



BLOQUE IV

Funciones

10. Funciones. Rectas y parábolas
11. Funciones racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas
12. Límites y derivadas

www.yodidato.com

10 Funciones. Rectas y parábolas



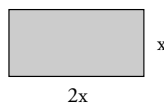
1. Funciones

PIENSA Y CALCULA

Dado el rectángulo de la figura, calcula:

a) el perímetro.

b) el área.



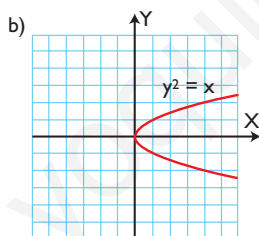
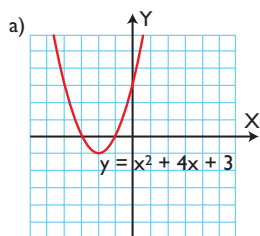
Solución:

$$\text{Perímetro} = 2(2x + x) = 6x$$

$$\text{Área} = 2x \cdot x = 2x^2$$

APLICA LA TEORÍA

1 Indica cuál de las siguientes gráficas es función:



- b) Logarítmica.
- c) Irrracional.
- d) Trigonométrica.
- e) Racional.
- f) Exponencial.

Solución:

a) Sí es función.

b) No es función. Hay valores de x para los que existen dos valores de y . Por ejemplo, para $x = 4$, $y = -2, y = 2$

2 Clasifica las siguientes funciones:

a) $y = x^2 - 2x + 1$

b) $y = \log(x + 1)$

c) $y = \sqrt{x + 2}$

d) $y = \cos 2x$

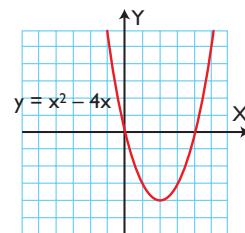
e) $y = \frac{2}{x-3}$

f) $y = 2^{x+1}$

Solución:

a) Polinómica

3 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: O(0, 0), A(4, 0)
- Eje Y: O(0, 0)

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: B(2, -4)

Monotonía:

- Creciente (\nearrow): (2, +∞)
- Decreciente (\searrow): (-∞, 2)

9. Puntos de inflexión: no tiene.

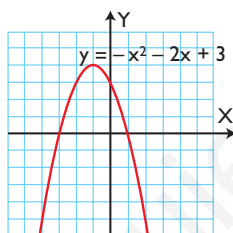
Curvatura:

- Convexa (\cup): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Cóncava (\cap): \emptyset

10. Recorrido o imagen:

$Im(f) = [-4, +\infty)$

4 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: polinómica.

2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Continuidad: es continua.

4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen O(0, 0)

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: A(-3, 0), B(1, 0)
- Eje Y: C(0, 3)

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: D(-1, 4)
- Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, -1)$
- Decreciente (\searrow): $(-1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): \emptyset
- Cóncava (\cap): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

10. Recorrido o imagen:

$Im(f) = (-\infty, 4]$

2. Función lineal y función afín

PIENSA Y CALCULA

Dada la función $f(x) = 2x$, indica si es lineal o afín y calcula la pendiente.

Solución:

Función lineal.

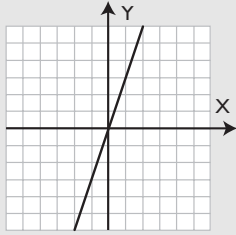
Pendiente: $m = 2$

5 Dadas las funciones lineales siguientes, halla su pendiente e indica si son crecientes o decrecientes. Representálas:

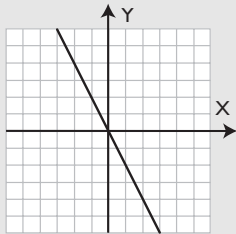
- a) $y = 3x$ b) $y = -2x$ c) $y = 2x/3$

Solución:

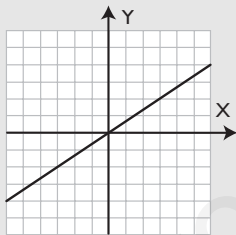
a) $m = 3 \Rightarrow$ Creciente.



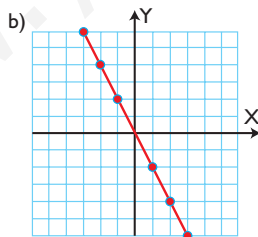
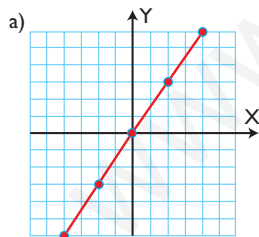
b) $m = -2 \Rightarrow$ Decreciente.



c) $m = 2/3 \Rightarrow$ Creciente.

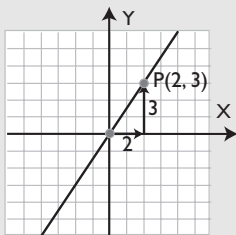


6 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:



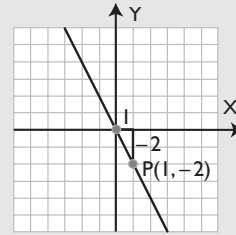
Solución:

a)



$$m = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

b)



$$m = -2 \Rightarrow y = -2x$$

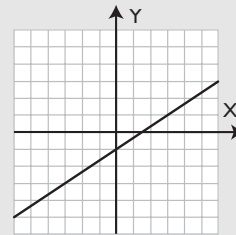
7 Dadas las funciones afines siguientes, halla su pendiente y la ordenada en el origen, e indica si son crecientes o decrecientes. Representálas:

- a) $y = 2x/3 - 1$ b) $y = -3x/4 + 2$

Solución:

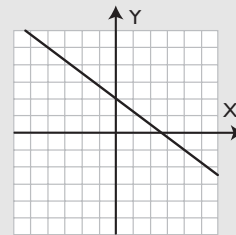
a) $m = 2/3 \Rightarrow$ Creciente.

$$b = -1$$

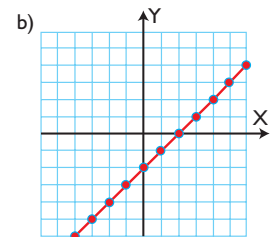
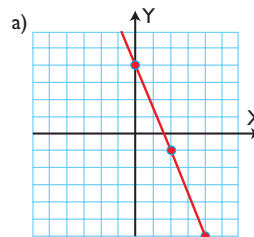


b) $m = -3/4 \Rightarrow$ Decreciente.

$$b = 2$$

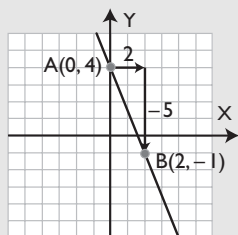


8 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:



Solución:

a)

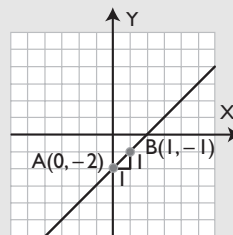


$$m = \frac{-1 - 4}{2 - 0} = -\frac{5}{2}$$

$$b = 4$$

$$y = -\frac{5}{2}x + 4$$

b)



$$m = \frac{-1 - (-2)}{1 - 0} = 1$$

$$b = -2$$

$$y = x - 2$$

3. Función cuadrática

PIENSA Y CALCULA

Dada la función $f(x) = x^2 - 4$, representada en el margen, indica:

a) la ecuación del eje de simetría.

b) las coordenadas del vértice, y si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:

a) $x = 0$

b) $V(0, -4)$ es un mínimo.

APLICA LA TEORÍA

9 Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo en las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 3x^2 - 6x - 1$

b) $y = -2x^2 + 8x - 5$

c) $y = x^2 - 9$

d) $y = x^2 + 2x$

d) Eje de simetría: $x = -1$

$V(-1, -1)$ es un mínimo.

10 Representa las siguientes parábolas:

a) $y = 2x^2$

b) $y = -3x^2$

Solución:

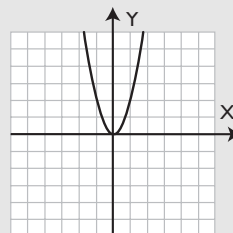
a) Eje de simetría: $x = 1$
 $V(1, -4)$ es un mínimo.

b) Eje de simetría: $x = 2$
 $V(2, 3)$ es un máximo.

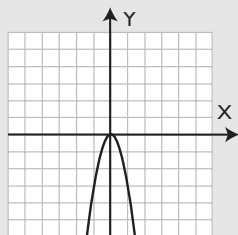
c) Eje de simetría: $x = 0$
 $V(0, -9)$ es un mínimo.

Solución:

a)

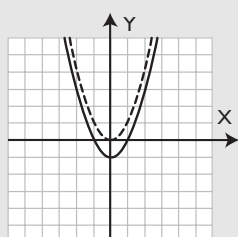


b)



- 11** Representa la parábola $y = x^2$; a partir de ella, representa la parábola $y = x^2 - 1$. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

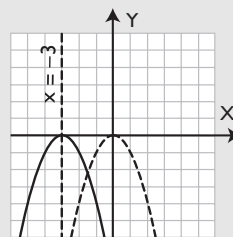
Solución:



Eje de simetría: $x = 0$
 $V(0, -1)$ es un mínimo.

- 12** Representa la parábola $y = -x^2$; a partir de ella, representa la parábola $y = -(x + 3)^2$. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

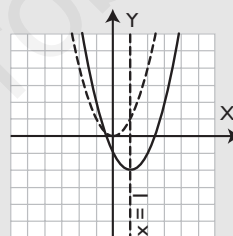
Solución:



Eje de simetría: $x = -3$
 $V(-3, 0)$ es un máximo.

- 13** Representa la parábola $y = x^2$; a partir de ella, representa la parábola $y = (x - 1)^2 - 2$. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:



Eje de simetría: $x = 1$
 $V(1, -2)$ es un mínimo.

4. La parábola

PIENSA Y CALCULA

Dada la función $f(x) = x^2 - 2x - 1$, representada en el margen, indica:

- la ecuación del eje de simetría.
- las coordenadas del vértice y si éste es máximo o mínimo.

Solución:

Eje de simetría: $x = 1$
 $V(1, -2)$ es un mínimo.

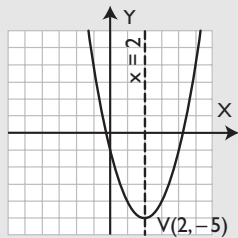
14 Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, indicando si éste es un máximo o un mínimo, de las siguientes funciones cuadráticas, y represéntalas:

- a) $y = x^2 - 4x - 1$
- b) $y = -3x^2 - 6x + 2$
- c) $y = x^2 + 4x + 3$
- d) $y = -2x^2 + 8x - 5$

Solución:

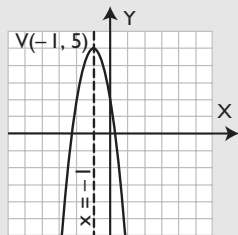
a) Eje de simetría: $x = 2$

$V(2, -5)$ es un mínimo.



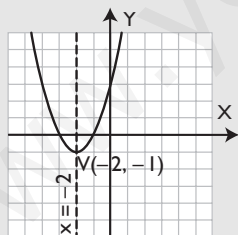
b) Eje de simetría: $x = -1$

$V(-1, 5)$ es un máximo.



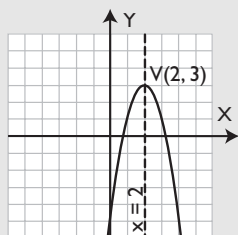
c) Eje de simetría: $x = -2$

$V(-2, -1)$ es un mínimo.

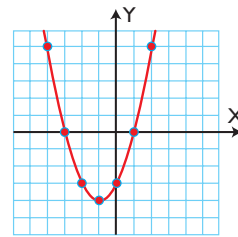


d) Eje de simetría: $x = 2$

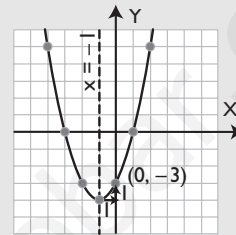
$V(2, 3)$ Es un máximo.



15 Halla la ecuación de la siguiente parábola:



Solución:



$a = 1$

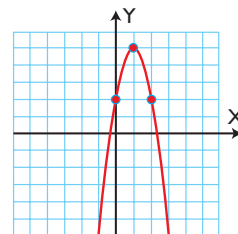
Eje de simetría:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 2$$

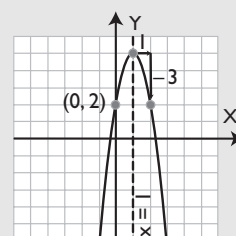
$c = -3$

$y = x^2 + 2x - 3$

16 Halla la ecuación de la siguiente parábola:



Solución:



$a = -3$

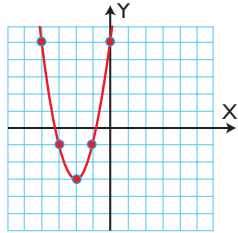
Eje de simetría:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 6$$

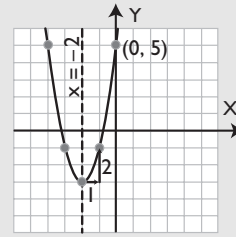
$$c = 2$$

$$y = -3x^2 + 6x + 2$$

17 Halla la ecuación de la siguiente parábola:



Solución:



$$a = 2$$

Eje de simetría:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 8$$

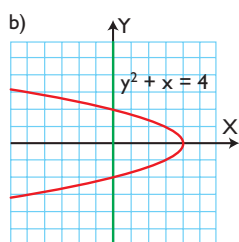
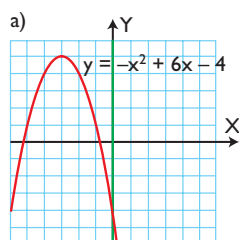
$$c = 5$$

$$y = 2x^2 + 8x + 5$$

Ejercicios y problemas

1. Funciones

18 Indica cuál de las siguientes gráficas es función:



Solución:

- a) Sí es función.
 b) No es función. Hay valores de x para los que existen dos valores de y . Por ejemplo, para $x = 0$, $y = -2, y = 2$

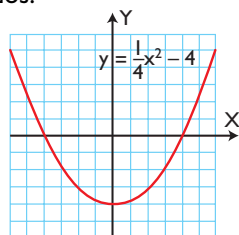
19 Clasifica las siguientes funciones:

- a) $y = 3x^2 - x + 2$ b) $y = \log(x - 3)$
 c) $y = \sqrt{x - 5}$ d) $y = \text{sen}(x + \pi)$
 e) $y = \frac{3x - 5}{x - 2}$ f) $y = 3^{x-2}$

Solución:

- a) Polinómica.
 b) Logarítmica.
 c) Irrracional.
 d) Trigonométrica.
 e) Racional.
 f) Exponencial.

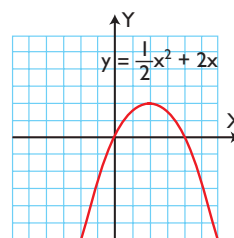
20 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X : $A(-4, 0), B(4, 0)$
 - Eje Y : $C(0, -4)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $C(0, -4)$
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(0, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0)$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): \emptyset
- Recorrido o imagen: $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

21 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen $O(0, 0)$

Ejercicios y problemas

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: O(0, 0), A(4, 0)
- Eje Y: O(0, 0)

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: B(2, 2)
- Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, 2)$
- Decreciente (\searrow): $(2, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): \emptyset
- Cóncava (\cap): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 2]$$

2. Función lineal y función afín

22 Halla mentalmente la pendiente de las siguientes funciones lineales o de proporcionalidad directa, di si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

a) $y = 2x$

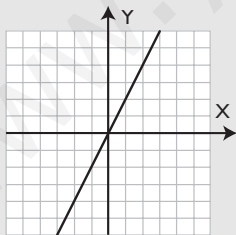
b) $y = -\frac{x}{2}$

c) $y = \frac{4x}{3}$

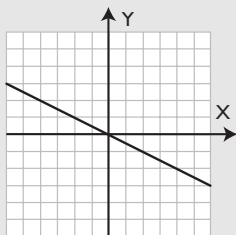
d) $y = -\frac{5x}{4}$

Solución:

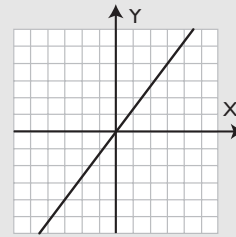
a) $m = 2 \Rightarrow$ Creciente.



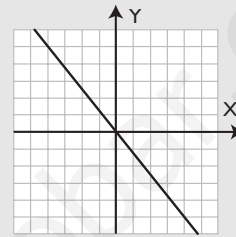
b) $m = -1/2 \Rightarrow$ Decreciente.



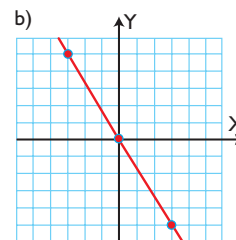
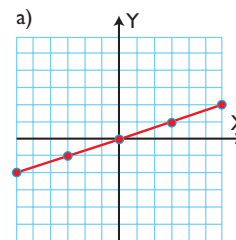
c) $m = 4/3 \Rightarrow$ Creciente.



d) $m = -5/4 \Rightarrow$ Decreciente.

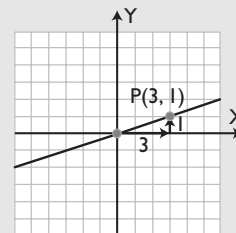


23 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:



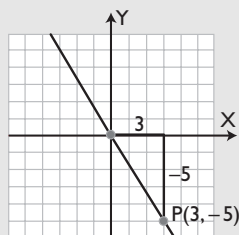
Solución:

a)



$$m = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 1$$

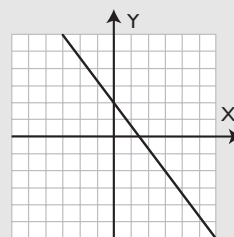
b)



$$m = \frac{-5}{3} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x$$

d) $m = -4/3 \Rightarrow$ Decreciente.

$$b = 2$$



24 Halla mentalmente la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones afines, di si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

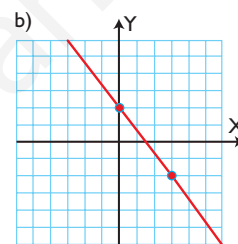
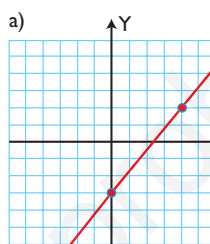
a) $y = 3x + 1$

b) $y = -\frac{x}{2} + 3$

c) $y = \frac{3x}{2} - 1$

d) $y = -\frac{4x}{3} + 2$

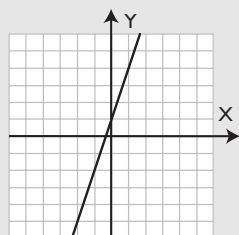
25 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:



Solución:

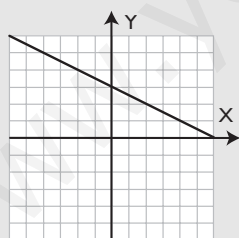
a) $m = 3 \Rightarrow$ Creciente.

$$b = 1$$



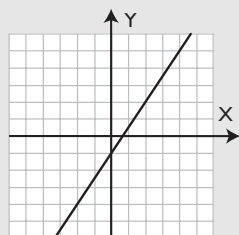
b) $m = -1/2 \Rightarrow$ Decreciente.

$$b = 3$$



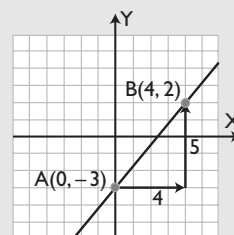
c) $m = 3/2 \Rightarrow$ Creciente.

$$b = -1$$



Solución:

a)

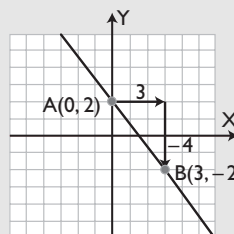


$$m = \frac{2 - (-3)}{4 - 0} = \frac{5}{4}$$

$$b = -3$$

$$y = \frac{5}{4}x - 3$$

b)



$$m = \frac{-2 - 2}{3 - 0} = -\frac{4}{3}$$

$$b = 2$$

$$y = -\frac{4}{3}x + 2$$

Ejercicios y problemas

3. Función cuadrática

26 Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo en las siguientes funciones cuadráticas:

- a) $y = 4x^2 - 16x + 11$
- b) $y = -x^2 + 2x - 3$
- c) $y = x^2 + 2$
- d) $y = x^2 + 4x$

Solución:

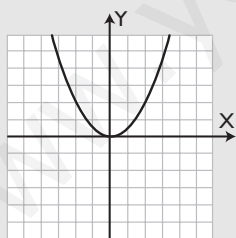
- a) Eje de simetría: $x = 2$
 $V(2, -5)$ es un mínimo.
- b) Eje de simetría: $x = 1$
 $V(1, -2)$ es un máximo.
- c) Eje de simetría: $x = 0$
 $V(0, 2)$ es un mínimo.
- d) Eje de simetría: $x = -2$
 $V(-2, -4)$ es un mínimo.

27 Representa la siguiente parábola:

$$y = \frac{x^2}{2}$$

- a) Halla el eje de simetría.
- b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.
- c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?
- d) ¿Es convexa (\cup) o cóncava (\cap)?

Solución:



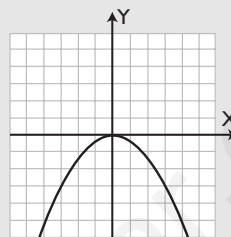
- a) $x = 0$
- b) $V(0, 0)$ es un mínimo.
- c) Creciente (\nearrow): $(0, +\infty)$
 Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0)$
- d) Es convexa (\cup)

28 Representa la siguiente parábola:

$$y = -\frac{x^2}{3}$$

- a) Halla el eje de simetría.
- b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.
- c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?
- d) ¿Es convexa (\cup) o cóncava (\cap)?

Solución:



- a) $x = 0$
- b) $V(0, 0)$ es un máximo.
- c) Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0)$
 Decreciente (\searrow): $(0, +\infty)$
- d) Es cóncava (\cap)

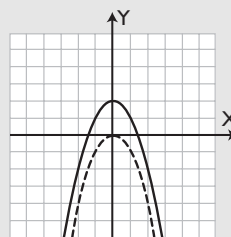
29 Representa la parábola $y = -x^2$

A partir de ella, representa la siguiente parábola:

$$y = -x^2 + 2$$

- a) Halla el eje de simetría.
- b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.
- c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?
- d) ¿Es convexa (\cup) o cóncava (\cap)?

Solución:



- a) $x = 0$
- b) $V(0, 2)$ es un máximo.
- c) Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0)$
 Decreciente (\searrow): $(0, +\infty)$
- d) Es cóncava (\cap)

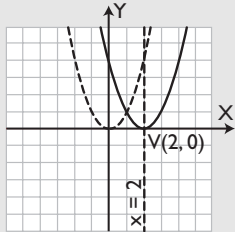
30 Representa la función $y = x^2$

A partir de ella, representa la siguiente parábola:

$$y = (x - 2)^2$$

- Halla el eje de simetría.
- Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.
- ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?
- ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



- $x = 2$
- $V(2, 0)$ es un mínimo.
- Creciente (↗): $(2, +\infty)$
Decreciente (↘): $(-\infty, 2)$
- Es convexa (∪)

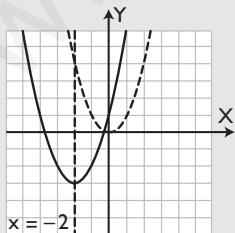
31 Representa la función $y = x^2$

A partir de ella, representa la siguiente parábola:

$$y = (x + 2)^2 - 3$$

- Halla el eje de simetría.
- Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.
- ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?
- ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



- $x = -2$
- $V(-2, -3)$ es un mínimo.
- Creciente (↗): $(-2, +\infty)$
Decreciente (↘): $(-\infty, -2)$
- Es convexa (∪)

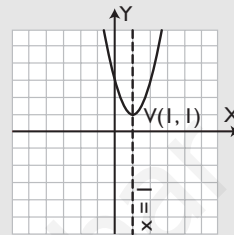
4. La parábola

32 Representa la siguiente parábola:

$$y = 2x^2 - 4x + 3$$

- Halla el eje de simetría.
- Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:



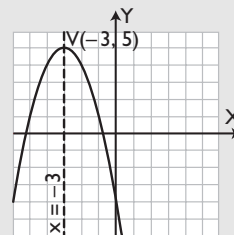
- $x = 1$
- $V(1, 1)$ es un mínimo.

33 Representa la siguiente parábola:

$$y = -x^2 - 6x - 4$$

- Halla el eje de simetría.
- Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:



- $x = -3$
- $V(-3, 5)$ es un máximo.

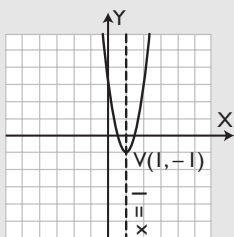
34 Representa la siguiente parábola:

$$y = 4x^2 - 8x + 3$$

- Halla el eje de simetría.
- Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Ejercicios y problemas

Solución:



a) $x = 1$

b) $V(1, -1)$ es un mínimo.

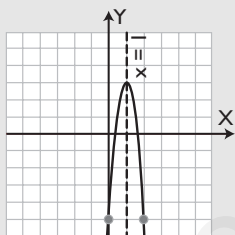
35 Representa la siguiente parábola:

$$y = -8x^2 + 16x - 5$$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

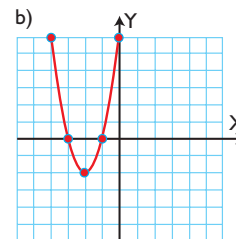
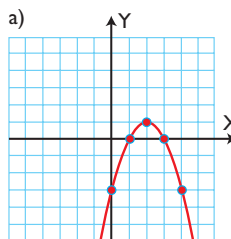
Solución:



a) $x = 1$

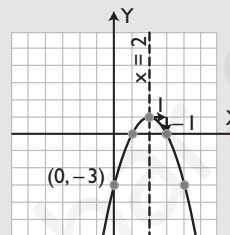
b) $V(1, 3)$ es un máximo.

36 Halla la ecuación de las siguientes parábolas:



Solución:

a)



$$a = -1$$

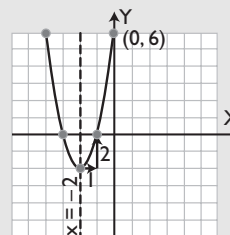
Eje de simetría:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 4$$

$$c = -3$$

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

b)



$$a = 2$$

Eje de simetría:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 8$$

$$c = 6$$

$$y = 2x^2 + 8x + 6$$

Para ampliar

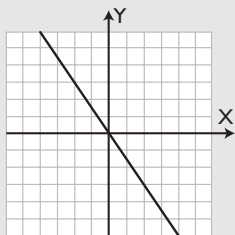
37 Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines. Halla mentalmente la pendiente, di si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

a) $y = -\frac{3x}{2}$ b) $y = -2x - 1$
 c) $y = \frac{x}{3} - 4$ d) $y = \frac{x}{4}$

Solución:

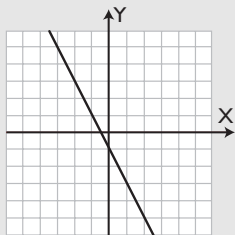
a) Función lineal.

$m = -3/2 \Rightarrow$ Decreciente.



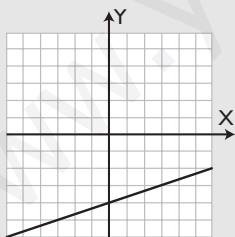
b) Función afín.

$m = -2 \Rightarrow$ Decreciente.



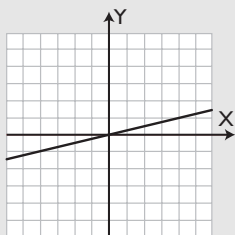
c) Función afín.

$m = 1/3 \Rightarrow$ Creciente.

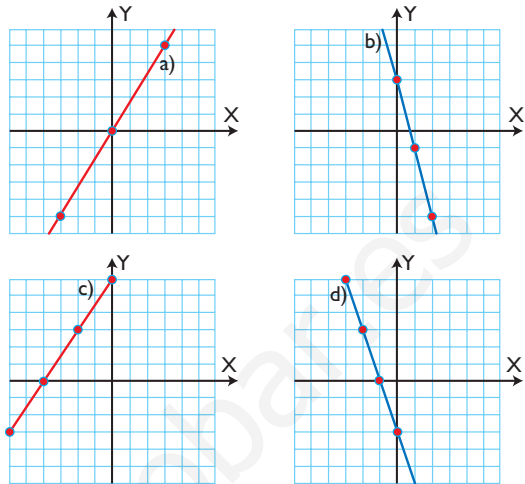


d) Función lineal.

$m = 1/4 \Rightarrow$ Creciente.



38 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:



Solución:

a) $y = \frac{5}{3}x$
 b) $y = -4x + 3$
 c) $y = \frac{3}{2}x + 6$
 d) $y = -3x - 3$

39 Representa la siguiente parábola:

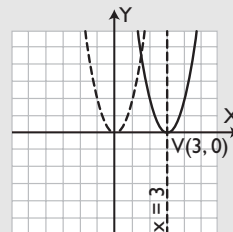
$$y = 2x^2$$

A partir de ella, representa la parábola:

$$y = 2(x - 3)^2$$

- Halla el eje de simetría.
- Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.
- ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?
- ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



- $x = 3$
- $V(3, 0)$ es un mínimo.

Ejercicios y problemas

- c) Creciente (\nearrow): $(3, +\infty)$
 Decreciente (\searrow): $(-\infty, 3)$
 d) Es convexa (\cup)

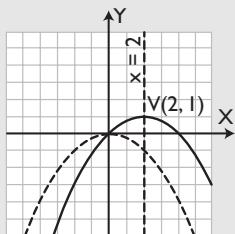
40 Representa la siguiente parábola: $y = -\frac{x^2}{4}$

A partir de ella representa la parábola:

$$y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$$

- a) Halla el eje de simetría.
 b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.
 c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?
 d) ¿Es convexa (\cup) o cóncava (\cap)?

Solución:



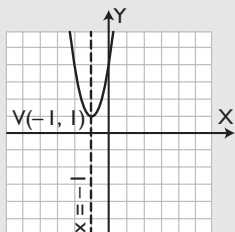
- a) $x = 2$
 b) $V(2, 1)$ es un máximo.
 c) Creciente (\nearrow): $(-\infty, 2)$
 Decreciente (\searrow): $(2, +\infty)$
 d) Es cóncava (\cap)

41 Representa la siguiente parábola:

$$y = 3x^2 + 6x + 4$$

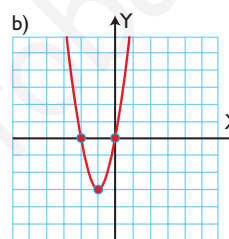
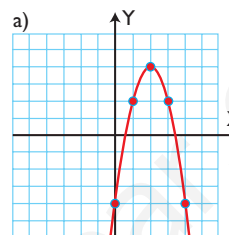
- a) Halla el eje de simetría.
 b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.
 c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?
 d) ¿Es convexa (\cup) o cóncava (\cap)?

Solución:

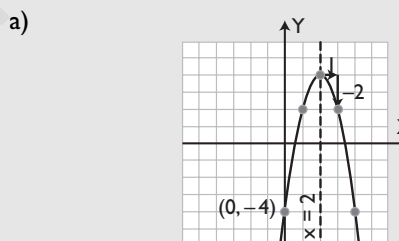


- a) $x = -1$
 b) $V(-1, 1)$ es un mínimo.
 c) Creciente (\nearrow): $(-1, +\infty)$
 Decreciente (\searrow): $(-\infty, -1)$
 d) Es convexa (\cup)

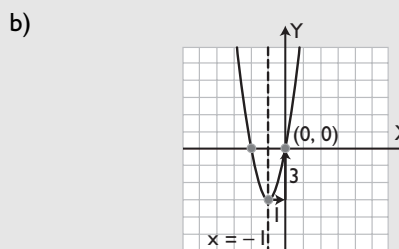
42 Halla la ecuación de las siguientes parábolas:



Solución:



- $a = -2$
 Eje de simetría:
 $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 8$
 $c = -4$
 $y = -2x^2 + 8x - 4$



$a = 3$

Eje de simetría:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 6$$

$$c = 0$$

$$y = 3x^2 + 6x$$

43 Halla algebraicamente los puntos de corte de las siguientes parábolas con los ejes de coordenadas, representa las parábolas y comprueba el resultado.

a) $y = x^2 + 4x + 3$

b) $y = x^2 - 2x$

c) $y = x^2 + 4x + 4$

d) $y = x^2 - 2x + 2$

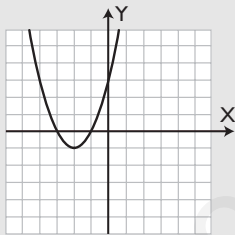
Solución:

a) Eje X:

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3, x = -1$$

$$A(-3, 0), B(-1, 0)$$

$$\text{Eje Y: } C(0, 3)$$

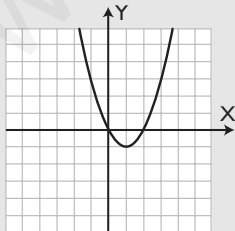


b) Eje X:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$O(0, 0), B(2, 0)$$

$$\text{Eje Y: } O(0, 0)$$

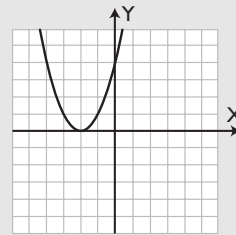


c) Eje X:

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$A(-2, 0)$$

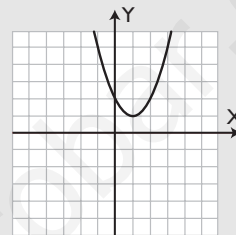
$$\text{Eje Y: } B(0, 4)$$



d) Eje X:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$\text{Eje Y: } A(0, 2)$$



44 Halla algebraicamente los puntos de corte de la recta y la parábola siguientes, representa las gráficas y comprueba el resultado:

$$y = 2x - 5$$

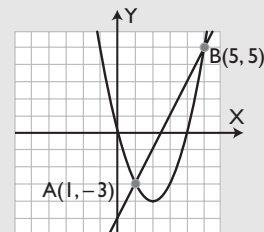
$$y = x^2 - 4x$$

Solución:

Se resuelve el sistema formado por la ecuación de la recta y de la parábola:

$$x = 1, y = -3 \Rightarrow A(1, -3)$$

$$x = 5, y = 5 \Rightarrow B(5, 5)$$



45 Halla algebraicamente los puntos de corte de las siguientes parábolas, representa las parábolas y comprueba el resultado:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$y = -x^2 - 2x + 5$$

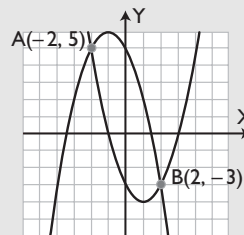
Ejercicios y problemas

Solución:

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de las dos parábolas:

$$x = -2, y = 5 \Rightarrow A(-2, 5)$$

$$x = 2, y = -3 \Rightarrow B(2, -3)$$



Problemas

46 La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas.

- ¿Cuánto vale c ?
- Si la parábola pasa además por los puntos $A(-3, -3)$ y $B(1, 5)$, calcula el valor de los coeficientes a y b .
- Escribe la ecuación de la parábola.
- Representala gráficamente.

Solución:

a) $c = 0$

b) Se resuelve el sistema:

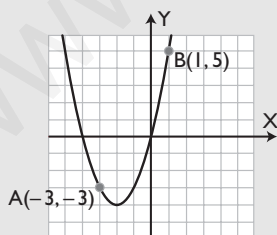
$$9a - 3b = -3$$

$$a + b = 5$$

$$a = 1, b = 4$$

c) $y = x^2 + 4x$

d)



47 Sea la parábola $y = x^2 + bx + c$

- Calcula los valores de b y c sabiendo que pasa por los puntos $A(4, 3)$ y $B(2, -1)$.
- Escribe la ecuación de la parábola.
- Representala gráficamente.

Solución:

a) Se resuelve el sistema:

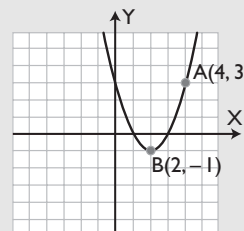
$$16 + 4b + c = 3$$

$$4 + 2b + c = -1$$

$$b = -4, c = 3$$

b) $y = x^2 - 4x + 3$

c)



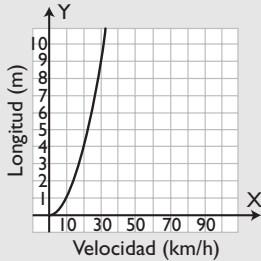
48 La distancia de seguridad que deben guardar los coches entre sí, en circulación, se recoge en la tabla siguiente:

Velocidad (km/h)	Distancia de seguridad (m)
10	1
20	4
30	9
40	16
50	25
...	...

Expresa la distancia de seguridad en función de la velocidad, y representa la gráfica.

Solución:

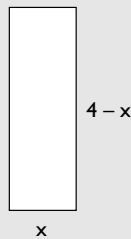
$$y = \left(\frac{x}{10}\right)^2$$



- 49** El perímetro de un rectángulo mide 8 m. Expresa el área del rectángulo, en función del lado x de la base. Representa la función e indica el valor del lado de la base para el que el área se hace máxima.

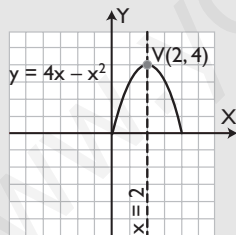
Solución:

Si el perímetro mide 8 m, la base más la altura mide 4 m



$$y = x(4 - x)$$

$$y = 4x - x^2$$

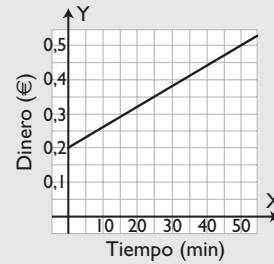


El máximo se obtiene para $x = 2$, que forma un cuadrado de área 4 m^2

- 50** Un servicio de telefonía cobra $0,2 \text{ €}$ por el uso del servicio y $0,06 \text{ €}$ por cada minuto. Escribe la fórmula de la función que expresa el dinero que se paga en función del tiempo y representa su gráfica.

Solución:

$$y = 0,2 + 0,06x$$



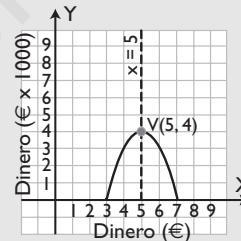
- 51** El beneficio, en miles de euros, que se obtiene al vender a $x \text{ €}$ una unidad de un determinado producto viene dado por la fórmula

$$B(x) = -x^2 + 10x - 21$$

- a) Representa la función $B(x)$
 b) Determina el precio al que hay que vender el producto para obtener el máximo beneficio.

Solución:

a)



- b) A 5 € la unidad, se obtiene el máximo beneficio, que es de 4000 €

- 52** Se depositan 2000 € a un 2% de interés simple anual. Expresa el interés en función del tiempo y representa la gráfica.

Solución:

$$y = 2000 \cdot 0,02 \cdot x$$

$$y = 40x$$



- 53** La energía cinética de un móvil de masa m viene dada por la siguiente fórmula:

Ejercicios y problemas

$$E(v) = \frac{1}{2}mv^2$$

donde v es la velocidad del móvil en m/s; m , la masa en kilos, y E , la energía en julios. Dibuja la gráfica que expresa la energía cinética en función de la velocidad de un cuerpo de 1 kg de masa. ¿Qué tipo de gráfica es?

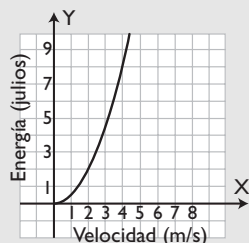
Solución:

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

Si $m = 1$ kg

$$E = \frac{1}{2}v^2$$

Velocidad (m/h)	0	1	2	3	4
Energía (julios)	0	1/2	2	9/2	8



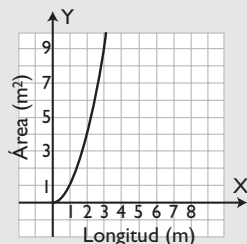
Es una parábola.

- 54** Halla el área de un cuadrado en función del lado x . Representala gráficamente.



Solución:

$$y = x^2$$



Para profundizar

- 55** Escribe la ecuación de la parábola que tiene el vértice en $V(2, 2)$ y pasa por $P(1, 3)$

Solución:

Si el vértice es $V(2, 2)$ y pasa por $P(1, 3) \Rightarrow a = 1$

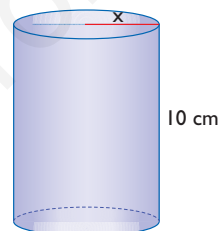
Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 4 + 2b + c = 2 \\ 1 + b + c = 3 \end{cases}$$

$$b = -4, c = 6$$

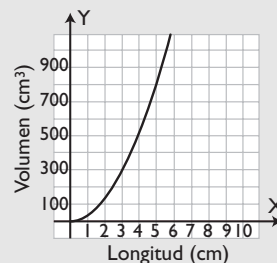
$$y = x^2 - 4x + 6$$

- 56** Escribe la función que da el volumen de un cilindro de 10 cm de altura en función del radio de la base. Representala.



Solución:

$$y = 10\pi x^2$$



- 57** La demanda y la oferta de un determinado producto en función del precio x son:

$$\text{Oferta: } y = \frac{1}{4}x^2$$

$$\text{Demanda: } y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$$

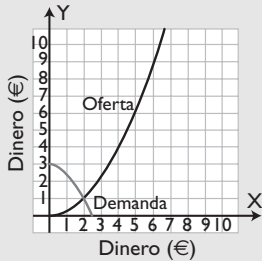
donde x se expresa en euros, e y es la cantidad ofertada o demandada.

- Halla el punto de equilibrio algebraicamente.
- Representa las funciones y comprueba el resultado.

Solución:

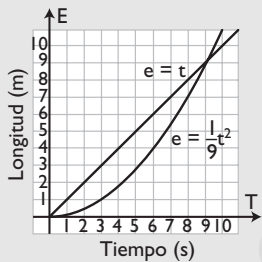
a) Se resuelve el sistema de las dos ecuaciones:
 $x = 2, y = 1$

b)



58 Dos móviles inician su movimiento desde un punto O. El primero se desplaza según la fórmula $e = \frac{1}{9}t^2$, y el segundo móvil, según $e = t$; donde t se mide en segundos, y e , en metros. Representa las gráficas de sus movimientos e interpreta el resultado.

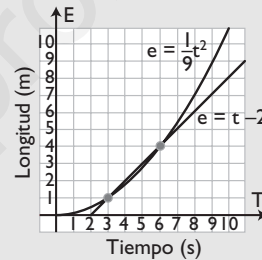
Solución:



Al principio, el 2º móvil recorre un mayor espacio en el mismo tiempo; éste se iguala a los 9 s, y a partir de los 9 s, el 1º móvil recorre un espacio mayor.

59 Dos móviles inician su movimiento desde un punto O. El primero se desplaza según la fórmula $e = \frac{1}{9}t^2$, y el segundo móvil, según $e = t - 2$; donde t se mide en segundos, y e , en metros. Representa las gráficas de sus movimientos e interpreta el resultado sabiendo que el segundo móvil parte 2 s más tarde que el primero.

Solución:

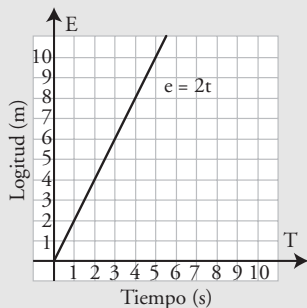


El 2º móvil alcanza al primero a los 2 s y está por delante hasta los 6 s, cuando se vuelven a encontrar a los 4 m del recorrido. A partir de ese instante, el 1º móvil va por delante del 2º.

Aplica tus competencias

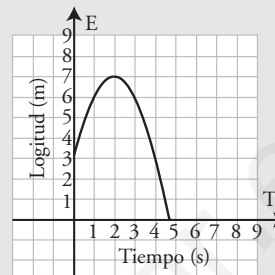
- 60** Un móvil se desplaza con una velocidad constante de 2 m/s. Halla la ecuación y representa la gráfica que expresa el espacio en función del tiempo.

Solución:



- 61** Un móvil se desplaza según la fórmula $e = -t^2 + 4t + 3$. Representa la gráfica e indica el valor del espacio inicial, la velocidad inicial y la aceleración.

Solución:



$$e_0 = 3 \text{ m}$$
$$v_0 = 4 \text{ m/s}$$
$$a = -2 \text{ m/s}^2$$

Comprueba lo que sabes

- 1** Define función cuadrática, pon un ejemplo e indica sus características.

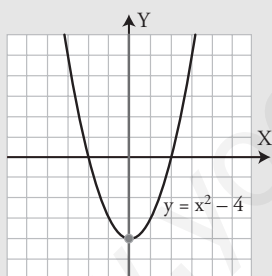
Solución:

Una **función cuadrática** es una función polinómica de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$, siendo **a**, **b** y **c** números reales y $a \neq 0$. Su representación gráfica es una **parábola** que tiene las siguientes características:

- a) Tiene un eje de simetría cuya fórmula es:
$$x = -\frac{b}{2a}$$
- b) Corta al eje X en dos puntos, uno o ninguno, según el número de raíces reales de $ax^2 + bx + c = 0$, y corta al eje Y en el punto (0, c)
- c) El vértice es un mínimo si $a > 0$, y un máximo si $a < 0$; por una parte del eje es creciente, y por la otra es decreciente.
- d) Es convexa (∪) si $a > 0$ y cóncava (∩) si $a < 0$
- e) Al aumentar **a** en valor absoluto, se hace más estrecha.

Ejemplo

$y = x^2 - 4$

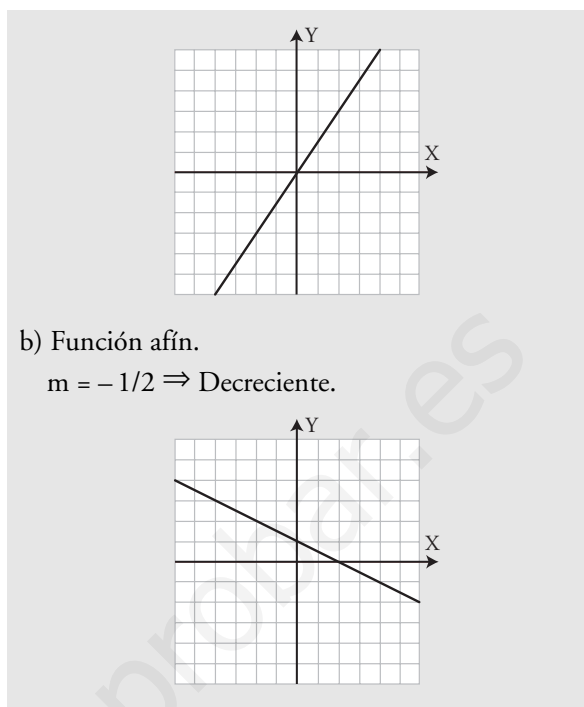


- 2** Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines, halla mentalmente la pendiente, indica si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

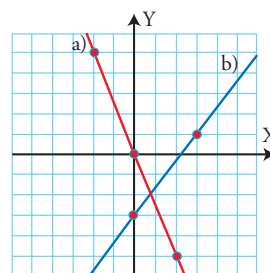
- a) $y = 3x/2$
- b) $y = -x/2 + 1$

Solución:

- a) Función lineal.
 $m = 3/2 \Rightarrow$ Creciente.

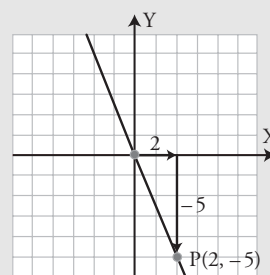


- 3** Halla las ecuaciones de las siguientes rectas y clasifícalas.



Solución:

- a)



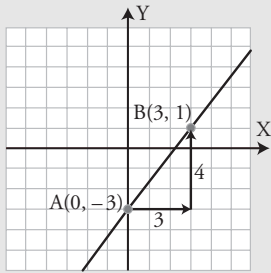
$m = -\frac{5}{2}$

$y = -\frac{5}{2}x$

Función lineal.

Comprueba lo que sabes

b)



$$m = \frac{1 - (-3)}{3 - 0} = \frac{4}{3}$$

$$b = -3$$

$$y = \frac{4}{3}x - 3$$

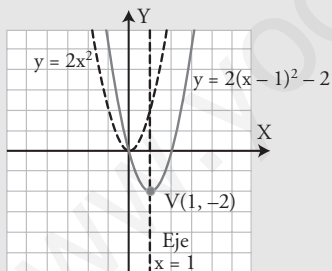
Función afín.

4 Representa la parábola $y = 2x^2$, y a partir de ella, dibuja la parábola:

$$y = 2(x - 1)^2 - 2$$

- Halla el eje de simetría.
- ¿Cuándo es creciente y cuándo es decreciente?
- Halla el vértice y di si éste es un máximo o un mínimo.
- ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

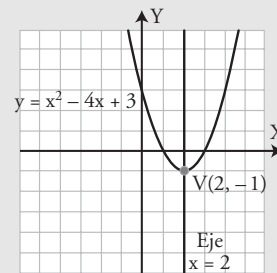
Solución:



- $x = 1$
- Creciente (↗): $(1, +\infty)$
Decreciente (↘): $(-\infty, 1)$
- $V(1, -2)$ es un mínimo.
- Es convexa (∪)

5 Representa la parábola $y = x^2 - 4x + 3$, halla el eje de simetría e indica si el vértice es un máximo o un mínimo.

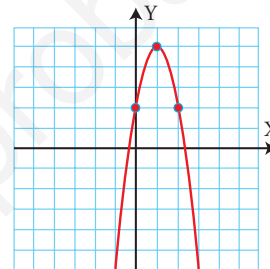
Solución:



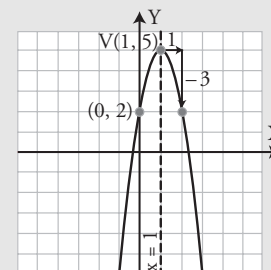
Eje de simetría: $x = 2$

$V(2, -1)$ es un mínimo.

6 Halla la fórmula de la parábola del margen.



Solución:



$$a = -3$$

$$\text{Eje de simetría: } x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 6$$

$$c = 2$$

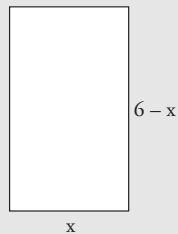
$$y = -3x^2 + 6x + 2$$

7 Un cristalero quiere hacer marcos rectangulares para espejos que tengan 12 m de perímetro.

- Escribe la fórmula que expresa el área de los rectángulos en función del lado x
- Representa la gráfica.
- ¿Para qué valor de x se hace máxima el área del espejo?

Solución:

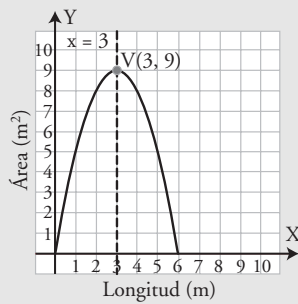
a) Si el perímetro mide 12 m, la base más la altura miden 6 m; por tanto, si la base es x , la altura será $6 - x$



$$y = x(6 - x)$$

$$y = 6x - x^2$$

b)

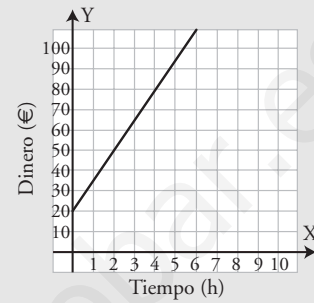


c) El máximo se alcanza cuando el rectángulo es un cuadrado de 3 m de lado y tiene un área de 9 m²

8 Un técnico cobra 20 € por desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo. Halla la ecuación que calcula el dinero que cobra en función del tiempo que tarda en hacer un trabajo, y represéntala.

Solución:

$$y = 15x + 20$$



Paso a paso

62 Dada la función: $y = \frac{3}{2}x - 4$

clasifícala, halla su pendiente y estudia el crecimiento; calcula la ordenada en el origen. Representala.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

63 Representa la siguiente parábola:

$$y = x^2 - 2x - 4$$

Halla el eje de simetría y dibújalo, calcula las coordenadas del vértice y di si es máximo o mínimo, halla dónde es creciente y decreciente y di si es cóncava o convexa.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Geogebra y DERIVE:

64 El perímetro de un rectángulo mide 8 m. Expresa el área del rectángulo en función del lado x de la base. Representa la función e indica el valor del lado de la base para el que se hace máxima el área.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

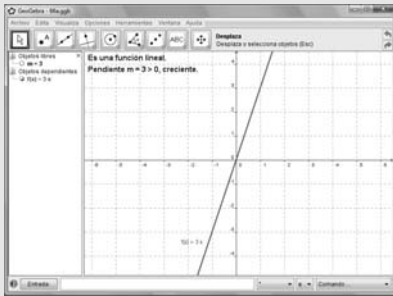
65 Internet. Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.**

Practica

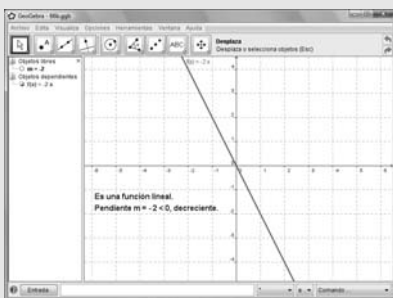
- 66** Dadas las funciones siguientes:
 a) $y = 3x$ b) $y = -2x$ c) $y = 2x/3$
 clasifícalas, halla su pendiente y estudia el crecimiento. Representálas.

Solución:

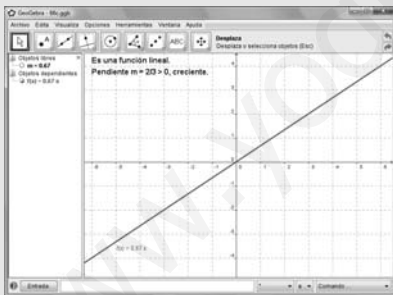
a)



b)



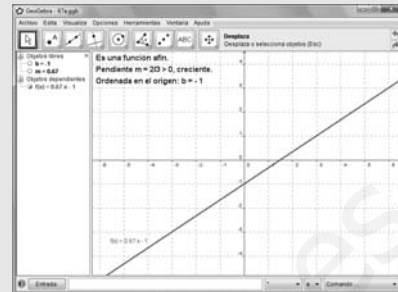
c)



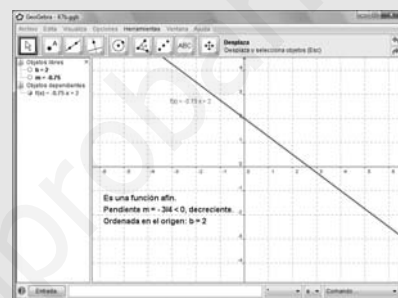
- 67** Dadas las funciones siguientes:
 a) $y = 2x/3 - 1$ b) $y = -3x/4 + 2$
 clasifícalas, halla su pendiente y estudia el crecimiento; calcula la ordenada en el origen. Representálas.

Solución:

a)

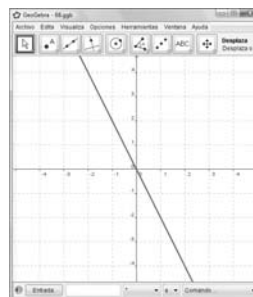


b)



Identifica las siguientes gráficas y halla mediante *ensayo-acierto* su fórmula:

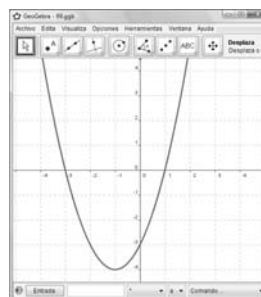
68



Solución:

- a) Función lineal.
 b) $y = -2x$

69

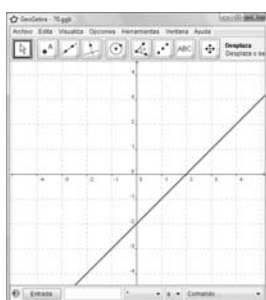




Solución:

- a) Función cuadrática.
- b) $y = x^2 - 2x - 3$

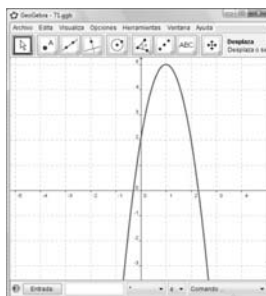
70



Solución:

- a) Función afín.
- b) $y = x - 2$

71



Solución:

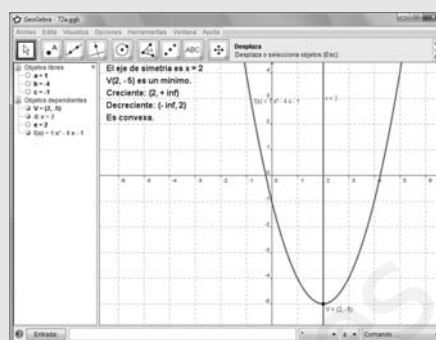
- a) Función cuadrática.
- b) $y = -3x^2 + 6x + 2$

72 Halla el eje de simetría, las coordenadas del vértice indicando si es un máximo o un mínimo y representa las siguientes funciones cuadráticas:

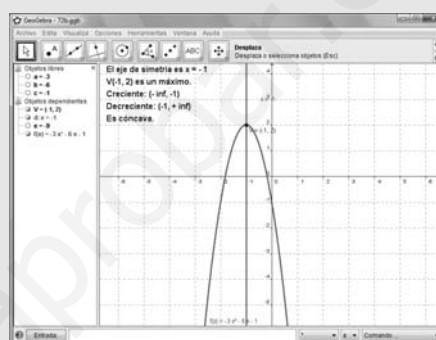
- a) $y = x^2 - 4x - 1$
- b) $y = -3x^2 - 6x + 2$
- c) $y = x^2 + 4x + 3$
- d) $y = -2x^2 + 8x - 5$

Solución:

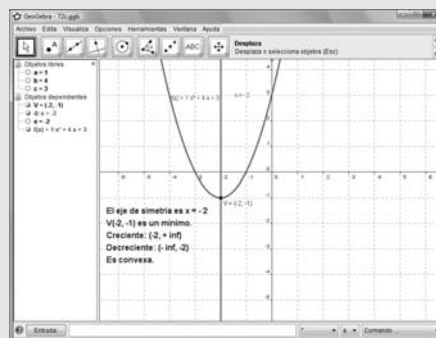
a)



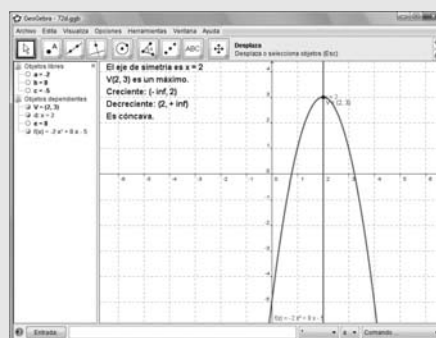
b)



c)



d)



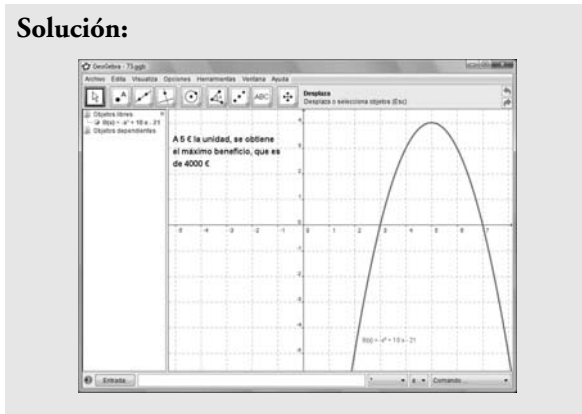
Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Geogebra o Derive:

- 73** El beneficio, en miles de euros, que se obtiene al vender a $x \in$ una unidad de un determinado producto viene dado por la fórmula

$$B(x) = -x^2 + 10x - 21$$

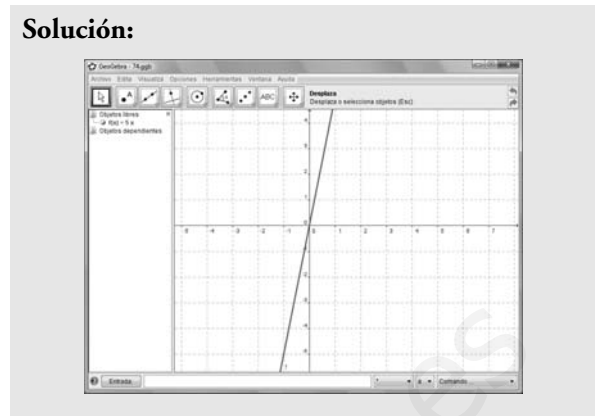
- Representa la función $B(x)$
- Determina el precio al que hay que vender el producto para obtener el máximo beneficio.

Solución:



- 74** Se depositan 500 € a un 1% de interés simple anual. Expresa el interés en función del tiempo y representa la gráfica.

Solución:



- 75** Escribe la función que da el volumen de un cilindro de 1m de altura en función del radio de la base. Representala.

Solución:

