12 Límites y derivadas

1. Funciones especiales

PIENSA Y CALCULA

Completa la tabla siguiente:

x	–3,6	3,6	0,8	–0,8
Ent(x)				
Dec(x)				
|x|				
Signo(x)				

Solución:

x	–3,6	3,6	0,8	–0,8
Ent(x)	–4	3	0	–1
Dec(x)	0,4	0,6	0,8	0,2
|x|	3,6	3,6	0,8	0,8
Signo(x)	–1	1	1	–1

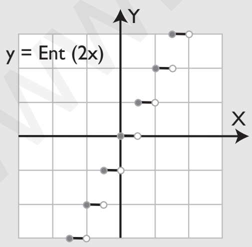
APLICA LA TEORÍA

1 Representa las siguientes funciones:

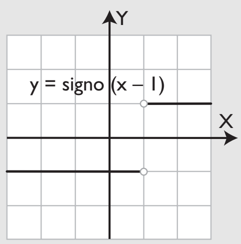
a) y = Ent(2x) b) y = signo(x – 1)

Solución:

a)



b)

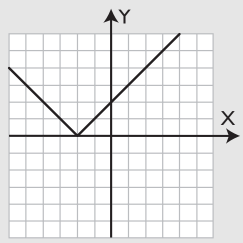


2 Representa las siguientes funciones:

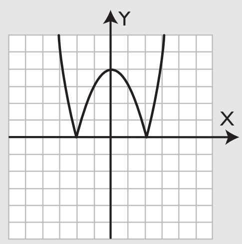
a) y = |x + 2| b) $y = |-x^2 + 4|$

Solución:

a)



b)

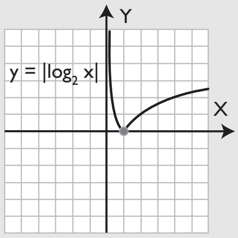


3 Representa las siguientes funciones:

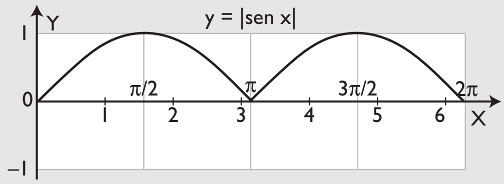
a) $y = |\log_2 x|$ b) $y = |\text{sen } x|$

Solución:

a)



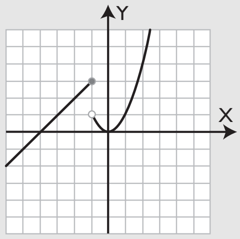
b)



4 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

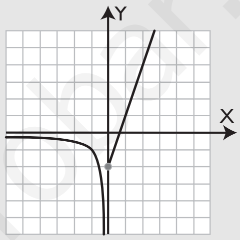
Solución:



5 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ 3x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:



2. Límites

PIENSA Y CALCULA

Completa la tabla y estima el valor al que tiende la función cuando **x** tiende al infinito:

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	…	$x \to +\infty$
y = 1/x								$y \to$

Solución:

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	…	$x \to +\infty$
y = 1/x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	…	$y \to 0$

APLICA LA TEORÍA

6 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5) = \infty$

7 Calcula los siguientes límites y representa la función correspondiente:

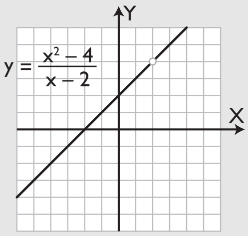
a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 4x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

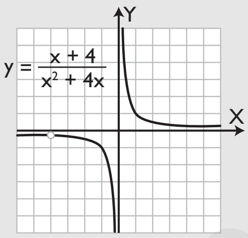
Gráfica:



b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 4x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\cancel{x + 4}}{x\cancel{(x + 4)}} =$

$= \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{4}$

Gráfica:



8 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4n^3 + 1}{2n^3 - 3}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4}$

e) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 5}{4n^3 - 3}$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1} = \dfrac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4} = +\infty$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4n^3 + 1}{2n^3 - 3} = 2$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4} = -\infty$

e) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 5}{4n^3 - 3} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1} = \dfrac{5}{2}$

3. La derivada

PIENSA Y CALCULA

Un coche va de Asturias a Andalucía; recorre 800 km en 8 horas. ¿Cuál es su velocidad media?

Solución:

Velocidad media $= \dfrac{800}{8} = 100$ km/h

Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

9 $f(x) = 3x + 1$ en $[2, 4]$

Solución:

$$TVM[2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{13 - 7}{2} = 3$$

10 $f(x) = x^2 - 1$ en $[2, 3]$

Solución:

$$TVM[2, 3] = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{8 - 3}{1} = 5$$

11 $f(x) = \frac{2}{x}$ en $[1, 3]$

Solución:

$$TVM[1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2/3 - 2}{2} = -\frac{2}{3}$$

12 $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 4]$

Solución:

$$TVM[0, 4] = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{2 - 0}{4} = \frac{1}{2}$$

Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

13 $f(x) = 2x + 3$ en $x = 1$

Solución:

$f'(1) = 2$

14 $f(x) = -3x + 1$ en $x = 2$

Solución:

$f'(2) = -3$

15 $f(x) = x^2$ en $x = 3$

Solución:

$f'(3) = 6$

16 $f(x) = -x^2 + 3$ en $x = 2$

Solución:

$f'(2) = -4$

Calcula la función derivada aplicando la tabla de derivadas:

17 $y = 3$

Solución:

$y' = 0$

18 $y = x$

Solución:

$y' = 1$

19 $y = x^2$

Solución:

$y' = 2x$

20 $y = x^5$

Solución:

$y' = 5x^4$

21 $y = x^5 + x^2 + x + 3$

Solución:

$y' = 5x^4 + 2x + 1$

22 $y = 5x^2 - 7x + 3$

Solución:

$y' = 10x - 7$

23 $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

Solución:

$y' = 3x^2 + 6x - 4$

24 $y = (3x + 5)^4$

Solución:

$y' = 12(3x + 5)^3$

25 $y = e^x$

Solución:

$y' = e^x$

26 $y = e^{3x - 5}$

Solución:

$y' = 3e^{3x-5}$

27 $y = L\,x$

Solución:

$y' = \dfrac{1}{x}$

28 $y = L\,(3x - 1)$

Solución:

$y' = \dfrac{3}{3x - 1}$

29 $y = L\,(x^2 + 5x - 6)$

Solución:

$y' = \dfrac{2x + 5}{x^2 + 5x - 6}$

30 $y = 7x$

Solución:

$y' = 7$

31 $y = x\,e^x$

Solución:

$y' = (x + 1)e^x$

32 $y = x\,L\,x$

Solución:

$y' = 1 + L\,x$

33 $y = e^x\,L\,x$

Solución:

$y' = e^x\,L\,x + \dfrac{e^x}{x}$

34 $y = \dfrac{e^x}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{(x - 1)\,e^x}{x^2}$

35 $y = \dfrac{2x + 3}{x}$

Solución:

$y' = -\dfrac{3}{x^2}$

36 $y = \dfrac{5x - 1}{3x + 2}$

Solución:

$y' = \dfrac{13}{(3x + 2)^2}$

4. Aplicaciones de la derivada

PIENSA Y CALCULA

Si la pendiente de una recta es $m = 2$, calcula la pendiente $m_\perp$ de cualquier recta perpendicular.

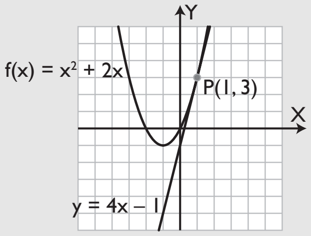
Solución:

Las pendientes son inversas y opuestas, $m_\perp = -\dfrac{1}{2}$

37 Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 + 2x$ para $x = 1$. Dibuja la función y la recta tangente.

Solución:

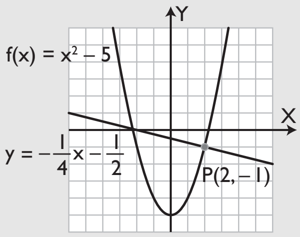
Recta tangente: $y = 4x - 1$



38 Calcula la recta normal a la curva $y = x^2 - 5$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta normal.

Solución:

Recta normal: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

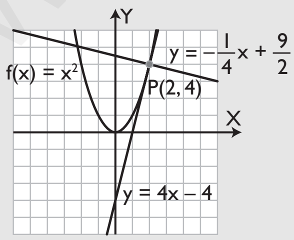


39 Halla las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ para $x = 2$. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

Solución:

Recta tangente: $y = 4x - 4$

Recta normal: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$



40 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2 - 6x + 5$. Dibuja la función.

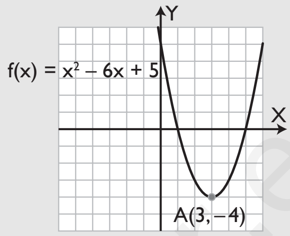
Solución:

$y' = 2x - 6$

$2x - 6 = 0, x = 3, y = -4, A(3, -4)$

$y'' = 2$

$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow A(3, -4)$ mínimo relativo.



41 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2 + 4x$. Dibuja la función.

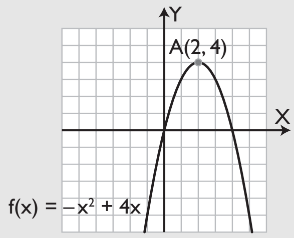
Solución:

$y' = -2x + 4$

$-2x + 4 = 0, x = 2, y = 4, A(2, 4)$

$y'' = -2$

$f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow A(2, 4)$ Máximo relativo.



42 Calcula el crecimiento de la función $y = x^2 - 2x - 3$. Dibuja la función.

Solución:

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = 2x - 2$

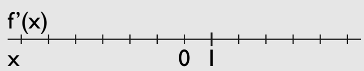
$2x - 2 = 0, x = 1, y = -4, A(1, -4)$

$y'' = 2$

$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow A(1, -4)$ mínimo relativo.

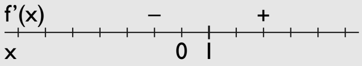
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



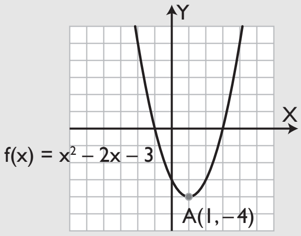
$y' = 2x - 2$

$f'(0) = -$



$(\nearrow) = (1, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, 1)$



43 Halla el crecimiento de la función $y = -x^2 + 6x - 4$. Dibuja la función.

Solución:

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = -2x + 6$

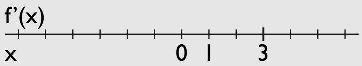
$-2x + 6 = 0, x = 3, y = 5, A(3, 5)$

$y'' = -2$

$f''(3) = -2 < 0 \Rightarrow A(3, 5)$ Máximo relativo.

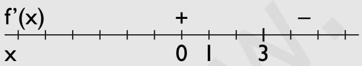
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



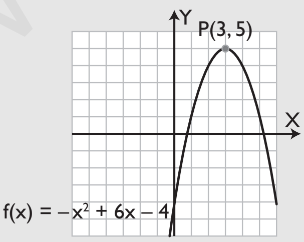
$y' = -2x + 6$

$f'(0) = +$



$(\nearrow) = (-\infty, 3)$

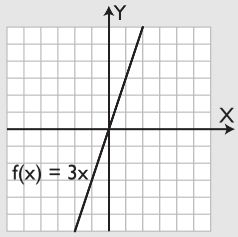
$(\searrow) = (3, +\infty)$



44 Calcula el crecimiento de la función $y = 3x$. Dibuja la función.

Solución:

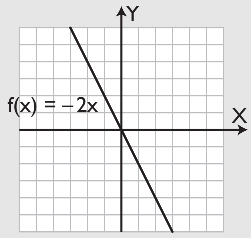
$y' = 3 > 0$, es siempre creciente.



45 Halla el crecimiento de la función $y = -2x$. Dibuja la función.

Solución:

$y' = -2 < 0$, es siempre decreciente.



46 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^3 - 3x$

Solución:

$y' = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0, x^2 - 1 = 0, x^2 = 1, x = 1, x = -1$

$x = 1, y = -2, A(1, -2)$

$x = -1, y = 2, B(-1, 2)$

$y'' = 6x$

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow A(1, -2)$ Mínimo relativo.

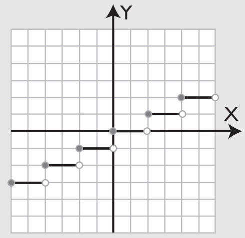
$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow B(-1, 2)$ Máximo relativo.

Ejercicios y problemas

1. Funciones especiales

47 Representa la siguiente función: $y = \text{Ent}(x/2)$

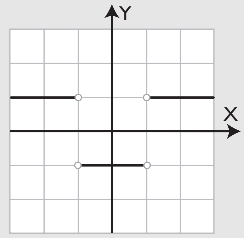
Solución:



48 Representa la siguiente función:

$$y = \text{Signo}(x^2 - 1)$$

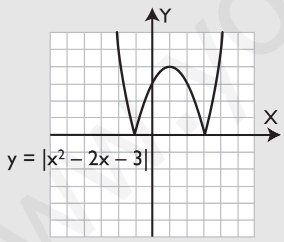
Solución:



49 Representa la siguiente función:

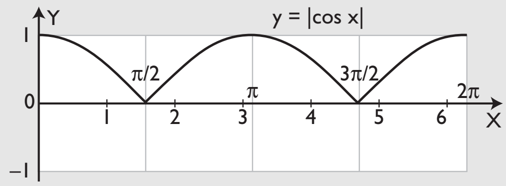
$$y = |x^2 - 2x - 3|$$

Solución:



50 Representa la siguiente función en el intervalo $[0, 2\pi]$: $y = |\cos x|$

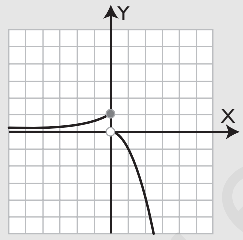
Solución:



51 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

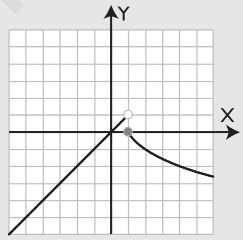
Solución:



52 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ \log_{1/2} x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Solución:



2. Límites

53 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x - 3)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 5x - 3)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x - 3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 5x - 3) = +\infty$

54 Calcula el siguiente límite:

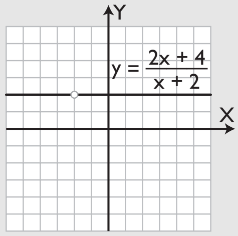
$$\lim_{x \to -2} \frac{2x + 4}{x + 2}$$

Representa la función correspondiente.

Solución:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x + 4}{x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{2\cancel{(x + 2)}}{\cancel{x + 2}} = \lim_{x \to 2} 2 = 2$$

Gráfica:



55 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-x-6}$$

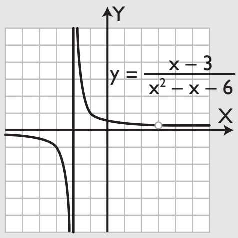
Representa la función correspondiente.

Solución:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-x-6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x-3}}{(x+2)\cancel{(x-3)}} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5}$$

Gráfica:



56 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x+7}{x^2+1}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x+7}{x^2+1}$

Solución:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x+7}{x^2+1} = 0$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x+7}{x^2+1} = 0$

57 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4-1}{-x^4+2x}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^4-1}{-x^4+2x}$

Solución:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4-1}{-x^4+2x} = -5$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^4-1}{-x^4+2x} = -5$

58 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2-5}{n^4+2n}$

b) $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3+n}{-n^3-2n}$

Solución:

a) $\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2-5}{n^4+2n} = 0$

b) $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3+n}{-n^3-2n} = -1$

59 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^5+x^2}{x^2-x}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-x^5+x^2}{x^2-x}$

Solución:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^5+x^2}{x^2-x} = -\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-x^5+x^2}{x^2-x} = +\infty$

3. La derivada

Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

60 $f(x) = 2x - 4$ en $[1, 3]$

Solución:

$$\text{TVM}[1,3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{2+2}{2} = 2$$

61 $f(x) = x^2 + 4x$ en $[0, 2]$

Solución:

$$\text{TVM}[0,2] = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{12-0}{2} = 6$$

62 $f(x) = \frac{6}{x}$ en [2, 3]

Solución:

$TVM[2, 3] = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{2 - 3}{1} = -1$

63 $f(x) = \sqrt{x + 5}$ en [– 1, 4]

Solución:

$TVM[-1, 4] = \frac{f(4) - f(-1)}{4 + 1} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$

Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

64 $f(x) = 3x + 1$ en $x = 2$

Solución:

$f'(2) = 3$

65 $f(x) = -2x + 3$ en $x = 1$

Solución:

$f'(1) = -2$

66 $f(x) = x^2$ en $x = -3$

Solución:

$f'(-3) = -6$

67 $f(x) = -x^2 + 5$ en $x = 1$

Solución:

$f'(1) = -2$

Calcula la función derivada aplicando la tabla de derivadas:

68 $y = 9$

Solución:

$y' = 0$

69 $y = -x^3$

Solución:

$y' = -3x^2$

70 $y = x^7$

Solución:

$y' = 7x^6$

71 $y = x^7 - x^3 + x + 9$

Solución:

$y' = 7x^6 - 3x^2 + 1$

72 $y = 3x^2 - 4x + 1$

Solución:

$y' = 6x - 4$

73 $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 8$

Solución:

$y' = 3x^2 - 10x + 3$

74 $y = (2x - 3)^5$

Solución:

$y' = 10(2x - 3)^4$

75 $y = e^{-2x + 3}$

Solución:

$y' = -2e^{-2x + 3}$

76 $y = L(5x + 2)$

Solución:

$y' = \frac{5}{5x + 2}$

77 $y = L(x^2 - 3x + 1)$

Solución:

$y' = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1}$

78 $y = 9x$

Solución:

$y' = 9$

79 $y = (x + 1)e^x$

Solución:
$y' = (x + 2)\,e^{x}$

80 $y = x\,L\,(x - 5)$

Solución:
$y' = L\,(x - 5) + \dfrac{x}{x - 5}$

81 $y = e^{3x}\,L\,x$

Solución:
$y' = 3e^{3x}\,L\,x + \dfrac{e^{3x}}{x}$

82 $y = \dfrac{e^{2x}}{x}$

Solución:
$y' = \dfrac{(2x - 1)\,e^{2x}}{x^2}$

83 $y = \dfrac{x}{x - 1}$

Solución:
$y' = \dfrac{-1}{(x - 1)^2}$

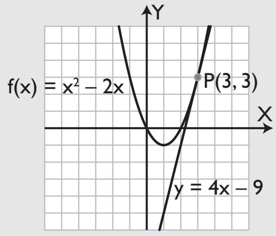
84 $y = \dfrac{3x + 5}{2x - 1}$

Solución:
$y' = \dfrac{-13}{(2x - 1)^2}$

4. Aplicaciones de la derivada

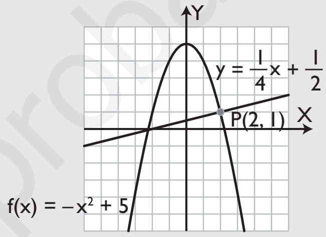
85 Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x$ para $x = 3$. Dibuja la función y la recta tangente.

Solución:
Recta tangente: $y = 4x - 9$



86 Calcula la recta normal a la curva $y = -x^2 + 5$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta normal.

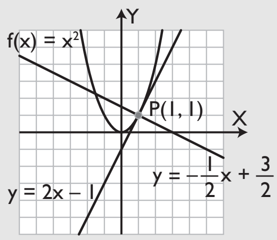
Solución:
Recta normal: $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$



87 Halla las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ para $x = 1$. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

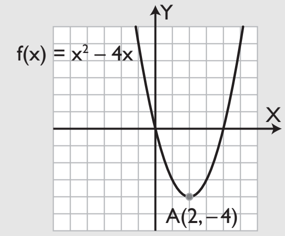
Solución:
Recta tangente: $y = 2x - 1$

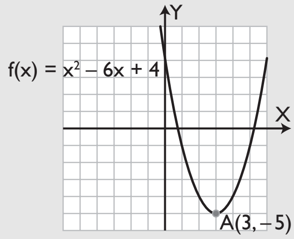
Recta normal: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$



88 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2 - 4x$. Dibuja la función.

Solución:
$y' = 2x - 4$
$2x - 4 = 0, x = 2, y = -4, A(2, -4)$
$y'' = 2$
$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow A(2, -4)$ mínimo relativo.





89 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2 + 6x - 5$. Dibuja la función.

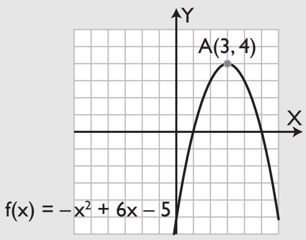
Solución:

$y' = -2x + 6$

$-2x + 6 = 0, x = 3, y = 4, A(3, 4)$

$y'' = -2$

$f''(3) = -2 < 0 \Rightarrow P(3,\ 4)$ Máximo relativo.



90 Calcula el crecimiento de la función siguiente: $y = x^2 - 6x + 4$. Dibuja la función.

Solución:

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = 2x - 6$

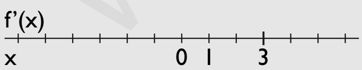
$2x - 6 = 0, x = 3, y = -5, A(3, -5)$

$y'' = 2$

$f''(3) = 2 > 0 \Rightarrow A(3, -5)$ mínimo relativo.

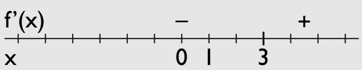
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



$y' = 2x - 6$

$f'(0) = -$



$(\nearrow) = (3, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, 3)$

91 Halla el crecimiento de la función siguiente: $y = -x^2 + 2x + 3$. Dibuja la función.

Solución:

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = -2x + 2$

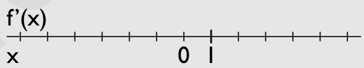
$-2x + 2 = 0, x = 1, y = 4, A(1, 4)$

$y'' = -2$

$f''(1) = -2 < 0 \Rightarrow A(1, 4)$ Máximo relativo.

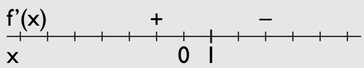
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



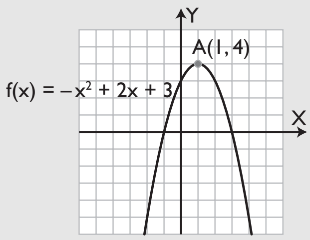
$y' = -2x + 2$

$f'(0) = +$



$(\nearrow) = (-\infty, 1)$

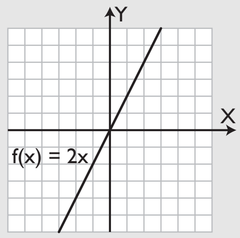
$(\searrow) = (1, +\infty)$



92 Calcula el crecimiento de la función $y = 2x$. Dibuja la función.

Solución:

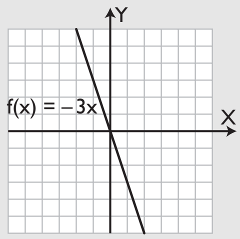
$y' = 2 > 0$, es siempre creciente.



93 Halla el crecimiento de la función $y = -3x$. Dibuja la función.

Solución:

$y' = -3 < 0$, es siempre decreciente.



94 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^3 + 3x$

Solución:

$y' = -3x^2 + 3$

$-3x^2 + 3 = 0, x^2 - 1 = 0, x^2 = 1, x = 1, x = -1$

$x = 1, y = 2, A(1, 2)$

$x = -1, y = -2, B(-1, -2)$

$y'' = -6x$

$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow A(1, 2)$ Máximo relativo.

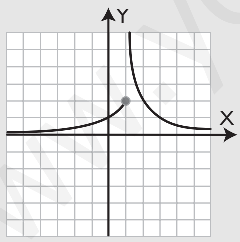
$f''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow B(-1, -2)$ mínimo relativo.

Para ampliar

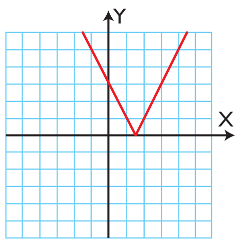
95 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:



96 Halla la ecuación de una función cuyo valor absoluto tenga como representación la siguiente gráfica:

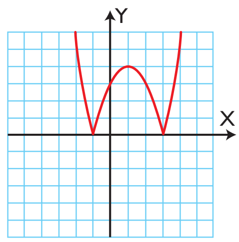


¿Puede haber más de una ecuación?

Solución:

$y = |2x - 3|$ o bien $y = |-2x + 3|$

97 Halla la ecuación de una función cuyo valor absoluto tenga como representación la siguiente gráfica:

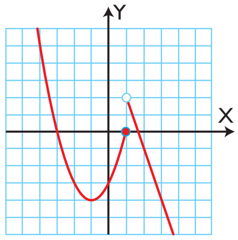


¿Puede haber más de una ecuación?

Solución:

$y = |x^2 - 2x - 3|$ o bien $y = |-x^2 + 2x + 3|$

98 Halla la ecuación de una función definida a trozos cuya representación sea la siguiente gráfica:



Solución:

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x \le 1 \\ -3x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

99 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 5x^2 - x + 7)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^3 + x^2 - 10x + 6}{x^3 + 2x^2 - 3}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 5x^2 - x + 7) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^3 + x^2 - 10x + 6}{x^3 + 2x^2 - 3} = -2$

100 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x + 3)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 2x^2 - 5x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x + 3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 2x^2 - 5x) = -\infty$

101 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2 + 2x}{5x^2 - x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^2 + 2x}{5x^2 - x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2 + 2x}{5x^2 - x} = -\dfrac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^2 + 2x}{5x^2 - x} = -\dfrac{3}{5}$

102 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^3 + 1}{5n^2 - 7n}$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 5n}{n^2 - 3n}$

Solución:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^3 + 1}{5n^2 - 7n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 5n}{n^2 - 3n} = 1$

103 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-6x^3 + 9}{2x^3 - 3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-6x^3 + 9}{2x^3 - 3}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-6x^3 + 9}{2x^3 - 3} = -3$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-6x^3 + 9}{2x^3 - 3} = -3$

104 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 1}{-7x^3 + x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - 1}{-7x^3 + x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 1}{-7x^3 + x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - 1}{-7x^3 + x} = 0$

105 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

Solución:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{-2}{1} = -2$$

106 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{x\cancel{(x-2)}} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x} = 0$$

107 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{x^{\cancel{2}}\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}\cancel{(x-1)}(x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+3} = \frac{1}{4}$$

108 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$$

Solución:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{(x+1)\cancel{(x+2)}} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x+1} = 0$$

109 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 7} \frac{2(x-7)}{x^2 - 2x - 35}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 7} \frac{2(x-7)}{x^2 - 2x - 35} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 7} \frac{2\cancel{(x-7)}}{(x+5)\cancel{(x-7)}} =$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{2}{x+5} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

110 $f(x) = 2x - 1$ en $[-2, 1]$

Solución:

$$TVM[-2, 1] = \frac{f(1) - f(-2)}{1 + 2} = \frac{1 + 5}{3} = 2$$

111 $f(x) = x^2$ en $[-1, 1]$

Solución:

$$TVM[-1, 1] = \frac{f(1) - f(-1)}{1 + 1} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

112 $f(x) = 4x - 1$ en $x = 2$

Solución:

$f'(2) = 4$

113 $f(x) = -x^2 + 5$ en $x = 3$

Solución:

$f'(3) = -6$

Calcula la función derivada aplicando la tabla de derivadas:

114 $y = 4x^4 - 5x^2 - 6x + 2$

Solución:

$y' = 16x^3 - 10x - 6$

115 $y = (5x + 1)^4$

Solución:

$y' = 20(5x + 1)^3$

116 $y = e^{5x-2}$

Solución:

$y' = 5e^{5x-2}$

117 $y = L(x^2 + 5x)$

Solución:

$$y' = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x}$$

118 $y = -x$

Solución:

$y' = -1$

119 $y = (x - 1)e^x$

Solución:

$y' = x\,e^x$

120 $y = (2x + 1)\,L\,x$

Solución:

$y' = 2\,L\,x + \dfrac{2x+1}{x}$

121 $y = \dfrac{2x+3}{4x-5}$

Solución:

$y' = \dfrac{-22}{(4x-5)^2}$

122 $y = \dfrac{-2x+1}{3x+4}$

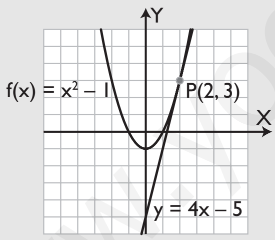
Solución:

$y' = \dfrac{-11}{(3x+4)^2}$

123 Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 - 1$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta tangente.

Solución:

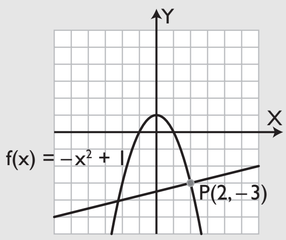
Recta tangente: $y = 4x - 5$



124 Halla la recta normal a la curva $y = -x^2 + 1$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta normal.

Solución:

Recta normal: $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{2}$



125 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2$. Dibuja la función.

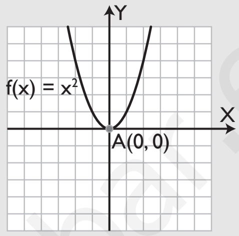
Solución:

$y' = 2x$

$2x = 0, x = 0, y = 0, A(0, 0)$

$y'' = 2$

$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow A(0, 0)$ mínimo relativo.



126 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2$. Dibuja la función.

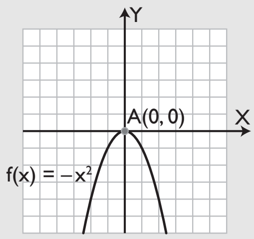
Solución:

$y' = -2x$

$-2x = 0, x = 0, y = 0, A(0, 0)$

$y'' = -2$

$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow A(0, 0)$ Máximo relativo.



127 Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función $y = e^x$

Solución:

Máximos y mínimos relativos:

$y' = e^x$

$e^x \neq 0$ siempre, no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Crecimiento:

$y' = e^x > 0$ siempre, es creciente siempre.

$(\nearrow) = (-\infty, +\infty)$

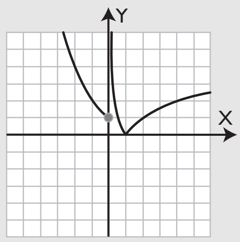
$(\searrow) = \varnothing$

Problemas

128 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & \text{si } x \le 0 \\ |\log_{1/2} x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución:



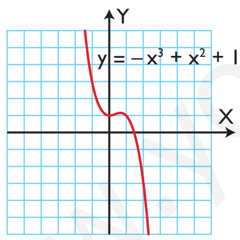
129 Calcula el valor de **k** para que se verifique:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{kx^3 + x}{2x^3 - 4x} = 5$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{kx^3 + x}{2x^3 - 4x} = 5 \Rightarrow \frac{k}{2} = 5 \Rightarrow k = 10$$

130 Observando la siguiente gráfica:



calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + x^2 + 1)$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + x^2 + 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + x^2 + 1) = +\infty$$

131 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x - 2)}{\cancel{(x-1)}(x^3 + x^2 + x - 3)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x + 2)}{\cancel{(x-1)}(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3} =$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

132 Dibuja la siguiente función afín:

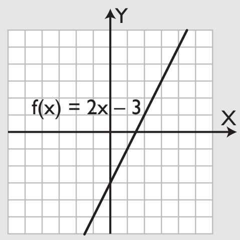
$$y = 2x - 3$$

a) Halla mentalmente la pendiente.

b) Halla la pendiente derivando.

c) La función ¿es creciente o decreciente?

Solución:



a) $m = 2$

b) $y' = 2$

c) Como $m = y' = 2 > 0$ siempre, la función siempre es creciente.

133 Dibuja la siguiente función afín:

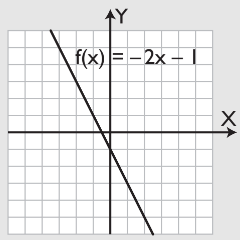
$$y = -2x + 1$$

a) Halla mentalmente la pendiente.

b) Halla la pendiente derivando.

c) La función ¿es creciente o decreciente?

Solución:



a) m = – 2

b) y’ = – 2

c) Como m = y’ = – 2 < 0 siempre, la función siempre es decreciente.

134 Dibuja la siguiente parábola:

$$y = x^2 - 4x + 1$$

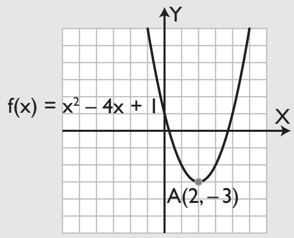
a) Viendo la gráfica, halla el máximo o mínimo relativo.

b) Viendo la gráfica, halla el crecimiento.

c) Halla el máximo relativo o mínimo relativo derivando.

d) Halla el crecimiento derivando.

Solución:



a) A(2, –3) es un mínimo relativo.

b) (↗) = (2, +∞)

(↘) = (–∞, 2)

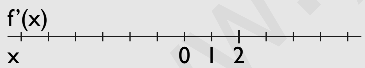
c) y’ = 2x – 4

2x – 4, x = 2, y = –3, A(2, –3)

y’’ = 2

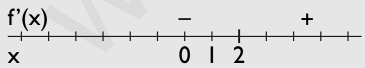
f’’(2) = 2 > 0 ⇒ A(2, –3) mínimo relativo.

d) Discontinuidades: no hay.



y’ = 2x – 4

f’(0) = –



(↗) = (2, +∞)

(↘) = (–∞, 2)

135 Halla las rectas tangente y normal a la curva:

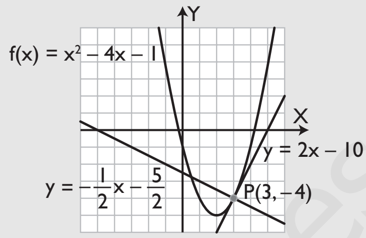
$$y = x^2 - 4x - 1 \text{ para } x = 3$$

Dibuja la función, así como las rectas tangente y normal.

Solución:

Recta tangente: y = 2x – 10

Recta normal: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

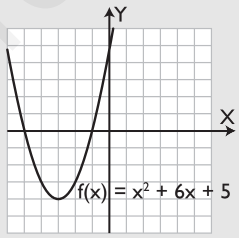


136 Halla el crecimiento de la función:

$$y = x^2 + 6x + 5$$

Dibuja la función.

Solución:



Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

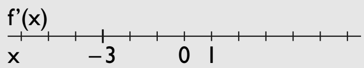
y’ = 2x + 6

2x + 6 = 0, x = –3, y = –4, A(–3, –4)

y’’ = 2

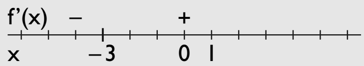
f’’(–3) = 2 > 0 ⇒ A(–3, –4) mínimo relativo.

Discontinuidades: no hay.



y’ = 2x + 6

f’(0) = +



(↗) = (–3, +∞)

(↘) = (–∞, –3)

137 Halla el crecimiento de la función:

$$y = \frac{6}{x}$$

Dibuja la función.

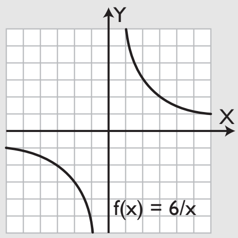
Solución:

$y' = -\dfrac{6}{x^2} < 0$, es siempre negativa, decreciente.

Discontinuidades: $x = 0$

$(\nearrow) = \varnothing$

$(\searrow) = (-\infty, +\infty)$



138 Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función:

$$y = x^2 - 6x + 4$$

Solución:

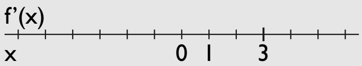
$y' = 2x - 6$

$2x - 6 = 0, x = 3, y = -5, A(3, -5)$

$y'' = 2$

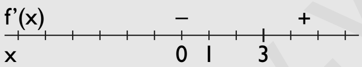
$f''(3) = 2 > 0 \Rightarrow A(3, -5)$ mínimo relativo.

Discontinuidades: no hay.



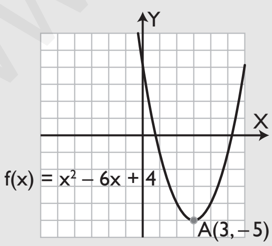
$y' = 2x - 6$

$f'(0) = -$



$(\nearrow) = (3, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, 3)$



139 Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función:

$$y = \frac{x^3}{3} - 4x$$

Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, esboza la gráfica de la función.

Solución:

Máximos y mínimos relativos:

$y' = x^2 - 4$

$x^2 - 4 = 0, x^2 = 2, x = 2, x = -2$

$x = 2, y = -16/3, A(2, -16/3)$

$x = -2, y = 16/3, B(-2, 16/3)$

$y'' = 2x$

$f''(2) = 4 > 0 \Rightarrow A(2, -16/3)$ mínimo relativo.

$f''(-2) = -4 < 0 \Rightarrow B(-2, 16/3)$ Máximo relativo.

Crecimiento:

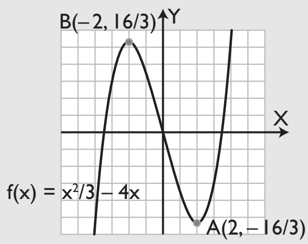
Discontinuidades: no hay.

$y' = x^2 - 4$

$f'(1) = -$

$(\nearrow) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$(\searrow) = (-2, 2)$



140 Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función:

$$y = -\frac{x^3}{3} + 4x$$

Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, esboza la gráfica de la función.

Solución:

Máximos y mínimos relativos:

$y' = -x^2 + 4$

$-x^2 + 4 = 0, x^2 - 4 = 0, x^2 = 2, x = 2, x = -2$

$x = 2, y = 16/3, A(2, 16/3)$

$x = -2, y = -16/3, B(-2, -16/3)$

$y'' = -2x$

$f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow A(2, 16/3)$ Máximo relativo.

$f''(-2) = 2 > 0 \Rightarrow B(-2, -16/3)$ mínimo relativo.

Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.

$f'(x)$

$x \quad -2 \quad 0 \quad 2$

$y' = x^2 - 4$

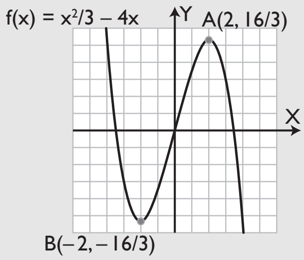
$f'(1) = -$

$f'(x) \quad - \quad + \quad -$

$x \quad -2 \quad 0 \quad 2$

$(\nearrow) = (-2, 2)$

$(\searrow) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



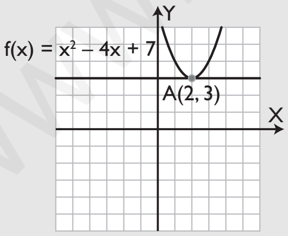
141 Halla la recta tangente a la curva:

$$y = x^2 - 4x + 7$$

para $x = 2$. Dibuja la función y la recta tangente.

Solución:

Recta tangente: $y = 3$



142 Los beneficios de una empresa en millones de euros vienen dados por la fórmula:

$$y = -x^2 + 18x - 20$$

donde **x** indica el número de años que lleva funcionando. ¿Qué año alcanza los máximos beneficios?

Solución:

$y' = -2x + 18$

$-2x + 18 = 0, 2x - 18 = 0, x = 9, y = 61$

$y'' = -2$

$f''(9) = -2 < 0 \Rightarrow A(9, 61)$ Máximo relativo.

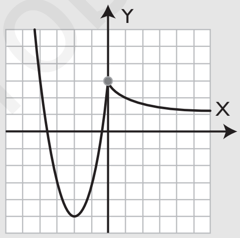
Los máximos beneficios los alcanza en el 9º año y son 61 millones de euros.

Para profundizar

143 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 2x^2 + 8x + 3 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+3}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:



144 Halla el crecimiento de la función $y = x^3 - 3x$. Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, esboza la gráfica de la función.

Solución:

Primero hay que hallar los máximos y mínimos relativos.

$y' = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0, x^2 - 1 = 0, x^2 = 1, x = 1, x = -1$

$x = 1, y = -2, A(1, -2)$

$x = -1, y = 2, B(-1, 2)$

$y'' = 6x$

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow A(1, -2)$ Máximo relativo.

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow B(-1, 2)$ mínimo relativo.

Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.

$f'(x)$

$x \quad -1 \; 0 \; 1$

$y' = 3x^2 - 3$

$f'(0) = -$

f'(x)   +   –   +

x   –1 0 1

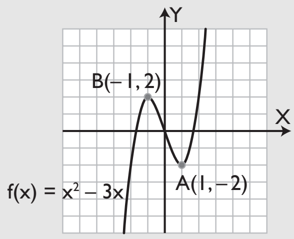
$(\nearrow) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$(\searrow) = (-1, 1)$

Límites:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 3x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 3x = -\infty$



145 Halla el crecimiento de la función $y = \dfrac{2}{x^2}$. Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, esboza la gráfica de la función.

Solución:

$y' = -\dfrac{4}{x^3}$

Discontinuidades de la derivada: x = 0 de orden 3, que es impar, luego cambia de crecimiento.

f'(x)

x   0 1

f'(1) = –4

f'(x)   +   –

x   0 1

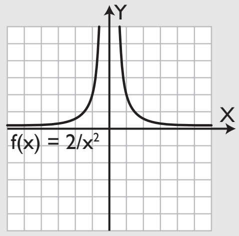
$(\nearrow) = (-\infty, 0)$

$(\searrow) = (0, +\infty)$

Límites:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x^2} = +\infty$



146 Las pérdidas de una empresa en millones de euros vienen dadas por la fórmula:

$$y = -x^2 + 8x$$

donde **x** indica el número de años que lleva funcionando. ¿Qué año alcanza las máximas pérdidas?

Solución:

$y' = -2x + 8$

$-2x + 8 = 0, x - 4 = 0, x = 4, y = 16$

$y'' = -2$

$f''(4) = -2 < 0 \Rightarrow A(4, 16)$ Máximo relativo.

Las máximas pérdidas las alcanza en el 4º año y son 16 millones de euros.

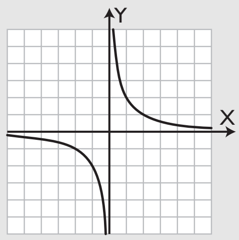
147 Una determinada especie evoluciona según la función:

$$f(x) = \frac{2}{x} + 1, x > 0$$

donde **x** es el número de años y f(x) son los millones de unidades existentes.

Representa la gráfica y, observándola, contesta a la siguiente pregunta: ¿la especie está en vías de extinción?

Solución:



$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

La población tiende a cero, por tanto está en vías de extinción.

Aplica tus competencias

148 El espacio que recorre un móvil es $e(t) = 3t^2 + 2t + 5$, donde **t** se expresa en segundos, y e(t), en metros. Calcula la velocidad que lleva en el instante t = 4 s

Solución:

$v(t) = e'(t) = 6t + 2$

$v(4) = 6 \cdot 4 + 2 = 24 + 2 = 26$ m/s

149 El espacio que recorre un móvil es $e(t) = 5t^2 - 3t + 1$, donde **t** se expresa en segundos, y e(t), en metros. Calcula la aceleración que lleva en el instante t = 2 s

Solución:

$v(t) = e'(t) = 10t - 3$

$a(t) = v'(t) = 10$

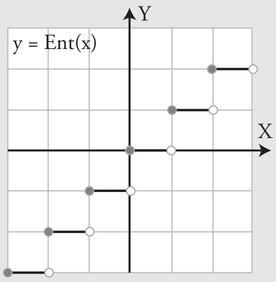
$a(2) = 10$ m/s^2

Comprueba lo que sabes

1 Define función parte entera y represéntala.

Solución:

La **función parte entera de x** asigna a cada **x** su parte entera. Se representa por y = Ent(x)

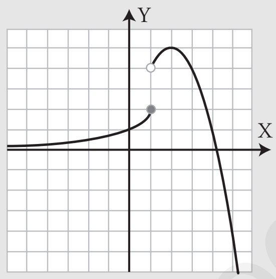


2 Representa la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.



3 Calcula los siguientes límites y representa la función correspondiente:

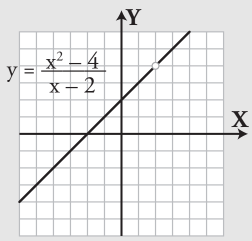
a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 4x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

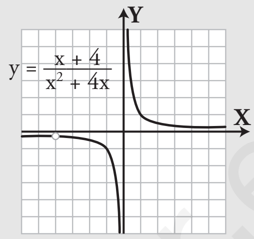
Gráfica:



b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 4x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x(x + 4)} =$

$= \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{4}$

Gráfica:



4 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 4}{-x^2 + 7x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 4}{-x^2 + 7x}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-5n^2 + 3n}{n^3 + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x^2 + 3x}{x^3 + 1}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 + 6x}{x^2 - 7}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3 + 6x}{x^2 - 7}$

Solución:

a) -2

b) -2

c) 0

d) 0

e) $-\infty$

f) $+\infty$

5 Calcula las derivadas siguientes:

a) $y = (3x - 5)^4$ b) $y = e^{5x+1}$

c) $y = L\,(7x - 2)$ d) $y = x^2e^x$

e) $y = \dfrac{x}{x + 1}$

Solución:

a) $y' = 12(3x - 5)^3$

b) $y' = 5e^{5x + 1}$

c) $y' = \dfrac{7}{7x - 2}$

d) $y' = 2x\,e^x + x^2e^x = xe^x(2 + x)$

e) $y' = \dfrac{x + 1 - x}{(x + 1)^2} = \dfrac{1}{(x + 1)^2}$

6 Estudia el crecimiento de la función $y = x^2 - 2x - 3$

Solución:

Primero hay que hallar lo máximos y mínimos relativos:

$y = x^2 - 2x - 3$

$y' = 2x - 2$

$y' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

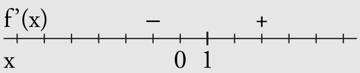
Si $x = 1 \Rightarrow y = -4$

$A(1, -4)$

$y'' = 2$

$y''(1) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow A(1, -4)$ es un mínimo relativo

Crecimiento:



Creciente: $(\nearrow) = (1, +\infty)$

Decreciente: $(\searrow) = (-\infty, 1)$

7 El número de enfermos de gripe que se contabilizan en una localidad durante una epidemia sigue la función:

$$f(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$$

donde **x** se expresa en semanas, y f(x), en miles de personas. Calcula el número medio de enfermos de gripe durante la 2ª y la 4ª semanas; y entre la 4ª y la 6ª semanas. Interpreta los resultados.

Solución:

$$TVM[2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{8 - 6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Como TVM[2, 4] = 1 > 0, es creciente; es decir, el número medio de enfermos está subiendo.

$$TVM[4, 6] = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{6 - 8}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Como TVM[4, 6] = – 1 < 0, es decreciente; es decir, el número medio de enfermos está bajando.

8 Halla las rectas tangente y normal a la curva:

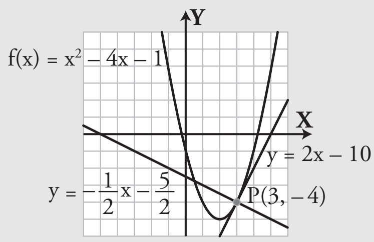
$$y = x^2 - 4x - 1 \text{ para } x = 3$$

Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

Solución:

Recta tangente: $y = 2x - 10$

Recta normal: $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$



Paso a paso

150 Representa la función parte decimal de **x,** indica si es periódica y halla el período.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

151 Representa la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

152 Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 - x + 3)$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

153 Halla las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = x^2 + 2$ para $x = 1$. Dibuja la curva y las rectas.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

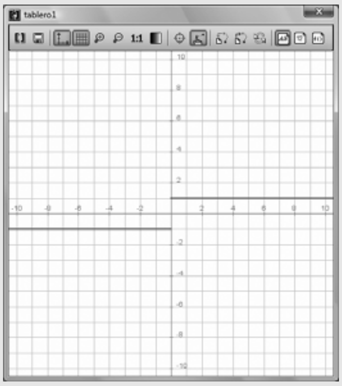
154 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

155 Representa la función signo de **x.** Halla cuándo no es continua.

Solución:

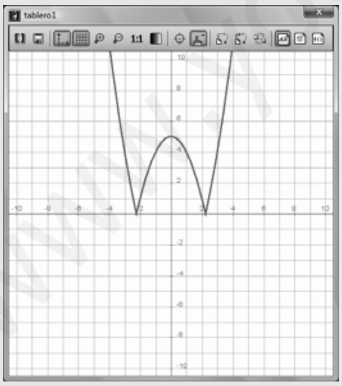
```
Ejercicio 155
dibujar(signo(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})
Es discontinua en x = 0
```



156 Representa la función $y = |x^2 - 5|$

Solución:

```
Ejercicio 156
dibujar(|x² − 5|, {color = rojo, anchura_línea = 2})
Es discontinua en x = 0
```

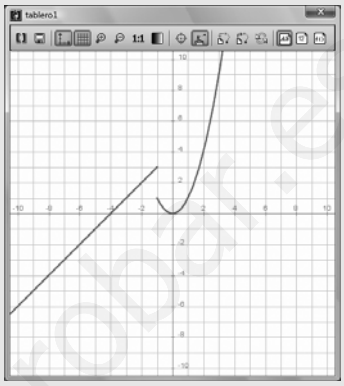


157 Representa la siguiente función y estudia su continuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Solución:

```
Ejercicio 157
dibujar(x + 4, −∞..−1, {color=rojo, anchura_línea=2})
dibujar(x², −1..+∞, {color=rojo, anchura_línea=2})
Es discontinua en x = − 1
```

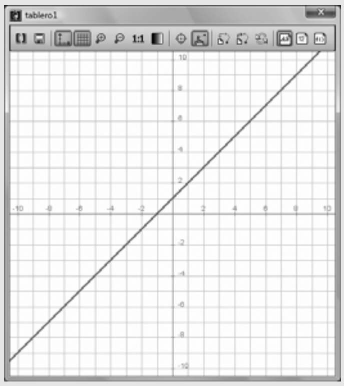


158 Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \to 2} (x + 1)$$

Solución:

```
Ejercicio 158
f(x) =x + 1  ⇒  x↦x+1
a = 2  ⇒  2
lim f(x)  ⇒  3
x→a
dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})
Se observa que cuando x → 2 y → 3
```



159 Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 5)$$

Solución:

Ejercicio 159

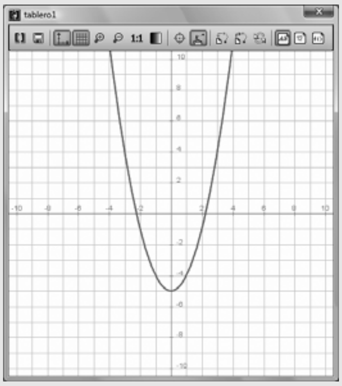
$f(x) = x^2 - 5 \rightarrow x \mapsto x^2 - 5$

$a = 3 \rightarrow 3$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \rightarrow 4$

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})

Se observa que cuando x → 3, y → 4



160 Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 - x + 3)$$

Solución:

Ejercicio 160

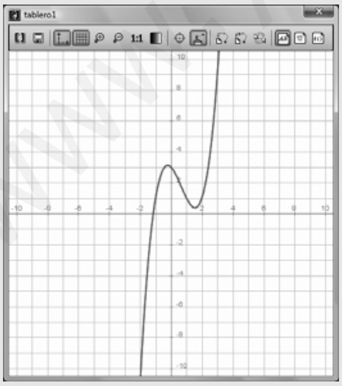
$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3 \rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x^2 - x + 3$

$a = -\infty \rightarrow -\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \rightarrow -\infty$

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})

Se observa que cuando x → -∞, y → -∞



Calcula las siguientes derivadas

161 $y = 5x^2 - 7x + 3$

Solución:

Ejercicio 161

$f(x) = 5x^2 - 7x + 3 \rightarrow x \mapsto 5 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 3$

$f'(x) \rightarrow 10 \cdot x - 7$

162 $y = e^{3x - 5}$

Solución:

Ejercicio 162

$f(x) = e^{3x - 5} \rightarrow x \mapsto e^{3 \cdot x - 5}$

$f'(x) \rightarrow 3 \cdot e^{3 \cdot x - 5}$

163 $y = L\,(x^2 + 5x - 6)$

Solución:

Ejercicio 163

$f(x) = \ln(x^2 + 5x - 6) \rightarrow x \mapsto \ln(x^2 + 5 \cdot x - 6)$

$f'(x) \rightarrow \dfrac{2 \cdot x + 5}{x^2 + 5 \cdot x - 6}$

164 $y = x\,e^x$

Solución:

Ejercicio 164

$f(x) = x \cdot e^x \rightarrow x \mapsto x \cdot e^x$

$f'(x) \rightarrow (x + 1) \cdot e^x$

165 $y = x\,L\,x$

Solución:

Ejercicio 165

$f(x) = x \cdot \ln(x) \rightarrow x \mapsto x \cdot \ln(x)$

$f'(x) \rightarrow \ln(x) + 1$

166 $y = e^x\,L\,x$

Solución:

Ejercicio 166

$f(x) = e^x \cdot \ln(x) \rightarrow x \mapsto e^x \cdot \ln(x)$

$f'(x) \rightarrow e^x \cdot \ln(x) + \dfrac{e^x}{x}$

167 $y = \dfrac{e^x}{x}$

Solución:

Ejercicio 167

$f(x) = \dfrac{e^x}{x} \;\rightarrow\; x \mapsto \dfrac{1}{x} \cdot e^x$

$f'(x) \;\rightarrow\; \dfrac{(x-1)\cdot e^x}{x^2}$

168 $y = \dfrac{5x - 1}{3x + 2}$

Solución:

Ejercicio 168

$f(x) = \dfrac{5x - 1}{3x + 2} \;\rightarrow\; x \mapsto \dfrac{5\cdot x - 1}{3\cdot x + 2}$

$f'(x) \;\rightarrow\; \dfrac{13}{9\cdot x^2 + 12\cdot x + 4}$

169 Halla las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ para $x = 2$. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

Solución:

Ejercicio 169

$f(x) = x^2 \;\rightarrow\; x \mapsto x^2$

$f(2) \;\rightarrow\; 4$

P(2, 4)

$f'(x) \;\rightarrow\; 2\cdot x$

$f'(2) \;\rightarrow\; 4$

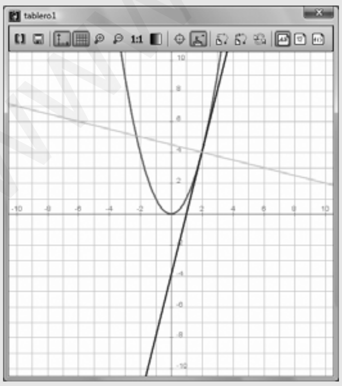
resolver({y − 4 = 4(x − 2)}, {y}) $\rightarrow$ {{y=4·x−4}}

resolver({y − 4 = $-\dfrac{1}{4}$(x − 2)}, {y}) $\rightarrow \left[\left[y = -\dfrac{1}{4}\cdot x + \dfrac{9}{2}\right]\right]$

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})

dibujar(4·x−4, {color=azul, anchura_línea=2})

dibujar$\left(-\dfrac{1}{4}\cdot x + \dfrac{9}{2}\right.$, {color=verde, anchura_línea=2}$\left.\right)$



170 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2 - 4x + 5$. Dibuja la función.

Solución:

Ejercicio 170

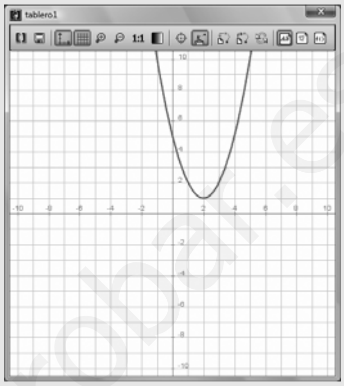
$f(x) = x^2 - 4x + 5 \;\rightarrow\; x \mapsto x^2 - 4\cdot x + 5$

resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=2}}

$f(2) \;\rightarrow\; 1$

A(2, 1) mínimo relativo.

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})



171 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^3 - 3x$

Solución:

Ejercicio 171

$f(x) = x^3 - 3x \;\rightarrow\; x \mapsto x^3 - 3\cdot x$

resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=−1},{x=1}}

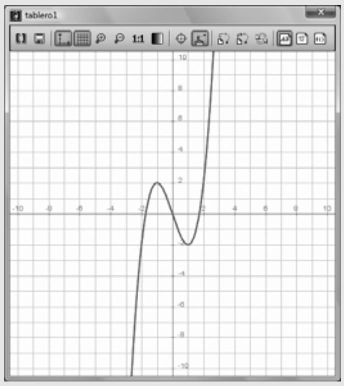
$f(1) \;\rightarrow\; -2$

A(1, − 2) mínimo relativo.

$f(-1) \;\rightarrow\; 2$

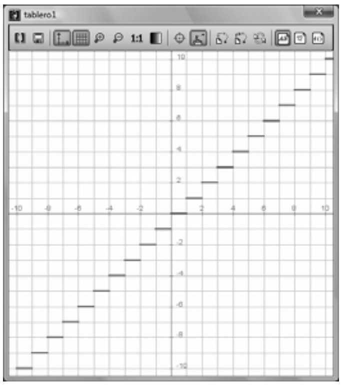
A(−1, 2) máximo relativo.

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})



Halla mediante *ensayo-acierto* la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

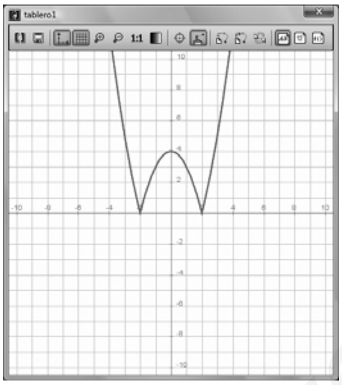
172



Solución:

Ejercicio 172
dibujar(suelo(x), {color=rojo, anchura_línea=2})
Es la función parte entera.
y = Ent(x)

173



Solución:

Ejercicio 173
dibujar($|x^2 - 4|$, {color=rojo, anchura_línea=2})

174 Las pérdidas de una empresa en millones de euros vienen dadas por la fórmula: $y = -x^2 + 8x$, donde **x** indica el número de años que lleva funcionando. ¿Qué año alcanza las máximas pérdidas?

Solución:

Ejercicio 174
$f(x) = -x^2 + 8x \Rightarrow x \mapsto -x^2 + 8 \cdot x$
resolver(f'(x) = 0) $\Rightarrow$ {{x=4}}
f(4) $\Rightarrow$ 16
A(4, 16) máximo relativo.
dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})
Las máximas pérdidas se alcanzan el 4º año
y son de 16 millones de euros