

FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. Utilizando identidades notables, desarrollar las siguientes expresiones:

a) $(x+2)^2$	e) $(3x-5)^2$	i) $(3x-2)^2$	m) $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
b) $(x-2)^2$	f) $(3x+2)(3x-2)$	j) $(2x+5)(2x-5)$	n) $(x+\sqrt{2})^2$
c) $(x+2)(x-2)$	g) $(ax+1)^2$	k) $(-1+2x)^2$	o) $(x^2+x+2)^2$
d) $(2x+3)^2$	h) $(ax-b)^2$	l) $(-2-x)^2$	

2. **a)** Razonar por qué $(A-B)^2$ y $(B-A)^2$ dan el mismo resultado. **b)** Ídem con $(A+B)^2$ y $(-A-B)^2$

3. Averiguar de qué expresiones notables proceden los siguientes polinomios (Fíjate en el 1^{er} ejemplo):

a) $x^2+2x+1=(x+1)^2$	g) $9-x^2$	m) $x^2+10x+25$	s) x^2-6x+9
b) x^2-4x+4	h) $x^2+2ax+a^2$	n) x^2-2	t) x^2-25
c) x^2-1	i) $3x^2+6x+3$	o) $4x^2-9$	u) $25x^2-16$
d) x^2+6x+9	j) x^2-a^2	p) $a^2x^2-2ax+1$	
e) $x^2-8x+16$	k) $a^2x^2-b^2$	q) x^4-16	
f) x^2-4	l) x^2-16	r) $4x^2+4x+1$	

4. Utilizar **identidades notables** para simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x-1}{x+1}\right)$	f) $\frac{x^2-y^2}{x^2+xy}$	$\left(\text{Soluc: } 1-\frac{y}{x}\right)$
b) $\frac{x^2-16}{x^2-4x}$	$\left(\text{Soluc: } 1+\frac{4}{x}\right)$	g) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x+2}{x-2}\right)$
c) $\frac{2x+4}{2x-4}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x+2}{x-2}\right)$	h) $\frac{x^2+2x+1}{x^4-1}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x+1}{x^3-x^2+x-1}\right)$
d) $\frac{2x^2-2}{3x^2+6x+3}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{2x-2}{3x+3}\right)$	i) $\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2-a^2}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x-a}{x+a}\right)$
e) $\frac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x+a}{m}\right)$	j) $\frac{a^2x^2-1}{a^2x^2+2ax+1}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{ax-1}{ax+1}\right)$

5. Utilizar el **teorema del factor** para simplificar, siempre que sea posible, las siguientes fracciones algebraicas:

$$\text{a) } \frac{x-2}{x^2+x-6} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{1}{x+3} \right)$$

$$\text{h) } \frac{x-3}{x^2+5x+6} \quad (\text{Soluc: irreducible})$$

$$\text{b) } \frac{x-1}{2x^2-3x+1} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{1}{2x-1} \right)$$

$$\text{i) } \frac{x-1}{5x^2+4x-9} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{1}{5x+9} \right)$$

$$\text{c) } \frac{x^2+x-6}{x^2-4} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x+3}{x+2} \right)$$

$$\text{j) } \frac{x^3-1}{x^2-1} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x^2+x+1}{x+1} \right)$$

$$\text{d) } \frac{x^2-1}{5x^2+4x-9} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x+1}{5x+9} \right)$$

$$\text{k) } \frac{2x^2-x-6}{x^2-4} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{2x+3}{x+2} \right)$$

$$\text{e) } \frac{x+2}{x^2-1} \quad (\text{Soluc: irreducible})$$

$$\text{l) } \frac{x^2-a^2-a}{x^2-a^2} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x+a+1}{x+a} \right)$$

$$\text{f) } \frac{x^2+x-2}{x+2} \quad (\text{Soluc: } x-1)$$

$$\text{g) } \frac{2x-2}{x^2+x-2} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{2}{x+2} \right)$$

6. Averiguar, **factorizando** previamente numerador y denominador, si es posible simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

$$\text{a) } \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x-1}{x+1} \right)$$

$$\text{k) } \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3+4x^2+x-6} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x-3}{x+3} \right)$$

$$\text{b) } \frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x-1}{x+1} \right)$$

$$\text{l) } \frac{4x^3+7x^2+2x-1}{x^3+3x^2+3x+1} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{4x-1}{x+1} \right)$$

$$\text{c) } \frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} \quad (\text{Soluc: irreducible})$$

$$\text{m) } \frac{2x^3-x^2-8x+4}{x^3+8} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{2x^2-5x+2}{x^2-2x+4} \right)$$

$$\text{d) } \frac{2x^2-3x+1}{2x^2-x-1} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{2x-1}{2x+1} \right)$$

$$\text{n) } \frac{4x^3-2x^2-4x+2}{2x^3-5x^2+4x-1} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{2x+2}{x-1} \right)$$

$$\text{e) } \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-2x^2-x+2} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x-3}{x+1} \right)$$

$$\text{o) } \frac{2x^3-x^2-2x+1}{2x^3-5x^2+4x-1} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$\text{f) } \frac{x^2+x+2}{x^2-x+1} \quad (\text{Soluc: irreducible})$$

$$\text{p) } \frac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-3x^2+4x-12} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x^2-1}{x^2+4} \right)$$

$$\text{g) } \frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3-4x^2+x+6} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6} \right)$$

$$\text{q) } \frac{x^2+x+1}{x^3-1} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\text{h) } \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1} \quad (\text{Soluc: } x-1)$$

$$\text{r) } \frac{4x^3-8x^2-x+2}{2x^3-x^2-8x+4} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{2x+1}{x+2} \right)$$

$$\text{i) } \frac{4x^2-1}{4x^2+4x+1} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{2x-1}{2x+1} \right)$$

$$\text{s) } \frac{x^2-4}{x^3-7x-6} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x-2}{x^2-2x-3} \right)$$

$$\text{j) } \frac{x^3-x^2-10x-8}{x^2+3x-4} \quad (\text{Soluc: irreducible})$$

7. Efectuar las siguientes sumas y restas reduciendo previamente a común denominador y dando el resultado simplificado (NOTA: Con un * se indican aquellos casos en los que, al final del proceso de sumas y restas de F.A., se obtiene una expresión que se puede simplificar):

$$\text{a) } \frac{3}{2x+4} + \frac{2x}{x^2-4} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{7x-6}{2x^2-8} \right)$$

$$\text{b) } \frac{x^2-1}{x^3} - \frac{2x}{x^2+7} \quad \left(\text{Soluc: } \frac{-x^4+6x^2-7}{x^5+7x^3} \right)$$

c) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-x-2}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x^2-x-1}{x^3-2x^2-x+2} \right)$	r) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{2ab}{a^2-b^2}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \right)$
d) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{2x^2+8}{x^2-4} \right)$	* s) $\frac{1}{x-2} - \frac{x^2+4x+8}{(x+2)^2(x-2)} + \frac{1}{x^2-4}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{1}{x^2+4x+4} \right)$
e) $\frac{2x}{x^2-4} + \frac{x+1}{4x-8}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x^2+11x+2}{4x^2-16} \right)$	* t) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{6x-x^2}{x^2-4}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{1}{x-2} \right)$
f) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{4x}{x^2-1} \right)$	* u) $\frac{1}{x-1} - \frac{3x+3}{x^2+x-2} + \frac{1}{x+2}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{1}{1-x} \right)$
* g) $\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{2}{x+1} \right)$	v) $\frac{x-1}{x^2-4} - \frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{1}{x-2}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x^2+5x-4}{x^3-4x} \right)$
h) $1 - \frac{x}{y}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{y-x}{y} \right)$	* w) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} - \frac{12}{x^2-4}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{2x+3}{x+2} \right)$
i) $x - \frac{x^2-1}{x}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{1}{x} \right)$	x) $\frac{x-2}{x^2+x-2} - \frac{x+1}{x^2-4} + \frac{x+3}{x^2-3x+2}$	$\left(\text{Sol: } \frac{x^2+x+11}{x^3-x^2-4x+4} \right)$
j) $\frac{3x-2}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x^2+6x}{x^2-1} \right)$	y) $\frac{x^2-x+9}{x^3-9x} + \frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{1}{x+3} \right)$
k) $\frac{7x}{6x+12} - \frac{x+5}{2x^2-8}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{7x^2-17x-15}{6x^2-24} \right)$	z) $\frac{2x}{x-1} + \frac{3x+1}{x-1} - \frac{1-x}{x^2-1}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{5x^2+7x}{x^2-1} \right)$
l) $\frac{x+3}{x^2+1} + \frac{2x}{x-3}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{2x^3+x^2+2x-9}{x^3-3x^2+x-3} \right)$	α) $\frac{4}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{x+1}{x-1}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x^4+7x^3-2x^2+5x-3}{x^4-1} \right)$
m) $\frac{3x}{x^2-1} - \frac{x+2}{x+1}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{-x^2+2x+2}{x^2-1} \right)$	β) $\frac{3}{2x-4} + \frac{1}{x+2} - \frac{x+10}{2x^2-8}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{2}{x+2} \right)$
n) $\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x^2-1}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x^2+x+2}{x^2-1} \right)$	* γ) $\frac{x-x^2}{1-x^2} + \frac{1+x}{x^2+2x+1} - \frac{1-2x}{1+x}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{3x}{x+1} \right)$
o) $\frac{x+2y}{x^2-y^2} + \frac{2x-5y}{x-y}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{2x^2-5y^2-3xy+x+2y}{x^2-y^2} \right)$	δ) $\frac{1}{x(x-1)} + \frac{2x+1}{x^2-1} + \frac{x}{(x+1)^2}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{3x^3+3x^2+3x+1}{x^4+x^3-x^2-x} \right)$
p) $\frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x-z}{xz} \right)$	ε) $\frac{1}{x^2-9x+20} - \frac{1}{x^2-11x+30} + \frac{1}{x^2-10x+24}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x-7}{x^3-15x^2+24x-120} \right)$
q) $x + \frac{1}{x}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x^2+1}{x} \right)$		

8. Efectuar los siguientes productos y cocientes, dando el resultado simplificado:

a) $\frac{3x-1}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{2x}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{3x-1}{2x^2-6x} \right)$	f) $\frac{x+1}{\frac{x^2-2}{x-1}} =$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x^3+x^2+2x+2}{x^3-x^2-2x+2} \right)$
b) $\frac{x+1}{x^2-2} \cdot \frac{x^2+2}{x-1}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x^2-1}{x^4-4} \right)$	g) $\frac{\frac{x-1}{x^2-1}}{\frac{x+1}{x^2+2x+1}} =$	$(\text{Soluc: } 1)$
c) $\frac{x+1}{\frac{x+2}{x+1}} =$	$\left(\text{Soluc: } \frac{x+3}{x+2} \right)$	h) $\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{\frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{x+a}{x+a}} =$	$(\text{Soluc: } x^2-2ax+a^2)$
d) $\frac{\frac{3x+1}{x^2-4}}{x} =$	$\left(\text{Soluc: } \frac{3x^2-5x-2}{x^2+2x} \right)$	i) $\frac{9 \cdot \frac{x+2y}{3} + 6z}{3} =$	$(\text{Soluc: } x+2y+2z)$
e) $\frac{3x-1}{x^2} \cdot \frac{x+1}{x^5}$	$\left(\text{Soluc: } \frac{3x^2+2x-1}{x^7} \right)$	j) $\frac{\frac{x}{3}}{x - \frac{x}{3}} =$	$(\text{Soluc: } 1/2)$

$$\begin{array}{l}
 \text{k) } \frac{A}{B}(1-B) + A = \quad \quad \quad (\text{Soluc: } A/B) \\
 \text{l) } \frac{\frac{x^3 - x}{2x^2 + 6x}}{\frac{5x^2 - 5x}{2x + 6}} = \quad \quad \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x+1}{5x} \right)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \frac{2}{a} - 1 \\
 \frac{2}{a} \\
 \text{m) } \frac{2}{a} = \\
 -\frac{1}{2}
 \end{array} \right.
 \quad \quad \quad (\text{Soluc: } a - 2)$$

9. Efectuar las siguientes operaciones combinadas con F.A. y simplificar:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \left(1 - \frac{1}{x} \right) \cdot \left(\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x+1} \right) = \quad \quad \quad \left(\text{Soluc: } \frac{1}{x} \right) \\
 \text{b) } \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} + \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-1}{x+1} = \quad \quad \quad \left(\text{Soluc: } \frac{2x^3 - 2x^2 - 2x}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \right) \\
 \text{c) } \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a+b}{a-b} \right) \frac{a+b}{ab} = \quad \quad \quad \left(\text{Soluc: } -\frac{2}{a-b} \right) \\
 \text{d) } \frac{xy}{x^2 - y^2} : \frac{x-y}{y} + \frac{y}{x-y} = \quad \quad \quad \left(\text{Soluc: } \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \right)
 \end{array}$$

10. Demostrar que: a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$

b) $\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} = a \cdot b$