TEMA 2 – POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

2.1 COCIENTE DE POLINOMIOS

2.1.1 COCIENTE DE MONOMIOS

El cociente de un monomio entre otro monomio de grado igual o menor es un nuevo monomio cuyo grado es la diferencia de los grados de los polinomios que intervienen:

$$\frac{ax^m}{bx^n} = \frac{a}{b}x^{m-n}$$

Ejemplos:[1] $\frac{10x^5}{2x^2} = \frac{10}{2}x^{5-2} = 5x^3$ [2] $\frac{11x^4}{4x^3} = \frac{11}{4}x^{4-3} = \frac{11}{4}x^1 = \frac{11}{4}x$

[3] $\frac{6x^3}{5x^3} = \frac{6}{5}x^{3-3} = \frac{6}{5}x^0 = \frac{6}{5}$

2.1.2 DIVISIÓN DE POLINOMIOS

La división de polinomios es similar a la división entera de números naturales: al dividir dos polinomios, se obtiene un cociente y un resto (El grado del resto es menor que el grado del divisor).

La relación entre D(x), d(x), C(x) y R(x) es:

D(x) = d(x).C(x) + R(x), o bien, $\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$

Cuando el resto es cero, R(x) = 0, la división es exacta y se cumple:

D(x) = d(x).C(x) , o bien, $\frac{D(x)}{d(x)} = C(x)$

Ejemplos:

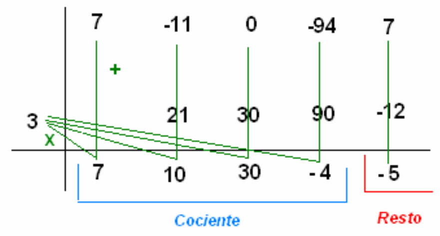
[1] $(6x^4 + 8x^2 + 7x + 40) : (2x^2 - 4x + 5) = 3x^2 + 6x + \frac{17}{2} + \frac{11x - 5/2}{2x^2 - 4x + 5}$

[2] $(6x^3 + 13x^2 + 6x) : (2x + 3) = 3x^2 + 2x$

2.1.3 DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR x – a. REGLA DE RUFFINI

La **regla de Ruffini** sirve para dividir un polinomio por x – a. Las operaciones (sumas y multiplicaciones por a) se realizan una a una. Se obtienen, así, los coeficientes del cociente y el resto de la división.

Ejemplo: $(7x^4 - 11x^3 - 94x + 7) : (x - 3) =$



$$(7x^4 - 11x^3 - 94x + 7) : (x - 3) = 7x^3 + 10x^2 + 30x - 4 - \frac{5}{x-3}$$

2.2 APLICACIONES DE LA REGLA DE RUFFINI

2.2.1 UN CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR x – a

Si un polinomio tiene coeficientes enteros, para que sea divisible por x – a es necesario que su término independiente sea múltiplo de a.

Por tanto, para buscar expresiones x – a que sean divisores de un polinomio, probaremos con los valores de a (positivos y negativos) que sean divisores del término independiente.

Ejemplo: Encontrar algún divisor x – a del polinomio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 160$
Los posibles divisores son divisores de 160:

±1, ±2, ±4, ±5, ±8, ±10, ±16, ±20, ±32, ±40, ±80, ±160

Aplicando Ruffini a cada uno de estos números 1, -1, 2, -2 ,…. El primero que da resto cero es el 5. Por tanto un divisor es x – 5.

2.2.2 VALOR DE UN POLINOMIO PARA x = a

El valor numérico de un polinomio, P(x), para x = a, es el número que se obtiene al sustituir la x por a y efectuar las operaciones indicadas. A ese número se le llama P(a).

Ejemplo: Calcular el valor del polinomio $11x^5 - 170x^3 + 2x - 148$ para x = 4
$P(4) = 11.4^5 - 170.4^3 + 2.4 - 148 = 244$

2.2.3 TEOREMA DEL RESTO

El valor que toma un polinomio, P(x), cuando hacemos x = a, coincide con el resto de la división P(x) : (x – a). Es decir, P(a) = r

Ejemplo: Hallar el resto de la división $(x^3 - 4x + 3) : (x + 1)$
Modo 1: Aplicando la regla de Ruffini

	1	0	-4	3
-1		-1	1	3
	1	-1	-3	$\boxed{6}$

Modo 2: Aplicando el teorema del resto: $P(-1)=(-1)^3 - 4.(-1) + 3 = -1 + 4 + 3 = 6$

2.3 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

2.3.1 PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios (factores) del menor grado posible.

Método para factorizar un polinomio:

- Sacar factor común
- Recordar los productos notables
- Si es un polinomio de grado > 2 : Por Ruffini, probando con los divisores del término independiente, hasta obtener resto cero: P(x) = (x – a).C(x)
- Si es un polinomio de grado = 2: Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 \text{ soluciones distintas} \Rightarrow a.(x - x_1).(x - x_2) \\ 1 \text{ solución doble} \Rightarrow a.(x - x_1)^2 \\ \text{No tiene solución} \Rightarrow ax^2 + bx + c \end{cases}$$

2.3.2 RAÍCES DE UN POLINOMIO

Un número a se llama **raíz** de un polinomio P(x), si P(a) = 0. Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación P(x) = 0.

Método para calcular las raíces de un polinomio:

- Se factoriza el polinomio
- Se iguala cada uno de los factores a cero.

Ejemplos: Factorizar y hallar las raíces de los siguientes polinomios:

[1] $P(x) = 12x^5 – 36x^4 + 27x^3$

Sacamos factor común: $3x^3(4x^2 – 12x + 9)$

Es un cuadrado perfecto: $4x^2 – 12x + 9 = (2x – 3)^2$

Solución:

Factorización: $P(x) = 3x^3.(2x – 3)^3$

Raíces: $P(x) = 3x^3.(2x – 3)^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ (raíz triple), x = 3/2 (raíz doble)

[2] $P(x) = x^3 – x + 6$

No se puede sacar factor común. Como es de grado 3, aplicamos la regla de Ruffini con los divisores de 6 (±1, ±2, ±3, ±6)

Con 1, -1 y 2 no sale resto cero. Con -2

	1	0	-1	6
-2		-2	4	-6
	1	-2	3	$\boxed{0}$

Obtenemos un polinomio de segundo grado: $x^2 – 2x + 3$.

Calculamos sus raíces resolviendo la ecuación: $x^2 – 2x + 3 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \Rightarrow \text{No tiene soluciones.}$$

Solución:

Factorización: $(x + 2).(x^2 – 2x + 3)$

Raíces: x = -2

[3] $P(x) = 10x^4 - 3x^3 - 41x^2 + 12x + 4$

No podemos sacar factor común. Como es de grado 4, aplicamos la regla de Ruffini con los divisores de 4: (±1, ±2, ±4)

Con 1 y -1 no sale resto cero. Probamos con 2

	10	-3	-41	12	4
2		20	34	-14	-4
	10	17	-7	-2	0
-2		-20	6	2	
	10	-3	-1	0	

(Nota: una vez que hemos obtenido el 2, volvemos a probar con el 2. Como no sale resto cero, pasamos a probar con el -2)

Obtenemos un polinomio de grado 2: $10x^2 - 3x - 1$

Calculamos sus raíces resolviendo la ecuación: $10x^2 - 3x - 1 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{20} = \frac{3 \pm 7}{20} = \begin{cases} 10/20 = 1/2 \\ -4/20 = -1/5 \end{cases}$$

Solución:

Factorización: $10.(x-2).(x+2).(x-½).(x+1/5)$

Raíces: $x = 2$, $x = -2$, $x = ½$, $x = -1/5$

2.4 DIVISIBILIDAD DE

2.4.1 MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Un polinomio, D(x), es **divisor** de otro, P(x), si la división P(x) : D(x) es exacta.
En tal caso, se dice también que P(x) es **múltiplo** de D(x), ya que P(x) = D(x).C(x)

2.4.2 POLINOMIOS IRREDUCIBLES

Un **polinomio** se llama **irreducible** cuando no tiene ningún divisor de grado inferior al suyo.

2.4.3 MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE DOS POLINOMIOS.

Un polinomio, D(x), es el **máximo común divisor** de dos polinomios, P(x), Q(x), si es divisor de ambos y no hay otro polinomio divisor común con mayor grado que él. Se denota: D(x) = M.C.D.[P(x),Q(x)]

Método para calcularlo:

- Se factorizan los dos polinomios: P(x) y Q(x)
- Se toman los factores comunes al menor exponente

Un polinomio, M(x), es el **mínimo común múltiplo** de dos polinomios, P(x), Q(x), si es múltiplo de ambos y no hay otro polinomio múltiplo común con menor grado que él. Se denota: M(x) = m.c.m.[P(x),Q(x)]

Método para calcularlo:

- Se factorizan los dos polinomios: P(x) y Q(x)
- Se toman los factores comunes y no comunes al mayor exponente

Ejemplos: Calcular el m.c.d y el m.c.m de los siguientes pares de polinomios
[1] $x^2 – 1$; $(x + 1)^2$
Los factorizamos:
$x^2 – 1 = (x – 1).(x + 1)$
$(x + 1)^2 = (x + 1)^2$
m.c.d = $x + 1$
m.c.m = $(x – 1).(x + 1)^2$
[2] $x^2 + 1$, x^2
Los factorizamos:
$x^2 + 1$: Resolvemos la ecuación $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución $\Rightarrow x^2 +1$
x^2 : Ya está factorizado
m.c.d. = 1
m.c.m. = $x^2.(x^2 + 1)$

2.5 FRACCIONES ALGEBRAICAS

2.5.1 DEFINICIÓN

Se llama **fracción algebraica** al cociente de dos polinomios. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

2.5.2 SIMPLIFICACIÓN

Para simplificar una fracción, se factorizan numerador y denominador y se eliminan los factores comunes obteniéndose otra fracción equivalente.

Ejemplo: $\dfrac{2x^3 - 17x + 3}{3x^2 + 5x - 12} = \dfrac{(2x^2 - 6x + 1).(x+3)}{3(x - 4/3)(x+3)} = \dfrac{2x^2 - 6x + 1}{3x - 4}$

2.5.3 FRACCIONES EQUIVALENTES

Dos fracciones algebraicas son equivalentes si:
- Una de ellas se obtiene simplificando la otra.
- O bien, ambas, al simplificarse, dan lugar a la misma fracción.

Ejemplo: Comprobar si son equivalentes: $\dfrac{x+4}{x^2 + x - 12}, \dfrac{2x+5}{2x^2 - x - 15}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+4}{x^2 + x - 12} = \dfrac{x+4}{(x-3)(x+4)} = \dfrac{1}{x-3} \\ \dfrac{2x+5}{2x^2 - x - 15} = \dfrac{2x+5}{2(x-3)(x+5/2)} = \dfrac{1}{x-3} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Son equivalentes}$$

2.5.4 REDUCCIÓN A COMÚN DENOMINADOR

Se sustituye cada fracción por otra equivalente, de modo que todas tengan el mismo denominador, que será el mínimo común múltiplo de los denominadores

Ejemplo: Reducir a común denominador $\frac{3}{x+1}, \frac{2}{x^2-1}$

Factorizamos los denominadores:
$x+1 = x + 1$
$x^2 - 1 = (x - 1).(x + 1)$
m.c.m = (x -1).(x + 1)

$$\frac{3}{x+1} = \frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x-3}{x^2-1}$$

$$\frac{2}{x^2-1}$$

2.7.4 OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

- **Suma y resta**: Para sumar o restar fracciones algebraicas, estas se reducen a común denominador y se suman o restan los numeradores, dejando el mismo denominador. Después se simplifica la fracción resultante.

- **Producto** : El producto de dos fracciones algebraicas es el producto de sus numeradores partido por el producto de sus denominadores.

- **Fracción inversa de otra** : La fracción inversa de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es $\frac{Q(x)}{P(x)}$.

- **Cociente** : El cociente de dos fracciones algebraicas es el producto de la primera por la inversa de la segunda (Producto cruzado de términos).

Ejemplos: Opera:

[1] $\frac{3x+1}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{3x+1-3x}{x^2} = \frac{1}{x^2}$

[2] $\frac{x^2}{x^2-25} : \frac{x}{x-5} = \frac{x^2.(x-5)}{(x-5)(x+5)x} = \frac{x}{x+5}$