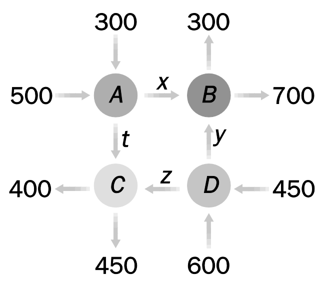
5 Sistemas de ecuaciones

ACTIVIDADES INICIALES

El flujo de vehículos en cada calle se indica en el esquema de la derecha.

El número de coches que entran en cada cruce debe ser igual al de los que salen. Llamamos *x*, *y*, *z* y *t* a la cantidad de coches que circulan por cada uno de los tramos indicados. Los cruces están indicados con las letras *A*, *B*, *C* y *D*.



5.I. **El número de coches que entra al cruce *A* debe ser igual al número de coches que salen. ¿Qué ecuación representaría esta situación?**

Sería $x + t = 300 + 500$, es decir, $x + t = 800$.

5.II. **Escribe las ecuaciones de cada cruce.**

$$\begin{cases} (A) & x + t = 800 \\ (B) & x + y = 1000 \\ (C) & z + t = 850 \\ (D) & z + y = 1050 \end{cases}$$

5.III. **El sistema tiene infinitas soluciones. Supongamos que se corta el tráfico entre *A* y *C* (es decir, *t* = 0). ¿Podrías encontrar una solución?**

Si $t = 0$, $x = 800$, $y = 200$, $z = 850$

5.IV. **Para *t* = 1000 la solución del sistema es extraña, a primera vista no es válida. ¿Cómo se puede interpretar.**

Para $t = 1000$, saldría $x = -200$, $y = 1200$, $z = -150$, y las cantidades negativas indicarían que habría que cambiar el sentido de circulación en esos tramos.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

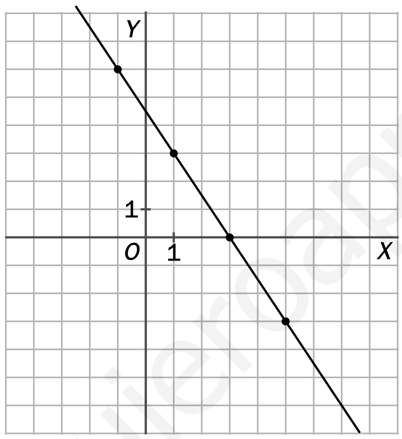
5.1. **Actividad resuelta.**

5.2. **Dada la ecuación 3*x* + 2*y* = 9 completa la siguiente tabla de forma que los pares (*x*, *y*) sean soluciones de la ecuación.**

x		**1**		**2**		**3**		**–1**
y	**1**		**2**		**–3**		**6**	

Representa los puntos obtenidos en unos ejes de coordenadas. ¿Qué observas?

x	7	**1**	5	**2**	5	**3**	–1	**–1**
y	**1**	3	**2**	3	**–3**	0	**6**	6



Todos los puntos están sobre una recta.

5.3. **Plantea una ecuación y encuentra tres posibles soluciones del siguiente problema: la familia Telerín fue el domingo al circo y sacaron dos entradas de adulto y cuatro de niño. Si en total pagaron 110 euros, ¿cuánto pudo costar cada entrada?**

$2x + 4y = 110$.

Si $x = 50$, $y = 2{,}5$; si $x = 25$, $y = 15$ y si $x = 5$; $y = 25$.

Pueden costar las de adulto 50 € y las infantiles 2,5 €, o bien, las de adulto 25 € y las infantiles 15 €, o bien, las de adulto 5 € y las infantiles 25 € (aunque esto parece menos razonable).

5.4. (TIC) Representa las rectas de soluciones y clasifica los sistemas según su número de soluciones.

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 6y = 8 \end{cases}$

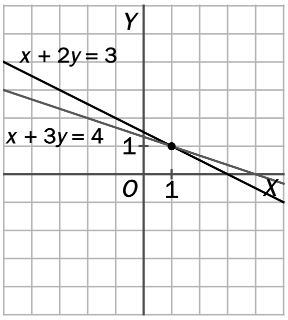
b) $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$

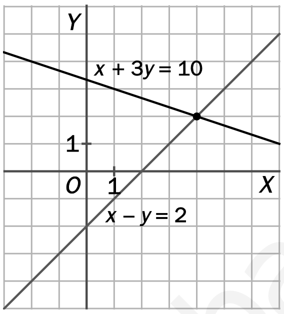
a) Compatible determinado

Solución: $x = 1$ e $y = 1$

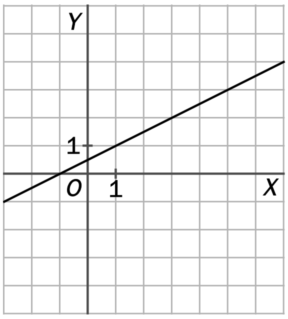


b) Compatible determinado

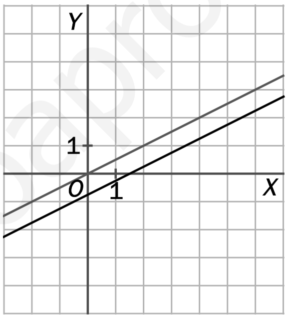
Solución $x = 4$ e $y = 2$.



c) Compatible indeterminado



d) Incompatible



5.5. ¿Puede haber dos números que sumen 5 y cuyos dobles sumen 12? Plantea un sistema y estudia sus soluciones.

Plantemos el sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$ que es incompatible. Si dos números suman 5, sus dobles sumarán 10.

5.6. Cada ecuación de un sistema se corresponde con una condición que cumplen las incógnitas. Inventa un sistema sin solución imponiendo dos condiciones que sean incompatibles entre sí.

Por ejemplo, dos números cuya suma sea 10 y cuya suma sea15: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x + y = 15 \end{cases}$ o dos números cuya diferencia sea 2 y el triple de su diferencia sea 5: $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3(x - y) = 5 \end{cases}$.

5.7. Las soluciones de los siguientes sistemas son $x = -1$, $y = 3$ o $x = 1$, $y = 2$. Comprueba cuál es la solución de cada uno de ellos y decide cuáles son equivalentes:

a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2(y - 1) = 2 - x \\ \dfrac{x + 2y}{5} = y + 2x \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ x = 7 - 3y \end{cases}$

Para calcular las soluciones sustituimos las posibilidades en el sistema y han de cumplirse las dos ecuaciones.

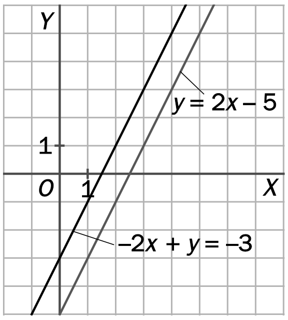
a) $x = 1$, $y = 2$ c) $x = -1$, $y = 3$

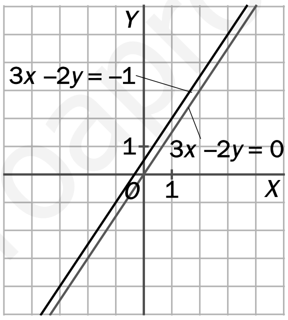
b) $x = -1$, $y = 3$ d) $x = 1$, $y = 2$

Los sistemas a) y d) son equivalentes y también lo son los sistemas b) y c) porque tienen la misma solución.

5.8. (TIC) Representa gráficamente los siguientes sistemas y decide si son equivalentes:

a) $\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 4y - 6x = 2 \end{cases}$





Como ninguno de ellos tiene soluciones, los sistemas son equivalentes.

5.9. Transforma los siguientes sistemas en otros equivalentes eliminando una de las incógnitas de una de las ecuaciones y resuélvelos.

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$ Sumamos la primera ecuación a la segunda, miembro a miembro: $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x \quad = 12 \end{cases}$. Obtenemos $x = 6$ y, sustituyendo en la segunda ecuación, $6 + y = 9$, obtenemos $y = 3$. La solución del sistema es $x = 6$, $y = 3$.

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ Multiplicamos la segunda ecuación por – 2: $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$. Sumamos la primera ecuación a la segunda, miembro a miembro: $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ \quad 7y = 7 \end{cases}$. Luego, $y = 1$ y, sustituyendo en la primera ecuación, $2x + 3 \cdot 1 = 7$; $x = 2$. La solución del sistema es $x = 2$, $y = 1$.

5.10. (TIC) Resuelve los siguientes sistemas por reducción.

a) $\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3(x - y) = x - 5 \\ x - 2y = 7 - y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ -4x + 2y = 20 \end{cases}$

a) Sumamos: $\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - y = -2 \\ 3x + y = 12 \end{cases} \\ \hline 5x = \quad 10 \end{array}$. Luego, $x = 2$.

Sustituyendo en la primera ecuación: $2 \cdot 2 - y = -2$, $y = 6$.

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 6$.

b) Quitamos paréntesis y ordenamos las ecuaciones: $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ x - y = 7 \end{cases}$.

Multiplicamos la segunda ecuación por –2 y sumamos $\begin{array}{r} \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ -2x + 2y = -14 \end{cases} \\ \hline -y = -19 \end{array}$.

Luego, $y = 19$. Sustituyendo en la segunda ecuación: $x - 2 \cdot 19 = 7 - 19$; $x = 26$.

La solución del sistema es $x = 26$, $y = 19$.

c) Multiplicamos la primera por 2 y la segunda por 3 y sumamos: $\begin{array}{l} \begin{cases} 8x - 6y = 18 \\ 9x + 6y = 15 \end{cases} \\ \hline 17x = \quad 33 \end{array}$.

Así pues, $x = \dfrac{33}{17}$. Para no operar con $\dfrac{33}{17}$, volvemos a hacer reducción. Esta vez multiplicamos la primera ecuación por – 3 y la segunda por 4: $\begin{array}{r} \begin{cases} -12x + 9y = -27 \\ 12x + 8y = 20 \end{cases} \\ \hline 17y = -7 \end{array}$.

La solución del sistema es $x = \dfrac{33}{17}$, $y = -\dfrac{7}{17}$.

d) Multiplicamos la primera ecuación por 2 y sumamos: $\begin{array}{r} \begin{cases} 4x - 2y = 18 \\ -4x + 2y = 20 \end{cases} \\ \hline 0 \quad = 38 \end{array}$.

El sistema es incompatible y, por tanto, no tiene solución.

5.11. (TIC) Resuelve estos sistemas por sustitución.

a) $\begin{cases} y = 3x - 4 \\ 2x - 3y = -17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 5y = 9 \\ 4x - 3y = 18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$

a) Sustituimos la expresión de *y* en la segunda ecuación y resolvemos:

$2x - 3(3x - 4) = -17 \Rightarrow 2x - 9x + 12 = -17 \Rightarrow -7x = -29;\ x = \frac{29}{7}$.

$y = 3 \cdot \frac{29}{7} - 4 = \frac{59}{7}$

La solución del sistema es $x = \frac{29}{7}$, $y = \frac{59}{7}$.

b) Despejamos *x* en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$x = 5y - 9 \Rightarrow 4\cdot(5y - 9) - 3y = 18 \Rightarrow 20y - 36 - 3y = 18 \Rightarrow 17y = 54 \Rightarrow y = \frac{54}{17}$.

$x = 5 \cdot \frac{54}{17} - 9 = \frac{117}{17}$.

La solución del sistema es $x = \frac{117}{17}$, $y = \frac{54}{17}$.

c) Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$y = 5 - 2x \Rightarrow 3x - 4(5 - 2x) = 2 \Rightarrow 3x - 20 + 8x = 2;\ 11x = 22;\ x = 2$.

$y = 5 - 2\cdot2 = 1$.

La solución del sistema es $x = 2$; $y = 1$.

d) Despejamos x de la primera ecuación y sustituimos en la segunda.

$x = \frac{8 + 2y}{3} \Rightarrow 4 \cdot \frac{8 + 2y}{3} + 5y = 3 \Rightarrow 32 + 8y + 15y = 9 \Rightarrow 23y = -23 \Rightarrow y = -1$.

$x = \frac{8 + 2 \cdot (-1)}{3} = 2$

La solución del sistema es $x = 2$; $y = -1$.

5.12. Actividad resuelta.

5.13. Actividad resuelta.

5.14. Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de igualación.

a) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ x - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(x - 3y) + 9 = x \\ \dfrac{x+3}{6} = y - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{4}{3} \\ y = 5 - 3x \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 5y = 7 \\ 2x - 7y = 8 \end{cases}$

a) Despejamos *y* de la segunda ecuación e igualamos:

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x - 4 \end{cases} \Rightarrow 3x - 5 = x - 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2}.$$

La solución es $x = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{7}{2}$.

b) Quitamos paréntesis y despejamos y de ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 6y + 9 = x \\ \dfrac{x+3}{6} + 1 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+9}{6} = y \\ \dfrac{x+3}{6} + 1 = y \end{cases} \Rightarrow \frac{x+9}{6} = \frac{x+3}{6} + 1 \Rightarrow x + 9 = x + 9.$$

Obtenemos una igualdad que es siempre cierta, por tanto, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que cumplen la relación $y = \frac{x+9}{6}$.

c) Despejamos y e igualamos: $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ y = 5 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 - 3x \\ y = 5 - 3x \end{cases}$. El sistema es incompatible por tratarse de rectas paralelas.

d) Despejamos *x* de ambas ecuaciones

$$\begin{cases} x = 7 + 5y \\ x = \dfrac{8+7y}{2} \end{cases} \Rightarrow 7 + 5y = \frac{8+7y}{2} \Rightarrow 14 + 10y = 8 + 7y \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = 7 + 5 \cdot (-2) = -3.$$

La solución del sistema es *x* = –3; *y* = –2.

5.15. Resuelve por el método que consideres más apropiado.

a) $\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5(x - 2) = x + 2y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ y - 3x - 4 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = 5y - 1 \end{cases}$

a) Reducción:

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ 3 - y = 7 \Rightarrow y = -4.$$
$$3x = 9$$

La solución del sistema es $x = 3$; $y = -4$.

b) Sustitución:

$y = 2x - 5 \Rightarrow 5(x - 2) = x + 2(2x - 5) \Rightarrow 5x - 10 = x + 4x - 10.$

El sistema es compatible indeterminado y las soluciones cumplen la relación $y = 2x - 5$.

c) Sustitución:

$x = 3 + 2y \Rightarrow y - 3(3 + 2y) - 4 = 0 \Rightarrow y - 9 - 6y - 4 = 0 \Rightarrow -5y = 13 \Rightarrow y = -\frac{13}{5}.$

$x = 3 - \frac{26}{5} = -\frac{11}{5}$. La solución del sistema es $x = -\frac{11}{5}$; $y = -\frac{13}{5}$.

d) Igualación:

$$\begin{cases} x = \dfrac{y-3}{2} \\ x = 5y - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{y-3}{2} = 5y - 1 \Rightarrow y - 3 = 10y - 2; \quad y = -\frac{1}{9} \Rightarrow x = 5 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) - 1 = -\frac{14}{9}.$$

La solución del sistema es $x = -\frac{14}{9}$; $y = -\frac{1}{9}$.

5.16. Actividad interactiva.

5.17. Actividad resuelta.

5.18. (TIC) Resuelve estos dos sistemas.

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ x + y = 25 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 47 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$

En ambos casos despejaremos x de la segunda ecuación y sustituiremos en la primera para obtener una ecuación que puede ser de 2.º grado.

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ x = 25 - y \end{cases} \Rightarrow (25-y)^2 - y^2 = 25 \Rightarrow 625 - 50y + y^2 - y^2 = 25 \Rightarrow 50y = 600 \Rightarrow y = 12$.

$x = 25 - 12 = 13$. La solución del sistema es $x = 13$; $y = 12$.

b) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 47 \\ x = 7 + 2y \end{cases} \Rightarrow 2(7+2y)^2 - 3y^2 = 47 \Rightarrow 2\left(49 + 28y + 4y^2\right) - 3y^2 = 47 \Rightarrow$

$$5y^2 + 56y + 51 = 0 \Rightarrow y = \frac{-56 \pm \sqrt{56^2 - 4\cdot 5\cdot 51}}{2\cdot 5} = \frac{-56 \pm 46}{10} = \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{51}{5} \end{cases}.$$

Si $y = -1 \Rightarrow x = 7 + 2\cdot(-1) = 5$. Si $y = -\frac{51}{5} \Rightarrow x = 7 + 2\cdot\left(-\frac{51}{5}\right) = -\frac{67}{5}$

Las soluciones del sistema son $x = 5$ e $y = -1$ y $x = -\frac{67}{5}$ e $y = -\frac{51}{5}$.

5.19. (TIC) Resuelve este sistema despejando una incógnita de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera. Obtendrás una ecuación bicuadrada.

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 46 \\ xy = 84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 46 \\ y = \dfrac{84}{x} \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2\left(\frac{84}{x}\right)^2 = 46 \Rightarrow x^2 - \frac{14112}{x^2} = 46 \Rightarrow x^4 - 46x^2 - 14112 = 0$$

Resolvemos la ecuación bicuadrada:

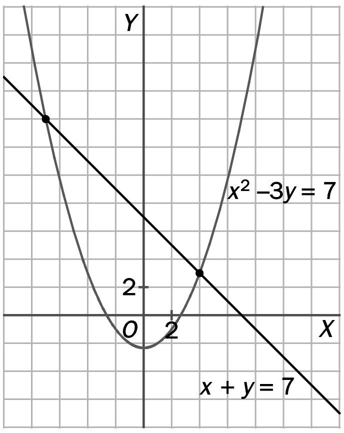
$$x^4 - 46x^2 - 14112 = 0 \Rightarrow m^2 - 46m - 14112 = 0 \Rightarrow m = \frac{46 \pm 242}{2} = \begin{cases} 144 \\ -98 \end{cases}$$

Si $m = -98$, no hay valor de x. Si $m = 144$ entonces $x = 12$ y $x = -12$.

Por tanto $y = \frac{84}{\pm 12} = \pm 7$

5.20. (TIC) Resuelve gráficamente el sistema con GeoGebra:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 - 3y = 7 \end{cases}$$



Las soluciones son

$x = -7$, $y = 14$ y $x = 4$, $y = 3$.

5.21. La diferencia entre dos números positivos es 4 y la suma de los cuadrados es 58. ¿Cuáles son esos números?

Llamando *x* e *y* a los números plantemos el sistema: $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases}$ que resolvemos por sustitución despejando *x* de la primera ecuación:

$$\begin{cases} x = 4 + y \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases} \Rightarrow (4+y)^2 + y^2 = 58 \Rightarrow 16 + 8y + y^2 + y^2 = 58 \Rightarrow y^2 + 4y - 21 = 0$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-21)}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} = \begin{cases} 3 \\ -7 \end{cases}.$$

Si $y = 3$, $x = 4 + 2 = 7$ y si $y = -7$; $x = 4 - 6 = -3$.

Como se trata de números positivos, éstos son 7 y 3.

5.22. Actividad interactiva.

5.23. La familia Pérez fue a la pizzería y por cinco refrescos y tres raciones de pizza pagaron 21,10 euros. Los Fernández, por tres refrescos y cuatro raciones de pizza pagaron 19,70 euros. ¿Cuánto pagarán los Gómez por seis refrescos y cuatro raciones de pizza?

Llamando *x* al precio de un refresco e *y* al precio de una ración de pizza obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 21{,}10 \\ 3x + 4y = 19{,}70 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por reducción tenemos que $\begin{array}{r} \begin{cases} -15x - 9y = -63{,}30 \\ 15x + 20y = 98{,}50 \end{cases} \\ \hline 11y = 35{,}20 \end{array}$.

Luego, $y = 3{,}20$ y $x = \frac{21{,}10 - 3 \cdot 3{,}20}{5} = 2{,}30$.

Como un refresco cuesta 2,30 € y una ración de pizza cuesta 3,20 €, los Gómez pagarán:

$6 \cdot 2{,}30 + 4 \cdot 3{,}20 = 26{,}60$ €.

5.24. La suma de dos números es 11 y la suma de sus cuadros es 73, ¿qué números son?

Llamando x e y a los números plantemos el sistema:

$\begin{cases} x+y=11 \\ x^2+y^2=73 \end{cases}$ que resolvemos por sustitución despejando x de la primera ecuación:

$$\begin{cases} x=11-y \\ x^2+y^2=73 \end{cases} \Rightarrow (11-y)^2+y^2=73 \Rightarrow 121-22y+y^2+y^2=73 \Rightarrow y^2-11y+24=0$$

$$y=\frac{11\pm\sqrt{121-4\cdot 24}}{2}=\frac{11\pm 5}{2}=\begin{cases} 8 \\ 3 \end{cases}$$

Si y = 8, x = 11 – 8 = 3 y si y = 3; x = 11 – 3 = 8

Los números buscados son 3 y 8.

5.25. Andrés ha comprado una parcela rectangular de 360 m^2 y necesita 84 m de alambre para cercarla. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

Llamando x al largo de la parcela e y al ancho plantemos el sistema:

$\begin{cases} 2x+2y=84 \\ xy=360 \end{cases}$ que resolvemos por sustitución despejando x de la primera ecuación:

$$\begin{cases} x=42-y \\ xy=360 \end{cases} \Rightarrow (42-y)y=360 \Rightarrow y^2-42y+360=0 \Rightarrow$$

$$y=\frac{42\pm\sqrt{42^2-4\cdot 360}}{2}=\frac{42\pm 18}{2}=\begin{cases} 30 \\ 12 \end{cases}$$

Si y = 30, x = 42 – 30 = 12 y si y = 12; x = 42 – 12 = 30

Las dimensiones de la parcela son 30 metros x 12 metros.

EJERCICIOS

Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

5.26. Escribe cada uno de estos enunciados en forma de una ecuación con dos incógnitas y señala a qué hace referencia cada una de las incógnitas.

a) La suma de dos números es 10.

b) La diferencia de dos números es 10.

c) El producto de dos números es 24.

d) El perímetro de un rectángulo mide 54 centímetros.

e) El número de camas de un hospital cuyas habitaciones son dobles y triples es 256.

f) El número de ruedas que hay entre las bicicletas y los triciclos de una tienda es 84.

g) En un centro de Secundaria hay 678 personasentre estudiantes y profesores.

a) Sean x e y los dos números, $x + y = 10$.

b) Sean x e y los dos números, $x - y = 10$.

c) Sean x e y los dos números, $x \cdot y = 24$.

d) Sea x la longitud de la base e y la longitud de la altura, $2x + 2y = 54$.

e) Sea x el número de habitaciones dobles e y el número de habitaciones triples, $2x + 3y = 256$.

f) Sea x el número de bicicletas e y el número de triciclos, $2x + 3y = 84$.

g) Sea x el número de estudiantes e y el número de profesores, $x + y = 678$.

5.27. Une cada ecuación con una de sus soluciones.

Ecuación	Solución
$4x - 5y = -13$	(1, 6)
$2x - y = 2$	(–2, 1)
$x - 7y = 22$	(3, 4)
$8x - y = 2$	(1, –3)

5.28. Señala cuáles de los siguientes valores son soluciones de la ecuación $2x - 3y = 8$.

a) (2, 3) **c) (4, 0)** **e) (3, 7)**

b) (1, –2) **d) (–4, –7)** **f) (5, –3)**

a) $2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 8 \Rightarrow 4 - 9 \neq 8$. No es solución.

b) $2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) = 8 \Rightarrow -2 + 6 \neq 8$. No es solución.

c) $2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8$. Sí es solución.

d) $2 \cdot (-4) - 3 \cdot (-7) = 8 \Rightarrow -8 + 21 \neq 8$. No es solución.

e) $2 \cdot 3 - 3 \cdot (7) = 8 \Rightarrow 6 - 21 \neq 8$. No es solución.

f) $2 \cdot 5 - 3 \cdot (-3) = 8 \Rightarrow 10 + 9 \neq 8$. No es solución.

5.29. **Comprueba si $x = -3$, $y = 2$ es solución de alguna de las siguientes ecuaciones.**

a) $5x + 2y = -11$

b) $3x + y = -7$

c) $6x - 4y = 2$

d) $-2x + 7y = 20$

a) $5 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 11 \Rightarrow -15 + 4 \neq 11$. No es solución.

b) $3 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = -7 \Rightarrow -9 + 2 = -7$. Sí es solución.

c) $6 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 = 2 \Rightarrow -18 - 8 \neq 2$. No es solución.

d) $-2 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = 20 \Rightarrow 6 + 14 = 20$. Sí es solución

5.30. **Escribe una ecuación con dos incógnitas asociada a la siguiente tabla de valores.**

x	–1	2	3	0	–2	5	4
y	5	–1	–3	3	7	–7	–5

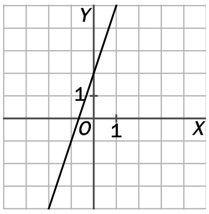
Se pide hallar la ecuación de la recta, $y = mx+n$, por la cual pasan todos los puntos anteriores. Se cogen dos cualesquiera de ellos y los obligamos a que verifiquen la ecuación anterior

$$\begin{cases} (-1, 5) \to 5 = -m + n \\ (2, -1) \to -1 = 2m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 3 \end{cases}$$

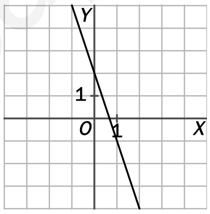
Por tanto la recta buscada tiene por ecuación $y = -2x + 3$.

5.31. **Razona cuál de estas gráficas representa a la ecuación $y = -3x + 2$.**

a)



b)



La b), ya que la siguiente tabla de valores verifica la ecuación de la recta $y = -3x + 2$.

Apartado	x	y
a)	**0**	**2**
b)	$\frac{2}{3}$	**0**

Sistemas de ecuaciones lineales. Resolución gráfica

5.32. Forma la tabla de valores asociada a cada una de las siguientes ecuaciones y encuentra alguna solución común a ambas.

a) $4x - 5y = -13$

b) $-3x + 2y = 8$

La tabla asociada a $4x - 5y = -13$ es:

x	*y*
–2	**1**
3	**5**

La tabla asociada a $-3x + 2y = 8$ es:

x	*y*
–2	**1**
0	**4**

La solución del sistema es: $x = -2$; $y = 1$.

5.33. (TIC) Representa gráficamente y clasifica estos sistemas según el número de soluciones.

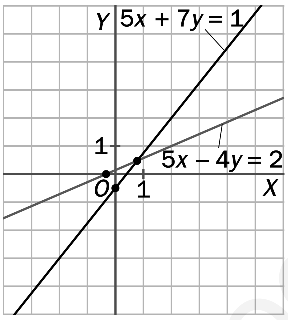
a) $\begin{cases} 5x - 4y = 2 \\ -3x + 7y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 5y = -4 \\ -3x + 15y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -6x + 2y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

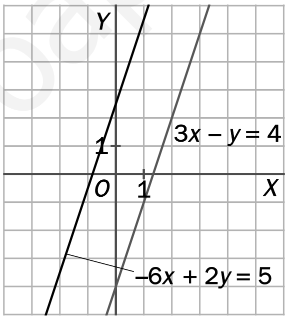
d) $\begin{cases} \dfrac{5}{6}x - y = 7 \\ -\dfrac{5}{3}x + 2y = -2 \end{cases}$

a) Sistema compatible determinado



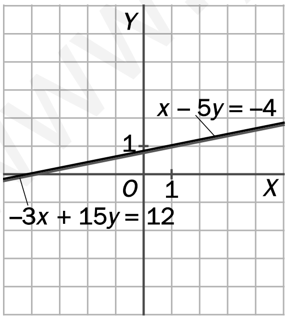
Tiene una solución.

c) Sistema incompatible



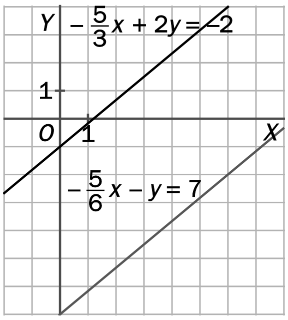
No tiene soluciones.

b) Sistema compatible indeterminado



Tiene infinitas soluciones.

d) Sistema incompatible



No tiene soluciones.

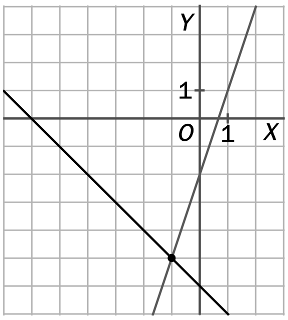
5.34. (TIC) a) Representa los valores de cada una de estas tablas en los mismos ejes de coordenadas para obtener las rectas correspondientes a un sistema.

x	1	2
y	1	4

x	–3	–4
y	–3	–2

b) Averigua la solución del sistema.

a)

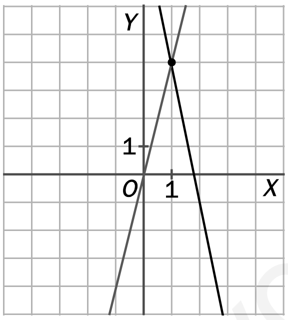


b) La solución es el punto de intersección de las dos rectas, es decir, $x = –1$, $y = –5$.

5.35. (TIC) Resuelve gráficamente los siguientes sistemas.

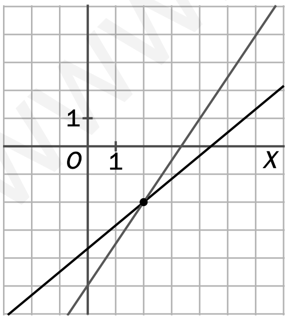
a) $\begin{cases} 4x - y = 0 \\ 5x + y = 9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -3x + 2y = -10 \\ 5x - 6y = 22 \end{cases}$

a)



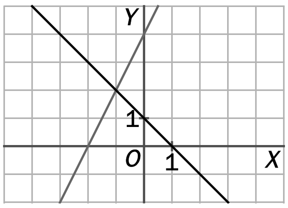
La solución es: $x = 1$, $y = 4$.

b)



La solución es: $x = 2$, $y = –2$.

5.36. Halla la solución y la expresión del sistema de ecuaciones asociado a la siguiente gráfica.



La ecuación explícita de una recta es: $y = mx + n$.

La primera recta pasa por los puntos: $\begin{vmatrix}(1, 0) \to 0 = m + n \\ (0, 1) \to 1 = n\end{vmatrix}$

$\Rightarrow m = -n = -1 \Rightarrow y = -x + 1$

La segunda recta pasa por los puntos: $\begin{vmatrix}(-2, 0) \to 0 = -2m + n \\ (0, 4) \to 4 = n\end{vmatrix}$

$\Rightarrow -2m = -n = -4 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow y = 2x + 4$

Por tanto, el sistema buscado es: $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

5.37. Indica, sin resolverlos, si estos sistemas son compatibles o incompatibles, y compruébalo después representando gráficamente cada uno.

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -1 \end{cases}$

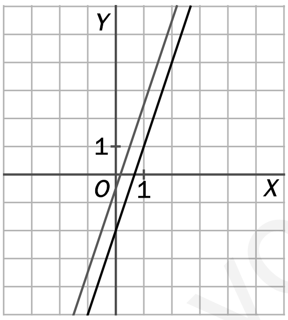
b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

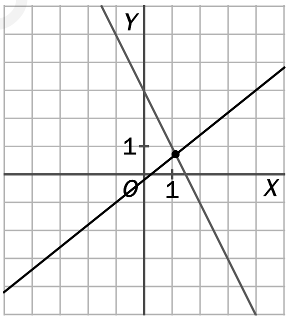
d) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

Para ello hemos de buscar si existe proporcionalidad entre los coeficientes y los términos independientes de las ecuaciones de los sistemas:

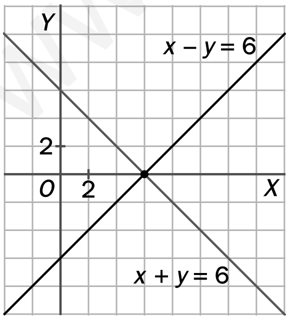
a) $\frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow$ Sistema incompatible



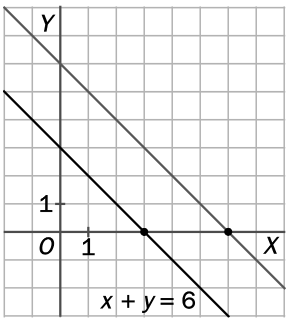
c) $\frac{4}{2} \neq \frac{-5}{1} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado



b) $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow$ Compatible determinado



d) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{6}{6} \Rightarrow$ Sistema incompatible

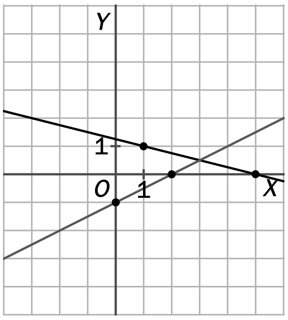


Sistemas equivalentes

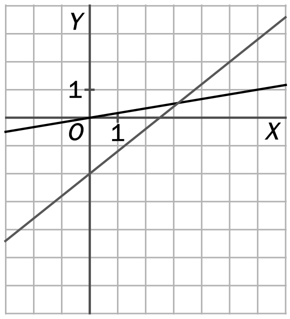
5.38. (TIC) Comprueba si estos sistemas son o no equivalentes a partir de su resolución gráfica.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - y = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ \dfrac{x}{3} - 2y = 0 \end{cases}$

a)



b)



Se trata de los sistemas equivalentes porque la solución es la misma: $x = 3$ e $y = \dfrac{1}{2}$.

5.39. De estas ecuaciones, ¿cuáles son equivalentes?

a) $4x - 2y = 6$ **c)** $2x = y + 3$

b) $y = \dfrac{4x - 6}{2}$ **d)** $14y - 28x + 42 = 0$

Las cuatro son equivalentes.

5.40. (TIC) Transforma los siguientes sistemas en otros equivalentes eliminando una de las incógnitas de una de las ecuaciones y resuélvelos.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ -x + 4y = -9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -3x + 5y = -7 \\ 5x + 3y = 6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ -x + 4y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ -3x + 12y = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ 10y = -30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 6 = -3 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}$

Las soluciones son $x = -3$, $y = -3$.

b) $\begin{cases} -3x + 5y = -7 \\ 5x + 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15x + 25y = -35 \\ 15x + 9y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 34y = -17 \\ 15x + 9y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} \\ 15x - \dfrac{9}{2} = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Las soluciones son $x = \dfrac{3}{2}$ e $y = -\dfrac{1}{2}$.

5.41. Di si las siguientes frases son ciertas o falsas.

a) $-3x + y = 5$ **es equivalente a** $4x - 2y = -10$ **.**

b) **El sistema** $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$ **tiene infinitas soluciones.**

c) **En la representación gráfica del sistema** $\begin{cases} -x + 5y = -4 \\ 3x - 15y = 12 \end{cases}$ **tan solo aparece una recta.**

a) Falso. $\frac{-3}{4} \neq \frac{1}{-2} = \frac{5}{-10}$

b) Falso. $\frac{2}{2} = \frac{5}{5} \neq \frac{1}{2}$. El sistema es incompatible y, por tanto, no tiene ninguna solución.

c) Verdadero. $\frac{-1}{3} = \frac{5}{-15} = \frac{-4}{12}$. Se trata de un sistema compatible indeterminado y, por tanto, tiene infinitas soluciones. Esto viene representado sobre una sola recta.

Resolución algebraica de sistemas

5.42. (TIC) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando el método de reducción.

a) $\begin{cases} 3x - 7y = -1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - 7y = -1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 7y = -1 \\ -9y = -6 \quad \Rightarrow y = \frac{2}{3} \end{cases}$

$3x - 7 \cdot \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow 3x = -1 + \frac{14}{3} \Rightarrow x = \frac{11}{9}$

b) $\begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 10x + 6y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 18x = -36 \quad \to x = -2 \end{cases}$

$8 \cdot (-2) - 6y = -34 \Rightarrow -16 + 34 = 6y \Rightarrow y = 3$

5.43. (TIC) Utiliza el método de sustitución para encontrar la solución de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y = 2 \\ x = 7 - 3y \end{cases} \Rightarrow 4(7 - 3y) - y = 2 \Rightarrow 28 - 12y - y = 2 \Rightarrow -13y = -26 \Rightarrow y = 2$

$x = 7 - 3y \Rightarrow x = 7 - 3 \cdot 2 \Rightarrow x = 1$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5 = y \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow 4x + 3(2x - 5) = 5 \Rightarrow 4x + 6x - 15 = 5 \Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow x = 2$

$2x - 5 = y \Rightarrow y = 2 \cdot 2 - 5 \Rightarrow y = -1$

5.44. (TIC) Encuentra la solución de estos sistemas de ecuaciones aplicando el método de igualación.

a) $\begin{cases} x-5y=-8 \\ x+3y=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x+4y=-5 \\ 5x-2y=9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x-5y=-8 \\ x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-8+5y \\ x=-3y \end{cases} \Rightarrow -8+5y=-3y \Rightarrow 8y=8 \Rightarrow y=1$

$x=-3y \Rightarrow x=-3\cdot 1 \Rightarrow x=-3$

b) $\begin{cases} 3x+4y=-5 \\ 5x-2y=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-5-4y}{3} \\ x=\dfrac{9+2y}{5} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{-5-4y}{3}=\dfrac{9+2y}{5} \Rightarrow 5\cdot(-5-4y)=3\cdot(9+2y) \Rightarrow$

$\Rightarrow -25-20y=27+6y \Rightarrow -26y=52 \Rightarrow y=-2$

$x=\dfrac{9+2y}{5} \Rightarrow x=\dfrac{9+2\cdot(-2)}{5} \Rightarrow x=1$

5.45. (TIC) Resuelve los siguientes sistemas por el método que consideres más conveniente.

a) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 4x+2y=0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x+2y=1 \\ -x+3y=-7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x+y=5 \\ -x+5y=-11 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+4y=9 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$

¿Son equivalentes algunos de estos sistemas?

a) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 4x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-2y=10 \\ 4x+2y=0 \end{cases}$

$10x=10 \Rightarrow x=1$ e $y=-2$

c) $\begin{cases} 5x+2y=1 \\ -x+3y=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y=1 \\ -5x+15y=-35 \end{cases}$

$17y=-34 \Rightarrow y=-2$ y $x=1$

c) $\begin{cases} 7x+y=5 \\ -x+5y=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x+y=5 \\ -7x+35y=-77 \end{cases}$

$36y=-72 \Rightarrow y=-2$ y $x=1$

d) $\begin{cases} x+4y=9 \\ -3x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+12y=27 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$

$13y=26 \Rightarrow y=2$ y $x=1$

a, *b* y *c* son equivalentes por tener la misma solución.

5.46. (TIC) Halla la solución de estos sistemas utilizando el método que prefieras en cada caso.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}-\dfrac{2y}{3}=6 \\ \dfrac{-x}{10}+\dfrac{5y}{6}=-6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3(-2x+1)-4y=1 \\ 4x-2(3y+1)=8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}-\dfrac{2y}{3}=6 \\ \dfrac{-x}{10}+\dfrac{5y}{6}=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-10y=90 \\ -3x+25y=-180 \end{cases}$

$15y=-90 \rightarrow y=-6$ y $x=10$

b) $\begin{cases} 3(-2x+1)-4y=1 \\ 4x-2(3y+1)=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x-4y=-2 \\ 4x-6y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x-8y=-4 \\ 12x-18y=30 \end{cases}$

$-26y=26 \rightarrow y=-1$ y $x=1$

5.47. (TIC) Escribe las ecuaciones de los siguientes sistemas en la forma $ax + by = c$ y resuélvelos, indicando de qué tipo de sistema se trata.

a) $\begin{cases} 3(x-1) = 6y \\ -x = 2(2-y) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 6y = 2(1+x) \\ -\dfrac{x}{2} + 3y = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3(x-1) = 6y \\ -x = 2(2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 6y \\ -x = 4 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3}{-1} = \dfrac{-6}{2} \neq \dfrac{3}{4} \Rightarrow$ Sistema incompatible: no tiene solución.

b) $\begin{cases} 3x - 6y = 2(1+x) \\ -\dfrac{x}{2} + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 2 + 2x \\ -x + 6y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6y = 2 \\ -x + 6y = -2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{-1} = \dfrac{-6}{6} = \dfrac{2}{-2} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones.

Sistemas de segundo grado

5.48. Escribe el sistema de ecuaciones asociado a cada una de las siguientes situaciones.

a) La suma de dos números es 14 y la de sus cuadrados es 100.

b) Dos números cuyo producto es 12 y cuyos cuadrados suman 25.

a) $\begin{cases} x + y = 14 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

5.49. (TIC) Resuelve el siguiente sistema por sustitución y comprueba las soluciones obtenidas.

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = 90 \end{cases}$$

$\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 + y \\ xy = 90 \end{cases} \Rightarrow (9+y) \cdot y = 90 \Rightarrow 9y + y^2 = 90 \Rightarrow y^2 + 9y - 90 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81 + 360}}{2} = \dfrac{-9 \pm 21}{2} = \begin{cases} y_1 = 6 \to x_1 = 9 + 6 = 15 \\ y_2 = -15 \to x_2 = 9 - 15 = -6 \end{cases}$

Solución 1: $x_1 = 15$ $y_1 = 6$

Solución 2: $x_2 = -6$ $y_2 = -15$

Comprobamos las soluciones:

Si $x_1 = 15$ e $y_1 = 6$: $\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15 - 6 = 9 \\ 15 \cdot 6 = 90 \end{cases}$ .Sí es solución.

Si: $x_2 = -6$ $y_2 = -15$: $\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 - (-15) = 9 \\ (-15) \cdot (-6) = 90 \end{cases}$. Sí es solución.

5.50. (TIC) Resuelve los siguientes sistemas por sustitución e indica de qué tipo son las ecuaciones que los componen.

a) $\begin{cases} 3x^2 + 4xy = 11 \\ 5x + y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 52 \\ x + y = 8 \end{cases}$

a) La primera ecuación es de 2.º grado, y la segunda es lineal o de 1.er grado.

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy = 11 \\ 5x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4xy = 11 \\ y = 7 - 5x \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 4x(7-5x) = 11 \Rightarrow -17x^2 + 28x - 11 = 0$$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado y sus dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{11}{17} \quad y_1 = \frac{64}{17} \qquad\qquad x_2 = 1 \quad y_2 = 2$$

b) La primera ecuación es de 2.º grado, y la segunda es lineal o de 1.er grado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 52 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 52 \\ y = 8 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 + (8-x)^2 + x(8-x) = 52 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado y sus dos soluciones son:

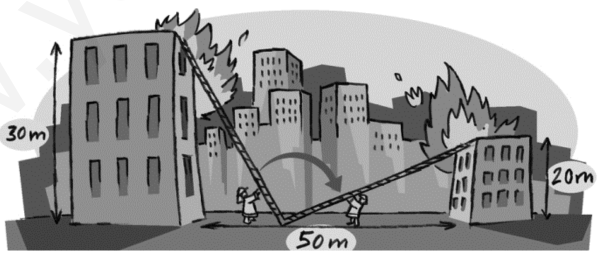
$$x_1 = 6 \quad y_1 = 2 \qquad\qquad x_2 = 2 \quad y_2 = 6$$

5.51. De un rombo se sabe que su área es de 120 cm² y que la proporción existente entre las diagonales mayor y menor es 10:3.

$$\begin{cases} \dfrac{Dd}{2} = 120 \\ 3D = 10d \rightarrow d = \dfrac{3D}{10} \end{cases} \Rightarrow D\frac{3D}{10} = 240 \Rightarrow D^2 = 800 \Rightarrow D = 20\sqrt{2} \text{ cm y } d = \frac{3 \cdot 20\sqrt{2}}{10} \Rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

5.52. La siguiente figura muestra la posición que debe ocupar una escalera de bomberos sobre dos edificios.

Calcula la longitud de la escalera y la posición sobre la que debe posarse en la acera.



$$\begin{cases} y^2 = 30^2 + x^2 \\ y^2 = 20^2 + (50-x)^2 \end{cases} \Rightarrow 900 + x^2 = 400 + 2500 - 100x + x^2 \Rightarrow 100x = 2000 \Rightarrow x = 20 \text{ m}$$

$$y^2 = 900 + 20^2 = 1300 \Rightarrow y = \sqrt{1300} \Rightarrow y = 36{,}06 \text{ m}$$

La escalera debe medir 36,06 metros y estar situada a 20 metros de la primera casa.

5.53. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su diagonal mide 15 centímetros, y su área, 108 centímetros cuadrados.

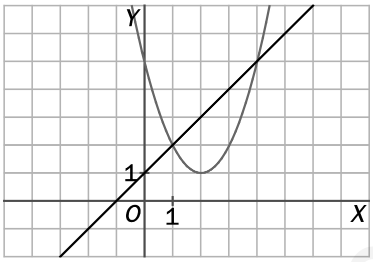
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 15^2 \\ x \cdot y = 108 \quad \to x = \dfrac{108}{y} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{108}{y}\right)^2 + y^2 = 15^2 \Rightarrow 108^2 + y^4 = 225y^2 \Rightarrow y^4 - 225y^2 + 11664 = 0$$

$$y^2 = \frac{225 \pm \sqrt{225^2 - 4 \cdot 11664}}{2} = \frac{225 \pm 63}{2} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 144 \Rightarrow y = 12 \text{ y } x = 9 \\ y^2 = 81 \Rightarrow y = 9 \text{ y } x = 12 \end{cases}$$

Las soluciones negativas no las consideramos porque las dimensiones de un rectángulo tienen que ser positivas.

El rectángulo tendrá por dimensiones 9 cm × 12 cm.

5.54. Las dos gráficas representadas en la figura corresponden a las ecuaciones de un sistema.



a) ¿Es un sistema de primero o de segundo grado? ¿Por qué?

b) ¿Cuáles son las soluciones del sistema?

a) Es un sistema de segundo grado, ya que en la gráfica aparece representada una parábola.

b) Las soluciones del sistema son los puntos en los que se cortan las dos funciones representadas: P_1= (1, 2), y P_2 = (4, 5).

PROBLEMAS

5.55. Encima de la mesa hay 21 monedas, de uno y de dos euros. Con un pase mágico, Matemago convierte las monedas de un euro en monedas de dos y las de dos, en monedas de uno. Si inicialmente hay 3 euros más que al principio, ¿cuántas monedas de cada tipo había al principio?

Si suponemos que al principio hay x monedas de un euro e y monedas de dos euros, contando el número de monedas tenemos que $x + y = 21$.

Si contamos el dinero, al principio tenemos $x + 2y$ euros y, tras el pase mágico, tenemos $2x + y$ euros. Como al final hay tres euros más que al principio tenemos que $x + 2y + 3 = 2x + y$.

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} x+y=21 \\ x+2y+3=2x+y \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=21 \\ x-y=3 \end{cases}$ $2x=24; \quad x=12; \quad y=21-12=9.$

Al principio había 12 monedas de un euro y 9 monedas de dos euros.

5.56. Por cada 4 chicas de una clase hay 5 chicos. Han venido a la clase 5 alumnas nuevas y entonces, el número de chicas y de chicos se ha igualado. ¿Cuántos pupitres debe haber en el aula?

Si llamamos x al número de chicas que había inicialmente e y al número de chicos, tenemos que $\frac{x}{y}=\frac{4}{5}; \quad 5x=4y$ y $x + 5 = y$.

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} 5x=4y \\ x+5=y \end{cases}$ $5x=4(x+5); \quad x=20$. Al principio había 20 chicas y 25 chicos y ahora hay 25 chicas y 25 chicos por lo que son necesarios 50 pupitres.

5.57. En casa de mi vecina, que es un poco bruja, hay gatos y cuervos. Si en total hay 24 animales y 70 patas. ¿Cuántos individuos hay de cada clase?

Si llamamos x al número de gatos e y al número de cuervos, como en total hay 24 animales, tenemos que $x + y = 24$. Contando las patas de cada animal obtenemos la ecuación $4x + 2y = 70$.

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} x+y=24 \\ 4x+2y=70 \end{cases}$; $\begin{array}{l} \begin{cases} -x-y=-24 \\ 2x+y=35 \end{cases} \\ \hline x \qquad\ =11 \end{array}$. Luego hay 11 gatos y 13 cuervos.

5.58. Un examen consta de 20 preguntas de elección múltiple. Cada respuesta correcta es puntuada con tres puntos y se resta un punto por cada respuesta errónea.

Un alumno ha respondido a todas las preguntas y ha obtenido 36 puntos. ¿Cuántas respuestas correctas y cuántas incorrectas tuvo?

Sea x el número de respuestas correctas e y el número de respuestas incorrectas.

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 3x-y=36 \end{cases} \Rightarrow 4x=56 \Rightarrow x=14 \Rightarrow y=20-x \Rightarrow y=20-14 \Rightarrow y=6$$

Respondió 14 preguntas de manera correcta y 6 de manera incorrecta.

5.59. Un grupo de alumnos ha pagado 177 € por tres entradas de patio y seis de palco. Otro grupo por 2 entradas de patio y 2 de palco ha pagado 82 €. Calcula los precios de cada localidad.

Llamamos *x* precio de las entradas de patio e *y* al precio de las entradas de palco.

Planteamos el sistema: $\begin{cases} 3x + 6y = 177 \\ 2x + 2y = 82 \end{cases}$.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x + 6y = 177 \\ -3x - 3y = -123 \end{cases} \\ \hline \quad 3y \quad\quad = 54 \end{array}$$

. Luego $y = 18$ y $x = 41 - 18 = 23$

Las entradas de patio costaban 23 € y las de palco, 18 €.

5.60. En un hotel hay habitaciones dobles y triples. En total hay 43 habitaciones y 105 camas. Si la habitación doble cuesta 30 euros por noche y la triple 40 euros por noche. ¿Cuánto se recauda el día que el hotel esté completo?

Si llamamos *x* al número de habitaciones dobles e *y* al número de habitaciones triples, en total habrá $2x + 3y$ camas.

Planteamos el sistema: $\begin{cases} x + y = 43 \\ 2x + 3y = 105 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -2x - 2y = -86 \\ 2x + 3y = 105 \end{cases} \\ \hline \quad\quad\quad y = 19 \end{array} \qquad x = 43 - 19 = 24$$

Como hay 24 habitaciones dobles y 19 triples, cuando el hotel esté completo se recaudarán:

$30 \cdot 24 + 40 \cdot 19 = 1480$ €.

5.61. Una empresa de reciclado de papel mezcla pasta de papel de baja calidad, que compra por 0,25 € el kilogramo, con pasta de mayor calidad, de 0,40 € el kilogramo, para conseguir 50 kilogramos de pasta de 0,31 € el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos utiliza de cada tipo de pasta?

Sea *x* el número de kilogramos que utilizamos de la pasta de baja calidad e *y* los kilogramos de pasta de alta calidad.

Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 50 \cdot 0{,}31 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 0{,}25x + 0{,}25y = 12{,}5 \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 15{,}5 \end{array}\right\} \\ \hline \quad -0{,}15y = -3 \rightarrow y = 20 \ \text{ y } \ x = 30 \end{array}$$

Se utilizan 30 kg de pasta de baja calidad y 20 kg de pasta de mayor calidad.

5.62. **Se van a repartir 400 euros entre varias personas. El día del reparto faltaron 5 y así a cada asistente le correspondieron 4 € más de lo que en un principio le tocaba. ¿Cuántas personas había al inicio?**

Si llamamos x al número de personas que había al principio e y al dinero que le correspondía a cada una tenemos que:

$$\begin{cases} xy = 400 \\ (x-5)(y+4) = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 400 \\ xy + 4x - 5y - 20 = 400 \end{cases}$$

$$y = \frac{400}{x}; \quad x \cdot \frac{400}{x} + 4x - 5 \cdot \frac{400}{x} - 20 = 400;$$

$$400 + 4x - \frac{2000}{x} - 20 = 400$$

Multiplicando por x y dividiendo entre 4 obtenemos la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 5x - 500 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot (-500)}}{2} = \frac{5 \pm 45}{2} = \begin{cases} 25 \\ -20 \end{cases}.$$

Como x debe ser un número positivo, al principio había 25 personas.

5.63. **Para hacer un regalo a un compañero, los estudiantes de una clase han recogido 24,50 euros en monedas de un euro y de 50 céntimos, siendo el total de monedas 34. ¿Cuántas monedas hay de cada valor?**

Si llamamos x al número de monedas de un euro e y al número de monedas de 50 céntimos:

Contando las monedas obtenemos la ecuación $x + y = 34$.

Contando el dinero tenemos $x + 0{,}5y = 24{,}5$.

Resolvemos el sistema $\begin{cases} x + y = 34 \\ x + 0{,}5y = 24{,}5 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 34 \\ -x - 0{,}5y = -24{,}5 \end{cases} \\ \hline 0{,}5y = 9{,}5 \end{array}$$. Así pues $y = 19$ y $x = 34 - 19 = 15$.

Había 15 monedas de un euro y 19 monedas de 50 céntimos.

5.64. **Si en una reunión hubiera 5 mujeres más, habría tantos hombres como mujeres. Sin embargo, si hubiera 5 hombres más, habría doble número de hombres que de mujeres.**

¿Cuántas personas hay en la reunión?

Llamando x al número de mujeres e y al número de hombres que hay en la fiesta tenemos que:

$$\begin{cases} x + 5 = y \\ y + 5 = 2x \end{cases} \quad x + 5 + 5 = 2x; \quad x = 10 \quad y = 10 + 5 = 15.$$

Había 10 mujeres y 15 hombres.

5.65. Un fabricante de ventanas recibe un pedido para un día determinado. Haciendo cálculos se da cuenta de que si fabrica 90 ventanas al día, le faltarán 100 ventanas para completar el pedido y si fabrica 100 ventanas diariamente, el día de entrega tendrá 200 ventanas de más.

¿Cuántos días de plazo tenía y cuántas ventanas le han encargado?

Si llamamos *x* al número de ventanas que debe fabricar e *y* al número de días que tiene para hacerlas tenemos que:

$$\begin{cases} 90y = x - 100 \\ 100y = x + 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 90y + 100 = x \\ 100y - 200 = x \end{cases} \Rightarrow 90y + 100 = 100y - 200 \Rightarrow 10y = 300 \Rightarrow y = 30$$

$$\Rightarrow x = 100 \cdot 30 - 200 = 2800$$

Debe fabricar 2800 ventanas en 30 días.

5.66. *

Sea *x* la edad actual de la abuela e *y* la edad actual del niño.

$$\begin{cases} x - 4 = 16(y - 4) \\ x + 2 = 7(y + 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 16y - 64 \\ x + 2 = 7y + 14 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{r} x - 16y = -60 \\ x - 7y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 8$$

$$\overline{-9y = -72}$$

$$x - 4 = 16 \cdot 8 - 64 \Rightarrow x = 68$$

La abuela tiene 68 años y el niño tiene 8 años.

5.67. Cecilia quiere estudiar la evolución de las características físicas de cinco especies animales. Por ello ha observado de forma especial a un ejemplar de cada una de ellas.

Una de las variables que se estudian es la masa corporal de cada una a los 18 meses de vida. Inexplicablemente, en su libreta solo tiene estos datos.

Calcula la masa que tenía el cerdo en esa época.

Perro + gato	**30**
Perro + pato	**27**
Perro + cerdo	**107**
Perro + cabra	**86**
Gato + pato	**13**

Gato + pato = 13 $\rightarrow$ pato = 13 – gato

Tomando la primera y la segunda tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} \text{Perro} + \text{gato} = 30 \\ \text{Perro} + (13 - \text{gato}) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Perro} + \text{gato} = 30 \\ \text{Perro} - \text{gato} = 14 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot \text{Perro} = 44 \Rightarrow \text{Perro} = 22 \text{ kg}$$

Perro + cerdo = 107. Por tanto cerdo = 107 – 22. La masa del cerdo es de 85 kg.

5.68. Utilizando la regla de la división, averigua el dividendo y el divisor de la misma sabiendo que el cociente es 2; el resto, 7, y el producto de ambos es igual a 490.

$$\begin{cases} D = 2d + 7 \\ D \cdot d = 490 \end{cases} \Rightarrow (2d + 7)d = 490 \Rightarrow 2d^2 + 7d - 490 = 0 \Rightarrow d = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 2 \cdot 490}}{4} \Rightarrow \begin{cases} d = 14 \text{ y } D = 35 \\ d = -17{,}5 \end{cases}$$

El resultado d = –17,5 no es entero, por eso no lo consideramos.

5.69. Halla los catetos de un triángulo rectángulo de 41 m de hipotenusa y de 180 m^2 de área.

Llamando a los catetos x e y, sabemos que el área es $\frac{xy}{2} = 180$ y, por el teorema de Pitágoras tenemos que $x^2 + y^2 = 41^2$.

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} xy = 360 \\ x^2 + y^2 = 1681 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{360}{x} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{360}{x}\right)^2 = 1\,681 \Rightarrow x^4 - 1\,681x^2 + 129\,600 = 0$$

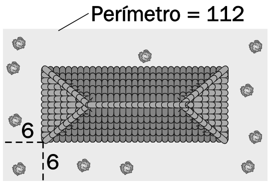
Haciendo el cambio $a = x^2$ resolvemos la ecuación bicuadrada:

$$a = \frac{1681 \pm \sqrt{1681^2 - 4 \cdot 129\,600}}{2} = \frac{1681 \pm 1519}{2} = \begin{cases} 1600 \\ 81 \end{cases}$$

Si a = 1600, x = 40 e $y = \frac{360}{40} = 9$ (rechazamos la solución x = –40 pues se trata del lado de un triángulo). Si a = 81, x = 9 e $y = \frac{360}{9} = 40$.

Los catetos miden 40 m y 9 m.

5.70. ***Calcula las dimensiones de la parcela sabiendo que el área del jardín es de 475 m^2.**



Llamando x al largo de la parcela e y al ancho, como el perímetro es 112 metros tenemos que

$2x + 2y = 112$; $x + y = 56$.

Como el jardín mide $x – 6$ metros de largo por $y – 6$ de ancho, su área es $(x – 6)(y – 6) = 475$.

Resolvemos por sustitución el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 56 \\ (x-6)(y-6) = 475 \end{cases} \quad x = 56 - y; \quad (56 - y - 6)(y - 6) = 475; \quad 50y - 300 - y^2 + 6y = 475;$$

$$y^2 - 56y + 775 = 0;\ y = \frac{56 \pm \sqrt{56^2 - 4 \cdot 775}}{2} \cong \frac{56 \pm 6}{2} = \begin{cases} 31 \\ 25 \end{cases}$$

El largo mide 31 metros y el ancho, 25 metros.

5.71. **Las edades actuales de Ana y de su hijo son 49 y 25 años, respectivamente. ¿Hace cuántos años el producto de sus edades era 640?**

Hace x años: $(49 – x)(25 – x) = 640 \Rightarrow 1225 – 74x + x^2 = 640 \Rightarrow x^2 – 74x + 585 = 0$.

$$x = \frac{74 \pm \sqrt{(-74)^2 - 4 \cdot 585}}{2} = \frac{74 \pm 56}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 65 \\ x = 9 \end{cases}$$

Hace 65 años no pudo ser porque no habían nacido. Por tanto, la respuesta correcta es hace 9 años.

5.72. **Un rectángulo tiene una superficie de 120 cm^2. Si se duplica su base y se aumenta su altura en 5 cm, el nuevo rectángulo tiene una superficie de 340 cm^2. ¿Cuáles eran las dimensiones del rectángulo original?**

Llamando x e y a las dimensiones del rectángulo original, su área es xy y las dimensiones del nuevo rectángulo son $2x$ e $y + 5$ por lo que su área es $2x(y + 5)$. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} xy = 120 \\ 2x(y+5) = 340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 120 \\ 2xy + 10x = 340 \end{cases}$$

Sustituyendo xy por 120 en la ecuación de abajo:

$$240 + 10x = 340 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = \frac{120}{10} \Rightarrow y = 12.$$

La base del rectángulo original medía 10 cm y su altura 12 cm.

5.73. Un envase de leche de un litro de capacidad tiene forma de ortoedro de 20 cm de altura. Si para construirlo se necesitan 670 cm^2 de cartón, ¿cuáles son las dimensiones de la base?

Llamando *x* e *y* a las dimensiones de la base, la capacidad es 20*xy* cm^3 y como un litro son 1000 cm^3, tenemos la primera ecuación: 20*xy* = 1000.

El cartón necesario es: 2*xy* + 40*x* + 40*y* = 670.

Simplificando ambas ecuaciones tenemos el sistema:

$$\begin{cases} xy = 50 \\ xy + 20x + 20y = 335 \end{cases}$$

$$y = \frac{50}{x} \Rightarrow 50 + 20x + 20 \cdot \frac{50}{x} = 335 \Rightarrow 20x^2 - 285x + 1000 = 0$$

$$x = \frac{285 \pm \sqrt{285^2 - 4 \cdot 20 \cdot 1000}}{2 \cdot 20} = \frac{285 \pm 35}{40} = \begin{cases} 8 \\ \dfrac{25}{4} \end{cases}$$

La base mide 8 cm por 6,25 cm.

5.74. Estoy buscando un número de dos cifras que suman 10 y si intercambio sus cifras, obtengo otro número que supera en 36 unidades al número inicial. ¿Cuál es el número que busco?

Si la cifra de las decenas del número inicial es *x* y la cifra de las unidades es *y*, el número se expresará 10*x* + *y*.

Sabemos que *x* + *y* = 10 y que el número 10*y* + *x* es 36 unidades mayor que el número 10*x* + *y*.

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 10x + y + 36 = 10y + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 9x - 9y = -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = -4 \end{cases}.$$

La solución del sistema es *x* = 3 e *y* = 7. El número buscado es 37.

AMPLIACIÓN

5.75. Yo tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes ahora. Cuando tú tengas mi edad actual, entre los dos tendremos 112 años. ¿Qué edad tengo?

a) 24

b) 32

c) 48

d) 16

Si llamamos x a mi edad actual e y a la tuya, te llevo $x–y$ años y podemos escribir:

$x = 3\,(y-(x-y))$

$x + (x – y) + y + (x – y) = 112$

Así pues, la primera ecuación es equivalente a $2x = 3y$ y la segunda a $3x – y = 112$.

Es decir $2x = 3(3x– 112)$, así que $3 \cdot 112 = 7x$ con lo que $x = 3 \cdot 16 = 48$, respuesta c).

5.76. Si $\left.\begin{array}{l} x-y=b \\ x\cdot y=c \end{array}\right\}$, entonces $(x + y)^2$ es igual a:

a) b

b) $-\dfrac{b}{c}$

c) $\dfrac{c}{b}$

d) $b^2 + 4c$

Como $(x + y)^2 – (x – y)^2 = 4xy$, se sigue que $(x + y)^2 – b^2 = 4c$, de donde $(x + y)^2 = b^2 + 4c$, respuesta d).

5.77. Si por tres sándwiches, siete tazas de café y una tarta de manzana pagamos 31,50 euros y por cuatro sándwiches, 10 tazas de café y una tarta de manzana pagamos 42 euros, ¿cuánto pagaríamos por un sándwich, una taza de café y una tarta de manzana?

a) 10,50 €

b) 12 €

c) 16,50 €

d) 17 €

Llamando s, c y m al precio de un sándwich, una taza de café y una tarta de manzana respectivamente, tenemos que $3s + 7c + m = 31{,}50$ y $4s + 10c + m = 42$.

Nos piden el valor de $s + c + m$.

Multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 2 y restando, llegamos a:

$3(3s + 7c + m) - 2(4s + 10c + m) = 3 \cdot 31{,}50 - 2 \cdot 42$, por lo que $s + c + m = 10{,}50$ €, respuesta a).

5.78. ¿Para qué valores de m se verifica que el sistema $y = mx + 3$, $y = (2m - 1)x + 4$ tiene solución?

a) Para todo m

b) Para todo $m \neq 0$

c) Para todo $m \neq \frac{1}{2}$.

d) Para todo $m \neq 1$

La primera ecuación representa una recta de pendiente m y la segunda representa una recta de pendiente $2m - 1$, que son rectas diferentes pues no tienen igual ordenada en el origen.

Así pues, el sistema tendrá solución, única, si $m \neq 2m - 1$, es decir, $m \neq 1$, respuesta d).

5.79. El número de soluciones del sistema $y = x^2$, $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ es:

a) 3

b) 2

c) 1

d) 0

El sistema dado nos lleva a la ecuación $(x - 3)^2 + x^4 = 1$.

Como los dos sumandos del término de la izquierda son positivos o cero, se sigue que si $x > 1$, $x^4 > 1$ por lo que $(x - 3)^2 + x^4 > 1$ y si $x \leq 1$, $(x - 3)^2 > 1$, por lo que $(x - 3)^2 + x^4 > 1$, así que el sistema dado no tiene ninguna solución, respuesta d).

AUTOEVALUACIÓN

5.1. Halla dos números cuya suma sea 14, y su diferencia, 8.

Sean *x* e *y* los dos números

$$\begin{cases} x+y=14 \\ x-y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=14 \to 11+y=14 \to y=3 \\ 2x=22 \to x=11 \end{cases}$$

Los números son 3 y 11.

5.2. Aplica el método de reducción para resolver este sistema.

$$\begin{cases} \mathbf{5x-3y=2} \\ \mathbf{2x+6y=8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x-6y=4 \\ 2x+6y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x=12 \to x=1 \\ 2x+6y=8 \to 2+6y=8 \to y=1 \end{cases}$$

5.3. Resuelve este sistema por sustitución.

$$\begin{cases} \mathbf{5x+y=-9} \\ \mathbf{-3x+4y=10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-9-5x \\ -3x+4y=10 \end{cases} \Rightarrow -3x+4(-9-5x)=10 \Rightarrow -3x-36-20x=10 \Rightarrow -23x=46 \Rightarrow x=\frac{46}{-23} \Rightarrow x=-2$$

$$y=-9-5\cdot(-2) \Rightarrow y=1$$

5.4. Utiliza el método de igualación para hallar la solución del siguiente sistema.

$$\begin{cases} \mathbf{6x+2y=-6} \\ \mathbf{7x-2y=-20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{-6-6x}{2} \\ y=\dfrac{-20-7x}{-2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-6-6x}{2}=\frac{-20-7x}{-2} \Rightarrow -2\cdot(-6-6x)=2\cdot(-20-7x) \Rightarrow 12+12x=-40-14x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26x=-52 \Rightarrow x=-2$$

$$y=\frac{-6+12}{2} \Rightarrow y=3$$

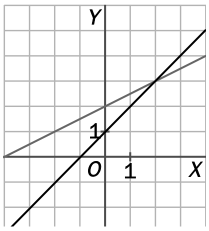
5.5. Halla el valor de los coeficientes de la ecuación $ax+by=3$ para que (1, 2) y (–1, –8) sean dos de sus soluciones.

$$\left.\begin{matrix} x=1;\ y=2 \\ x=-1;\ y=-8 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=3 \\ -a-8b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=3 \to a-2=3 \to a=5 \\ -6b=6 \to b=-1 \end{cases}$$

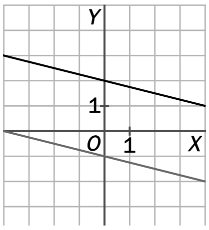
Los coeficientes son *a* = 5 y *b* = –1.

5.6. **Observa las siguientes representaciones gráficas y señala la solución de cada uno de los sistemas.**

a)



b)



a) $x = 2$ e $y = 3$

b) El sistema es incompatible; no tiene solución.

5.7. **Resuelve el siguiente sistema de segundo grado por el método de reducción.**

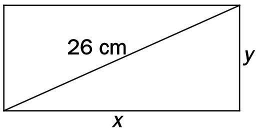
$$\begin{cases} \mathbf{3x^2 + 2y^2 = 29} \\ \mathbf{x^2 + 4y = 5} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ 3x^2 + 12y = 15 \end{cases} \\ \hline \quad\quad 2y^2 - 12y = 14 \end{array}$$

$$y^2 - 6y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 7 \Rightarrow x^2 = -23 \text{ no tiene solución.} \\ y = -1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

Soluciones: $x = 3$, $y = -1$, $x = -3$, $y = -1$

5.8. **La diagonal de un rectángulo mide 26 centímetros, y el perímetro, 68. Halla los lados.**



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 676 \\ 2x + 2y = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 676 \\ y = 34 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 + (34 - x)^2 = 676 \Rightarrow x^2 + 1156 - 68x + x^2 = 676$$

$$2x^2 - 68x + 480 = 0 \Rightarrow x^2 - 34x + 240 = 0$$

La solución es $x_1 = 24$ $\quad$ $x_2 = 10$

$y_1 = 10$ $\quad$ $y_2 = 24$

La base mide 24 cm, y la altura, 10 cm (la otra solución válida del sistema corresponde al mismo rectángulo girado 90º).

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Aprende y calcula > Circuitos eléctricos

Los circuitos eléctricos se estudian de forma parecida a las redes de tráfico que viste en la entrada de la unidad.

Usando algunas leyes físicas, un problema de circuitos dará lugar a un sistema de ecuaciones lineales, que se puede resolver de forma sencilla.

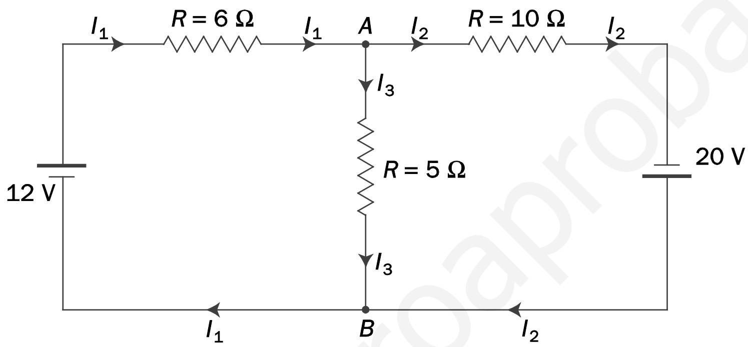
Para el planteamiento del problema usaremos tres sencillas leyes:

Primera ley de Kirchhoff: En un circuito, la suma de las corrientes que entran en un nodo es igual a la suma de las que salen. (Es equivalente a la que viste en la entrada de la unidad).

Segunda ley de Kirchhoff: La suma de los cambios de voltaje en un circuito cerrado es cero.

Ley de Ohm: Cuando una corriente pasa por una resistencia, la caída de voltaje es proporcional a la intensidad, $V = R \cdot I$.

¿Cómo se aplica esto en un circuito? Observa el diagrama de un circuito.



- **En el nodo A "entra" I_1 y "salen" I_2 e I_3. Por la primera ley de Kirchhoff, $I_1 = I_2 + I_3$.**
- **En la parte izquierda del circuito, según la segunda ley de Kirchhoff la diferencia de potencial de la pila (12 V) debe ser igual a la suma de los dos cambios de voltaje que aparecen debido a las dos resistencias.**

Utilizando la ley de Ohm, la caída de potencial en la primera resistencia es $V = 6 \cdot I_1$, y al pasar la segunda, $V = 5 \cdot I_3$.

Por tanto, $12 = 6 \cdot I_1 + 5 \cdot I_3$.

5.1. **¿Qué ocurre en el nodo *B*?**

La ecuación correspondiente resulta ser la misma que la del nodo *A*.

5.2. **Analiza la parte derecha del circuito, teniendo en cuenta que la corriente I_3 va en sentido contrario que la corriente I_2, por lo que deberá aparecer un signo menos.**

La ecuación es $20 = 10 \cdot I_2 - 5 \cdot I_3$

5.3. Escribe el sistema correspondiente a este circuito y trata de resolverlo. El método de sustitución puede ser útil.

El sistema es $\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 6 \cdot I_1 + 5 \cdot I_3 = 12 \\ 10 \cdot I_2 - 5 \cdot I_3 = 20 \end{cases}$. Para ayudar a resolverlo, se puede sugerir que despejen I_1 y I_2 en las dos últimas ecuaciones y sustituyan en la primera. El resultado es $I_1 = I_2 = 2,\ I_3 = 0$.

5.4. Supongamos que en un circuito como el anterior hubiéramos obtenido I_3 = –2. ¿Qué indicaría esta solución?

Indicaría que el sentido es opuesto al que habíamos marcado en el esquema.

5.5. Cada año, un gran número de personas sufren accidentes relacionados con la electricidad, tanto domésticos como laborales. ¿Qué podemos hacer para ayudar a alguien que se está electrocutando? ¿Cómo se pueden prevenir estos accidentes? Busca información y realiza un breve resumen.

Respuesta abierta. Lo más importante es no tocar a la víctima, ya que también nos electrocutaríamos y tratar de cortar la corriente. Las medidas preventivas dependen de la situación. Hay algunas comunes, como no desconectar aparatos tirando del cable, o tener cuidado con la humedad al trabajar con aparatos eléctricos.

Analiza y deduce > ¡Qué pesados!

Cinco amigos han salido a dar una vuelta. Al pasar por una farmacia, deciden entrar a pesarse, simplemente para pasar el rato. Como tienen ganas de jugar, deciden no subirse a la báscula de uno en uno, como sería normal, sino de dos en dos, de todas las formas posibles. Los pesos que han obtenido han sido 102, 105, 107, 108, 110, 112, 113, 114, 117 y 120 kg.

El farmacéutico, que lleva un rato vigilando lo que hacen, les echa la bronca.

– ¡Dejad de hacer el ganso! Vaya forma de perder el tiempo… ¿Cuántas veces os habéis pesado para nada?

– ¡No es cierto! Ahora podemos saber cuánto pesa cada uno **– responde Alicia.**

– ¿Me estás tomando el pelo? Como no seáis capaces de decirlo, voy a llamar a vuestras casas, ¡y ya veréis lo que es bueno!

Pero los amigos tienen un problema: ya no recuerdan qué peso correspondía a cada pareja. ¿Podrán averiguar el peso de cada uno de ellos sin más datos?

5.1. **¿Cuántas veces se ha subido a la báscula cada amigo?**

Suma ahora todos los resultados que han obtenido. Sabiendo eso, ¿cuánto pesarían los cinco juntos?

Cada amigo subió cuatro veces. Como la suma de todos los resultados es 1108, el peso de los cinco juntos es 1108 : 4 = 277.

5.2. **Los cinco amigos son capaces de ordenarse por pesos, de menor a mayor. Casualmente (estas cosas solo ocurren en los problemas), el orden coincide con el orden alfabético. Así, el orden es Alicia - Beatriz - Carlos - David - Enrique.**

¿Podrías decir cuánto pesan las dos chicas juntas?

Como son las dos más ligeras, juntas pesan 102 kg.

5.3. **¿Cuánto pesan David y Enrique juntos? ¿Sabes ya lo que pesa Carlos?**

David y Enrique son los dos más pesados, luego suman 120 kg. Ya sabemos lo que suman los pesos de todos menos Carlos, así que es fácil hallar este dato: Carlos pesa 277 – 120 – 102 = 55 kg.

5.4. **¿Podemos saber cuánto pesan Alicia y Carlos juntos? ¿Y Carlos y Enrique juntos? ¿Por qué?**

El peso de Alicia y Carlos es 105, el segundo más pequeño. Quitando la pareja Alicia - Beatriz, para cualquier pareja que coja el amigo más ligero pesará lo mismo que Alicia o más, y el más pesado, quitando a Beatriz, pesará lo mismo que Carlos o más. El peso mínimo se da para la pareja indicada. De la misma forma, Carlos y Enrique suman 117 kg.

5.5. **Termina de calcular el peso de cada uno de ellos.**

Usando lo anterior, los pesos ordenados son 50, 52, 55, 58 y 62 kg.

5.6. **Llamando *A*, *B*, *C*, *D* y *E* a los pesos correspondientes, el problema podría escribirse usando un sistema de ecuaciones. Como ya sabes cuáles son las soluciones, trata de escribir el sistema (10 ecuaciones y 5 incógnitas).**

$$\begin{cases} A+B=102 & A+C=105 & A+D=108 & A+E=112 \\ & B+C=107 & B+D=110 & B+E=114 \\ & & C+D=113 & C+E=117 \\ & & & D+E=120 \end{cases}.$$

Juega con números > Pasatiempo matemático

En algunos periódicos aparecen pasatiempos como el de la derecha. Cada símbolo representa un número natural de una cifra distinto, y hay que conseguir que las sumas por filas y por columnas sean las que se indican.

El problema se puede empezar a resolver mediante un sistema de ecuaciones, aunque con un poco de vista es fácil encontrar la solución con menos trabajo.

A	*B*	*C*	**6**
D	*D*	*D*	**15**
C	*B*	*E*	**13**
10	**7**	**17**	

5.1. **Escribe el sistema correspondiente.**

$$\begin{cases} A+B+C=6 & 3D=15 & C+B+E=13 \\ A+D+C=10 & 2B+D=7 & C+D+E=17 \end{cases}$$

5.2. **Encuentra la solución usando el método que prefieras. El sistema anterior te puede servir de ayuda. ¡Fíjate bien en las condiciones que deben cumplir los números!**

Como $D = 5$, es fácil hallar que $B = 1$.

A partir de aquí, falta hallar A, C y E. Como $A + C = 5$, A y C pueden ser 2 y 3 o 3 y 2. Ahora bien, como $C + E = 12$, C no puede ser 2 (E valdría 10).

Por lo tanto, $A = 2$, $C = 3$, $E = 9$.

5.3. **¿Conoces algún pasatiempo relacionado con las matemáticas? Cuéntaselo a tus compañeros.**

Respuesta abierta.

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Antonia Aranda, Rafaela Arévalo, Juan Jesús Donaire, Vanesa Fernández, Joaquín Hernández, Juan Carlos Hervás, Miguel Ángel Ingelmo, Cristóbal Merino, María Moreno; Miguel Nieto, Isabel de los Santos, Esteban Serrano, Yolanda A. Zárate**

Edición: **Oiana García, Inmaculada Fernández, Aurora Bellido**

Revisión contenidos solucionario: **Juan Jesús Donaire**

Corrección: **Javier López**

Ilustración: **Modesto Arregui, Estudio "Haciendo el león", Jurado y Rivas, Félix Anaya, Juan Francisco Cobos, José Santos, José Manuel Pedrosa**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

(*) Una pequeña cantidad de ejercicios o apartados han sido marcados porque contienen alguna corrección en su enunciado respecto al que aparece en el libro del alumno.