Operaciones en el conjunto de los números racionales Q

Operación	Ejemplo
Suma $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{bd}$	**a)** $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5+3\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{22}{15}$ **b)** $\frac{7}{24}+\frac{11}{36}=\frac{7\cdot 3+11\cdot 2}{72}=\frac{43}{72}$ **¡OJO!** *Observa como en este ejemplo el denominador común no es el producto de los denominadores sino el **M.C.M.** de 24 y 36. De esta manera las operaciones serán mucho más sencillas.*
Resta (diferencia) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{bd}$	$\frac{8}{3}-\frac{6}{4}=\frac{8\cdot 4-6\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$ **¡OJO!** *El resultado siempre hay que simplificarlo. Para ello se divide el numerador y el denominador entre el **M.C.D.** de ambos. En este caso hemos dividido entre 2 ya que **M.C.D.(14, 12) = 2**.*
Producto (multiplicación) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8}=\frac{60}{40}=\frac{3}{2}$
Cociente (división) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$, o bien $\frac{a/b}{c/d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ **Observación:** *la fracción d/c se llama **inversa** de c/d (al multiplicarlas el resultado es 1). Pues bien, **para dividir dos fracciones, se multiplica la primera por la inversa de la segunda.***	$\frac{15}{7}:\frac{5}{2}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$, o lo que es lo mismo, $\frac{15/7}{5/2}=\frac{\text{extremos}}{\text{medios}}=\frac{15\cdot 2}{7\cdot 5}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$
Potencia (de exponente entero positivo o cero) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\overset{(n\text{ veces})}{\cdots\cdots}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^n}{b^n}$; $\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)^0=1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$
Potencia (de exponente entero negativo) $a^{-1}=\frac{1}{a}$; $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{}{a}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{b^n}{a^n}$ **Observación:** *para hacer una potencia de exponente negativo **se cambia la base por su fracción inversa** (en este caso a/b por b/a) **y el exponente negativo se cambia a positivo**. Así pues el resultado es la potencia de base la fracción inversa elevada al exponente pero positivo.*	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$ **¡OBSERVA!:** *El resultado obtenido (81/16) es la fracción inversa del resultado obtenido anteriormente (16/81), que era la misma potencia pero de exponente positivo.*

Es **importante** recordar que la **jerarquía entre las operaciones** es la siguiente:

- **Primero:** corchetes y paréntesis.
- **Segundo:** productos y divisiones.
- **Tercero:** sumas y restas.

Así no cometeremos errores a la hora de efectuar operaciones más extensas. Por ejemplo:

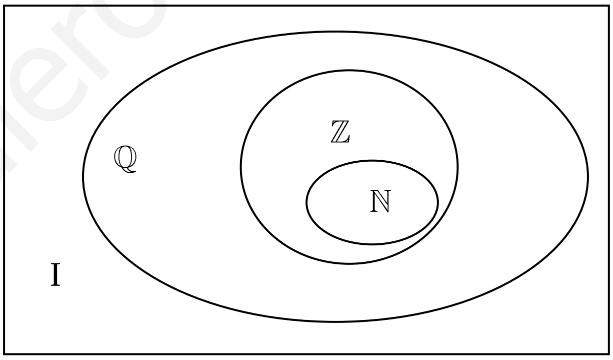
$$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\left(\frac{-3}{2}+\frac{5}{3}\right)}{\frac{4}{3}-\frac{5}{2}}=\frac{\left[\left(\frac{10+12}{15}\right):\left(\frac{3-4}{6}\right)\right]\cdot\left(\frac{-9+10}{6}\right)}{\frac{8-15}{6}}=\frac{\left(\frac{22}{15}:\frac{-1}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}}{\frac{-7}{6}}=\frac{\frac{132}{-15}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{-7}{6}}=\frac{\frac{132}{-90}}{\frac{-7}{6}}=\frac{792}{630}=\frac{44}{35}$$

El conjunto de los números reales

Conjuntos numéricos	
El conjunto de los **números naturales**: $\mathbb{N}$	$\mathbb{N}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ......\}$
El conjunto de los **números enteros**: $\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}=\{.....\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ .....\}$
El conjunto de los **números racionales**: $\mathbb{Q}$ (fracciones)	$\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\ :\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}\ \text{con}\ q\neq 0\right\}$
Propiedad: todo número racional es entero, decimal exacto o decimal periódico (puro o mixto) ***Importante:*** *debes recordar de cursos anteriores cómo se expresa un decimal exacto, periódico puro o periódico mixto en forma de fracción. Por ejemplo:* $1,65=\dfrac{165-1}{99}=\dfrac{164}{99}$; $5,639=\dfrac{5639-56}{990}=\dfrac{5583}{990}=\dfrac{1861}{330}$	$\dfrac{10}{-5}=-2$ (entero); $\dfrac{13}{8}=1,625$ (decimal exacto); $\dfrac{-14}{9}=1,555...=1,\overset{\frown}{5}$ (decimal periódico puro); $\dfrac{19}{12}=1,58333...=1,58\overset{\frown}{3}$ (decimal periódico mixto)
El conjunto de los **números irracionales:** I. Está formado por todos aquellos números reales que no son racionales. Tienen infinitas cifras decimales pero no forman período.	$1,234567910111213141516171819202\,1......$ $\sqrt{2}=1,4142136......$ $\pi=3,14155927......$

Representación de los números reales:

$\mathbb{R}$



Intervalos y semirrectas		
Intervalo abierto: $(a,\ b)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ a<x<b\}$		Números que están comprendidos entre a y b
Intervalo cerrado: $[a,\ b]=\{x\in\mathbb{R}\ :\ a\leq x\leq b\}$		Números comprendidos entre a y b, incluidos éstos
Intervalos semiabiertos	$(a,\ b]=\{x\in\mathbb{R}\ :\ a<x\leq b\}$	Números mayores que a y menores o iguales que b
	$(a,\ b]=\{x\in\mathbb{R}\ :\ a<x\leq b\}$	Números mayores o iguales que a y menores que b
Semirrectas	$(-\infty,\ a)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ x<a\}$	Números menores que a
	$(-\infty,\ a]=\{x\in\mathbb{R}\ :\ x\leq a\}$	Números menores que a, incluido el propio a
	$(a,\ +\infty)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ x>a\}$	Números mayores que a
	$[a,\ +\infty)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ x\geq a\}$	Números mayores que a, incluido el propio a

Propiedades de las potencias. Igualdades notables

Propiedades de las potencias	
Producto de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\left(2x^3y^2\right)\left(-3x^2z^3\right)\left(-4yz^2\right) = 24x^3x^2y^2yz^3z^2 =$ $= 24x^5y^3z^5$
Cociente de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{12a^3x^5}{28ax^3} = \dfrac{12}{28}\cdot\dfrac{a^3}{a}\cdot\dfrac{x^5}{x^3} = \dfrac{3}{7}a^2x^2$
Potencia de un producto es igual al producto de las potencias: $(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(-2xyzp)^3 = (-2)^3x^3y^3z^3p^3 = -8x^3y^3z^3p^3$
Potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{-3ab}{2xy}\right)^3 = \dfrac{(-3ab)^3}{(2xy)^3} = \dfrac{-3^3a^3b^3}{2^3x^3y^3} = \dfrac{-27a^3b^3}{8x^3y^3}$
Potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes: $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$	$\left(-\dfrac{2}{3}x^2z^4\right)^3 = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(x^2\right)^3\left(z^4\right)^3 = -\dfrac{8}{27}x^6z^{12}$
Igualdades notables	
Cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **¡OJO!** *No confundir la igualdad anterior con esta otra, que es errónea:* $(a+b)^2 = a^2 + b^2$	a) $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$ b) $\left(\dfrac{5}{x}+2x\right)^2 = \left(\dfrac{5}{x}\right) + 2\cdot\dfrac{5}{x}\cdot 2x + (2x)^2 =$ $= \dfrac{25}{x} + 20 + 4x^2$
Cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero menos dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **¡OJO!** *No confundir la igualdad anterior con esta otra, que es errónea:* $(a-b)^2 = a^2 - b^2$	a) $(5b-3)^2 = (5b)^2 - 2\cdot 5b\cdot 3 + 3^2 = 25b^2 - 30b + 9$ b) $\left(6x-\dfrac{x^2}{2}\right)^2 = (6x)^2 - 2\cdot 6x\cdot\dfrac{x^2}{2} + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2 =$ $= 36x^2 - 6x^3 + \dfrac{x^4}{4}$
Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(4x+2y)(4x-2y) = (4x)^2 - (2y)^2 = 16x^2 - 4y^2$

¡Recuerda!

Cuando el signo de la base de una potencia es negativo, entonces:

- ✓ Si el exponente es **par** el resultado es positivo.
- ✓ Si el exponente es **impar** el resultado es negativo.

Radicales

$\sqrt[n]{a}=b \iff a=b^n$ $\sqrt[n]{a}$ es el **radical**, a el **radicando** y n el **índice** de la raíz.	Si $a\geq 0$, existe cualquiera que sea a. Si $a<0$, $\sqrt[n]{a}$ solo existe para valores impares de n.
Forma exponencial: $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, ya que $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3=2^{\frac{3}{3}}=2$
Propiedades de los radicales	
Radicales equivalentes: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$	$\sqrt[8]{81}=\sqrt[8]{3^4}=\sqrt[2\cdot4]{3^4}=\sqrt{3}$ Reducir a índice común $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$: $\sqrt{2}=\sqrt[2\cdot3]{2^3}=\sqrt[6]{8}$; $\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\cdot2]{2^2}=\sqrt[6]{4}$
Potencia de un radical: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$	$\left(\sqrt[6]{2}\right)^4=\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2}$
Raíz de una raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{9}}}=\sqrt[24]{9}=\sqrt[24]{3^2}=\sqrt[12]{3}$
Raíz de un producto: $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\,b}$	$\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3\cdot2}=\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$ (en este ejemplo la propiedad se ha utilizado dos veces)
Raíz de un cociente: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt{9}}{\sqrt[6]{6}}=\frac{\sqrt[6]{(12)^2}\cdot\sqrt[6]{9}}{\sqrt[6]{6}}=\sqrt[6]{\frac{(2^2 3)^2\ \ (3^2)^3}{2\cdot3}}=$ $=\sqrt[6]{\frac{2^2\cdot3^2\cdot3^6}{2\cdot3}}=\sqrt[6]{2\cdot3^7}=\sqrt[6]{4374}$ (observa cómo se han utilizado en este ejemplo varias de las propiedades anteriores para simplificar)
Suma de radicales: dos expresiones con radicales se dicen *semejantes* si la raíz que aparece en ambas tiene el mismo índice y el mismo radicando (por ejemplo $5\sqrt{2}$ y $-3\sqrt{2}$ son radicales semejantes). Solamente se pueden sumar (o restar) expresiones con radicales que sean semejantes.	$\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}=\sqrt{2^2\cdot3}+\sqrt{3^3}-\sqrt{5^2\cdot3}=$ $=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5\sqrt{3}=(2+3-5)\sqrt{3}=0\sqrt{3}=0$
Racionalización de denominadores	
Con una raíz cuadrada en el denominador: se multiplica arriba y abajo por la misma raíz.	$\frac{3}{5\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{5\cdot3}=\frac{\sqrt{3}}{5}$
Con una raíz de índice n en el denominador: se multiplica arriba y abajo por otra raíz de índice n de tal manera que se complete el radicando con una potencia de exponente n.	$\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{2\sqrt{4}}{2}=\sqrt[3]{4}$
Con una suma o diferencia de raíces cuadradas en el denominador: se multiplica arriba y abajo por la expresión conjugada del denominador.	$\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}=\frac{3(\sqrt{6}\quad\sqrt{3})}{6-3}=\sqrt{6}+\sqrt{3}$

Notación científica

Definición	
Un número está expresado en **notación científica** si se escribe como el producto de un número mayor o igual que 1 y menor estrictamente que 10, y una potencia de 10. Si un número está expresado en notación científica al exponente entero al que está elevado la potencia de 10 se le llama **orden de magnitud**.	$0,00000034=\frac{34}{100\,000\,000}=34\cdot 10^{-8}=3,4\cdot 10^{-7}$ $26\,531\,000\,000=2,6531\cdot 10^{10}$ $947855,36=9,4785536\cdot 10^{5}$
Suma y resta en notación científica	
Para sumar y restar números expresados en notación científica **es necesario que todos estén expresados con el mismo orden de magnitud**. Es habitual escribirlos en el mayor de los órdenes de magnitud que aparezca en dichas sumas o restas.	$5,3\cdot 10^{12}-3\cdot 10^{11}=5,3\cdot 10^{12}-0,3\cdot 10^{12}=$ $=(5,3-0,3)\cdot 10^{12}=5\cdot 10^{12}$ $3\cdot 10^{-5}+8,2\cdot 10^{-6}=3\cdot 10^{-5}+0,82\cdot 10^{-5}=$ $=(3+0,82)\cdot 10^{-5}=3,82\cdot 10^{-5}$
Producto y división en notación científica	
Para multiplicar y dividir números expresados en notación científica se opera con las potencias de 10 por un lado (aplicando las propiedades de las potencias), y el resto de la expresión por el otro.	$(3,5\cdot 10^{7})\cdot(4\cdot 10^{8})=(3,5\cdot 4)\cdot(10^{7}\cdot 10^{8})=$ $=14\cdot 10^{15}=1,4\cdot 10^{16}$ $(1,2\cdot 10^{7}):(5\cdot 10^{-6})=(1,2:5)\cdot(10^{7}:10^{-6})=$ $=0,24\cdot 10^{13}=2,4\cdot 10^{12}$
Cifras significativas	
Recibe el nombre de **cifra significativa** todo dígito (exceptuando el cero cuando se utiliza para situar el punto decimal) cuyo valor se conoce con seguridad. El número $2,503$ tiene cuatro cifras significativas. El número $0,00103$ tiene tres cifras significativas; los tres primeros ceros no son cifras significativas ya que simplemente sitúan el punto decimal. En notación científica este último número se escribe $1,03\cdot 10^{-3}$.	Por ejemplo, expresemos el resultado de la operación $\frac{(7,2\cdot 10^{-6})^3}{5,3\cdot 10^{-9}}$ en notación científica con tres cifras significativas: $\frac{(7,2\cdot 10^{-6})^3}{5,3\cdot 10^{-9}}=\frac{(7,2)^3\cdot(10^{-6})^3}{5,3\cdot 10^{-9}}=\frac{373,248\cdot 10^{-18}}{5,3\cdot 10^{-9}}=$ $=\frac{373,248}{5,3}\cdot\frac{10^{-18}}{10^{-9}}=70,4\cdot 10^{-9}=7,04\cdot 10^{-8}$

Aproximaciones y errores

Orden de aproximación	
Se dice que de un número real tomamos una aproximación de orden n cuando se trata de un número racional con n cifras decimales.	$\frac{3\sqrt{5}}{4}=1,7$ (Aproximación de orden 1). $\frac{3\sqrt{5}}{4}=1,677$ (Aproximación de orden 3).
Métodos de aproximación	
Por defecto o truncamiento: se eliminan las cifras decimales a partir del orden considerado. **Por exceso**: se eliminan las cifras decimales hasta el orden considerado y se añade una cifra **Redondeo**: se eliminan todas las cifras decimales a partir del orden indicado y, si la cifra siguiente al orden considerado es mayor o igual que 5, se añade una unidad a la última cifra	Aproximar $5,245848$ hasta el orden 3 (milésimas). O lo que es lo mismo, aproximar $5,245848$ con cuatro cifras significativas. Truncamiento: $5,245$ Por exceso: $5,246$ Redondeo: $5,246$
Error absoluto. Cota del error absoluto	
Error absoluto (E_a) de una medida aproximada es el valor absoluto de la diferencia entre el valor real (V_r) y el valor aproximado $\left(V_a\right)$: $$E_a=\lvert V_r-V_a\rvert$$ El valor real o exacto es, en la mayoría de los casos, desconocido. Por tanto, también se desconoce el error absoluto. Lo importante es poder acotarlo, diciendo que **el error absoluto es menor que…** Una **cota del error absoluto** se obtiene a partir de la última cifra significativa utilizada.	El error absoluto que se comete al redondear $5,245848$ a las milésimas es: $$E_a=\lvert V_r-V_a\rvert=\lvert 5,245848-5,246\rvert=0,000152$$ Si una piscina tiene una capacidad de $719\ \mathrm{m}^3$, la última cifra significativa (el 9) designa unidades de m^3. El error absoluto es menor que medio metro cúbico: $E_a<0,5\ \mathrm{m}^3$
Error relativo. Cota del error relativo	
Error relativo (E_r) es el cociente entre el error absoluto y el valor real: $$E_r=\left\lvert\frac{E_a}{V_r}\right\rvert$$ El error relativo es tanto menor cuantas más cifras significativas se usan.	Veamos un par de ejemplos basados en los dos ejemplos anteriores. El error relativo que se comente al redondear $5,245848$ a las milésimas es: $$E_r=\left\lvert\frac{E_a}{V_r}\right\rvert=\left\lvert\frac{0,000152}{5,245848}\right\rvert=0,000028975$$ Al tomar como capacidad de la piscina $719\ \mathrm{m}^3$, el error relativo que se comete es menor que: $$E_r<\frac{0,5}{719}=0,0007$$