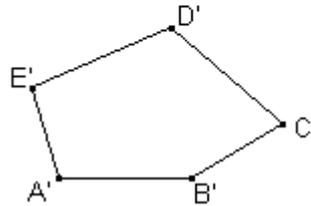
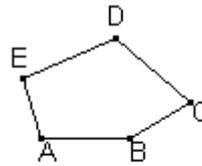


Semejanza. Teorema de Tales

Dos polígonos son **semejantes** si los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales.

$ABCDE \approx A'B'C'D'E'$ si:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}', \hat{D} = \hat{D}', \hat{E} = \hat{E}' \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} = r \end{cases}$$



Los elementos que se corresponden se llaman **homólogos**.

Se llama **razón de semejanza** r a la constante de proporcionalidad entre los lados homólogos.

Teorema de Tales

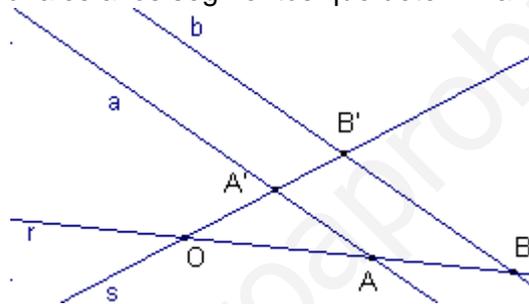
Si dos rectas secantes r, s están cortadas por paralelas a, b , los segmentos que determinan sobre una de las secantes son proporcionales a los segmentos que determinan en la otra secante

a) $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$

También se cumple:

b) $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$

c) $\frac{\overline{OA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BB'}}$

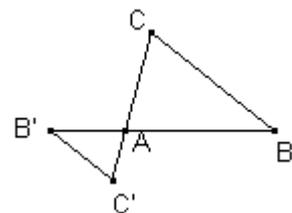
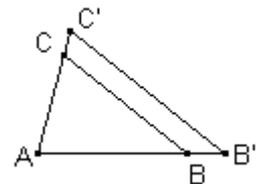


Triángulos en posición de Tales:

Dos triángulos están en posición de Tales si dos lados de los dos triángulos están a las mismas semirectas d'origen

común o prolongaciones y el tercer lado de un triángulo es paralelo al tercer lado del otro triángulo.

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes



Criterios de semejanza de triángulos.

Sean los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$

Criterio 1.

Si $\hat{A} = \hat{A}'$, $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, entonces, $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$

Es decir, dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados correspondientes que formen el ángulo proporcionales

Criterio 2.

Si $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, entonces, $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$

Es decir, dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos correspondientes iguales.

Criterio 3.

Si $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$, entonces, $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$

Es decir, dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados correspondientes proporcionales.

Relación entre los polígonos semejantes.

Razón de los perímetros de dos polígonos (figuras) semejantes.

La razón de los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza.

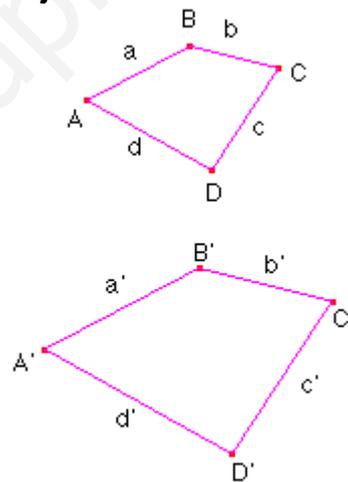
Consideramos los polígonos semejantes ABCD y A'B'C'D'.

Sea r la razón de semejanza.

Entonces:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = r$$

$$\frac{\text{perímetro } A'B'C'D'}{\text{perímetro } ABCD} = \frac{a'+b'+c'+d'}{a+b+c+d} = \frac{r(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = r$$



Esta relación es cierta para cualquier par de segmentos homólogos que se tomen sobre los polígonos semejantes.

Por ejemplo, las diagonales de un cuadrado son semejantes y tienen la misma razón de semejanza que la de los cuadrados.

Razón de las áreas de dos polígonos (figuras) semejantes.

La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

Consideramos los rectángulos semejantes ABCD y A'B'C'D'.

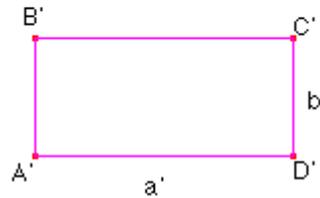
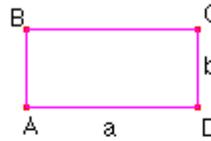
Sea r la razón de semejanza.

Entonces:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = r$$

Podemos obtener las siguientes relaciones:

$$\frac{\text{área A'B'C'D'}}{\text{área ABCD}} = \frac{a' \cdot b'}{a \cdot b} = \frac{r^2 \cdot a \cdot b}{a \cdot b} = r^2$$



Razón de los volúmenes de dos cuerpos semejantes.

La razón de los volúmenes de dos cuerpos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

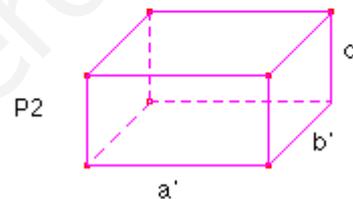
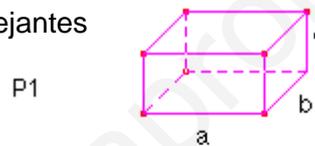
Consideremos los paralelepípedos semejantes:

Entonces:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = r$$

Podemos obtener las siguientes relaciones:

$$\frac{\text{Volumen P2}}{\text{Volumen P1}} = \frac{a' \cdot b' \cdot c'}{a \cdot b \cdot c} = \frac{r^3 \cdot a \cdot b \cdot c}{a \cdot b \cdot c} = r^3$$



Planos, mapas y maquetas.

Planos y mapas son figuras semejantes a la proyección del objeto real sobre el plano (o mapa).

Se llama **escala** a la razón de semejanza entre las figuras del plano (o mapa) y la realidad.

Se representa de la forma 1:r. Su significado es: 1 unidad del plano corresponde a r unidades de la realidad.

Maquetas son construcciones de cuerpos semejantes a cuerpos de la realidad. Las maquetas también se realizan mediante una escala.

Ejercicios de autoaprendizaje.

Ejercicio 1

Aplicando el teorema de Tales divide un segmento en 3 partes iguales:

Solución:

Dibujamos el segmento \overline{AB}

Dibujamos una semirecta de origen el punto A.

Con el compás dibujamos los puntos X, Y, Z

tal que $\overline{AX} = \overline{XY} = \overline{YZ}$

Dibujamos la recta r que pasa por los puntos B, Z.

Dibujamos las rectas s, t paralelas a la recta r que pasan por los puntos Y, X, respectivamente.

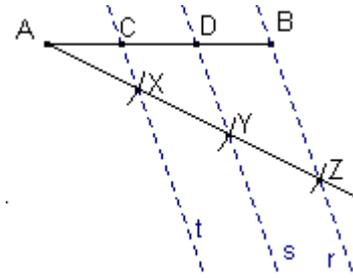
Hacemos la intersección de las rectas s, t y el segmento \overline{AB} que determinan los puntos D, C respectivamente.

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow 1 = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}, \text{ entonces, } \overline{AC} = \overline{CD}$$

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \Rightarrow 1 = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}, \text{ entonces, } \overline{CD} = \overline{DB}$$

Por tanto, $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DB}$



Ejercicio 2:

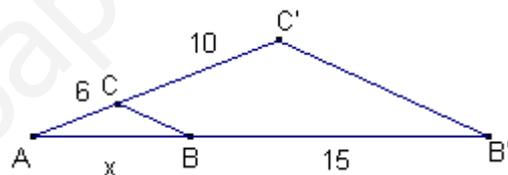
Sean los triángulos $\triangle ABC, \triangle AB'C'$.

Calcula el valor desconocido x.

Solución:

Notamos que los dos triángulos están en posición de Tales, por tanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CC'}}, \quad \frac{x}{15} = \frac{6}{10}, \text{ resolviendo la ecuación } x = 9$$



Ejercicio 3:

Dos triángulos semejantes tienen una superficie de 20cm^2 y 30cm^2 respectivamente.

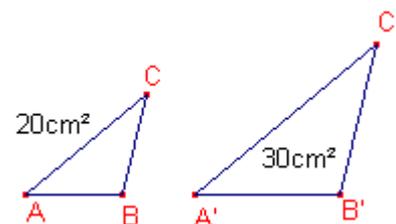
Determina la razón de semejanza de los dos triángulos.

Solución:

Si la razón de semejanza de dos triángulos es r la razón de proporcionalidad de las superficies es r^2

$$\frac{\text{área}A'B'C'}{\text{área}ABC} = r^2 \quad r^2 = \frac{30}{20}$$

Entonces la razón de semejanza de los dos triángulos es: $r = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22$



Problemas Propuestos.

1. Divide un segmento cualquiera en 4 partes iguales utilizando el teorema de Tales. Sabrías hacerlo por otro procedimiento exacto.

2. Divide un segmento cualquiera en 5 partes iguales utilizando el teorema de Tales.

3. Divide un segmento cualquiera en 3 partes proporcionales a 2, 3, 5 utilizando el teorema de Tales.

4. De las parejas de triángulos siguientes conocemos los lados, determina cuales son semejantes y cuales no lo son.

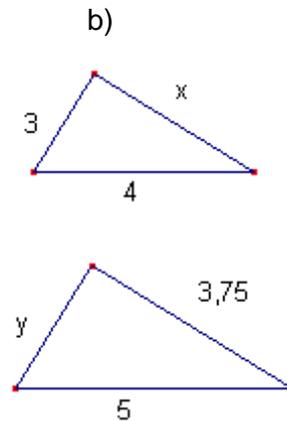
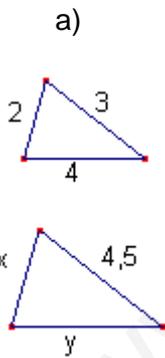
En caso afirmativo indica la razón de semejanza:

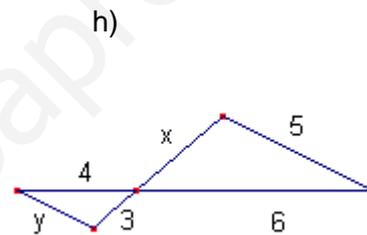
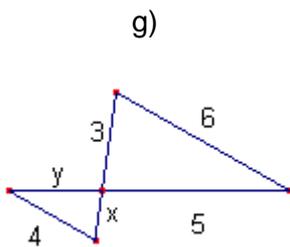
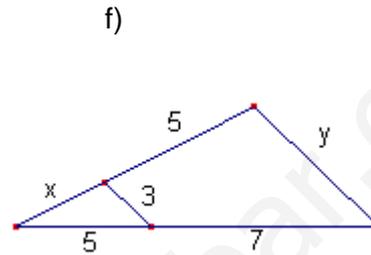
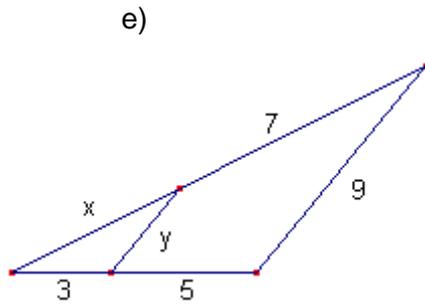
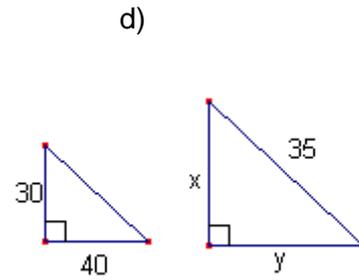
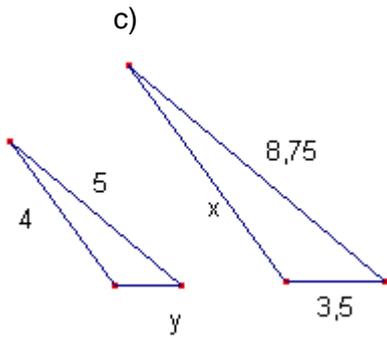
- a) 40, 30, 50 120, 90, 150
- b) 7, 7, 7 20, 20, 20
- c) 50, 60, 70 6, 7, 8
- d) 10, 5, 15 6, 3, 9
- e) 40, 60, 70 6, 9, 10
- f) 3, 9, 3 20, 40, 20
- g) 60, 30, 60 2, 4, 2

5. Las parejas de triángulos siguientes son semejantes. Determina en cada caso la razón de semejanza y los valores desconocidos:

- a) 2, 4, 5 4, x, 10
- b) 5, 8, 10 150, x, y
- c) 30, 40, 50 x, 10, y

6. Las parejas de triángulos siguientes son semejantes. Determina en cada caso la razón de semejanza y los valores desconocidos:





7. Las parejas de triángulos siguientes son semejantes. Determina en cada caso los valores desconocidos.

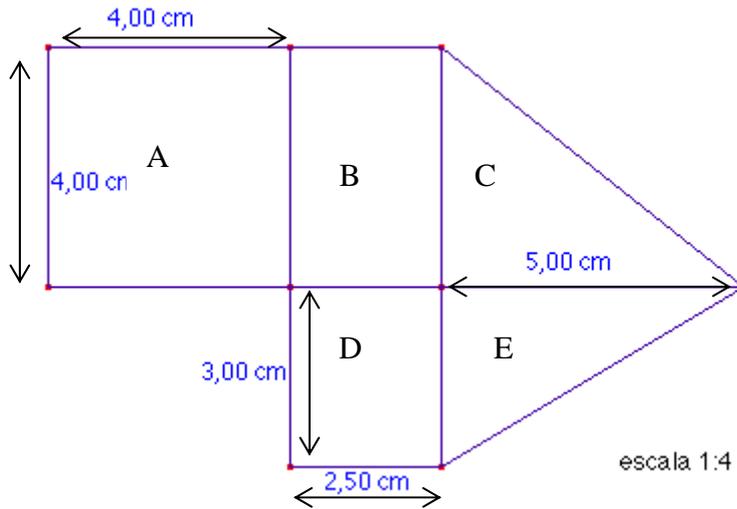
- | | | |
|----|-------------------------------|-------------------------------|
| a) | $45^\circ, 90^\circ, x^\circ$ | $45^\circ, y^\circ, z^\circ$ |
| b) | $35^\circ, 65^\circ, x^\circ$ | $y^\circ, 65^\circ, z^\circ$ |
| c) | $35^\circ, 45^\circ, x^\circ$ | $a^\circ, b^\circ, c^\circ$ |
| d) | $x^\circ, 35^\circ, y^\circ$ | $105^\circ, a^\circ, b^\circ$ |

8. Una persona mide 1'75 m en el mismo instante que la medida de su sombra es 1 m, la sombra de un edificio mide 25 m. Calcula la altura del edificio.

9. Un rectángulo tiene una diagonal de 75 m. Calcula sus dimensiones sabiendo que es semejante a otro rectángulo de lados 36 m y 48 m.

10. La razón de semejanza de dos figuras es 6 determina la relación de sus áreas. Si la pequeña mide 10 cm^2 calcula el área de la grande.
11. El área de un cuadrado es 81 cm^2 . Calcula la longitud de otro cuadrado sabiendo que es más grande y la razón de semejanza es 5.
12. El volumen de una esfera es de 1000 cm^3 . Calcula el volumen de otra esfera que duplique el radio.
13. Una escultura de 100 cm de altura pesa 2500 gr.
¿Cuánto pesará una reproducción de la misma material y de 220 cm de altura?
14. Una manguera de jardín tiene un radio de 1'2 cm. Queremos comprar otra manguera que tire el doble de agua. Calcula el radio que tiene que tener.
15. El área de dos círculos es 25m^2 y 50m^2 . Calcula la razón de semejanza.
16. Si queremos dibujar una circunferencia de longitud 5 veces más grande que una circunferencia de radio 7 ¿cuánto medirá el radio?. ¿Cuánto medirá la longitud? ¿Cuánto medirá el área?.
17. Si queremos dibujar un círculo de área 5 veces más grande que un círculo de radio 7 ¿Cuánto tiene que medir el radio?.
18. Un plano está en escala 1:10.000
En el plano dos puntos distan 4 cm. ¿Cuánto distan en la realidad?.
En la realidad dos puntos distan 3500 m ¿Cuánto distan en el plano?.
19. Un chalet tiene forma rectangular (15 m de longitud y 10 de ancho). Hacemos un otro chalet semejante que tenga 15 m de ancho.
Calcula la razón de semejanza.
Calcula el área del segundo chalet. Determina la proporción de las áreas.

20. Considera el siguiente plano.
 Calcula el área real de cada recinto y el área total.



21. Dos depósitos son semejantes un de ellos mide 2m^3 y el otro 250m^3 . Calcula la razón de semejanza.

Si el pequeño tiene una superficie de 10m^2 , ¿qué superficie tiene el grande?.

22. Si el área de dos triángulos equiláteros es 5cm^2 y 25cm^2 respectivamente. ¿Son semejantes? ¿Por qué?. En caso afirmativo calcula la razón de semejanza.

23. Si el área de dos pentágonos regulares es 10cm^2 y 250cm^2 respectivamente, ¿son semejantes?. ¿Por qué?. En caso afirmativo calcula la razón de semejanza.