0$, es siempre decreciente.



46. Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^3 - 3x$

$y' = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 = 1$, $x = 1$, $x = -1$

$x = 1$, $y = -2$, $A(1, -2)$

$x = -1$, $y = 2$, $B(-1, 2)$

$y'' = 6x$

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow A(1, -2)$ Mínimo relativo.

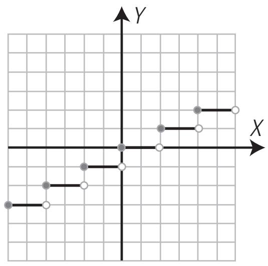
$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow B(-1, 2)$ Máximo relativo.

Ejercicios y problemas propuestos

1. FUNCIONES ESPECIALES

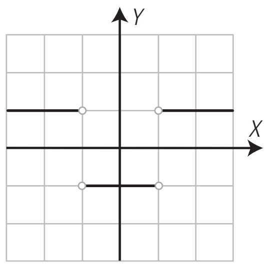
47. Representa la siguiente función:

$$y = \text{Ent}\left(\frac{x}{2}\right)$$



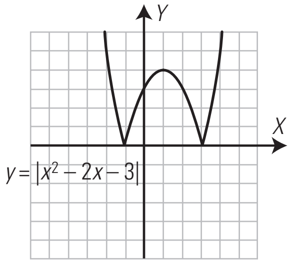
48. Representa la siguiente función:

$$y = \text{Signo}(x^2 - 1)$$

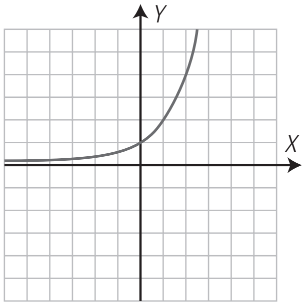


49. Representa la siguiente función:

$$y = |x^2 - 2x - 3|$$

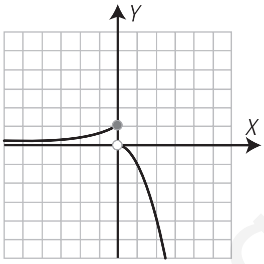


50. Representa la siguiente función: $y = |2^x|$



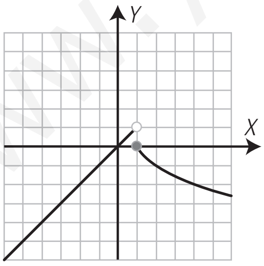
51. Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



52. Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ \log_{1/2} x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$



2. LÍMITES

53. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x - 3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 5x - 3)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x - 3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 5x - 3) = +\infty$

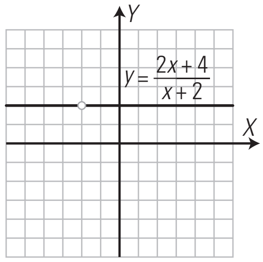
54. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x + 4}{x + 2}$$

Representa la función correspondiente.

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x + 4}{x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x + 2)}}{\cancel{x + 2}} = \lim_{x \to 2} 2 = 2$$

Gráfica:



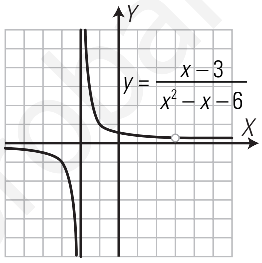
55. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - x - 6}$$

Representa la función correspondiente.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x - 3}}{(x + 2)\cancel{(x - 3)}} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{5}$$

Gráfica:



56. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 7}{x^2 + 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x + 7}{x^2 + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 7}{x^2 + 1} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x + 7}{x^2 + 1} = 0$

57. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 1}{-x^4 + 2x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^4 - 1}{-x^4 + 2x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 1}{-x^4 + 2x} = -5$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^4 - 1}{-x^4 + 2x} = -5$

58. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^2 - 5}{n^4 + 2n}$ **b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3 + n}{n^3 - 2}$

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^2 - 5}{n^4 + 2n} = 0$ b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3 + n}{n^3 - 2} = -1$

59. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^5 + x^2}{x^2 - x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^5 + x^2}{x^2 - x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^5 + x^2}{x^2 - x} = -\infty$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^5 + x^2}{x^2 - x} = +\infty$

3. LA DERIVADA

Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

60. $f(x) = 2x - 4$ en $[1, 3]$

$$\text{TVM}[1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

61. $f(x) = x^2 + 4x$ en $[0, 2]$

$$\text{TVM}[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 0}{2} = 6$$

62. $f(x)=\dfrac{6}{x}$ **en [2, 3]**

$$\text{TVM}[2,3]=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{2-3}{1}=-1$$

63. $f(x)=\sqrt{x+5}$ **en [–1, 4]**

$$\text{TVM}[-1,4]=\frac{f(4)-f(-1)}{4+1}=\frac{3-2}{5}=\frac{1}{5}$$

Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

64. $f(x)=3x+1$ **en** $x=2$

$f'(2)=3$

65. $f(x)=-2x+3$ **en** $x=1$

$f'(1)=-2$

66. $f(x)=x^2$ **en** $x=-3$

$f'(-3)=-6$

67. $f(x)=-x^2+5$ **en** $x=1$

$f'(1)=-2$

Calcula la función derivada aplicando la tabla de derivadas:

68. $y=9$

$y'=0$

69. $y=-x^3$

$y'=-3x^2$

70. $y=x^7$

$y'=7x^6$

71. $y=x^7-x^3+x+9$

$y'=7x^6-3x^2+1$

72. $y=3x^2-4x+1$

$y'=6x-4$

73. $y=x^3-5x^2+3x-8$

$y'=3x^2-10x+3$

74. $y=(2x-3)^5$

$y'=10(2x-3)^4$

75. $y=e^{-2x+3}$

$y'=-2e^{-2x+3}$

76. $y=\ln(5x+2)$

$y'=\dfrac{5}{5x+2}$

77. $y=\ln(x^2-3x+1)$

$y'=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+1}$

78. $y=9x$

$y'=9$

79. $y=(x+1)\,e^x$

$y'=(x+2)e^x$

80. $y=x\ln(x-5)$

$y'=\ln(x-5)+\dfrac{x}{x-5}$

81. $y=e^{3x}\ln x$

$y'=3e^{3x}\ln x+\dfrac{e^{3x}}{x}$

82. $y=\dfrac{e^{2x}}{x}$

$y'=\dfrac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}$

83. $y=\dfrac{x}{x-1}$

$y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$

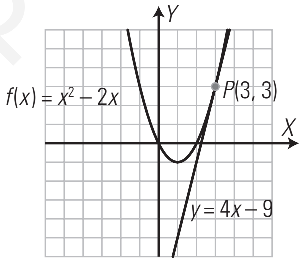
84. $y=\dfrac{3x+5}{2x-1}$

$y'=\dfrac{-13}{(2x-1)^2}$

4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

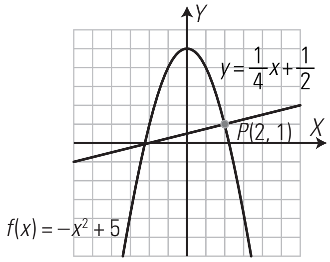
85. Halla la recta tangente a la curva $y=x^2-2x$ **para** $x=3$**. Dibuja la función y la recta tangente.**

Recta tangente: $y=4x-9$



86. Calcula la recta normal a la curva $y=-x^2+5$ **para** $x=2$**. Dibuja la función y la recta normal.**

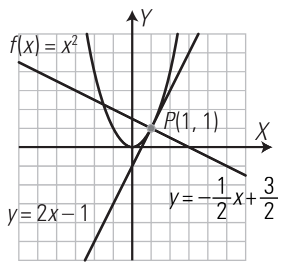
Recta normal: $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$



87. Halla las rectas tangente y normal a la curva $y=x^2$ **para** $x=1$**. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.**

Recta tangente: $y=2x-1$

Recta normal: $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$



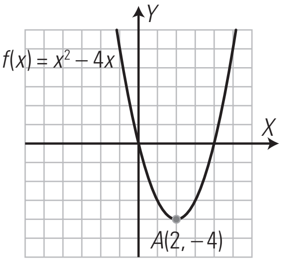
88. Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2 - 4x$. Dibuja la función.

$y' = 2x - 4$

$2x - 4 = 0$, $x = 2$, $y = -4$, $A(2, -4)$

$y'' = 2$

$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow A(2, -4)$ mínimo relativo.



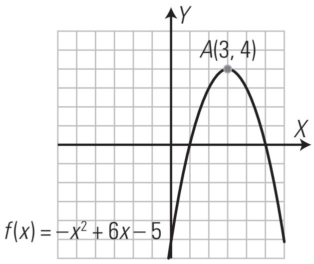
89. Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2 + 6x - 5$. Dibuja la función.

$y' = -2x + 6$

$-2x + 6 = 0$, $x = 3$, $y = 4$, $A(3, 4)$

$y'' = -2$

$f''(3) = -2 < 0 \Rightarrow P(3, 4)$ Máximo relativo.



90. Calcula el crecimiento de la función siguiente: $y = x^2 - 6x + 4$. Dibuja la función.

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = 2x - 6$

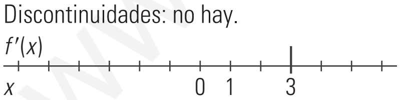
$2x - 6 = 0$, $x = 3$, $y = -5$, $A(3, -5)$

$y'' = 2$

$f''(3) = 2 > 0 \Rightarrow A(3, -5)$ mínimo relativo.

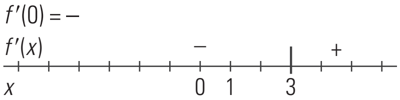
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



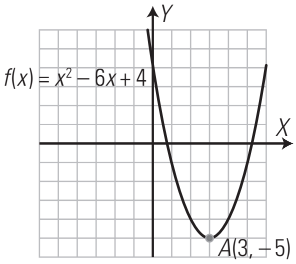
$y' = 2x - 6$

$f'(0) = -$



$(\nearrow) = (3, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, 3)$



91. Halla el crecimiento de la función siguiente: $y = -x^2 + 2x + 3$. Dibuja la función.

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = -2x + 2$

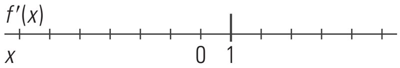
$-2x + 2 = 0$, $x = 1$, $y = 4$, $A(1, 4)$

$y'' = -2$

$f''(1) = -2 < 0 \Rightarrow A(1, 4)$ Máximo relativo.

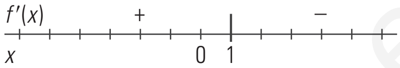
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



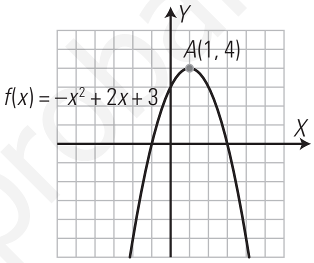
$y' = -2x + 2$

$f'(0) = +$



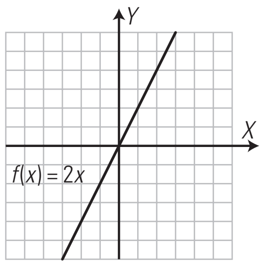
$(\nearrow) = (-\infty, 1)$

$(\searrow) = (1, +\infty)$



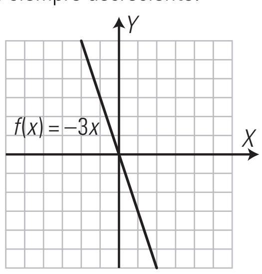
92. Calcula el crecimiento de la función $y = 2x$. Dibuja la función.

$y' = 2 > 0$, es siempre creciente.



93. Halla el crecimiento de la función $y = -3x$. Dibuja la función.

$y' = -3 < 0$, es siempre decreciente.



94. Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^3 + 3x$

$y' = -3x^2 + 3$

$-3x^2 + 3 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 = 1$, $x = 1$, $x = -1$

$x = 1$, $y = 2$, $A(1, 2)$

$x = -1$, $y = -2$, $B(-1, -2)$

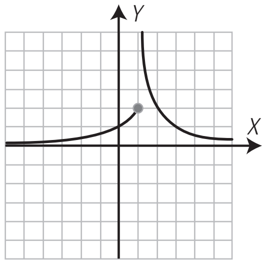
$y'' = -6x$

$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow A(1, 2)$ Máximo relativo.

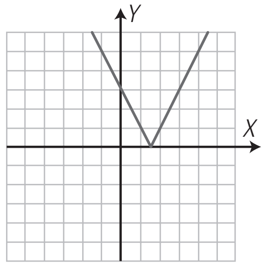
$f''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow B(-1, -2)$ mínimo relativo.

PARA AMPLIAR

95. Representa la siguiente función: $y=\begin{cases} 2^x & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{2}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$



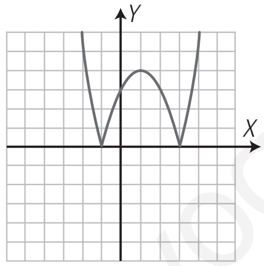
96. Halla la ecuación de una función cuyo valor absoluto tenga como representación la siguiente gráfica:



¿Puede haber más de una ecuación?

$y=|2x-3|$ o bien $y=|-2x+3|$

97. Halla la ecuación de una función cuyo valor absoluto tenga como representación la siguiente gráfica:



¿Puede haber más de una ecuación?

$y=|x^2-2x-3|$ o bien $y=|-x^2+2x+3|$

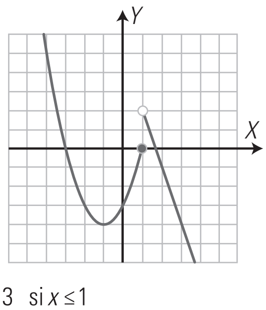
98. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+2}=\frac{-2}{1}=-2$$

99. Halla la ecuación de una función definida a trozos cuya representación sea la siguiente gráfica:



$$y=\begin{cases} x^2+2x-3 & \text{si } x\le 1 \\ -3x+5 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

100. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-5x^2-x+7)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3+x^2-10x+6}{x^3+2x^2-3}$

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-5x^2-x+7)=2$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3+x^2-10x+6}{x^3+2x^2-3}=-2$

101. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^3+5x+3)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^4+2x^2-5x)$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^3+5x+3)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^4+2x^2-5x)=-\infty$

102. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-3x^2+2x}{5x^2-x}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x^2+2x}{5x^2-x}$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-3x^2+2x}{5x^2-x}=-\dfrac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x^2+2x}{5x^2-x}=-\dfrac{3}{5}$

103. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{2n^3+1}{5n^2-7n}$ **b)** $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{n^2+5n}{n^2-3n}$

a) $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{2n^3+1}{5n^2-7n}=+\infty$ b) $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{n^2+5n}{n^2-3n}=1$

104. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-6x^3+9}{2x^3-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-6x^3+9}{2x^3-3}$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-6x^3+9}{2x^3-3}=-3$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-6x^3+9}{2x^3-3}=-3$

105. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-3x-1}{7x^3+x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x-1}{7x^3+x}$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-3x-1}{7x^3+x}=0$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x-1}{7x^3+x}=0$

106. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{x\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x}=0$$

107. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2}{x^3+2x^2-3x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2}{x^3+2x^2-3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\cancel{2}}\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+3}=\frac{1}{4}$$

108. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{(x+1)\cancel{(x+2)}} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x+1} = 0$$

109. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 7} \frac{2(x-7)}{x^2-2x-35}$$

$$\lim_{x\to 7} \frac{2(x-7)}{x^2-2x-35} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 7} \frac{2\cancel{(x-7)}}{(x+5)\cancel{(x-7)}} =$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{2}{x+5} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indican:

110. $f(x) = 2x - 1$ **en** $[-2, 1]$

$$\text{TVM}[-2, 1] = \frac{f(1)-f(-2)}{1+2} = \frac{1+5}{3} = 2$$

111. $f(x) = x^2$ **en** $[-1, 1]$

$$\text{TVM}[-1, 1] = \frac{f(1)-f(-1)}{1+1} = \frac{1-1}{2} = 0$$

Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

112. $f(x) = 4x - 1$ **en** $x = 2$

$f'(2) = 4$

113. $f(x) = -x^2 + 5$ **en** $x = 3$

$f'(3) = -6$

Calcula la función derivada aplicando la tabla de derivadas:

114. $y = 4x^4 - 5x^2 - 6x + 2$

$y' = 16x^3 - 10x - 6$

115. $y = (5x + 1)^4$

$y' = 20(5x + 1)^3$

116. $y = e^{5x-2}$

$y' = 5e^{5x-2}$

117. $y = \ln(x^2 + 5x)$

$$y' = \frac{2x+5}{x^2+5x}$$

118. $y = -x$

$y' = -1$

119. $y = (x - 1)\, e^x$

$y' = x\, e^x$

120. $y = (2x + 1) \ln x$

$$y' = 2 \ln x + \frac{2x+1}{x}$$

121. $y = \dfrac{2x+3}{4x-5}$

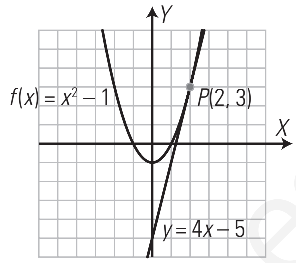
$$y' = \frac{-22}{(4x-5)^2}$$

122. $y = \dfrac{-2x+1}{3x+4}$

$$y' = \frac{-11}{(3x+4)^2}$$

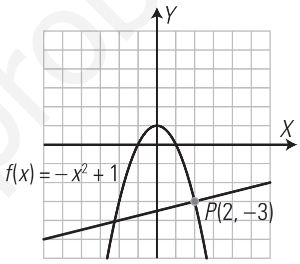
123. Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 - 1$ **para** $x = 2$**. Dibuja la función y la recta tangente.**

Recta tangente: $y = 4x - 5$



124. Halla la recta normal a la curva $y = -x^2 + 1$ **para** $x = 2$**. Dibuja la función y la recta normal.**

Recta normal: $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{2}$



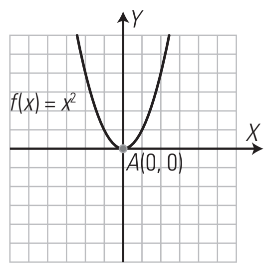
125. Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2$**. Dibuja la función.**

$y' = 2x$

$2x = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ A(0, 0)$

$y'' = 2$

$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow A(0, 0)$ mínimo relativo.



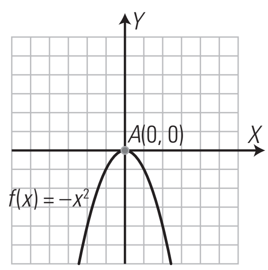
126. Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2$**. Dibuja la función.**

$y' = -2x$

$-2x = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ A(0, 0)$

$y'' = -2$

$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow A(0, 0)$ Máximo relativo.



127. Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función $y = e^x$

Máximos y mínimos relativos:

$y' = e^x$

$e^x \neq 0$ siempre, no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Crecimiento:

$y' = e^x > 0$ siempre, es creciente siempre.

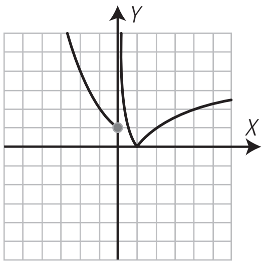
$(\nearrow) = (-\infty, +\infty)$

$(\searrow) = \varnothing$

PROBLEMAS

128. Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & \text{si } x \leq 0 \\ |\log_{1/2} x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

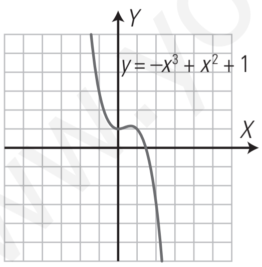


129. Calcula el valor de k para que se verifique:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{kx^3 + x}{2x^3 - 4x} = 5$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{kx^3 + x}{2x^3 - 4x} = 5 \Rightarrow \frac{k}{2} = 5 \Rightarrow k = 10$$

130. Observando la siguiente gráfica:



calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + x^2 + 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + x^2 + 1) = +\infty$$

131. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 - 2)}{\cancel{(x-1)}(x^3 + x^2 + x - 3)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

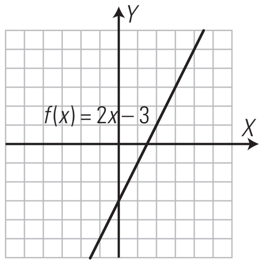
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

132. Dibuja la siguiente función afín: $y = 2x - 3$

a) Halla mentalmente la pendiente.

b) Halla la pendiente derivando.

c) La función ¿es creciente o decreciente?



a) $m = 2$

b) $y' = 2$

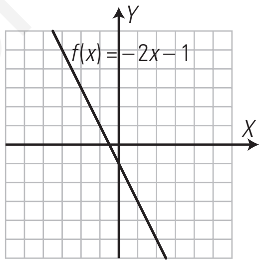
c) Como $m = y' = 2 > 0$ siempre, la función siempre es creciente.

133. Dibuja la siguiente función afín: $y = -2x + 1$

a) Halla mentalmente la pendiente.

b) Halla la pendiente derivando.

c) La función ¿es creciente o decreciente?



a) $m = -2$

b) $y' = -2$

c) Como $m = y' = -2 < 0$ siempre, la función siempre es decreciente.

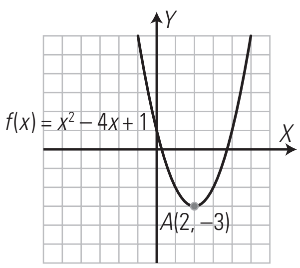
134. Dibuja la siguiente parábola: $y = x^2 - 4x + 1$

a) Viendo la gráfica, halla el máximo o mínimo relativo.

b) Viendo la gráfica, halla el crecimiento.

c) Halla el máximo o mínimo relativo derivando.

d) Halla el crecimiento derivando.



a) $A(2, -3)$ es un mínimo relativo.

b) $(\nearrow) = (2, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, 2)$

c) $y' = 2x - 4$

$2x - 4$, $x = 2$, $y = -3$, $A(2, -3)$

$y'' = 2$

$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow A(2, -3)$ mínimo relativo.

d) Discontinuidades: no hay.

$f'(x)$ — x: 0 1 2

$y' = 2x - 4$

$f'(0) = -$

$f'(x)$: $-$ | $+$ — x: 0 1 2

$(\nearrow) = (2, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, 2)$

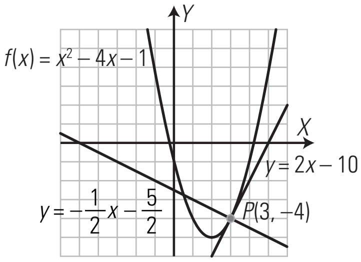
135. Halla las rectas tangente y normal a la curva:

$$\boldsymbol{y = x^2 - 4x - 1 \text{ para } x = 3}$$

Dibuja la función, así como las rectas tangente y normal.

Recta tangente: $y = 2x - 10$

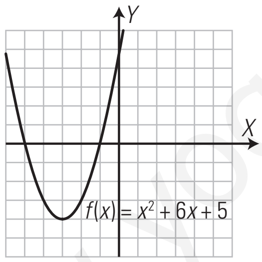
Recta normal: $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$



136. Halla el crecimiento de la función:

$$\boldsymbol{y = x^2 + 6x + 5}$$

Dibuja la función.



Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = 2x + 6$

$2x + 6 = 0$, $x = -3$, $y = -4$, $A(-3, -4)$

$y'' = 2$

$f''(-3) = 2 > 0 \Rightarrow A(-3, -4)$ mínimo relativo.

Discontinuidades: no hay.

$f'(x)$ — x: -3 0 1

$y' = 2x + 6$

$f'(0) = +$

$f'(x)$: $-$ | $+$ — x: -3 0 1

$(\nearrow) = (-3, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, -3)$

137. Halla el crecimiento de la función:

$$\boldsymbol{y = \frac{6}{x}}$$

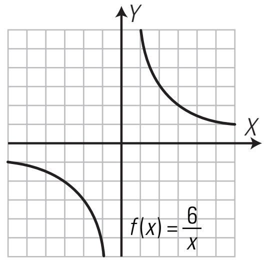
Dibuja la función.

$y' = \dfrac{6}{x^2} < 0$, es siempre negativa, decreciente.

Discontinuidades: $x = 0$

$(\nearrow) = \varnothing$

$(\searrow) = (-\infty, +\infty)$



138. Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función: $\boldsymbol{y = x^2 - 6x + 4}$

$y' = 2x - 6$

$2x - 6 = 0$, $x = 3$, $y = -5$, $A(3, -5)$

$y'' = 2$

$f''(3) = 2 > 0 \Rightarrow A(3, -5)$ mínimo relativo.

Discontinuidades: no hay.

$f'(x)$ — x: 0 1 3

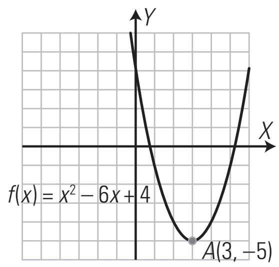
$y' = 2x - 6$

$f'(0) = -$

$f'(x)$: $-$ | $+$ — x: 0 1 3

$(\nearrow) = (3, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, 3)$



139. Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función:

$$\boldsymbol{y = \frac{x^3}{3} - 4x}$$

Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y esboza la gráfica de la función.

Máximos y mínimos relativos:

$y' = x^2 - 4$

$x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 2$, $x = 2$, $x = -2$

$x = 2$, $y = -\dfrac{16}{3}$, $A\left(2, -\dfrac{16}{3}\right)$

$x = -2$, $y = \dfrac{16}{3}$, $B\left(-2, \dfrac{16}{3}\right)$

$y'' = 2x$

$f''(2) = 4 > 0 \Rightarrow A\left(2, -\dfrac{16}{3}\right)$ mínimo relativo.

$f''(-2) = -4 < 0 \Rightarrow B\left(-2, \dfrac{16}{3}\right)$ Máximo relativo.

Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.

$f'(x)$

x −2 0 2

$y' = x^2 - 4$

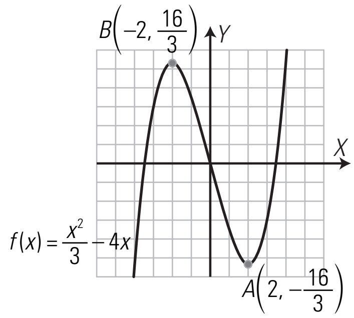
$f'(1) = -$

$f'(x)$ + − +

x −2 0 2

$(\nearrow) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$(\searrow) = (-2, 2)$



140. Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función:

$$y = -\frac{x^3}{3} - 4x$$

Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y esboza la gráfica de la función.

Máximos y mínimos relativos:

$y' = -x^2 + 4$

$-x^2 + 4 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 2$, $x = 2$, $x = -2$

$x = 2$, $y = \frac{16}{3}$, $A\left(2, \frac{16}{3}\right)$

$x = -2$, $y = -\frac{16}{3}$, $B\left(-2, -\frac{16}{3}\right)$

$y'' = -2x$

$f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow A\left(2, \frac{16}{3}\right)$ Máximo relativo.

$f''(-2) = 2 > 0 \Rightarrow B\left(-2, -\frac{16}{3}\right)$ mínimo relativo.

Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.

$f'(x)$

x −2 0 2

$y' = x^2 - 4$

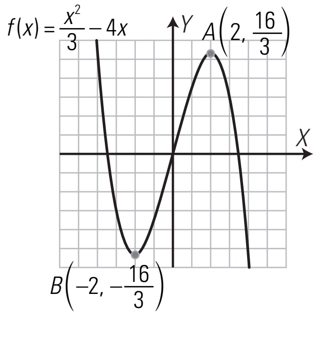
$f'(1) = -$

$f'(x)$ − + −

x −2 0 2

$(\nearrow) = (-2, 2)$

$(\searrow) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

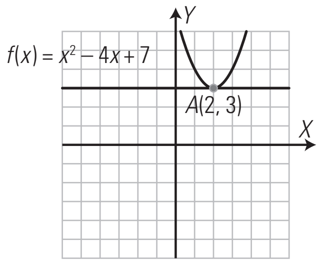


141. Halla la recta tangente a la curva:

$$y = x^2 - 4x + 7$$

para $x = 2$. Dibuja la función y la recta tangente.

Recta tangente: $y = 3$



142. Los beneficios de una empresa en millones de euros vienen dados por la fórmula:

$$y = -x^2 + 18x - 20$$

donde x indica el número de años que lleva funcionando. ¿Qué año alcanza los máximos beneficios?

$y' = -2x + 18$

$-2x + 18 = 0$, $2x - 18 = 0$, $x = 9$, $y = 61$

$y'' = -2$

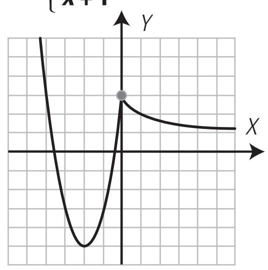
$f''(9) = -2 < 0 \Rightarrow A(9, 61)$ Máximo relativo.

Los máximos beneficios los alcanza en el 9.º año y son 61 millones de euros.

PARA PROFUNDIZAR

143. Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 2x^2 + 8x + 3 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+3}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



144. Halla el crecimiento de la función $y = x^3 - 3x$. Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y esboza la gráfica de la función.

Primero hay que hallar los máximos y mínimos relativos.

$y' = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 = 1$, $x = 1$, $x = -1$

$x = 1$, $y = -2$, $A(1, -2)$

$x = -1$, $y = 2$, $B(-1, 2)$

$y'' = 6x$

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow A(1, -2)$ Máximo relativo.

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow B(-1, 2)$ mínimo relativo.

Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.

$f'(x)$

x −1 0 1

$y' = 3x^2 - 3$

$f'(0) = -$

$f'(x)$ + – +

x –1 0 1

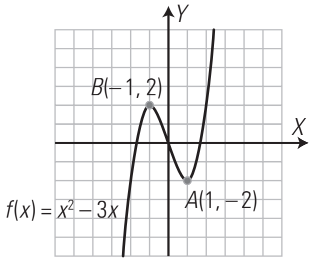
$(\nearrow) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$(\searrow) = (-1, 1)$

Límites:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 3x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 3x = -\infty$



145. Halla el crecimiento de la función $y = \dfrac{2}{x^2}$.

Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y esboza la gráfica de la función.

$y' = -\dfrac{4}{x^3}$

Discontinuidades de la derivada: $x = 0$ de orden 3, que es impar, luego cambia de crecimiento.

$f'(x)$

x 0 1

$f'(1) = -4$

$f'(x)$ + –

x 0 1

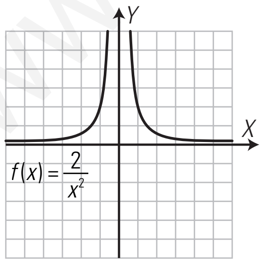
$(\nearrow) = (-\infty, 0)$

$(\searrow) = (0, +\infty)$

Límites:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$



146. Las pérdidas de una empresa en millones de euros vienen dadas por la fórmula:

$$y = -x^2 + 8x$$

donde x indica el número de años que lleva funcionando. ¿Qué año alcanza las máximas pérdidas?

$y' = -2x + 8$

$-2x + 8 = 0$, $x - 4 = 0$, $x = 4$, $y = 16$

$y'' = -2$

$f''(4) = -2 < 0 \Rightarrow A(4, 16)$ Máximo relativo.

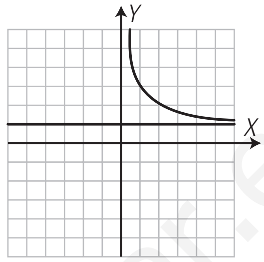
Las máximas pérdidas las alcanza en el 4.º año y son 16 millones de euros.

147. Una determinada especie evoluciona según la función:

$$f(x) = \frac{2}{x}, \ x > 0$$

donde x es el número de años y $f(x)$ son los millones de unidades existentes.

Representa la gráfica y, observándola, contesta a la siguiente pregunta: ¿la especie está en vías de extinción?



$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{x} + 1\right) = 1$

La población tiende a un millón, por tanto no está en vías de extinción.

APLICA TUS COMPETENCIAS

148. El espacio que recorre un móvil es $e(t) = 3t^2 + 2t + 5$, donde t se expresa en segundos, y $e(t)$, en metros. Calcula la velocidad que lleva en el instante $t = 4$ s

$v(t) = e'(t) = 6t + 2$

$v(4) = 6 \cdot 4 + 2 = 24 + 2 = 26$ m/s

149. El espacio que recorre un móvil es $e(t) = 5t^2 - 3t + 1$, donde t se expresa en segundos, y $e(t)$, en metros. Calcula la aceleración que lleva en el instante $t = 2$ s

$v(t) = e'(t) = 10t - 3$

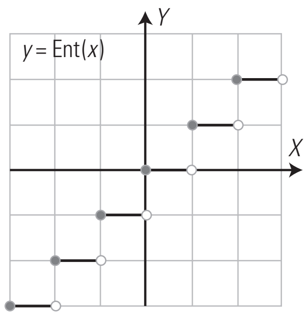
$a(t) = v'(t) = 10$

$a(2) = 10$ m/s^2

COMPRUEBA LO QUE SABES

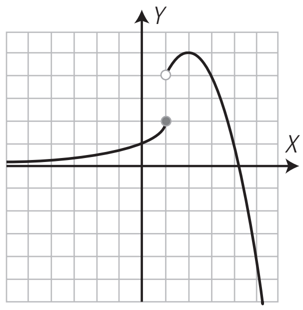
1. Define función parte entera y represéntala.

La función parte entera de x asigna a cada x su parte entera. Se representa por $y = \text{Ent}(x)$



2. Representa la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2^2 & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + 4x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

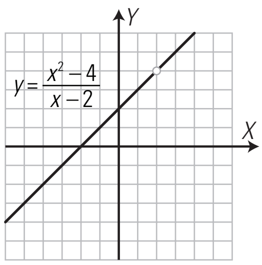


3. Calcula los siguientes límites y representa la función correspondiente:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 4x}$

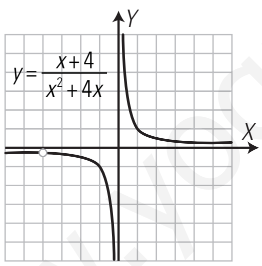
a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4$

Gráfica:



b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x+4}{x^2+4x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x+4}{x(x+4)} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{4}$

Gráfica:



4. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 4}{-x^2 + 7x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 4}{-x^2 + 7x}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-5n^2 + 3n}{n^3 + 1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x^2 + 3x}{x^3 + 1}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 + 6x}{x^2 - 7}$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3 + 6x}{x^2 - 7}$

a) -2 b) -2

c) 0 d) 0

e) $-\infty$ f) $+\infty$

5. Calcula las derivadas siguientes:

a) $y = (3x - 5)^4$

b) $y = e^{5x+1}$

c) $y = \ln(7x - 2)$

d) $y = x^2 e^x$

e) $y = \dfrac{x}{x+1}$

a) $y' = 12(3x - 5)^3$

b) $y' = 5e^{5x+1}$

c) $y' = \dfrac{7}{7x - 2}$

d) $y' = 2x\,e^x + x^2 e^x = xe^x(2 + x)$

e) $y' = \dfrac{x + 1 - x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

6. Estudia el crecimiento de la función $y = x^2 - 2x - 3$

Primero hay que hallar lo máximos y mínimos relativos:

$y = x^2 - 2x - 3$

$y' = 2x - 2$

$y' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f'(x)$

x 0 1

Si $x = 1 \Rightarrow y = -4$

$A(1, -4)$

$y'' = 2$

$y''(1) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow A(1, -4)$ es un mínimo relativo

Crecimiento:

$f'(x)$ – +

x 0 1

Creciente: $(\nearrow) = (1, +\infty)$

Decreciente: $(\searrow) = (-\infty, 1)$

7. El número de enfermos de gripe que se contabilizan en una localidad durante una epidemia sigue la función:

$$f(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$$

donde x se expresa en semanas, y $f(x)$, en miles de personas. Calcula el número medio de enfermos de gripe durante la 2.ª y la 4.ª semanas; y entre la 4.ª y la 6.ª semanas. Interpreta los resultados.

$\text{TVM}[2, 4] = \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \dfrac{8 - 6}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

Como TVM[2, 4] = 1 > 0, es creciente; es decir, el número medio de enfermos está subiendo.

$\text{TVM}[4, 6] = \dfrac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \dfrac{6 - 8}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

Como TVM[4, 6] = –1 < 0, es decreciente; es decir, el número medio de enfermos está bajando.

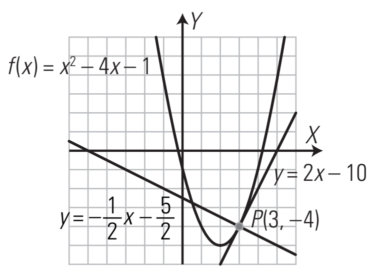
8. Halla las rectas tangente y normal a la curva

$$y = x^2 - 4x - 1 \text{ para } x = 3$$

Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

Recta tangente: $y = 2x - 10$

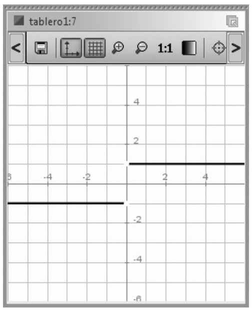
Recta normal: $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$



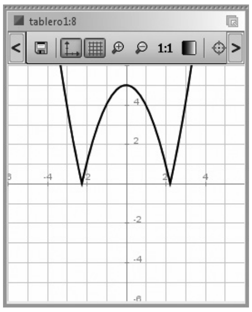
WINDOWS/LINUX WIRIS

PRACTICA

154. Representa la función signo de *x*. Halla cuándo no es continua.

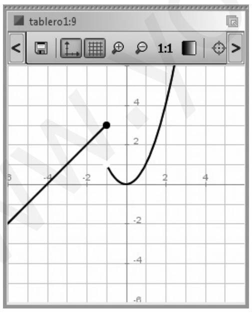


155. Representa la función $y = |x^2 - 5|$



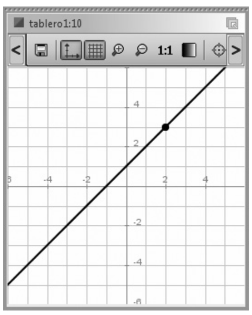
156. Representa la siguiente función y estudia su continuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$



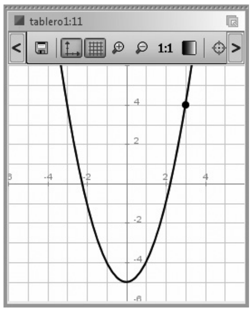
157. Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \to 2} (x + 1)$$



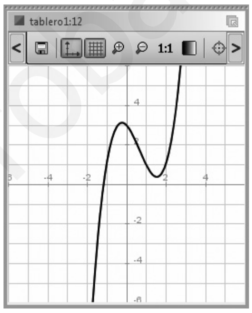
158. Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 5)$$



159. Halla los siguientes límites y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 - x + 3) \qquad \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 - x + 3)$$



Calcula las siguientes derivadas

160. $y = 5x^2 - 7x + 3$

Ejercicio 160

$f(x) = 5x^2 - 7x + 3 \Rightarrow x \mapsto 5 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 3$

$f'(x) \Rightarrow 10 \cdot x - 7$

161. $y = e^{3x-5}$

Ejercicio 161

$f(x) = e^{3x-5} \Rightarrow x \mapsto e^{3 \cdot x - 5}$

$f'(x) \Rightarrow 3 \cdot e^{3 \cdot x - 5}$

162. $y = \ln(x^2 + 5x - 6)$

Ejercicio 162

$f(x) = \ln(x^2 + 5x - 6) \Rightarrow x \mapsto \ln(x^2 + 5 \cdot x - 6)$

$f'(x) \Rightarrow \dfrac{2 \cdot x + 5}{x^2 + 5 \cdot x - 6}$

163. $y = x\,e^x$

Ejercicio 163

$f(x) = x \cdot e^x \Rightarrow x \mapsto x \cdot e^x$

$f'(x) \Rightarrow (x+1) \cdot e^x$

164. $y = x \ln x$

Ejercicio 164

$f(x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow x \mapsto x \cdot \ln(x)$

$f'(x) \Rightarrow \ln(x) + 1$

165. $y = e^x \ln x$

Ejercicio 165

$f(x) = e^x \cdot \ln(x) \rightarrow x \mapsto e^x \cdot \ln(x)$

$f'(x) \rightarrow e^x \cdot \ln(x) + \dfrac{e^x}{x}$

166. $y = \dfrac{e^x}{x}$

Ejercicio 166

$f(x) = \dfrac{e^x}{x} \rightarrow x \mapsto \dfrac{1}{x} \cdot e^x$

$f'(x) \rightarrow \dfrac{(x-1) \cdot e^x}{x^2}$

167. $y = \dfrac{5x-1}{3x+2}$

Ejercicio 167

$f(x) = x^2 - 5 \rightarrow x \mapsto x^2 - 5$

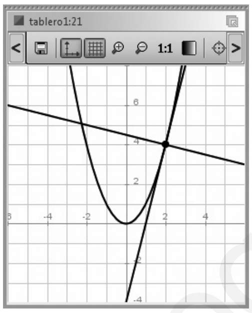
$a = 3 \rightarrow 3$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \rightarrow 4$

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})

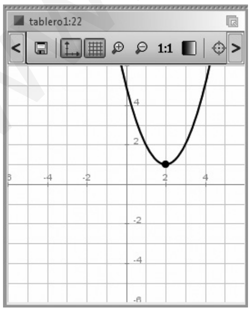
Se observa que cuando $x \to 3$, $y \to 4$

168. Halla las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ para $x = 2$. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

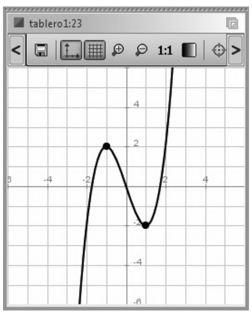


Halla los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones. Dibuja cada función y determina su crecimiento.

169. $y = x^2 - 4x + 5$

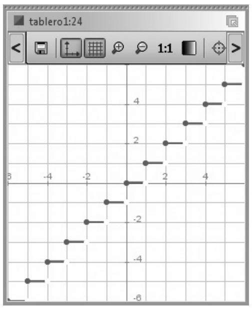


170. $y = x^3 - 3x$



Halla mediante *ensayo-acierto* la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

171.



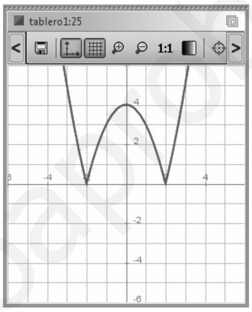
Ejercicio 171

dibujar(suelo(x), {color=rojo, anchura_línea=2})

Es la función parte entera.

y = Ent(x)

172.



Ejercicio 172

dibujar($|x^2 - 4|$, {color=rojo, anchura_línea=2})

173. Las pérdidas de una empresa en millones de euros vienen dadas por la fórmula: $y = -x^2 + 8x$, donde x indica el número de años que lleva funcionando. ¿Qué año alcanza las máximas perdidas?

Ejercicio 173

$f(x) = -x^2 + 8x \rightarrow x \mapsto -x^2 + 8 \cdot x$

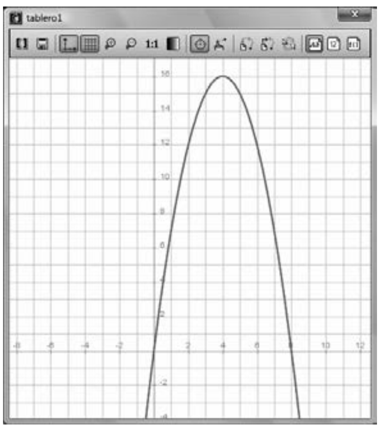
resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=4}}

$f(4) \rightarrow 16$

A(4, 16) máximo relativo.

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})

Las máximas pérdidas se alcanzan el 4º año y son de 16 millones de euros



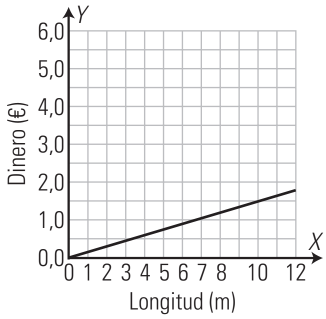
Evaluación de diagnóstico

BLOQUE IV: FUNCIONES

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Un almacenista vende 20 m de cable a 3 €. Escribe la ecuación que expresa el dinero que se paga en función del número de metros que se compran. Represéntala.

$y = \frac{3}{20}x$



2. Dadas las siguientes funciones, clasifícalas en lineales o afines y halla su pendiente, la ordenada en el origen si es afín e indica si es creciente o decreciente. Represéntalas.

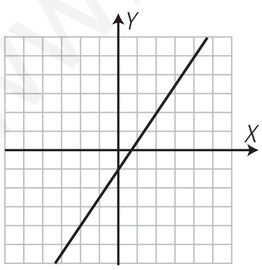
a) $y = \frac{3}{2}x - 1$

b) $y = -\frac{3}{4}x$

a) Función afín.

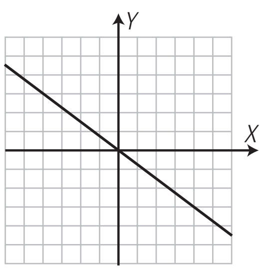
Ordenada en el origen: $b = -1$

$m = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow$ Creciente.

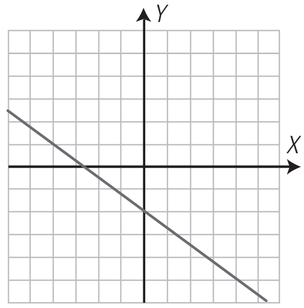


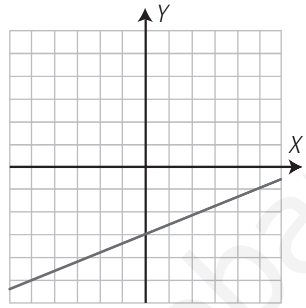
b) Función lineal.

$m = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow$ Decreciente.



3. Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:





a) $y = -\frac{3}{4}x - 2$ b) $y = \frac{2}{5}x - 3$

4. Dibuja la gráfica de la función:

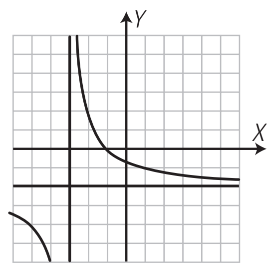
$$f(x) = \frac{-2x - 2}{x + 3}$$

Halla:

a) su dominio;

b) las ecuaciones de las asíntotas;

c) las discontinuidades.



a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

b) Asíntota vertical: $x = -3$

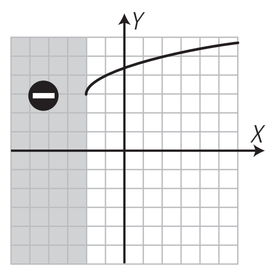
Asíntota horizontal: $y = -2$

c) Es discontinua en $x = -3$

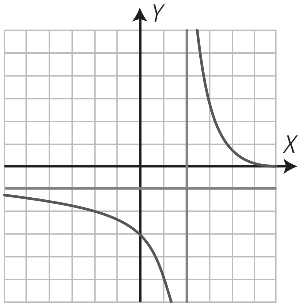
5. Clasifica la función $f(x) = 3 + \sqrt{x + 2}$, halla su dominio y represéntala.

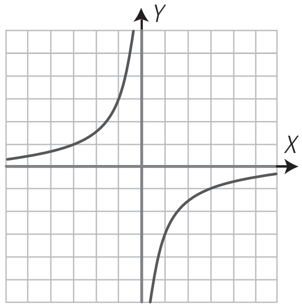
Función irracional.

$\text{Dom}(f) = (-2, +\infty)$



6. Halla las ecuaciones de las siguientes gráficas:



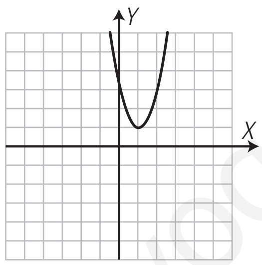


a) $y = \dfrac{4}{x-2} - 1 = \dfrac{-x+6}{x-2}$ b) $y = -\dfrac{3}{x}$

7. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, indicando si este es un máximo o un mínimo de la parábola $y = 2x^2 - 4x + 3$. Represéntala.

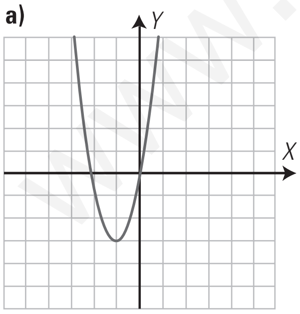
Eje: $x = 1$

Vértice: $V(1, 1)$, es un mínimo.

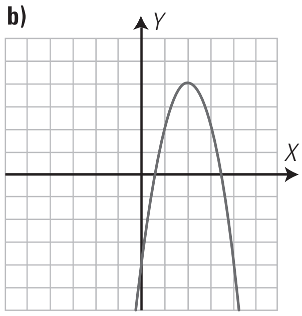


8. Halla las ecuaciones de las siguientes parábolas:

a)

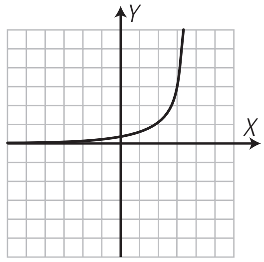


b)

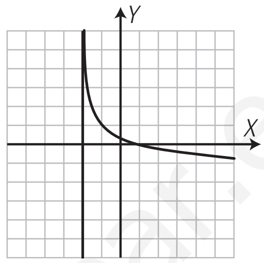


a) $y = 3x^2 + 6x$ b) $y = -2x^2 + 8x - 4$

9. Representa $f(x) = 3^{x-2}$

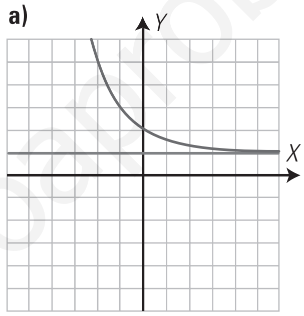


10. Representa: $f(x) = 1 + \log_{1/3}(x+2)$

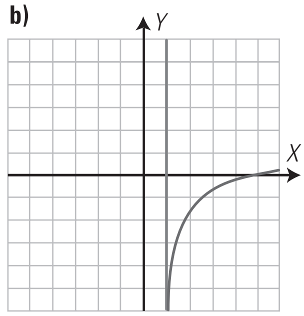


11. Halla las ecuaciones de las siguientes gráficas:

a)



b)



a) $y = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

b) $y = -2 + \log_2(x-1)$

12. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - x - 2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-5x+1}{x^2 - 10}$

a) $\dfrac{5}{3}$ b) 0

13. Calcula las derivadas siguientes:

a) $y = x^3 - 4x^2 + 7x - 1$ **b)** $y = \ln(3x^2 - x + 1)$

c) $y = (x+5)\,e^{x+3}$ **d)** $y = \dfrac{2x-1}{3x+7}$

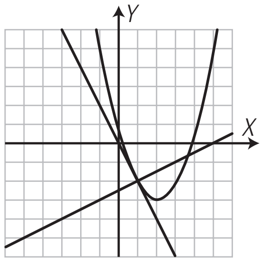
a) $y' = 3x^2 - 8x + 7$ b) $y' = \dfrac{6x-1}{3x^2 - x + 1}$

c) $y' = (x+6)\,e^{x+3}$ d) $y' = \dfrac{17}{(3x+7)^2}$

14. Halla la recta tangente y la recta normal a la curva $y = x^2 - 4x + 1$ para $x = 1$. Dibuja la función, la recta tangente y la recta normal.

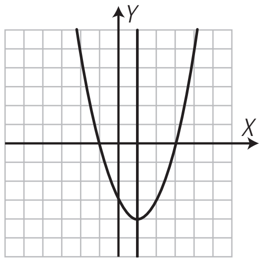
Recta tangente: $y = -2x$

Recta normal: $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$



15. Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2 - 2x - 3$. Dibuja la función.

$A(1, -4)$, mínimo relativo.



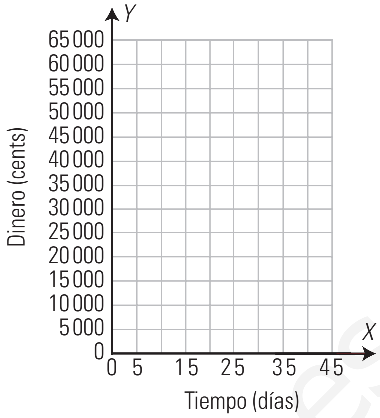
16. Problema de aplicación.

En un almacén se tienen 2 000 kg de alimento perecedero que se pueden vender a 20 céntimos el kilogramo, pero si se venden más tarde, el precio aumenta en 2 céntimos el kilogramo cada día. También se sabe que cada día que pasa se pierden 50 kg de dichos alimentos. Calcula cuándo interesa vender estos alimentos para tener los máximos ingresos.

a) Copia en tu cuaderno, completa la siguiente tabla y escribe una función $f(x)$ que exprese el ingreso por la venta de alimento en función del número de días, x, que se espera para venderlo.

Masa inicial (kg)	Precio inicial (cents)	Días que se espera	Nueva masa (kg)	Nuevo precio (cents)	Total (cents)
2 000	20	0	0	0	40 000
		1	1 950	22	42 900
		2			
		…	…	…	…
		5			
		10			
		15			
		20			
		30			
		40			
		…	…	…	…
		x			

b) Copia en tu cuaderno los siguientes ejes y representa dicha función:

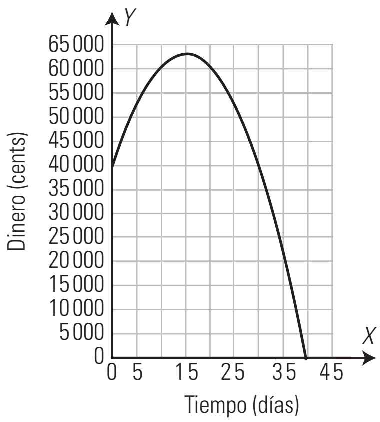


c) Justifica que el resultado corresponde a un máximo utilizando la derivada de la función.

a)

Masa inicial (kg)	Precio inicial (cents)	Días que se espera	Nueva masa (kg)	Nuevo precio (cents)	Total (cents)
2 000	20	0	0	0	40 000
		1	1 950	22	42 900
		2	1 900	24	45 600
		…	…	…	…
		5	1 750	30	52 500
		10	1 500	40	60 000
		15	1 250	50	62 500
		20	1 000	60	60 000
		30	500	80	40 000
		40	0	100	0
		…	…	…	…
		x	$2\,000 - 50x$	$20 + 2x$	$(2\,000 - 50x)(20 + 2x)$

b)



El ingreso total máximo se alcanza en el 15.º día y se obtienen 62 500 cents = 625 €

c) $y = -100x^2 + 3\,000x + 40\,000 \Rightarrow y' = -200x + 3\,000 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 15$

$x = 15 \Rightarrow y = 62\,500 \Rightarrow A(15, 62\,500)$

$y'' = -200 < 0 \Rightarrow A(15, 62\,500)$ es máximo relativo.

Solucionario bloque V.
Estadística y probabilidad

13. Estadística

1. Caracteres estadísticos

PIENSA Y CALCULA

Un estudio sobre distintos coches recoge datos sobre consumo, cilindrada, potencia, peso, aceleración, cilindros, año, país y color. Indica qué datos son cualitativos, cuáles cuantitativos discretos y cuáles cuantitativos continuos.

Cualitativos: país, color.

Cuantitativos discretos: cilindros, año de fabricación.

Cuantitativos continuos: consumo, cilindrada, potencia, peso, aceleración.

APLICA LA TEORÍA

1. Se ha realizado un estudio sobre el número de personas activas que hay por familia con el mismo número de miembros con posibilidad de trabajar, obteniéndose los siguientes resultados:

2	1	2	2	1	2	4	2	1	1
2	3	2	1	1	1	3	4	2	2
2	2	1	2	1	1	1	3	2	2
3	2	3	1	2	4	2	1	4	1
1	3	4	3	2	2	2	1	3	3

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Haz una tabla de frecuencias.

c) Representa los datos en un diagrama de barras.

d) Dibuja el polígono de frecuencias.

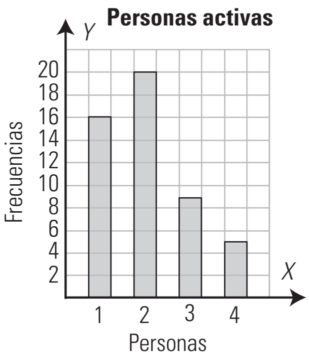
e) Interpreta los resultados.

a) Cuantitativo discreto.

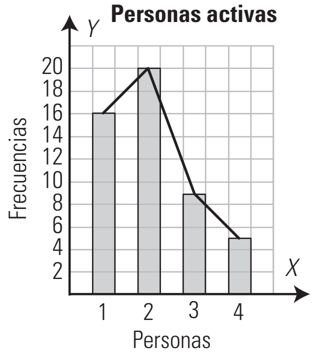
b)

x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
1	16	16	32	0,32	32	0,32
2	20	36	72	0,40	40	0,72
3	9	45	90	0,18	18	0,90
4	5	50	100	0,10	10	1,00
Total	**50**			**1,00**	**100**	

c) Diagrama de barras.



d)



Como las familias tienen el mismo número de miembros, se ve que más de la mitad (36 familias de 50), el 72%, tienen 1 o 2 miembros activos. Es decir, en el 72% de las familias, solo trabajan 1 o 2 miembros de los 4 que pueden trabajar.

2. En 4.º curso de un centro escolar se han estudiado las calificaciones de Lengua, obteniéndose los siguientes resultados:

Insuficiente	**12**
Suficiente	**15**
Bien	**10**
Notable	**8**
Sobresaliente	**8**

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Haz una tabla de frecuencias.

c) Representa los datos en un diagrama de barras.

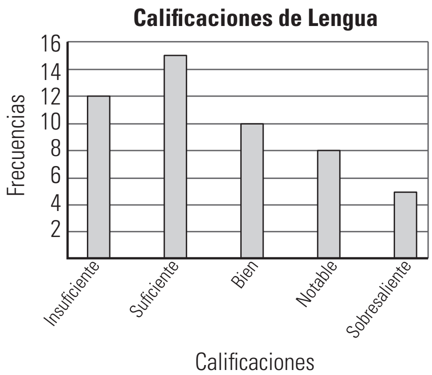
d) Interpreta los resultados.

a) Cualitativo.

b)

x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
Insuficientes	12	12	24	0,24	24	0,24
Suficientes	15	27	54	0,30	30	0,54
Bien	10	37	74	0,20	20	0,74
Notables	8	45	90	0,16	16	0,90
Sobresalientes	5	50	100	0,10	10	1,00
Total	**50**			**1,00**	**100**	

c) Diagrama de barras.



d) Un 24% suspende la asignatura, mientras que un 76% supera la asignatura.

2. CARACTERES CONTINUOS. DATOS AGRUPADOS

PIENSA Y CALCULA

En un test puntuado de 0 a 100, se han obtenido: 60, 65, 50, 89, 45, 40, 78, 92, 75, 23, 80, 60, 70, 75, 45, 78, 60, 80, 90, 98, 45, 62, 58, 50, 60

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Calcula el recorrido.

c) Si los datos se agrupan en 5 intervalos, ¿cuál es la longitud aproximada de cada intervalo?

a) Cuantitativo discreto. b) 98 – 23 = 75 c) 75 : 5 = 15

APLICA LA TEORÍA

3. El peso de 25 personas es el siguiente:

56	76	52	58	74	46	77
68	77	50	66	67	88	60
82	94	66	70	72	65	74
80	70	60	64			

a) Agrupa los datos en intervalos.

b) Haz una tabla de frecuencias.

c) Representa los datos en un histograma.

d) Interpreta los resultados.

a) El recorrido es: 94 – 46 = 48

El número de intervalos: $\sqrt{25} = 5$

Longitud de cada intervalo:

50 : 5 = 10

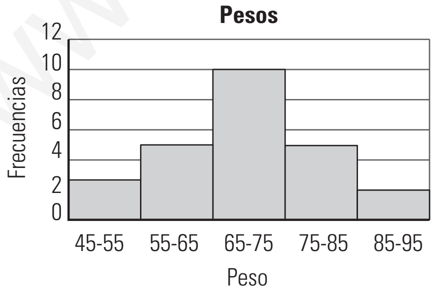
El extremo inferior del 1.er intervalo se toma:

(50 – 48) : 2 = 1 ⇒ 46 – 1 = 45

b) Tabla de frecuencias:

Intervalo	X_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
45-55	50	3	3	12	0,12	12	0,12
55-65	60	5	8	32	0,20	20	0,32
65-75	70	10	18	72	0,40	40	0,72
75-85	80	5	23	92	0,20	20	0,92
85-95	90	2	25	100	0,08	8	1,00
Total		**50**			**1,00**	**100**	

c) Histograma



d) Se observa que un 40% de los datos se encuentra en el intervalo central de 65 a 75 kg, distribuyéndose de una forma muy «normal». Hay pocas personas en los intervalos extremos y más en los centrales.

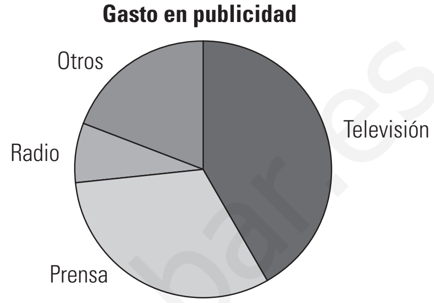
4. Una empresa dedica a la inversión publicitaria en distintos medios las siguientes cantidades:

Medio	Televisión	Prensa	Radio	Otros
Dinero (miles €)	50	38	9	23

Representa los datos en un diagrama de sectores. Interpreta los resultados.

$\frac{360°}{120} = 3°$

Medio	Euros	Amplitud
Televisión	50	3° · 50 = 150°
Prensa	38	3° · 38 = 114°
Radio	9	3° · 9 = 27°
Otros	23	3° · 23 = 69°
Total	120	360°



Más de la mitad del gasto se hace en televisión y en prensa.

5. El número de horas que dedican a ver la televisión una muestra de personas se distribuye así:

Intervalo (*h*)	Frecuencias
0-1	10
1-2	40
2-3	25
3-4	15
4-5	10

a) Haz una tabla de frecuencias.

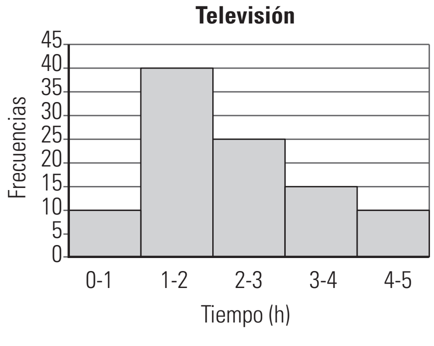
b) Representa los datos en un histograma.

c) Interpreta los resultados.

a) Tabla de frecuencias:

Intervalo	x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
0-1	0,5	10	3	12	0,12	12	0,12
1-2	1,5	40	8	32	0,20	20	0,32
2-3	2,5	25	18	72	0,40	40	0,72
3-4	3,5	5	23	92	0,20	20	0,92
4-5	4,5	2	25	100	0,08	8	1,00
Total		**50**			**1,00**	**100**	

b)



c) Un 50% ve entre 0 y 2 horas la televisión. El otro 50% lo hace en el intervalo entre 2 y 5 horas. Un 25% de la población ve entre 3 y 5 horas la televisión.

3. PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN

PIENSA Y CALCULA

Carmen ha anotado en los últimos partidos de baloncesto los siguientes puntos: 10, 12, 14, 8, 16. Calcula la media aritmética y explica su significado.

La media de Carmen es 12 puntos.

Esto significa que los puntos se distribuyen alrededor de 12; es decir, ha conseguido el mismo total que si en cada partido hubiese marcado 12 puntos.

APLICA LA TEORÍA

6. Se ha hecho un estudio del número de veces que los alumnos de una clase han ido al cine durante el último mes, obteniéndose los siguientes resultados:

N.º de veces	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	3	2	7	5	4	4	3	2

a) Calcula los parámetros de centralización que sea posible.

b) Interpreta los resultados.

a)

X_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
0	3	3	0
1	2	5	2
2	7	12	14
3	5	17	15
4	4	21	16
5	4	25	20
6	3	28	18
7	2	30	14
Total	**30**		**99**

Como el carácter es cuantitativo continuo, se pueden calcular:

Media: $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = \dfrac{99}{33} = 3{,}3$

Moda: 2

Mediana: 3

b) Los datos se agrupan en torno a 3,3, siendo el más frecuente el 2

7. Se ha realizado un sondeo sobre el dinero que llevan 30 alumnos de un centro, obteniéndose los siguientes resultados:

6	4	3	5,3	2,5	4,2	0,5	9
3,25	12	5,5	3,2	6,2	1,2	9,5	4,1
14,5	2	4	6,5	3,1	1,3	4,2	7
3,8	3	4,5	10	5	2,25		

a) Agrupa los datos en intervalos.

b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

c) Interpreta los resultados.

a)

Dinero (€)	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
0-3	1,5	6	6	9,0
3-6	4,5	15	21	67,5
6-9	7,5	4	25	30,5
9-12	10,5	3	28	31,5
12-15	13,5	2	30	27,0
Total		**30**		**165**

b) Como el carácter es cuantitativo continuo, se pueden calcular:

Media: $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = \dfrac{165}{30} = 5{,}5$

Moda: es el intervalo 3-6

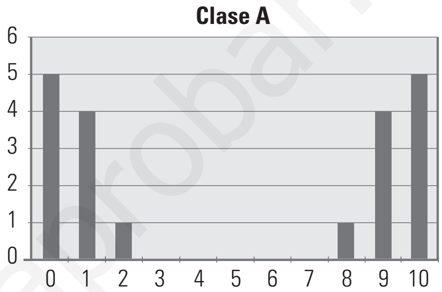
Mediana: es el intervalo 3-6

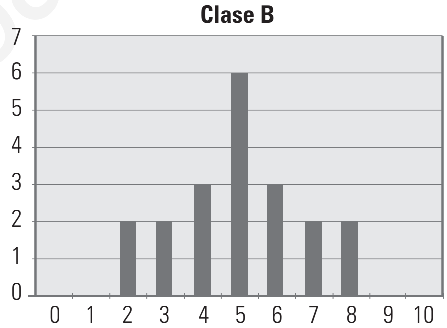
c) Los datos se agrupan en torno a 5,5, que es un valor que se encuentra en el intervalo de la moda y de la mediana.

4. PARÁMETROS DE DISPERSIÓN

PIENSA Y CALCULA

Los gráficos adjuntos representan los datos de las calificaciones que dos clases han tenido en la misma asignatura:





a) Si Rocío desea sacar un diez, ¿a qué clase debería ir?

b) Si lo que quiere es asegurar el aprobado, ¿a qué clase debería ir?

a) Si Rocío desea sacar un diez, debe ir a la clase A, que es en la que algunos alumnos sacan esa nota.

b) Si lo que quiere es asegurar el aprobado, debe ir a la clase B, en la que no hay notas extremas, pero en la que la mayoría de los alumnos aprueban.

APLICA LA TEORÍA

8. El número de personas que ha acudido diariamente a la consulta de un médico en el último mes ha sido:

N.º de pacientes	8	10	12	14	15	20
N.º de días	5	4	6	6	3	1

a) Calcula la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.

b) Analiza los resultados.

a)

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
8	5	40	64	320
10	4	40	100	400
12	6	72	144	864
14	6	84	196	1 176
15	3	45	225	675
20	1	20	400	400
Total	**25**	**301**		**3 835**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = \frac{301}{25} = 12{,}04$$

$$V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 = 8{,}44$$

$\sigma = 2{,}9$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0{,}24 \Rightarrow 24\%$$

b) Los datos se distribuyen alrededor de 12,04, con un 24% de dispersión.

9. Calcula la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación del dinero que gastan mensualmente 28 alumnos de 4.º cuyos datos se han recogido en la siguiente distribución:

Intervalo	**5-9**	**9-13**	**13-17**	**17-21**	**21-25**
Frecuencia	**10**	**9**	**5**	**4**	**3**

Analiza los resultados.

Intervalo	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
5-9	7	10	70	49	490
9-13	11	8	88	121	968
13-17	15	5	75	225	1 125
17-21	19	4	76	361	1 444
21-25	23	3	69	529	1 587
Total		**30**	**378**		**5 614**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = 12{,}6$$

$$V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 = 28{,}37$$

$\sigma = 5{,}33$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0{,}42 \Rightarrow 42\%$$

Los datos se distribuyen alrededor de 12,6 con un 42% de dispersión. Los datos están muy dispersos.

10. Las calificaciones que han obtenido en Matemáticas dos clases distintas han sido:

Clasificación	**Clase A**	**Clase B**
0	**5**	**0**
1	**4**	**0**
2	**1**	**2**
3	**0**	**2**
4	**0**	**3**
5	**0**	**6**
6	**0**	**3**
7	**0**	**2**
8	**1**	**2**
9	**4**	**0**
10	**5**	**0**

Calcula el coeficiente de variación y analiza el resultado.

Clase A

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	5	0	0
1	4	4	4
2	1	2	4
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0
8	1	8	64
9	4	36	324
10	5	50	500
Total	**20**	**100**	**896**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = 5$$

$$V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 = 19{,}8$$

$\sigma = 4{,}45$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0{,}89 \Rightarrow 89\%$$

Clase B

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	0	0	0
1	0	0	0
2	2	4	8
3	2	6	18
4	3	12	48
5	6	30	150
6	3	18	108
7	2	14	98
8	2	16	128
9	0	0	0
10	0	0	0
Total	**20**	**100**	**558**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = 5$$

$$V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 = 2{,}9$$

$\sigma = 1{,}7$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0{,}34 \Rightarrow 34\%$$

Es más homogénea la clase B, que tiene un 34% de dispersión, mientras que la clase A tiene un 89%. Si se quiere aprobar y no sacar muy buena nota, conviene la clase B. Si se desea sacar muy buena nota, hay que arriesgar en la clase A

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. CARACTERES ESTADÍSTICOS

11. Durante los últimos 20 días, el número de alumnos que faltó a clase en 4.º ha sido:

N.º de alumnos	N.º de días
0	5
1	6
2	4
3	2
4	2
5	1

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Haz una tabla de frecuencias.

c) Representa los datos en un diagrama de barras.

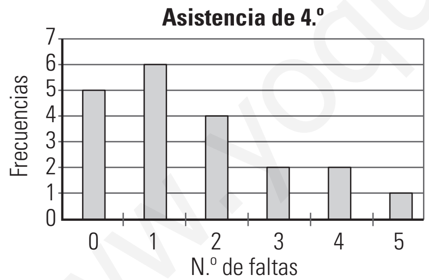
d) Interpreta los resultados.

a) Cuantitativo discreto.

b) Tabla de frecuencias.

x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
0	5	5	25	0,25	25	0,25
1	6	11	55	0,30	30	0,55
2	4	15	75	0,20	20	0,75
3	2	17	85	0,10	10	0,85
4	2	19	95	0,10	10	0,95
5	1	20	100	0,05	5	1,00
Total	**50**			**1,00**	**100**	

c) Diagrama de barras.



d) Un 75% de los días han faltado como mucho 2 alumnos; y en un 25%, entre 3 a 5 personas. Es una clase en la que hay bastantes faltas de asistencia.

12. El número de medallas que cinco centros han conseguido en unas pruebas escolares ha sido:

Centro	N.º de medallas
Cervantes	12
Betara	10
Kiner	8
Vicencio	6
Tizer	4

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Haz la tabla de frecuencias.

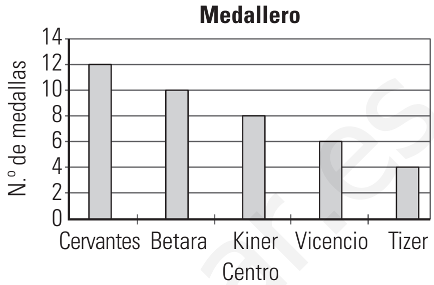
c) Representa los datos en un diagrama de barras e interpreta los resultados.

a) Carácter cualitativo.

b) Tabla de frecuencias.

x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
Cervantes	12	12	30	0,30	30	0,30
Betara	10	22	55	0,25	25	0,55
Kiner	8	30	75	0,20	20	0,75
Vicencio	6	36	90	0,15	15	0,90
Tizer	4	40	100	0,10	10	1,00
Total	**40**			**1,00**	**100**	

c) Diagrama de barras.



El centro que más medallas ha conseguido es Cervantes.

2. CARACTERES CONTINUOS. DATOS AGRUPADOS

13. Las edades de los asistentes a una conferencia se han agrupado en intervalos:

Intervalo	Frecuencia
38-44	8
44-50	12
50-56	20
56-62	16
62-68	12
68-74	8
74-80	4

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Haz una tabla de frecuencias.

c) Representa los datos en un histograma.

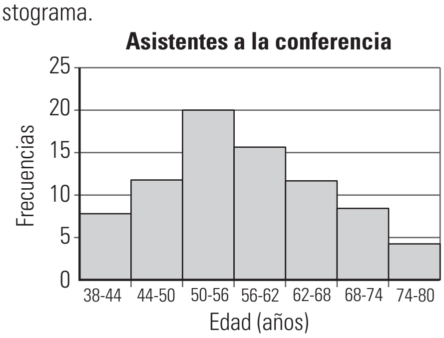
d) Interpreta los resultados.

a) Cuantitativo continuo.

b) Tabla de frecuencias.

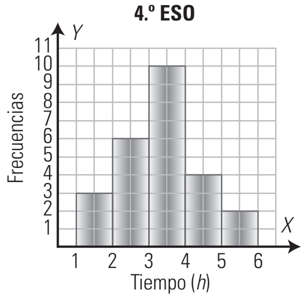
Intervalo	x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
38-44	41	8	8	10	0,10	10	0,10
44-50	47	12	20	25	0,15	15	0,25
50-56	53	20	40	50	0,25	25	0,50
56-62	59	16	56	70	0,20	20	0,70
62-68	65	12	68	85	0,15	15	0,85
68-74	71	8	76	95	0,10	10	0,95
74-78	77	4	80	100	0,05	5	1,00
Total		**90**			**1,00**	**100**	

c) Histograma.



d) El 25% de los asistentes pertenece al intervalo entre 50 y 56 años, y los datos se distribuyen de una forma bastante normal.

14. El siguiente histograma recoge los datos del tiempo en horas que ha dedicado al estudio diario un grupo de estudiantes:



Haz la tabla de frecuencias absolutas y relativas e interpreta los resultados.

Intervalo	x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
1-2	1,5	3	3	12	0,12	12	0,12
2-3	2,5	6	9	36	0,24	24	0,36
3-4	3,5	10	19	76	0,40	40	0,76
4-5	4,5	4	23	92	0,16	16	0,92
5-6	5,5	2	25	100	0,08	8	1,00
Total		**25**			**1,00**	**100**	

Los más frecuente es entre 3 y 4 horas.

15. En un barrio se ha realizado una encuesta sobre la posibilidad de instalar un centro de atención a drogodependientes:

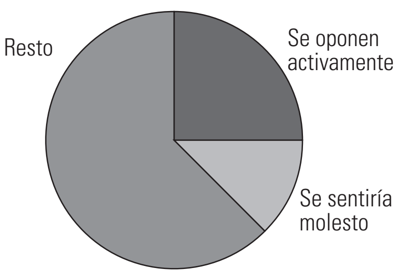
Actitud de los vecinos	Frecuencia
Se oponen activamente	**10**
Se sentirían molestos	**5**
Resto	**25**

Haz un diagrama de sectores que represente los datos e interpreta los resultados.

$\frac{360°}{40} = 9°$

Actitud de los vecinos	Frecuencia	Amplitud
Se oponen activamente	10	$9° \cdot 10 = 90°$
Se sentirían molestos	5	$9° \cdot 5 = 45°$
Resto	25	$9° \cdot 25 = 225°$
Total	**40**	**360°**

Centro de asistencia a drogodependientes



Una cuarta parte se opone activamente, mientras que más de la mitad ni se siente molesto ni se opone al centro.

16. Las precipitaciones medias anuales en milímetros recogidas en los últimos años en una estación meteorológica han sido:

251	**495**	**355**	**520**	**430**	**490**	**280**	**452**	**460**
700	**749**	**400**	**300**	**500**	**560**	**458**	**530**	**500**
490	**565**	**540**	**480**	**400**	**660**	**360**	**460**	**380**
600	**485**	**455**						

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Agrupa los datos y haz una tabla de frecuencias.

c) Representa los datos en un histograma e interpreta el resultado.

a) Cuantitativo continuo.

b) El recorrido es: 749 – 251 = 498

El número de intervalos: $\sqrt{30} \simeq 5$

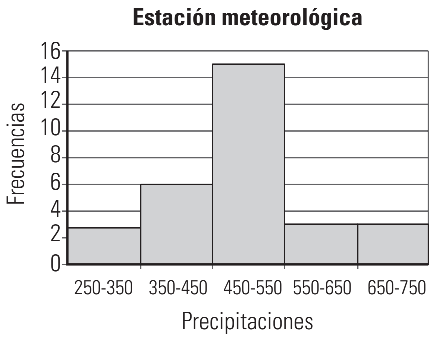
Longitud de cada intervalo: 500 : 5 = 100

El extremo inferior del 1.er intervalo se toma:

$(500 - 498) : 2 = 1 \Rightarrow 251 - 1 = 250$

Intervalo	x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
250-350	300	3	3	10	0,1	10	0,1
350-450	400	6	9	30	0,2	20	0,3
450-550	500	15	24	80	0,5	50	0,8
550-650	600	3	27	90	0,1	10	0,9
650-750	700	3	30	100	0,1	10	1
Total		**30**			**1,0**	**100**	

c) Histograma:



El 50% de las precipitaciones está en el intervalo central y el otro 50% se distribuye alrededor de este intervalo.

3. PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN

17. Se ha registrado la duración en años de un modelo de batería para coches, obteniéndose los siguientes datos:

2,6	**2,8**	**3,1**	**3,2**	**3,2**	**3,3**	**3,3**	**3,4**	**3,6**
3,6	**3,6**	**3,6**	**3,7**	**3,7**	**3,8**	**3,8**	**3,9**	**3,9**
4,1	**4,1**	**4,2**	**4,3**	**4,4**	**4,4**	**4,7**	**4,9**	

Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido e interpreta los resultados.

El recorrido es: 4,9 – 2,6 = 2,3

El número de intervalos: $\sqrt{26} \simeq 5$

Longitud de cada intervalo: 2,5 : 5 = 0,5

El extremo inferior del 1.er intervalo se toma:

$(2,5 - 2,3) : 2 = 0,1 \Rightarrow 2,6 - 0,1 = 2,5$

Intervalo	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
2,5-3	2,75	2	2	5,5
3-3,5	3,25	6	8	19,5
3,5-4	3,75	10	18	37,5
4-4,5	4,25	6	24	25,5
4,5-5	4,75	2	26	9,5
Total		**26**		**97,5**

Como el carácter es cuantitativo continuo, se pueden calcular:

Media: $\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = 3,75$

Moda: es el intervalo 3,5-4

Mediana: es el intervalo 3,5-4

Los datos se agrupan en torno a 3,75, que es un valor que se encuentra en el intervalo de la moda.

18. Se ha registrado el peso de unos recién nacidos, obteniéndose los siguientes resultados:

Peso en kg	2-2,5	2,5-3	3-3,5	3,5-4	4-4,5
n_i	6	14	16	10	4

Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido e interpreta los resultados.

Intervalo	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
2-2,5	2,25	6	6	13,5
2,5-3	2,75	14	20	38,5
3-3,5	3,25	16	36	52,0
3,5-4	3,75	10	46	37,5
4-4,5	4,25	4	50	17,5
Total		**50**		**158,5**

Como el carácter es cuantitativo continuo, se pueden calcular:

Media: $\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = 3,17$

Moda: es el intervalo 3-3,5

Mediana: es el intervalo 3-3,5

Los datos se agrupan en torno a 3,17, que es un valor que se encuentra en el intervalo de la moda y de la mediana.

4. PARÁMETROS DE DISPERSIÓN

19. En un centro de cálculo, el número de veces que un ordenador se detiene por un error interno se ha recogido durante los últimos 50 días en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	3	6	8	12	10	8	3

Calcula la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación. Interpreta el resultado.

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
0	3	0	0	0
1	6	6	1	6
2	8	16	4	32
3	12	36	9	108
4	10	40	16	160
5	8	40	25	200
6	3	18	36	108
Total	**50**	**156**		**614**

$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = 3,12$

$V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2 = 2,55$

$\sigma = 1,6$

$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0,51 \Rightarrow 51\%$

Los datos se agrupan en torno a 3,12 con una dispersión del 51%. Los datos están muy dispersos.

20. Las edades de una muestra de personas que acuden a la biblioteca de un barrio se han recogido en la siguiente tabla:

Intervalo	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
Frecuencia	6	15	10	6	8	5

Calcula la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación e interpreta el resultado obtenido.

Intervalo	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
10-20	15	6	90	225	1 350
20-30	25	15	375	625	9 375
30-40	35	10	350	1 225	12 250
40-50	45	6	270	2 025	12 150
50-60	55	8	440	3 025	24 200
60-70	65	5	325	4 225	21 125
Total		**50**	**1 850**		**80 450**

$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = 37$

$V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2 = 240$

$\sigma = 15,49$

$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0,42 \Rightarrow 42\%$

Los datos se agrupan en torno a 37 años, con una dispersión del 42%. Los datos están muy dispersos.

21. En los últimos 10 días se han registrado las cotizaciones de dos valores bursátiles. Calcula el coeficiente de variación e interpreta el resultado que has obtenido.

Valor A	3,8	3,7	3,8	3,7	3,8	3,8	3,8	3,8	3,7	3,7
Valor B	5,9	6,2	6,5	5,7	6	6,2	6,5	5,7	5,5	6

Valor A

$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = 3,76$

$\sigma = 0,05$

$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0,01 \Rightarrow 1\%$

$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = 6,02$

$\sigma = 0,32$

$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0,05 \Rightarrow 5\%$

Es más homogéneo el valor A, con un 1% de dispersión, frente al valor B, que tiene un 5%

PARA AMPLIAR

22. El número de viajes que un grupo de personas ha realizado al extranjero en el último año ha sido el siguiente:

N.º de viajes	0	1	2	3	4
Frecuencia	8	10	12	6	4

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

c) Calcula la varianza y la desviación típica.

d) Calcula el coeficiente de variación.

e) Representa los datos en el gráfico más apropiado e interprétalos.

a) Cuantitativo discreto.

b) Parámetros de centralización.

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
0	8	8	0	0	0
1	10	18	10	1	10
2	12	30	24	4	48
3	6	36	18	9	54
4	4	40	16	16	64
Total	**40**		**68**		**176**

$\overline{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = 1{,}7$

Moda: 2

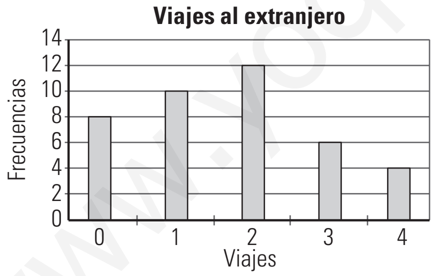
Mediana: 2

c) $V = \dfrac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2 = 1{,}51$

$\sigma = 1{,}23$

$CV = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} = 0{,}72 \Rightarrow 72\%$

e) Diagrama de barras.



Los datos se agrupan en torno a 1,7 viajes, con una dispersión del 72%, que es muy grande.

23. Se ha realizado una encuesta sobre el lugar donde se utiliza el acceso a Internet diariamente, obteniéndose los siguientes resultados:

Lugar	Frecuencia
En casa	15
En el trabajo	14
En el centro escolar	5
Cibercafés	3
En otros	3

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

c) Representa los datos en un diagrama de sectores e interpreta los resultados.

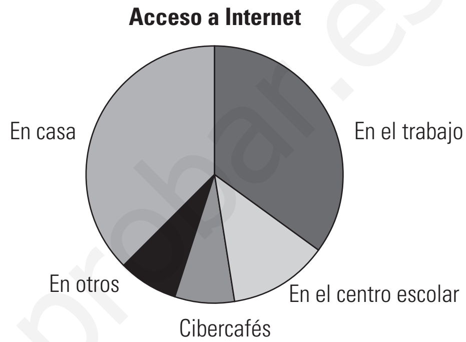
a) Carácter cualitativo.

b) Como el carácter es cualitativo no ordenable, solo se puede calcular la moda, que es: en casa.

c) Diagrama de sectores.

$\dfrac{360°}{40} = 9°$

Lugar	Frecuencia	Amplitud
En casa	15	$9° \cdot 15 = 135°$
En el trabajo	14	$9° \cdot 14 = 126°$
En el centro escolar	5	$9° \cdot 5 = 45°$
Cibercafés	3	$9° \cdot 3 = 27°$
En otros	3	$9° \cdot 3 = 27°$
Total	**40**	**360°**



En el gráfico se ve que casi 3/4 partes se conectan en casa o el trabajo, quedando solo 1/4 para el resto.

24. En una empresa se distribuye una prima por productividad. El número de trabajadores y la cantidad de la prima se recogen en la tabla siguiente:

Intervalo	N.º de trabajadores
90-120	2
120-150	10
150-180	12
180-210	4
210-240	2

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

c) Calcula la varianza y la desviación típica.

d) Calcula el coeficiente de variación.

e) Representa los datos en el gráfico más apropiado e interprétalos.

a) Cuantitativo discreto.

b) Parámetros de centralización.

Intervalo	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
90-120	105	2	2	210	11 025	22 050
120-150	135	10	12	1 350	18 225	182 250
150-180	165	12	24	1 980	27 225	326 700
180-210	195	4	28	780	38 025	152 100
210-240	225	2	30	450	50 625	101 250
Total		**30**		**4 770**		**784 350**

$\overline{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = 159$

Moda: el intervalo 150-180

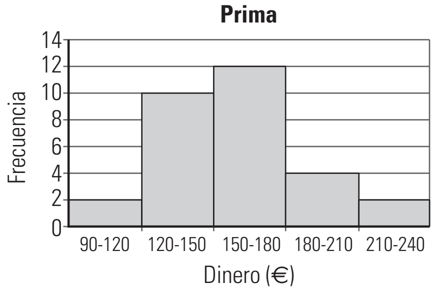
Mediana: el intervalo 150-180

c) $V=\dfrac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N}-\bar{x}^2=864$

$\sigma = 29{,}39$

d) $CV=\dfrac{\sigma}{\bar{x}}=0{,}18 \Rightarrow 18\%$

e) Histograma:



Los datos se distribuyen en torno a 159 €, con una dispersión pequeña del 18%

PROBLEMAS

25. Se ha realizado una encuesta entre unos usuarios de una piscina municipal sobre el grado de satisfacción con las instalaciones, obteniéndose los siguientes resultados:

Grado se satisfacción	Frecuencia
Muy poco	**6**
Poco	**10**
Regular	**14**
Bueno	**15**
Muy bueno	**5**

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

c) Representa los datos en el gráfico más apropiado e interprétalos.

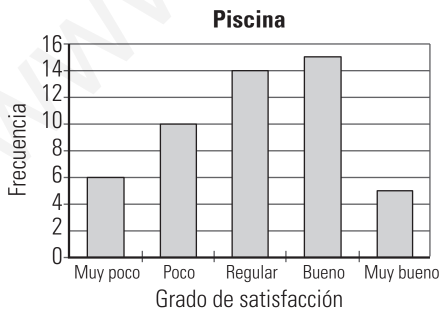
a) Cualitativo ordenable.

b) Parámetros de centralización.

Moda: bueno.

Mediana: regular.

c) Diagrama de barras.



Más de la mitad de los usuarios se encuentran entre regular y bueno.

26. Una empresa ha realizado una prueba de velocidad entre 25 trabajadores a los que se les ha asignado la misma tarea. Los datos sobre el tiempo, en minutos, que han tardado en realizar la tarea han sido:

4,6	**5**	**5,6**	**5,7**	**6**	**6,2**	**6,6**	**6,7**	**6,7**
6,7	**6,8**	**6,9**	**7**	**7**	**7,2**	**7,3**	**7,4**	**7,7**
7,8	**7,8**	**8**	**8,3**	**8,4**	**8,6**	**9**	**9,4**	

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

c) Calcula la varianza y la desviación típica.

d) Calcula el coeficiente de variación.

e) Representa los datos en el gráfico más apropiado e interprétalos.

a) Cuantitativo continuo.

b) Parámetros de centralización.

El recorrido es: 9,4 – 4,6 = 4,8

El número de intervalos: $\sqrt{25} \simeq 5$

Longitud de cada intervalo:

5 : 5 = 1

El extremo inferior del 1.er intervalo se toma:

$(5-4{,}8):2=0{,}1 \Rightarrow 4{,}6-0{,}1=4{,}5$

Intervalo	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
4,5 - 5,5	5	2	2	10	25	50
5,5 - 6,5	6	4	6	24	36	144
6,5 - 7,5	7	10	16	70	49	490
7,5 - 8,5	8	6	22	48	64	384
8,5 - 9,5	9	3	25	27	81	243
Total		**23**		**179**		**1 311**

$\bar{x}=\dfrac{\sum x_i \cdot n_i}{N}=7{,}16$

Moda: el intervalo 6,5 - 7,5

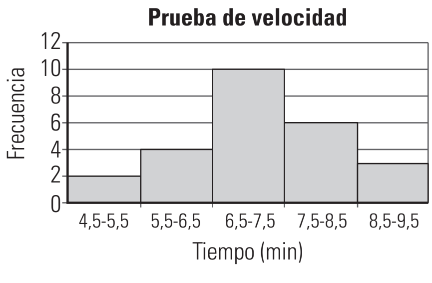
Mediana: el intervalo 6,5 - 7,5

c) $V=\dfrac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N}-\bar{x}^2=1{,}17$

$\sigma = 1{,}08$

d) $CV=\dfrac{\sigma}{\bar{x}}=0{,}15 \Rightarrow 15\%$

e) Histograma:



Los datos se agrupan en torno a 7,16 minutos con una dispersión del 15%, es decir, pequeña.

27. Se ha clasificado a los trabajadores de una empresa en tres categorías: mayores de 40 años, entre 25 y 40 años, y menores de 25 años, obteniéndose los siguientes datos sobre la productividad:

Grupo	$\bar{x}$	σ
Menor de 25	**4**	**0,68**
25-40	**6**	**0,48**
Mayor de 40	**7**	**0,35**

Indica qué grupo es más homogéneo y justifica la respuesta.

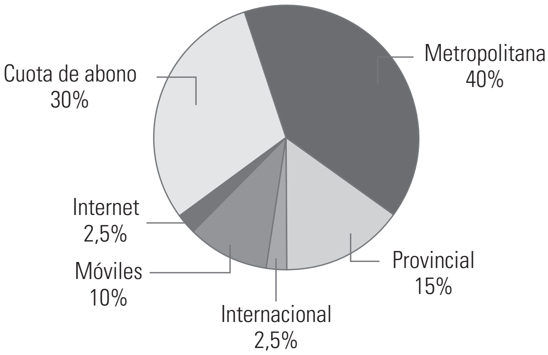
Grupo	*CV*
Menor de 25 años	0,17 ⇒ 17%
Entre 25 y 40 años	0,08 ⇒ 8%
Mayores de 40 años	0,05 ⇒ 5%

Los grupos quedan ordenados de más a menos homogéneo:
Mayores de 40 años.
Entre 25 y 40 años.
Menores de 25 años.

PARA PROFUNDIZAR

28. En una factura telefónica, las cantidades abonadas se recogen en el siguiente diagrama de sectores:

Factura de teléfono



Haz la tabla de frecuencias sabiendo que el total de la factura fueron 40 €

Interpreta los resultados.

Gasto teléfono	%	Cantidad sobre 40 €
Cuota de abono	30	12 €
Metropolitana	40	16 €
Provincial	15	6 €
Internacional	2,5	1 €
Móviles	10	4 €
Internet	2,5	1 €

El mayor gasto es la cuota de abono y las llamadas metropolitanas.

29. Asocia a cada gráfico un grupo A, B o C cuyos datos se dan en la tabla siguiente:

	A	B	C
$\bar{x}$	3	3	3
s	1,79	0	1,1

Gráfico 1

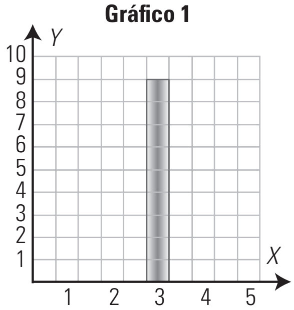


Gráfico 2

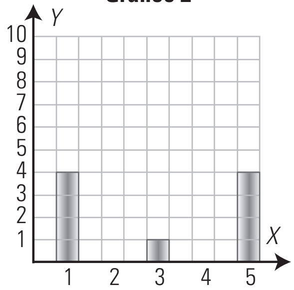
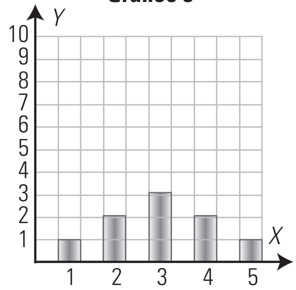


Gráfico 3

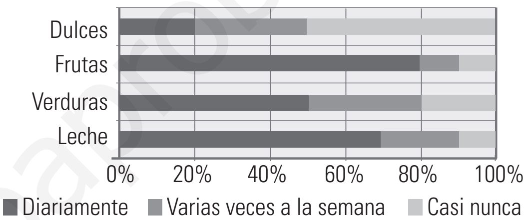


Grupo A con gráfico 2 Grupo B con gráfico 1
Grupo C con gráfico 3

APLICA TUS COMPETENCIAS

30. Se ha consultado a un grupo de personas sobre la frecuencia de consumo de varios productos alimenticios, obteniéndose los resultados representados en el gráfico siguiente. Haz una tabla de frecuencias e interpreta los resultados.

Consumo de alimentos



Se toma $N = 100$, ya que los datos vienen en porcentaje:

	Diariamente	Varias veces por semana	Casi nunca
Leche	70	20	10
Verduras	50	30	20
Frutas	80	10	10
Dulces	20	30	50

Se toma mucha leche y fruta y pocos dulces.

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Define carácter estadístico cuantitativo y cualitativo. Pon un ejemplo de cada tipo.

- Carácter estadístico cualitativo: aquel que indica una cualidad. No se puede contar ni medir.
- Carácter estadístico cuantitativo: aquel que indica una cantidad. Se puede contar o medir. Se clasifica en:
  – Cuantitativo discreto: sus valores son el resultado de un recuento. Solamente puede tomar ciertos valores aislados.
  – Cuantitativo continuo: sus valores son el resultado de una medida. Puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo.

Ejemplo: Entre el alumnado de un centro se puede estudiar:

Caracteres			Valores
Cualitativo		Color preferido	Blanco, rojo…
Cuantitativo	Discreto	N.º de libros leídos en un mes	0, 1, 2, 3…
	Continuo	Peso	60 kg, 67 kg…

2. Se ha estudiado la forma de desplazamiento de los habitantes de una ciudad en sus vacaciones, obteniéndose los siguientes resultados:

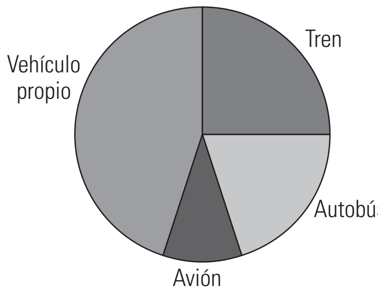
Medio	Vehículo propio	Tren	Autobús	Avión
Frecuencia	45	25	20	10

Haz un diagrama de sectores que recoja los datos e interpreta el resultado.

$\frac{360°}{100} = 3{,}6°$

Medio	Frecuencia	Amplitud
Vehículo propio	45	$3{,}6° \cdot 45 = 162°$
Tren	25	$3{,}6° \cdot 25 = 90°$
Autobús	20	$3{,}6° \cdot 20 = 72°$
Avión	10	$3{,}6° \cdot 10 = 36°$
Total	**100**	**360°**

Medio de desplazamiento



Un 90% de los viajes se hace por carretera y en tren frente a un 10% que se hace en avión. De los viajes por carretera, el 45% del total se hace en vehículo propio.

3. El número de CD que adquirieron el mes pasado los estudiantes de una clase se recoge en la tabla:

N.º de CD	0	1	2	3	4	5
N.º de estudiantes	2	7	8	5	2	1

Calcula la moda, la mediana y la media. Interpreta el resultado.

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
0	2	2	0
1	7	9	7
2	8	17	16
3	5	22	15
4	2	24	8
5	1	25	5
Total	**25**		**51**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = 2{,}04$$

Moda: 2

Mediana: 2

Los datos se agrupan en torno a 2,04, que casi coincide con la moda y la mediana.

4. Los puntos que han conseguido unos jugadores de baloncesto por partido han sido:

N.º de puntos	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20
N.º de jugadores	2	5	6	4	3

Calcula la media, la desviación típica y el coeficiente de variación. Interpreta los resultados.

Intervalo	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
0-4	2	2	4	4	8
4-8	6	5	30	36	180
8-12	10	6	60	100	600
12-16	14	4	56	196	784
16-20	18	3	54	324	972
Total		**20**	**204**		**2 544**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = 10{,}2$$

$$V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 = 23{,}16$$

$\sigma = 4{,}81$

$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0{,}42 \Rightarrow 47\%$

Los datos se agrupan en torno a 10,2 puntos, con una dispersión del 47%. Los datos están muy dispersos.

5. Se ha realizado un estudio del precio medio de naranjas entre las fruterías de dos barrios, obteniéndose los siguientes resultados. Justifica en qué barrio es más homogéneo el precio de las naranjas.

	Media	Desviación típica
Barrio A	3,2	0,16
Barrio B	2,5	0,45

	Media	Desviación típica	*CV*
Barrio A	3,2	0,16	0,05 = 5%
Barrio B	2,5	0,45	0,18 = 18%

El barrio A tiene el precio de las naranjas más homogéneo. Tiene una dispersión del 5%, frente al 18% del precio que hay en el barrio B

WINDOWS EXCEL

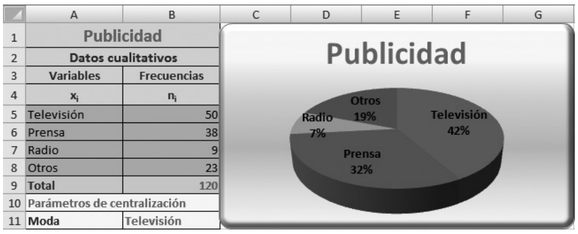
WINDOWS/LINUX CALC

PRACTICA

34. Una empresa dedica en inversión publicitaria en distintos medios las siguientes cantidades:

Medio	Dinero (miles €)
Televisión	50
Prensa	38
Radio	9
Otros	23

Obtén los parámetros de centralización y de dispersión que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

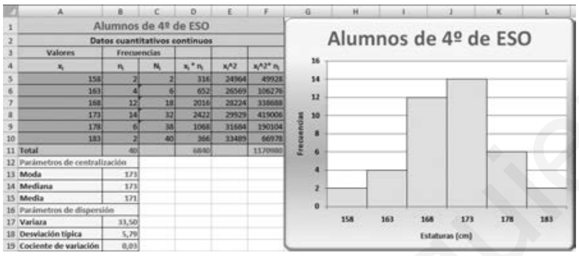


Se gasta casi todo el presupuesto entre Televisión y Prensa.

35. Se han medido las estaturas en centímetros de 40 alumnos de 4.º de ESO, obteniendo los siguientes datos:

Intervalo	Frecuencias: n_i
155,5-160,5	2
160,5-165,5	4
165,5-170,5	12
170,5-175,5	14
175,5-180,5	6
180,5-185,5	2

Obtén las medidas de centralización y dispersión que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

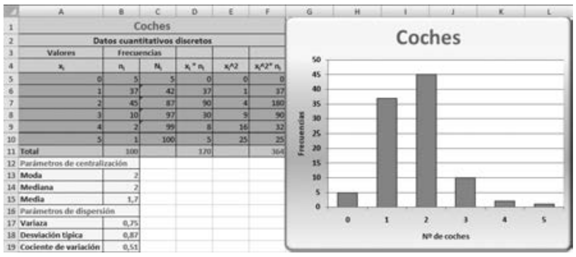


La estatura media es de 171 cm, y como el cociente de variación es 0,03, que es menor que 0,30, están muy agrupados.

36. En una ciudad se ha realizado un estudio sobre el número de coches que hay por cada familia, y se han obtenido los siguientes datos:

Valores: x_i	Frecuencias: n_i
0	5
1	37
2	45
3	10
4	2
5	1

Obtén las medidas de centralización y dispersión que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

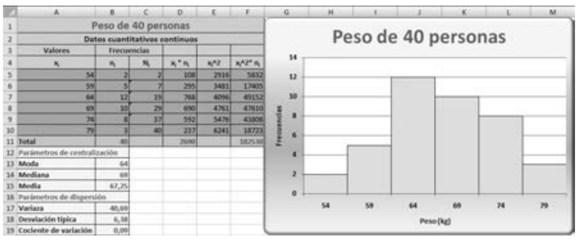


La media es de 1,7 coches por familia, y como el coeficiente de variación es 0,51, que es mayor que 0,30, están muy dispersos.

37. El peso de 40 personas se ha distribuido en los siguientes intervalos:

Intervalo	Frecuencias: n_i
51,5-56,5	2
56,5-61,5	5
61,5-66,5	12
66,5-71,5	10
71,5-76,5	8
76,5-81,5	3

Obtén las medidas de centralización y dispersión que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.



El peso medio es de unos 67 kg, y como el coeficiente de variación es 0,09, que es menor que 0,30, están muy agrupados.

14. Combinatoria y probabilidad

1. VARIACIONES Y PERMUTACIONES

PIENSA Y CALCULA

Un restaurante oferta, en el menú del día, 5 platos de primero, 4 de segundo y 3 de postre. ¿Cuántos menús diferentes se pueden pedir?

N.º de menús: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

APLICA LA TEORÍA

1. Calcula mentalmente:

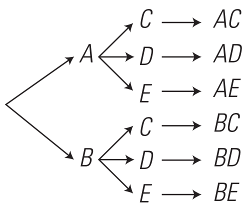
a) $V_{5,3}$ b) $VR_{6,2}$ c) P_4 d) PC_6

a) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ b) $6^2 = 36$

c) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ d) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

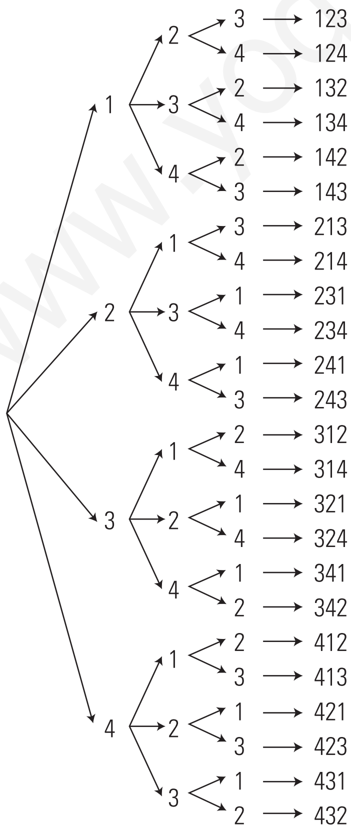
2. Dibuja el árbol correspondiente a las distintas formas en que puede vestirse una persona que tiene dos camisas y tres pantalones. ¿Cuántas son?

Sean las camisas *A* y *B* y los pantalones *C*, *D* y *E*



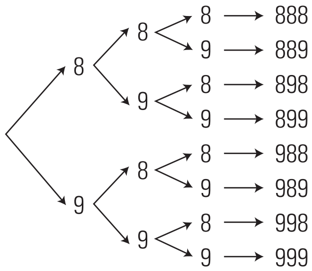
Número = $2 \cdot 3 = 6$

3. Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 forma todos los números de tres cifras que puedas sin que se repita ninguna. ¿Cuántos son?



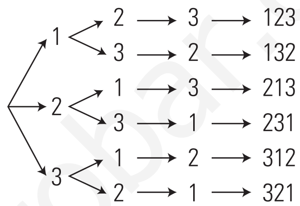
$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

4. Con los dígitos 8 y 9, forma todos los números de tres cifras que puedas. ¿Cuántos son?



$VR_{2,3} = 2^3 = 8$

5. Con los dígitos 1, 2 y 3 forma todos los números de tres cifras que puedas sin que se repita ninguna. ¿Cuántos son?



$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

6. ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa circular para que en cada caso haya al menos dos personas sentadas en diferente orden?

$PC_5 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

7. El sistema actual de matrículas dice: «En las placas de matrícula se inscribirán dos grupos de caracteres constituidos por un número de cuatro cifras, que irá desde el 0000 al 9999, y de tres letras, empezando por las letras BBB y terminando por las letras ZZZ, suprimiéndose las cinco vocales y las letras Ñ, Q, CH y LL».

¿Cuántas matrículas hay con las letras BBB?

$VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000$

8. Halla, usando la calculadora:

a) $V_{10,4}$ b) $VR_{6,4}$

c) P_{10} d) PC_{12}

a) 5 040

b) 1 296

c) 3 628 800

d) 39 916 800

2. COMBINACIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el valor de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{7}{0}$ b) $\binom{8}{1}$

c) $\binom{5}{5}$ d) $\binom{6}{5}$

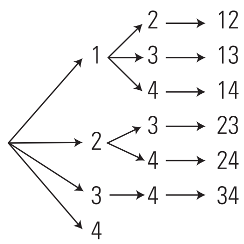
a) 1 b) 8 c) 1 d) 6

APLICA LA TEORÍA

9. Calcula mentalmente: $C_{5,\,2}$ y $C_{6,\,4}$

$5 \cdot \frac{4}{2} = 10$ $\qquad$ $C_{6,\,4} = C_{6,\,2} = 6 \cdot \frac{5}{2} = 15$

10. Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 forma todos los números de dos cifras que puedas sin que se repita ninguna y de modo que ningún par de números tenga las mismas cifras.



$C_{4,\,2} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$

11. ¿Cuántas columnas de quinielas hay que cubrir como mínimo para acertar una de pleno al 15?

a) $E = \{1, X, 2\}$, $m = 3$. Dos ejemplos significativos son: X1X11112121XX11, 111XXX111XXX1X1, $p = 15$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición ⇒ Variaciones con repetición.

c) $VR_{3,\,15} = 3^{15} = 14\,348\,907$

12. En una clase hay 25 alumnos. ¿De cuántas formas se puede elegir un delegado y un subdelegado?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 25\}$, $m = 25$. Dos ejemplos significativos son: 35, 53, $p = 2$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Variaciones ordinarias.

c) $V_{25,\,2} = 25 \cdot 24 = 600$

13. ¿Cuántas diagonales tiene un decágono?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 10\}$, $m = 10$. Dos ejemplos significativos son: 25, 79, $p = 2$

b) No influye el orden ⇒ Combinaciones ordinarias.

Hay que quitar los lados.

c) $C_{10,\,2} - 10 = \binom{10}{2} - 10 = 45 - 10 = 35$

14. Con 8 jugadores, ¿cuántos equipos de baloncesto se pueden formar, si cada jugador puede jugar en cualquier puesto?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 8\}$, $m = 8$. Dos ejemplos significativos son: 25 318, 53 467, $p = 5$

b) No influye el orden ⇒ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{8,\,5} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$

15. Halla, usando la calculadora: $C_{7,\,3}$ y $C_{8,\,4}$

35 y 70

3. EXPERIMENTOS ALEATORIOS SIMPLES

PIENSA Y CALCULA

¿Cuántas caras tiene un dado de quinielas? ¿Qué es más probable obtener: 1, X o 2?

Un dado de quinielas tiene 6 caras, tres caras tienen un 1, dos caras tienen una X y una cara tiene un 2

El más probable es el 1, por que es el que más veces está.

APLICA LA TEORÍA

16. Sean $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{3, 6\}$. Calcula: $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$ y $\bar{B}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8\}$

$A \cap B = \{6\}$

$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7\}$

$\bar{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

17. Halla la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado de seis caras.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Par = {2, 4, 6}

$P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

18. Se sabe que $P(A) = 5/6$. Halla $P(\bar{A})$

$P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

19. Se lanzan 100 chinchetas al aire y 65 quedan con la punta hacia arriba. Halla la frecuencia relativa de que la chincheta quede con la punta hacia arriba.

$f(⫯) = \frac{65}{100} = 0{,}65$

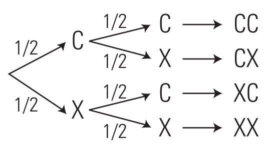
20. Si $P(A) = 2/3$, $P(B) = 1/2$ y $P(A \cap B) = 1/5$, calcula $P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{29}{30}$

4. EXPERIMENTOS ALEATORIOS COMPUESTOS

PIENSA Y CALCULA

Diseña un árbol de probabilidades para el experimento de lanzar dos monedas al aire.



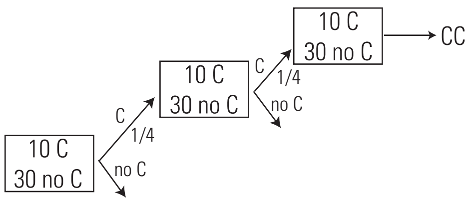
APLICA LA TEORÍA

21. Se lanzan dos dados de 6 caras numeradas del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea 9

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

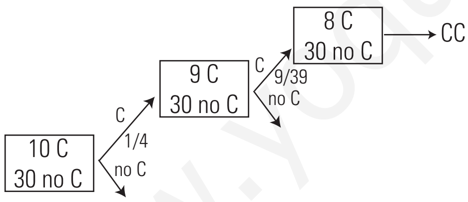
$P(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

22. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas, se observa si ha sido de copas y se vuelve a introducir; luego se extrae otra carta. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de copas?



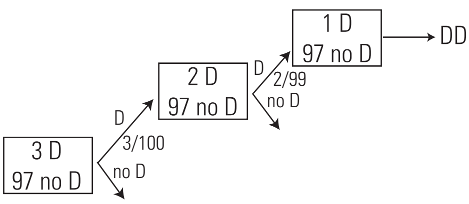
$P(CC) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

23. Se extraen de una vez dos cartas de una baraja española de 40 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de copas?



$P(CC) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{30} = \frac{3}{40}$

24. Una máquina produce 100 tornillos de los que 3 son defectuosos. Si se cogen dos tornillos, halla la probabilidad de que al coger el segundo sea defectuoso, con la condición de que el primero también haya sido defectuoso. ¿Cómo son ambos sucesos, dependientes o independientes?

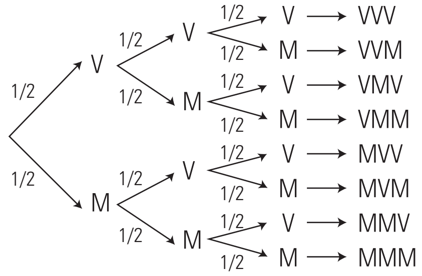


D/D es la segunda rama.

$P(D/D) = \frac{2}{99}$

El segundo suceso D/D es dependiente del primero D, pues depende de si ha salido D o no D

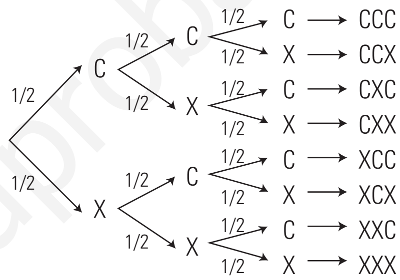
25. Una familia tiene tres hijos. Halla la probabilidad de que los tres sean varones.



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$P(VVV) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

26. Se lanzan tres monedas al aire. Halla la probabilidad de obtener dos caras y una cruz.



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(CCX) + P(CXC) + P(XCC) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. VARIACIONES Y PERMUTACIONES

27. Calcula mentalmente:

a) $V_{10,\,3}$

b) $VR_{10,\,3}$

a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

b) $10^3 = 1\,000$

28. Calcula mentalmente:

a) P_5

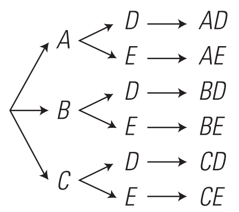
b) PC_4

a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

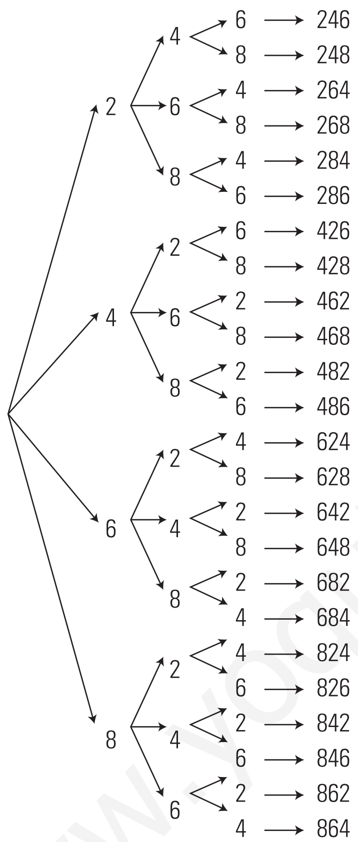
29. Organizamos una fiesta y llevamos tres clases de bocadillos y dos clases de refrescos. Dibuja el árbol correspondiente a las distintas formas de elegir un bocadillo y un refresco. ¿Cuántas son?

Sean los bocadillos *A*, *B* y *C* y los refrescos *D* y *E*



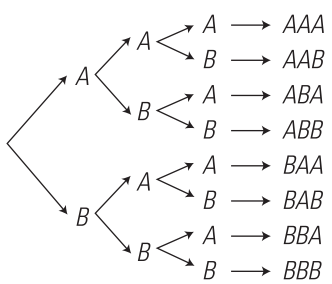
Número = 3 · 2 = 6

30. Con los dígitos 2, 4, 6 y 8 forma todos los números de tres cifras que puedas sin que se repita ninguna cifra. ¿Cuántos son?



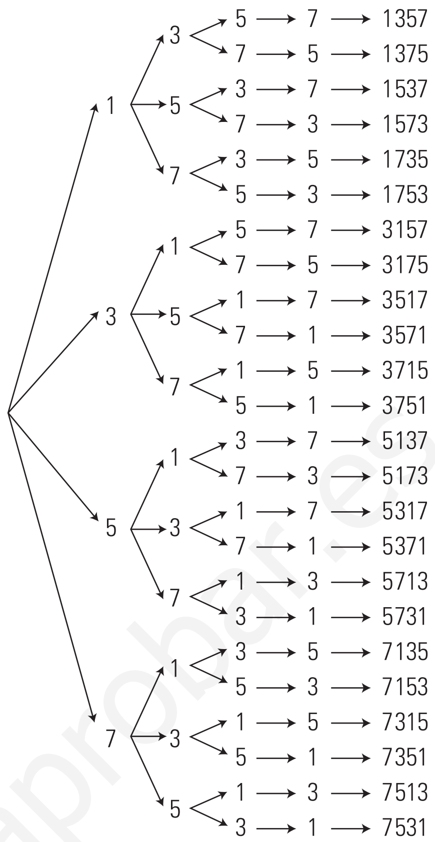
$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

31. Con las letras *A* y *B* forma todas las combinaciones posibles de tres letras. ¿Cuántas son?



$VR_{2,3} = 2^3 = 8$

32. Con los dígitos 1, 3, 5 y 7 forma todos los números de cuatro cifras que puedas sin que se repita ninguna cifra. ¿Cuántos son?



$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

33. ¿De cuántas formas se pueden sentar 10 personas alrededor de una mesa circular, de forma que en cada caso haya al menos dos personas sentadas en diferente orden?

$PC_{10} = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$

34. En el sistema actual de matrículas, ¿de cuántas formas se pueden colocar las letras sabiendo que cada matrícula contiene tres letras, empezando por las letras BBB y terminando por las letras ZZZ, suprimiéndose las cinco vocales, y las letras Ñ, Q, CH y LL?

BCDFGHJKLMNPRSTVWXYZ

$VR_{20,3} = 20^3 = 8\,000$

35. Calcula, usando la calculadora:

a) $V_{8,5}$ **b)** $VR_{7,3}$

a) 6 720 b) 343

36. Calcula, usando la calculadora:

a) P_6 **b)** PC_8

a) 720 b) 5 040

2. COMBINACIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

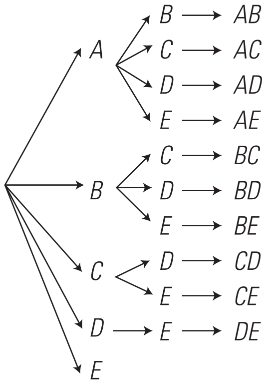
37. Calcula mentalmente:

a) $C_{10,2}$ **b)** $C_{11,9}$

a) $10 \cdot \frac{9}{2} = 45$

b) $C_{11,9} = C_{11,2} = 11 \cdot \frac{10}{2} = 55$

38. Con las letras *A*, *B*, *C*, *D* y *E* forma todas las combinaciones que puedas de dos letras sin que se repita ningún par de palabras de modo que ningún par de palabras tenga las mismas letras.



$C_{5,\,2} = 5 \cdot \dfrac{4}{2} = 10$

39. Disponemos de 5 frutas diferentes para preparar zumos de dos sabores. ¿Cuántas zumos podemos hacer?

a) $E = \{A, B, C, D, E\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: AB, BC, $p = 2$

b) No influye el orden $\Rightarrow$ Combinaciones.

c) $C_{5,\,2} = 5 \cdot \dfrac{4}{2} = 10$

40. En una comunidad que está formada por 20 vecinos, se quiere elegir una junta formada por un presidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas formas se puede elegir la junta?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 20\}$, $m = 20$. Dos ejemplos significativos son: 529, 517, p = 3

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición $\Rightarrow$ Variaciones ordinarias.

c) $V_{20,\,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6\,840$

41. De una baraja española de 40 cartas se cogen 4 cartas sin devolución. ¿De cuántas formas se pueden coger?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 40\}$, $m = 40$. Dos ejemplos significativos son: 1 579, 1 568, $p = 4$

b) No influye el orden $\Rightarrow$ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{40,\,4} = \dbinom{40}{4} = 91\,390$

42. ¿De cuántas formas se pueden colocar 6 personas alrededor de una mesa circular?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 6\}$, $m = 6$. Dos ejemplos significativos son: 123456, 123564, p = 6

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición $\Rightarrow$ Permutaciones circulares.

c) $PC_6 = 5! = 120$

43. Halla, usando la calculadora:

a) $C_{10,5}$ **b) $C_{15,\,7}$**

a) 252 b) 6 435

3. EXPERIMENTOS ALEATORIOS SIMPLES

44. Sean $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{3, 6, 9\}$. Calcula:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) ¿*A* y *B* son compatibles o incompatibles?

d) $\overline{A}$

e) $\overline{B}$

a) {1, 3, 5, 6, 7, 9}b) {3, 9}

c) *A* y *B* son compatibles.

d) {2, 4, 6, 8, 10}

e) {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10}

45. Halla la probabilidad de obtener múltiplo de 3 al lanzar un dado de 6 caras.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{3, 6\}$

$P(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

46. Se sabe que $P(A) = 2/5$. Halla $P(\overline{A})$

$P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$

47. Se lanzan 100 chinchetas al aire y 66 quedan con la punta hacia arriba. Halla la frecuencia relativa de que la chincheta no quede con la punta hacia arriba.

$f(\text{No } ⏀) = \dfrac{34}{100} = 0{,}34$

48. Se sabe que:

$$P(A) = 3/4,\ P(B) = 2/5 \text{ y } P(A \cup B) = 8/9$$

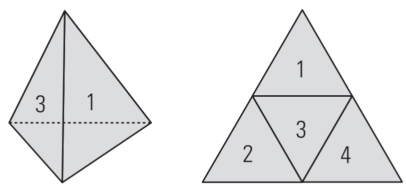
Calcula: $P(A \cap B)$

$\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{5} - P(A \cap B) = \dfrac{8}{9}$

$P(A \cap B) = \dfrac{47}{180}$

4. EXPERIMENTOS ALEATORIOS COMPUESTOS

49. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados de 4 caras numeradas del 1 al 4 la suma de los números obtenidos sea 6. ¿Qué suma es la más probable?

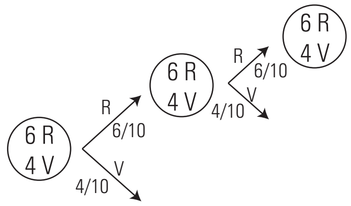


$P(6) = \dfrac{3}{16}$

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

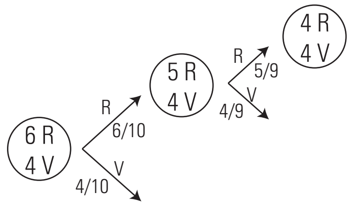
El más probable es el 5, porque es el que más veces aparece.

50. Se extrae una bola de una urna que contiene 6 bolas rojas y 4 verdes, se observa si ha sido roja y se vuelve a introducir; luego se extrae otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?



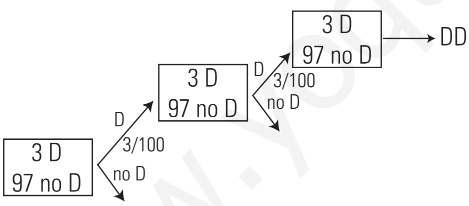
$P(\text{RR}) = \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{6}{10} = \dfrac{9}{25}$

51. Se extraen de una vez dos bolas de una urna que contiene 6 bolas rojas y 4 verdes. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?



$P(\text{RR}) = \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{5}{9} = \dfrac{1}{3}$

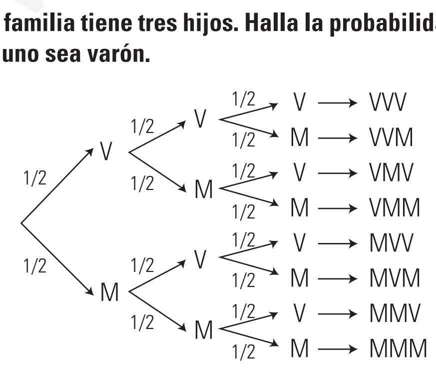
52. Una máquina produce 100 tornillos de los que 3 son defectuosos. Se coge un tornillo, se mira si es defectuoso y se devuelve. Halla la probabilidad de que al coger aleatoriamente el segundo sea defectuoso, con la condición de que el primero también haya sido defectuoso. ¿Cómo son ambos sucesos, dependientes o independientes?



$P(\text{D/D}) = \dfrac{3}{100}$

El segundo suceso D/D es independiente del primero D, pues no depende de si ha salido D o no D

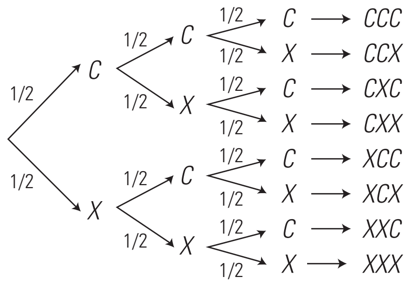
53. Una familia tiene tres hijos. Halla la probabilidad de que uno sea varón.



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(\text{VMM}) + P(\text{MVM}) + P(\text{MMV}) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$

54. Se lanzan tres monedas al aire. Halla la probabilidad de que las tres sean cruz.



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$P(XXX) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

PARA AMPLIAR

55. Calcula mentalmente los siguientes números combinatorios:

a) $\dbinom{50}{0}$ **b)** $\dbinom{50}{50}$

a) 1 b) 1

56. Calcula mentalmente los siguientes números combinatorios:

a) $\dbinom{100}{1}$ **b)** $\dbinom{100}{98}$

a) 100 b) 4 950

57. ¿Cuántos números diferentes de cuatro cifras se pueden formar?

a) $E = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $m = 10$. Dos ejemplos significativos son: 1122, 2135, $p = 4$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición ⇒ Variaciones con repetición.

Hay que quitar todos los que son menores de 1 000

c) $VR_{10,\,4} - 1\,000 = 10^4 - 1\,000 = 9\,000$

58. ¿Cuántos números diferentes de cinco cifras se pueden formar con las cifras impares de forma que no se repita ninguna cifra? ¿Cuántos de ellos son impares?

a) $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 13 597, 53 197, $p = 5$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 120$

Son impares los que terminan en número impar; en este caso, todos.

59. Un alumno de 4.º B tiene 5 camisetas, 4 pantalones y 3 pares de zapatillas de deporte. ¿De cuántas formas diferentes puede vestirse para ir a entrenar?

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas diferentes.

60. Si lanzamos al aire un dado y una moneda, ¿cuántos resultados diferentes podemos obtener?

$6 \cdot 2 = 12$ resultados diferentes.

61. Cinco amigos van al cine y sacan las entradas seguidas. ¿De cuántas formas se pueden sentar?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 12 345, 54 123, $p = 5$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición $\Rightarrow$ Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 120$

62. Con las letras de la palabra MESA, ¿cuántas combinaciones se pueden formar, tengan o no sentido?

a) $E = \{A, E, M, S\}$, $m = 4$. Dos ejemplos significativos son: MESA, ESMA, $p = 4$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición $\Rightarrow$ Permutaciones ordinarias.

c) $P_4 = 4! = 24$

63. Calcula el valor de x en la siguiente igualdad:

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{x}$$

$x = 2$, o bien $x = 3$

64. Calcula el valor de x en la siguiente igualdad:

$$V_{x,3} = 30x$$

$x(x-1)(x-2) = 30x$

$x^2 - 3x + 2 = 30$

$x = 7$

65. Calcula el valor de x en la siguiente igualdad:

$$V_{x,4} = 6V_{x,2}$$

$x(x-1)(x-2)(x-3) = 6x(x-1)$

Se simplifican ambos miembros entre $x(x-1)$, ya que $x > 3$

$x^2 - 5x + 6 = 6$

$x = 5$

66. Calcula el valor de x en la siguiente igualdad:

$$P_x = 20P_{x-2}$$

$x! = 20(x-2)!$

$x(x-1) = 20$

$x = 5$

67. Calcula el valor de x en la siguiente igualdad:

$$2C_{x,2} = V_{x,2}$$

$\dfrac{2x(x-1)}{2} = x(x-1)$

$x(x-1) = x(x-1)$

Vale cualquier $x > 1$

68. Una urna contiene 7 bolas rojas, 5 verdes y 3 azules. Si se extrae una bola, calcula la probabilidad que hay de que:

a) sea verde; b) no sea roja; c) sea roja o verde.

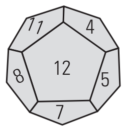
$E = \{7R, 5V, 3A\}$

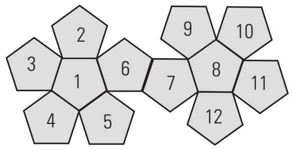
a) $P(\text{verde}) = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$

b) $P(\text{no roja}) = \dfrac{8}{15}$

c) $P(\text{roja o verde}) = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$

69. Se lanza un dado con forma de dodecaedro y las caras numeradas del 1 al 12. Halla la probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de 3





$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$A = \{3, 6, 9, 12\}$

$P(A) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

70. Se extrae una carta de una baraja española de 48 cartas. Calcula la probabilidad de que sea un nueve.

$E = \{48 \text{ cartas}\}$

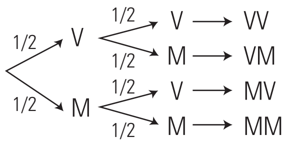
$A = \{9O, 9C, 9E, 9B\}$

$P(A) = \dfrac{4}{48} = \dfrac{1}{12}$

71. En una familia con dos hijos, halla la probabilidad que tiene de que sean:

a) los dos varones;

b) uno varón y el otro mujer.



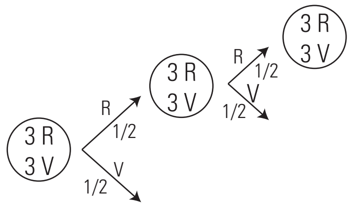
a) Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$P(VV) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

b) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(VM) + P(MV) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

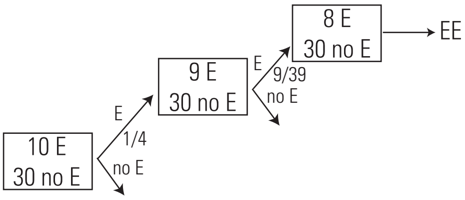
72. Una urna contiene 3 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se observa el color; se vuelve a introducir y se extrae otra bola. Calcula la probabilidad de que sean las dos rojas.



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$P(RR) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

73. Se extraen de una vez dos cartas de una baraja española de 40 cartas. Calcula la probabilidad de que las dos sean de espadas.



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

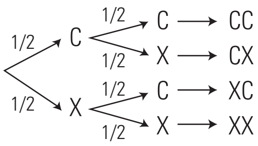
$P(\text{EE}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$

74. Se lanzan al aire dos dados de 4 caras numeradas del 1 al 4. Calcula la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea mayor que 5

	1	**2**	**3**	**4**
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

$P(\text{más de } 5) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

75. Se lanzan al aire dos monedas. Calcula la probabilidad de obtener a lo sumo una cara.



$P(\text{CC}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(\text{a lo sumo una cara}) = 1 - P(\text{CC}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

76. En un dado de quinielas, halla la probabilidad de no obtener el 2

$E = \{1, 1, 1, X, X, 2\}$

$P(\text{no obtener } 2) = \frac{5}{6}$

CON CALCULADORA

77. Halla, utilizando la calculadora:

a) $V_{9,\,4}$ **b)** $VR_{3,\,15}$

a) 3 024 b) 14 348 907

78. Halla, utilizando la calculadora:

a) P_{12} **b)** PC_9

a) 12! = 479 001 600 b) 8! = 40 320

79. Halla, utilizando la calculadora:

a) $C_{12,\,5}$ **b)** $C_{12,\,7}$

a) 792 b) 792

PROBLEMAS

80. En la carta de un restaurante se puede elegir un menú compuesto de un primer plato, un segundo plato y un postre. Hay para elegir 8 primeros platos, 5 segundos y 6 postres. ¿Cuántos menús diferentes se pueden elegir?

$8 \cdot 5 \cdot 6 = 240$ menús.

81. Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de cinco cifras se pueden formar sin repetir los dígitos? ¿Cuántos de ellos son pares?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 23 541, 31 524, $p = 5$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 120$

Serán pares todas las que terminen en 2 y 4

$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$

82. En un trofeo de verano juegan cuatro equipos. ¿De cuántas formas se pueden emparejar?

a) $E = \{A, B, C, D\}$, $m = 4$. Dos ejemplos significativos son: AB, AC, $p = 2$

b) No influye el orden. ⇒ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{4,\,2} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$

83. Existen 5 pueblos colocados en los vértices de un pentágono regular, y se quiere construir una carretera para unir cada dos pueblos. ¿Cuántas carreteras hay que hacer?

a) $E = \{A, B, C, D, E\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: AC, BC, $p = 2$

b) No influye el orden ⇒ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{5,\,2} = 5 \cdot \frac{4}{2} = 10$

84. El AVE que va de Madrid a Sevilla tiene cinco estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes se pueden sacar?

a) $E = \{A, B, C, D, E\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: AC, CA, $p = 2$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Variaciones ordinarias.

c) $V_{5,\,2} = 5 \cdot 4 = 20$

85. Un *byte* está formado por ceros y unos, y en total son 8. ¿Cuántos *bytes* diferentes se pueden presentar?

a) $E = \{0, 1\}$, $m = 2$. Dos ejemplos significativos son: 10010111, 11111111, $p = 8$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición. ⇒ Variaciones con repetición.

c) $VR_{2,\,8} = 2^8 = 256$

86. Tenemos siete clases de fruta para preparar batidos de tres sabores. ¿Cuántos sabores se pueden obtener?

a) $E = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, $m = 7$. Dos ejemplos significativos son: BDE, BFG, $p = 3$

b) No influye el orden ⇒ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{7,\,3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

87. En un certamen literario hay tres premios: ganador, finalista y accésit. Si participan 10 personas, ¿de cuántas formas se pueden dar los tres premios?

a) $E = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$, $m = 10$. Dos ejemplos significativos son: AGC, CGA, $p = 3$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Variaciones ordinarias.

c) $V_{10,\,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

88. ¿Cuántas banderas de tres colores diferentes se pueden formar con ocho colores?

a) $E = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, $m = 8$. Dos ejemplos significativos son: ADE, DAE, $p = 3$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición $\Rightarrow$ Variaciones ordinarias.

c) $V_{8,\,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

89. Una familia tiene 5 hijos. ¿Cuántas posibilidades hay con respecto al sexo de los hijos?

a) $E = \{V, M\}$, $m = 2$. Dos ejemplos significativos son: VVVMM, MMMMM, $p = 5$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición $\Rightarrow$ Variaciones con repetición.

c) $VR_{2,\,5} = 2^5 = 32$

90. Con las letras de la palabra RATÓN, ¿cuántas combinaciones de cinco letras se pueden formar, tengan o no sentido? ¿Cuántas empiezan por consonante?

a) $E = \{A, N, O, R, T\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: RATON, NOTAR, $p = 5$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición $\Rightarrow$ Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 120$

Empiezan por consonante: $3 \cdot P_4 = 3 \cdot 4! = 72$

91. Calcula la probabilidad de acertar una quiniela de pleno al 15 si se cubre una apuesta.

E tiene $VR_{3,\,15} = 3^{15} = 14\,348\,907$ posibilidades.

$P(\text{acertar}) = \dfrac{1}{14\,348\,907}$

92. En un grupo de 80 personas, 50 escuchan la radio, 60 ven la televisión y 30 oyen la radio y ven la televisión. Halla la probabilidad de que, elegida una persona al azar, no escuche la radio, ni vea la televisión.

$P(R) = \dfrac{50}{80} = \dfrac{5}{8}$

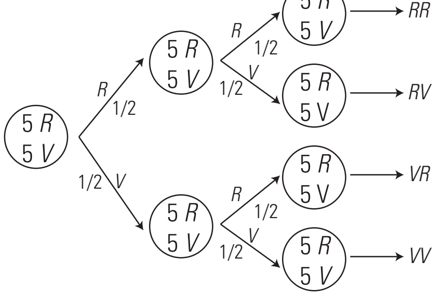
$P(T) = \dfrac{60}{80} = \dfrac{3}{4}$

$P(R \cap T) = \dfrac{30}{80} = \dfrac{3}{8}$

$P(R \cup T) = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{8} = 1$

P(no escuchar la radio, ni ver la televisión) =
$= 1 - P(R \cup T) = 1 - 1 = 0$

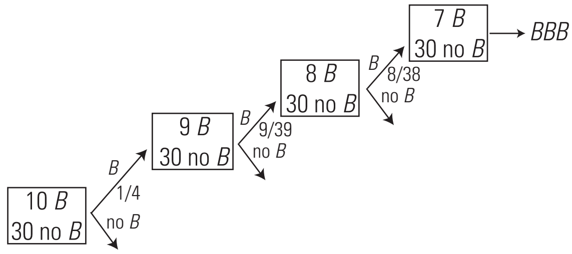
93. Una urna contiene 5 bolas rojas y 5 verdes. Se extrae una bola y se observa el color, se vuelve a introducir y se extrae otra bola. Calcula la probabilidad de que una sea roja y otra sea verde.



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(RV) + P(VR) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

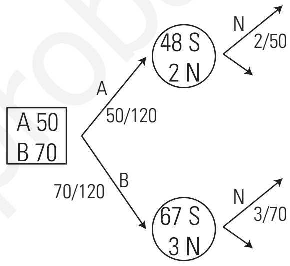
94. Se extraen de una vez tres cartas de una baraja española de 40 cartas. Calcula la probabilidad de que las tres sean de bastos.



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$P(BBB) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{9}{39} \cdot \dfrac{8}{38} = \dfrac{3}{247}$

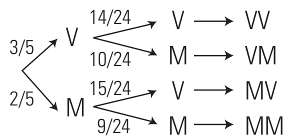
95. Se compran 50 ordenadores de una marca A y 70 de una marca B. De la marca A hay 2 que no funcionan; y de la marca B hay 3 que no funcionan. Si se elige al azar uno de los ordenadores, ¿cuál es la probabilidad de que no funcione?



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(\text{AN}) + P(\text{BN}) = \dfrac{50}{120} \cdot \dfrac{2}{50} + \dfrac{70}{120} \cdot \dfrac{3}{70} = \dfrac{1}{24}$

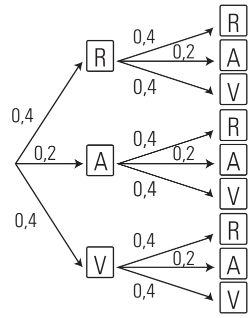
96. En una clase hay 15 chicos y 10 chicas. Si se eligen dos alumnos al azar, calcula la probabilidad de que los dos sean chicas.



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$P(\text{MM}) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{20}$

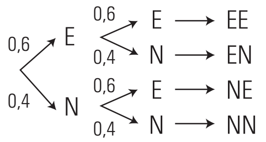
97. Una persona cruza dos semáforos para ir al trabajo. La probabilidad de que cada uno de ellos esté rojo es de 0,4; de que esté ámbar, 0,2, y de que esté verde, 0,4. Calcula la probabilidad de que uno esté verde y el otro rojo.



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(\text{RV}) + P(\text{VR}) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}32$

98. Un jugador de baloncesto tiene una probabilidad de 0,6 de hacer un triple. Si hace dos lanzamientos de triple, ¿qué probabilidad tiene de no encestar ninguno?



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$P(\text{NN}) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$

PARA PROFUNDIZAR

99. Un equipo de fútbol está formado por 11 jugadores. Seis se ponen de pie, y delante los otros cinco agachados. ¿De cuántas formas se pueden colocar para hacer una foto si el portero siempre está de pie el primero por la izquierda?

Dejaremos el portero fijo y no lo tendremos en cuenta a la hora de contar.

a) $E = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$, $m = 10$. Dos ejemplos significativos son: AGCDEFBIJH, IGECABDFHJ, $p = 10$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición $\Rightarrow$ Permutaciones ordinarias.

c) $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$

100. ¿De cuántas formas un entrenador puede elegir un equipo de fútbol (formado por un portero, 3 defensas, 2 medios, 2 extremos y 3 delanteros) que tiene 25 jugadores, de los que 3 son porteros; 6, defensas; 4, medios; 4, extremos, y el resto, delanteros?

$C_{3,1} \cdot C_{6,3} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{8,3} = 3 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 56 = 120\,960$

101. ¿Cuántas matrículas totales se pueden hacer con el sistema actual, que se compone de cuatro números y tres letras? Las letras disponibles son 20

$VR_{10,4} \cdot VR_{20,3} = 10^4 \cdot 20^3 = 10\,000 \cdot 8\,000 = 80\,000\,000$

102. Una bolsa tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos una bola, anotamos el número y la volvemos a introducir; volvemos a repetir el proceso otras dos veces. ¿Cuántos resultados distintos se pueden dar?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 22 323, 33 222, $p = 5$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición $\Rightarrow$ Variaciones con repetición.

c) $VR_{5,5} = 5^5 = 3\,125$

103. Una bolsa tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos tres bolas de una vez. ¿Cuántos resultados distintos se pueden presentar?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 125, 235, p = 3

b) No influye el orden $\Rightarrow$ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{5,3} = 5 \cdot \dfrac{4}{2} = 10$

104. Con las cifras impares, ¿cuántos números de 3 cifras se pueden formar sin repetir ninguna? ¿Cuántos son mayores de 500?

a) $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 975,795, $p = 3$

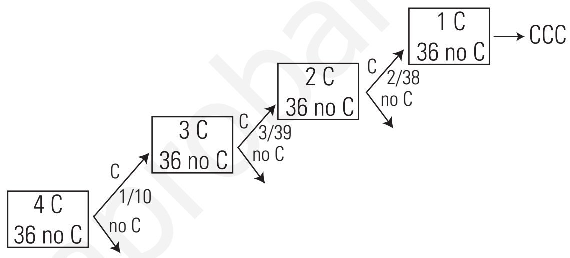
b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición $\Rightarrow$ Variaciones ordinarias.

c) $V_{5,3} = 5^3 = 125$

Serán mayores de 500 todos los que empiecen por 5, 7 o 9

$3 \cdot VR_{4,2} = 3 \cdot 4^2 = 48$

105. Se extraen, de una baraja española de 40 cartas, tres cartas al azar. Calcula la probabilidad de que sean caballos las tres.



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

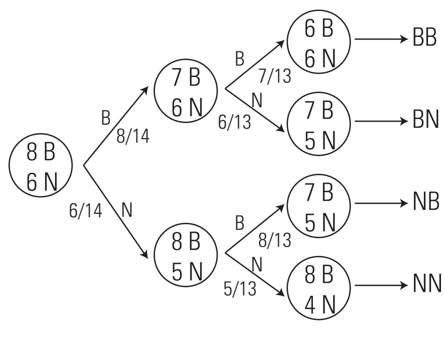
$P(\text{CCC}) = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{3}{39} \cdot \dfrac{2}{38} = \dfrac{1}{2\,470}$

106. Se lanzan al aire dos dados, uno de 6 caras numeradas del 1 al 6 y el otro de 4 caras numeradas del 1 al 4. ¿Qué probabilidad hay de que sumen 7?

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

$P(9) = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$

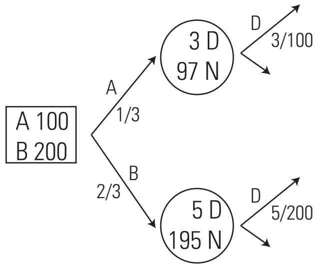
107. En un cajón tenemos 8 calcetines blancos y 6 negros. Si sacamos dos aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que los dos sean de distinto color?



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(\text{BN}) + P(\text{NB}) = \dfrac{8}{14} \cdot \dfrac{6}{13} + \dfrac{6}{14} \cdot \dfrac{8}{13} = \dfrac{48}{91}$

108. Se tienen dos máquinas produciendo tornillos. Una produce 100 tornillos, de los que 3 son defectuosos, y la otra produce 200 tornillos, de los que 5 son defectuosos. Si se escoge al azar uno de los 300 tornillos, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(\text{AD}) + P(\text{BD}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{200} = \frac{2}{75}$

109. Se elige aleatoriamente una ficha de un dominó. ¿Qué probabilidad hay de que sea doble?

$P(\text{doble}) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

110. Se ha trucado un dado de forma que:

$\boldsymbol{P(1) = P(3) = P(5) \qquad P(2) = P(4) = P(6) = 2P(1)}$

a) Halla la probabilidad de obtener un 3

b) Halla la probabilidad de obtener un 6

$P(1) = P(3) = P(5) = x$

$P(2) = P(4) = P(6) = 2x$

$3x + 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

a) $P(3) = \frac{1}{9}$

b) $P(6) = \frac{2}{9}$

Aplica tus competencias

111. ¿Cuántas palabras hay de 10 caracteres?

$VR_{2,\,10} = 2^{10} = 1\,024$, que se conoce con el nombre de 1 kB (Kilobyte).

112. ¿Cuántas palabras hay de 20 caracteres?

$VR_{2,\,20} = 2^{20} = 1\,048\,576$, que se conoce con el nombre de 1 MB (Megabyte).

113. ¿Cuántas palabras hay de 30 caracteres?

$VR_{2,\,30} = 2^{30} = 1\,073\,741\,824$, que se conoce con el nombre de 1 GB (Gigabyte).

114. ¿Cuántas palabras hay de 40 caracteres?

$VR_{2,\,40} = 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$, que se conoce con el nombre de 1 TB (Terabyte).

Comprueba lo que sabes

1. Escribe el enunciado de la regla de Laplace y pon un ejemplo.

La regla de Laplace dice que la probabilidad de un suceso *A*, de un espacio muestral *E*, formado por sucesos elementales *equiprobables,* es igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles.

$P(A) = \frac{\text{N.º de casos favorables al suceso } A}{\text{N.º de casos posibles}}$

Sucesos equiprobables:
Los sucesos elementales de un espacio muestral son *equiprobables* si tienen la misma posibilidad de presentarse; sólo en estos casos se puede aplicar la regla de Laplace.

Ejemplo:

Halla la probabilidad de obtener un número primo al lanzar un dado de seis caras.

Espacio muestral: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso $A = \{2, 3, 5\}$

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

2. Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar sin repetir ninguna? ¿Cuántos son mayores de 300?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: 134, 341, $p = 3$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Variaciones ordinarias.

c) $V_{5,\,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Serán mayores de 300 los que empiecen por 3, 4 o 5

$3 \cdot V_{4,\,2} = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

3. Con las letras de la palabra LIBRO, ¿cuántas combinaciones de letras, tengan o no sentido, se pueden formar?

a) $E = \{B, I, L, O, R\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: LIBRO, ROBIL, $p = 5$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 120$

4. En una clase hay 25 alumnos y se quiere hacer una comisión formada por tres alumnos. ¿De cuántas formas se puede elegir?

a) $E = \{1, 2, 3 \ldots, 25\}$, $m = 25$. Dos ejemplos significativos son: 358, 258, $p = 3$

b) No influye el orden ⇒ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{25,\,3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,300$

5. Se sabe que: $P(A) = 3/5$, $P(B) = 2/5$ y $P(A \cap B) = 1/3$

Halla: $P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

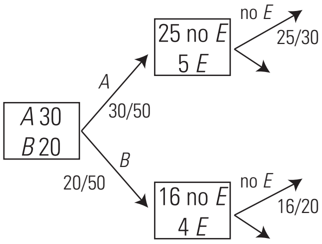
6. Se lanzan al aire dos dados de seis caras numeradas del 1 al 6 y se suman los puntos obtenidos. ¿Qué suma de puntuaciones tiene mayor probabilidad? Halla su probabilidad.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La suma de puntuaciones que tiene mayor probabilidad es 7, porque es el resultado que más veces se presenta.

$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

7. Se prueba en 30 personas una vacuna *A* contra la gripe y enferman 5. Se prueba en 20 personas otra vacuna *B* y enferman 4. Si se elige una de las personas al azar, ¿qué probabilidad hay de que no haya enfermado?



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(\text{no } E) = \frac{30}{50} \cdot \frac{25}{30} + \frac{20}{50} \cdot \frac{16}{20} = \frac{41}{50}$

8. Un jugador de fútbol mete 4 goles de cada 10 tiros a puerta. Si tira 3 tiros a puerta, halla la probabilidad de que, al menos, meta un gol.

$P(\text{NNN}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{27}{125}$

$P(\text{al menos 1 gol}) = 1 - P(\text{NNN}) = 1 - \frac{27}{125} = \frac{98}{125}$

Windows/Linux WIRIS

PRACTICA

122. Con las letras *a*, *b* y *c* forma todas las combinaciones que puedas de dos letras y calcula cuántas son.

aa, *ab*, *ac*, *ba*, *bb*, *bc*, *ca*, *cb*, *cc*

$VR_{3,\,2} = 9$

123. Con las cifras 1, 2, 3 y 4 forma todos los números que puedas de tres cifras sin repetir ninguna y calcula cuántos son.

123, 132, 213…

$V_{4,\,3} = 24$

124. Con las cifras 1, 2, 3 y 4 forma todos los números que puedas sin repetir ninguna y calcula cuántos son.

1234, 1243, 1324…

$P_4 = 24$

125. Con las cifras 1, 2, 3 y 4 forma todos los números que puedas de tres cifras sin repetir ninguna de modo que cada dos números no tengan las mismas cifras y calcula cuántos son.

123, 124, 234…

$C_{4,\,3} = 4$

126. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$, $V = \{a, e, i, o, u\}$. Calcula $A \cup V$ y $A \cap V$

$A \cup V = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$

$A \cap V = \{a, e\}$

127. Si $P(A) = 2/3$, $P(B) = 3/5$ y $P(A \cup B) = 4/5$, calcula $P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = \frac{7}{15}$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

128. Con los dígitos impares, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar?

$VR_{5,\,3} = 25$

129. Un examen consta de 8 preguntas de las que hay que elegir 5. ¿De cuántas formas se pueden elegir?

$C_{8,\,5} = 56$

130. En una carrera de velocidad de 100 m participan 5 atletas. ¿De cuántas formas pueden entrar en meta?

$P_5 = 120$

131. Una urna tiene 4 bolas rojas y 5 verdes. Se extrae una bola, se observa el color y se vuelve a introducir; luego se extrae otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?

$P(\text{RR}) = \frac{16}{81}$

132. Un barco cubre diariamente el servicio entre dos puertos. Se sabe que la probabilidad de tener un accidente en un día con sol es 0,005, y en un día de niebla, 0,07. ¿Cuál es la probabilidad de que haya habido un accidente un día de un mes en el que hubo 18 días con sol y 12 con niebla?

$P(\text{Accidente}) = 0{,}031$

Evaluación de diagnóstico

BLOQUE V: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. En un peaje de una autopista se ha registrado el número de ocupantes por coche en los 100 primeros vehículos recogiéndose los siguientes resultados:

N.º de ocupantes	N.º de vehículos
1	15
2	25
3	35
4	20
5	5

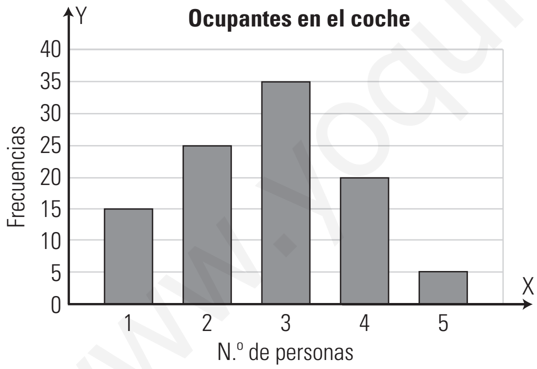
a) Clasifica el carácter estadístico.
b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.
c) Calcula los parámetros de dispersión que tengan sentido.
d) Haz una representación gráfica de los datos en un gráfico de barras.
e) Interpreta los resultados.

a) Cuantitativo discreto.

b) Moda: 3; mediana: 3; media: 2,75

c) Varianza: 1,19; σ = 1,09; *CV* = 40%

d) Gráfico:



e) El número de ocupantes se distribuye alrededor de 2,75 personas con una dispersión grande.

2. La distribución del tiempo en minutos que dedican a hacer deporte un grupo de personas es la siguiente:

Tiempo (min)	N.º de personas
0-20	1
20-40	4
40-60	12
60-80	5
80-100	2
100-120	1

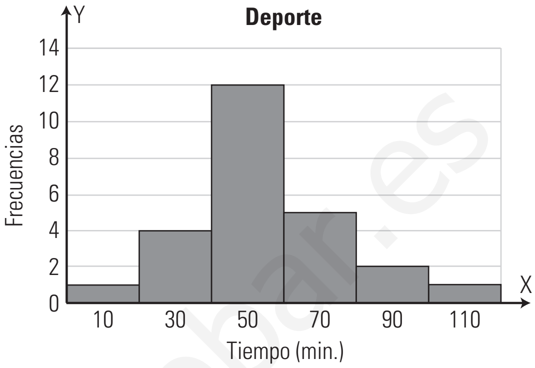
a) Clasifica el carácter estadístico.
b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.
c) Calcula los parámetros de dispersión que tengan sentido.
d) Haz una representación gráfica de los datos en un histograma.
e) Interpreta los resultados.

a) Cuantitativo continuo.

b) Moda: 50; mediana: 50; media: 55

c) Varianza: 456,96; σ = 21,38; *CV* = 39%

d) Gráfico:



e) El tiempo dedicado al deporte se distribuye alrededor de 55 minutos con una dispersión grande.

3. Un examen de matemáticas consta de ocho preguntas y pueden responderse en el orden que se quiera. ¿De cuántas formas puede contestarse el examen?

$P_8 = 8! = 40\,320$

4. En una liga de balonmano escolar participan 15 equipos y se enfrentan todos los equipos en partido de ida y vuelta. ¿Cuántos partidos se juegan en total?

$V_{15,\,2} = 210$

5. Se lanza al aire 5 veces un dado de cuatro caras numeradas del 1 al 4. Calcula cuántos resultados se pueden obtener.

$VR_{4,\,5} = 1\,024$

6. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un octógono?

$C_{8,\,2} - 8 = 20$

7. Lanzamos dos dados de seis caras numeradas del 1 al 6 y anotamos su suma. Calcula la probabilidad de que la suma sea 10

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	**10**
5	6	7	8	9	**10**	11
6	7	8	9	**10**	11	12

$P(10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

8. En un centro escolar el 40% de los alumnos elige francés; el 70%, inglés, y el 20%, ambos idiomas.
a) Calcula la probabilidad de que, elegido un alumno al azar, estudie francés o inglés.
b) Si en el centro hay 500 alumnos, ¿cuántos cabe esperar que estudien francés o inglés?

a) F = estudiar francés; I = estudiar inglés.

$P(F \cup I) = P(F) + P(I) - P(F \cap I) = 0,4 + 0,7 - 0,2 = 0,9$

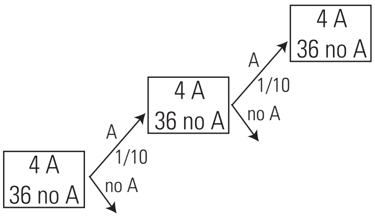
b) $500 \cdot 0,9 = 450$ alumnos.

9. Extraemos dos cartas de una baraja española de 40 cartas. Calcula la probabilidad de que sean dos copas en los siguientes casos:

a) con devolución después de cada extracción;

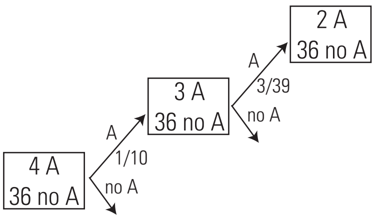
b) sin devolución.

a) Con devolución:



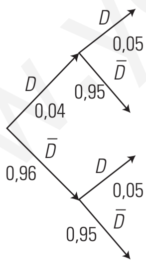
$$P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A) = \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{1\,600}$$

b) Sin devolución:



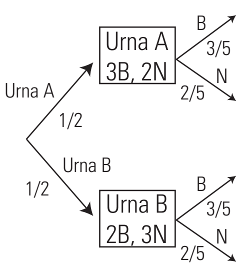
$$P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A/A) = \frac{1}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{520}$$

10. La fabricación de una pieza electrónica pasa por dos procesos consecutivos, A y B. Se sabe que la probabilidad de un defecto en el proceso A es 0,04 y de un defecto en B es 0,05. ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza no sea defectuosa?



$$P(\overline{D} \cap \overline{D}) = 0,96 \cdot 0,95 = 0,912$$

11. Tenemos dos urnas, una A que contiene 3 bolas blancas y 2 negras y otra urna B que contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Se elige una de las urnas al azar y a continuación se extrae una bola de la urna elegida, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea blanca?



B = sacar bola blanca

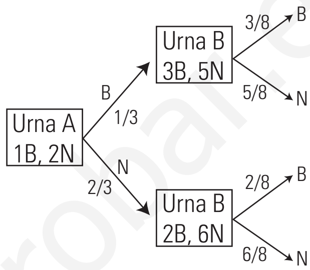
UA = elegir la urna A

UB = elegir la urna B

$P(B) = P(UA) \cdot P(B/UA) + P(UB) \cdot P(B/UB) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{1}{2}$$

12. Tenemos dos urnas, una A que contiene 1 bola blanca y 2 negras y otra urna B que contiene 2 bolas blancas y 5 negras. Se saca una bola de la urna A y se pasa a la urna B. Se extrae a continuación una bola de la urna B. Calcula la probabilidad de que la bola sea blanca.

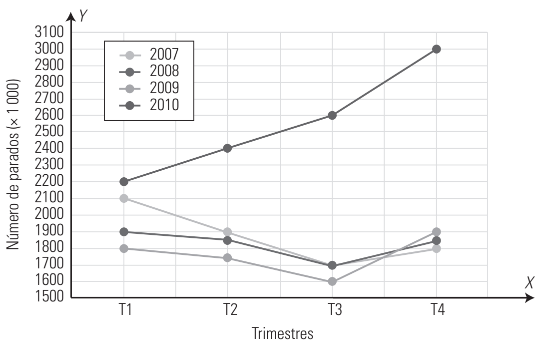


$P(B) = P(B) \cdot P(B/B) + P(N) \cdot P(B/N) =$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{8} = \frac{3}{24} + \frac{4}{24} = \frac{7}{24}$$

13. Evolución del paro.

A partir de los datos del gráfico resuelve las siguientes cuestiones:



a) ¿Qué magnitud se representa en el eje *X*? ¿En qué unidades?

b) ¿Qué magnitud se representa en el eje *Y*? ¿En qué unidades?

c) Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Número de parados (miles de personas)				
Trimestres	**Años**			
	2007	**2008**	**2009**	**2010**
T1	**2 100**			
T2			**1 750**	
T3				
T4		**1 850**		

d) Para estudiar la evolución del paro en los últimos trimestres, se han distribuido los datos en la siguiente tabla. Copia en tu cuaderno y completa los datos que faltan:

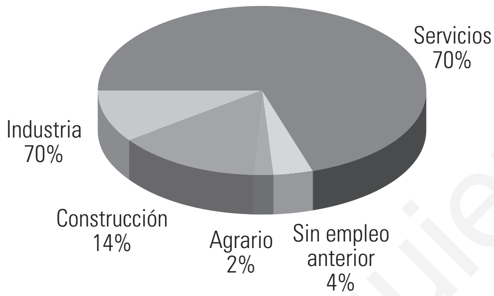
Año	2009				2010			
Trimestres	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
N.º de parados (×1 000)	1 800	1 750	1 600	1 900	2 200	2 400	2 600	3 000
Variación trimestral (%)		−3		19		9	8	

Ahora completa las siguientes afirmaciones (los porcentajes están redondeados):

«En el primer trimestre del año 2010, el paro ha aumentado un ■ con respecto al ■ ■ del año ■»

«En el segundo trimestre del año 2009, el paro ■ un ■% con respecto al ■ ■ del ■ año».

e) En un medio de comunicación han publicado los datos sobre el número de parados del último trimestre del 2010 con el siguiente gráfico. Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente realizando los cálculos necesarios:



Sector	N.º de parados (×1 000)
Agrario	
Construcción	
Industria	**300**
Servicios	
Sin empleo anterior	**120**
Total	

a) El tiempo en trimestres.

b) Número de parados en miles de personas.

c)

Número de parados (miles de personas)				
Trimestres	Años			
	2007	2008	2009	2010
T1	**2 100**	1 900	1 800	2 200
T2	1 900	1 850	**1 750**	2 400
T3	1 700	1 700	1 600	2 600
T4	1 800	**1 850**	1 900	3 000

d)

Año	2009				2010			
Trimestres	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
N.º de parados (×1 000)	1 800	1 750	1 600	1 900	2 200	2 400	2 600	3 000
Variación trimestral (%)		**−3**	−9	**19**	16	**9**	**8**	15

«En el primer trimestre del año 2010, el paro ha aumentado un **16%** con respecto al **cuarto trimestre** del año **2009**».

«En el segundo trimestre del año 2009, el paro **descendió** un **3%** con respecto al **primer trimestre** del **mismo** año».

e)

Sector	N.º de parados (×1 000)
Agrario	$3\,000 \cdot 0{,}02 = 60$
Construcción	$3\,000 \cdot 0{,}14 = 420$
Industria	**300**
Servicios	$3\,000 \cdot 0{,}7 = 2\,100$
Sin empleo anterior	**120**
Total	3 000

Recursos complementarios del Proyecto

RECURSOS COMPLEMENTARIOS DEL PROYECTO

Programación

Archivo informático editable (documento Word) que contiene la Programación de aula.

Proyecto curricular

Archivo informático editable (documento Word) que contiene:

I. La Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en la Ley Orgánica de Educación (LOE).

II. Los alumnos y alumnas de ESO: Marco general psicoevolutivo.

III. Principios metodológicos del Proyecto Bruño.

IV. Matemáticas.

1. Perfil de salida curricular.
2. Modelo de actos intelectuales.
3. Principios metodológicos y didácticos.
4. Cálculo mental. El carné de calculista.
5. Organización de una clase.
6. Organización de una unidad didáctica.
7. Matemáticas con informática.
8. Organización de cada libro de la ESO.
9. Atención a la diversidad del alumnado.
10. Educación en valores y para la convivencia (contenidos transversales).
11. Concepto de evaluación.
    - 11.1. Características de la evaluación.
    - 11.2. Instrumentos o pruebas.
    - 11.3. Características de las pruebas.
    - 11.4. ¿Qué evaluar?
    - 11.5. Cómo evaluar y criterios de calificación.
    - 11.6. ¿Cuándo evaluar?
    - 11.7. Evaluación de diagnóstico.
12. Competencias básicas.
    - 12.1. Competencias básicas.
13. Objetivos generales de la etapa.
14. Contenidos de la etapa.
15. Criterios de evaluación de la etapa.

Solucionario

Archivo informático (formato pdf) que contiene el solucionario de todas las actividades del libro.

Gestor de Evaluaciones

El Gestor de Evaluaciones consta de una base de datos de actividades y un programa informático que permite generar aleatoriamente pruebas de evaluación de los contenidos de las unidades que se deseen evaluar.

Las actividades están agrupadas en ejercicios y problemas y clasificadas según las unidades didácticas del libro del alumno.

Para obtener una prueba de evaluación, el docente debe elegir las unidades didácticas que desea evaluar y el número de actividades que quiere incluir en la prueba. El programa genera automáticamente siempre una prueba de evaluación diferente, así como el solucionario de las actividades incluidas en la misma.

El programa permite también repasar la base de datos de actividades, con la posibilidad de marcar algunas para que se incluyan necesariamente en la prueba generada o descartar otras.

Igualmente, es posible editar el enunciado de las actividades cambiando algunos de sus datos, así como incluir en la base de datos nuevas actividades. Obviamente, el solucionario no recogerá estas modificaciones o ampliaciones.

Plantillas de Valoración del Desarrollo de las Competencias Básicas

Las plantillas de **Valoración de competencias básicas** ayudan al profesorado a realizar una valoración continua de las dimensiones de las competencias básicas que los alumnos van adquiriendo a medida que trabajan con los distintos materiales didácticos que forman parte del proyecto.

Las plantillas pueden utilizarse en soporte informático o bien impresas.

Actividades Interactivas

ACTIVIDADES SCORM

En cada unidad se proponen 40 actividades interactivas para ser utilizadas en plataforma Moodle.

ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

Las actividades interactivas de autoevaluación están organizadas según las unidades didácticas del libro del alumno.

Consisten en una prueba de comprobación de los contenidos aprendidos en la unidad didáctica que consta de 8 preguntas de opción múltiple en las que se avanza gradualmente.

En cada pregunta se puede comprobar el resultado, repetirla cuantas veces se desee y avanzar o retroceder en la secuencia de actividades. Al final del proceso se muestra las respuestas correctas y las acertadas. Son compatibles con entornos SCORM.

Libros Electrónicos

El **libro electrónico** desarrolla los contenidos curriculares de la materia empleando variados recursos u objetos digitales, tanto dinámicos como interactivos, capaces de provocar una enseñanza y aprendizaje más motivadores, dinámicos y significativos.

El libro electrónico se visualiza en un entorno que incluye herramientas de navegación y de utilidades para personalizar la publicación (señalar, marcar, añadir comentarios u archivos, etc.).

En 4.º de ESO, el libro electrónico está orientado a su utilización en Pizarra Digital Interactiva (PDI). Además de los recursos didácticos digitales, incluye accesos a:

- Las programaciones de curso y de aula.
- Las soluciones de todas las actividades propuestas.
- Las soluciones de todas las actividades interactivas.

En los libros electrónicos el proceso de enseñanza-aprendizaje se apoya y consolida con estos **recursos didácticos digitales:**

Animaciones

- **Construcción del apartado *Organiza tus ideas.*** Es un mapa conceptual. Se realiza el repaso de los contenidos trabajados en la unidad. De este modo el profesorado, en la Pizarra Digital Interactiva (PDI), puede construir el esquema desde el principio hasta el fin, obteniendo así una visión global de la misma. Con el botón se controla la secuenciación de las distintas pantallas para que el docente pueda incluir sus comentarios durante la explicación en la Pizarra Digital Interactiva (PDI).
- **Desarrollo de contenidos teóricos.** Se pretende repasar un contenido trabajado en la unidad. Con el botón que controla la secuenciación de las distintas pantallas el profesorado puede incluir sus comentarios durante la explicación en la Pizarra Digital Interactiva (PDI).
- **Modelos de ejercicios resueltos.** Este elemento se utiliza para explicar con detalle todos los aspectos relacionados con un determinado ejercicio resuelto del libro del alumno. En cada pantalla generalmente se realiza la locución del procedimiento seguido en la resolución.
- ***Applets* de Wiris y GeoGebra y hojas de cálculo de Excel o Calc**

  Los *applets* están diseñados de forma que el alumnado dispone de unas herramientas virtuales que le permiten resolver cada tipo de ejercicio o problema de Matemáticas.
- **Tutoriales de cada unidad de Wiris, GeoGebra, Excel o Calc**

  Se da una herramienta virtual en la que se explica de forma concreta el funcionamiento del programa correspondiente aplicado a los contenidos de la unidad.

- **Tutoriales generales de Wiris, GeoGebra, Excel y Calc**

  Son herramientas virtuales, una para cada programa, en la que se da una visión completa y detallada del funcionamiento de cada uno de ellos.

Enlaces a páginas web: Son vínculos a páginas de **Internet** que pueden servir de complemento a los contenidos tratados.

Galería de imágenes: Es una selección de imágenes relativas a los contenidos desarrollados en las unidades didácticas, a veces con apoyo de texto explicativo, que pueden ampliarse para una visualización más detallada**.**

Glosario de términos: Breve diccionario con los términos fundamentales del vocabulario propio de la materia.

Actividades interactivas: El uso de las TIC con fines didácticos se potencia a través de las actividades interactivas. Para ello, el libro electrónico incorpora actividades de dos tipos: de desarrollo de unidad y de autoevaluación.

- Las **actividades interactivas de desarrollo de las unidades didácticas** corresponden al Taller Digital.
- Las **actividades interactivas de autoevaluación** o comprobación de lo aprendido consisten en preguntas de opción múltiple.