## EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1 **Indica, sin realizar la división, el tipo de expresión decimal de estos números.**

**a)** $\frac{11}{6}$ **b)** $\frac{19}{33}$ **c)** $\frac{27}{14}$ **d)** $\frac{77}{50}$

a) $\frac{11}{6} \rightarrow$ Periódico mixto

b) $\frac{19}{33} \rightarrow$ Periódico puro

c) $\frac{27}{14} \rightarrow$ Periódico mixto

d) $\frac{77}{50} \rightarrow$ Decimal exacto

1.2 **Señala cuáles de los siguientes números decimales no son periódicos.**

**a) 1,7 17 117 1117…**

**b) 3,012351235123…**

**c)** $\sqrt{5} = 2{,}2360679774\ldots$

**d) 8,163264128256…**

a) No es periódico.

b) Sí es periódico.

c) No es periódico.

d) No es periódico.

1.3 **Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales.**

**a)** $-0{,}1234567891011\ldots$

**b)** $\sqrt{6} = 2{,}4494897427\ldots$

**c) 8,023023023…**

**d)** $\sqrt[3]{8} = 2$

a) Irracional

b) Irracional

c) Racional

d) Racional

1.4 **El laboratorio de ciencias es una clase rectangular de 8 metros de largo por 7 de ancho. Indica alguna medida en la clase que no pueda expresarse mediante números racionales.**

La diagonal del rectángulo: $d = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{113}$ m

1.5 **Dado el número 53,2647, escribe:**

**a) Las mejores aproximaciones por defecto y por exceso, y los redondeos con una, dos y tres cifras decimales.**

**b) Los errores absolutos y relativos asociados a los redondeos.**

a) Con una cifra decimal: $\begin{cases} \text{Exceso} \rightarrow 53{,}3 \\ \text{Defecto} \rightarrow 53{,}2 \\ \text{Redondeo} \rightarrow 53{,}3 \end{cases}$

Con dos cifras decimales: $\begin{cases} \text{Exceso} \rightarrow 53{,}27 \\ \text{Defecto} \rightarrow 53{,}26 \\ \text{Redondeo} \rightarrow 53{,}26 \end{cases}$

Con tres cifras decimales: $\begin{cases} \text{Exceso} \rightarrow 53{,}265 \\ \text{Defecto} \rightarrow 53{,}264 \\ \text{Redondeo} \rightarrow 53{,}265 \end{cases}$

b) E. abs. asociado a 53,3: $|53{,}3 - 53{,}2647| = 0{,}0353$ E. rel. asociado a 53,3: $\dfrac{0{,}0353}{53{,}2647} = 0{,}0007$

E. abs. asociado a 53,26: $|53{,}26 - 53{,}2647| = 0{,}0047$ E. rel. asociado a 53,26: $\dfrac{0{,}0047}{53{,}2647} = 8{,}8238 \cdot 10^{-5}$

E. abs. asociado a 53,265: $|53{,}265 - 53{,}2647| = 0{,}0003$ E. rel. asociado a 53,265: $\dfrac{0{,}0003}{53{,}2647} = 5{,}6322 \cdot 10^{-6}$

**1.6 Una buena aproximación al número $\pi$ es la fracción $\dfrac{22}{7}$. Si una fuente circular mide 12 metros de radio, ¿qué errores absoluto y relativo cometemos al medir su circunferencia tomando esta aproximación de $\pi$?**

$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}1415 \cdot 12 = 75{,}396$ m

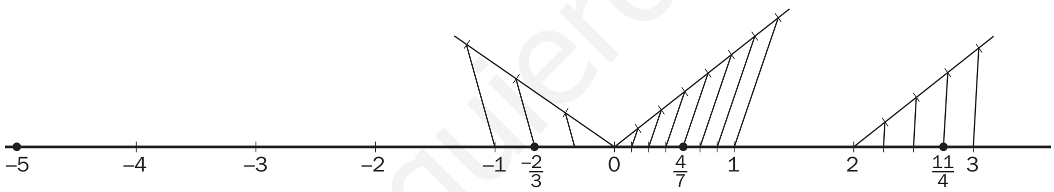
Si aproximamos $\pi$ por $\dfrac{22}{7}$, tenemos que $L = 75{,}4272$ m.

Error absoluto: $|75{,}3960 - 75{,}4272| = 0{,}0312$ Error relativo: $\dfrac{0{,}0312}{75{,}3960} = 0{,}0004138$

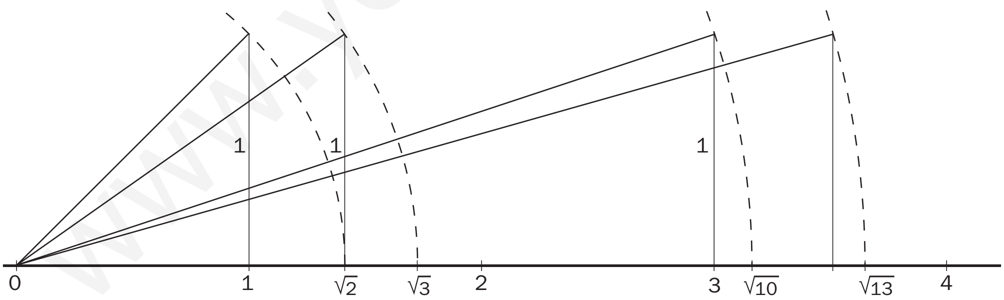
**1.7 Representa en la recta real estos números.**

**a) $-5, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{7}$ y $\dfrac{11}{4}$** **b) $\sqrt{3}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$ y $2\pi$**

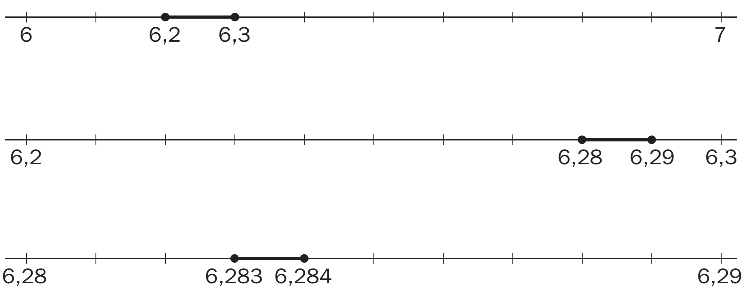
a)




b)




$2\pi = 6{,}283$



**1.8 Realiza las siguientes operaciones en donde aparecen valores absolutos.**

**a)** $\left||-4| + (-4)\right|$ **b)** $\left||-7| \cdot |2| - |-3|\right|$

a) $\left||-4| + (-4)\right| = |4 - 4| = 0$

b) $\left||-7| \cdot |2| - |-3|\right| = |7 \cdot 2 - 3| = |14 - 3| = 11$

**1.9 Expresa de otras dos formas estos intervalos, e identifica cuáles son entornos.**

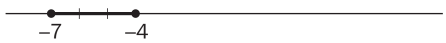
**a)** $(3, 9]$ **b)** $-2 < x < 9$ **c)** $[-7, -4]$

a) $(3, 9] \rightarrow 3 < x \leq 9 \rightarrow$ 

No es un entorno.

b) $-2 < x < 9 \rightarrow (-2, 9) \rightarrow$ 

Es un entorno abierto.

c) $[-7, -4] \rightarrow -7 \leq x \leq -4 \rightarrow$ 

Es un entorno cerrado.

**1.10 Calcula el radio y el centro de estos entornos.**

**a)** $(-5, 5)$ **c)** $|x - 1| < 6$

**b)** $[-1, 7]$ **d)** $|x + 1| \leq 3$

Sea $a$ = centro y $r$ = radio.

a) $(-5, 5)$: $a = \dfrac{-5 + 5}{2} = 0$ $r = \dfrac{5 - (-5)}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

b) $(-1, 7)$: $a = \dfrac{-1 + 7}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ $r = \dfrac{7 - (-1)}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

c) $|x - 1| < 6$: $a = 1$ $r = 6$

d) $|x + 1| \leq 3$: $a = -1$ $r = 3$

**1.11 Realiza estas operaciones expresando el resultado como una única potencia.**

**a)** $3^3 \cdot 3^{-2} \cdot 3$

**b)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$

**c)** $3^5 \cdot 3^{-3} : 3^{-2}$

**d)** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^0 : \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$

**e)** $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1} \cdot 2^{-2}$

**f)** $(4^2)^2 \cdot 4^{-1} : 4 \cdot 4^3$

a) $3^3 \cdot 3^{-2} \cdot 3 = 3^2$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} = \dfrac{3}{2}$

c) $3^5 \cdot 3^{-3} : 3^{-2} = 3^4$

d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^0 : \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^5$

e) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1} \cdot 2^{-2} = \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

f) $(4^2)^2 \cdot 4^{-1} : 4 \cdot 4^3 = 4^5$

**1.12 Expresa en notación científica estas cantidades.**

**a) Longitud de un paramecio: 0,000025 metros**

**b) Edad del universo: 15000 millones de años**

a) $2,5 \cdot 10^{-5}$

b) $1,5 \cdot 10^{10}$

**1.13 Calcula:**

**a) $3,62 \cdot 10^{12} - 2,4 \cdot 10^{12}$**

**b) $2,45 \cdot 10^{8} + 6,12 \cdot 10^{7}$**

**c) $(4,35 \cdot 10^{8}) \cdot (2,1 \cdot 10^{7})$**

**d) $(4,6 \cdot 10^{17}) : (8 \cdot 10^{12})$**

a) $3,62 \cdot 10^{12} - 2,4 \cdot 10^{12} = 1,22 \cdot 10^{12}$

b) $2,45 \cdot 10^{8} + 6,12 \cdot 10^{7} = 24,5 \cdot 10^{7} + 6,12 \cdot 10^{7} = 30,62 \cdot 10^{7}$

c) $(4,35 \cdot 10^{8}) \cdot (2,1 \cdot 10^{7}) = 9,135 \cdot 10^{15}$

d) $(4,6 \cdot 10^{17}) : (8 \cdot 10^{12}) = 0,575 \cdot 10^{5} = 5,75 \cdot 10^{4}$

**1.14 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los siguientes radicales.**

**a) $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[10]{5}$**

**b) 3, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{3}$**

a) $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[10]{5}$ → Reducimos a índice común los radicales: $\sqrt[10]{3^5}$, $\sqrt[10]{2^2}$, $\sqrt[10]{5}$

Ordenamos de menor a mayor: $\sqrt[10]{2^2} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[10]{3^5} \Rightarrow \sqrt[5]{2} < \sqrt[10]{5} < \sqrt{3}$

b) 3, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{3}$ → Reducimos a índice común los radicales: $\sqrt[6]{3^6}$, $\sqrt[6]{2^3}$, $\sqrt[6]{5^2}$, $\sqrt[6]{3}$

Ordenamos de menor a mayor: $\sqrt[6]{3} < \sqrt[6]{2^3} < \sqrt[6]{5^2} < \sqrt[6]{3^6} \Rightarrow \sqrt[6]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{5} < 3$

**1.15 Indica cuántas raíces tienen los siguientes números y calcúlalas cuando sea posible.**

**a) $\sqrt{0,49}$**

**b) $\sqrt[3]{216}$**

**c) $\sqrt{-4}$**

**d) $\sqrt[3]{-125}$**

a) $\sqrt{0,49}$ Tiene dos raíces reales: $+0,7$ y $-0,7$.

b) $\sqrt[3]{216}$ Tiene una raíz real: 6.

c) $\sqrt{-4}$ No tiene raíces reales.

d) $\sqrt[3]{-125}$ Tiene una raíz real: $-5$.

**1.16 De los siguientes pares de potencias, ¿cuáles son equivalentes?**

**a) $21^{\frac{1}{5}}$, $21^{\frac{2}{10}}$**

**b) $13^{\frac{5}{8}}$, $13^{\frac{6}{7}}$**

**c) $7^{\frac{2}{4}}$, $7^{\frac{15}{30}}$**

**d) $10^{\frac{2}{3}}$, $10^{0,666...}$**

a) $21^{\frac{1}{5}}$, $21^{\frac{2}{10}}$ → Sí son equivalentes.

b) $13^{\frac{5}{8}}$, $13^{\frac{6}{7}}$ → No son equivalentes.

c) $7^{\frac{2}{4}}$, $7^{\frac{15}{30}}$ → Sí son equivalentes.

d) $10^{\frac{2}{3}}$, $10^{0,666...}$ → Sí son equivalentes.

**1.17 Expresa los siguientes radicales como potencias y, si es posible, simplifícalas.**

**a)** $\sqrt[3]{64}$

**b)** $\sqrt{27}$

**c)** $\sqrt[4]{49}$

**d)** $\sqrt[6]{4096}$

a) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$

c) $\sqrt[4]{49} = \sqrt[4]{7^2} = 7^{\frac{2}{4}} = 7^{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[6]{4096} = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{6}} = 2^2$

**1.18 Escribe tres potencias equivalentes a:**

**a)** $3^{\frac{1}{2}}$

**b)** $7^{\frac{1}{5}}$

a) $3^{\frac{1}{2}} \rightarrow 3^{\frac{2}{4}}, 3^{\frac{3}{6}}, 3^{\frac{5}{10}}$

b) $7^{\frac{1}{5}} \rightarrow 7^{\frac{2}{10}}, 7^{\frac{3}{15}}, 49^{\frac{1}{10}}$

**1.19 Expresa como radicales estas potencias.**

**a)** $16^{\frac{2}{3}}$

**b)** $125^{\frac{2}{4}}$

**c)** $81^{\frac{3}{5}}$

**d)** $100^{\frac{5}{2}}$

a) $16^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16^2} = \sqrt[3]{2^8}$

b) $125^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{125^2} = \sqrt[4]{5^6}$

c) $81^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{81^3} = \sqrt[5]{3^{12}}$

d) $100^{\frac{5}{2}} = \sqrt{100^5}$

**1.20 Los lados de tres cuadrados miden, respectivamente, $5^{\frac{1}{4}}$, $5^{\frac{1}{6}}$ y $5^{\frac{2}{3}}$ metros. Ordénalos de menor a mayor según sus correspondientes áreas.**

Reduciendo los exponentes de las potencias a común denominador: $5^{\frac{3}{12}}, 5^{\frac{2}{12}}, 5^{\frac{8}{12}}$.

Entonces: $5^{\frac{2}{12}} < 5^{\frac{3}{12}} < 5^{\frac{8}{12}} \rightarrow 5^{\frac{1}{6}} < 5^{\frac{1}{4}} < 5^{\frac{2}{3}}$

**1.21 Haz las siguientes operaciones.**

**a)** $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{3}$

**b)** $\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2}$

**c)** $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{2}$

**d)** $\sqrt[3]{10} : \sqrt{5}$

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{144} = 12$

b) $\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{3^5 \cdot 2^3} = \sqrt[15]{1944}$

d) $\sqrt[3]{10} : \sqrt{5} = \sqrt[6]{10^2 : 5^3} = \sqrt[6]{0{,}8}$

**1.22 Realiza las operaciones siguientes.**

**a)** $\sqrt[10]{4} \cdot \sqrt[5]{9} : \sqrt{3}$

**b)** $\left(\sqrt[3]{2^2}\right)^2$

**c)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$

**d)** $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}}\right)^2$

a) $\sqrt[10]{4} \cdot \sqrt[5]{9} : \sqrt{3} = \sqrt[10]{4 \cdot 9^2 : 3^5} = \sqrt[10]{\dfrac{4}{3}}$

b) $\left(\sqrt[3]{2^2}\right)^2 = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$

d) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}}\right)^2 = \left(\sqrt[9]{3^3}\right)^2 = \sqrt[9]{3^6} = \sqrt[3]{3^2}$

**1.23 Simplifica extrayendo factores.**

**a)** $\sqrt{180}$

**b)** $\sqrt[4]{162}$

**c)** $\sqrt[3]{72}$

**d)** $\sqrt[3]{24\,000}$

a) $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

b) $\sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{2 \cdot 3^4} = 3\sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{3^2}$

d) $\sqrt[3]{24\,000} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3 \cdot 5^3} = 2^2 \cdot 5\sqrt[3]{3} = 20\sqrt[3]{3}$

**1.24 Introduce los factores enteros en los radicales.**

**a)** $2\sqrt{5}$

**b)** $11\sqrt{7}$

**c)** $10\sqrt[3]{2}$

**d)** $5\sqrt[4]{2}$

a) $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$

b) $11\sqrt{7} = \sqrt{11^2 \cdot 7} = \sqrt{847}$

c) $10\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2000}$

d) $5\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{1250}$

**1.25 Opera y simplifica.**

**a)** $\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{50}$

**b)** $\sqrt{20} - 6\sqrt{45} + \sqrt{80}$

**c)** $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} + 3\sqrt[4]{48}$

a) $\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + 3\sqrt[3]{3^2 \cdot 2} - \sqrt[3]{5^2 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3^2 \cdot 2} - \sqrt[3]{5^2 \cdot 2}$

b) $\sqrt{20} - 6\sqrt{45} + \sqrt{80} = \sqrt{2^2 \cdot 5} - 6\sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} - 18\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = -12\sqrt{5}$

c) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} + 3\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{2^5} + \sqrt[4]{2 \cdot 3^4} + 3\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{2} + 3\sqrt[4]{2} + 6\sqrt[4]{3} = 5\sqrt[4]{2} + 6\sqrt[4]{3}$

**1.26 Racionaliza las siguientes expresiones.**

**a)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

**b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{12}}$

**c)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{72}}$

**d)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{200}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{12}} = \dfrac{\sqrt[3]{12^2}}{12} = \dfrac{\sqrt[3]{2^4 . 3^2}}{12} = \dfrac{\sqrt[3]{18}}{6}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{72}} = \dfrac{\sqrt[4]{72^3}}{72} = \dfrac{\sqrt[4]{2^9 \cdot 3^6}}{72} = \dfrac{4 \cdot 3\sqrt[4]{18}}{72} = \dfrac{\sqrt[4]{18}}{6}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{200}} = \dfrac{\sqrt[4]{200^3}}{200} = \dfrac{\sqrt[4]{2^9 \cdot 5^6}}{200} = \dfrac{4 \cdot 5\sqrt[4]{50}}{200} = \dfrac{\sqrt[4]{50}}{10}$

**1.27 Racionaliza y simplifica.**

**a)** $\dfrac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ **c)** $\dfrac{1}{1 - \sqrt{2}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{9} + \sqrt{15}}{3 - 5} = \dfrac{3 + \sqrt{15}}{-2}$

c) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{2}} = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{1 - 2} = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{-1} = -1 - \sqrt{2}$

**1.28 Calcula los siguientes logaritmos.**

**a) En base 2 de 4, 16, 64, 256, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$**

**b) En base 3 de 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$**

a) $\log_2 4 = 2$ $\qquad \log_2 \dfrac{1}{2} = -1$

$\log_2 16 = 4$ $\qquad \log_2 \dfrac{1}{4} = -2$

$\log_2 64 = 6$

$\log_2 256 = 8$

b) $\log_3 27 = 3$ $\qquad \log_3 \dfrac{1}{3} = -1$

$\log_3 9 = 2$ $\qquad \log_3 \dfrac{1}{9} = -2$

$\log_3 3 = 1$

$\log_3 1 = 0$

**1.29 Usando la definición de logaritmo, halla *x*.**

**a)** $\log_x 36 = 2$  **b)** $-2 = \log_x \frac{1}{25}$  **c)** $-\frac{1}{3} = \log_{27} x$

a) $\log_x 36 = 2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 6^2 \Rightarrow x = 6$

b) $-2 = \log_x \frac{1}{25} \Rightarrow x^{-2} = \frac{1}{25} \Rightarrow x^{-2} = 5^{-2} \Rightarrow x = 5$

c) $-\frac{1}{3} = \log_{27} x \Rightarrow 27^{-\frac{1}{3}} = x \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

**1.30 Sin calculadora, halla la primera cifra de los logaritmos decimales de 5100; 823; 50; 0,32; 12 315; −3; 0,0023; 7 y 0,000 03.**

$\log 5100 = 3,...$

$\log 823 = 2,...$

$\log 50 = 1,...$

$\log 0,32 = -0,4,...$

$\log 12\,315 = 4,...$

$\log -3$ no existe.

$\log 0,0023 = -2,...$

$\log 7 = 0,8,...$

$\log 0,000\,03 = -4,....$

**1.31 Sabiendo que log 5 = 0,7, calcula:**

**a)** $\log 0,125$

**b)** $\log 2$

**c)** $\log 500$

**d)** $\log \sqrt[3]{25}$

a) $\log 0,125 = \log \frac{125}{1000} = \log \frac{5^3}{1000} = 3 \log 5 - \log 1000 = 3 \cdot 0,7 - 3 = 2,1 - 3 = -0,9$

b) $\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - 0,7 = 0,3$

c) $\log 500 = \log (5 \cdot 100) = \log 5 + \log 100 = 0,7 + 2 = 2,7$

d) $\log \sqrt[3]{25} = \log 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log 5 = \frac{2}{3} \cdot 0,7 = \frac{1,4}{3} = 0,4\widehat{6}$

**1.32 Mediante un cambio de base y la calculadora, halla:**

**a)** $\log_3 20$

**b)** $\log_5 15$

**c)** $\log_{0,5} 10$

**d)** $\log_{0,1} 2$

**e)** $\log_4 11$

**f)** $\log_7 60$

a) $\log_3 20 = \frac{\log 20}{\log 3} = 2,7268$

b) $\log_5 15 = \frac{\log 15}{\log 5} = 1,6826$

c) $\log_{0,5} 10 = \frac{\log 10}{\log 0,5} = -3,3219$

d) $\log_{0,1} 2 = \frac{\log 2}{\log 0,1} = -0,3010$

e) $\log_4 11 = \frac{\log 11}{\log 4} = 1,7297$

f) $\log_7 60 = \frac{\log 60}{\log 7} = 2,1041$

1.33 **Toma logaritmos en estas expresiones.**

**a)** $A = \dfrac{100bc^3}{\sqrt{d}}$

**b)** $B = \dfrac{x^2 y}{10\sqrt[3]{z}}$

a) $A = \dfrac{100bc^3}{\sqrt{d}} \Rightarrow \log A = \log 100bc^3 - \log\sqrt{d} = \log 100 + \log b + 3\log c - \dfrac{1}{2}\log d$

b) $B = \dfrac{x^2 y}{10\sqrt[3]{z}} \Rightarrow \log B = \log x^2 y - \log 10\sqrt[3]{z} = 2\log x + \log y - \log 10 - \dfrac{1}{3}\log z$

1.34 **Toma antilogaritmos en estas expresiones.**

**a)** $\log A = 3\log b + \log c - 2$

**b)** $\log B = 4\log x - \log y - \dfrac{\log z}{3}$

Tomando antilogaritmos se tiene que:

a) $A = \dfrac{b^3 \cdot c}{100}$

b) $B = \dfrac{x^4}{y \cdot \sqrt[3]{z}}$

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1.35 **Demuestra la igualdad siguiente, siendo *n* cualquier número natural.**

**$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$**

Para $n = 1$ es cierta.

Veamos que si se cumple para un valor $n$, también se cumple para el siguiente, $n + 1$.

Deberíamos obtener $2^{n+2} - 1$.

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = \underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n)}_{2^{n+1}-1} + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1,$$

como queríamos demostrar.

**1.36** **Demuestra la igualdad siguiente, siendo *n* cualquier número natural.**

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n - 1)\, n} = \frac{n - 1}{n}$$

Para $n = 2$ es cierta.

Suponemos que es cierta para $n + 1$ y comprobamos que lo es para $n + 2$. Deberíamos obtener $\frac{n + 1}{n + 2}$.

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\,(n + 1)}}_{\frac{n}{n+1}} + \frac{1}{(n + 1)\,(n + 2)} =$$

$$= \frac{n}{n + 1} + \frac{1}{(n + 1)\,(n + 2)} =$$

$$= \frac{n\,(n + 2)}{(n + 1)\,(n + 2)} + \frac{1}{(n + 1)\,(n + 2)} =$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n + 1)\,(n + 2)} =$$

$$= \frac{(n + 1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n + 1)}\,(n + 2)} =$$

$$= \frac{n + 1}{n + 2}$$

Por tanto, la igualdad es cierta.

# A C T I V I D A D E S

## E J E R C I C I O S P A R A E N T R E N A R S E

### Números reales y aproximaciones

**1.37** **Indica qué tipo de expresión decimal tienen los siguientes números.**

**a)** $\frac{7}{20}$

**b)** $\frac{8}{11}$

**c)** $\frac{11}{18}$

**d)** $\frac{13}{35}$

a) $\frac{7}{20} = 0{,}35 \rightarrow$ Decimal exacto

b) $\frac{8}{11} = 0{,}\widehat{72} \rightarrow$ Decimal periódico puro

c) $\frac{11}{18} = 0{,}6\widehat{1} \rightarrow$ Decimal periódico mixto

d) $\frac{13}{35} = 0{,}3\widehat{714285} \rightarrow$ Decimal periódico mixto

1.38 **Copia y completa la tabla escribiendo estos números en todos los conjuntos numéricos a los que puedan pertenecer.**

$\frac{3}{5}$; $-\sqrt{2}$; 1,2525...; 2,010010001...; −4; $0,1\widehat{6}$

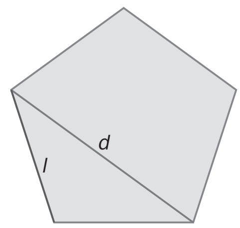
| | |
|---|---|
| **Naturales (N)** | |
| **Enteros (Z)** | |
| **Racionales (Q)** | |
| **Reales (R)** | |

| | |
|---|---|
| Naturales (**N**) | |
| Enteros (**Z**) | −4 |
| Racionales (**Q**) | −4; $\frac{3}{5}$; 1,2525…; $0,1\widehat{6}$ |
| Reales (**R**) | Todos |

1.39 **La relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado se llama número de oro o áureo, y se designa por $\phi$. Su valor es $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$**

**¿Es irracional? ¿Por qué?**

**Calcula una aproximación por defecto con un error menor que una centésima.**




Sí es irracional, ya que al ser $\sqrt{5}$ irracional, entonces $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ también lo es.

$\phi = 1,61$

1.40 **¿Qué errores absoluto y relativo se cometen cuando se aproxima 4,1592 por 4,16?**

Error absoluto $= |4,1592 - 4,16| = 0,0008$

Error relativo $= \frac{0,0008}{4,16} = 0,0002$

1.41 **¿Cuántos números reales existen comprendidos entre 5,187 246 y 5,187 247? Escribe tres de ellos.**

Existen infinitos números reales entre ambos, por ejemplo: 5,187 246 1; 5,187 246 2; 5,187 246 3.

1.42 **Indica si los siguientes números son racionales o irracionales.**

**a) 5,372 727 272…**

**b) 0,127 202 002 000…**

**c) 3,545 445 444 5…**

**d) 8,666 126 712 67…**

a) Racional

b) Irracional

c) Irracional

d) Racional

**1.43 Rellena los recuadros vacíos con $<$ o $>$ según sea necesario en cada caso.**

**a)** $\frac{1}{6} \square 0{,}166\,667$

**b)** $1{,}732\,051 \square \sqrt{3}$

**c)** $1{,}333\,334 \square \frac{4}{3}$

**d)** $\sqrt[3]{5} \square 1{,}709\,976$

a) $\frac{1}{6} < 0{,}166\,667$

b) $1{,}732\,051 > \sqrt{3}$

c) $1{,}333\,334 > \frac{4}{3}$

d) $\sqrt[3]{5} < 1{,}709\,976$

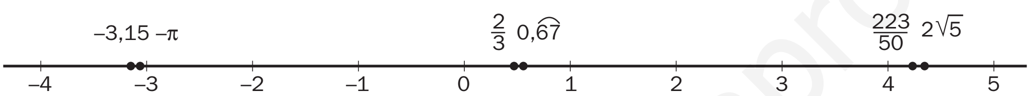
**1.44 Ordena de menor a mayor y representa gráficamente los siguientes números reales.**

$$-\pi;\ 2\sqrt{5};\ \frac{2}{3};\ \frac{223}{50};\ -3{,}15;\ 0{,}\widehat{67}$$

Necesitamos tener la aproximación decimal de cada uno de los números:

$$-\pi = -3{,}14159\ldots\ 2\sqrt{5} = 4{,}4721\ldots\ \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots\ \frac{223}{50} = 4{,}46 \Rightarrow -3{,}15 < -\pi < \frac{2}{3} < 0{,}\widehat{67} < \frac{223}{50} < 2\sqrt{5}$$

Utilizando la aproximación decimal anterior, representamos gráficamente los números:




**1.45 Realiza las siguientes operaciones.**

**a)** $|-7 + 2|$

**b)** $||-5| - |-8||$

**c)** $||-9| + |2|\,|-5||$

**d)** $|-9||5 - 3| - |-4| : |-2|$

a) $|-7 + 2| = 5$

b) $||-5| - |-8|| = 3$

c) $||-9| + |2|\,|-5|| = 19$

d) $|-9||5 - 3| - |-4| : |-2| = 16$

## Intervalos, semirrectas y entornos

**1.46 Expresa mediante desigualdades y también gráficamente en la recta real los siguientes intervalos y semirrectas.**

**a)** $[-1, +\infty)$

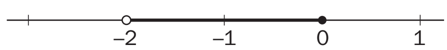
**b)** $(-2, 0]$

**c)** $(-\infty, 3)$

**d)** $[4, 8]$

a) $[-1, +\infty) \rightarrow x \geq -1 \rightarrow$


b) $(-2, 0] \rightarrow -2 < x \leq 0 \rightarrow$




c) $(-\infty, 3) \rightarrow x < 3 \rightarrow$


d) $[4, 8] \rightarrow 4 \leq x \leq 8 \rightarrow$

1.47 **Señala si las siguientes igualdades son verdaderas o no.**

**a)** $E[1, 2] = [-1, 3]$

**b)** $E(0, 1) = [-1, 1]$

**c)** $E(-2, 3) = (-5, 0)$

**d)** $E(4, 2) = (3, 5]$

a) Verdadera

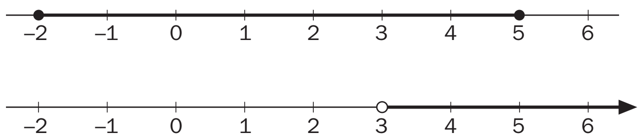
b) Falsa

c) Falsa

d) Falsa

1.48 **Representa en la recta real el intervalo $A = [-2, 5]$ y la semirrecta $B = (3, +\infty)$.**

**¿Existe algún intervalo de puntos común a ambos? En caso afirmativo, hállalo.**




Sí existe intervalo común a ambos: (3, 5].

## Potencias de exponente entero. Notación científica

1.49 **Escribe los siguientes números como potencias cuya base sea un número primo.**

**a)** **8, 125, 243, 1024, 2401**

**b)** $\frac{1}{625}, \frac{1}{343}, \frac{1}{256}, \frac{1}{81}, \frac{1}{32}$

a) $8 = 2^3$ ; $125 = 5^3$ ; $243 = 3^5$ ; $1024 = 2^{10}$ ; $2401 = 7^4$

b) $\frac{1}{625} = 5^{-4}$ ; $\frac{1}{343} = 7^{-3}$ ; $\frac{1}{256} = 2^{-8}$ ; $\frac{1}{81} = 3^{-4}$ ; $\frac{1}{32} = 2^{-5}$

1.50 **Haz estas operaciones con potencias.**

**a)** $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1}$

**b)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2$

**c)** $5^{-3}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^2$

a) $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1} = 1$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 = 3$

c) $5^{-3}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^2 = 5$

1.51 **Escribe en notación científica los números:**

**a)** **5 182 000 000 000**

**b)** **0,000 000 000 369**

**c)** **835 000 000 000 000**

**d)** **0,000 000 000 003 51**

**¿Cuál tiene un orden de magnitud superior?**

a) $5,182 \cdot 10^{12}$

b) $3,69 \cdot 10^{-10}$

c) $8,35 \cdot 10^{14}$

d) $3,51 \cdot 10^{-12}$

Tiene mayor orden de magnitud el c.

## Radicales. Potencias de exponente fraccionario

**1.52 Ordena de mayor a menor estos radicales.**

**a)** $3, \sqrt{10}, \sqrt[3]{26}$

**b)** $\sqrt{2}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{12}$

a) $\sqrt{10} > 3 > \sqrt[3]{26}$

b) $\sqrt[5]{12} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2}$

**1.53 Calcula el valor de las siguientes potencias.**

**a)** $25^{\frac{3}{2}}$

**b)** $343^{\frac{2}{3}}$

**c)** $16^{0,25}$

**d)** $27^{0,3333...}$

a) $25^{\frac{3}{2}} = 125$

b) $343^{\frac{2}{3}} = 49$

c) $16^{0,25} = 2$

d) $27^{0,3333...} = 3$

**1.54 Efectúa las siguientes operaciones.**

**a)** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27}$

**b)** $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200}$

**c)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{392}$

**d)** $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108}$

**e)** $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4}$

**f)** $\sqrt{12} : \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[6]{2}$

**g)** $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}}$

**h)** $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2$

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{6^3} = \sqrt{216}$

b) $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{2^6 : 5^2} = \sqrt[3]{\frac{2^6}{5^2}}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{392} = \sqrt[15]{2^{19} \cdot 7^6}$

d) $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108} = \sqrt[4]{\frac{3}{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$

e) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{2^{-5}}$

f) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}} = \sqrt[4]{2}$

h) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2 = 4$

## Radicales semejantes. Racionalización

**1.55 Opera y simplifica.**

**a)** $2\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - \sqrt{80}$

**b)** $4\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

**c)** $\sqrt{27} - 2\sqrt{32} + \sqrt{180}$

**d)** $3\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} - 5\sqrt[3]{375}$

a) $9\sqrt{5}$

b) $13\sqrt[3]{2}$

c) $3\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 6\sqrt{5}$

d) $-14\sqrt[3]{3}$

**1.56 Racionaliza las siguientes expresiones.**

**a)** $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}$ **e)** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

**b)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$ **d)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

a) $2\sqrt{2}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$ e) $-3-2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{9}$ d) $\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$ f) $-2-\sqrt{6}$

## Logaritmo de un número. Propiedades

**1.57 Calcula los siguientes logaritmos.**

**a)** $\log_2 32$ $\log_3 729$ $\log_{10} 1\,000\,000$

**b)** $\log_2 \dfrac{1}{16}$ $\log_3 \dfrac{1}{81}$ $\log_{10} \dfrac{1}{1000}$

**c)** $\log_2 \sqrt{8}$ $\log_3 \sqrt[3]{243}$ $\log_{10} \sqrt[5]{100}$

**d)** $\log_{\frac{1}{2}} 32$ $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27}$ $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100\,000}$

a) $\log_2 32 = 5$ $\log_3 729 = 6$ $\log_{10} 1\,000\,000 = 6$

b) $\log_2 \dfrac{1}{16} = -4$ $\log_3 \dfrac{1}{81} = -4$ $\log_{10} \dfrac{1}{1000} = -3$

c) $\log_2 \sqrt{8} = \dfrac{3}{2}$ $\log_3 \sqrt[3]{243} = \dfrac{5}{3}$ $\log_{10} \sqrt[5]{100} = \dfrac{2}{5}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$ $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27} = 3$ $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100\,000} = \dfrac{-5}{3}$

**1.58 Encuentra el valor de *x*.**

**a)** $\log_x 125 = 3$ **c)** $\log_x \dfrac{1}{16} = -8$

**b)** $-3 = \log_x 2$ **d)** $-\dfrac{1}{3} = \log_{27} x$

a) $x = 5$ c) $x = \sqrt{2}$

b) $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ d) $x = \dfrac{1}{3}$

**1.59 Si log 8 = 0,9031, halla:**

**a) log 800** **c) log 0,64** **e) log 5**

**b) log 2** **d) log 40** **f) log $\sqrt[5]{8}$**

a) $\log 800 = \log 8 + \log 100 = 0{,}9031 + 2 = 2{,}9031$

b) $\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 \Rightarrow \log 2 = \frac{1}{3}\log 8 = 0{,}301$

c) $\log 0{,}64 = \log \frac{64}{100} = \log 64 - \log 100 = 2\log 8 - 2 = -0{,}1938$

d) $\log 40 = \log (10 \cdot 4) = \log 10 + \log 4 = 1 + 2\log 2 = 1{,}602$

e) $\log 40 = \log (8 \cdot 5) = \log 8 + \log 5 \Rightarrow \log 5 = \log 40 - \log 8 = 0{,}6989$

f) $\log \sqrt[5]{8} = \frac{1}{5}\log 8 = 0{,}1806$

**1.60 Utilizando las propiedades de los logaritmos y siendo log *x* = 0,70 y log *y* = 1,18, calcula:**

**a) $\log (x^2 y)$** **b) $\log \left(\frac{x^3}{y^2}\right)$** **c) $\log\left(\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}\right)$**

a) $\log (x^2 \cdot y) = 2\log x + \log y = 2{,}58$

b) $\log \left(\frac{x^3}{y^2}\right) = 3\log x - 2\log y = -0{,}26$

c) $\log (\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}) = \frac{1}{2}\log x + \frac{2}{3}\log y = 1{,}137$

**1.61 Aplicando un cambio de base y usando la calculadora, halla los siguientes logaritmos.**

**a) $\log_2 14$** **c) $\log_{\frac{1}{2}} 12$**

**b) $\log_3 32$** **d) $\log_5 10$**

a) $\log_2 14 = \frac{\log 14}{\log 2} = 3{,}8073$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 12 = \frac{\log 12}{\log \frac{1}{2}} = -3{,}5850$

b) $\log_3 32 = \frac{\log 32}{\log 3} = 3{,}1546$

d) $\log_5 10 = \frac{\log 10}{\log 5} = 1{,}4307$

**1.62 Transforma estas expresiones algebraicas en logarítmicas.**

**a) $A = \frac{x^2 y^3 z^5}{t^4}$** **c) $C = \frac{\sqrt{x}\, yz^2}{10\, t^3}$**

**b) $B = \frac{100\, x^3 y}{t^2}$** **d) $D = \frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}\, z^{\frac{3}{4}}}{t^{\frac{2}{5}}}$**

a) $\log A = 2\log x + 3\log y + 5\log z - 4\log t$

c) $\log C = \frac{1}{2}\log x + \log y + 2\log z - 3\log t - 1$

b) $\log B = 2 + 3\log x + \log y - 2\log t$

d) $\log D = \frac{1}{2}\log x + \frac{2}{3}\log y + \frac{3}{4}\log z - \frac{2}{5}\log t$

**1.63 Tomando antilogaritmos, convierte en algebraicas las siguientes expresiones.**

**a)** $\log A = 3 \log x + 2 \log y - 5 \log z$

**b)** $\log B = \frac{3}{2} \log x + \log y - \frac{2}{3} \log z - 2$

a) $A = \frac{x^3 y^2}{z^5}$

b) $B = \frac{\sqrt{x^3} \cdot y}{\sqrt[3]{z^2} \cdot 100}$

## CUESTIONES PARA ACLARARSE

**1.64 Di si son verdaderas o falsas estas afirmaciones.**

**a) La raíz de un número negativo no existe.**

**b) Todo número decimal es racional.**

**c) Una fracción irreducible de denominador 63 es periódica mixta.**

**d) El número $\sqrt{\frac{12}{3}}$ pertenece a N, Z, Q y R.**

**e) −1 pertenece al intervalo $\left(-\sqrt{25}, -\sqrt[3]{8}\right)$.**

**f) $\frac{a}{b}$ = 3,414 114 111...**

a) Verdadera
b) Verdadera
c) Falsa
d) Verdadera
e) Falsa
f) Verdadera

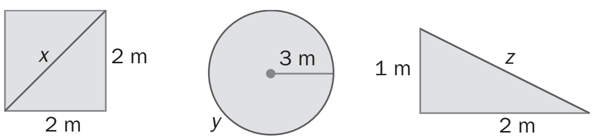
**1.65 En la siguiente cadena de contenidos:**

**$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$**

**Encuentra un número que pertenezca a cada conjunto, pero no a los anteriores.**

$1 \in \mathbf{N}$; $-1 \in \mathbf{Z}$; $\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$; $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$

**1.66 Las longitudes *x, y, z*, ¿pueden ponerse como cociente de dos enteros? ¿Por qué?**




No, ya que $x = \sqrt{8}$, $y = 6\pi$ y $z = \sqrt{5}$ son números irracionales.

**1.67 El salón de mi casa mide 4,86 metros de largo. Redondea este valor a metros y a decímetros.**

4,86 m → Redondeo a metros = 5 m
4,86 m → Redondeo a decímetros = 49 dm

**1.68 ¿Qué intervalo se puede expresar mediante la desigualdad $|x - 3| \leq 2$?**

El intervalo buscado es [1,5].

**1.69** **¿Qué números enteros están a la vez en las semirrectas $(-\infty, -2]$ y $(-6, +\infty)$?**

$-5$, $-4$, $-3$ y $-2$

**1.70** **Copia en tu cuaderno y completa los huecos utilizando la definición de logaritmo mentalmente.**

**a)** $\log_2 8 = \square$ **b)** $\log_3 \square = 4$ **c)** $\log_{\square} 125 = 3$

a) 3 b) 81 c) 5

**1.71** **Di si son ciertas o no estas afirmaciones.**

**a) Entre dos números reales siempre hay otro.**

**b) El logaritmo de un número nunca es negativo.**

**c) El logaritmo de un número negativo no existe.**

**d) En el intervalo $(-4, -3)$ no hay números enteros, pero sí racionales.**

**e) $|x| = -x$ para ciertos valores de $x$.**

a) Verdadera b) Falsa c) Verdadera d) Verdadera e) Verdadera

**1.72** **Explica cómo expresiones tan aparentemente distintas como $2^{0.5}$, $\sqrt{2}$ y $8^{\frac{1}{6}}$ son equivalentes.**

$8^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{0,5} = \sqrt{2}$

## PROBLEMAS PARA APLICAR

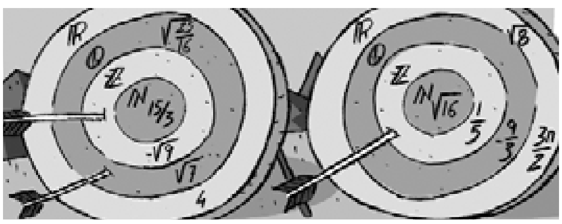
**1.73** **Para solar la entrada de una nueva sala de exposiciones se utilizan baldosas de 20 × 30 centímetros. Si la entrada es un recinto circular de 6 metros de radio, ¿cuántas baldosas se necesitan, como mínimo, suponiendo que se puedan aprovechar todos los recortes?**

$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = 36\pi \text{ m}^2 = 360\,000\pi \text{ cm}^2$

$A_{\text{baldosa}} = 30 \cdot 20 = 600 \text{ cm}^2$

$360\,000\pi : 600 \approx 1884,9 \Rightarrow$ El n.º mínimo de baldosas son 1885.

**1.74** **En un club matemático tienen una diana de números reales. A cada dardo se le asigna un número real y se ha de clavar en la franja de la diana correspondiente.**



**Si gana el jugador que realiza el mayor número de aciertos en las franjas adecuadas, ¿cuál de estos dos jugadores habrá ganado?**

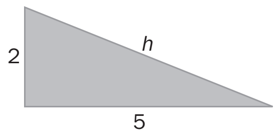
1.er jugador: 1 acierto ($-\sqrt{9} \in \mathbf{Z}$, $\sqrt{7} \notin \mathbf{Q}$); 2.º jugador: 0 aciertos $\left(\frac{1}{5} \notin \mathbf{Z}\right) \Rightarrow$ Gana el 1.er jugador.

1.75 **La longitud aproximada de una circunferencia de radio 7 centímetros es de 43,988 centímetros.**

**¿Cuál y de qué tipo es la aproximación de π que se ha utilizado?**

$43{,}988 = 2\pi r \Rightarrow \pi = \dfrac{43{,}988}{14} = 3{,}142$   Luego se ha tomado una aproximación por exceso a la milésima.

1.76 **¿Qué aproximación está más cerca del valor de la hipotenusa del triángulo de la figura, 5,385 ó 5,386 centímetros? ¿Cuánto más cerca?**




La aproximación 5,385 se encuentra más cerca del valor de la hipotenusa.

Está aproximadamente 7 milésimas más cerca que 5,386.

1.77 **Si entre cada dos números reales existen otros, encuentra entre $\dfrac{66}{25}$ y $\dfrac{53}{20}$ tres números irracionales del tipo $\{a\pi,\ a \in \mathbb{Q}\}$.**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{66}{25} = 2{,}64 \\ \\ \dfrac{53}{20} = 2{,}65 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{841}{1000}\pi;\ y = \frac{421}{500}\pi;\ z = \frac{843}{1000}\pi$$

1.78 **En una fábrica de latas de refrescos han decidido aproximar el número π como $\dfrac{157}{50}$. ¿Cuánto se ahorran de área de aluminio y de volumen de líquido por lata si son cilíndricas de 3 centímetros de radio y 11 de altura?**

$\dfrac{157}{50} = 3{,}14$

$A_{\text{cilindro}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 18\pi + 66\pi = 84\pi\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_{\text{aprox}} = 84 \cdot 3{,}14 = 263{,}76\ \text{cm}^2$

$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = 99\pi\ \text{cm}^3 \Rightarrow V_{\text{aprox}} = 99 \cdot 3{,}14 = 310{,}86\ \text{cm}^3$

$A_{\text{ahorrada}} = 84\pi - 263{,}76 = 0{,}13\ \text{cm}^3$

$V_{\text{ahorrado}} = 99\pi - 310{,}86 = 0{,}16\ \text{cm}^3$

1.79 **Un país invierte el 0,17% del PIB en ayuda al desarrollo del Tercer Mundo y las ONG piden cumplir la recomendación de la ONU para erradicar la pobreza, que consiste en dedicar el 0,7%.**

**Si el PIB del país es de 2 billones de euros al año, ¿cuánto dinero deja de destinar el país a ayuda al desarrollo según las indicaciones de la ONU? (Realiza las operaciones en notación científica.)**

2 billones $= 2 \cdot 10^{12}$ €

Dinero invertido $= \dfrac{17}{10\,000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 34 \cdot 10^{8}$ € $= 3{,}4 \cdot 10^{9}$ €

Dinero recomendado $= \dfrac{7}{1000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 14 \cdot 10^{9}$ € $= 1{,}4 \cdot 10^{10}$ €

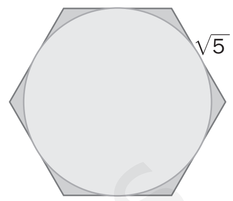
Dinero no destinado $= 1{,}4 \cdot 10^{10} - 3{,}4 \cdot 10^{9} = 10{,}6 \cdot 10^{9}$ € $= 1{,}06 \cdot 10^{10}$ €

1.80 **Un profesor escribe en la pizarra la siguiente operación: $\sqrt[5]{8^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Y pide a la mitad de la clase que la desarrollen en forma de radicales, y a la otra mitad, que lo hagan en forma de potencia. ¿Qué resultado obtendrá cada una de las partes de la clase?**

Desarrollando en forma de radicales se obtiene como resultado $\sqrt[30]{2}$

Desarrollando en forma de potencia se obtiene como resultado $2^{\frac{1}{30}}$

1.81 **Calcula el área de la circunferencia inscrita en un hexágono regular de $\sqrt{5}$ centímetros de lado.**




Radio = Apotema. Por el Teorema de Pitágoras: $r^2 + \frac{5}{4} = 5 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{15}}{2}$ cm$^2$

1.82 **Una cafetería incrementa cada año el precio de un café en un 4% (sea cual sea el IPC). Si actualmente cuesta 1,10 euros, ¿podrías encontrar la fórmula que relaciona el precio del café con los años transcurridos? ¿Cuánto costará el café dentro de 5 años?**

Sea $x$ el precio del café. Subir cada año un 4% su precio se traduce en: $x + x \cdot \frac{4}{100} = x\left(1 + \frac{4}{100}\right) = x \cdot 1{,}04$

Así, la fórmula pedida será $1{,}1 \cdot 1{,}04^n$ donde $n$ = número de años transcurridos.

Aplicando dicha fórmula, dentro de 5 años el precio del café será $1{,}1 \cdot 1{,}04^5 = 1{,}34$

1.83 **En un terremoto aparecen dos tipos de ondas sísmicas: las *P*, longitudinales y de velocidad de propagación rápida, y las ondas *S*, transversales y de velocidad menor. En la escala de Richter, la magnitud de un terremoto se calcula como:**

$$M = \log A + 3 \log (8t) - 2{,}92$$

**Donde *A* es la amplitud en milímetros de las ondas *S* (medidas en el sismógrafo), y *t*, el tiempo transcurrido, en segundos, entre la aparición de las ondas *P* y las *S*.**

**a) Copia y completa la tabla, calculando las características para tres sismos diferentes.**

| | *t* (*s*) | *A* (mm) | *M* |
|---|---|---|---|
| **1** | **8** | **15** | |
| **2** | **15** | | **4** |
| **3** | | **45** | **7** |

**b) Calcula la relación entre las amplitudes de dos terremotos de magnitudes 6 y 9. (Suponemos el mismo valor para *t*.)**

a)

| | *t* (*s*) | *A* (mm) | *M* |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 15 | 3,67 |
| 2 | 15 | 4,81 | 4 |
| 3 | 71,2 | 45 | 7 |

b) $\log A = 9 - 3 \log (8t) + 2{,}92$

$\log A' = 6 - 3 \log (8t) + 2{,}92$

Restando esas dos expresiones se obtiene:

$\log A - \log A' = 3 \Rightarrow \log \frac{A}{A'} = 3 \Rightarrow \frac{A}{A'} = 10^3$

## Números reales y aproximaciones

**1.84 Calcula los intervalos que aproximan al número $\sqrt{2} + 1$ con un error menor que una décima, una centésima y una milésima.**

Error menor que una décima: (2,4;2,5)

Error menor que una centésima: (2,41;2,42)

Error menor que una milésima: (2,414;2,415)

**1.85 El número irracional $\pi$ = 3,141 592 6… es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Halla las aproximaciones por defecto, exceso y redondeo de $\pi$ a la milésima. Para el redondeo, calcula también los errores absoluto y relativo que se cometen.**

Aproximación por defecto: $\pi \approx 3{,}141$

Aproximación por exceso: $\pi \approx 3{,}142$

Aproximación por redondeo: $\pi \approx 3{,}142$

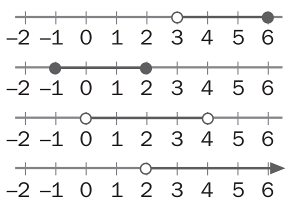
Error Absoluto $= |3{,}142 - \pi| = 0{,}000\,407\ldots$

Error Relativo $= \left|\dfrac{0{,}000\,407}{\pi}\right| = 0{,}000\,129\ldots$

## Representación en intervalos y semirrectas

**1.86 Relaciona en tu cuaderno las diferentes formas de representar los siguientes intervalos y semirrectas.**

| | |
|---|---|
| [–1, 2] | $x > 2$ |
| (2, +∞) | $0 < x < 4$ |
| (3, 6] | $-1 \le x \le 2$ |
| (0, 4) | $3 < x \le 6$ |

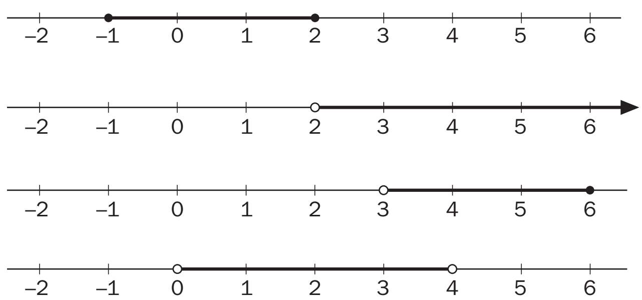



[–1, 2] → $-1 \le x \le 2$ →

(2, + ∞) → $x > 2$ →

(3, 6] → $3 < x \le 6$ →

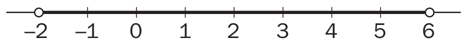
(0, 4) → $0 < x < 4$ →



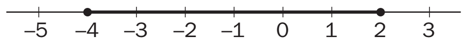
**1.87 Dibuja los siguientes entornos en la recta real e indica mediante desigualdades los intervalos que determinan, así como su centro y su radio.**

**a) E(2, 4)** **b) E[−1, 3]** **c) E(3, 1)**

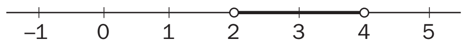
a) E(2, 4): $-2 < x < 6$ ; Centro $= 2$ y Radio $= 4 \rightarrow$




b) E[−1, 3]: $-4 \leq x \leq 2$ ; Centro $= -1$ y Radio $= 3 \rightarrow$




c) E(3, 1): $2 < x < 4$ ; Centro $= 3$ y Radio $= 1 \rightarrow$




## Radicales y operaciones

**1.88 Realiza las siguientes operaciones con radicales.**

**a)** $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3}$

**b)** $\sqrt[3]{9} : \sqrt{12}$

**c)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} : (\sqrt[3]{3})^2$

**d)** $3\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - 4\sqrt{8} - \sqrt{200}$

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 3^2} = \sqrt[12]{1125}$

b) $\sqrt[3]{9} : \sqrt{12} = \sqrt[6]{3 \cdot 2^{-6}} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} : (\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[12]{3}$

d) $3\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - 4\sqrt{8} - \sqrt{200} = 9\sqrt{2}$

**1.89 Calcula el valor de *k* en cada caso.**

**a)** $\sqrt[3]{k} = \frac{1}{2}$

**b)** $\sqrt[5]{k} = -2$

**c)** $\sqrt[k]{-343} = -7$

**d)** $\sqrt[k]{625} = -5$

a) $k = \frac{1}{8}$

b) $k = -32$

c) $k = 3$

d) $k = 4$

## Operaciones con logaritmos

**1.90 Halla el valor de *x* en cada caso.**

**a)** $\log_x 16 = -4$

**b)** $\log_{\frac{1}{7}} x = -3$

**c)** $\log_{11} 1331 = x$

**d)** $\log_x 25 = 4$

a) $x = \frac{1}{2}$

b) $x = 343$

c) $x = 3$

d) $x = \sqrt{5}$

**1.91 Transforma las siguientes expresiones en un único logaritmo.**

**a)** $\log 16 - \log 3 + \log 12$

**b)** $\log 18 - \log 27 - \log 2$

**c)** $(\log 25 + \log 4) - (\log 8 - \log 9)$

a) $\log 16 - \log 3 + \log 12 = \log \dfrac{16 \cdot 12}{3} = \log \dfrac{2^4 \cdot 2^2 \cdot 3}{3} = \log 2^6$

b) $\log 18 - \log 27 - \log 2 = \log \dfrac{18}{27 \cdot 2} = \log \dfrac{2 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2} = \log \dfrac{1}{3} = -\log 3$

c) $(\log 25 + \log 4) - (\log 8 - \log 9) = \log \dfrac{25 \cdot 4 \cdot 9}{8} = \log \dfrac{5^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{2^3} = \log \dfrac{5^2 \cdot 3^2}{2}$

## AMPLIACIÓN

**1.92 Redondeando $\pi$ a la milésima, el volumen de una esfera es de 14,139 centímetros cúbicos. Averigua su radio.**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = 1{,}5 \text{ , con } \pi = 3{,}142$$

**1.93 Marca en una recta numérica el conjunto de puntos cuyas distancias al punto $-2$ sean:**

**a) Igual a 3**

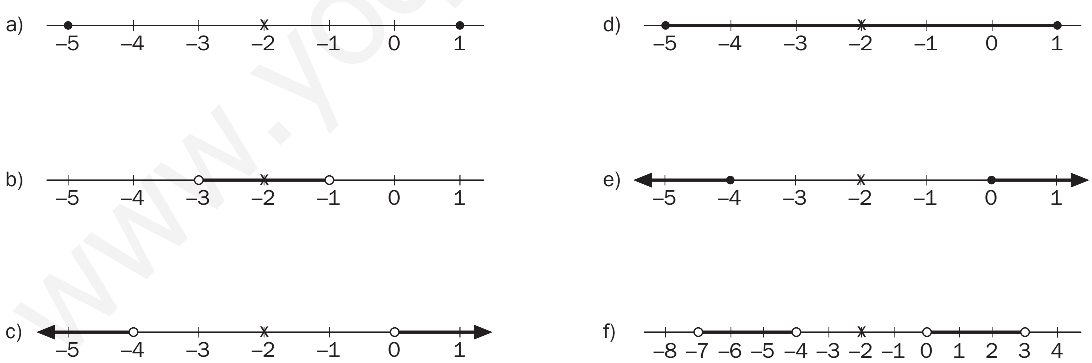
**b) Menor que 1**

**c) Mayor que 2**

**d) No mayor que 3**

**e) No menor que 2**

**f) Mayor que 2 y menor que 5**




**1.94 Determina el conjunto de valores que verifica cada condición.**

**a)** $|x^2| = |x|^2$

**b)** $|x| = \dfrac{1}{x}$

**c)** $|2x - 1| < 3$

a) $x \in \mathbf{R}$

b) $x = 1$

c) $-1 < x < 2$

1.95 **Calcula *a*, *b*, *c* y *d* en esta igualdad.**

$$\sqrt{10^4 \cdot 14^6 \cdot 81^{12}} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$$

$\sqrt{2^{10} \cdot 3^{48} \cdot 5^4 \cdot 7^6} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \Rightarrow a = 5;\ b = 24;\ c = 2;\ d = 3$

1.96 **La sucesión $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ se va acercando cada vez más al número $e = 2{,}718\ 28\ldots$ ¿Con qué elemento de la sucesión consigues aproximar hasta la milésima dicho número?**

Con el elemento $a_6 = 2{,}718\,055\ldots$

1.97 **Ordena los siguientes logaritmos aplicando su definición y sus propiedades.**

$\log \sqrt[3]{10}$, $\log_2 \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$, $\ln \sqrt{\frac{1}{e}}$, $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{3}$

$\ln\sqrt{\frac{1}{e}} < \log\sqrt[3]{10} < \log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3} < \log_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

1.98 **Opera y simplifica:**

**a)** $2\sqrt{x} + 5\sqrt{25x} - 3\sqrt{36x} - 4\sqrt{9x}$

**b)** $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{\sqrt{3}}\ \sqrt[5]{\sqrt{3} : \sqrt[3]{9}}$

a) $-3\sqrt{x}$

b) $x = -\frac{13}{60}$

1.99 **El decibelio es la unidad que se usa para medir la sonoridad, $\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, esto es, el volumen con que percibimos un sonido determinado, donde $I$ es la intensidad sonora, e $I_0 = 10^{-12}$ vatios por metro cuadrado (W/m$^2$), la intensidad umbral que el oído humano puede percibir.**

**a) Calcula $\beta$ para sonidos con intensidades de $10^{-6}$ y $10^{-9}$ W/m$^2$, respectivamente.**

**b) Si el umbral del dolor para el ser humano está en 120 decibelios, determina qué intensidad debe tener un sonido para alcanzar dicho umbral.**

a) $I = 10^{-9} \Rightarrow \beta = 10\log\left(\frac{10^{-9}}{10^{-12}}\right) = 30$ decibelios

$I = 10^{-6} \Rightarrow \beta = 10\log\left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}}\right) = 60$ decibelios

b) $120 = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Rightarrow 0 = \log I \Rightarrow I = 1$ W/m$^2$

**1.100 Gasto familiar**

**La siguiente tabla muestra el consumo semanal de tres alimentos que realizan las familias Martínez, Aguiar y Guindo.**

| | Pan (N.º de barras) | Carne (kg) | Leche (L) |
|---|---|---|---|
| **Martínez** | 8 | 2,5 | 8 |
| **Aguiar** | 10 | 1,75 | 9 |
| **Guindo** | 6 | 2,25 | 7 |

**Los precios en euros de la barra de pan, el kilogramo de carne y el litro de leche han variado durante las cuatro últimas semanas y están recogidos en esta tabla.**

| | 1.ª | 2.ª | 3.ª | 4.ª |
|---|---|---|---|---|
| **Pan** | 0,45 | 0,40 | 0,40 | 0,45 |
| **Carne** | 12 | 11,5 | 12,5 | 13 |
| **Leche** | 0,9 | 0,9 | 0,95 | 0,95 |

**a) Calcula el gasto total correspondiente a cada una de las familias en la primera semana.**

**b) Halla el porcentaje de variación del precio de la carne en las semanas segunda, tercera y cuarta en relación con el precio de la primera.**

**c) Determina el porcentaje de variación del gasto total de la familia Guindo en la cuarta semana en relación con la segunda.**

a) Martínez: $8 \cdot 0{,}45 + 2{,}5 \cdot 12 + 8 \cdot 0{,}9 = 40{,}80$ €

Aguiar: $10 \cdot 0{,}45 + 1{,}75 \cdot 12 + 9 \cdot 0{,}9 = 33{,}60$ €

Guindo: $6 \cdot 0{,}45 + 2{,}25 \cdot 12 + 7 \cdot 0{,}9 = 36$ €

b) De la primera semana a la segunda: $\frac{11{,}5}{12} = 0{,}958 \quad 1 - 0{,}958 = 0{,}042 \Rightarrow$ Ha bajado un 4,2%.

De la primera semana a la tercera: $\frac{12{,}5}{12} = 1{,}042 \Rightarrow$ Ha subido un 4,2%.

De la primera semana a la cuarta: $\frac{13}{12} = 1{,}083 \Rightarrow$ Ha subido un 8,3%.

c) $\frac{6 \cdot 0{,}45 + 2{,}25 \cdot 13 + 7 \cdot 0{,}95}{6 \cdot 0{,}40 + 2{,}25 \cdot 11{,}5 + 7 \cdot 0{,}9} = \frac{38{,}6}{34{,}575} = 1{,}116 \Rightarrow$ Ha subido un 11,6%.

**1.101** **La piscina circular**

**En el dibujo aparece representada una piscina circular que se ha construido de forma que su contorno es el de la circunferencia inscrita a un cuadrado.**

**Se quiere plantar con césped el área de la corona circular limitada por la piscina y la circunferencia circunscrita al cuadrado mencionado. ¿Cuánto medirá esa área?**

**Datos:**

**Profundidad de la piscina: 2 metros**

**Tiempo que se ha empleado en llenar la piscina con un grifo que arroja 37,23 litros por minuto: 45 horas.**

Volumen de la piscina: $37,23 \cdot 45 \cdot 60 = 100\,521$ L $= 100\,521$ dm$^3$ $= 100,521$ m$^3$

Radio de la piscina: $r = \sqrt{\dfrac{100,521}{2\pi}} = 4$ m

Superficie de la zona con césped: $\pi (R^2 - r^2) = \pi (32 - 16) = 16\pi = 50,27$ m$^2$

## AUTOEVALUACIÓN

**1.A1** **Sean los números $A$ = 1,7864… y $B$ = 2,3879…**

**Calcula $A + B$ y $A - B$ con una aproximación a la milésima.**

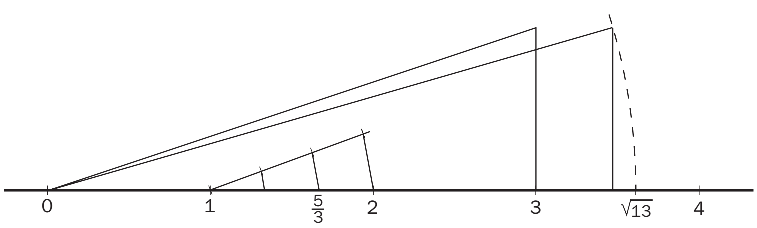
$A + B = 4,174$ $\quad$ $A - B = -0,602$

**1.A2** **Representa en la recta real estos números.**

**a) $\dfrac{5}{3}$** $\qquad$ **b) $\sqrt{13}$**

**Cuál de ellos es racional y cuál es irracional?**

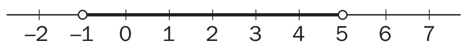
**¿Qué teoremas has aplicado en cada caso?**




$\dfrac{5}{3} = 1 + \dfrac{2}{3} \rightarrow$ Racional y para representarlo se aplica el Teorema de Tales.

$\sqrt{13} \rightarrow$ Irracional y para representarlo se aplica el Teorema de Pitágoras.

**1.A3 Un conjunto de números reales $x$ cumplen que $|x - 2| < 3$. Describe este conjunto utilizando intervalos y desigualdades, y gráficamente.**

$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow x \in (-1{,}5) \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow$ 


**1.A4 Realiza la siguiente operación dando el resultado en notación científica.**

$(0{,}26 \cdot 10^{-4}) \cdot (8{,}53 \cdot 10^{9})^2 + 7{,}2 \cdot 10^{13}$

$1{,}9638 \cdot 10^{15}$

**1.A5 Realiza las siguientes operaciones.**

**a)** $81^{1,25}$

**b)** $8^{\frac{2}{3}}$

**c)** $9^{1,5}$

**d)** $125^{\frac{4}{3}}$

a) 243

b) 4

c) 27

d) 625

**1.A6 Racionaliza estas expresiones.**

**a)** $\dfrac{4}{\sqrt{8}}$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{12}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

a) $\sqrt{2}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{18}}{6}$ c) $\dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{4}$

**1.A7 Realiza las siguientes operaciones con radicales.**

**a)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2}$

**b)** $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3}$

**c)** $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^4$

**d)** $3\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{27}$

a) $\sqrt[4]{18}$

b) $\sqrt[15]{2^5 . 3^{-3}}$

c) $\sqrt[3]{4}$

d) $20\sqrt{3}$

**1.A8 Sabiendo que log 2 = 0,301…, calcula:**

**a)** log 5

**b)** log 20

**c)** log 16

**d)** $\log_5 2$

a) $\log 5 = 0{,}699$

b) $\log 20 = 1{,}301$

c) $\log 16 = 1{,}204$

d) $\log_5 2 = 0{,}43$

**1.A9 Transforma esta expresión en logarítmica.**

$$A = \frac{x^3 \cdot \sqrt[7]{y^2} \cdot z^{\frac{3}{4}}}{t^2}$$

$$\log A = 3 \log x + \frac{2}{7} \log y + \frac{3}{4} \log z - 2 \log t$$

**1.A10** **Escribe la expresión en forma algebraica.**

$$\log A = \frac{1}{5}\log x + \frac{2}{9}\log y - 8\log z$$

$$A = \frac{\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[9]{y^2}}{z^8}$$

M U R A L   D E   M A T E M Á T I C A S

M A T E T I E M P O S

## La nómina de los números

**En un país de números, cada habitante $h$ recibe una nómina mensual en miles de euros igual a $\sqrt[h]{h}$. Así, el habitante 1 percibe $\sqrt[1]{1} = 1$; el 2 cobra $\sqrt[2]{2} = 1,41$, etc. ¿Cuántos individuos tiene el país? ¿Cuál de ellos es el que recibe la nómina más alta? ¿Y cuál la más baja?**

a) Existen infinitos individuos, ya que $h$ puede ser cualquier número real positivo.

b) Si consideramos $h$ como número natural, el mayor salario será $\sqrt[3]{3} = 1,442$, o sea 1 442 €.

El menor $\sqrt[1]{1} = 1$, o sea 1 000 €.

Si analizamos el mayor valor de $h$ (consideraremos un valor muy grande, por ejemplo 1 000 000) tendremos:

$\sqrt[1\,000\,000]{1\,000\,000} \approx 1$, o sea 1 000 €

El problema puede ampliarse para valores entre 0 y 1, así: $\sqrt[0,000\,001]{0,000\,001} \approx 0$. Luego si nos acercamos a cero, no se tendrá sueldo.

El problema podría retomarse una vez se haya acabado con las aplicaciones de la derivada en bachillerato: L'Hopital y puntos críticos, así podríamos verificar que:

$$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

y que el valor máximo de la función $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ se da cuando $x = e$, luego el mayor salario es: $\sqrt[e]{e} = 1,4446$, o sea: 1 444,6 €.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1 **Calcula el valor numérico pedido para las siguientes expresiones algebraicas.**

**a)** $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 4}$; $x = 2$

**b)** $g(a, b) = 3a^2 + 5ab$; $a = -1$, $b = 4$

**c)** $h(x, y) = x(y - 3) + xy^2$; $x = 2$, $y = 0$

a) $f(2) = \dfrac{3 \cdot 2^2}{2^2 + 4} = \dfrac{3 \cdot 4}{4 + 4} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

b) $g(-1, 4) = 3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) \cdot 4 = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = 3 - 20 = -17$

c) $h(2, 0) = 2 \cdot (0 - 3) + 2 \cdot 0^2 = 2 \cdot (-3) + 0 = -6$

2.2 **Identifica los coeficientes y los grados parciales y total de los siguientes monomios.**

**a)** $-3x^3yz^2$

**b)** $ab^2c^4$

**c)** $\dfrac{4x^2yz^2}{5}$

**d)** $-\dfrac{1}{2}p^4q^2r$

a) Monomio: $-3x^3yz^2$

Coeficiente: $-3$

Grado respecto a $x$: 3
Grado respecto a $y$: 1
Grado respecto a $z$: 2
Grado total: 6

b) Monomio: $ab^2c^4$

Coeficiente: 1

Grado respecto a $a$: 1
Grado respecto a $b$: 2
Grado respecto a $c$: 4
Grado total: 7

c) Monomio: $\dfrac{4x^2yz^2}{5}$

Coeficiente: $\dfrac{4}{5}$

Grado respecto a $x$: 2
Grado respecto a $y$: 1
Grado respecto a $z$: 2
Grado total: 5

d) Monomio: $-\dfrac{1}{2}p^4q^2r$

Coeficiente: $-\dfrac{1}{2}$

Grado respecto a $p$: 4
Grado respecto a $q$: 2
Grado respecto a $r$: 1
Grado total: 7

2.3 **Escribe las expresiones algebraicas que corresponden al volumen de un cono y de una esfera.**

$V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$  $V_{\text{Esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

2.4 **Realiza las siguientes operaciones.**

**a)** $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x) + (4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x)$

**b)** $(-2x^3 + x - 6) - (x^3 + 3x^2 + 2x - 7)$

a) $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x) + (4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x) = 5x^4 + x^3 - 7x$

b) $(-2x^3 + x - 6) - (x^3 + 3x^2 + 2x - 7) = -2x^3 + x - 6 - x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = -3x^3 - 3x^2 - x + 1$

**2.5 Efectúa estos productos de polinomios.**

**a)** $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 2) \cdot (x^3 + 3)$

**b)** $(-5x^3 - 6x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 1)$

**c)** $2x \cdot (5x^2 + 2x - 1) \cdot (-x^3 + 4)$

a) $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 2) \cdot (x^3 + 3) = x^7 - 2x^6 + 3x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 3x - 6 = x^7 - 2x^6 + 3x^5 +$ $+ 2x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 3x - 6$

b) $(-5x^3 - 6x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 1) = -5x^5 + 10x^4 - 5x^3 - 6x^3 + 12x^2 - 6x + 3x^2 - 6x + 3 = -5x^5 + 10x^4 - 11x^3 +$ $+ 15x^2 - 12x + 3$

c) $2x \cdot (5x^2 + 2x - 1) \cdot (-x^3 + 4) = (10x^3 + 4x^2 - 2x) \cdot (-x^3 + 4) = -10x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 40x^3 + 16x^2 - 8x$

**2.6 Calcula el cociente y el resto de la división $(2x^5 + 7x^4 + x^2 - 4x + 1) : (x^2 + 3x - 2)$ y comprueba que $D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$.**

$$
\begin{array}{llllll|l}
2x^5 & +7x^4 & & +x^2 & -4x & +1 & x^2 + 3x - 2 \\
\cline{7-7}
-2x^5 & -6x^4 & +4x^3 & & & & 2x^3 + x^2 + x \\
\cline{1-3}
 & x^4 & +4x^3 & & & & \\
 & -x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & x^3 & +3x^2 & & & \\
 & & -x^3 & -3x^2 & +2x & & \\
\cline{2-6}
 & & & & -2x & +1 &
\end{array}
$$

Cociente: $2x^3 + x^2 + x$

Resto: $-2x + 1$

$d(x) \cdot C(x) + R(x) = (x^2 + 3x - 2) \cdot (2x^3 + x^2 + x) + (-2x + 1) = 2x^5 + x^4 + x^3 + 6x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 2x + 1 =$
$= 2x^5 + 7x^4 + x^2 - 4x + 1 = D(x)$

**2.7 Dados los polinomios $P(x) = (3x^3 + 3x^2 - 1)$, $Q(x) = (2x^4 - 5x^2)$ y $R(x) = (-x^3 + x - 2)$, efectúa estas operaciones.**

**a)** $P(x) - Q(x) + R(x)$

**b)** $P(x) + Q(x) \cdot R(x)$

**c)** $[Q(x)]^3$

**d)** $Q(x) : R(x)$

a) $P(x) - Q(x) + R(x) = 3x^3 + 3x^2 - 1 - 2x^4 + 5x^2 - x^3 + x - 2 = -2x^4 + 2x^3 + 8x^2 + x - 3$

b) $P(x) + Q(x) \cdot R(x) = 3x^3 + 3x^2 - 1 - 2x^7 + 2x^5 - 4x^4 + 5x^5 - 5x^3 + 10x^2 = -2x^7 + 7x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 13x^2 - 1$

c) $[Q(x)]^3 = (2x^4 - 5x^2) \cdot (2x^4 - 5x^2) \cdot (2x^4 - 5x^2) = (4x^8 - 10x^6 - 10x^6 + 25x^4) \cdot (2x^4 - 5x^2) =$
$= (4x^8 - 20x^6 + 25x^4) \cdot (2x^4 - 5x^2) = 8x^{12} - 20x^{10} - 40x^{10} + 100x^8 + 50x^8 - 125x^6 = 8x^{12} - 60x^{10} + 150x^8 - 125x^6$

d)
$$
\begin{array}{lll|l}
2x^4 & -5x^2 & & -x^3 + x - 2 \\
\cline{4-4}
-2x^4 & +2x^2 & -4x & -2x \\
\cline{1-3}
 & -3x^2 & -4x &
\end{array}
$$

**2.8 Resuelve las siguientes operaciones.**

**a)** $(m + 2n)^2$

**b)** $(-5 - 9b)^2$

**c)** $(2a - 3b)^2$

**d)** $\left(-4x + \frac{2}{3}y\right)^2$

**e)** $(-3x + y)^3$

**f)** $(4a + 5)^3$

a) $(m + 2n)^2 = m^2 + 4n^2 + 4mn$

b) $(-5 - 9b)^2 = 25 + 81b^2 + 90b$

c) $(2a - 3b)^2 = 4a^2 + 9b^2 - 12ab$

d) $\left(-4x + \frac{2}{3}y\right)^2 = 16x^2 + \frac{4}{9}y^2 - \frac{16}{3}xy$

e) $(-3x + y)^3 = -27x^3 + y^3 + 27x^2y - 9xy^2$

f) $(4a + 5)^3 = 64a^3 + 125 + 240a^2 + 300a$

**2.9 Descompón en factores estas expresiones.**

**a)** $y^2 - 16$ **c)** $(3x + 2)^2 - (3x - 2)^2$

**b)** $9z^2 + 6zy + y^2$ **d)** $27x^3 + 8 + 54x^2 + 36x$

a) $y^2 - 16 = (y + 4) \cdot (y - 4)$

b) $9z^2 + 6zy + y^2 = (3z + y)^2$

c) $(3x + 2)^2 - (3x - 2)^2 = (3x + 2 + 3x - 2) \cdot (3x + 2 - 3x + 2) = 6x \cdot 4 = 24x$

d) $27x^3 + 8 + 54x^2 + 36x = (3x + 2)^3$

**2.10 Completa en tu cuaderno estas expresiones para que correspondan al cuadrado de un binomio.**

**a)** $a^2 + 4ab + \square$ **c)** $4x^2 - \square + 9$

**b)** $x^2 + \frac{2}{3}xy + \square$ **d)** $\square - 6zyx^3 + 9z^2$

a) $a^2 + 4ab + 4b^2$ Desarrollo de $(a + 2b)^2$

b) $x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$ Desarrollo de $\left(x + \frac{1}{3}y\right)^2$

c) $4x^2 - 12x + 9$ Desarrollo de $(2x - 3)^2$

d) $y^2x^6 - 6zyx^3 + 9z^2$ Desarrollo de $(yx^3 - 3z)^2$

**2.11 Utiliza la fórmula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ para calcular mentalmente las siguientes operaciones.**

**a)** $15^2 - 5^2$ **c)** $125^2 - 25^2$

**b)** $55^2 - 45^2$ **d)** $700^2 - 300^2$

a) $15^2 - 5^2 = (15 + 5) \cdot (15 - 5) = 20 \cdot 10 = 200$

b) $55^2 - 45^2 = (55 + 45) \cdot (55 - 45) = 100 \cdot 10 = 1000$

c) $125^2 - 25^2 = (125 + 25) \cdot (125 - 25) = 150 \cdot 100 = 15\,000$

d) $700^2 - 300^2 = (700 + 300) \cdot (700 - 300) = 1000 \cdot 400 = 400\,000$

**2.12 Realiza estas divisiones.**

**a)** $(x^3 - 3x^2 + 5x - 10) : (x - 3)$

**b)** $(x^4 - 2x^2 + 6x + 7) : (x + 1)$

a)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −3 | 5 | −10 |
| 3 | | 3 | 0 | 15 |
| | 1 | 0 | 5 | 5 |

Cociente: $x^2+5$

Resto: 5

b)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | −2 | 6 | 7 |
| −1 | | −1 | 1 | 1 | −7 |
| | 1 | −1 | −1 | 7 | 0 |

Cociente: $x^3-x^2-x+7$

Resto: 0

**2.13 Utiliza la regla de Ruffini para hallar el número $k$ que hay que añadir al polinomio $x^3 + 2x^2$ para que, al dividirlo entre $x + 4$, el resto sea 0.**

El polinomio será de la forma $x^3 + 2x^2 + k$, procedemos a dividir para calcular el resto.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 0 | $k$ |
| −4 | | −4 | 8 | −32 |
| | 1 | −2 | 8 | $k - 32$ |

El resto, $k - 32$, tiene que ser 0; entonces:

$$k - 32 = 0 \Rightarrow k = 32$$

**2.14 Calcula el valor de $k$ que hace que el resto de la división de $x^3 + 2x + 6k$ entre $x - 2$ sea 0.**

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 2 & 6k \\ 2 & & 2 & 4 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & 6 & 6k + 12 \end{array}$$

El resto: $6k + 12$ tiene que ser 0; entonces:

$$6k + 12 = 0 \Rightarrow k = -2$$

**2.15 Indica en notación ordinaria el dividendo, el divisor, el cociente y el resto de esta división.**

$$\begin{array}{c|cccccc} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array}$$

$D(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ $\quad$ $c(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

$d(x) = x - 1$ $\quad$ $R = 2$

**2.16 Resuelve esta división usando la regla de Ruffini.**

**$(x^3 - 2x^2 - 7x + 14) : (x - 2)$**

**¿Cuánto vale el resto? ¿Coincide con el valor numérico del dividendo para $x = 2$?**

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -7 & 14 \\ 2 & & 2 & 0 & -14 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & 0 \end{array}$$

Resto: 0

$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 14 = 8 - 8 - 14 + 14 = 0$

Coinciden $P(2)$ y el resto.

**2.17 Halla el resto de estas divisiones sin efectuarlas.**

**a) $(x^{25} - 3x^2 - 4) : (x - 1)$** $\quad$ **b) $(x^{33} - 1) : (x + 1)$**

Vamos a utilizar el teorema del resto, calculando $P(1)$ en el primer polinomio y $P(-1)$ en el segundo:

a) $P(1) = 1^{25} - 3 \cdot 1^2 - 4 = 1 - 3 - 4 = -6$ $\quad$ Resto $= -6$

b) $P(-1) = (-1)^{33} - 1 = -1 - 1 = -2$ $\quad$ Resto $= -2$

**2.18 Indica, sin realizar las divisiones, si estas afirmaciones son ciertas.**

**a) $(x - 1)$ es un factor de $(x^5 + x^3 + 4x^2 + 6x + 2)$.**

**b) $(2x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x + 2)$ es divisible entre $(x - 2)$.**

a) Vamos a utilizar el teorema del factor. Calculamos $P(1)$:

$P(1) = 1^5 + 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 2 = 1 + 1 + 4 + 6 + 2 = 14 \neq 0$

Por tanto, deducimos que $(x - 1)$ no es un factor de $(x^5 + x^3 + 4x^2 + 6x + 2)$.

b) Calculamos P(2):

$P(2) = 2 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 32 - 32 + 4 - 6 + 2 = 0$, por lo que deducimos que $(2x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x + 2)$ es divisible entre $(x - 2)$.

**2.19 Si se divide el polinomio $3x^3 - 2x^2 + kx + 1$ entre $x - 1$, el resto es 2. ¿Cuánto vale $k$?**

Según el teorema del resto, el resto será: $P(1) = 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + k \cdot 1 + 1 = 3 - 2 + k + 1 = 2 + k$

Igualamos el resto a dos como indica el enunciado: $2 + k = 2 \Rightarrow k = 0$

**2.20 Dado el polinomio $x^3 - 4x^2 - 5x + 8$:**

**a) ¿Cuántas raíces reales puede tener como máximo?**

**b) ¿Pueden ser $x = 1$ y $x = 3$ raíces del polinomio? Escribe el conjunto de todos los enteros que podrían ser raíz de este polinomio.**

**c) ¿Es $x = -2$ raíz del polinomio?**

a) El polinomio tiene grado 3; por tanto, como máximo puede tener 3 raíces.

b) $x = 1$ podría ser raíz del polinomio, ya que 1 es divisor de 8.

$x = 3$ no podría ser raíz del polinomio, ya que 3 no es divisor de 8.

El conjunto de todos los enteros que podrían ser raíz de este polinomio será: $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 4$, $\pm 8$.

c) Calculamos $P(-2)$:

$P(-2) = (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 8 = -8 - 16 + 10 + 8 = -6 \neq 0$

Como $P(-2) \neq 0 \Rightarrow -2$ no es raíz del polinomio.

**2.21 Indica cuáles de los siguientes números son raíces del polinomio $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$.**

$$\mathbf{0 \qquad 1 \qquad \frac{1}{2} \qquad 3 \qquad \frac{-1}{2}}$$

Calculamos $P(x)$ para estos números:

$P(0) = 2 \cdot 0^4 + 5 \cdot 0^3 - 5 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow 0$ no es raíz de este polinomio.

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 5 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de este polinomio.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{2}{16} + \frac{5}{8} - \frac{5}{4} - \frac{5}{2} + 3 = \frac{2 + 10 - 20 - 40 + 48}{16} = 0$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)$ es raíz de este polinomio.

$P(3) = 2 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 3 = 2 \cdot 81 + 5 \cdot 27 - 5 \cdot 9 - 15 + 3 = 162 + 135 - 45 - 15 + 3 = 240 \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3$ no es raíz de este polinomio.

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{2}{16} - \frac{5}{8} - \frac{5}{4} + \frac{5}{2} + 3 = \frac{2 - 10 - 20 + 40 + 48}{16} =$$

$= \frac{60}{16} = \frac{15}{4} \neq 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)$ no es raíz de este polinomio.

**2.22 Calcula las raíces enteras de estos polinomios.**

**a) $x^3 + 3x^2 - x - 3$** **b) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$**

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3$. Posibles raíces enteras: $\pm 1$, $\pm 3$. Probamos con cada una de ellas:

$P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 - 3 = 0 \Rightarrow 1$ es raíz.

$P(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow -1$ es raíz.

$P(3) = 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 3 - 3 = 48 \Rightarrow 3$ no es raíz.

$P(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + 3 - 3 = 0 \Rightarrow -3$ es raíz.

Por tanto, las raíces enteras de este polinomio son 1, $-1$ y $-3$.

b) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$. Posibles raíces enteras: $\pm1$, $\pm2$, $\pm4$. Probamos con cada una de ellas:

$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 = -3 \Rightarrow 1$ no es raíz.

$P(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 4 = -9 \Rightarrow -1$ no es raíz.

$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 = 0 \Rightarrow 2$ es raíz.

$P(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 4 = -24 \Rightarrow -2$ no es raíz.

$P(4) = 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 4 = 64 - 32 + 8 - 4 = 36 \Rightarrow 4$ no es raíz.

$P(-4) = (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 4 = -64 - 32 - 8 - 4 = -108 \Rightarrow -4$ no es raíz.

Por tanto, la única raíz entera de este polinomio es 2.

**2.23 Factoriza estos polinomios sabiendo que todas sus raíces son divisores del término independiente.**

**a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$**

**b) $2x^2 - 12x + 18$**

a) Las posibles raíces enteras serán los divisores de 2; es decir, $\pm1$ y $\pm2$.

$P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de este polinomio.

$P(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow -1$ es raíz de este polinomio.

$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 2 = 12 \neq 0 \Rightarrow 2$ no es raíz de este polinomio.

$P(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow -2$ es raíz de este polinomio.

Por tanto, las raíces de este polinomio son 1, $-1$ y $-2$, y la factorización correspondiente es:

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$

b) El polinomio es de grado 2; por tanto, resolvemos la ecuación: $2x^2 - 12x + 18 = 0$.

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{4} = \begin{cases} 3 \\ 3 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que el coeficiente director de este polinomio es 2 y que 3 es raíz doble, la factorización será:

$$2x^2 - 12x + 18 = 2 \cdot (x - 3) \cdot (x - 3) = 2 \cdot (x - 3)^2$$

**2.24 Halla el valor numérico de $P(x) = x^2 - 7x + 10$ para $x = 1, 2, 3, 5$.**

**a) ¿Para cuáles de estos valores se anula?**

**b) Factoriza el polinomio $P(x)$.**

$P(1) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 4$

$P(2) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 0$

$P(3) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 10 = -2$

$P(5) = 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$

a) El polinomio se anula en 2 y 5.

b) Como el polinomio es de grado dos y hemos encontrado dos números que lo anulan, ya podemos factorizarlo:

$P(x) = (x - 2) \cdot (x - 5)$

**2.25 Descompón en factores estos polinomios.**

**a)** $x^3 - x^2 - 2x$

**b)** $x^3 + x^2 - 8x - 12$

**c)** $x^3 - x^2 + 5x - 5$

**d)** $x^3 + 2x^2 - 5x - 10$

a) Sacamos factor común: $P(x) = x^3 - x^2 - 2x = x \cdot (x^2 - x - 2)$

Resolvemos la ecuación de segundo grado: $x^2 - x - 2 = 0$ $\qquad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Por tanto: $P(x) = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$

b) $P(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$

Utilizamos Ruffini, vamos probando con los divisores de 12 hasta que obtengamos resto 0:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -8 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$D(x) = d(x) \cdot c(x) \Rightarrow P(x) = (x - 3) \cdot (x^2 + 4x + 4)$

Para factorizar el cociente utilizamos las identidades notables: $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

Por tanto, la factorización queda: $P(x) = (x - 3) \cdot (x + 2)^2$.

c) $P(x) = x^3 - x^2 + 5x - 5$

Empezamos por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 5 & -5 \\ 1 & & 1 & 0 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 5)$

Ahora resolvemos la ecuación $x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 = -5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-5} \Rightarrow$ No posee raíces reales.

Por tanto, la factorización resulta: $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 5)$

d) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 10$

Utilizamos Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -5 & -10 \\ -2 & & -2 & 0 & 10 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x + 2) \cdot (x^2 - 5)$

Para factorizar el cociente utilizamos las identidades notables: $x^2 - 5 = \left(x + \sqrt{5}\right) \cdot \left(x - \sqrt{5}\right)$

Por tanto, la factorización queda: $P(x) = (x + 2) \cdot \left(x + \sqrt{5}\right) \cdot \left(x - \sqrt{5}\right)$

**2.26 Factoriza los siguientes polinomios.**

**a)** $x^2 - 25$

**b)** $x^3 - x^5$

**c)** $x^3 - x$

**d)** $x^2 - x^4$

Factorizaremos los polinomios extrayendo factor común cuando sea posible y utilizando las identidades notables:

a) $x^2 - 25 = (x + 5) \cdot (x - 5)$

b) $x^3 - x^5 = x^3 \cdot (1 - x^2) = x^3 \cdot (1 + x) \cdot (1 - x)$

c) $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

d) $x^2 - x^4 = x^2 \cdot (1 - x^2) = x^2 \cdot (1 + x) \cdot (1 - x)$

**2.27 El polinomio $P(x)$ se ha factorizado y se ha obtenido la expresión $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 6)$. ¿Para qué valores de $x$ se anula este polinomio?**

Para $x = 1$, $x = 2$ y $x = -6$ que son los valores que anulan cada uno de los factores.

**2.28 ¿Qué valor debe tener $m$ para que $(x + 3)$ sea un factor del polinomio $P(x) = x^3 - 2x + 3m$?**

Para que $(x + 3)$ sea factor de $P(x)$, $P(-3)$ tiene que ser 0.

$P(-3) = (-3)^3 - 2 \cdot (-3) + 3m = -27 + 6 + 3m$. Igualamos a 0: $-21 + 3m = 0 \Rightarrow m = 7$

**2.29 Escribe cuatro polinomios que sean irreducibles.**

Respuesta libre.

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**2.30 Calcula los valores enteros de $n$ que hacen que $\dfrac{3n^3 - 10n^2 - 23n}{n + 1}$ sea un número entero.**

Hacemos la división, obteniendo:

$$\frac{3n^3 - 10n^2 - 23n}{n + 1} = 3n^2 - 13n - 10 + \frac{10}{n + 1}$$

Buscamos los valores de $n$ para los que $n + 1$ es divisor de 10.

| | |
|---|---|
| $n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0$ | $n + 1 = -1 \Rightarrow n = -2$ |
| $n + 1 = 2 \Rightarrow n = 1$ | $n + 1 = -2 \Rightarrow n = -3$ |
| $n + 1 = 5 \Rightarrow n = 4$ | $n + 1 = -5 \Rightarrow n = -6$ |
| $n + 1 = 10 \Rightarrow n = 9$ | $n + 1 = -10 \Rightarrow n = -11$ |

**2.31 ¿Para qué valores enteros de $x$ se cumple que $\dfrac{x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x + 2}{x - 2}$ es un entero positivo?**

Hacemos la división, obteniendo:

$$\frac{x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x + 2}{x - 2} = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 + \frac{4}{x - 2}$$

A diferencia de los ejercicios anteriores, ahora nos dicen que el resultado debe ser entero y positivo. Por comodidad a la hora de sustituir, nos interesa descomponer totalmente el cociente:

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 + \frac{4}{x - 2} = (x^2 + 1)(x - 1)^2 + \frac{4}{x - 2}$$

La primera parte nunca puede ser negativa. Solo habrá que vigilar si para alguno de los valores que hacen que $\dfrac{4}{x - 2}$ sea entero el resultado total puede ser negativo.

Posibles valores de $x$:

| | |
|---|---|
| $x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$ | $x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1$ |
| $x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$ | $x - 2 = -2 \Rightarrow x = 0$ |
| $x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6$ | $x - 2 = -4 \Rightarrow x = -2$ |

Para $x = 3$, $x = 4$, $x = 6$ y $x = -2$, el resultado total es positivo, luego son soluciones válidas.

Para $x = 1$ y $x = 0$, el total es negativo, por lo que no se cumple la condición pedida.

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

## Lenguaje algebraico. Operaciones con monomios

**2.32 Expresa las siguientes cantidades en el lenguaje algebraico.**

**a) El espacio recorrido en un tiempo $t$ por un móvil que lleva velocidad constante $v$.**

**b) El volumen de un cubo de arista $x$.**

**c) El volumen de un cilindro de radio de la base $r$ y altura $h$.**

**d) El perímetro de un triángulo isósceles de lados iguales $x$ y lado desigual $y$.**

a) $E = v \cdot t$

b) $V = x^3$

c) $V = \pi r^2 h$

d) $p = 2x + y$

**2.33 En estas columnas están, desordenados, cuatro polinomios y sus respectivos valores numéricos para ciertos valores de $x$.**

| Polinomio | x | Valor numérico |
|---|---|---|
| $x^4 - 2x^2 - x + 1$ | $x = 2$ | $-1$ |
| $x^2 - 3(x + 1)$ | $x = 0$ | $-3$ |
| $\frac{x^3}{2} + 1$ | $x = 1$ | $-5$ |
| $x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x + 1$ | $x = -2$ | $1$ |

**Relaciona en tu cuaderno cada polinomio con su valor numérico para el valor de $x$ correspondiente.**

**2.34 Dados los monomios $A = 6x^2$, $B = 3x^4$, $C = \frac{1}{2}x^4$ y $D = -2x$, realiza las siguientes operaciones.**

**a) $A + D$** **c) $A - B + C$** **e) $B : C$** **g) $A \cdot B \cdot C$**

**b) $B - C$** **d) $A \cdot D$** **f) $D \cdot B$** **h) $A : D \cdot B$**

a) $A + D = 6x^2 + (-2x) = 6x^2 - 2x$

b) $B - C = 3x^4 - \frac{1}{2}x^4 = \frac{5}{2}x^4$

c) $A - B + C = 6x^2 - 3x^4 + \frac{1}{2}x^4 = 6x^2 - \frac{5}{2}x^4$

d) $A \cdot D = 6x^2 \cdot (-2x) = -12x^3$

e) $B : C = 3x^4 : \frac{1}{2}x^4 = 6$

f) $D \cdot B = -2x \cdot 3x^4 = -6x^5$

g) $A \cdot B \cdot C = 6x^2 \cdot 3x^4 \cdot \frac{1}{2}x^4 = 9x^{10}$

h) $A : D \cdot B = 6x^2 : (-2x) \cdot 3x^4 = -3x \cdot 3x^4 = -9x^5$

**2.35 Realiza las siguientes operaciones**

**a) $(-2x^2 + x) \cdot (3x^2)$**

**b) $(x^3 - 2x + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)$**

**c) $(-3x^4 + 2x^3 - 5x) : (4x)$**

**d) $(4x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2) : (2x^2)$**

a) $(-2x^2 + x) \cdot (3x^2) = -6x^4 + 3x^3$

b) $(x^3 - 2x + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}x$

c) $(-3x^4 + 2x^3 - 5x) : (4x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}$

d) $(4x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2) : (2x^2) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$

## Operaciones con polinomios

**2.36 Dados los polinomios $P(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = 3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2$ y $R(x) = -4x^4 + x^2 - 4$, realiza las siguientes operaciones.**

**a) $P(x) + Q(x)$**

**b) $Q(x) - R(x)$**

**c) $R(x) - Q(x) + P(x)$**

**d) $P(x) + Q(x) + R(x)$**

a) $P(x) + Q(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 + 3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2 = 2x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{3}x + 3$

b) $Q(x) - R(x) = \left(3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) - (-4x^4 + x^2 - 4) = 4x^4 + 3x^3 - \frac{2}{3}x + 6$

c) $R(x) - Q(x) + P(x) = -4x^4 + x^2 - 4 - \left(3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 =$

$= -4x^4 + x^2 - 4 - 3x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - 2 + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 =$

$= -4x^4 - 3x^3 + \frac{2}{3}x - 6 + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = -2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{3}x - 5$

d) $P(x) + Q(x) + R(x) = \left(2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1\right) + \left(3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) + (-4x^4 + x^2 - 4) = -2x^4 + 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{11}{3}x - 1$

**2.37 Rellena en tu cuaderno cada recuadro con el coeficiente adecuado.**

**a) $(2x^2 + \square x - 1) - (-3x^2 - 5x + \square) = 5x^2 + 2x + 4$**

**b) $(3x^4 - x + 2) - (\square x^4 + \square x + \square) = 4x^4 + 3x + 3$**

**c) $(5x^3 + \square x^2 + \square) + (\square x^3 + x^2 - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3$**

a) $(2x^2 + (-3)\,x - 1) - (-3x^2 - 5x + (-5)\,) = 5x^2 + 2x + 4$
b) $(3x^4 - x + 2) - (\,(-1)x^4 + (-4)\,x + (-1)\,) = 4x^4 + 3x + 3$
c) $(5x^3 + (-4)\,x^2 + (-1)\,) + (\,(-3)\,x^3 + x^2 - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3$

**2.38 Realiza las siguientes operaciones con los polinomios**
**$P(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1$, $Q(x) = 3x^3 - 4x - 2$ y $R(x) = 4x^2 - 5x + 3$.**

**a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$** **b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)]$** **c) $R(x) \cdot [P(x) + Q(x)]$**

**¿Qué propiedad puedes aplicar para efectuarlas?**

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) \cdot [(3x^3 - 4x - 2) + (\,4x^2 - 5x + 3)] = \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) \cdot (3x^3 + 4x^2 - 9x + 1) =$

$= \frac{3}{2}x^7 + 2x^6 - \frac{9}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 6x^6 + 8x^5 - 18x^4 + 2x^3 + 3x^3 + 4x^2 - 9x + 1 =$

$= \frac{3}{2}x^7 + 8x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{35}{2}x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 9x + 1$

b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)] = (3x^3 - 4x - 2) \cdot \left[(4x^2 - 5x + 3) - \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right)\right] =$

$= (3x^3 - 4x - 2) \cdot (4x^2 - 5x + 3 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 1) =$

$= (3x^3 - 4x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2\right) =$

$= -\frac{3}{2}x^7 - 6x^6 + 12x^5 - 15x^4 + 6x^3 + 2x^5 + 8x^4 - 16x^3 + 20x^2 - 8x + x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 10x - 4 =$

$= -\frac{3}{2}x^7 - 6x^6 + 14x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 2x - 4$

c) $R(x) \cdot [P(x) + Q(x)] = (4x^2 - 5x + 3) \cdot \left[\left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) + (\,3x^3 - 4x - 2)\right] = (4x^2 - 5x + 3) \cdot \left(\frac{1}{2}x^4 + 5x^3 - 4x - 1\right) =$

$= 2x^6 + 20x^5 - 16x^3 - 4x^2 - \frac{5}{2}x^5 - 25x^4 + 20x^2 + 5x + \frac{3}{2}x^4 + 15x^3 - 12x - 3 =$

$= 2x^6 + \frac{35}{2}x^5 - \frac{47}{2}x^4 - x^3 + 16x^2 - 7x - 3$

Podríamos haber utilizado la propiedad distributiva.

**2.39 Calcula estas potencias.**

**a)** $(x + y - 2z)^2$ **b)** $(3a - 2b + c)^2$

a) $(x + y - 2z)^2 = (x + y - 2z) \cdot (x + y - 2z) = x^2 + xy - 2zx + xy + y^2 - 2yz - 2xz - 2yz + 4z^2 =$
$= x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz$

b) $(3a - 2b + c)^2 = (3a - 2b + c) \cdot (3a - 2b + c) = 9a^2 - 6ab + 3ac - 6ab + 4b^2 - 2bc + 3ac - 2bc + c^2 =$
$= 9a^2 + 4b^2 + c^2 - 12ab + 6ac - 4bc$

## Identidades notables

**2.40 Efectúa estas operaciones.**

**a)** $(2x^2 - 3y)^2$ **d)** $(2x^4 + x^2)^2$

**b)** $(3x - 2y)^3$ **e)** $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b)$

**c)** $(3x^3 - \sqrt{x})^2$ **f)** $(2xy + 4zt) \cdot (2xy - 4zt)$

a) $(2x^2 - 3y)^2 = 4x^4 + 9y^2 - 12x^2y$
b) $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 8y^3 - 54x^2y + 36xy^2$
c) $\left(3x^3 - \sqrt{x}\right)^2 = 9x^6 + x - 6x^3\sqrt{x}$
d) $(2x^4 + x^2)^2 = 4x^8 + 4x^6 + x^4$
e) $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b) = 25a^2 - 9b^2$
f) $(2xy + 4zt) \cdot (2xy - 4zt) = 4x^2y^2 - 16z^2t^2$

## División de polinomios. Regla de Ruffini

**2.41 Realiza las siguientes divisiones de polinomios.**

**a)** $(6x^3 - 2x^2 - 1) : (x^2 + x + 2)$

**b)** $(-3x^4 + x^2 - 2x + 3) : (3x^2 - 2x + 1)$

**c)** $(x^6 - 2x^3 + 3x - 3) : (-2x^3 + x - 2)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & -2x^2 & & -1 & x^2 + x + 2 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & -6x^2 & -12x & & 6x - 8 \\ \cline{1-3}
 & -8x^2 & -12x & -1 & \\
 & 8x^2 & +8x & +16 & \\ \cline{2-4}
 & & -4x & +15 &
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
-3x^4 & & +x^2 & -2x & +3 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{6-6}
3x^4 & -2x^3 & +x^2 & & & -x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} \\ \cline{1-3}
 & -2x^3 & +2x^2 & & & \\
 & 2x^3 & -\frac{4}{3}x^2 & +\frac{2}{3}x & & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{2}{3}x^2 & -\frac{4}{3}x & +3 & \\
 & & -\frac{2}{3}x^2 & +\frac{4}{9}x & -\frac{2}{9} & \\ \cline{3-5}
 & & & -\frac{8}{9}x & +\frac{25}{9} &
\end{array}$$

c)
$$
\begin{array}{llll|l}
x^6 & & -2x^3 + 3x - 3 & & -2x^3 + x - 2 \\ \cline{5-5}
-x^6 + \frac{1}{2}x^4 - x^3 & & & & -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \\ \cline{1-1}
\quad \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 & & & & \\
\quad -\frac{1}{2}x^4 & + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x & & & \\ \cline{1-2}
\quad\quad -3x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x & & & & \\
\quad\quad 3x^3 \quad - \frac{3}{2}x + 3 & & & & \\ \cline{1-3}
\quad\quad\quad \frac{1}{4}x^2 + x & & & &
\end{array}
$$

**2.42 Expresa las siguientes divisiones de la forma $\dfrac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{d(x)}$.**

**a)** $\dfrac{3x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 1}$

**b)** $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x + 3}$

**c)** $\dfrac{4x^2 - 1}{x^2 + 3}$

**d)** $\dfrac{2x^3 + x^2 - x + 3}{x^3 + 2x - 1}$

Resolvemos realizando las divisiones:

a) $\dfrac{3x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 1} = 3 + \dfrac{-9x + 4}{x^2 + 2x - 1}$

b) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x + 3} = x - 1 + \dfrac{-3x + 1}{x^2 - x + 3}$

c) $\dfrac{4x^2 - 1}{x^2 + 3} = 4 + \dfrac{-13}{x^2 + 3}$

d) $\dfrac{2x^3 + x^2 - x + 3}{x^3 + 2x - 1} = 2 + \dfrac{x^2 - 5x + 5}{x^3 + 2x - 1}$

**2.43 Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini, e indica el cociente y el resto.**

**a)** $(3x^4 - 2x^2 + x - 3) : (x + 1)$ **b)** $(x^5 - 2x^3 - x + 1) : (x - 1)$ **c)** $(2x^3 - x^2 + 3x - 1) : (x + 2)$

a)
$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & 0 & -2 & 1 & -3 \\
-1 & & -3 & 3 & -1 & 0 \\ \hline
 & 3 & -3 & 1 & 0 & -3
\end{array}
$$

Cociente: $3x^3 - 3x^2 + x$
Resto: $-3$

b)
$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\
1 & & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ \hline
 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1
\end{array}
$$

Cociente: $x^4 + x^3 - x^2 - x - 2$
Resto: $-1$

c)
$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -1 & 3 & -1 \\
-2 & & -4 & 10 & -26 \\ \hline
 & 2 & -5 & 13 & -27
\end{array}
$$

Cociente: $2x^2 - 5x + 13$
Resto: $-27$

**2.44 Calcula el resto de las siguientes divisiones sin necesidad de realizarlas.**

**a)** $(x^7 - 3x^2 + 1) : (x - 1)$ **b)** $(x^{101} - 2) : (x + 1)$ **c)** $(x^5 - 2x^3 + 3) : (x - 3)$

**¿Qué teorema has utilizado?**

a) $P(1) = 1^7 - 3 \cdot 1^2 + 1 = -1$ Resto $= -1$
b) $P(-1) = (-1)^{101} - 2 = -1 - 2 = -3$ Resto $= -3$
c) $P(3) = 3^5 - 2 \cdot 3^3 + 3 = 243 - 54 + 3 = 192$ Resto $= 192$
He utilizado el teorema del resto.

**2.45 Halla el valor de $k$ en los siguientes polinomios teniendo en cuenta los datos indicados.**

**a) $x^3 + (k + 2)x + 1$ es divisible entre $(x + 1)$.**

**b) $(x^4 + kx^2 + 2x + 1) : (x - 1)$ tiene $-4$ de resto.**

**c) $x^4 + 3x^3 + kx^2 + x - 6$ tiene por factor $(x + 3)$.**

a) Igualamos el valor del polinomio en $-1$ a cero:

$P(-1) = (-1)^3 + (k + 2) \cdot (-1) + 1 = -1 - k - 2 + 1 = -k - 2 = 0 \Rightarrow k = -2$

b) Igualamos el valor del polinomio en 1 a $-4$:

$P(1) = 1^4 + k \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + k + 2 + 1 = 4 + k = -4 \Rightarrow k = -8$

c) Igualamos el valor del polinomio en $-3$ a 0:

$P(-3) = (-3)^4 + 3 \cdot (-3)^3 + k \cdot (-3)^2 + (-3) - 6 = 81 - 81 + 9k - 3 - 6 = 9k - 9 = 0 \Rightarrow k = 1$

## Factorización de polinomios

**2.46 Calcula las raíces enteras de los siguientes polinomios.**

**a) $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$**

**b) $Q(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$**

**c) $R(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9$**

a) Posibles raíces enteras: $\pm1$, $\pm2$, $\pm3$ y $\pm6$

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 6 = 2 + 6 - 2 - 6 = 0$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 6 = -2 + 6 + 2 - 6 = 0$

$P(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 6 = -54 + 54 + 6 - 6 = 0$

Raíces enteras de $P(x)$: 1, $-1$ y $-3$

b) Posibles raíces enteras: $\pm1$, $\pm2$, $\pm3$, $\pm4$, $\pm6$ y $\pm12$

$Q(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 12 = 1 + 2 - 7 - 8 + 12 = 0$

$Q(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 12 = 16 - 16 - 28 + 16 + 12 = 0$

$Q(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 12 = 16 + 16 - 28 - 16 + 12 = 0$

$Q(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 + 12 = 81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$

Raíces enteras de $Q(x)$: $-1$, 2, $-2$ y 3

c) Posibles raíces enteras: $\pm1$, $\pm3$ y $\pm9$

$R(3) = 3^4 + 3^3 - 8 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - 9 = 81 + 27 - 72 - 27 - 9 = 0$

$R(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 8 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 9 = 81 - 27 - 72 + 27 - 9 = 0$

Raíces enteras de $R(x)$: 3 y $-3$

**2.47 Escribe un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $x_1 = -1$, $x_1 = 2$ y $x_1 = -4$.**
**¿Existen más polinomios que verifiquen esas condiciones? ¿Por qué?**

Se tiene que anular en los tres puntos, por ejemplo:

$P(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 4) = (x^2 - x - 2) \cdot (x + 4) = x^3 + 4x^2 - x^2 - 4x - 2x - 8 = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

Tendrá las mismas soluciones cualquier polinomio que sea el resultado de multiplicar este por una constante.

**2.48 Factoriza los siguientes polinomios.**

**a) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x$**

**b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$**

**c) $R(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2$**

**d) $S(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$**

**e) $T(x) = 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 3x$**

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x - 2) \cdot (x^2 + 5x + 6) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | $-4$ | $-12$ |
| 2 | | 2 | 10 | 12 |
| | 1 | 5 | 6 | 0 |

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{1 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

c) $R(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 = x^2(x^3 - x^2 - x - 2) = x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + x + 1)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −1 | −1 | −2 |
| 2 | | 2 | 2 | 2 |
| | 1 | 1 | 1 | 0 |

$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{1 \cdot 2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

No tiene solución, el polinomio $x^2 + x + 1$ es irreducible.

d) $S(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = (x + 1) \cdot (6x^2 - x - 2) = 6(x + 1) \cdot \left(x + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \dfrac{2}{3}\right)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 6 | 5 | −3 | −2 |
| −1 | | −6 | 1 | 2 |
| | 6 | −1 | −2 | 0 |

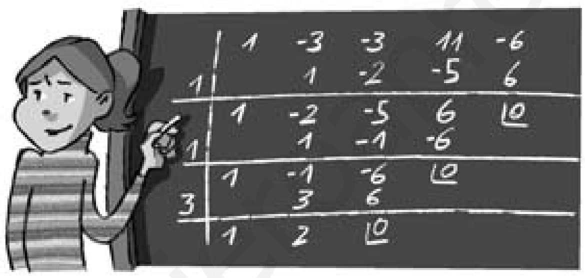
$6x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \dfrac{1 \pm 7}{12} \begin{cases} \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{-6}{12} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

e) $T(x) = 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 3x = x \cdot (2x^3 + 7x^2 + 8x + 3) = x \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + 5x + 3) = 2x \cdot (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot \left(x + \dfrac{3}{2}\right) = 2x \cdot (x + 1)^2 \cdot \left(x + \dfrac{3}{2}\right)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 7 | 8 | 3 |
| −1 | | −2 | −5 | −3 |
| | 2 | 5 | 3 | 0 |

$2x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \dfrac{-5 \pm 1}{4} \begin{cases} \dfrac{-4}{4} = -1 \\ \dfrac{-6}{4} = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$

**2.49 Observa el siguiente esquema y escribe el polinomio inicial y su expresión factorizada.**




Al dividir el polinomio entre $(x - 1)$, el resto es 0. Dividimos el nuevo cociente otra vez entre $(x - 1)$ y el resto vuelve a ser 0. El cociente resultante lo dividimos entre $(x - 3)$ y la división es exacta, quedando como cociente $(x + 2)$. Por tanto, la factorización será:

$$(x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2) = (x - 1)^2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$$

**2.50 Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 3x - 18$ sabiendo que verifica las siguientes condiciones. $P\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$, $P(-2) = 0$ y $P(-3) = 0$**

Como conocemos las raíces del polinomio, por el teorema del factor sólo nos falta conocer el coeficiente:

$$P(x) = k \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) = k \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) \cdot (x + 3) = k \cdot \left(x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 9\right) = k \cdot x^3 + \frac{7}{2}k \cdot x^2 - \frac{3}{2}k \cdot x - 9k$$

Igualando coeficientes resulta $k = 2$

## CUESTIONES PARA ACLARARSE

**2.51 ¿Cuál de estas expresiones algebraicas es un monomio?**

**a)** $\sqrt{12}\,x$ **b)** $\dfrac{4}{x}$ **c)** $3x^{-2}$ **d)** $x^2\sqrt{3}$

Para ser un monomio, el exponente debe ser natural. Vamos a ver el exponente de cada expresión:

a) Exponente 1 b) Exponente −1 c) Exponente −2 d) Exponente 2

Por tanto, los únicos monomios son los del apartado a y d.

**2.52 ¿Puedes realizar la división $(x^3 - x^2 - x + 1) : (x^2 - 1)$ utilizando la regla de Ruffini?**

Para poder dividir un polinomio entre un binomio usando Ruffini, el divisor ha de tener grado 1, y en este caso tiene grado 2; por tanto, no podremos usar Ruffini directamente.

**2.53 Un polinomio es de grado 7, y otro, de grado 6. Indica el grado de los polinomios que resultan de estas operaciones entre ellos.**

**a) La suma**

**b) El producto**

**c) El cociente**

**d) El cubo del segundo**

a) La suma tendrá grado 7, ya que es el mayor de los grados de los dos polinomios.

b) El producto tendrá grado $7 + 6 = 13$.

c) El cociente tendrá grado $7 - 6 = 1$.

d) El cubo del segundo tendrá grado $3 \cdot 6 = 18$.

**2.54 Tenemos dos polinomios de grado 3. ¿Puede el polinomio suma ser de grado 2? Pon un ejemplo.**

La suma será de grado 2 si los coeficientes de los términos de grado 3 son opuestos y los de grado dos no lo son.

Ejemplo: $(-4x^3 + 2x^2 + 3x - 1) + (4x^3 + 5x - 3) = 2x^2 + 8x - 4$

**2.55 Si $P(0) = -7$, ¿puede ser $P(x) = ax^2 + bx + 8$? Razona la respuesta.**

Si $P(x) = ax^2 + bx + 8$ entonces $P(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 8 = 8$ para cualquier valor de $a$ y $b$ por lo tanto $P(0) \neq -7$

**2.56 Indica razonadamente cuáles son las raíces del polinomio $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$.**

Este polinomio lo anulan los valores 1, $-2$ y 3.

**2.57 Si $P(8) = 0$, ¿puede $P(x)$ ser irreducible? ¿Por qué?**

Si $P(8) = 0$, por el teorema del factor sabemos que $P(x) = (x - 8) \cdot Q(x)$, donde $Q(x)$ es otro polinomio de un grado menor que $P(x)$. Por tanto, $P(x)$ no será irreducible.

**2.58 El polinomio $Q(x)$ es de grado 3 y sabemos que $Q(-1) = Q(2) = Q(0) = 0$. ¿Cuál es la posible expresión del polinomio $Q(x)$?**

**Y si además sabemos que $Q(-2) = 16$, ¿cuál es entonces su expresión exacta?**

Conociendo las raíces podemos expresar el polinomio como: $Q(x) = k \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot x = kx^3 - kx^2 - 2kx$.

Calculamos $Q(-2)$ y lo igualamos a 16:

$Q(-2) = k \cdot (-2 + 1) \cdot (-2 - 2) \cdot (-2) = k \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot (-2) = -8k \Rightarrow -8k = 16 \Rightarrow k = -2$

$Q(x) = -2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot x = -2x^3 + 2x^2 + 4x$

**2.59 Calcula el resto de la división $M(x) : (x - 6)$ sabiendo que $M(6) = 3$.**

Si $M(6) = 3$, aplicando el teorema del resto sabemos que el resto será 3.

**2.60 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**

**a) Si $(x + 6)$ divide a $L(x)$, entonces 6 es una raíz de $L(x)$.**

**b) Si $G(-5) = 0$, $(x + 5)$ es un factor de $G(x)$.**

**c) Si $B(x)$ es irreducible, existe al menos un valor $x = a$ para el que $B(a) = 0$.**

**d) Un polinomio de grado 5 no puede disponer de 6 raíces.**

**e) Un polinomio con término independiente 0 posee al menos una raíz.**

**f) $x^n + 1$ es irreducible o tiene como única raíz $-1$.**

a) Falso, ya que si $(x + 6)$ divide a $L(x)$, entonces $-6$ es una raíz de $L(x)$.

b) Verdadero, por el teorema del factor.

c) Falso, ya que si existiese un valor tal que $B(a) = 0$, entonces $(x - a)$ dividiría a $B(x)$, y este no sería irreducible.

d) Verdadero, el teorema fundamental del álgebra nos indica que como mucho tendrá 5 raíces.

e) Verdadero, ya que $x = 0$ será una raíz.

f) Verdadero, ya que:

Si $n$ es par, $x^n + 1 = 0 \Rightarrow x^n = -1$ no tiene solución; por tanto, el polinomio será irreducible.

Si $n$ es impar, $x^n + 1 = 0 \Rightarrow x^n = -1 \Rightarrow x = -1$.

**2.61 ¿Es divisible entre $(x + 3)$ el polinomio $x^9 + 3^9$?**

Calculemos $P(-3)$: $P(-3) = (-3)^9 + 3^9 = -3^9 + 3^9 = 0$, por lo que el polinomio es divisible entre $(x + 3)$.

**2.62 Indica cuál de estos polinomios tiene $-8$ como raíz y 24 de término independiente.**

**a) $3x - 24$** **b) $3x + 24$** **c) $24x + 8$** **d) $24(x + 8)$**

El b), porque $3 \cdot (-8) + 24 = 0 \Rightarrow -8$ es raíz, y 24, el término independiente.

**2.63 ¿Qué polinomio podría expresarse como el cociente $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$?**

$$\begin{array}{rl|l}
x^2 - 4x + 3 & & x - 1 \\
\cline{3-3}
-x^2 + x & & x - 3 \\
\cline{1-1}
-3x + 3 & & \\
3x - 3 & & \\
\cline{1-1}
0 & &
\end{array}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = x - 3$$

**2.64 Si el polinomio $P(x) = x^2 - kx + t$ tiene una raíz doble en $x = 2$, ¿cuánto valen $k$ y $t$?**

Raíz doble en $x = 2 \Rightarrow P(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

Igualamos al polinomio: $x^2 - kx + t = x^2 - 4x + 4$

Igualamos coeficientes: $k = 4$, $t = 4$

**2.65 Calcula el resto de esta división: $(x^{157} - 49x^{38} + 17) : (x + 1)$**

Aplicando el teorema del resto:

$P(-1) = (-1)^{157} - 49 \cdot (-1)^{38} + 17 = -1 - 49 + 17 = -33$

Por tanto, el resto será $-33$.

**2.66 $Q(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros cuyo término independiente es un número primo, $a$. Si además se cumple que:**

$$Q(\pm a) \neq 0 \text{ y } Q(\pm 1) \neq 0$$

**Indica razonadamente si $Q(x)$ puede tener raíces enteras.**

Si el término independiente de $Q(x)$ es $a$, las raíces enteras de $Q(x)$ serán los divisores de $a$.

Como $a$ es primo, sus únicos divisores serán $\pm 1$ y $\pm a$.

$Q(\pm a)$ y $Q(\pm 1)$ son distintos de cero; por tanto, $Q(x)$ no tiene raíces enteras.

## PROBLEMAS PARA APLICAR

**2.67 Relaciona en tu cuaderno las magnitudes indicadas correspondientes a un triángulo equilátero de lado $x$ con los monomios de la columna de la derecha.**

Perímetro: $3x$ Área: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ Altura: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

**2.68 Escribe el polinomio que expresa el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son números consecutivos, siendo el mayor de ellos $x$.**

Las dimensiones serán $x$, $x - 1$ y $x - 2$. Por tanto, el volumen queda:

$\text{Vol} = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = x \cdot (x^2 - 3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

**2.69 Utiliza la notación polinómica para demostrar que la suma de un múltiplo de 12, un múltiplo de 8 y un múltiplo de 20 es múltiplo de 4.**

Sean $p$, $q$ y $r$ números naturales.

Un múltiplo de 12 será de la forma $12 \cdot p$.

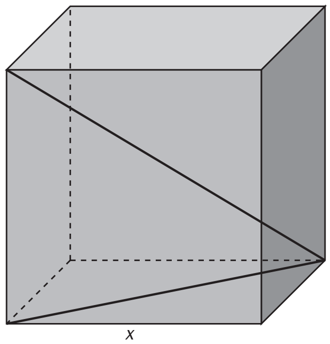
Un múltiplo de 8 será de la forma $8 \cdot q$.

Un múltiplo de 20 será de la forma $20 \cdot r$.

Su suma será: $12p + 8q + 20r$.

Sacando factor común: $12p + 8q + 20r = 4 \cdot (3p + 2q + 5r)$, obteniendo claramente un múltiplo de 4.

**2.70** **¿Qué monomio expresa la diagonal de un cubo de lado *x*?**



Calculamos primero la diagonal de la base usando el teorema de Pitágoras:

$d^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow d^2 = 2x^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}\,x$

Esta diagonal, una arista y la diagonal del cubo forman un triángulo rectángulo, por lo que podemos volver a utilizar el teorema de Pitágoras:

$D^2 = \left(\sqrt{2}\,x\right)^2 + x^2 \Rightarrow D^2 = 2x^2 + x^2 \Rightarrow D^2 = 3x^2 \Rightarrow D = \sqrt{3}\,x$

Por tanto, el monomio que expresa la diagonal del cubo es $\sqrt{3}\,x$.

**2.71** **Sean los polinomios $E(x) = 4\pi x^2$, $F(x) = \frac{5}{3}\pi x^2$ y $G(x) = 2\pi x^2 + 10\pi x$, asociados a distintas figuras geométricas. Relaciona en tu cuaderno las cantidades de estas tres columnas.**

| | | |
|---|---|---|
| **Volumen de un cono de radio 3 y altura 5.** | ***G*(3)** | **$36\pi$** |
| **Área de un cilindro de altura 5 y radio 3.** | ***E*(3)** | **$15\pi$** |
| **Volumen de una esfera de radio 3.** | ***F*(3)** | **$48\pi$** |

Calculamos el valor de los tres polinomios en $x = 3$.

$E(3) = 4\pi 3^2 = 36\pi$

$F(3) = \frac{5}{3}\pi 3^2 = 15\pi$

$G(3) = 2\pi 3^2 + 10\pi 3 = 18\pi + 30\pi = 48\pi$

Calculamos las áreas y los volúmenes:

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5 $= \frac{1}{3}\pi\, r^2 h = \frac{1}{3}\pi\, 3^2 \cdot 5 = 15\pi$

Área de un cilindro de altura 5 y radio 3 $= 2 \cdot \pi r^2 + 2\, \pi r h = 2 \cdot \pi 3^2 + 2\, \pi 3 \cdot 5 = 18\pi + 30\pi = 48\pi$

Volumen de una esfera de radio 3 $= \frac{4}{3}\pi\, r^3 = \frac{4}{3}\pi\, 3^3 = 36\,\pi$

Por tanto, la relación queda:

| | | |
|---|---|---|
| Volumen de un cono de radio 3 y altura 5. | *F*(3) | $15\pi$ |
| Área de un cilindro de altura 5 y radio 3. | *G*(3) | $48\pi$ |
| Volumen de una esfera de radio 3. | *E*(3) | $36\pi$ |

**2.72** **Calcula *a*, *b* y *c* sabiendo que $x^3 - 6x^2 + ax + b$ es el cubo del binomio $x + c$.**

$(x + c)^3 = x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3$

Igualamos los coeficientes correspondientes a los términos de igual grado:

$-6 = 3c \Rightarrow c = -2$

$a = 3c^2 \Rightarrow a = 3 \cdot (-2)^2 \Rightarrow a = 12$

$b = c^3 \Rightarrow b = (-2)^3 \Rightarrow b = -8$

**2.73 Halla los valores de $a$ y $b$ para que los restos de las divisiones del producto $(ax^2 + bx) \cdot (x - 3)$ entre $(x - 1)$ y $(x + 1)$ sean, respectivamente, $-6$ y $-2$.**

Utilizamos el teorema del resto, calculando el valor del polinomio en 1 y $-1$ e igualándolos a los valores del resto que nos da el enunciado.

$P(1) = (a \cdot 1^2 + b \cdot 1) \cdot (1 - 3) = (-2) \cdot (a + b) = -6 \Rightarrow a + b = 3$ Sumando $2a = 3 + \dfrac{1}{2}$ $2a = \dfrac{7}{2} \Rightarrow a = \dfrac{7}{4}$

$P(-1) = [a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1)] \cdot (-1 - 3) = (-4) \cdot (a - b) = -2 \Rightarrow a - b = \dfrac{1}{2}$ Restando $2b = 3 - \dfrac{1}{2}$ $2b = \dfrac{5}{2} \Rightarrow b = \dfrac{5}{4}$

**2.74 Simplifica los siguientes polinomios.**

**a) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x + 3) - x(2x + 1) - 4$**

**b) $(x^2 + 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1) - x^6 + 2x^3$**

a) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x + 3) - x(2x + 1) - 4 = x^2 - 4 - x^2 + 9 - 2x^2 - x - 4 = -2x^2 - x + 1$

b) $(x^2 + 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1) - x^6 + 2x^3 = x^6 - 2x^5 + 3x^4 + x^2 + 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 2x + x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1 - x^6 + 2x^3 =$
$= 6x^3 + 4x^2 + 2x + 1$

**2.75 Calcula los valores de $a$ y $b$ necesarios para que se cumplan estas igualdades.**

**a) $x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1)$**

**b) $x^6 - x^5 - 2x^4 - 4x^2 + 4x + 8 = (x^2 - x - 2)(x^4 + ax^3 + bx - 4)$**

Multiplicamos e igualamos los coeficientes:

a) $(x - 2)(x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1) = x^5 + ax^4 + bx^3 + 2x^2 + x - 2x^4 - 2ax^3 - 2bx^2 - 4x - 2 = x^5 + (a - 2)x^4 + (b - 2a)x^3 +$
$+ (2 - 2b)x^2 - 3x - 2$

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

$b - 2a = -5 \Rightarrow b - 2 \cdot 2 = -5 \Rightarrow b = -1$

$2 - 2b = 4$. Vemos que es correcta con los valores que habíamos obtenido.

b) $(x^2 - x - 2)(x^4 + ax^3 + bx - 4) = x^6 + ax^5 + bx^3 - 4x^2 - x^5 - ax^4 - bx^2 + 4x - 2x^4 - 2ax^3 - 2bx + 8 = x^6 + (a - 1)x^5 -$
$- (a + 2)x^4 + (b - 2a)x^3 - (4 + b)x^2 + (4 - 2b)x + 8$

$a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$

$-a - 2 = -2$ sirve de comprobación.

$b - 2a = 0 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow b = 0$

$-4 - b = -4$ sirve de comprobación.

$4 - 2b = 4$ sirve de comprobación.

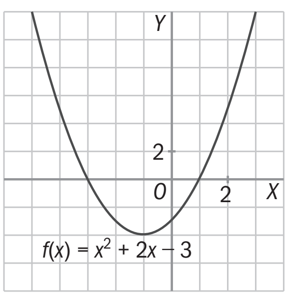
**2.76 Halla un polinomio de segundo grado, $R(x)$, que cumpla $R(1) = 5$, $R(-1) = 9$ y $R(0) = 4$.**

$R(x)$ será de la forma $R(x) = ax^2 + bx + c$; veamos qué valores toma en cada punto:

$$\left.\begin{array}{l} R(1) = a1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c = 5 \\ R(-1) = a(-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c = 9 \\ R(0) = a0^2 + b \cdot 0 + c = c = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumamos } 2a + 2c = 14 \Rightarrow 2a + 2 \cdot 4 = 14 \Rightarrow 2a = 14 - 8 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \\ \text{Resto: } 2b = -4 \Rightarrow b = -2 \\ c = 4 \end{array}$$

El polinomio resultante es: $R(x) = 3x^2 - 2x + 4$

**2.77 Observa la gráfica de $y = f(x)$ y halla las raíces del polinomio $f(x) = x^2 + 2x - 3$.**




Las raíces de este polinomio coinciden con los puntos de corte de la gráfica con el eje $OX$, es decir, $x = 1$ y $x = -3$.

**2.78 Estudia el signo de este polinomio por el procedimiento que se indica a continuación.**

$$Q(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

**a) Encuentra sus ceros.**

**b) Divide la recta real en los intervalos que tienen por extremos esos ceros.**

**c) Elige un punto en cada uno de esos intervalos y calcula el valor numérico de $Q(x)$ en ese punto. El signo de este valor numérico es el signo de $Q(x)$ en todo el intervalo.**

a) Ceros en $x = -2$, $x = 1$ y $x = 3$

b) Intervalos $x \leq -2$, $-2 < x \leq 1$, $1 < x \leq 3$, $x > 3$ (la respuesta no es única, ya que el valor "=" se puede considerar en un intervalo o en el siguiente)

c) Aunque el punto elegido y el valor obtenido en cada intervalo no tienen por qué coincidir, el signo sí.

$x = -3$ $\quad Q(-3) = (-3 + 2)(-3 - 1)(-3 - 3) = (-1) \cdot (-4) \cdot (-6) < 0 \Rightarrow$ para $x \leq -2$ $Q(x)$ es negativo.

$x = 0$ $\quad Q(0) = (0 + 2)(0 - 1)(0 - 3) = 2 \cdot (-1) \cdot (-3) > 0 \Rightarrow$ para $-2 < x \leq 1$ $Q(x)$ es positivo.

$x = 2$ $\quad Q(2) = (2 + 2)(2 - 1)(2 - 3) = 4 \cdot 1 \cdot (-1) < 0 \Rightarrow$ para $1 < x \leq 3$ $Q(x)$ es negativo.

$x = 4$ $\quad Q(4) = (4 + 2)(4 - 1)(4 - 3) = 6 \cdot 3 \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ para $x > 3$ $Q(x)$ es positivo.

**2.79 La expresión que nos da la posición, $s$, de un objeto que sigue un movimiento uniformemente acelerado es: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$**

**Donde $a$ es la aceleración; $v_0$, la velocidad inicial; $s_0$, la posición inicial, y $t$, el tiempo.**

**a) ¿Puede el polinomio $M(t) = 5t^2 + 6t + 3$ describir un movimiento uniformemente acelerado? Identifica en, caso afirmativo, los valores de $a$, $v_0$ y $s_0$.**

**b) ¿Puede el monomio $T(t) = 4{,}9t^2$ corresponder a un cuerpo que se deja caer en el vacío? ¿Por qué? ¿Cuál es el valor de $a$ en este caso?**

a) $M(t)$ puede identificar un movimiento uniformemente acelerado donde

$\frac{1}{2}a = 5 \Rightarrow a = 10$; $v_0 = 6$; $s_0 = 3$

b) Vamos a identificar los valores.

$\frac{1}{2}a = 4{,}9 \Rightarrow a = 9{,}8$ (valor correspondiente a la gravedad)

$v_0 = 0$ (parte de velocidad inicial nula)

$s_0 = 0$ (cuando comienza a caer no ha recorrido ningún espacio)

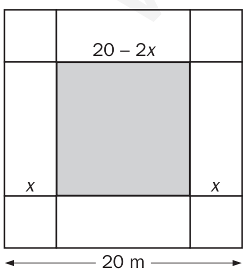
**2.80 Un Ayuntamiento quiere construir un depósito metálico de agua.**

**Disponen de una pieza cuadrada de metal de 20 x 20 metros de la que cortan cuatro cuadrados de lado $x$ en las cuatro esquinas, y levantan los cuatro rectángulos resultantes para formar los laterales del depósito, soldando las esquinas.**

**a) ¿Qué polinomio $V(x)$ expresa el volumen que puede acumular el depósito?**

**b) Halla los valores numéricos de $V$ en $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y $6$, y después dibuja los puntos $[x, V(x)]$.**

**c) ¿Podrías averiguar para qué valor de $x$ el depósito tiene el máximo volumen?**




a) Área de la base: $(20 - 2x) \cdot (20 - 2x)$; altura: $x \Rightarrow V(x) = (20 - 2x)^2 \cdot x$

b) $x = 0 \Rightarrow V(0) = (20 - 2 \cdot 0)^2 \cdot 0 = 0$

$x = 1 \Rightarrow V(1) = (20 - 2 \cdot 1)^2 \cdot 1 = 324$

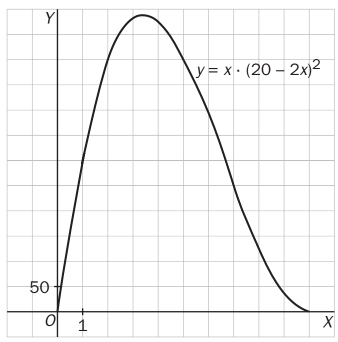
$x = 2 \Rightarrow V(2) = (20 - 2 \cdot 2)^2 \cdot 2 = 512$

$x = 3 \Rightarrow V(3) = (20 - 2 \cdot 3)^2 \cdot 3 = 588$

$x = 4 \Rightarrow V(4) = (20 - 2 \cdot 4)^2 \cdot 4 = 576$

$x = 5 \Rightarrow V(5) = (20 - 2 \cdot 5)^2 \cdot 5 = 500$

$x = 6 \Rightarrow V(6) = (20 - 2 \cdot 6)^2 \cdot 6 = 384$




c) En la gráfica podemos apreciar que cerca de $x = 3$ el volumen del depósito es máximo.

## Operaciones con polinomios

**2.81 Dados los polinomios $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 10x - 5$, $Q(x) = 6x^4 - 5x^3 + 8x - 5$ y $R(x) = -x^2 - 3x + 8$, aplica la propiedad distributiva y calcula estos productos.**

**a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$**

**b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)]$**

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x) = (3x^3 - 4x^2 + 10x - 5) \cdot (6x^4 - 5x^3 + 8x - 5) + (3x^3 - 4x^2 + 10x - 5) \cdot (-x^2 - 3x + 8) =$
$= 18x^7 - 15x^6 + 24x^4 - 15x^3 - 24x^6 + 20x^5 - 32x^3 + 20 + 60x^5 - 50x^4 + 80x^2 - 50x - 30x^4 + 25x^3 - 40x + 25 - 3x^5 - 9x^4 + 24x^3 +$
$+ 4x^4 + 12x^3 - 32x^2 - 10x^3 - 30x^2 + 80x + 5x^2 + 15x - 40 = 18x^7 - 39x^6 + 77x^5 - 61x^4 + 4x^3 + 43x^2 + 5x - 15$

b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)] = Q(x) \cdot R(x) - Q(x) \cdot P(x) = (6x^4 - 5x^3 + 8x - 5) \cdot (-x^2 - 3x + 8) - (6x^4 - 5x^3 + 8x - 5) \cdot (3x^3 - 4x^2 + 10x - 5) =$
$= (-6x^6 - 18x^5 + 48x^4 + 5x^5 + 15x^4 - 40x^3 - 8x^3 - 24x^2 + 64x + 5x^2 + 15x - 40) - (18x^7 - 24x^6 + 60x^5 - 30x^4 - 15x^6 + 20x^5 -$
$- 50x^4 + 25x^3 + 24x^4 - 32x^3 + 80x^2 - 40x - 15x^3 + 20x^2 - 50x + 25) = (-6x^6 - 13x^5 + 63x^4 - 48x^3 - 19x^2 + 79x - 40) - (18x^7 -$
$- 39x^6 + 80x^5 - 56x^4 - 22x^3 + 100x^2 - 90x + 25) = -6x^6 - 13x^5 + 63x^4 - 48x^3 - 19x^2 + 79x - 40 - 18x^7 + 39x^6 - 80x^5 + 56x^4 +$
$+ 22x^3 - 100x^2 + 90x - 25 = -18x^7 + 33x^6 - 93x^5 + 119x^4 - 26x^3 - 119x^2 + 169x - 65$

**2.82 Completa la siguiente división de polinomios en tu cuaderno rellenando los coeficientes que faltan.**

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +\square x^3 & +\square x^2 & -4x & +1 & x^2 - x + 2 \\
\cline{6-6}
-\square x^4 & +\square x^3 & +\square x^2 & & & \square x^2 + \square x \\
\cline{1-5}
 & x^3 & -x^2 & -4x & +1 & \\
 & -\square x^3 & +\square x^2 & +\square x & & \\
\cline{2-5}
 & & +\square x^2 & +\square x & +1 &
\end{array}$$

**Aplica la prueba de la división para comprobar que la has realizado correctamente.**

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +(-1)x^3 & +3x^2 & -4x & +1 & x^2 - x + 2 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & +2x^3 & -4x^2 & & & 2x^2 + x \\
\cline{1-5}
 & +x^3 & -x^2 & -4x & +1 & \\
 & -x^3 & +x^2 & -2x & & \\
\cline{2-5}
 & & & -6x & +1 &
\end{array}$$

$d(x) \cdot c(x) + r(x) = (x^2 - x + 2) \cdot (2x^2 + x) + (-6x + 1) = 2x^4 + x^3 - 2x^3 - x^2 + 4x^2 + 2x - 6x + 1 = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = D(x)$

**2.83 Utilizando la regla de Ruffini, averigua si $(x - 3)$ es factor del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15$. ¿Tiene más factores dicho polinomio? ¿Por qué?**

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -4 & 8 & -15 \\
3 & & 3 & -3 & 15 \\
\hline
 & 1 & -1 & 5 & 0
\end{array}$$

Obtenemos resto 0, es decir, $(x - 3)$ es factor de $P(x)$

El cociente queda: $x^2 - x + 5$.

Resolvemos: $x^2 - x + 5 = 0$.

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-19}}{2}$. No existe solución; por tanto, $P(x)$ solo tiene un factor de primer grado.

## Identidades notables

**2.84 Desarrolla estas expresiones.**

**a) $(4x^2y^3 - 5y^2t)^2$**

**b) $(-3 + 6b^3c^4)^2$**

**c) $(2x - 3y)^3$**

**d) $(5x^3z + 7y^2t) \cdot (5x^3z - 7y^2t)$**

a) $(4x^2y^3 - 5y^2t)^2 = 16x^4y^6 + 25y^4t^2 - 40x^2y^5t$

b) $(-3 + 6b^3c^4)^2 = 9 + 36b^6c^8 - 36b^3c^4$

c) $(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

d) $(5x^3z + 7y^2t) \cdot (5x^3z - 7y^2t) = 25x^6z^2 - 49y^4t^2$

## Raíces y factorización de polinomios

**2.85 Indica si los valores $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ son raíces del polinomio $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + 7x - 6$.**

$P(2) = 2^5 + 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2 - 6 = 32 + 16 - 56 + 14 - 6 = 0$; $x_1 = 2$ es raíz de este polinomio.

$P(1) = 1^5 + 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1 - 6 = 1 + 1 - 7 + 7 - 6 = -4$; $x_2 = 1$ no es raíz de este polinomio.

**2.86 Halla el polinomio de cuarto grado cuyo coeficiente principal es 3 y que tiene por raíces $x_1 = 1$ (raíz doble), $x_2 = -2$ y $x_3 = 4$. Desarróllalo.**

$$3(x-1)^2(x+2)(x-4) = 3(x^2-2x+1)(x^2-2x-8) = 3(x^4-2x^3-8x^2-2x^3+4x^2+16x+x^2-2x-8) =$$
$$= 3(x^4-4x^3-3x^2+14x-8) = 3x^4-12x^3-9x^2+42x-24$$

**2.87 Factoriza los siguientes polinomios.**
**a) $x^3 - x^2 - 5x - 3$**
**b) $3x^4 - 5x^3 - 33x^2 + 23x - 12$**

a) $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1)\cdot(x^2-2x-3) = (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x-3) = (x+1)^2\cdot(x-3)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −1 | −5 | −3 |
| −1 | | −1 | 2 | 3 |
| | 1 | −2 | −3 | 0 |

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot(-3)\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{2+\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

b) $Q(x) = 3x^4 - 5x^3 - 33x^2 + 23x - 12 = (x+3)\cdot(3x^3-14x^2+9x-4) = (x+3)\cdot(x-4)\cdot(3x^2-2x+1)$

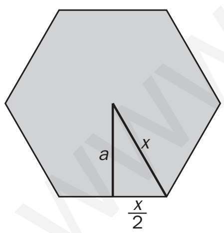
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | −5 | −33 | 23 | −12 |
| −3 | | −9 | 42 | −27 | 12 |
| | 3 | −14 | 9 | −4 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | −14 | 9 | −4 |
| 4 | | 12 | −8 | 4 |
| | 3 | −2 | 1 | 0 |

$$3x^2-2x+1=0 \Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3} = \frac{2\pm\sqrt{-8}}{6} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

### AMPLIACIÓN

**2.88 En un hexágono regular de lado $x$, ¿qué polinomio determina la expresión de su área?**




En un hexágono regular, el radio y el lado coinciden. Con estos dos datos y sabiendo que la apotema corta el lado en su punto medio, podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$A = \frac{6x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

**2.89 Halla el polinomio de tercer grado que cumple estas tres condiciones.**
- **Su coeficiente principal es 8.**
- **Es divisible por $2x^2 + 1$.**
- **El resto de su división entre $(x + 2)$ es 56.**

En este polinomio, un factor es $(2x^2 + 1)$; para que su coeficiente principal sea 8, multiplicamos el factor por 4. Por último, para que tenga grado 3 deberemos multiplicarlo por un binomio de grado 1 de la forma $(x + b)$, quedando:

$$P(x) = 4(2x^2+1)(x+b).$$

Aplicamos por último el teorema del resto para calcular $b$:

$$P(-2) = 4(2\cdot(-2)^2+1)(-2+b) = 4\cdot 9(-2+b) = 36(-2+b) = 56 \Rightarrow -2+b = \frac{56}{36} = \frac{14}{9} \Rightarrow b = \frac{14}{9}+2 \Rightarrow b = \frac{32}{9}$$

Entonces, $P(x) = 4(2x^2+1)\left(x + \frac{32}{9}\right)$

**2.90 Demuestra que el polinomio $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ no toma valores numéricos negativos para ningún valor de $x$.**

Factorizamos el polinomio usando Ruffini y observando que aparece el cubo de un binomio:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ -1 & & -1 & -3 & -3 & -1 \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x + 1) \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = (x + 1) \cdot (x + 1)^3 = (x + 1)^4$$

Un número elevado a cuatro nunca puede ser negativo.

**2.91 Si $N(x) = 8x^3 + ax^2 + 54x + b$, calcula $a$ y $b$ para que $N(x)$ sea un cubo perfecto. En ese caso, ¿qué polinomio al cubo da como resultado $N(x)$?**

$$8x^3 + ax^2 + 54x + b = (2x + c)^3;\ (2x + c)^3 = 8x^3 + 12cx^2 + 6c^2x + c^3$$

Igualando coeficientes:

$6c^2 = 54 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = \pm 3$

$12c = a \Rightarrow 12 \cdot 3 = a \Rightarrow a = 36$ ó $12 \cdot (-3) = a \Rightarrow a = -36$

$b = c^3 \Rightarrow b = 27$ ó $b = -27$

$$N(x) = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (2x + 3)^3 \qquad \text{o} \qquad N(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = (2x - 3)^3$$

**2.92 Demuestra que la suma de la unidad más la suma de los cuadrados de tres números consecutivos es divisible entre tres.**

$$1 + x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 3x^2 + 6x + 6 = 3(x^2 + 2x + 2) \Rightarrow \text{Es múltiplo de 3.}$$

**2.93 Halla $a$ y $b$ para que $T(x)$ sea divisible entre $A(x)$ en estos dos casos.**
**a) $T(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 9$ y $A(x) = x^2 - 9$**
**b) $T(x) = 2x^4 + ax^3 - x^2 + bx - 1$ y $A(x) = x^2 - 1$**

a) $A(x) = x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$; tendrá que ser divisible entre $(x + 3)$ y entre $(x - 3)$.

$$\left.\begin{array}{l} T(3) = 3 \cdot 3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 9 = 81 + 9a + 3b + 9 = 9a + 3b + 90 = 0 \\ T(-3) = 3 \cdot (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 9 = -81 + 9a - 3b + 9 = 9a - 3b - 72 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Sumamos } 18a + 18 = 0;\ a = -1 \\ \text{Resto: } 6b + 162 = 0;\ b = -27 \end{array}$$

b) $A(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$; tendrá que ser divisible entre $(x + 1)$ y entre $(x - 1)$.

$$\left.\begin{array}{l} T(1) = 2 \cdot 1^4 + a \cdot 1^3 - 1^2 + b \cdot 1 - 1 = 2 + a - 1 + b - 1 = a + b = 0 \\ T(-1) = 2 \cdot (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + b \cdot (-1) - 1 = 2 - a - 1 - b - 1 = -a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Tiene infinitas soluciones, la} \\ \text{única condición será: } a = -b \end{array}$$

**2.94 Completa en tu cuaderno esta división.**

$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{-1} & \square & \mathbf{1} & \square \\ \square & & \square & \square & \square \\ \hline & \square & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-4} \end{array}$$

Llamamos $(x - a)$ al divisor y completaremos las cantidades que nos sea posible.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & \square & 1 & \square \\ a & & -a & 2a & -3a \\ \hline & -1 & 2 & -3 & -4 \end{array}$$

Obtenemos la ecuación
$1 + 2a = -3$
Entonces, $a = -2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 2-2 & 1 & -4-6 \\ -2 & & 2 & -4 & 6 \\ \hline & -1 & 2 & -3 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 1 & -10 \\ -2 & & 2 & -4 & 6 \\ \hline & -1 & 2 & -3 & -4 \end{array}$$

**2.95 Factoriza el numerador y el denominador para encontrar una expresión simplificada de la fracción algebraica $\frac{L(x)}{R(x)}$, si $L(x) = 3x^3 - 16x^2 + 17x - 4$ y $R(x) = 2x^3 - 13x^2 + 23x - 12$.**

$L(x) = 3x^3 - 16x^2 + 17x - 4 = 3(x - 1)(x - 4)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -16 & 17 & -4 \\ 1 & & 3 & -13 & 4 \\ \hline & 3 & -13 & 4 & 0 \end{array} \qquad 3x^2 - 13x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 48}}{6} = \frac{13 \pm 11}{6} \begin{cases} 4 \\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$R(x) = 2x^3 - 13x^2 + 23x - 12 = 2(x - 1)(x - 4)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -13 & 23 & -12 \\ 1 & & 2 & -11 & 12 \\ \hline & 2 & -11 & 12 & 0 \end{array} \qquad 2x^2 - 11x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{4} = \frac{11 \pm 5}{4} \begin{cases} 4 \\ \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{L(x)}{R(x)} = \frac{3(x-1)(x-4)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{2(x-1)(x-4)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{3x - 1}{2x - 3}$$

**2.96 Estudia el signo del polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ según el proceso de la actividad número 78.**

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x = x(x^2 + 3x - 10) = x(x - 2)(x + 5)$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$$

Si $x < -5 \Rightarrow$ Por ejemplo $x = -6 \Rightarrow P(-6) = (-6) \cdot (-6 - 2) \cdot (-6 + 5) = (-6) \cdot (-8) \cdot (-1) < 0 \Rightarrow P(x)$ es negativo.

Si $-5 \leq x < 0 \Rightarrow$ Por ejemplo $x = -1 \Rightarrow P(-1) = (-1) \cdot (-1 - 2) \cdot (-1 + 5) = (-1) \cdot (-3) \cdot (4) > 0 \Rightarrow P(x)$ es positivo.

Si $0 \leq x < 2 \Rightarrow$ Por ejemplo $x = 1 \Rightarrow P(1) = (1) \cdot (1 - 2) \cdot (1 + 5) = (1) \cdot (-1) \cdot (6) < 0 \Rightarrow P(x)$ es negativo.

Si $x \geq 2 \Rightarrow$ Por ejemplo $x = 3 \Rightarrow P(3) = (3) \cdot (3 - 2) \cdot (3 + 5) = (3) \cdot (1) \cdot (8) > 0 \Rightarrow P(x)$ es positivo.

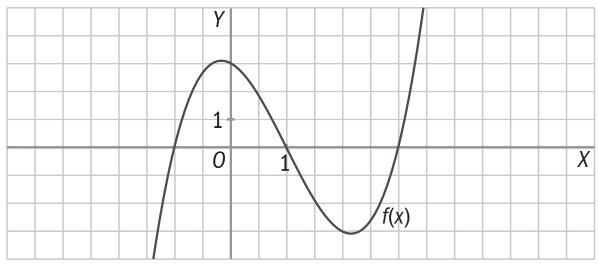
**2.97 La gráfica de la función polinómica $y = f(x)$ es la siguiente.**

**¿Cuál de los siguientes puede ser $f(x)$?**

**a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$**

**b) $f(x) = x^3 - 4x$**

**c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$**




La gráfica corta el eje $OX$ en $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

a) $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 + 6 = 1 - 4 + 1 + 6 = 4 \neq 0$.
No corresponde.

b) $f(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) = -1 + 4 \neq 0$. No corresponde.

c) $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 1 + 3 = -1 - 3 + 1 + 3 = 0$
$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$
$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 3 + 3 = 27 - 27 - 3 + 3 = 0$
Corresponde con la gráfica.

**2.98 La suma de las raíces de un polinomio de grado 2 es 2, y su producto, −3. ¿Cuál es el polinomio sabiendo que su coeficiente de grado 2 es 1?**

Será de la forma $(x - a) \cdot (x - b) = x^2 - ax - bx + ab = x^2 - (a + b)x + ab$.
Sabemos que $a + b = 2$, y $a \cdot b = -3$.
Sustituimos: $x^2 - 2x - 3$.

**2.99 Si $M(-1) = 5$, $M\left(\frac{1}{2}\right) = 5$, $M(-4) = 5$ y $M(12) = 5$, y el grado de $M(x)$ cuatro, ¿cuál es su expresión?**

Buscamos un polinomio de grado 4, que se anule en $-1, \frac{1}{2}, -4, 12$, y le sumamos 5 para que en esos valores su valor sea 5:

$$M(x) = (x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 4)(x - 12) + 5$$

**2.100 Transformaciones en una fracción**

**Dada una fracción inicial cualquiera, realizamos las siguientes transformaciones sucesivas.**

**a) Aplica las transformaciones a las fracciones:**

$$\frac{1}{3}\quad \frac{4}{5}\quad \text{y}\quad \frac{7}{10}$$

**b) ¿Qué relación verifican las fracciones inicial y final?**

**Demuestra, a partir de una fracción genérica $\frac{a}{b}$, la conjetura que has obtenido en el apartado anterior.**

FRACCIÓN INICIAL

$A = \left(\text{FRACCIÓN INICIAL}\right)^{-1} - \text{FRACCIÓN INICIAL}$ | $B = \left(\text{FRACCIÓN INICIAL}\right)^{-1} + 1$

$\text{FRACCIÓN FINAL} = \frac{A}{B}$

$\frac{1}{3}$

$A = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ | $B = 3 + 1 = 4$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{8}{3}}{4} = \frac{2}{3}$$

Relación: $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{7}{10}$

$A = \frac{10}{7} - \frac{7}{10} = \frac{51}{70}$ | $B = \frac{10}{7} + 1 = \frac{17}{7}$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{51}{70}}{\frac{17}{7}} = \frac{51 \cdot 7}{70 \cdot 17} = \frac{3}{10}$$

Relación: $1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

$\frac{4}{5}$

$A = \frac{5}{4} - \frac{4}{5} = \frac{9}{20}$ | $B = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Relación: $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$x$

$A = \frac{1}{x} - x = \frac{1 - x^2}{x}$ | $B = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x + 1}{x}$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1 - x^2}{x}}{\frac{x + 1}{x}} = \frac{1 - x^2}{x + 1} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 + x} = 1 - x$$

Vemos que se cumple la relación.

**2.101 Cambio de dimensiones**

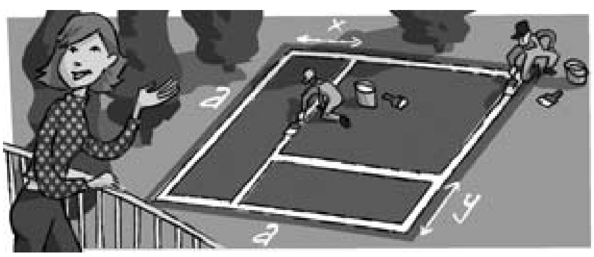
**Esther, Elvira y Emilia han heredado de su abuelo el terreno que aparece en la figura, que tiene forma cuadrada de lado *a*.**

**A Esther le corresponde la franja vertical de *x* metros; a Elvira, la franja horizontal de y metros, y a Emilia, el resto.**

**Escribe mediante polinomios las siguientes medidas.**

**a) La superficie de terreno correspondiente a Emilia.**

**b) El área que heredan Esther y Elvira. Calcula la relación entre estas dos áreas si el terreno inicial tiene de lado 100 metros, y las anchuras de las franjas son de 30 y 40 metros, respectivamente.**




a) Esther: $ax$

Elvira: $y \cdot (a - x)$

Emilia: $(a - x) \cdot (a - y)$

b) Esther $= 100 \cdot 30 = 3000$ m$^2$

Elvira $= 40 \cdot (100 - 30) = 2800$ m$^2$

Emilia $= (100 - 30) \cdot (100 - 40) = 4200$ m$^2$

**2.A1 Transcribe las dos siguientes expresiones verbales al lenguaje algebraico.**
**a) La multiplicación de tres números consecutivos.**
**b) El perímetro de un rectángulo de base *b* y altura *h*.**

a) $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$

b) $2b + 2h$

**2.A2 Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$. $P(x) = \dfrac{x^3}{2} - 2(x^2 - 1)$**

$P(2) = \dfrac{2^3}{2} - 2(2^2 - 1) = 4 - 2 \cdot 3 = -2$

$P(-1) = \dfrac{(-1)^3}{2} - 2((-1)^2 - 1) = \dfrac{-1}{2}$

**2.A3 Si $P(x) = 3x^2 - 2x + 4$, $Q(x) = -2x^3 - x^2 + 5x - 1$ y $R(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2$, calcula estas operaciones.**
**a) $P(x) - Q(x) + R(x)$**
**b) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$**
**¿Qué grado tienen los polinomios resultantes?**

a) $P(x) - Q(x) + R(x) = (3x^2 - 2x + 4) - (-2x^3 - x^2 + 5x - 1) + (x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2) = 3x^2 - 2x + 4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 1 +$
$+ x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = x^4 + x^3 + 8x^2 - 4x + 3 \Rightarrow$ Grado 4

b) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = (3x^2 - 2x + 4) \cdot [(-2x^3 - x^2 + 5x - 1) + (x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2)] = (3x^2 - 2x + 4) \cdot (x^4 - 3x^3 + 3x^2 +$
$+ 8x - 3) = 3x^6 - 9x^5 + 9x^4 + 24x^3 - 9x^2 - 2x^5 + 6x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 6x + 4x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 32x - 12 = 3x^6 - 11x^5 +$
$+ 19x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 38x - 12 \Rightarrow$ Grado 6

**2.A4 Realiza las siguientes divisiones de polinomios.**
**a) $(5x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x^3 - x - 1)$**
**b) $(4x^3 - 2x + 2) : (x^2 + x + 1)$**
**¿Podrías aplicar la regla de Ruffini? ¿Por qué?**

a)
$$\begin{array}{rl|l}
 & 5x^4 - 3x^2 + x - 1 & x^3 - x - 1 \\ \cline{3-3}
 & -5x^4 + 5x^2 + 5x & 5x \\ \cline{2-2}
 & 2x^2 + 6x - 1 &
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rl|l}
 & 4x^3 \qquad - 2x + 2 & x^2 + x + 1 \\ \cline{3-3}
 & -4x^3 - 4x^2 - 4x & 4x - 4 \\ \cline{2-2}
 & - 4x^2 - 6x + 2 & \\
 & 4x^2 + 4x + 4 & \\ \cline{2-2}
 & - 2x + 6 &
\end{array}$$

No se puede aplicar Ruffini porque los divisores no tienen grado 1.

**2.A5 Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.**
**a) $(2x^3 + 4x^2 - 5x - 3) : (x - 2)$**
**b) $(x^4 - 3x^2 + 4x - 2) : (x + 3)$**
**Indica los polinomios cociente y resto.**

a)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | −5 | −3 |
| 2 | | 4 | 16 | 22 |
| | 2 | 8 | 11 | 19 |

Cociente: $2x^2 + 8x + 11$

Resto: 19

b)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | −3 | 4 | −2 |
| −3 | | −3 | 9 | −18 | 42 |
| | 1 | −3 | 6 | −14 | 40 |

Cociente: $x^3 - 3x^2 + 6x - 14$

Resto: 40

**2.A6 El desarrollo del cuadrado del binomio $(3ab - c)^2$ corresponde con:**

**a)** $9a^2b^2 - c^2$ **b)** $9a^2b^2 - 6abc + c^2$ **c)** $9a^2b^2 + 6abc + c^2$

Solución: apartado b)

**2.A7 Indica a cuál de las siguientes expresiones corresponde el desarrollo de la suma por diferencia $(2x^2y + 3y^2z)(2x^2y - 3y^2z)$.**

**a)** $4x^4y^2 + 9y^4z^2$ **b)** $4x^2y - 9y^2z$ **c)** $4x^4y^2 - 9y^4z^2$

Solución: apartado c)

**2.A8 Calcula el valor que debe tener $k$ para que el polinomio $P(x) = x^5 + kx^4 + x^3 - 4x^2 + x - 4$ sea divisible entre $(x - 4)$.**

$P(4) = 4^5 + k4^4 + 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 4 - 4 = 1024 + 256k + 64 - 64 + 4 - 4 = 1024 + 256k = 0 \Rightarrow 1024 = -256k \Rightarrow k = -4$

**2.A9 ¿Es $(x + 1)$ un factor del polinomio $x^{71} - 1$? Razona tu respuesta.**

$P(-1) = (-1)^{71} - 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$; por tanto, no es factor.

**2.A10 Factoriza los siguientes polinomios.**

**a)** $P(x) = 6x^3 + 13x^2 - 13x - 20$ **b)** $Q(x) = x^5 + x^4 - 5x^2 - 11x - 6$

a) $P(x) = 6x^3 + 13x^2 - 13x - 20 = (x + 1)(6x^2 + 7x - 20) = 6(x + 1)\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 13 & -13 & -20 \\ -1 & & -6 & -7 & 20 \\ \hline & 6 & 7 & -20 & 0 \end{array}$$

$6x^2 + 7x - 20 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 6 \cdot 20}}{2 \cdot 6} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{12} = \frac{-7 \pm 23}{12} \begin{cases} \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \\ \frac{-30}{12} = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

b) $Q(x) = (x + 1)(x^4 - 5x - 6) = (x + 1)(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 6) = (x + 1)^2(x - 2)(x^2 + x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & 0 & -5 & -11 & -6 \\ -1 & & -1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -5 & -6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}$

No tiene solución.

## MURAL DE MATEMÁTICAS

### MATETIEMPOS

### ¿La calculadora se equivoca?

**Fíjate en esta operación: $123\,987\,456^2 - (123\,987\,455 \cdot 123\,987\,457)$**

**Comprueba que si utilizas tu calculadora para resolverla directamente obtienes una solución y si la simplificas previamente obtienes otra distinta. ¿Por qué ocurre esto?**

En una calculadora convencional no podremos introducir cifras tan grandes, por lo tanto tendremos que redondear, o redondeará la propia calculadora según el modelo, y de este redondeo vendrán los errores.

Para resolverlo se tiene que tener en cuenta que si:

$123 \cdot 987 \cdot 456 = a$

$123 \cdot 987 \cdot 455 = a - 1$

$123 \cdot 987 \cdot 457 = a + 1$

Haciendo operaciones algebraicas:

$$A = a^2 - (a - 1)(a + 1) = a^2 - (a^2 - 1) = a^2 - a^2 + 1 = 1$$

Luego $A = 1$ independiente del valor de $a$.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**3.1 Resuelve las siguientes ecuaciones.**

**a)** $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 20$

**b)** $\left(\frac{x}{4} - 1\right)\frac{2}{3} - \frac{x-1}{2} = 2x$

**c)** $\frac{2x+3}{3} + \frac{7x-5}{4} = 7$

**d)** $1 - \frac{2(x-1)}{5} = \frac{3(2-x)}{2}$

a) $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 20$

M.c.m. de los denominadores 4 y 6: 12

Se multiplica la ecuación por 12: $3x + 2x = 240$

Se reducen términos semejantes: $5x = 240$

Se divide por 5: $x = 48$.

b) $\left(\frac{x}{4} - 1\right)\frac{2}{3} - \frac{x-1}{2} = 2x \Rightarrow \frac{x-4}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{x-1}{2} = 2x$

Se simplifica: $\frac{x-4}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{x-1}{2} = 2x \Rightarrow \frac{x-4}{6} - \frac{x-1}{2} = 2x$

Se multiplican por 6 la ecuación: $x - 4 - 3x + 3 = 12x$

Se reducen términos semejantes: $-1 = 14x$

Se divide por 14: $x = -\frac{1}{14}$

c) $\frac{2x+3}{3} + \frac{7x-5}{4} = 7$

M.c.m. los denominadores 3 y 4: 12

Se multiplican la ecuación: $8x + 12 + 21x - 15 = 84$

Se reducen términos semejantes: $29x = 87$

Solución: $x = 3$

d) $1 - \frac{2(x-1)}{5} = \frac{3(2-x)}{2}$

$1 - \frac{2x-2}{5} = \frac{6-3x}{2} \Rightarrow 10 - 4x + 4 = 30 - 15x \Rightarrow 11x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{11}$

**3.2 Calcula la solución de estas ecuaciones.**

**a)** $x^2 - 10x + 24 = 3$

**b)** $5x^2 - 9x + 4 = 0$

**c)** $-x^2 + 2x = 0$

**d)** $x(2x - 5) = 6 - x$

**e)** $2x - 6 = 2x(x + 2)$

**f)** $x^2 - 9 = -2x^2$

a) $x^2 - 10x + 24 = 3 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \qquad x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right.$

b) $5x^2 - 9x + 4 = 0 \qquad x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5} = \frac{9 \pm 1}{10} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{matrix} \right.$

c) $-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0;\ x = 0$ ó $x = 2$

d) $x(2x - 5) = 6 - x \Rightarrow 2x^2 - 5x = 6 - x \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right.$

e) $2x - 6 = 2x(x + 2) \Rightarrow 2x - 6 = 2x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 + 2x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + x + 3 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}$ No tiene solución.

f) $x^2 - 9 = -2x^2 \Rightarrow 3x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

**3.3 Resuelve las siguientes ecuaciones.**

**a)** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

**b)** $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$

**c)** $x^4 - 26x^2 = -25$

**d)** $x^6 - 64x^3 = 0$

**e)** $4x^2 + 8x = 0$

**f)** $3x^3 - 12x^2 + 12x = 0$

a) $x^2 = z;\ x^4 = z^2 \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{array} \right.$$

b) $x^3 = z;\ x^6 = z^2;\ z^2 - 10z + 9 = 0$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 9 \Rightarrow x^3 = 9 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9} \\ 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \end{array} \right.$$

c) $x^2 = z \Rightarrow x^4 = z^2;\ z^2 - 26z + 25 = 0$

$$z = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{26 \pm 24}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5 \\ 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{array} \right.$$

d) $x^3(x^3 - 64) = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$

e) $4x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = -2$

f) $3x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm 0}{2} = 2 \Rightarrow$ Raíz doble

**3.4 Halla las soluciones de estas ecuaciones.**

**a)** $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

**b)** $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ -2 \end{array} \right.$$

Soluciones: $x = 1$, $x = -1$ y $x = -2$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 3 & 10 \\ -1 & & -1 & 7 & -10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x + 1)(x^2 - 7x + 10)$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 5 \\ 2 \end{array} \right.$$

Soluciones: $x = -1$, $x = 2$ y $x = 5$

**3.5 Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones racionales.**

**a)** $\dfrac{2}{x} - \dfrac{2 - x}{x + 3} = 1$

**b)** $\dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{2}{x + 2} = 3$

a) $\dfrac{2(x + 3)}{x(x + 3)} - \dfrac{(2 - x)x}{x(x + 3)} = \dfrac{x(x + 3)}{x(x + 3)} \Rightarrow 2x + 6 - 2x + x^2 = x^2 + 3x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

b) $\dfrac{x(x + 2)}{(x + 1)(x + 2)} + \dfrac{2(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)} = \dfrac{3(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)(x + 2)} \Rightarrow x^2 + 2x + 2x + 2 = 3x^2 + 9x + 6 \Rightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{4} \Rightarrow \text{No existe solución.}$$

**3.6 Resuelve estas ecuaciones radicales.**

**a)** $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = x + 2$

**b)** $\sqrt{40 - x^2} + 4 = x$

**c)** $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 4} = 6$

**d)** $\sqrt{6 + x} + 2x = -2$

a) $\left(\sqrt{x^2 + 5x + 1}\right)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 + 5x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x = 3$

Comprobación: $\sqrt{3^2 + 5 \cdot 3 + 1} = 3 + 2$

b) $\left(\sqrt{40 - x^2}\right)^2 = (x - 4)^2 \Rightarrow 40 - x^2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 24 = 0$

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{matrix} 6 \\ -2 \end{matrix} \right.$$

Comprobación: $x = 6 \Rightarrow \sqrt{40 - 6^2} + 4 = 6 \Rightarrow$ Sí es correcto.

$x = -2 \Rightarrow \sqrt{40 - (-2)^2} + 4 \neq -2 \Rightarrow$ No es correcto.

c) $\left(\sqrt{2x - 1}\right)^2 = \left(6 - \sqrt{x + 4}\right)^2 \Rightarrow 2x - 1 = 36 - 12\sqrt{x + 4} + x + 4 \Rightarrow \left(12\sqrt{x + 4}\right)^2 = (41 - x)^2$

$144(x + 4) = 1681 - 82x + x^2 \Rightarrow 144x + 576 = 1681 - 82x + x^2 \Rightarrow x^2 - 226x + 1105 = 0$

$$x = \frac{226 \pm \sqrt{(-226)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1105}}{2 \cdot 1} = \frac{226 \pm 216}{2} = \left\langle \begin{matrix} 221 \\ 5 \end{matrix} \right.$$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 5 - 1} + \sqrt{5 + 4} = 6 \Rightarrow$ Sí es correcto.

$x = 221 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 221 - 1} + \sqrt{221 + 4} = 21 + 15 \neq 6 \Rightarrow$ No es correcto.

d) $\left(\sqrt{6 + x}\right)^2 = (-2 - 2x)^2 \Rightarrow 6 + x = 4 + 8x + 4x^2 \Rightarrow 4x^2 + 7x - 2 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} = \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{4} \\ -2 \end{matrix} \right.$$

Comprobación: $x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{6 + \frac{1}{4}} + 2\frac{1}{4} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow$ No es correcto.

$x = -2 \Rightarrow \sqrt{6 - 2} + 2(-2) = 2 - 4 = -2 \Rightarrow$ Sí es correcto.

**3.7 Resuelve las siguientes ecuaciones.**

**a)** $2 \log_2 x = 10$

**b)** $\log_x 625 = 4$

**c)** $3 \log x = -6$

**d)** $\ln(3 - x) = 0$

a) $2 \log_2 x = 10 \Rightarrow \log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 \Rightarrow x = 32$

b) $\log_x 625 = 4 \Rightarrow x^4 = 625$, luego $x = 5$

c) $3 \log x = -6 \Rightarrow \log x = -2 \Rightarrow x = 10^{-2} \Rightarrow x = 0{,}01$

d) $\ln(3 - x) = 0 \Rightarrow 3 - x = 1 \Rightarrow x = 2$

**3.8 Encuentra la solución de estas ecuaciones.**

**a)** $\log x + \log 50 = 4$

**b)** $\log x + \log 100 = 0$

**c)** $\log x^3 - 2 \log x = \log 10$

**d)** $\log 3x - 1 = 0$

a) $\log 50x = 4 \Rightarrow 50x = 10^4 \Rightarrow 50x = 10\,000 \Rightarrow x = 200$

b) $\log x + \log 100 = 0 \Rightarrow \log x = -\log 100 \Rightarrow \log x = -2 \Rightarrow x = 10^{-2} \Rightarrow x = 0{,}01$

c) $\log x^3 - 2 \log x = \log 10 \Rightarrow \log \frac{x^3}{x^2} = \log 10 \Rightarrow \log x = \log 10$; luego $x = 10$

d) $\log 3x = 1 \Rightarrow 10 = 3x \Rightarrow x = \frac{10}{3}$

**3.9 ¿Es correcto el proceso de resolución de estas ecuaciones? En caso contrario, indica el error.**

**a)** $\log(x+1) - \log 2 = \log x \Rightarrow \log\left(\frac{x+1}{2}\right) = \log x \Rightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right) = x \Rightarrow x + 1 = 2x \Rightarrow x = 1$

**b)** $\log(x-2) \cdot \log 2 = \log x \Rightarrow \log(x-2)^2 = \log x \Rightarrow (x-2)^2 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4, x = 1$

a) Correcto.

b) Error: $\log(x-2) \cdot \log 2 \neq \log(x-2)^2$

**3.10 Encuentra la solución de estas ecuaciones.**

**a)** $4 \cdot 5^x = 500$

**b)** $5 \cdot 5^{2x} = 2500$

**c)** $6^{2x+2} = 46\,656$

**d)** $7 \cdot 3^{x-1} = 567$

a) $4 \cdot 5^x = 500 \Leftrightarrow 5^x = 125 \Leftrightarrow 5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$

b) $5 \cdot 5^{2x} = 2500 \Leftrightarrow 5^{2x} = 500 \Leftrightarrow \log_5(5^{2x}) = \log_5 500 \Leftrightarrow 2x = \log_5 500 \Leftrightarrow x = \dfrac{\log 500}{2 \cdot \log 5}$

c) $6^{2x+2} = 46\,656 \Leftrightarrow 6^{2x+2} = 6^6 \Leftrightarrow 2x + 2 = 6 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

d) $7 \cdot 3^{x-1} = 567 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 81 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^4 \Leftrightarrow x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$

**3.11 Resuelve estas ecuaciones exponenciales.**

**a)** $2^x + 2^{x+1} = 384$

**b)** $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 775$

**c)** $9^x - 10 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$

**d)** $4^x - 9 \cdot 2^x = -20$

a) $2^x + 2 \cdot 2^x = 3 \cdot 2^7 \Leftrightarrow (1+2)2^x = 3 \cdot 2^7 \Leftrightarrow 2^x = 2^7 \Leftrightarrow x = 7$

b) $5^x + 5 \cdot 5^x + 25 \cdot 5^x = 775 \Leftrightarrow (1 + 5 + 25) \cdot 5^x = 775 \Leftrightarrow 31 \cdot 5^x = 775 \Leftrightarrow 5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2$

c) $(3^x)^2 - 10 \cdot 3 \cdot 3^x + 81 = 0$; Llamamos $3^x = u \Leftrightarrow u^2 - 30u + 81 = 0$

$$\Leftrightarrow u = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81}}{2 \cdot 1} = \frac{30 \pm 24}{2} = \begin{cases} 27 \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3 \\ 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3^1 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

d) $(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x = -20$; Llamamos $2^x = u \Leftrightarrow u^2 - 9u + 20 = 0$

$$\Leftrightarrow u = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} 5 \Leftrightarrow 2^x = 5 \Leftrightarrow \log_2(2^x) = \log_2 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{\log 5}{\log 2} \\ 4 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

**3.12 Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales.**

**a)** $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{2y}{3} = 5 \\ \dfrac{x}{2} + y = 5 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 2(2x - 1) + 9 = 8 - 3y \\ 6x - y = 7 \end{cases}$

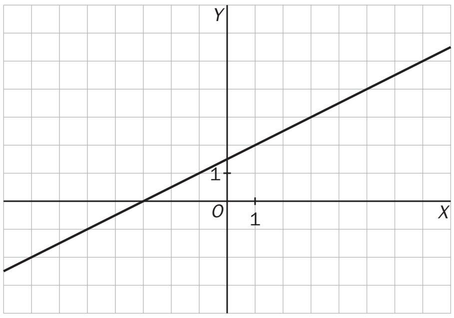
a) $\begin{cases} 9x + 8y = 60 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 8y = 60 \\ 4x + 8y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 20 \Rightarrow x = 4 \\ 2y = 6 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2 + 9 = 8 - 3y \\ 6x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 18x - 3y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 22x = 22 \Rightarrow x = 1 \\ -y = 7 - 6 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$

**3.13 Indica de qué tipo son estos sistemas según el número de soluciones que tienen.**

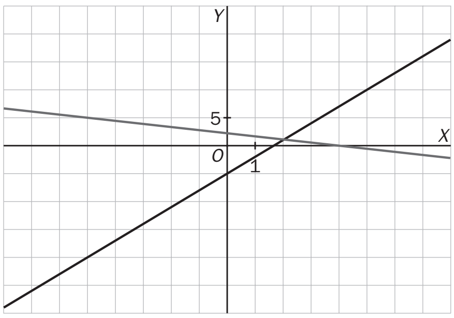
**a)** $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3x + 9 = 6y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases}$




Las rectas coinciden en todos sus puntos; por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones, es decir, es un sistema compatible indeterminado.

b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$




El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución en el punto (2, 1).



**3.14 Encuentra las soluciones de estos sistemas.**

**a)** $\begin{cases} 2^x - 5^y = 3 \\ 4 \cdot 2^x - 5 \cdot 5^y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y+1} = -1 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 32 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \log x^3 + \log y = 6 \\ \log (xy) = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \log x^2 = 2 - 2 \log y \\ \log \left(\dfrac{x}{y}\right) = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x - 5^y = 3 \\ 4 \cdot 2^x - 5 \cdot 5^y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 3 + 5^y \\ 4 \cdot (3 + 5^y) - 5 \cdot 5^y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 3 + 5^y \\ 12 + 4 \cdot 5^y - 5 \cdot 5^y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^y = 5 \Rightarrow y = 1 \\ 2^x = 3 + 5 = 8 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y+1} = -1 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+1} - 3 \cdot 3^y = -1 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11 \cdot 3^y = -33 \Rightarrow 3^y = 3 \Rightarrow y = 1 \\ 2^{x+1} - 9 = -1 \Rightarrow 2^{x+1} = 8 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log x^3 + \log y = 6 \\ \log (xy) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x^3 + \log y = 6 \\ \log x + \log y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x^3 - \log x = 2 \Rightarrow \log \dfrac{x^3}{x} = 2 \Rightarrow \\ \log x^2 = 2 \Rightarrow 2 \log x = 2 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10 \\ \log y = 4 - \log 10 \Rightarrow \log y = 3 \Rightarrow y = 1000 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log x^2 = 2 - 2 \log y \\ \log \left(\dfrac{x}{y}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \log x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 0 = 2 - 2 \log y \Rightarrow \log y = 1 \Rightarrow y = 10 \end{cases}$

**3.15 Resuelve estos sistemas.**

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x - y)^2 - xy = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ xy = 6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y^2 + 2y^2 = 6 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \quad y = -1 \\ x = -2 \quad y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x - y)^2 - xy = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \begin{cases} (x - 2x + 1)^2 - x(2x - 1) = 6 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-x + 1)^2 - 2x^2 + x = 6 \Rightarrow \\ x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + x = 6 \\ x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} \end{cases}$

No tiene solución.

d) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{36}{y^2} - 2y^2 = 1 \\ x = \dfrac{6}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{36}{y^2} - \dfrac{2y^4}{y^2} = \dfrac{y^2}{y^2} \Rightarrow 2y^4 + y^2 - 36 = 0 \\ \text{Llamo } u = y^2 \ u^2 = y^4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2u^2 + u - 36 = 0 \Rightarrow u = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-1 \pm 17}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 4 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \\ \dfrac{-9}{2} \Rightarrow y^2 = \dfrac{-9}{2} \Rightarrow \text{No tiene solución.} \end{array} \right.$

$\Rightarrow y = 2 \quad x = 3$ ó $y = -2 \quad x = -3$

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**3.16 La leche desnatada de una determinada marca contiene un 0,25% de materia grasa, y la leche entera, un 4%.**
**Calcula la cantidad que hay que mezclar de cada tipo para conseguir leche semidesnatada con un 1,5% de grasa.**

Cantidad de leche desnatada: $x$

grasa $\dfrac{0{,}25x}{100}$

Cantidad de leche entera: $y$

grasa $\dfrac{4y}{100}$

$$\frac{0{,}25x}{100} + \frac{4y}{100} = \frac{1{,}5(x + y)}{100} \Rightarrow 0{,}25x + 4y = 1{,}5x + 1{,}5y \Rightarrow 2{,}5y = 1{,}25x \Rightarrow x = 2y$$

Doble cantidad de leche desnatada que de entera.

**3.17 Un peluquero quiere conseguir una disolución de agua oxigenada al 6%. Dispone de dos botellas, una al 3% y otra al 33%. ¿Cómo debe realizar la mezcla para obtener la disolución que desea?**
**¿Qué cantidades necesita para lograr aproximadamente un litro?**

Tipo I: $x$ $\quad 0{,}03x + 0{,}33y = 0{,}06(x + y) \Rightarrow 0{,}03x + 0{,}33y = 0{,}06x + 0{,}06y$

Tipo II: $y$ $\quad 0{,}27y = 0{,}03x \Rightarrow x = 9y$

Nueve partes de la primera agua oxigenada por cada parte de la segunda.

Para lograr un litro: 0,9 litros al 3% y 0,1 litros al 33%.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

## Ecuaciones de primero y segundo grado

3.18 **Resuelve estas ecuaciones lineales.**

a) $-4x + 3 = 7x - 19$

b) $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26$

c) $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7$

d) $\frac{4x - 3}{5x + 1} = \frac{9}{16}$

e) $\frac{x + 3}{6} + \frac{2x - 1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x - 5}{12} - \frac{2}{3}$

f) $\frac{3(x - 2)}{5} + 2(-3x + 1) - \frac{2}{5} = \frac{-4x + 3}{15} + \frac{16}{3}$

a) $-4x + 3 = 7x - 19 \Rightarrow -11x = -22 \Rightarrow x = 2$

b) $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26 \Rightarrow -3x + 2 = -20x + 104 \Rightarrow 17x = 102 \Rightarrow x = 6$

c) $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7 \Rightarrow -10x + 5 + 3x - 2 = -6x + 4 + 7 \Rightarrow x = -8$

d) $\frac{4x - 3}{5x + 1} = \frac{9}{16} \Rightarrow 16(4x - 3) = 9(5x + 1) \Rightarrow 64x - 48 = 45x + 9 \Rightarrow 19x = 57 \Rightarrow x = 3$

e) $\frac{x + 3}{6} + \frac{2x - 1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x - 5}{12} - \frac{2}{3} \Rightarrow 2x + 6 + 8x - 4 + 3 = x - 5 - 8 \Rightarrow 9x = -18 \Rightarrow x = -2$

f) $\frac{3(x - 2)}{5} + 2(-3x + 1) - \frac{2}{5} = \frac{-4x + 3}{15} + \frac{16}{3}$

$9x - 18 - 90x + 30 - 6 = -4x + 3 + 80 \Rightarrow -77x = 77 \Rightarrow x = -1$

3.19 **Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.**

a) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3)$

b) $\frac{3(x + 3)}{2} - 2(2 - 3x) = 8x - 1 - 2(x + 3)$

c) $\frac{x - 4}{5} - 4(-2x + 1) - \frac{(-4x + 2)}{10} = 2(x - 3) + \frac{5x + 6}{2}$

d) $\frac{6 - 2(x - 3)}{7x} = \frac{8}{-4}$

a) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3) \Leftrightarrow 12x - 30 + 16x - 12 = x - 10x - 6 \Leftrightarrow 37x = 36 \Leftrightarrow x = \frac{36}{37}$

b) $\frac{3(x + 3)}{2} - 2(2 - 3x) = 8x - 1 - 2(x + 3) \Leftrightarrow 3x + 9 - 8 + 12x = 16x - 2 - 4x - 12 \Leftrightarrow 3x = -15 \Leftrightarrow x = -5$

c) $\frac{x - 4}{5} - 4(-2x + 1) - \frac{(-4x + 2)}{10} = 2(x - 3) + \frac{5x + 6}{2} \Leftrightarrow \frac{x - 4}{5} + 8x - 4 - \frac{-4x + 2}{10} = 2x - 6 + \frac{5x + 6}{2}$

$\Leftrightarrow 2x - 8 + 80x - 40 + 4x - 2 = 20x - 60 + 25x + 30 \Leftrightarrow 41x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{41}$

d) $\frac{6 - 2(x - 3)}{7x} = \frac{8}{-4} \Leftrightarrow 6 - 2x + 6 = -14x \Leftrightarrow 12x = -12 \Leftrightarrow x = -1$

**3.20 Clasifica en tu cuaderno las siguientes ecuaciones de segundo grado según el número de soluciones distintas que tengan.**

**a) $5x^2 + 6x + 2 = 0$**

**b) $-3x^2 + 4x + 5 = 0$**

**c) $x^2 - 6x + 1 = 0$**

**d) $x^2 - 5 = 0$**

**I. 0 soluciones**

**II. 1 solución**

**III. 2 soluciones**

a) $b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 5 \cdot 2 < 0 \Rightarrow$ a) I

b) $b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 > 0 \Rightarrow$ b) III

c) $b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ c) III

d) $b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot (-5) \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ d) III

**3.21 Calcula la solución de las siguientes ecuaciones de segundo grado.**

**a) $6x^2 - 11x + 3 = 0$**

**b) $x^2 - 6x - 7 = 0$**

**c) $x^2 - 6x + 9 = 0$**

**d) $-2x^2 + 2x + 24 = 0$**

**e) $3x^2 + x + 5 = 0$**

**f) $4x^2 + 4x + 1 = 0$**

a) $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \dfrac{11 \pm 7}{12} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{18}{12} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$

b) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 7 \\ -1 \end{array} \right.$

c) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6 \pm 0}{2} = 3 \Rightarrow$ Raíz doble.

d) $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{1 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 4 \\ -3 \end{array} \right.$

e) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-59}}{6} \Rightarrow$ No tiene solución.

f) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \dfrac{-4 \pm 0}{8} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow$ Raíz doble.

**3.22 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando un procedimiento diferente de la fórmula general.**

**a) $3x^2 - 27 = 0$**

**b) $x^2 + 2x + 1 = 0$**

**c) $-7x^2 + \dfrac{5}{2}x = 0$**

**d) $(x - 2)^2 - 25 = 0$**

a) $3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$ Raíz doble

c) $x\left(-7x + \dfrac{5}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $-7x + \dfrac{5}{2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{14}$

d) $(x - 2)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7 \\ x - 2 = -5 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$

**3.23 Halla la solución de estas ecuaciones de segundo grado.**

**a)** $\dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{4x - 1}{4} = \dfrac{2x(x - 3)}{6} + \dfrac{17}{12}$

**b)** $3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \dfrac{3x(x - 2)}{2} + 14$

**c)** $6x^2 - 1 + \dfrac{2x(-x + 3)}{3} = \dfrac{5x^2 - 2}{6} - 4x^2 + \dfrac{59}{6}$

**d)** $\dfrac{3(-x + 2)}{5} + 4x\left(\dfrac{-2x + 1}{3}\right) = x(-3x + 1) - \dfrac{1}{2}$

**e)** $\dfrac{3x - 1}{5} = \dfrac{13}{4x + 5}$

a) $\dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{4x - 1}{4} = \dfrac{2x(x - 3)}{6} + \dfrac{17}{12}$

$18x^2 - 12x + 3 = 4x^2 - 12x + 17 \Rightarrow 14x^2 = 14 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

b) $3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \dfrac{3x(x - 2)}{2} + 14 \Rightarrow 6x^2 - 8x + 10x^2 - 20 = 3x^2 - 6x + 28 \Rightarrow 13x^2 - 2x - 48 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{2 \cdot 13} = \frac{2 \pm 50}{26} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \dfrac{-48}{26} = \dfrac{-24}{13} \end{array} \right.$$

c) $6x^2 - 1 + \dfrac{2x(-x + 3)}{3} = \dfrac{5x^2 - 2}{6} - 4x^2 + \dfrac{59}{6}$

$36x^2 - 6 - 4x^2 + 12x = 5x^2 - 2 - 24x^2 + 59 \Rightarrow 51x^2 + 12x - 63 = 0 \Rightarrow 17x^2 + 4x - 21 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 17 \cdot (-21)}}{2 \cdot 17} = \frac{-4 \pm 38}{34} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ \dfrac{-42}{34} = \dfrac{-21}{17} \end{array} \right.$$

d) $\dfrac{3(-x + 2)}{5} + 4x\left(\dfrac{-2x + 1}{3}\right) = x(-3x + 1) - \dfrac{1}{2}$

$-18x + 36 - 80x^2 + 40x = -90x^2 + 30x - 15 \Rightarrow 10x^2 - 8x + 51 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 10 \cdot 51}}{2 \cdot 10} = \frac{8 \pm \sqrt{-1976}}{20} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

e) $\dfrac{3x - 1}{5} = \dfrac{13}{4x + 5} \Rightarrow (3x - 1)(4x + 5) = 65 \Rightarrow 12x^2 + 15x - 4x - 5 = 65 \Rightarrow 12x^2 + 11x - 70 = 0$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-70)}}{2 \cdot 12} = \frac{-11 \pm 59}{24} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \dfrac{-70}{24} = \dfrac{-35}{12} \end{array} \right.$$

## Resolución de otros tipos de ecuaciones

**3.24 Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable.**

**a)** $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

**b)** $3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$

**c)** $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

**d)** $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$

**e)** $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

**f)** $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Cambio: $u = x^2\ u^2 = x^4 \Rightarrow u^2 - 13u + 36 = 0$

$$u = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{array} \right.$$

b) $3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$

Cambio: $u = x^2\ u^2 = x^4 \Rightarrow 3u^2 - 15u + 12 = 0 \Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{array} \right.$$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Cambio: $u = x^3\ u^2 = x^6 \Rightarrow u^2 - 7u - 8 = 0$

$$u = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 9}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 8 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \\ -1 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 \end{array} \right.$$

d) $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$

Cambio: $u = x^3\ u^2 = x^6 \Rightarrow u^2 - 2u + 1 = 0$

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

e) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

Cambio: $u = x^4\ u^2 = x^8 \Rightarrow u^2 - 17u + 16 = 0$

$$u = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 15}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 16 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 1 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{array} \right.$$

f) $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$

Cambio: $u = x^5\ u^2 = x^{10} \Rightarrow u^2 - 31u - 32 = 0$

$$u = \frac{31 \pm \sqrt{(-31)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)}}{2 \cdot 1} = \frac{31 \pm 33}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 32 \Rightarrow x^5 = 32 \Rightarrow x = 2 \\ -1 \Rightarrow x^5 = -1 \Rightarrow x = -1 \end{array} \right.$$

**3.25 Encuentra la solución de estas ecuaciones por factorización.**

**a) $-2x^3 + 4x^2 + 18x - 36 = 0$**

**b) $4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 0$**

**c) $-3x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 12x = 0$**

**d) $6x^4 - 5x^3 - 43x^2 + 70x - 24 = 0$**

a) $-2x^3 + 4x^2 + 18x - 36 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & 4 & 18 & -36 \\ 2 & & -4 & 0 & 36 \\ \hline & -2 & 0 & 18 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 2)(-2x^2 + 18) \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Soluciones: $x = 2$, $x = -3$ y $x = 3$

b) $4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -24 & 48 & -32 \\ 2 & & 8 & -32 & 32 \\ \hline & 4 & -16 & 16 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 2)(4x^2 - 16x + 16) =$
$= 4(x - 2)(x^2 - 4x + 4) =$
$= 4(x - 2)(x - 2)^2 = 4(x - 2)^3$

Solución $x = 2$ raíz triple

c) $-3x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 12x = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$P(x) = -3x(x^3 - x^2 - 4x + 4) =$
$= -3x(x - 1)(x^2 - 4) =$
$= -3x(x - 1)(x - 2)(x + 2)$

Soluciones $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = -2$

d) $6x^4 - 5x^3 - 43x^2 + 70x - 24 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & -5 & -43 & 70 & -24 \\ 2 & & 12 & 14 & -58 & 24 \\ \hline & 6 & 7 & -29 & 12 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & -29 & 12 \\ -3 & & -18 & 33 & -12 \\ \hline & 6 & -11 & 4 & 0 \end{array}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 4}}{2 \cdot 6} = \frac{11 \pm 5}{12} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \\ \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$P(x) = (x - 2)(6x^3 + 7x^2 - 29x + 12) =$
$= (x - 2)(x + 3)(6x^2 - 11x + 4) =$
$= 6(x - 2)(x + 3)\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Soluciones: $x = 2$, $x = -3$, $x = \frac{4}{3}$ y $x = \frac{1}{2}$

**3.26 Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.**

**a)** $\dfrac{4}{x-2} - \dfrac{6}{x+3} = \dfrac{1}{3}$

**b)** $\dfrac{x+1}{3x-2} + \dfrac{2x+1}{x+5} = \dfrac{3}{2}$

**c)** $\dfrac{4x+2}{x^2+2x+1} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{x+5}{x+1}$

**d)** $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{6}{x+4} = \dfrac{-2}{4x-8}$

a) $\dfrac{4}{x-2} - \dfrac{6}{x+3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{12(x+3)}{3(x-2)(x+3)} - \dfrac{18(x-2)}{3(x-2)(x+3)} = \dfrac{(x-2)(x+3)}{3(x-2)(x+3)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12x + 36 - 18x + 36 = x^2 + x - 6 \Rightarrow x^2 + 7x - 78 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-78)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-7 \pm 19}{2} = \begin{cases} 6 \\ -13 \end{cases}$

b) $\dfrac{x+1}{3x-2} + \dfrac{2x+1}{x+5} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{2(x+1)(x+5)}{2(3x-2)(x+5)} + \dfrac{2(2x+1)(3x-2)}{2(3x-2)(x+5)} = \dfrac{3(3x-2)(x+5)}{2(3x-2)(x+5)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 12x + 10 + 12x^2 - 2x - 4 = 9x^2 + 39x - 30 \Rightarrow 5x^2 - 29x + 36 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 36}}{2 \cdot 5} = \dfrac{29 \pm 11}{10} = \begin{cases} 4 \\ \dfrac{18}{10} = \dfrac{9}{5} \end{cases}$

c) $\dfrac{4x+2}{x^2+2x+1} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{x+5}{x+1} \Rightarrow \dfrac{4x+2}{(x+1)^2} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{x+5}{x+1} \Rightarrow \dfrac{2(4x+2)}{2(x+1)^2} + \dfrac{3(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \dfrac{2(x+5)(x+1)}{2(x+1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x + 4 + 3x^2 + 6x + 3 = 2x^2 + 12x + 10 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

d) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{6}{x+4} = \dfrac{-2}{4x-8} \Rightarrow \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{6}{x+4} = \dfrac{-1}{2(x-2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{6(x+4)(x-2)}{2(x+1)(x+4)(x-2)} - \dfrac{12(x+1)(x-2)}{2(x+1)(x+4)(x-2)} = \dfrac{-(x+1)(x+4)}{2(x+1)(x+4)(x-2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^2 + 12x - 48 - 12x^2 + 12x + 24 = -x^2 - 5x - 4 \Rightarrow 5x^2 - 29x + 20 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 20}}{2 \cdot 5} = \dfrac{29 \pm 21}{10} = \begin{cases} 5 \\ \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

**3.27 Halla la solución de estas ecuaciones radicales.**

**a)** $x - \sqrt{x} - 6 = 0$

**b)** $\sqrt{8 - x} = 2 - x$

**c)** $\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 1$

**d)** $2\sqrt{x-1} - 5 = \dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$

**e)** $x + \sqrt{x-1} - 3 = 0$

**f)** $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4}$

**g)** $\sqrt{5x+1} - 2 = \sqrt{x+1}$

a) $x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = x \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \dfrac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$

Comprobación: $x = 9 \Rightarrow 9 - 3 - 6 = 0 \Rightarrow$ Es correcto.
$x = 4 \Rightarrow 4 - 2 - 6 \neq 0 \Rightarrow$ No es correcto.

b) $\sqrt{8 - x} = 2 - x \Rightarrow 8 - x = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

Comprobación: $x = 4 \Rightarrow \sqrt{8 - 4} \neq 2 - 4 \Rightarrow$ No es correcto.
$x = -1 \Rightarrow \sqrt{8 + 1} = 2 + 1 \Rightarrow$ Es correcto.

c) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right.$

Comprobación: $x = 4 \Rightarrow \sqrt{4} - \frac{2}{\sqrt{4}} = 1 \Rightarrow$ Es correcto; $x = 1 \Rightarrow \sqrt{1} - \frac{2}{\sqrt{1}} \neq 1 \Rightarrow$ No es correcto.

d) $2\sqrt{x-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} - \frac{5\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow 2x - 2 - 5\sqrt{x-1} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5\sqrt{x-1} = -2x + 5 \Rightarrow 25(x-1) = 4x^2 - 20x + 25 \Rightarrow 25x - 25 = 4x^2 - 20x + 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 45x + 50 = 0 \Rightarrow x = \frac{45 \pm \sqrt{(-45)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 50}}{2 \cdot 4} = \frac{45 \pm 35}{8} = \left\langle \begin{matrix} 10 \\ \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \end{matrix} \right.$

Comprobación: $\begin{cases} x = 10 \Rightarrow 2\sqrt{10-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{10-1}} \Rightarrow \text{Es correcto.} \\ x = \frac{5}{4} \Rightarrow 2\sqrt{\frac{5}{4} - 1} - 5 \neq \frac{3}{\sqrt{\frac{5}{4} - 1}} \Rightarrow 2\frac{1}{2} - 5 \neq \frac{3}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{No es correcto.} \end{cases}$

e) $x + \sqrt{x-1} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 3 - x \Rightarrow x - 1 = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right.$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow 5 + \sqrt{5-1} - 3 \neq 0 \Rightarrow$ No es correcto; $x = 2 \Rightarrow 2 + \sqrt{2-1} - 3 = 0 \Rightarrow$ Es correcto.

f) $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4} \Rightarrow 7x + 1 = 4(x+4) \Rightarrow 7x + 1 = 4x + 16 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow \sqrt{7 \cdot 5 + 1} = 2\sqrt{5+4} \Rightarrow$ Sí es correcto.

g) $\sqrt{5x+1} - 2 = \sqrt{x+1} \Rightarrow 5x + 1 - 4\sqrt{5x+1} + 4 = x + 1 \Rightarrow 4x + 4 = 4\sqrt{5x+1} \Rightarrow x + 1 = \sqrt{5x+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 5x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 3$

Comprobación: $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0+1} - 2 \neq \sqrt{1} \Rightarrow$ No es correcto; $x = 3 \Rightarrow \sqrt{5 \cdot 3 + 1} - 2 = \sqrt{3+1} \Rightarrow$ Sí es correcto.

## Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

3.28 **Resuelve las siguientes ecuaciones de tipo exponencial.**

**a)** $6^{3-x} = 216$

**b)** $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

**c)** $3^x\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

**d)** $3 \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{x+1} + 4^{x+2} = 62$

**e)** $13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0$

**f)** $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$

a) $6^{3-x} = 216 \Rightarrow 6^{3-x} = 6^3 \Rightarrow 3 - x = 3 \Rightarrow x = 0$

b) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3} \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3} \Rightarrow 3x - 7 = -7x + 3 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1$

c) $3^x\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x \Rightarrow \frac{3^x}{3^{x-3}} = \frac{1}{3^{3x}} \Rightarrow 3^3 = 3^{-3x} \Rightarrow 3 = -3x \Rightarrow x = -1$

d) $3 \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{x+1} + 4^{x+2} = 62 \Rightarrow 3 \cdot 4^x + 12 \cdot 4^x + 16 \cdot 4^x = 62 \Rightarrow 31 \cdot 4^x = 62 \Rightarrow 4^x = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

e) $13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0$; Cambio: $u = 13^x \quad u^2 = 13^{2x} \Rightarrow u^2 - 6u + 5 = 0$

$u = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \Rightarrow 13^x = 5 \Rightarrow \log_{13} 13^x = \log_{13} 5 \Rightarrow x = \log_{13} 5 = \frac{\log 5}{\log 13} \\ 1 \Rightarrow 13^x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{matrix} \right.$

f) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950 \Rightarrow 10^x - 5 \cdot 5^{x-2} \cdot 2^{x-2} = 950 \Rightarrow 10^2 10^{x-2} - 5 \cdot 10^{x-2} = 950 \Rightarrow 95 \cdot 10^{x-2} = 950 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^{x-2} = 10 \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$

**3.29 Resuelve estas ecuaciones de tipo logarítmico.**

**a)** $\log(x-1) + \log(x+1) = 3\log 2 + \log(x-2)$

**b)** $\log(x-2) - \frac{1}{2}\log(3x-6) = \log 2$

**c)** $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1$

**d)** $\log_x \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = -0{,}4$

**e)** $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7)$

a) $\log(x-1) + \log(x+1) = 3\log 2 + \log(x-2) \Rightarrow \log[(x-1)\cdot(x+1)] = \log[2^3\cdot(x-2)] \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 8x - 16 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 15}}{2\cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right.$

b) $\log(x-2) - \frac{1}{2}\log(3x-6) = \log 2 \Rightarrow 2\log(x-2) - \log(3x-6) = 2\log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\frac{(x-2)^2}{3x-6} = \log 2^2 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3x-6} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 12x - 24 \Rightarrow x^2 - 16x + 28 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4\cdot 1\cdot 28}}{2\cdot 1} = \frac{16 \pm 12}{2} = \left\langle \begin{matrix} 14 \\ 2 \text{ No vale} \end{matrix} \right.$

c) $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1 \Rightarrow 9^{2x-1} = \sqrt[5]{27} \Rightarrow 3^{4x-2} = 3^{\frac{3}{5}} \Rightarrow 4x - 2 = \frac{3}{5} \Rightarrow 20x - 10 = 3 \Rightarrow 20x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{20}$

d) $\log_x \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = -0{,}4 \Rightarrow \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = x^{-0{,}4} \Rightarrow 2^{\frac{3}{5}-1} = x^{-0{,}4} \Rightarrow 2^{\frac{-2}{5}} = x^{-0{,}4} \Rightarrow 2^{-0{,}4} = x^{-0{,}4} \Rightarrow x = 2$

e) $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7) \Rightarrow \log_7(x-2) - \log_7(x+2) = \log_7 7 - \log_7(2x-7) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_7\frac{x-2}{x+2} = \log_7\frac{7}{2x-7} \Rightarrow \frac{x-2}{x+2} = \frac{7}{2x-7} \Rightarrow (x-2)(2x-7) = 7(x+2) \Rightarrow 2x^2 - 11x + 14 = 7x + 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 2x(x-9) = 0 \Rightarrow x = 0$. No es correcta y $x = 9$. Correcta.

## Sistemas de ecuaciones

**3.30 Indica el número de soluciones de los siguientes sistemas lineales. Hállalas.**

**a)** $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 3y = 6 \\ \phantom{12}x + 3y = 7 \end{cases}$, $13x = 13$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 15 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$, $10x = 20$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

**3.31 Resuelve los siguientes sistemas.**

**a)** $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 6 \\ \frac{-x}{10} + \frac{5y}{6} = -6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 6 \\ \frac{-x}{10} + \frac{5y}{6} = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 10y = 90 \\ -3x + 25y = -180 \end{cases}$, $+15y = -90$ $\Rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ x = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 8x + 15y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8(y + 1) + 15y = 100 \Rightarrow 23y = 92 \Rightarrow y = 4 \\ x = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 4y = -2 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x - 8y = -4 \\ 12x - 18y = 30 \end{cases}$, $-26y = 26$ $\Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 24 \end{cases}$, $4x = 24$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$

**3.32 Resuelve los siguientes sistemas no lineales.**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 - xy = 5} \\ \boldsymbol{3x + y = 1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{4x^2 - y^2 = -20} \\ \boldsymbol{xy = -12} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 - xy + y^2 = 7} \\ \boldsymbol{x + y = 5} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \boldsymbol{5x^2 + y^2 = 25} \\ \boldsymbol{3x^2 - y^2 = -25} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \boldsymbol{(x - y)^2 = 49} \\ \boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2 = 9} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 = 17} \\ \boldsymbol{x + xy + y = 9} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x^2 + xy = x \end{cases} \Rightarrow 4x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{8} = \dfrac{1 \pm 9}{8} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4} \\ -1 \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} & y = 1 - 3 \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{-11}{4} \\ x = -1 & y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = -20 \\ xy = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-12}{y} \\ 4\dfrac{144}{y^2} - y^2 = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 576 - y^4 = -20y^2 \Rightarrow y^4 - 20y^2 - 576 = 0 \\ \text{Cambio: } y^2 = u \quad y^4 = u^2\, u^2 - 20u - 576 = 0 \end{cases}$

$u = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 + 4 \cdot 576}}{2} = \dfrac{20 \pm 52}{2} \left\langle \begin{array}{l} 36 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} y = 6 & x = -2 \\ y = -6 & x = 2 \end{cases} \\ -16 \qquad \text{No tiene solución} \end{array} \right.$

c) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5 - y)^2 - (5 - y)y + y^2 = 7 \\ x = 5 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 - 10y + y^2 - 5y + y^2 + y^2 = 7 \\ 3y^2 - 15y + 18 = 0 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \left\langle \begin{array}{l} 3 \Rightarrow x = 2 \\ 2 \Rightarrow x = 3 \end{array} \right.$

d) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 25 \\ 3x^2 - y^2 = -25 \end{cases} \Rightarrow 8x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5$

e) $\begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ (x + y)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \pm 7 \\ x + y = \pm 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 10 \\ -2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ -2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = -7 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -4 \\ -2y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -7 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -10 \\ -2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + xy + y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + y) + y = 9 \Rightarrow x = \dfrac{9 - y}{1 + y} \\ \left(\dfrac{9 - y}{1 + y}\right)^2 + y^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{(9 - y)^2}{(1 + y)^2} + \dfrac{y^2(1 + y)^2}{(1 + y)^2} = \dfrac{17(1 + y)^2}{(1 + y)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 81 - 18y + y^2 + y^2 + 2y^3 + y^4 = 17 + 34y + 17y^2 \Rightarrow y^4 + 2y^3 - 15y^2 - 52y + 64 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -15 & -52 & 64 \\ 1 & & 1 & 3 & -12 & -64 \\ \hline & 1 & 3 & -12 & -64 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -12 & -64 \\ 4 & & 4 & 28 & 64 \\ \hline & 1 & 7 & 16 & 0 \end{array}$$

$y^4 + 2y^3 - 15y^2 - 52y + 64 = (y - 1)(y - 4)(y^2 + 7y + 16) \Rightarrow y = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 16}}{2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{-25}}{2} \Rightarrow$

No tiene más soluciones $\Rightarrow y = 1 \quad x = 4 \quad$ ó $\quad y = 4 \quad x = 1$

**3.33 Resuelve los siguientes sistemas no lineales.**

**a)** $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5^{x+2} - 4^y = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2\log x + \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - 6y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 4 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 2^x + 4 \cdot 5^y = 36 \\ 4 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^y = 5 \Rightarrow y = 1 \\ 2^x + 5 = 9 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

$$-5^y \quad = -5$$

b) $\begin{cases} 5^{x+2} - 4^y = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 5^{x+1} - 4^2 \cdot 4^{y-2} = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 5^{x+1} - 16 \cdot 4^{y-2} = -3 \\ -48 \cdot 5^{x+1} + 16 \cdot 4^{y-2} = 16 \end{cases} \Rightarrow 5^{x+1} = \dfrac{-13}{43} \Rightarrow$ No tiene solución.

$$-43 \cdot 5^{x+1} \quad = 13$$

c) $\begin{cases} 2\log x + \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(x^2 \cdot y) = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot y = 10^5 \\ xy = 10^4 \end{cases} \Rightarrow$ Se divide la primera ecuación entre la segunda $\Rightarrow x = 10$; entonces, $y = 10^3 = 1000$

d) $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(x \cdot y) = 2 \\ x = 1 + 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 10^2 \Rightarrow (1 + 6y)y = 100 \Rightarrow 6y^2 + y - 100 = 0 \\ y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 2400}}{12} = \begin{cases} 4 \\ \dfrac{-50}{12} = \dfrac{-25}{6} \end{cases} \end{cases}$

Entonces: $y = 4$; $x = 25$ ó $y = \dfrac{-25}{6}$; $x = -24$

**3.34 Dos números suman $\dfrac{-1}{15}$ y su producto es $\dfrac{-2}{15}$. Calcúlalos. ¿De qué ecuación de segundo grado son solución estos dos números?**

$$\begin{cases} x + y = -\dfrac{1}{15} \\ x \cdot y = -\dfrac{2}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{2}{15y} + y = -\dfrac{1}{15} \\ x = -\dfrac{2}{15y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 15y^2 = -y \Rightarrow 15y^2 + y - 2 = 0 \\ y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{30} = \dfrac{-1 \pm 11}{30} \end{cases} \begin{cases} \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-12}{30} = -\dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{3} & x = -\dfrac{2}{15 \cdot \dfrac{1}{3}} = -\dfrac{2}{5} \\ y = -\dfrac{2}{5} & x = -\dfrac{2}{15 \cdot \left(-\dfrac{2}{5}\right)} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Estos números son solución de la ecuación:

$$\left(x + \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow (5x + 2)(3x - 1) = 0 \Rightarrow 15x^2 + x - 2 = 0$$

## CUESTIONES PARA ACLARARSE

**3.35 Sea la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a$, $b$ y $c$ distintos de 0.**
**a) ¿Cabe la posibilidad de que sus soluciones sean $x = 1$, $x = 3$, $x = -2$ y $x = 5$? ¿Por qué?**
**b) ¿Qué condición deben cumplir los coeficientes para que la ecuación anterior no tenga solución?**

a) No, porque para que la ecuación sea bicuadrada, las soluciones tienen que ser opuestas dos a dos.

b) Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tendrá solución.

Si $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0$ y los dos números obtenidos son negativos, la ecuación bicuadrada no tendrá solución.

**3.36 Indica si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.**

**a)** $\log_a x = \log_b y \Rightarrow x = y$

**b)** $a^n = b^m \Rightarrow n = m$

**c)** $\log \sqrt[3]{x^7} = \dfrac{7}{3} \log x$

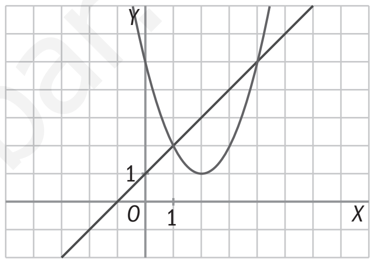
**d)** $a^{2x-3} = (a^2)^x \cdot \dfrac{1}{a^3}$

a) Falsa. Solo será cierta si $a = b$.
b) Falsa. Solo será cierta si $a = b$.
c) Verdadera.
d) Verdadera.

**3.37 Sea la ecuación exponencial $a^x = b$ (con $a > 1$). Relaciona en tu cuaderno estas dos columnas.**

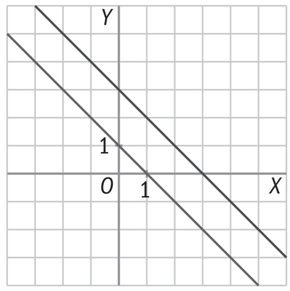
| | |
|---|---|
| $b > 0$ | $x = 1$ |
| $b = 0$ | $x \notin \mathbf{R}$ |
| $b = a$ | $x = \log_a b$ |

**3.38 Las dos gráficas siguientes representan las ecuaciones de un sistema.**
**a) ¿Es un sistema lineal o no lineal? ¿Por qué?**
**b) ¿Cuáles son sus soluciones?**




a) Es un sistema no lineal. Una de las gráficas no es una recta.
b) Las soluciones son: $x = 1$, $y = 2$, y $x = 4$, $y = 5$.

**3.39 Observa las dos rectas correspondientes a un sistema de ecuaciones.**
**¿Cómo han de ser los coeficientes de las incógnitas en ambas ecuaciones?**




Los coeficientes de $x$ e $y$ serán proporcionales, no así el término independiente.

## PROBLEMAS PARA APLICAR

**3.40 Shalma vive en un poblado de Kenia y debe caminar hasta el poblado vecino para ir a la escuela. En la primera media hora recorre un cuarto del trayecto, y en la media hora siguiente, dos quintos del trayecto restante, quedándole todavía 4,5 kilómetros por recorrer.**
**¿A qué distancia se encuentra la escuela?**

Llamamos $x$ a la distancia de su casa a la escuela.

$$\frac{x}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3x}{4} = x - 4{,}5 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{6x}{20} = x - 4{,}5 \Rightarrow 5x + 6x = 20x - 90 \Rightarrow 9x = 90 \Rightarrow x = 10 \text{ km}$$

**3.41 Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su diagonal mide 15 centímetros, y su área, 108 centímetros cuadrados.**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 15^2 \\ x \cdot y = 108 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{108}{y}\right)^2 + y^2 = 15^2 \\ x = \dfrac{108}{y} \end{cases} \quad 108^2 + y^4 = 225y^2 \Rightarrow y^4 - 225y^2 + 11\,664 = 0$$

Cambio: $u = y^2$, $u^2 = y^4$ $\quad u^2 - 225u + 11\,664 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{225 \pm \sqrt{225^2 - 4 \cdot 11\,664}}{2} = \frac{225 \pm 63}{2} \left\langle \begin{array}{l} 144 \Rightarrow y = 12;\ x = 9 \\ 81 \Rightarrow y = 9;\ x = 12 \end{array} \right.$$

Las soluciones negativas no las consideramos porque las dimensiones de un rectángulo tienen que ser positivas.
El rectángulo tendrá por dimensiones $9 \times 12$ cm.

**3.42** **De un rombo se sabe que su área es 120 centímetros cuadrados, y que la proporción existente entre la diagonal mayor y la diagonal menor es 10 : 3.**
**Calcula la medida de las diagonales.**

$$\begin{cases} \dfrac{Dd}{2} = 120 \\ 3D = 10d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D\dfrac{3D}{10} = 240 \\ d = \dfrac{3D}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D^2 = 800 \Rightarrow D = 20\sqrt{2} \text{ cm} \\ d = \dfrac{3 \cdot 20\sqrt{2}}{10} \Rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ cm} \end{cases}$$

**3.43** **Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Una de ellas advirtió que los apretones de mano fueron 66. ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?**

En la reunión hay x personas. Cada persona da la mano a $x - 1$ personas.

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66 \Rightarrow x(x-1) = 132 \Rightarrow x^2 - x - 132 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-132)}}{2} = \frac{1 \pm 23}{2} \left\langle \begin{matrix} 12 \\ -11 \end{matrix} \right.$$

Concurrieron 12 personas.

**3.44** **Una ebanista quiere partir un listón de madera de 30 centímetros de longitud en tres trozos para construir una escuadra, de manera que el trozo de mayor longitud mida 13 centímetros.**
**¿Cuál es la longitud de los otros trozos?**

$$\begin{cases} x + y + 13 = 30 \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 - y \\ (17 - y)^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 289 - 34y + y^2 + y^2 = 169 \Rightarrow \\ 2y^2 - 34y + 120 = 0 \Rightarrow y^2 - 17y + 60 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4 \cdot 60}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{matrix} 12 \text{ cm} \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \\ 5 \text{ cm} \Rightarrow x = 12 \text{ cm} \end{matrix} \right.$$

Los otros dos trozos miden 5 y 12 cm.

**3.45** **La edad de mi nieto será dentro de tres años un cuadrado perfecto, y hace tres años era exactamente la raíz cuadrada de ese cuadrado perfecto. ¿Cuál es la edad actual de mi nieto?**

$$\begin{cases} x + 3 = y^2 \\ x - 3 = \sqrt{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} x + 3 = y^2 \\ x - 3 = y \end{cases} \\ \hline 6 = y^2 - y \end{array} \Rightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \right. \Rightarrow y = 3,\ x = 9 - 3 = 6$$

Tiene 6 años.

**3.46** **En unos laboratorios se ha comprobado que el número de células de una muestra se quintuplica cada minuto transcurrido.**
**Si inicialmente había dos células, ¿cuántos minutos deben transcurrir para que el número de células sea de 19 531 250?**

$$2 \cdot 5^x = 19\,531\,250 \Rightarrow 5^x = 9\,765\,625 \Rightarrow 5^x = 5^{10} \Rightarrow x = 10$$

**3.47** **Una empresa de reciclado de papel mezcla pasta de papel de baja calidad, que compra por 0,25 euros el kilogramo, con pasta de mayor calidad, de 0,40 euros, para conseguir 50 kilogramos de pasta de 0,31 euros el kilogramo.**
**¿Cuántos kilogramos utiliza de cada tipo de pasta?**

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 50 \cdot 0{,}31 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} 0{,}25x + 0{,}25y = 12{,}5 \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 15{,}5 \end{cases} \\ \hline -0{,}15y = -3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 \\ x = 30 \end{cases}$$

Se utilizan 30 kg de pasta de baja calidad y 20 kg de pasta de mayor calidad.

**3.48 Utilizando la regla de la división, averigua el dividendo y el divisor de la misma sabiendo que el cociente es 2; el resto, 7, y que el producto de ambos es igual a 490.**

$$\begin{cases} D = 2d + 7 \\ D \cdot d = 490 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (2d+7)d = 490 \Rightarrow 2d^2 + 7d - 490 = 0 \\ d = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 2 \cdot 490}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 14 \\ -17{,}5 \end{array} \right. \end{array} \Rightarrow \begin{cases} d = 14 \\ D = 35 \end{cases}$$

El resultado $d = -17{,}5$ no es entero, por eso no lo consideramos.

**3.49 Si a uno de los lados de un cuadrado se le aumenta su longitud en 5 centímetros y a su lado contiguo en 3 centímetros, el área de la figura aumenta en 71 centímetros cuadrados.**
**Calcula el lado del cuadrado.**

$$(x+5) \cdot (x+3) = x^2 + 71 \Rightarrow x^2 + 8x + 15 = x^2 + 71 \Rightarrow 8x = 56 \Rightarrow x = 7 \text{ cm}$$

El lado mide 7 cm.

**3.50 Las edades actuales de una mujer y su hijo son 49 y 25 años. ¿Hace cuántos años el producto de sus edades era 640?**

Hace x años: $(49 - x)(25 - x) = 640 \Rightarrow 1225 - 74x + x^2 = 640 \Rightarrow x^2 - 74x + 585 = 0$

$$x = \frac{74 \pm \sqrt{(-74)^2 - 4 \cdot 585}}{2} = \frac{74 \pm 56}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 65 \\ 9 \end{array} \right.$$

Hace 65 años no pudo ser porque no habían nacido. Por tanto, la respuesta correcta es hace 9 años.

**3.51 En la civilización egipcia, debido a las periódicas inundaciones del Nilo, se borraban los lindes de separación de la tierra y, para la reconstrucción de las fincas, necesitaban saber construir ángulos rectos.**
**En un viejo papiro se puede leer lo siguiente: "La altura del muro, la distancia al pie del mismo y la línea que une ambos extremos son tres números consecutivos".**
**Halla dichos números.**

Tres números consecutivos: $x$, $x + 1$, $x + 2$

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array} \right.$$

Los números serán: 3, 4 y 5.

**3.52 Una agricultora quiere comprobar cuál es el número de hectáreas de superficie que posee su terreno rectangular de cultivo. Sabe que la distancia máxima existente entre dos puntos del mismo es de 25 decámetros y que la proporción entre el largo y el ancho es 4:3.**
**Si una hectárea equivale a 100 decámetros cuadrados, ¿cuántas hectáreas tiene la superficie?**

La distancia máxima entre dos puntos del rectángulo corresponderá a la diagonal de este.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25^2 \\ 3x = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3}y \\ \dfrac{16}{9}y^2 + y^2 = 625 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{25}{9}y^2 = 625 \Rightarrow y^2 = 225 \Rightarrow y = 15 \text{ dam} \\ x = \dfrac{4}{3}15 = 20 \text{ dam} \end{cases}$$

Obviamente, solo consideramos las soluciones positivas.
Área $= 15 \cdot 20 = 300 \text{ dam}^2 = 3$ hectáreas

**3.53 Una muestra radiactiva se va desintegrando de modo que, cada cinco años, su masa se reduce a la mitad. Si se tienen 800 gramos de dicha sustancia, ¿en cuánto tiempo se reducirá su masa a 50 gramos?**

$$800\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = 50 \Rightarrow \frac{1}{2^{\frac{x}{5}}} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{\frac{x}{5}} = 2^4 \Rightarrow \frac{x}{5} = 4 \Rightarrow x = 20 \text{ años}$$

**3.54 Con la ayuda de los alumnos de varios centros escolares se están rehabilitando las casas de un pueblo abandonado. Ahora se ocupan de la remodelación de un depósito de 1000 metros cúbicos que abastece de agua potable al pueblo. Tiene forma de prisma cuadrangular tal que la altura es el cuadrado del lado de la base menos 15 metros.**
**Calcula la longitud del lado de la base y la altura del depósito.**

$$\begin{cases} x^2 \cdot h = 1000 \\ h = x^2 - 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (h + 15) \cdot h = 1000 \\ x^2 = h + 15 \end{cases} \Rightarrow h^2 + 15h - 1000 = 0 \Rightarrow h = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 4000}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 25 \\ -40 \end{array} \right.$$

Nos quedamos con las soluciones positivas: $h = 25$ m

$x^2 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$ m

**R E F U E R Z O**

## Ecuaciones polinómicas, racionales y radicales

**3.55 Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando las estrategias estudiadas según el tipo de ecuación.**

**a)** $-2(5x - 1) + \frac{3x - 2}{3} - \frac{55}{3} = 4(x - 1)$

**b)** $20x^2 + 11x - 3 = 0$

**c)** $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

**d)** $\frac{5x}{x - 4} + 1 = \frac{4}{x + 3}$

**e)** $4x^3 - 4x^2 - 14x + 14 = 0$

**f)** $\sqrt{12 - x} = x + 8$

a) $-2(5x - 1) + \frac{3x - 2}{3} - \frac{55}{3} = 4(x - 1) \Rightarrow -30x + 6 + 3x - 2 - 55 = 12x - 12 \Rightarrow -39x = 39 \Rightarrow x = -1$

b) $20x^2 + 11x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 240}}{40} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{4} \end{array} \right.$

c) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ cambio $u = x^2 \Rightarrow u^2 - 5u - 36 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ -4 \Rightarrow \text{No es correcta} \end{array} \right.$

d) $\frac{5x}{x - 4} + 1 = \frac{4}{x + 3} \Rightarrow \frac{(5x)(x + 3)}{(x - 4)(x + 3)} + \frac{(x - 4)(x + 3)}{(x - 4)(x + 3)} = \frac{4(x - 4)}{(x + 3)(x - 4)} \Rightarrow$

$5x^2 + 15x + x^2 - x - 12 = 4x - 16 \Rightarrow 6x^2 + 10x + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-2}{3} \\ -1 \end{array} \right.$

e) $4x^3 - 4x^2 - 14x + 14 = 0 \Rightarrow 2x^3 - 2x^2 - 7x + 7 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -2 & -7 & 7 \\ 1 & & 2 & 0 & -7 \\ \hline & 2 & 0 & -7 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 1)(2x^2 - 7) \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$2x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$

f) $\sqrt{12 - x} = x + 8 \Rightarrow 12 - x = x^2 + 16x + 64 \Rightarrow x^2 + 17x + 52 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 208}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} -4 \\ -13 \end{array} \right.$

## Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

**3.56 Calcula la solución de estas ecuaciones exponenciales.**

**a)** $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ **b)** $2^{x-1} + 2^{x+2} = 72$ **c)** $\sqrt[3]{128} = 4^{2x}$

a) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$; cambio $2^x = u \Rightarrow u^2 - 9u + 8 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \begin{cases} 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \\ 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

b) $2^{x-1} + 2^{x+2} = 72 \Rightarrow 2^{x-1} + 2^3 \cdot 2^{x-1} = 72 \Rightarrow 9 \cdot 2^{x-1} = 72 \Rightarrow 2^{x-1} = 8 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^3 \Rightarrow x = 4$

c) $\sqrt[3]{128} = 4^{2x} \Rightarrow 2^{\frac{7}{3}} = 2^{4x} \Rightarrow \frac{7}{3} = 4x \Rightarrow x = \frac{7}{12}$

**3.57 Resuelve estas ecuaciones logarítmicas.**

**a)** $\log_9(x + 1) - \log_9(1 - x) = \log_9(2x + 3)$ **b)** $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1$ **c)** $\log x = \frac{1}{2}\log(x + 2)$

a) $\log_9(x + 1) - \log_9(1 - x) = \log_9(2x + 3) \Rightarrow \log_9\frac{x+1}{1-x} = \log_9(2x + 3) \Rightarrow \frac{x+1}{1-x} = 2x + 3 \Rightarrow x + 1 = (2x + 3)(1 - x) \Rightarrow$
$\Rightarrow x + 1 = -x - 2x^2 + 3 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{Sí es solución} \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{No es solución} \end{cases}$$

b) $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1 \Rightarrow \sqrt[5]{27} = 9^{2x-1} \Rightarrow 3^{\frac{3}{5}} = 3^{4x-2} \Rightarrow \frac{3}{5} = 4x - 2 \Rightarrow 3 = 20x - 10 \Rightarrow 20x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{20}$

c) $\log x = \frac{1}{2}\log(x + 2) \Rightarrow x = \sqrt{x + 2} \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \begin{cases} 2 \Rightarrow \text{Sí es solución} \\ -1 \Rightarrow \text{No es solución} \end{cases}$

## Sistemas de ecuaciones

**3.58 Resuelve los siguientes sistemas lineales.**

**a)** $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} -3t + 5m = 19 \\ 2t + 4m = 2 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} -2(x - 3) + 4(-3y + 1) = 14 \\ 4(-2x + 1) - (y + 4) = 16 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20x - 5y = -40 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$

$19x = -19$

b) $\begin{cases} -3t + 5m = 19 \\ 2t + 4m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6t + 10m = 38 \\ 6t + 12m = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ t = -3 \end{cases}$

$22m = 44$

c) $\begin{cases} -2(x - 3) + 4(-3y + 1) = 14 \\ 4(-2x + 1) - (y + 4) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 12y = 4 \\ -8x - y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8x - 48y = 16 \\ -8x - y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

$-47y = 0$

**3.59 Encuentra la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.**

**a)** $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} (x - y)^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ (2x + 1)^2 - 2x^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4x - 6 = 0 \\ x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ x = -3 \Rightarrow y = 2(-3) + 1 = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \\ x \cdot y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{y^3} + y^3 = 6 \\ x = \dfrac{2}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + y^6 = 6y^3 \Rightarrow y^6 - 6y^3 + 8 = 0 \text{ cambio } u = y^3 \Rightarrow u^2 - 6u + 8 = 0 \\ u = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \begin{cases} 4 \Rightarrow y = \sqrt[3]{4};\ x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2} \\ 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{2};\ x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} \end{cases} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61 \\ x \cdot y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3 \cdot 12 + y^2 = 61 \\ x = \dfrac{12}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{144}{y^2} + y^2 = 25 \Rightarrow y^4 - 25y^2 + 144 = 0 \\ \text{Cambio } u = y^2 \quad u^2 - 25u + 144 = 0 \end{cases}$

$$u = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \begin{cases} 16 \Rightarrow \pm 4 \\ 9 \Rightarrow \pm 3 \end{cases}$$

$y = 4, x = 3$ $\quad y = -4, x = -3$ $\quad y = 3, x = 4$ $\quad y = -3, x = -4$

d) $\begin{cases} (x - y)^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y) = \pm 1 \\ (x - y)(x + y) = 7 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Quedan dos posibles sistemas: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$

## AMPLIACIÓN

**3.60 El gran matemático suizo Leonhard Euler planteaba el siguiente problema como introducción al álgebra: "Dos campesinas llevaron en total cien huevos al mercado. Una de ellas tenía más mercancía que la otra, pero recibió por ella la misma cantidad de dinero que la otra. Una vez vendidos todos, la primera campesina dijo a la segunda: "Si yo hubiera llevado la misma cantidad de huevos que tú, habría recibido 15 cruceros". La segunda contestó: "Y si yo hubiera vendido los huevos que tenías tú, habría sacado de ellos $6 + \frac{2}{3}$ cruceros". ¿Cuántos llevó cada una?**

Una lleva $x$ huevos, y la otra, $100 - x$; en total, las dos reciben $y$ cruceros.

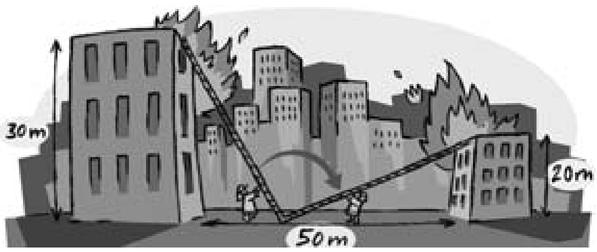
A la primera campesina le pagan a $\dfrac{y}{x}$ cruceros por huevo, mientras que a la segunda le pagan a $\dfrac{y}{100 - x}$

$$\begin{cases} (100 - x) \cdot \dfrac{y}{x} = 15 \\ x \cdot \dfrac{y}{100 - x} = 6 + \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{15x}{100 - x} \\ \dfrac{x}{100 - x} \cdot \dfrac{15x}{100 - x} = \dfrac{20}{3} \end{cases} \Rightarrow 45x^2 = 20(100 - x)^2 \Rightarrow 25x^2 + 4000x - 200\,000 = 0 \Rightarrow x^2 + 160x - 8000 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-160 \pm \sqrt{25\,600 + 32\,000}}{2} = \begin{cases} 40 \\ -200 \end{cases}$$

La primera llevaba 40 huevos, y la segunda, 60.

**3.61 La siguiente figura muestra la posición que debe ocupar una escalera de bomberos sobre dos edificios para que éstos puedan subir.**




**Calcula la longitud de la escalera y la posición sobre la que debe posarse la escalera en la acera.**

$$\begin{cases} y^2 = 30^2 + x^2 \\ y^2 = 20^2 + (50 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow 900 + x^2 = 400 + 2500 - 100x + x^2 \Rightarrow 100x = 2000 \Rightarrow x = 20 \text{ m}$$

$$y^2 = 900 + 400 = 1300 \Rightarrow y = 36{,}06 \text{ m debe medir}$$

La escalera debe medir 36,06 m y estar situada a 20 m de la primera casa.

**3.62 En la Antigüedad estaba muy extendida en la India la idea de expresar los enunciados de los problemas en verso. Uno de esos problemas, enunciado en prosa, es el siguiente.**
**"Un grupo de abejas, cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre, se posó sobre un jazmín, habiendo dejado muy atrás a $\frac{8}{9}$ del enjambre; solo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno a un loto, atraída por el zumbido de una de sus amigas. ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?"**

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{1}{9}x + 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{x^2}{81} + \frac{2x}{9} + 1 \Rightarrow 2x^2 - 45x + 162 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{45 \pm \sqrt{2025 - 1296}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 18 \\ \frac{9}{4} \end{matrix} \right.$$

El enjambre lo formaban 18 abejas.

**3.63 Resuelve los siguientes sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando los mismos métodos que con dos ecuaciones.**

**a)** $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ x - 3y + 4z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ 2x + 10y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -5y + 3z = 19 \\ -12y - 4z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -60y + 36z = 228 \\ -60y - 20z = 60 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -60y + 36z = 228 \\ 56z = 168 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ x - 3y + 4z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ 5x - 15y + 20z = 25 \\ 5x - 5y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +17y - 21z = -29 \\ +7y - 6z = -4 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +119y - 147z = -203 \\ +119y - 102z = -68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +119y - 147z = -203 \\ -45z = -135 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

**3.64 María y Bianca forman pareja para realizar el trabajo en grupo que ha encargado la profesora de Biología sobre los efectos de las drogas en el organismo. Si hicieran el trabajo conjuntamente, tardarían 2 horas. María, ella sola, emplearía 3 horas más que Bianca, también en solitario.**

**¿Cuántas horas tardaría cada una de ellas por separado en hacer el trabajo?**

Bianca tardaría $x$ horas; en una hora realiza $\frac{1}{x}$ del trabajo.

María tardaría $x + 3$ horas; en una hora realiza $\frac{1}{x+3}$ del trabajo.

Entre las dos juntas tardarían 2 horas; en una hora realizan $\frac{1}{2}$ del trabajo.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2(x+3)}{2x(x+3)} + \frac{2x}{2x(x+3)} = \frac{x(x+3)}{2x(x+3)} \Rightarrow 2x + 6 + 2x = x^2 + 3x \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array} \right.$$

Bianca tardaría 3 horas, y María, 6.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

**3.65 Cinco animales**

**Se está realizando un estudio sobre la evolución de ciertas características físicas de cinco especies animales a lo largo de su vida. Para ello se ha observado, en particular y de forma especial, a un ejemplar de cada una de ellas.**

**Una de las variables que interesan para el estudio es la masa corporal que tenía cada uno de esos cinco ejemplares hace 18 meses. Inexplicablemente, los únicos datos con los que se cuenta son los ofrecidos en la siguiente tabla.**

| Animales | Masa conjunta (kg) | Animales | Masa conjunta (kg) |
|---|---|---|---|
| Perro y gato | 30 | Gato y cerdo | 93 |
| Perro y pato | 27 | Gato y cabra | 72 |
| Perro y cerdo | 107 | Pato y cerdo | 90 |
| Perro y cabra | 86 | Pato y cabra | 69 |
| Gato y pato | 13 | Cerdo y cabra | 149 |

**Calcula la masa que tenía el cerdo en esa época.**

Si se suman todos los valores ofrecidos por la tabla, se obtiene cuatro veces la masa de los cinco animales juntos.

Así: Perro + Gato + Pato + Cerdo + Cabra $= \frac{30 + 27 + ... + 149}{4} = \frac{736}{4} = 184$

Por tanto: Cerdo $= 184 - (\text{Perro} + \text{Gato}) - (\text{Pato} + \text{Cabra}) = 184 - 30 - 69 = 85$ kg

3.66 **Ecuaciones relacionadas**

**¿Es posible resolver dos ecuaciones a la vez? Sigue estos pasos y compruébalo.**

**a) Resuelve estas ecuaciones.**

$$1.\quad 2x^2 + 3x - 5 = 0 \qquad 2.\quad -5x^2 + 3x + 2 = 0$$

**b) Resuelve también estas otras ecuaciones.**

$$1.\quad 18x^2 - 9x - 2 = 0 \qquad 2.\quad -2x^2 - 9x + 18 = 0$$

**c) Si se sabe que $x = r$ es una solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, comprueba que $\frac{1}{r}$ es una solución de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$.**

**d) Sin necesidad de resolver las ecuaciones, completa la tabla.**

| Ecuación | Soluciones |
|---|---|
| $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$ | $x = \sqrt{2}$ $\quad x = -2\sqrt{2}$ |
| $-4x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$ | |
| $2x^2 - 7x - 4 = 0$ | $x = 4$ $\quad x = -\frac{1}{2}$ |
| $4x^2 + 7x - 2 = 0$ | |
| $2x^2 - x - 1 = 0$ | $x = 1$ $\quad x = -\frac{1}{2}$ |
| | $x = 1$ $\quad x = -2$ |

a) $x = \dfrac{-3 \pm 7}{4} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ $\qquad x = \dfrac{-3 \pm 7}{-10} = \begin{cases} x = -\dfrac{2}{5} \\ x = 1 \end{cases}$

b) $x = \dfrac{9 \pm 15}{36} = \begin{cases} x = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3} \\ x = -\dfrac{6}{36} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$ $\qquad x = \dfrac{9 \pm 15}{-4} = \begin{cases} x = \dfrac{24}{-4} = -6 \\ x = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

c) Sabemos que $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$

Pero:

$$c \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{r} + a = \frac{c}{r^2} + \frac{b}{r} + a = \frac{c + br + ar^2}{r^2} = \frac{0}{r^2} = 0$$

Por tanto, $\frac{1}{r}$ es solución de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$.

d)

| Ecuación | Soluciones |
|---|---|
| $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$ | $x = \sqrt{2}$ $\quad x = -2\sqrt{2}$ |
| $-4x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$ | $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ |
| $2x^2 - 7x - 4 = 0$ | $x = 4$ $\quad x = -\frac{1}{2}$ |
| $4x^2 + 7x - 2 = 0$ | $x = \frac{1}{4}$ $\quad x = -2$ |
| $2x^2 - x - 1 = 0$ | $x = 1$ $\quad x = -\frac{1}{2}$ |
| $-x^2 - x + 2 = 0$ | $x = 1$ $\quad x = -2$ |

**3.A1** **Encuentra la solución de la siguiente ecuación de primer grado.**

$$\frac{3(-2x+1)}{2} - 5(x-3) = \frac{3x-1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$-12x + 6 - 20x + 60 = 3x - 1 + 2 \Rightarrow -35x = -65 \Rightarrow x = \frac{13}{7}$$

**3.A2** **Resuelve esta ecuación de segundo grado:** $\frac{4x+5}{3} = \frac{1}{2x+3}$

$$(4x+5)(2x+3) = 3 \Rightarrow 8x^2 + 22x + 12 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 11x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121-96}}{8} = \begin{cases} \frac{-3}{4} \\ -2 \end{cases}$$

**3.A3** **Halla la solución de esta ecuación radical:** $\sqrt{4x+13} + 2 = \sqrt{-2x+3}$

$$4x + 13 + 4\sqrt{4x+13} + 4 = -2x + 3 \Rightarrow 2\sqrt{4x+13} = -3x - 7 \Rightarrow 16x + 52 = 9x^2 + 42x + 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 26x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-26 \pm \sqrt{676+108}}{18} = \begin{cases} \frac{1}{9} \\ -3 \end{cases}$$

Comprobación: $\begin{cases} x = \frac{1}{9} & \sqrt{4\frac{1}{9} + 13} + 2 \neq \sqrt{-2\frac{1}{9} + 3} \Rightarrow \text{No es solución.} \\ x = -3 & \sqrt{-12+13} + 2 = \sqrt{6+3} \Rightarrow \text{Sí es solución.} \end{cases}$

**3.A4** **Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.**

**a)** $\frac{x^2-3}{2} = \frac{-3}{2x^2+1}$ **b)** $\frac{3}{x-2} + \frac{8}{x+5} = \frac{x+1}{x^2+3x-10}$

a) $(x^2-3)(2x^2+1) = -6 \Rightarrow 2x^4 - 5x^2 - 3 = 0 \Rightarrow$ Cambio: $u = x^2 \Rightarrow 2u^2 - 5u - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \begin{cases} \frac{-1}{2} \Rightarrow \text{No es solución} \\ 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \text{Sí es solución} \end{cases}$$

b) $\frac{3}{x-2} + \frac{8}{x+5} = \frac{x+1}{(x-2)(x+5)} \Rightarrow \frac{3(x+5)}{(x-2)(x+5)} + \frac{8(x-2)}{(x-2)(x+5)} = \frac{x+1}{(x-2)(x+5)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 15 + 8x - 16 = x + 1 \Rightarrow 10x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

**3.A5** **Halla la solución de esta ecuación de grado 4:** $6x^4 + 7x^3 - 52x^2 - 63x - 18 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 7 & -52 & -63 & -18 \\ 3 & & 18 & 75 & 69 & 18 \\ \hline & 6 & 25 & 23 & 6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 6 & 25 & 23 & 6 \\ -3 & & -18 & -21 & -6 \\ \hline & 6 & 7 & 2 & 0 \end{array} \qquad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{12} = \begin{cases} \frac{-1}{2} \\ \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$$P(x) = (x-3)(6x^3 + 25x^2 + 23x + 6) = (x-3)(x+3)(6x^2 + 7x + 2) = 6(x-3)(x+3)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Soluciones: $x = 3$, $x = -3$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = -\frac{1}{2}$

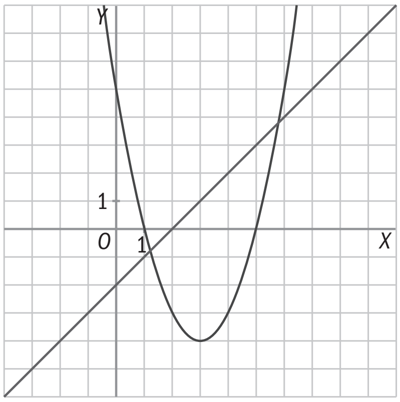
**3.A6** **Resuelve la siguiente ecuación logarítmica:** $\log_3 \sqrt[5]{81} = 3x + 2$

$$\log_3 \sqrt[5]{81} = 3x + 2 \Rightarrow \sqrt[5]{81} = 3^{3x+2} \Rightarrow 3^{\frac{4}{5}} = 3^{3x+2} \Rightarrow \frac{4}{5} = 3x + 2 \Rightarrow 4 = 15x + 10 \Rightarrow 15x = -6 \Rightarrow x = \frac{-2}{5}$$

**3.A7** **Calcula la solución de esta ecuación exponencial: $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$**

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0 \text{ cambio } u = 3^x \Rightarrow u^2 - 10u + 9 = 0 \Rightarrow u = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \\ 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right.$$

**3.A8** **Averigua cuáles son las ecuaciones del sistema cuya representación gráfica es la siguiente. ¿Cuáles son las soluciones del sistema?**




$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y = (x - 1)(x - 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x - 2 = x^2 - 6x + 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 7 = 0 \\ x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 28}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{7 + \sqrt{21}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3 + \sqrt{21}}{2} \\ \dfrac{7 - \sqrt{21}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3 - \sqrt{21}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

**3.A9** **Encuentra la solución del siguiente sistema de ecuaciones no lineales.** $\begin{cases} \mathbf{3x^2 + 2y^2 = 29} \\ \mathbf{x^2 - 4y = 5} \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ 3x^2 - 12y = 15 \end{cases} \\ \hline 2y^2 + 12y = 14 \end{array} \Rightarrow y^2 + 6y - 7 = 0 \Rightarrow \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ -7 \Rightarrow x^2 = -23 \Rightarrow \text{No tiene solución.} \end{array} \right.$$

Soluciones: $x = 3, y = 1 \quad x = -3, y = 1$

## MURAL DE MATEMÁTICAS

### MATETIEMPOS

## ¿Dónde está el error?

**En la resolución de esta ecuación hay un error.**

$$\frac{2x + 3}{4x + 6} = 2 \rightarrow 2x + 3 = 8x + 12 \rightarrow -6x = 9 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

**¿Puedes encontrarlo? ¿Sabrías resolver correctamente la ecuación?**

**Una ecuación especial**

La primera idea que surge es que al ser el denominador el doble que el numerador, el cociente no puede ser igual a 2, luego la ecuación no tiene solución.

Resolviendo algebraicamente la ecuación se tiene:

$$2x + 3 = 2\,(4x + 6) \Rightarrow 2x + 3 = 8x + 12 \Rightarrow 2x - 8x = 12 - 3 \Rightarrow -6x = 9$$

$$x = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

Aunque algebraicamente la ecuación tiene solución, debe hacerse notar al estudiante que antes de iniciar un problema debe analizarlo y que en este caso la ecuación tiene un dominio cuyos valores deben ser diferentes a $-\frac{3}{2}$, o sea $4x + 6 \neq 0$.

$$D: \mathbf{R} - \left\{\frac{-3}{2}\right\}$$

Como el resultado es de $-\frac{3}{2}$, la ecuación no tiene solución en su dominio.

E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

**4.1 Escribe las siguientes informaciones utilizando desigualdades.**

**a) He sacado, por lo menos, un 7 en el examen.**

**b) Tengo tarifa plana de ADSL de ocho de la mañana a seis de la tarde.**

a) $x \geq 7$

b) $8 \leq x \leq 18$

**4.2 Construye una tabla que te permita encontrar los valores de $x$ que satisfacen cada una de estas inecuaciones.**

**a) $2x + 4 > 3$**

**b) $x - 5 < 6 - x$**

**c) $8x - 5 \leq 6x + 9$**

**d) $5x - 3 \geq 4x + 6$**

a)

| **$x$** | $-4$ | $-2$ | $-1$ | $-0{,}5$ | 2 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Primer miembro: $2x + 4$** | $-4$ | 0 | 2 | 3 | 8 | 14 | 24 |
| **Segundo miembro: 3** | 3 | | | 3 | 3 | | |
| | $2x + 4 < 3$ | | | $x + 4 = 3$ | $x + 4 > 3$ | | |

b)

| **$x$** | $-1$ | 0 | 2 | 5,5 | 6 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Primer miembro: $x - 5$** | $-6$ | $-5$ | $-3$ | 0,5 | 1 | 2 | 5 |
| **Segundo miembro: $6 - x$** | 7 | 6 | 4 | 0,5 | 0 | $-1$ | $-4$ |
| | $x - 5 < 6 - x$ | | | $2x - 5 = 6 - x$ | $2x - 5 > 6 - x$ | | |

c)

| **$x$** | $-1$ | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Primer miembro: $8x - 5$** | $-13$ | 19 | 35 | 51 | 59 | 67 | 75 |
| **Segundo miembro: $6x + 9$** | 3 | 27 | 39 | 51 | 57 | 63 | 69 |
| | $8x - 5 < 6x + 9$ | | | $8x - 5 = 6x + 9$ | $8x - 5 > 6x + 9$ | | |

d)

| **$x$** | 3 | 5 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Primer miembro: $5x - 3$** | 12 | 22 | 37 | 42 | 47 | 52 | 57 |
| **Segundo miembro: $4x + 6$** | 18 | 26 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 |
| | $5x - 3 < 4x + 6$ | | | $5x - 3 = 4x + 6$ | $5x - 3 > 4x + 6$ | | |

**4.3 Escribe las desigualdades que resultan al operar los dos miembros de $12 > 2$ en cada apartado.**

**a) Sumando 3**

**b) Multiplicando por $-2$**

**c) Dividiendo entre 3**

**d) Restando 2**

a) $12 + 3 > 2 + 3 \Rightarrow 15 > 5$

b) $(-2) \cdot 12 < (-2) \cdot 2 \Rightarrow -24 < -4$

c) $\frac{12}{3} > \frac{2}{3} \Rightarrow 4 > \frac{2}{3}$

d) $12 - 2 > 2 - 2 \Rightarrow 10 > 0$

**4.4 Resuelve las siguientes inecuaciones aplicando las reglas de la suma y del producto.**

**a)** $3x - 5 > 4x$

**b)** $3x + 6 \leq 2x + 10$

**c)** $4 - x \geq x - 6$

**d)** $2 + 6x > 2x - 3$

a) $-x > 5 \Rightarrow x < -5$

b) $x \leq 4$

c) $-2x \geq -10 \Rightarrow x \leq 5$

d) $4x > -5 \Rightarrow x > \frac{-5}{4}$

**4.5 Resuelve las siguientes inecuaciones.**

**a)** $3(2x + 2) > 3(3x + 4)$

**b)** $\frac{5x - 7}{3} < x + 5$

**c)** $1 - 2(x + 5) \geq -3$

**d)** $2x - 5 < 2(x + 1) + x$

**e)** $x + \frac{1 - x}{6} < 2 - \frac{2 + x}{2}$

**f)** $3x - \frac{1 - 2x}{2} \leq 4 + x$

a) $6x + 6 > 9x + 12 \Rightarrow -3x > 6 \Rightarrow x < -2$

b) $5x - 7 < 3x + 15 \Rightarrow 2x < 22 \Rightarrow x < 11$

c) $1 - 2x - 10 \geq -3 \Rightarrow -2x \geq 6 \Rightarrow x \leq -3$

d) $2x - 5 < 2x + 2 + x \Rightarrow -x < 7 \Rightarrow x > -7$

e) $6x + 1 - x < 12 - 6 - 3x \Rightarrow 8x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{8}$

f) $6x - 1 + 2x \leq 8 + 2x \Rightarrow 6x \leq 9 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$

**4.6 Encuentra gráficamente la solución de las siguientes inecuaciones.**

**a)** $x - 2 > 3$

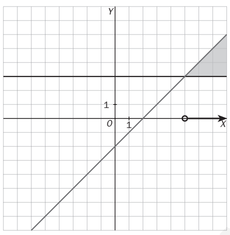
**b)** $3x - 3 < x + 1$

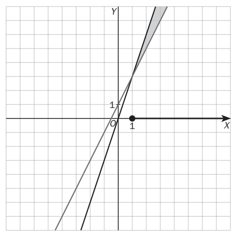
**c)** $1 - 2x \geq 2x + 4$

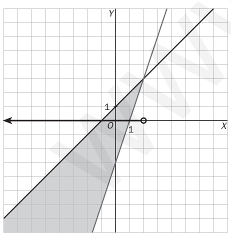
**d)** $2x + 1 \leq 3x$

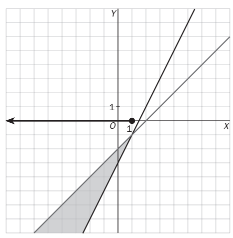
**e)** $x - 2 \geq 2x - 3$

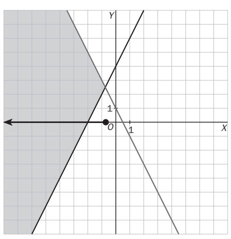
**f)** $5 + x < x + 3$

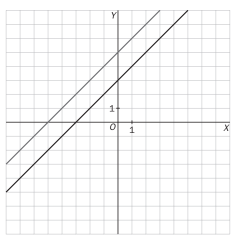
a)


d)


b)


e)


c)


f)


a) $x > 5$

b) $x < 2$

c) $x \leq -\frac{3}{4}$

d) $x \geq 1$

e) $x \leq 1$

f) $\varnothing$

**4.7 Resuelve las siguientes inecuaciones.**

**a)** $x^2 - 2x - 3 > 0$

**b)** $x^2 - 8x + 12 \geq 0$

**c)** $4x^2 + 4x - 3 \leq 0$

**d)** $x^2 + 1 < 0$

**e)** $x(x + 1)(x - 2) > 0$

**f)** $x^3 - 9x \leq 0$

a) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right. \Rightarrow P(x) = (x - 3)(x + 1)$

| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 3)$ | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo del primer factor: $(x - 3)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo del segundo factor: $(x + 1)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo del polinomio: $P(x) = (x - 3)(x + 1)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

b) $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix} \right. \Rightarrow P(x) = (x - 6)(x - 2)$

| | $(-\infty, 2)$ | $(2, 6)$ | $(6, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo del primer factor: $(x - 6)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo del segundo factor: $(x - 2)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo del polinomio: $P(x) = (x - 6)(x - 2)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$

c) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{matrix} \right. \Rightarrow P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

| | $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ | $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ | $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| Signo del primer factor: $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo del segundo factor: $\left(x + \frac{3}{2}\right)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo del polinomio: $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $[-1{,}5; 0{,}5]$

d) $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Por tanto, $x^2 + 1 < 0$ no tiene solución.

e)

| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 0)$ | $(0, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo del primer factor: $x$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo del segundo factor: $(x + 1)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Signo del tercer factor: $(x - 2)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo del polinomio: $P(x) = x(x + 1)(x - 2)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$

f) $x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3)$

| | $(-\infty, -3)$ | $(-3, 0)$ | $(0, 3)$ | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo del primer factor: $x$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo del segundo factor: $(x - 3)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo del tercer factor: $(x + 3)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Signo del polinomio: $P(x) = x(x - 3)(x + 3)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $(-\infty, -3] \cup [0, 3]$

**4.8 Encuentra la solución de estas inecuaciones.**

**a)** $\dfrac{1}{x+2} < 0$ **c)** $\dfrac{x+3}{x-5} > 0$ **e)** $\dfrac{x^2-1}{x^2} < 0$

**b)** $\dfrac{x}{x-2} \geqslant 0$ **d)** $\dfrac{x+4}{1-x} \leq 0$ **f)** $\dfrac{x-4}{x^2-3x+2} \geq 0$

a) $\dfrac{1}{x+2} < 0 \Rightarrow x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2 \Rightarrow$ Solución: $(-\infty, -2)$

b)

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo del numerador: $x$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo del denominador: $(x - 2)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo de la fracción | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$

c)

| | $(-\infty, -3)$ | $(-3, 5)$ | $(5, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo del numerador: $(x + 3)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo del denominador: $(x - 5)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo de la fracción | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $(-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

d)

| | $(-\infty, -4)$ | $(-4, 1)$ | $(1, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo del numerador: $(x + 4)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo del denominador: $(1 - x)$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| Signo de la fracción | $-$ | $+$ | $-$ |

Solución: $(-\infty, -4] \cup (1, +\infty)$

e) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo del primer factor del numerador: $(x - 1)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo del segundo factor del numerador: $(x + 1)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Signo del denominador: $x^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Signo de la fracción | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |

Solución: $(-1, 0) \cup (0, 1)$

f) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \left\langle\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right.$

| | $(-\infty, 1)$ | $(1, 2)$ | $(2, 4)$ | $(4, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo del numerador: $(x - 4)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo del primer factor del denominador: $(x - 1)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Signo del segundo factor del denominador: $(x - 2)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo de la fracción | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $(1, 2) \cup [4, +\infty)$

4.9 **Resuelve estos sistemas de inecuaciones.**

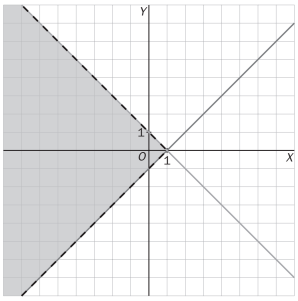
**a)** $\begin{cases} x < 2 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 3 < 1 - x \\ 4 - 2x \geq 6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 1 \geq 7 - x \\ 1 - x < 1 - 2x \end{cases}$

a) Solución: $[0, 2)$ b) $\begin{cases} 3x < 4 \\ -2x \geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{4} \\ x \leqslant -1 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $(-\infty, -1]$ c) $\begin{cases} 4x \geqslant 8 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ No tiene solución

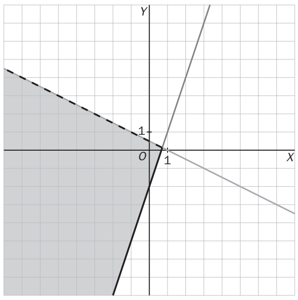
4.10 **Resuelve estos sistemas de inecuaciones.**

**a)** $\begin{cases} x + y < 1 \\ x - y < 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y < 1 \\ 3x - y \leq 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + y < -2 \\ 4x + 2y < 1 \end{cases}$

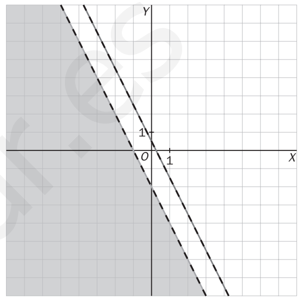
a)




b)




c)

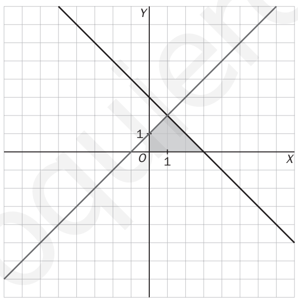



## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.11 **Calcula el área del recinto limitado por estas inecuaciones.**

$$\begin{cases} x - y > -1 \\ x + y < 3 \\ x > 0,\ y > 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{11}{2} = \frac{7}{2}\ \text{u}^2$$

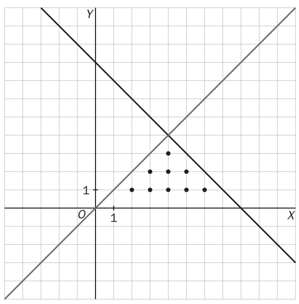



4.12 **Por su cumpleaños, Adela ha recibido más llamadas de su familia que de sus amigos.**
**Si en total han sido menos de 8 felicitaciones, al menos una de cada tipo, ¿cuántas llamadas de familiares y amigos puede haber recibido?**

$x$: llamadas de familiares

$y$: llamadas de amigos

$$\begin{cases} x > y \\ x + y < 8 \\ x \geq 1,\ y \geq 1 \end{cases}$$




Como el número de llamadas debe ser entero, las posibles soluciones serán:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Familiares** | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| **Amigos** | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |

## A C T I V I D A D E S

### E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

### Concepto de desigualdad e inecuación. Reglas de equivalencia

**4.13 Distingue cuáles de las siguientes expresiones son desigualdades y cuáles inecuaciones.**
**Si son desigualdades, indica si son verdaderas o falsas, y si son inecuaciones, escribe su solución en forma de intervalo.**

**a)** $-4 > 0$ **d)** $-x \leq 1$ **g)** $x + 3 \leq 2x + 1$
**b)** $6 \leq 6$ **e)** $x > 3$ **h)** $2 \geq -3$
**c)** $x - 1 \leq x + 8$ **f)** $-3 < 5$ **i)** $y - 3 > 2$

a) Desigualdad. Falsa
b) Desigualdad. Verdadera
c) Inecuación. **R**
d) Inecuación. $[-1, +\infty)$
e) Inecuación. $(3, +\infty)$
f) Desigualdad. Falsa
g) Inecuación. $[2, +\infty)$
h) Desigualdad. Verdadera
i) Inecuación. $(5, +\infty)$

**4.14 Escribe las siguientes afirmaciones en forma de desigualdad.**

**a) Elena necesita correr por debajo de 16 segundos para clasificarse en una prueba.**
**b) En algunas atracciones del parque temático exigen una altura superior a 1,20 metros.**
**c) He pasado el kilómetro 125 de la A-42, pero aún no he llegado al 145 de la misma.**

a) $x < 16$ b) $x > 1{,}20$ c) $125 < x < 145$

**4.15 Soluciona la inecuación $2x + 3 \leq x + 7$, dando valores a la incógnita y completando la tabla.**

| $x$ | $-2$ | 0 | 2 | 4 | 5 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x + 3$ | $-1$ | 3 | 7 | 11 | 13 | 17 | 23 |
| $x + 7$ | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 17 |
| | $2x + 3 < x + 7$ | | | | $2x + 3 > x + 7$ | | |

Solución: $(-\infty, 4]$

**4.16 Relaciona en tu cuaderno cada desigualdad con su equivalente y con la operación en los dos miembros que pasa de una a otra.**

| **Desigualdad *A*** | **Operación** | **Desigualdad *B*** |
|---|---|---|
| $-4 < 7$ | **Dividir entre $-2$** | $-4 < 5$ |
| $12 > -6$ | **Sumar $-5$** | $-6 < 3$ |
| $-\frac{4}{3} < \frac{10}{6}$ | **Multiplicar por 3** | $-9 < 2$ |

**4.17 Indica si las siguientes inecuaciones son equivalentes.**

**a)** $-2x \leq 14$ **y** $x \leq 7$ **b)** $\frac{x}{2} > -5$ **y** $x < 10$

a) No son equivalentes. b) No son equivalentes.

**4.18 Resuelve la inecuación $7x + 6 > 3x - 10$ copiando la tabla en tu cuaderno y siguiendo los pasos que se te indican en ella.**

| | | |
|---|---|---|
| **Resta $3x$ en ambos miembros** | $4x + 6 > -10$ | |
| **Resta 6 en ambos miembros** | $4x > -16$ | |
| **Divide entre 4 ambos miembros** | $x > -4$ | |
| **Solución** | **Como desigualdad** $x > -4$ | **Como intervalo** $(-4, +\infty)$ |

## Resolución de inecuaciones

**4.19 Resuelve las siguientes inecuaciones utilizando las reglas de equivalencia.**

**a)** $7x - 2\,(1 - 3x) \leq 2x + 3$

**b)** $5 > \dfrac{3x + 1}{2}$

**c)** $5x - \dfrac{2}{3} < 4\,(3x - 6) - 2x$

**d)** $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x + 1}{2} \geq \dfrac{5}{6} - x$

**e)** $\dfrac{2\,(5x + 1)}{3} \leq -4\,(x - 3) + \dfrac{5}{2}$

**f)** $\dfrac{4x - 3}{2} \geq x + 1$

a) $7x - 2 + 6x \leq 2x + 3 \Rightarrow 11x \leq 5 \Rightarrow x \leq \dfrac{5}{11}$

b) $10 > 3x + 1 \Rightarrow 9 > 3x \Rightarrow x < 3$

c) $15x - 2 < 36x - 72 - 6x \Rightarrow -15x < -70 \Rightarrow x > \dfrac{14}{3}$

d) $2x - 3x - 3 \geq 5 - 6x \Rightarrow 5x \geq 8 \Rightarrow x \geq \dfrac{8}{5}$

e) $20x + 4 \leq -24x + 72 + 15 \Rightarrow 44x \leq 83 \Rightarrow x \leq \dfrac{83}{44}$

f) $4x - 3 \geq 2x + 2 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow x \geq \dfrac{5}{2}$

**4.20 Encuentra gráficamente la solución de las siguientes inecuaciones.**

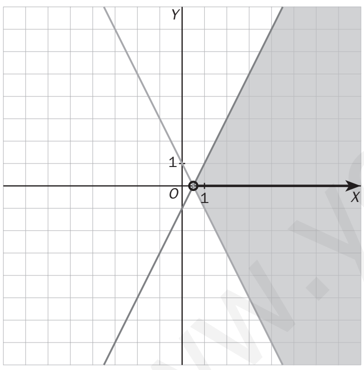
**a)** $-3x + 1 < 2x - 1$

**b)** $\dfrac{-x + 2}{3} < x + 3$

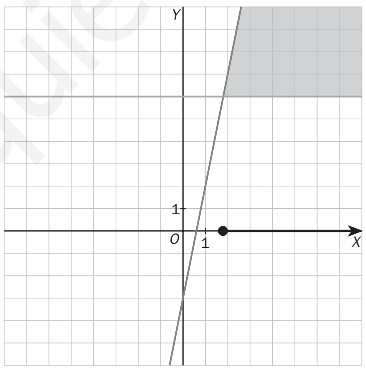
**c)** $5x - 3 \geq 6$

**d)** $4x - 1 \geq \dfrac{8x - 5}{2}$

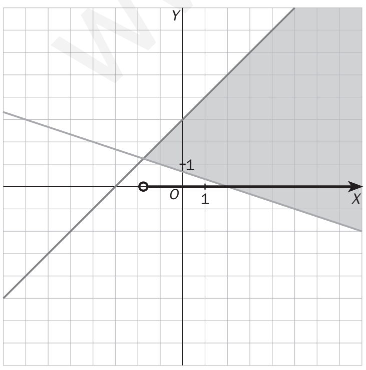
a)



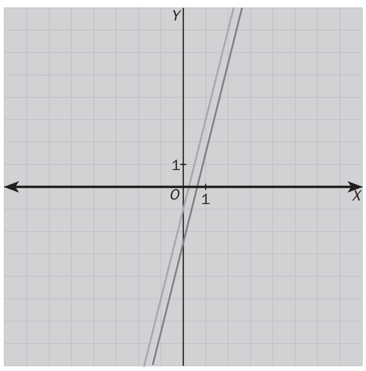

c)




b)




d)




a) $x > \dfrac{2}{5}$

c) $x \geq \dfrac{9}{5}$

b) $x > \dfrac{-7}{4}$

d) $\mathbb{R}$

**4.21 Resuelve, por el método de factorización, las siguientes inecuaciones de segundo grado.**

**a)** $x^2 - 2x - 4 \leq 0$

**b)** $-10x^2 + 17x - 3 \leq 0$

**c)** $(3x - 1)(-5x + 2) \geq 0$

**d)** $-7(4x + 1)(-x + 2) < 0$

a) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = \begin{cases} 1 + \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) = (x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})$

| | $(-\infty, 1 - \sqrt{5})$ | $(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$ | $(1 + \sqrt{5}, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo del primer factor: $(x - 1 - \sqrt{5})$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo del segundo factor: $(x - 1 + \sqrt{5})$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo del polinomio: $P(x) = (x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]$

b) $x = \dfrac{-17 \pm \sqrt{289 - 120}}{-20} = \begin{cases} \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) = -\left(x - \dfrac{1}{5}\right)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$

| | $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$ | $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right)$ | $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| Signo del primer factor: $-\left(x - \frac{1}{5}\right)$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| Signo del segundo factor: $\left(x - \frac{3}{2}\right)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo del polinomio: $P(x) = -\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$ | $-$ | $+$ | $-$ |

Solución: $\left(-\infty, \dfrac{1}{5}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$

c)

| | $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ | $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$ | $\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| Signo del primer factor: $(3x - 1)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo del segundo factor: $(-5x + 2)$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| Signo del polinomio: $P(x) = (3x - 1)(-5x + 2)$ | $-$ | $+$ | $-$ |

Solución: $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}\right]$

d)

| | $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ | $\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$ | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo del primer factor: $-7(4x + 1)$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| Signo del segundo factor: $(-x + 2)$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| Signo del polinomio: $P(x) = -7(4x + 1)(-x + 2)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $\left(-\dfrac{1}{4}, 2\right)$

**4.22 Relaciona en tu cuaderno cada inecuación con su solución.**

| **Inecuación** | **Solución** |
|---|---|
| $x^2 - 5x - 6 < 0$ | $x = -0{,}5$ |
| $x^2 + x + 4 \geq 0$ | $\varnothing$ |
| $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$ | $(-1, 6)$ |
| $-x^2 - 5 > 0$ | $\mathbf{R}$ |

**4.23 Utiliza el método de factorización para resolver las siguientes inecuaciones.**

**a)** $\dfrac{x+5}{x+2} \leq 0$  **c)** $\dfrac{3-x}{x+2} < 0$  **e)** $-10x^3 + 52x^2 - 70x + 12 \geq 0$

**b)** $\dfrac{x+3}{x^2} > 0$  **d)** $-5x^2(x-2)(x+1) \leq 0$  **f)** $\dfrac{(x-2)(x+5)}{4x-6} \geq 0$

a)

| | $(-\infty, -5)$ | $(-5, -2)$ | $(-2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo del numerador: $(x+5)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo del denominador: $(x+2)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo de la fracción | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $[-5, -2)$

b)

| | $(-\infty, -3)$ | $(-3, 0)$ | $(0, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo del numerador: $(x+3)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo del denominador: $x^2$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Signo de la fracción | $-$ | $+$ | $+$ |

Solución: $(-3, 0) \cup (0, +\infty)$

c)

| | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 3)$ | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo del numerador: $(3-x)$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| Signo del denominador: $(x+2)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo de la fracción | $-$ | $+$ | $-$ |

Solución: $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

d)

| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 0)$ | $(0, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo del primer factor: $-5x^2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| Signo del segundo factor: $(x-2)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo del tercer factor: $(x+1)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Signo del polinomio: $P(x) = (3x-1)(-5x+2)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |

Solución: $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

e) $-10x^3 + 52x^2 - 70x + 12 = (x-2)(-10x^2 + 32x - 6) = 2(x-2)(-5x^2 + 16x - 3) = -10(x-2)(x-3)\left(x - \dfrac{1}{5}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -10 & 52 & -70 & 12 \\ 2 & & -20 & 64 & -12 \\ \hline & -10 & 32 & -6 & 0 \end{array} \qquad x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 60}}{-10} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{5} \\ 3 \end{array} \right.$$

| | $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$ | $\left(\frac{1}{5}, 2\right)$ | $(2, 3)$ | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo del primer factor: $-2(x-2)$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| Signo del segundo factor: $(x-3)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo del tercer factor: $\left(x - \frac{1}{5}\right)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Signo del polinomio: $P(x) = -2(x-2)(x-3)\left(x - \frac{1}{5}\right)$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

Solución: $(-\infty; 0{,}2] \cup [2, 3]$

f)

| | $(-\infty, -5)$ | $\left(-5, \frac{3}{2}\right)$ | $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo del primer factor del numerador: $(x - 2)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo del segundo factor del numerador: $(x + 5)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Signo del denominador: $(4x - 6)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo de la fracción | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $\left[-5, \frac{3}{2}\right) \cup [2, +\infty)$

## Resolución de sistemas de inecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas

**4.24 Dado el sistema** $\begin{cases} y > -3x + 3 \\ y \leqslant -x + 6 \end{cases}$ **y los puntos:**

***A*** **(3, 2)** ***C*** **(−2; 8,5)** ***E*** **(0, 0)**

***B*** **(5, 3)** ***D*** **(4, 2)** ***F*** **(−1,5; 7,5)**

**a) Indica cuáles de ellos son solución del sistema.**

**b) ¿Cuáles son solución solo de la primera inecuación? ¿Cuáles solo de la segunda?**

**c) ¿Cuáles no son solución de ninguna de ellas?**

a) *A, D*

b) Soluciones de la primera ecuación: *A, B, D* Soluciones de la segunda ecuación: *A, D, E, F*

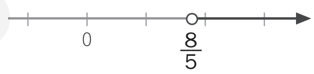
c) *C*

**4.25 Relaciona en tu cuaderno cada sistema con su solución.**

**Sistema** **Solución**

$\begin{cases} x + 3 \geqslant 0 \\ 2x + 1 > 5 \end{cases}$ $\rightarrow$ $(2, +\infty)$

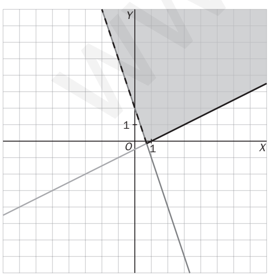
$\begin{cases} 3x + 4 < 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$ $\rightarrow$ $-2 \leq x < -1$

$\begin{cases} -4x + 3 \leq -1 \\ 5x - 2 < 6 \end{cases}$ $\rightarrow$ 

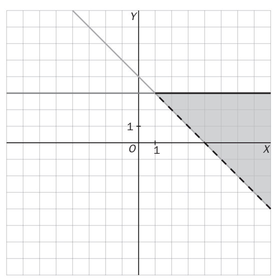

4.26 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas.

**a)** $\begin{cases} x + 2y \leq 1 \\ 3x + y > 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x + y < 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y \leq 3 \\ x + y > 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x \geq -2 \\ y < 1 \end{cases}$

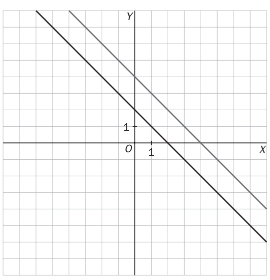
a)



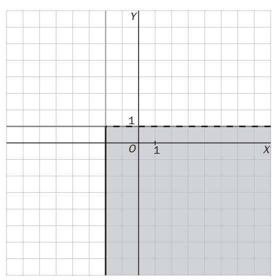

c)




b)

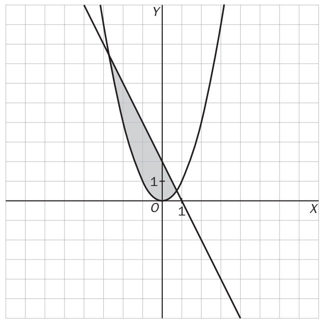



d)



**4.27** **Sombrea sobre unos ejes de coordenadas el recinto encerrado entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = -2x + 2$.**

**Escribe el sistema de inecuaciones que tiene como solución dicho recinto.**



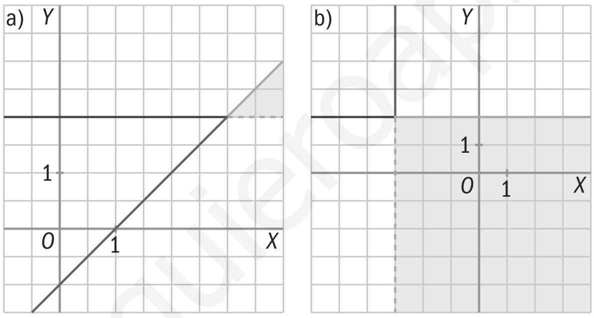

$$\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq -2x + 2 \end{cases}$$

**4.28** **Escribe un sistema que tenga como solución los siguientes elementos geométricos.**

**a) El cuadrado de lado 2 centrado en el origen.**
**b) El segmento de extremos −3 (incluido) y 7 (excluido).**
**c) El tercer cuadrante del plano.**
**d) La semirrecta con origen en 5, inclusive, en adelante.**

a) $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| \leq 2 \end{cases}$  b) $\begin{cases} x \geq -3 \\ x < 7 \end{cases}$  c) $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$  d) $\begin{cases} x \geq 5 \\ x > 0 \end{cases}$

**4.29** **Investiga qué sistemas de inecuaciones tienen como solución los siguientes segmentos o regiones del plano.**

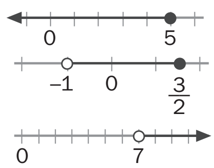



$\begin{cases} y \geq 2 \\ y \leq x - 1 \end{cases}$  $\begin{cases} y \leq 2 \\ x \geq -3 \end{cases}$

## CUESTIONES PARA ACLARARSE

**4.30** **Relaciona en tu cuaderno los elementos equivalentes de las tres columnas.**

| Desigualdad | Intervalo | Segmento o semirrecta |
|---|---|---|
| $x \leq 5$ | $(7, +\infty)$ | |
| $-1 < x \leq 1{,}5$ | $(-\infty, 5]$ | |
| $x > 7$ | $\left(-1, \frac{3}{2}\right]$ | |




**4.31** **Indica razonadamente si el punto (2, 4) es solución del siguiente sistema:** $\begin{cases} 2x - 1 < y + 2 \\ y \leq 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 1 < 4 + 2 \\ 4 \leq 5 \end{cases}$ $\Rightarrow$ El punto cumple las dos desigualdades; por tanto, es solución del sistema.

**4.32 Señala si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.**

**a) $17 < -12$ es una desigualdad incorrecta.**
**b) Una inecuación o no tiene solución, o tiene una, o tiene infinitas soluciones.**
**c) La solución de $x + 5 \leq 3$ es una semirrecta.**
**d) La solución de $y + 3 \leq x + 1$ es un semiplano.**

a) Verdadera b) Falsa c) Verdadera d) Verdadera

**4.33 Encuentra la solución de esta inecuación: $(5x - 2)^2 \leq 0$**

Un número al cuadrado nunca puede ser negativo; por tanto: $(5x - 2)^2 \leq 0 \Rightarrow 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

**4.34 Indica si son ciertas las siguientes igualdades entre intervalos.**

**a) $(-\infty, 5] \cap (2, +\infty) = [2, 5]$** **b) $(-\infty, 4] \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 4]$**

a) Falsa, ya que 2 no está incluido. b) Verdadera

**4.35 ¿Es cierto que $12 \leq 12$?**

Sí, ya que se cumple la igualdad.

**4.36 Indica qué operación de equivalencia transforma la desigualdad $13 \leq -2$ en $8 \leq -7$.**

Restar 5: $13 - 5 \leq -2 - 5$

**4.37 ¿Qué puedes decir de estas inecuaciones?**

**a) $3x - 4 \leq 2$** **b) $7x - 2 \leq 12$**

Tienen la misma solución.

**4.38 ¿En cuántos semiplanos divide al plano la recta $y = 3x - 5$? Nómbralos en forma de inecuación.**

En dos: $y \geq 3x - 5$ $y \leq 3x - 5$

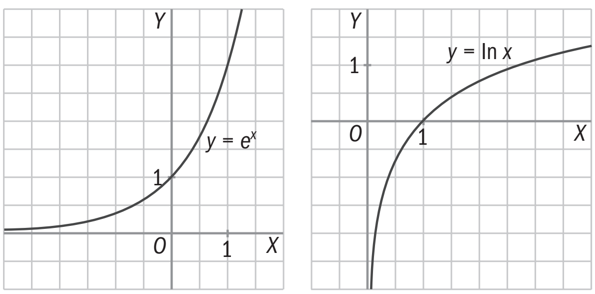
**4.39 Calcula la solución de la siguiente inecuación según los valores del parámetro a sabiendo que $a \neq 0$: $a(x - 2)^2 < 0$**

Si $a > 0$, la inecuación no tiene ninguna solución.
Si $a < 0$, la solución es todo **R**.

**4.40 Resuelve las siguientes inecuaciones.**

**a) $e^x \geq 0$** **b) $\ln x \leq 0$**

**Ten a la vista las gráficas de estas funciones.**




a) $x \in \mathbf{R}$ b) $0 < x \leq 1$ ó $(0, 1]$

**4.41 Un carpintero va a colocar un rodapié en una habitación rectangular de 6 metros de ancho y con un perímetro menor que 30 metros.**

**¿Cuánto puede valer la longitud del cuarto?**

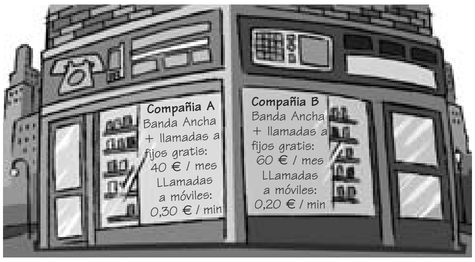
$\text{Long} < \dfrac{30 - 12}{2} \Rightarrow \text{Long} \in (0,9)$

**4.42 Marcos quiere encargar a un cristalero un espejo circular, aunque no tiene claro qué tamaño le conviene. Lo que sabe es que el radio puede variar entre 20 y 25 centímetros.**

**¿Entre qué valores oscilaría el área del cristal? ¿Y su perímetro?**

$20 \leq r \leq 25 \Rightarrow 400\pi \leq A \leq 625\pi$ y $40\pi \leq p \leq 50\pi$

**4.43 Dos compañías telefónicas ofrecen estas ofertas.**




**a) ¿Cuántos minutos debe el cliente llamar a móviles en un mes para que le resulte más económica la compañía *B*?**

**b) ¿Cuál es el importe de la factura en este caso?**

a) $40 + 0{,}3x > 60 + 0{,}2x \Rightarrow 0{,}1x > 20 \Rightarrow x > 200$ minutos

b) $\text{Factura} > 60 + 0{,}2 \cdot 200 \Rightarrow \text{Factura} > 100$ €

**4.44 En una tienda de comercio justo hay dos tipos de marcas de café: una de Ecuador y otra de Colombia. En el que procede de Ecuador, cada paquete cuesta 1,30 euros, y en el de Colombia, 1,65 euros.**

**Averigua el número de paquetes de cada tipo que puedo adquirir si llevo 25 euros en el bolsillo y quiero comprar el doble de paquetes del elaborado en Colombia que del procedente de Ecuador.**

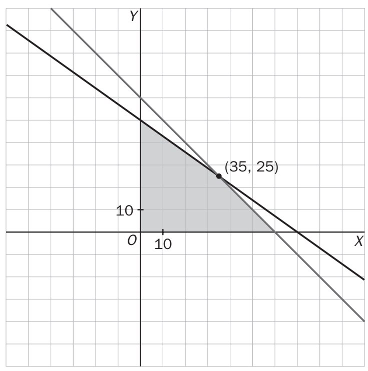
$2 \cdot 1{,}65x + 1{,}30x \leq 25 \Rightarrow 4{,}6x \leq 25 \Rightarrow x \leq 5{,}4$

Como máximo puedo adquirir 5 paquetes procedentes de Ecuador y 10 de Colombia.

**4.45 Dos jóvenes informáticos desean abrir una pequeña empresa de venta de ordenadores. Dos proveedores les venden aparatos de 500 y 700 euros. Por otra parte, disponen de 35 000 euros para invertir y de un pequeño almacén donde solo caben 60 equipos informáticos.**

**¿Cuántos ordenadores, como máximo, pueden comprar para optimizar el espacio y ajustarlo a su presupuesto?**

$$\begin{cases} 500x + 700y \leq 35\,000 \\ x + y \leqslant 60 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$$




Como máximo pueden comprar 60 ordenadores: 35 del primer tipo y 25 del segundo.

**4.46 La tirada de una revista mensual tiene unos costes de edición de 30 000 euros, a los que hay que sumar 1,50 euros de gastos de distribución por cada revista publicada.**

**Si cada ejemplar se vende a 3,50 euros y se obtienen unos ingresos de 12 000 euros por publicidad, ¿cuántas revistas se deben vender para empezar a obtener beneficios?**

$30\,000 + 1{,}50x < 3{,}5x + 12\,000 \Rightarrow 18\,000 < 2x \Rightarrow x > 9000$

A partir de 9000 ejemplares empezamos a obtener beneficios.

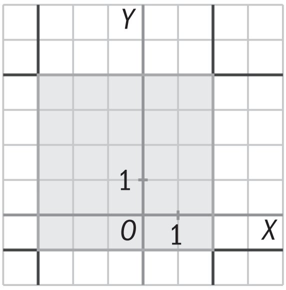
**4.47 Si el área de un cuadrado es menor o igual que 64 centímetros cuadrados, calcula los posibles valores de su diagonal.**

$x^2 \leqslant 64 \Rightarrow x \leqslant 8$ (no sirven valores negativos)

$d = \sqrt{2}\,x \Rightarrow d \leqslant 8\sqrt{2}$

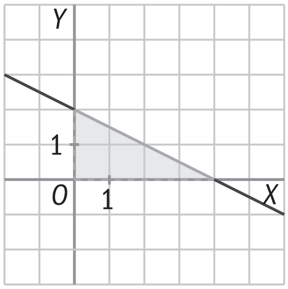
**4.48 Escribe los sistemas de inecuaciones cuyas soluciones corresponden a las siguientes zonas sombreadas.**

**a)**



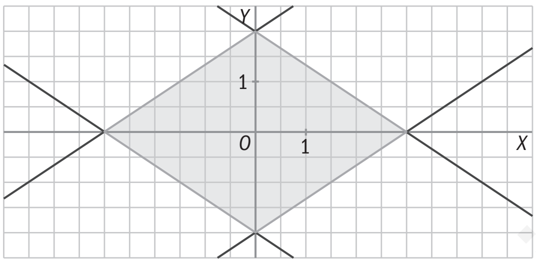

$\begin{cases} y \geq 2 \\ y \leq x - 1 \end{cases}$

**b)**



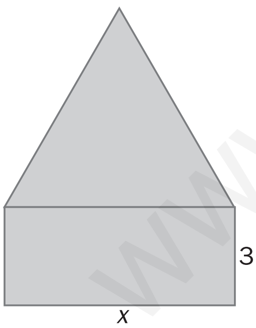

$\begin{cases} y \leqslant 2 \\ x \geqslant -3 \end{cases}$

**4.49 Escribe el sistema de inecuaciones cuya solución corresponde a este recinto.**




$$\begin{cases} y \leqslant -\dfrac{2}{3}x + 2 \\ y \geqslant -\dfrac{2}{3}x - 2 \\ y \leqslant \dfrac{2}{3}x + 2 \\ y \geqslant -\dfrac{2}{3}x - 2 \end{cases}$$

**4.50 Indica para qué valores de *x* el área del triángulo equilátero de la figura es mayor que la del rectángulo.**




$$h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{x\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

$$A_{\text{rectángulo}} = 3x$$

$$\frac{\sqrt{3}x^2}{4} > 3x \ \text{ como } x > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}x}{4} > 3 \Rightarrow x > 4\sqrt{3}$$

**4.51 Considera el sistema** $\begin{cases} \mathbf{3x \leqslant -6} \\ \mathbf{ax > b} \end{cases}$

**Averigua las condiciones que deben cumplir *a* y *b* para que su solución sea:**

**a) ∅**

**b) (−4, −2]**

**c) −2**

**d) (−∞, −3)**

a) Si $a > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > -2$ Si $a < 0$ no se puede. Si $a = 0 \Rightarrow b > 0$

b) Si $a > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > -4$ Si $a < 0$ no se puede. Si $a = 0$ no se puede.

c) No se puede.

d) Si $a > 0$ no se puede Si $a < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < -3$ Si $a = 0$ no se puede.

**4.52 Calcula los valores de $m$ para que se cumplan estas condiciones.**

**a) Que $mx^2 - mx + 1 \leq 0$ tenga una sola solución.**

**b) Que $2mx^2 + (4m + 1)x + 2m - 3 = 0$ tenga dos soluciones.**

a) $m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0$ ó $m = 4$

b) $(4m + 1)^2 - 4 \cdot 2m(2m - 3) > 0 \Rightarrow 16m^2 + 8m + 1 - 16m^2 + 24m > 0 \Rightarrow 32m + 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{-1}{32}$

**R E F U E R Z O**

## Concepto de desigualdad e inecuación. Reglas de equivalencia

**4.53 Transforma la desigualdad $-12 \leqslant 3$ aplicando en ambos miembros las operaciones que se indican en cada caso.**

**a) Suma $-2$.** **b) Resta 5.** **c) Multiplica por $-1$.** **d) Divide entre $-3$.**

a) $-12 - 2 \leqslant 3 - 2 \Rightarrow -14 \leqslant 1$

b) $-12 - 5 \leqslant 3 - 5 \Rightarrow -17 \leqslant -2$

c) $(-12) \cdot (-1) \geqslant 3 \cdot (-1) \Rightarrow 12 \geqslant -3$

d) $(-12) : (-3) \geqslant 3 : (-3) \Rightarrow 4 \geqslant -1$

**4.54 Escribe una inecuación cuya solución se corresponda con la dada en cada caso.**

**a) $[-3, +\infty)$**

**b) $\varnothing$**

**c) $(-\infty, 2)$**

**d) $\{3\}$**

a) $x + 2 \geqslant -1$

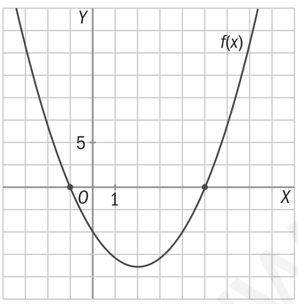
b) $x^2 < -5$

c) $2x - 7 < x - 5$

d) $(x - 3)^2 \leqslant 0$

## Resolución de inecuaciones

**4.55 Observa la gráfica de la función $f(x) = (x - 5)(x + 1)$ y resuelve las inecuaciones siguientes.**




**a) $f(x) \geqslant 0$** **b) $f(x) < 0$**

a) $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

b) $(-1, 5)$

**4.56 Resuelve las siguientes inecuaciones.**

**a) $3x - 3 \geqslant 6 - (2 - 4x)$**

**b) $-5(-2x + 1) - \frac{3}{4} \leqslant \frac{x - 5}{2}$**

**c) $x^2 - 9x + 14 \leqslant 0$**

**d) $5(-x + 3)(2x + 5) \geqslant 0$**

**e) $\frac{x + 1}{x - 5} > 0$**

**f) $\frac{x + 4}{x - 3} \leqslant 0$**

a) $3x - 3 \geqslant 6 - 2 + 4x \Rightarrow -x \geqslant 7 \Rightarrow x \leqslant -7$

b) $40x - 20 - 3 \leqslant 2x - 10 \Rightarrow 38x \leqslant 13 \Rightarrow x \leqslant \frac{13}{38}$

c)

| | | $(-\infty, 2)$ | $(2, 7)$ | $(7, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases}$ | signo de $(x - 2)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| | signo de $(x - 7)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| | signo de $P(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $[2, 7]$

d)

| | $(-\infty, -2{,}5)$ | $(-2{,}5; 3)$ | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo de $(-x + 3)$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| Signo de $(2x + 5)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo de $(-x + 3)(2x + 5)$ | $-$ | $+$ | $-$ |

Solución: $[-2{,}5; 3]$

e)

| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 5)$ | $(5, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo de $(x + 1)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| Signo de $(x - 5)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo de la fracción | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

f)

| | $(-\infty, -4)$ | $(-4, 3)$ | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $(x + 4)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $(x - 3)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Signo de la fracción | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución: $[-4, 3)$

## Resolución de sistemas de inecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas

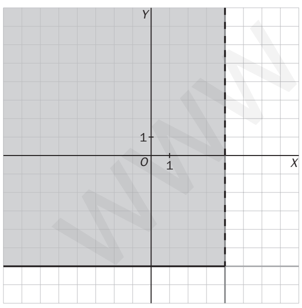
**4.57 Encuentra la solución de los siguientes sistemas.**

**a)** $\begin{cases} 2x - 5 \leq 1 \\ x + 3 > 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y \geq -6 \\ x < 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 1 > 10 \\ x - 2 \leq 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x - 3y > 1 \end{cases}$

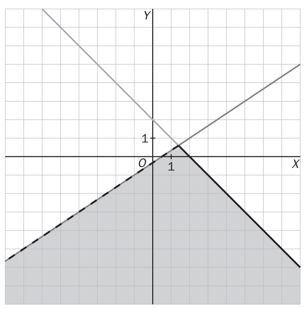
a) $\begin{cases} x \leq 3 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow (-1, 3]$

c) $\begin{cases} x > 9 \\ x \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

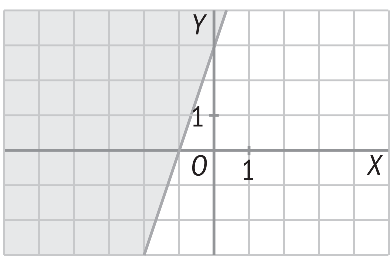
b)




d)




**4.58 Investiga qué sistemas de inecuaciones tienen como solución los siguientes segmentos o regiones del plano.**


$\begin{cases} x > -2 \\ x \leq 3 \end{cases}$

$y \geq 3x + 3$

**4.59 Resuelve las siguientes inecuaciones.**

**a)** $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geqslant -2$ **b)** $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$ **c)** $5^x > 3125$

a) Se supone que estamos tomando la raíz positiva; por tanto, siempre será mayor que $-2$, solo nos falta saber dónde existe la raíz.

Resolvemos la ecuación: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geqslant 0$.

El radicando no toma valores negativos. La solución será **R**.

b) $2 \cdot 2^{-2x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 = 0$ cambio $u = 2^{-x} \Rightarrow 2u^2 - 7u - 4 = 0 \Rightarrow$

$$u = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \begin{cases} 4 \Rightarrow 2^{-x} = 2^2 \Rightarrow x = -2 \\ -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

| $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| no | | sí |

$\Rightarrow$ Solución: $(-2, +\infty)$

c) $5x > 5^5 \Rightarrow x > 5$ Solución: $(5, +\infty)$

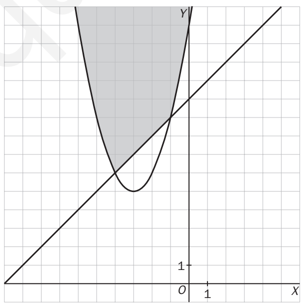
**4.60 Sean *a* y *b* dos números cualesquiera, positivos o negativos. ¿Son ciertas estas afirmaciones?**

**a)** $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ **b)** $a < b \Rightarrow |a| < |b|$ **c)** $a < b \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

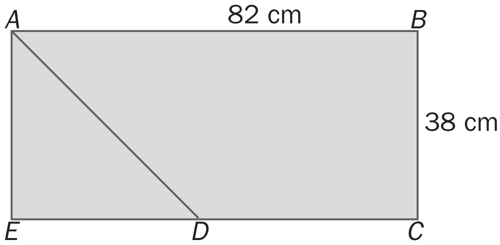
a) Falsa. b) Falsa. c) Falsa.

**4.61 Resuelve el siguiente sistema gráficamente dibujando las gráficas de las funciones que surgen de cada inecuación.**

$$\begin{cases} 2x + 10 \leqslant 2y - 10 \\ 4y - 6 \geqslant x^2 + 6x + 3y + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y \leqslant -10 \\ y \geqslant x^2 + 6x + 14 \end{cases}$$




**4.62 Calcula para qué valores de *x* el área del triángulo *ADE* es menor que la del trapecio *ABCD*.**




No puede ser nunca mayor.

**4.63 Una inecuación en la que aparece un valor absoluto da lugar en realidad a dos inecuaciones.**

$$|x - a| \leqslant r \Rightarrow -r \leqslant x - a \leqslant r$$

**Resuelve las siguientes inecuaciones.**

**a)** $|3x - 1| \leqslant 5$ **b)** $|4x + 3| > 2$

a) $-5 \leqslant 3x - 1 \leqslant 5 \Rightarrow -4 \leqslant 3x \leqslant 6 \Rightarrow -\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow$ Solución: $\left[-\frac{4}{3}, 2\right]$

b) $4x + 3 > 2 \Rightarrow 4x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{4}$

$4x + 3 < -2 \Rightarrow 4x < -5 \Rightarrow x < -\frac{5}{4}$

Solución: $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$

**4.64 La inecuación $\frac{-3}{x + 4} < -5$ da lugar a dos inecuaciones, según que el denominador sea mayor o menor que 0. Encuentra todas sus soluciones.**

Si $x + 4 < 0$, $x < -4 \Rightarrow -3 > -5x - 20 \Rightarrow 5x > -17 \Rightarrow x > -\frac{17}{5} = -3{,}4 \Rightarrow$ Solución: $\varnothing$

Si $x + 4 > 0$, $x > -4 \Rightarrow -3 < -5x - 20 \Rightarrow 5x < -17 \Rightarrow x < -\frac{17}{5} = -3{,}4 \Rightarrow$ Solución: $(-4; -3{,}4)$

## PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

**4.65 Las kilocalorías**

**La tabla muestra la capacidad energética media (en kilocalorías por gramo) de algunos nutrientes fundamentales.**

| Glúcidos | Proteínas | Grasas |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 9 |

**Un alimento tiene las siguientes características en su composición.**

- **Posee el doble de gramos de grasa que de glúcidos.**
- **La masa de las proteínas es veinte veces la masa de los glúcidos.**
- **En 100 gramos de ese alimento hay, en total, 20,7 gramos de glúcidos, proteínas y grasas.**

**a) Escribe una expresión que determine el número de kilocalorías que poseen *x* gramos de dicho alimento.**

**b) Si se han consumido entre 150 y 250 gramos del mencionado alimento, ¿entre qué valores está comprendido el número de kilocalorías consumidas?**

En 100 gramos de ese alimento hay $c$ gramos de hidratos, $20c$ de proteínas y $2c$ de grasa. Por tanto:

$$c + 20c + 2c = 23c = 20{,}7 \Rightarrow c = \frac{20{,}7}{23} = 0{,}9$$

En 100 gramos de ese alimento hay 0,9 gramos de hidratos, 18 de proteínas y 1,8 de grasa.

En 1 gramo de ese alimento hay 0,009 gramos de hidratos, 0,18 de proteínas y 0,018 de grasa.

En $x$ gramos de ese alimento hay $0{,}009x$ gramos de hidratos, $0{,}18x$ de proteínas y $0{,}018x$ de grasa.

a) Los $x$ gramos de ese alimento aportan $0{,}009 \cdot 4x + 0{,}18 \cdot 4x + 0{,}018 \cdot 9x = 0{,}918x$ kilocalorías.

b) Si $150 \leqslant x \leqslant 250 \Rightarrow 150 \cdot 0{,}918 \leqslant 0{,}918x \leqslant 250 \cdot 0{,}918 \Rightarrow$

$\Rightarrow 150 \cdot 0{,}918 \leqslant 0{,}918x \leqslant 250 \cdot 0{,}918 \Rightarrow 137 \leqslant$ kilocalorías $\leqslant 229{,}5$

**4.66 Los pantalones vaqueros**

**Se quiere confeccionar dos tipos de pantalones vaqueros. La diferencia entre ambos es la cantidad de algodón cardado y de algodón peinado que se utiliza. La tabla siguiente muestra las composiciones de cada tipo de pantalón.**

| | **Unidades de algodón cardado** | **Unidades de algodón peinado** |
|---|---|---|
| **Tipo I (Extra)** | **1** | **5** |
| **Tipo II (Medio)** | **3** | **3** |

**Para la confección de la totalidad de los pantalones se dispone de 40 unidades de algodón cardado y de 100 unidades de algodón peinado.**

**a) ¿Es posible confeccionar 15 pantalones del tipo I y 10 del tipo II?**

**b) Dibuja en unos ejes de coordenadas la zona que incluya las distintas posibilidades de confeccionar *x* pantalones del tipo I e *y* pantalones del tipo II.**

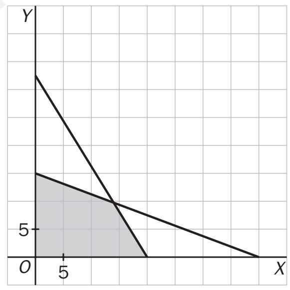
a) 15 pantalones de tipo I y 10 de tipo II precisan $1 \cdot 15 + 3 \cdot 10 = 45$ unidades de algodón cardado. Como solo se cuenta con 40, no podrán ser confeccionados.

b) Si se confeccionan $x$ pantalones de tipo I e $y$ pantalones de tipo II, se deberá verificar que

$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 40 \\ 5x + 3y \leqslant 100 \end{cases}$$

La zona sombreada incluye las posibilidades de confección.

Se observa que el punto (15, 10) queda fuera de dicha zona.






## AUTOEVALUACIÓN

**4.A1 Indica cuál de los siguientes intervalos es la solución de la inecuación $-3x + 1 \leq -2$.**

**a)** $[1, +\infty)$ **b)** $(-1, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 1]$ **d)** $(-\infty, -1]$

$[1, +\infty)$

**4.A2 Considera estas inecuaciones.**

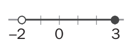
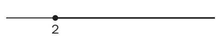
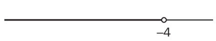
**a)** $x - 7 \leqslant 5$ **b)** $x + 1 \leqslant 7$ **c)** $2 - x \geqslant -10$ **d)** $3x - 6 \leqslant -30$

**Señala cuáles son equivalentes a $x - 2 \leq 10$. En los casos afirmativos, indica la transformación que permite pasar de una a otra inecuación.**

a) Inecuaciones a y c

b) a) $x - 7 + 5 \leqslant 5 + 5$ c) $(2 - x)(-1) \leqslant (-10)(-1)$

**4.A3 Completa en tu cuaderno esta tabla, que presenta conjuntos de números de tres formas equivalentes: gráficamente, como desigualdad y como intervalo.**

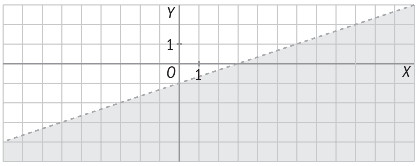
| | | |
|---|---|---|
|   | $-2 < x \leqslant 3$ | $(-2, 3]$ |
|   | $\boldsymbol{x \geqslant 2}$ | $[2, +\infty]$ |
|   | $x < -4$ | $\boldsymbol{(-\infty, -4)}$ |

**4.A4** **Elige la solución correcta de esta inecuación: $-2x^2 + 2x + 12 \leqslant 0$**

**a)** $[-2, 3]$ **b)** $(-2, 3]$ **c)** $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ **d)** $(-\infty, -2] \cup (3, +\infty]$

La b) $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

**4.A5** **Escribe la inecuación cuya solución es el siguiente semiplano.**




$y < \dfrac{x}{3} - 1$

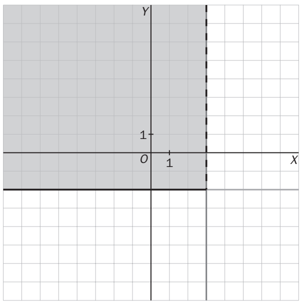
**4.A6** **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.**

**a)** $\begin{cases} x + 1 \leq 3 \\ 3x > -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2 > 6 \\ x - 2 \leqslant 2x \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y \geqslant -2 \\ x < 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y \leqslant 3 \\ x + 3y > 1 \end{cases}$

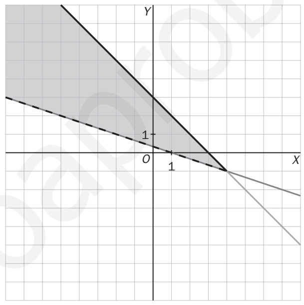
a) $\begin{cases} x \leqslant 2 \\ x > -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{3}, 2\right]$

b) $\begin{cases} x > 4 \\ -2 \leqslant x \end{cases} \Rightarrow (4, +\infty)$

c)




d)




**M U R A L D E M A T E M Á T I C A S**

**M A T E T I E M P O S**

## La edad de mi abuela

**Mi abuela dio a luz a mi padre con menos de 20 años, yo nací cuando mi padre tenía más de 25 años. Si mi padre tiene ahora menos de 45 años y yo curso 4.º de ESO, ¿cuántos años podría tener mi padre cuando yo nací? ¿Qué edad puede tener ahora mi abuela?**

Si está en 4.º de ESO puede tener entre 15 y 18 años. Vamos a ver que edad puede tener el padre, consideramos todas las opciones:

| | Padre | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Edad hijo** | **Al nacer el hijo** | **Edad actual** | **Al nacer el hijo** | **Edad actual** | **Al nacer el hijo** | **Edad actual** | **Al nacer el hijo** | **Edad actual** |
| 15 | 26 | 41 | 27 | 42 | 28 | 43 | 29 | 44 |
| 16 | 26 | 42 | 27 | 43 | 28 | 44 | | |
| 17 | 26 | 43 | 27 | 44 | | | | |
| 18 | 26 | 44 | | | | | | |

Luego cuando nació, su padre tendría entre 26 y 29 años.

Su abuela pudo dar a luz a su padre entre los 15 y 19 años. Presentaremos la información en una tabla:

| **Edad abuela al dar a luz** | **Padre** | | **Abuela** |
|---|---|---|---|
| | **Edad actual** | **Al nacer el hijo** | |
| Mínima: 15 | 26 + 15 = 41 | 26 | 15 + 41 = 56 |
| Máxima: 19 | 29 + 15 = 44 | 29 | 19 + 44 = 63 |

Por lo tanto la edad de la abuela puede estar comprendida entre 56 y 63 años.

E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

5.1 **Un triángulo puede definirse dando la medida de sus tres lados. Indica cuáles de las siguientes parejas de triángulos son semejantes.**

**a) 5, 6, 7 y 15, 18, 20**

**b) 4, 6, 8 y 1; 1,5; 2**

a) $\frac{5}{15} = \frac{6}{18} \neq \frac{7}{20} \Rightarrow$ No son semejantes.

b) $\frac{4}{1} = \frac{6}{15} = \frac{8}{2} \Rightarrow$ Son semejantes.

5.2 **Razona si son semejantes estas figuras.**

**a) Dos cuadrados.**

**b) Tres triángulos equiláteros.**

**c) Dos rectángulos.**

a) Los ángulos de un cuadrado y de otro son todos iguales; además, al ser los cuatro lados iguales, siempre estarán en la misma proporción los de un cuadrado con los del otro.

b) Tres triángulos equiláteros tendrán los tres ángulos iguales de 60°, y como los lados de cada triángulo serán iguales, serán proporcionales los de un triángulo con los del otro.

c) Dos rectángulos, en general, no son semejantes porque los lados no tienen por qué ser proporcionales. Por ejemplo, si en un rectángulo $b = 1$ cm, $h = 2$ cm, y en otro, $b' = 1$ cm, $h' = 3$ cm, entonces $\frac{b}{b'} = 1 \neq \frac{h}{h'} = \frac{2}{3}$.



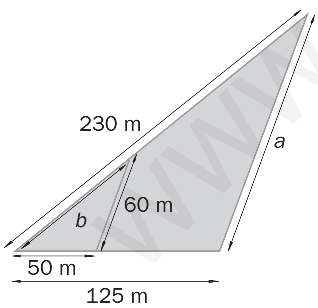
5.3 **La escala de un mapa es de 1:2 500 000. ¿A cuántos kilómetros se encontrarán dos ciudades que en el mapa están separadas 12 centímetros?**

Escala 1:2 500 000. En el mapa, 12 cm representan $12 \cdot 2\,500\,000 = 30\,000\,000$ cm $= 300$ km.

5.4 **Un triángulo equilátero tiene 40 centímetros cuadrados de área. Halla el área del triángulo que se obtiene al unir los puntos medios de los lados.**

Obtendremos un triángulo de razón $k = \frac{1}{2}$; por tanto, la razón de las áreas será $k^2 = \frac{1}{4}$. El área del nuevo triángulo será $A = \frac{1}{4} \cdot 40 = 10$ cm$^2$.

5.5 **Halla las medidas que faltan en la figura.**



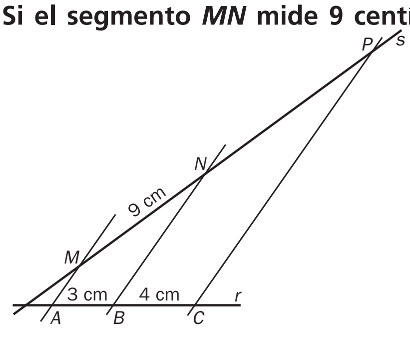

Aplicando el teorema de Tales,

$$\frac{125}{50} = \frac{a}{60} = \frac{230}{b}$$

Entonces, $a = 150$ m, y $b = 92$ m

5.6 **En una recta *r* hay tres puntos *A*, *B* y *C* que distan sucesivamente 3 y 4 centímetros. Por esos puntos se trazan rectas paralelas que cortan a otra, *s*, en *M*, *N* y *P*.**

**Si el segmento *MN* mide 9 centímetros, ¿cuál es la distancia entre los puntos *N* y *P*?**




$$\frac{3}{9} = \frac{4}{NP}$$

$NP = 12$ cm

**5.7 Dibuja un triángulo cualquiera *ABC* y construye paso a paso dos triángulos semejantes a él.**
**a) Uno de razón 1 : 2**
**b) Otro de razón 2 : 1**

Partiremos de un triángulo *ABC*.

a) Con los mismos ángulos y multiplicando por dos cada uno de sus lados obtenemos un triángulo de razón 1 : 2.

b) Si, con los mismos ángulos, dividimos los tres lados del triángulo *ABC* entre dos, obtenemos un nuevo triángulo de razón 2 : 1.

**5.8 Determina si son semejantes los triángulos que se indican.**
**a) $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{B} = 40°$ y $\widehat{A} = 80°$, $\widehat{E} = 60°$**
**b) $\widehat{A} = 90°$, $b = 6$, $c = 8$ y $\widehat{A}' = 90°$, $b' = 5$, $c' = 7$**
**c) $\widehat{A} = 45°$, $\widehat{B} = 75°$ y $\widehat{D} = 65°$, $\widehat{E} = 75°$**
**d) $a = 5$, $b = 8$, $\widehat{C} = 60°$ y $a' = 15$, $b' = 24$, $\widehat{C}' = 60°$**

a) $\widehat{C} = 180 - (60 + 40) = 80°$ $\quad\quad$ $\widehat{F} = 180 - (80 + 60) = 40°$

Los dos triángulos tienen todos sus ángulos iguales. Por el criterio 1 sabemos que son semejantes.

b) $\frac{6}{8} \neq \frac{5}{7}$ no son proporcionales los lados que comprenden al ángulo igual (criterio 3); por tanto, no son semejantes.

c) $\widehat{C} = 180 - (45 + 75) = 60°$ $\quad\quad$ $\widehat{F} = 180 - (65 + 75) = 40°$

Solo tienen un ángulo igual; por tanto, no son semejantes (criterio 1).

d) $\frac{5}{15} = \frac{8}{24}$ son proporcionales y el ángulo que abarcan es igual; por tanto, son semejantes (criterio 3).

**5.9 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 8 centímetros. Si la hipotenusa de otro triángulo rectángulo semejante mide 20 centímetros, calcula las longitudes de la hipotenusa del primero y de los catetos del segundo.**

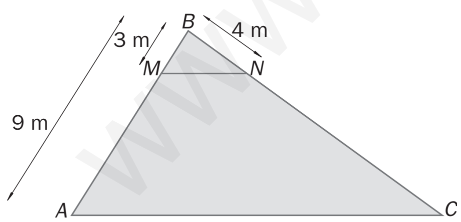
Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa del primero:

$$h^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow h^2 = 100 \Rightarrow h = 10 \text{ cm}$$

Como los triángulos son semejantes:

$$\frac{20}{10} = \frac{c_1}{6} = \frac{c_2}{8} \Rightarrow c_1 = 12 \text{ cm, y } c_2 = 16 \text{ cm}$$

**5.10 Los lados *MN* y *AC* son paralelos. Calcula la medida del segmento *CN*.**

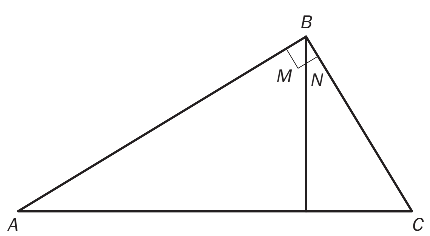



Llamamos $x$ a la medida del segmento *CN*.

Por el teorema de Tales:

$$\frac{3}{9} = \frac{4}{4 + x} \Rightarrow 4 + x = 12 \Rightarrow x = 8 \text{ m}$$

**5.11 En un triángulo rectángulo se traza la altura sobre la hipotenusa. ¿Son semejantes los triángulos en que ha quedado dividido el triángulo dado?**




$$\left.\begin{array}{l} \widehat{B} + \widehat{N} = 90 \\ \widehat{M} + \widehat{N} = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{M}$$

Los triángulos tienen un ángulo igual además del ángulo recto; por el criterio 1 deducimos que son semejantes.

5.12 **Comprueba que la razón de dos alturas correspondientes de dos triángulos semejantes es igual a la razón de semejanza.**

$A_1 = \dfrac{b_1 \cdot h_1}{2} \qquad A_2 = \dfrac{b_2 \cdot h_2}{2}$

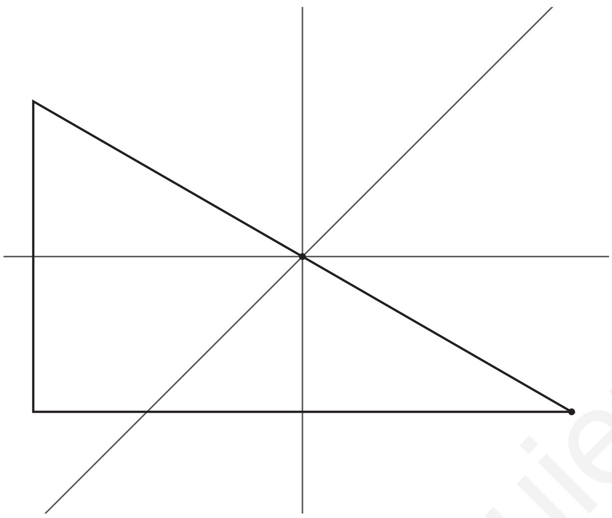
Si la razón de semejanza es $k$, la razón entre las áreas será $k^2$. Es decir: $k^2 = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\frac{b_1 \cdot h_1}{2}}{\frac{b_2 \cdot h_2}{2}} = \dfrac{b_1 \cdot h_1}{b_2 \cdot h_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \cdot \dfrac{h_1}{h_2} = k \cdot \dfrac{h_1}{h_2} \Rightarrow \dfrac{h_1}{h_2} = k$

5.13 **La altura de un triángulo rectángulo mide 7 centímetros y divide a la hipotenusa en dos segmentos $m$ y $n$ tales que $m = \dfrac{1}{4}n$. Calcula $m$ y $n$.**

$7^2 = m \cdot n \quad \Rightarrow \quad 49 = \dfrac{1}{4} n \cdot n \quad \Rightarrow \quad 196 = n^2 \quad \Rightarrow \quad n = 14 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{1}{4} \cdot 14 = 3{,}5 \text{ cm}$

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

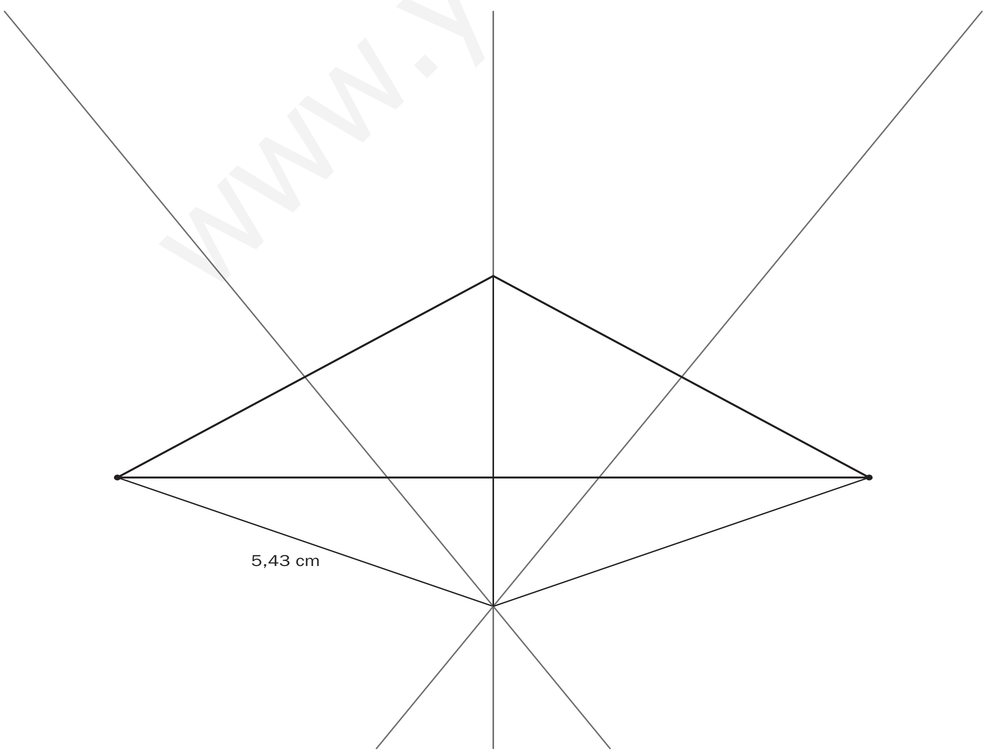
5.14 **Si en otro caso las distancias entre los pueblos son de 8 kilómetros de *A* a *B,* de 10 de *B* a *C* y de 6 de *A* a *C,* ¿dónde deberá situarse el hospital?**



Este ejercicio es algo más sencillo, ya que el triángulo resultante es rectángulo, y el circuncentro coincide con el punto medio de la hipotenusa. Por tanto, el hospital estará a 5 km de cada pueblo.

5.15 **¿Dónde estará ubicado el hospital si las distancias entre los pueblos son de 10 kilómetros de *A* a *B,* de 6 de *B* a *C* y de 6 de *A* a *C*?**

En este caso, el circuncentro queda fuera del triángulo. La distancia a cada pueblo será de 5,43 km.



## EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

### Figuras semejantes

**5.16 Calcula el valor de *a* y *b* para que los siguientes pares de triángulos sean semejantes.**

**a) 3, *a*, 5 y 1,5; 2; *b***

**b) $\frac{5}{2}$, 3, *a* y 10, *b*, 24**

**c) 3, *a*, 8 y $\frac{6}{5}$, $\frac{14}{5}$, *b***

**d) 45°, 75°, 60° y 75°, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$**

a) $\frac{3}{1{,}5} = \frac{a}{2} = \frac{5}{b} \Rightarrow a = 4;\ b = 2{,}5$

b) $\frac{\frac{5}{2}}{10} = \frac{3}{b} = \frac{a}{24} \Rightarrow a = 6;\ b = 12$

c) $\frac{3}{\frac{6}{5}} = \frac{a}{\frac{14}{5}} = \frac{8}{b} \Rightarrow a = 7;\ b = \frac{16}{5}$

d) $\widehat{A} = 60°,\ \widehat{B} = 45°$

**5.17 El perímetro de un triángulo equilátero mide 30 centímetros.**

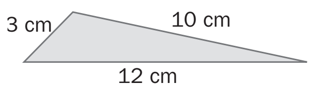
**a) Halla las medidas de los lados de un triángulo equilátero semejante a él si la razón de semejanza es $k = \frac{1}{2}$.**

**b) ¿Cuál es la razón de sus áreas?**

a) lado = 10 cm $\quad l' = l \cdot k = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ cm

b) $\frac{A'}{A} = k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

**5.18 Calcula las longitudes de los lados de un triángulo semejante al de la figura de modo que la razón de sus áreas sea $\frac{25}{4}$.**




$\frac{A'}{A} = \frac{25}{4} = k^2 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$ es la razón de semejanza. Por tanto:

$a' = a \cdot k = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$ cm

$b' = b \cdot k = 10 \cdot \frac{5}{2} = 25$ cm

$c' = c \cdot k = 12 \cdot \frac{5}{2} = 30$ cm

**5.19 La arista de un cubo mide 8 metros. Halla la medida de la arista de otro cubo semejante a él si la razón de sus volúmenes es $\frac{1}{27}$.**

$\frac{V'}{V} = \frac{1}{27} = k^3 \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ es la razón de semejanza. Por tanto: $a' = a \cdot k = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ m

**5.20 Los catetos de un triángulo rectángulo isósceles miden 30 centímetros. Calcula el perímetro de un triángulo semejante a él con razón de semejanza $k = \frac{1}{6}$.**

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide: $x = \sqrt{1800}$ cm

Por tanto, el perímetro mide $p = 60 + \sqrt{1800}$ cm

$\frac{p'}{p} = \frac{1}{6} = k \Rightarrow p' = \frac{1}{6} \cdot \left(60 + \sqrt{1800}\right) = \frac{60 + \sqrt{1800}}{6} = 10 + 5\sqrt{2}$ cm

**5.21 Javier se encuentra de vacaciones en Nueva York y dispone de un plano a escala 1:15 000 de la ciudad. Quiere ir desde su hotel a un museo que dista 3,5 centímetros en el plano. ¿Cuál es la distancia, medida en metros, que debe recorrer?**

$15\,000 \cdot 3{,}5 = 52\,500$ cm $= 525$ m

**5.22 Se realiza una fotocopia de un mapa, cuya escala es de 1:20 000, ampliándolo al 130%.**

**a) Si la distancia entre dos lugares del mapa es de 4,8 centímetros, ¿qué distancia los separa en la fotocopia realizada?**

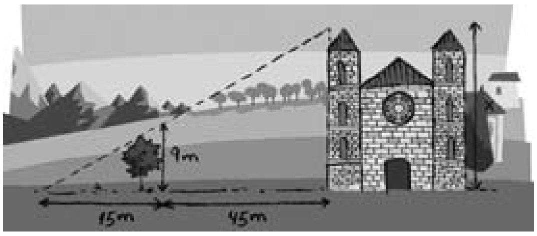
**b) ¿Cuál es la distancia real que separa estos dos lugares?**

a) $4{,}8 \cdot 1{,}3 = 6{,}24$ cm

b) 1:20 000 $\Rightarrow$ 1 cm $= 20\,000$ cm $= 200$ m
Distancia real $= 4{,}8 \cdot 200 - 960$ m

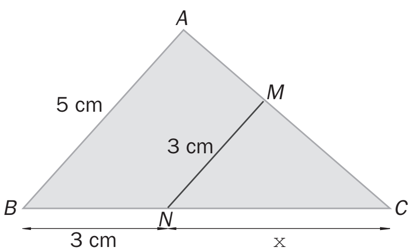
## Teorema de Tales. Criterios de semejanza

**5.23 Calcula la altura de la torre de la iglesia.**




$$\frac{x}{9} = \frac{60}{15} \Rightarrow 15x = 540 \Rightarrow x = 36 \text{ m}$$

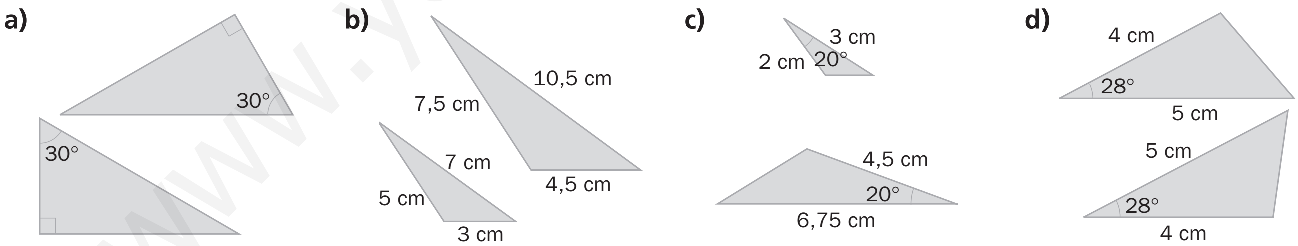
**5.24 Si los segmentos *AB* y *MN* son paralelos, halla la medida del lado *BC*.**




$$\frac{5}{3} = \frac{x+3}{x} \Rightarrow 5x = 3x + 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ cm}$$

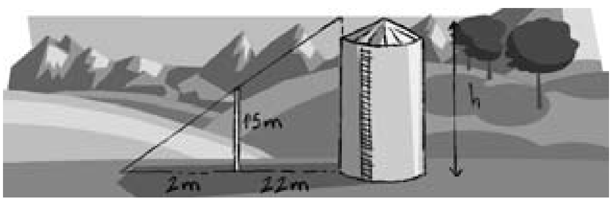
$BC = 3 + 4{,}5 = 7{,}5$ cm

**5.25 Determina si los siguientes pares de triángulos son semejantes, indicando, en caso afirmativo, el criterio de semejanza utilizado.**




a) Sí, ya que tienen dos ángulos iguales. Criterio 1.
b) Sí, ya que tienen sus tres lados proporcionales. Criterio 2.
c) Sí, ya que tienen un ángulo igual, y los lados correspondientes, proporcionales. Criterio 3.
d) Sí, ya que tienen un ángulo igual, y los lados correspondientes, iguales. Criterio 3.

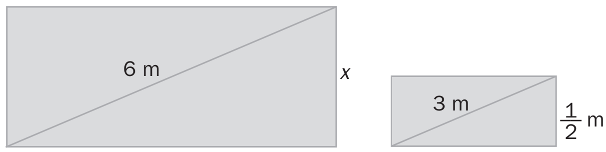
**5.26 Para saber la altura del silo (depósito de trigo) de un pueblo, se alinea con él un palo y se mide su sombra. Halla la altura del silo.**




$$\frac{h}{1{,}5} = \frac{24}{2} \Rightarrow 2h = 36 \Rightarrow h = 18 \text{ m}$$

## Consecuencias de los criterios de semejanza

**5.27 Si los rectángulos son semejantes, ¿cuál es el valor de *x*?**




Razón $= 6 : 3 = 2$

$x = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ m

**5.28 Dos triángulos son semejantes. Si el perímetro del primero mide 52 centímetros y la razón de sus áreas es $\frac{64}{49}$, ¿cuál es el perímetro del segundo?**

$\frac{A'}{A} = \frac{64}{49} = k^2 \Rightarrow k = \frac{8}{7}$

$\frac{p'}{p} = k \Rightarrow p' = 52 \cdot \frac{8}{7} = \frac{416}{7} \approx 59{,}43$ cm

**5.29 ¿Cuánto mide la altura de un triángulo rectángulo semejante al que tiene catetos de 12 y 16 centímetros si la razón de semejanza es $k = \frac{2}{3}$?**

Calculamos la hipotenusa: $h^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow h = 20$.

$A = \frac{12 \cdot 16}{2} = \frac{20 \cdot \text{altura}}{2}$ Despejamos la altura sobre la hipotenusa $\Rightarrow$ Altura $= 9{,}6$ cm

En el triángulo semejante: Altura' $= \frac{2}{3} \cdot 9{,}6 = 6{,}4$ cm

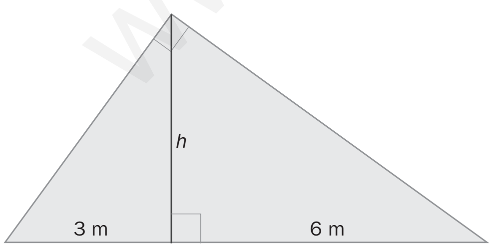
**5.30 Se quiere construir dos rascacielos con base en forma de hexágono regular. La arista de la base de uno de ellos mide 2 decámetros. Calcula el área de la base del otro rascacielos sabiendo que la razón de sus perímetros es $\frac{3}{2}$.**

Para hallar la apotema usamos el teorema de Pitágoras: $a^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow a = \sqrt{3}$ dam

$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ dam$^2$

$\frac{p'}{p} = \frac{3}{2} = k \Rightarrow \frac{A'}{A} = k^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow A' = 6\sqrt{3}\,\frac{9}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ dam$^2$

**5.31 En la siguiente figura, ¿cuánto mide *h*?**




Teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n$

$h^2 = 3 \cdot 1\,6 = 18$

$h = \sqrt{18}$ m $\Rightarrow$ $h = 3\sqrt{2}$ m

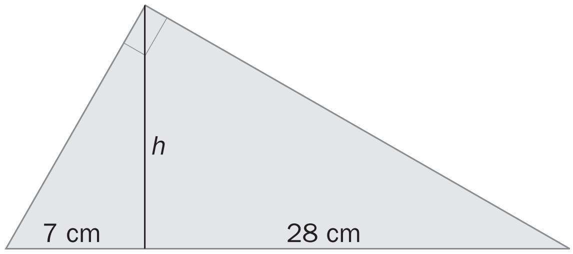
**5.32 Calcula el área de un triángulo rectángulo en el que la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos de 8 y 2 centímetros, respectivamente.**

Por el teorema de la altura: $h^2 = 8 \cdot 2 = 16 \Rightarrow h = \sqrt{16} = 4$ cm

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(8 + 2) \cdot 4}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

**5.33 Halla las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo de la figura y calcula su área.**

Por el teorema de la altura:
$h^2 = 28 \cdot 7 = 196 \Rightarrow h = \sqrt{196} = 14$ cm
Por el teorema de Pitágoras:
$14^2 + 7^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$ cm $= 15{,}65$ cm
Por el teorema de Pitágoras:
$14^2 + 28^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{980} = 14\sqrt{5}$ cm $= 31{,}3$ cm
$A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{35 \cdot 14}{2} = 245$ cm$^2$

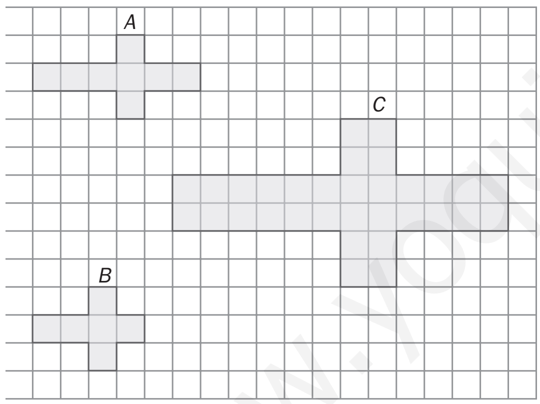



## C U E S T I O N E S   P A R A   A C L A R A R S E

**5.34 Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.**
**a) Todos los cuadrados son semejantes.**
**b) Los ángulos de dos triángulos semejantes son proporcionales.**
**c) Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual son semejantes.**
**d) Todas las circunferencias son semejantes.**
**e) Los polígonos iguales son semejantes y su razón de semejanza es 1.**

a) Verdadera (ejercicio 2).
b) Falsa. Los ángulos son iguales.
c) Verdadera por el criterio 1.
d) Verdadera. Siempre están en la misma proporción el radio y el perímetro. El área guarda esa proporción al cuadrado.
e) Verdadera, ya que si son polígonos iguales, tienen lados y ángulos respectivamente iguales.

**5.35 ¿Cuáles de los polígonos de la figura son semejantes?**




*A* y *C* son semejantes, ya que todas sus dimensiones son proporcionales.

Razón $= \dfrac{12}{6} = \dfrac{6}{3} = \dfrac{2}{1} = 2$

**5.36 Elige la respuesta correcta.**
**a) Dos triángulos son semejantes y la razón de semejanza es 3. Uno de ellos tiene un área de 6 unidades cuadradas. ¿Cuántas corresponden al área del otro?**
**i) 18 ii) 54 iii) 108**
**b) Dos prismas son semejantes y la razón de semejanza es 2. Uno de ellos tiene un volumen de 10 unidades cúbicas. ¿Cuántas corresponden al volumen del otro?**
**i) 40 ii) 200 iii) 80**

a) Razón de longitudes = 3; razón de áreas = 9
ii) ya que $54\ u^2 = 9 \cdot 6\ u^2$

b) Razón de longitudes = 2; razón de volúmenes = 8
iii) ya que $80\ u^3 = 8 \cdot 10\ u^3$

**5.37 Si dos pentágonos regulares *A* y *B* son semejantes, ¿cuáles de las siguientes igualdades son ciertas?**

**a)** $\dfrac{\text{Perímetro de } A}{\text{Perímetro de } B} = \dfrac{\text{Apotema de } A}{\text{Apotema de } B}$ **b)** $\dfrac{\text{Perímetro de } A}{\text{Perímetro de } B} = \dfrac{\text{Área de } A}{\text{Área de } B}$ **c)** $\dfrac{\text{Perímetro de } A}{\text{Perímetro de } B} = \dfrac{\text{Diagonal de } A}{\text{Diagonal de } B}$

a) y c) Ciertas.
b) Falsa, ya que la razón de semejanza de las superficies es el cuadrado de la razón de longitudes.

**5.38** **Un patio circular tiene 200 metros cuadrados de superficie. Si el radio se triplicara, ¿se triplicaría también la superficie? Razona tu respuesta.**

Área $A = \pi \cdot r^2 = 200\ m^2$ Área $B = \pi \cdot (3r)^2 = 9 \cdot \pi \cdot r^2 = 9 \cdot 200 = 1800\ m^2$

La superficie no se multiplica por 3, sino por $3^2$, que, como ya sabemos, es la razón de las áreas de figuras con razón de semejanza 3.

## PROBLEMAS PARA APLICAR

**5.39** **El logotipo de una empresa tiene la forma de un hexágono cuyos lados miden 3, 4, 5, 7, 8 y 9 centímetros.**
**En los carteles publicitarios se quiere dibujar un hexágono semejante de 117 centímetros de perímetro. ¿Cuánto miden los lados homólogos?**

Perímetro del hexágono pequeño $= 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36$ cm Razón $= \frac{117}{36} = 3{,}25$

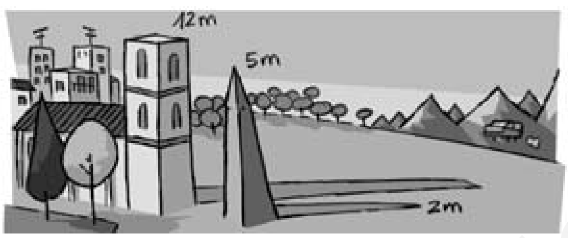
Lados del hexágono grande: $3 \cdot 3{,}25 = 9{,}75$ cm $4 \cdot 3{,}25 = 13$ cm $5 \cdot 3{,}25 = 16{,}25$ cm

$7 \cdot 3{,}25 = 22{,}75$ cm $8 \cdot 3{,}25 = 26$ cm $9 \cdot 3{,}25 = 29{,}25$ cm

**5.40** **En el plano de una vivienda en construcción aparece dibujado un salón rectangular de 13,5 centímetros cuadrados de área. Si la escala del plano es de 1:150, ¿cuál es el área real del salón?**

Escala 1:150. Razón $= 150 : 1 = 150$ Área real $= (150)^2 \cdot 13{,}5 = 22\,500 \cdot 13{,}5 = 303\,750\ cm^2 = 30{,}375\ m^2$

**5.41** **A la misma hora del día, se miden las sombras que proyectan la torre del reloj y el obelisco de una plaza. Halla la altura de la torre del reloj.**



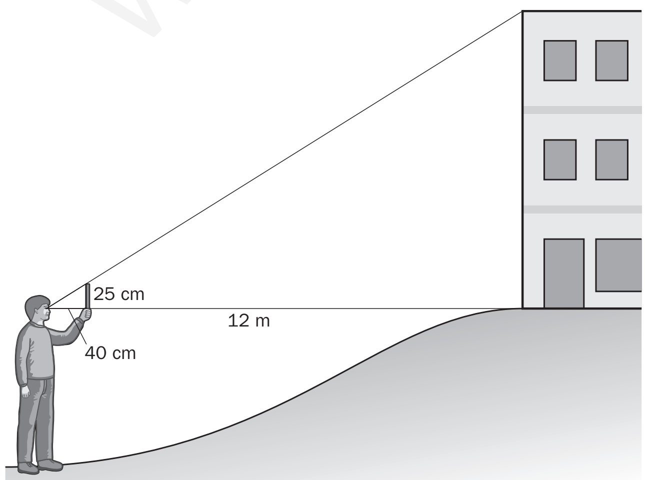

Triángulos semejantes $\rightarrow$ lados proporcionales

Razón $= \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow$ Altura de la torre $= 6 \cdot$ altura del obelisco $=$
$= 6 \cdot 5 = 30$ m

**5.42** **Las alturas de Mónica y su madre en una fotografía, cuya escala es de 1:75, son 2,08 y 2,2 centímetros respectivamente.**
**Si encargan una ampliación que aumenta el tamaño de la fotografía en un 25%, ¿cuánto medirán las dos en ella? ¿Cuál será la escala?**

Altura de Mónica en la ampliación: $2{,}08 \cdot 1{,}25 = 2{,}6$ cm
Altura de la madre en la ampliación: $2{,}2 \cdot 1{,}25 = 2{,}75$ cm
Escala de la ampliación: $\frac{75}{1{,}25} = 60 \Rightarrow 1{:}60$

**5.43** **Para realizar prácticas de óptica, un estudiante que mide 1,70 metros situado a 12 metros de un edificio, coloca frente a sus ojos una regla vertical de 25 centímetros con la que oculta exactamente la altura del mismo.**
**Si la distancia del ojo a la regla es de 40 centímetros, calcula la altura del edificio.**




Triángulos semejantes $\Rightarrow$ alturas proporcionales

12 m = 1200 cm

Razón $= 1200 : 40 = 30$

Altura $= 25 \times 30 = 750$ cm $= 7{,}5$ m

Altura del edificio $= 7{,}5 + 1{,}7 = 9{,}2$ m

**5.44 Los servicios de protección contra incendios de una comarca española emiten un informe sobre el número de hectáreas quemadas en el último incendio.**
**En su mapa de escala 1:60 000, la zona afectada tiene una superficie de 8 decímetros cuadrados.**
**¿Cuál es el resultado del informe?**

Razón $= \dfrac{60\,000}{1} = 60\,000$

Área real $= (60\,000)^2 \cdot 8 = 28\,800\,000\,000$ cm$^2$ $= 288\,000\,000$ m$^2$ $= 288$ km$^2$

**5.45 Un arquitecto construye una maqueta de un centro de exposiciones cuya planta es un rectángulo de 90 × 50 centímetros y cuyo volumen es de 350 000 centímetros cúbicos.**
**Si la escala de la maqueta es de 1:150, calcula las dimensiones reales de la planta y el volumen del edificio.**

Razón = 150
Largo de la planta real $= 90 \cdot 150 = 13\,500$ cm $= 135$ m
Ancho de la planta real $= 50 \cdot 150 = 7500$ cm $= 75$ m
Volumen real del edificio $= (150)^3 \cdot 0{,}35$ m$^3$ $= 1\,181\,250$ m$^3$

**5.46 Un estudiante de la Facultad de Bellas Artes desea trabajar en una figura a escala del *David* de Miguel Ángel cuya altura sea de 60 centímetros.**
**Si el auténtico *David* mide 4,34 metros de altura y tiene un volumen de 1,2 metros cúbicos, ¿cuál será el volumen de la escultura esculpida por el estudiante?**

Razón $= \dfrac{60}{434}$

Volumen de la figura $= \left(\dfrac{60}{434}\right)^3 \cdot 1{,}2 = 0{,}003$ m$^3$ $= 3$ dm$^3$

**5.47 Una tienda de fotografía ofrece varios tamaños, en centímetros, para positivar el negativo de las diapositivas.**

**9 × 12 12 × 15 14 × 18 20 × 30**

**¿En cuál de ellos se pierde menos contenido de la diapositiva si su tamaño es de 25 × 38 milímetros?**

Si las dimensiones de los formatos no son semejantes a las de la diapositiva, siempre se perderá algo de la imagen. El formato que más se asemeje a la razón entre dimensiones será el que más aproveche la imagen.

$\dfrac{25}{38} = 0{,}66$

$\dfrac{9}{12} = 0{,}75 \qquad \dfrac{12}{15} = 0{,}8 \qquad \dfrac{14}{18} = 0{,}78 \qquad \dfrac{20}{30} = 0{,}67$

Con lo cual, el formato de 20 × 30 es el que más aprovecha el tamaño de la imagen retratada.

**5.48 Se quiere construir una cometa utilizando trozos de tela con forma de triángulo rectángulo de colores distintos. Para ello se cortan los triángulos por la altura sobre la hipotenusa, de forma que esta se divide en dos segmentos de 30 y 50 centímetros, respectivamente. ¿Qué área deben tener los triángulos originales?**

$h^2 = 30 \cdot 50 = 1500 \Rightarrow h = \sqrt{1500} = 10\sqrt{15} \Rightarrow A = \dfrac{(30 + 50) \cdot 10\sqrt{15}}{2} = 400\sqrt{15}$ cm$^2$

**5.49 Tres amigos están situados en línea recta pegados a la pared de la casa de una amiga que les habla desde una ventana.**
**Uno de ellos se encuentra bajo la ventana, y los otros dos, a 5 y 3 metros a su izquierda y su derecha, respectivamente.**
**Si la chica observa a los de los extremos bajo un ángulo de 90º, ¿a qué altura está la ventana desde la que les habla?**

$h^2 = 5 \cdot 3 = 15 \Rightarrow h = \sqrt{15}$ m es la distancia del amigo de en medio a la ventana.

## Semejanza. Criterios de semejanza

**5.50 Si la distancia entre dos ciudades es de 650 kilómetros, al medir en un mapa a escala 1:300 000, ¿qué distancia se obtiene?**

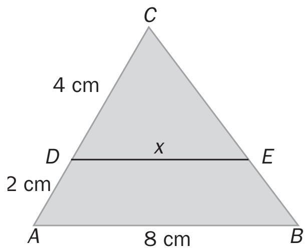
En la realidad: 650 km = 65 000 000 cm

En el mapa: 65 000 000 : 300 000 = 216,67 cm

**5.51 La razón de las áreas de dos hexágonos regulares es $\frac{49}{36}$. Si el lado de uno de ellos mide 18 centímetros, ¿cuál es el perímetro del otro?**

$\frac{A'}{A} = k^2 = \frac{49}{36} \Rightarrow k = \frac{7}{6} \Rightarrow l' = l \cdot k = 18 \cdot \frac{7}{6} = 21 \text{ cm} \Rightarrow p' = 21 \cdot 6 = 126 \text{ cm}$

**5.52 Halla el valor de *x* sabiendo que los lados *AB* y *DE* son paralelos.**

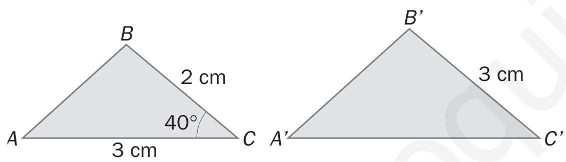



Por Tales sabemos que *CDE* y *CAB* son semejantes.

Razón $= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}x = 8 \Rightarrow x = \frac{16}{3} = 5{,}33 \text{ cm}$

**5.53 Considera los triángulos *ABC* y *A′B′C′*. ¿Cuánto deben medir el lado *A′C′* y el ángulo $\widehat{C}'$ para que sean dos triángulos semejantes? ¿Qué criterio de semejanza utilizas?**

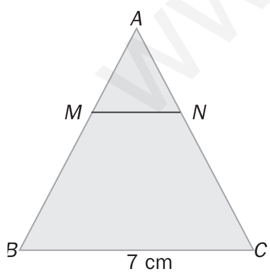



Si queremos que sean semejantes, el ángulo $\widehat{C}'$ debe valer 40º para ser igual al ángulo $\widehat{C}$, y los lados que forman dichos ángulos deben ser proporcionales:

$k = \frac{\frac{8}{5}}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow A'C' = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4 \text{ cm}$

## Consecuencias de los criterios de semejanza

**5.54 Si *M* y *N* son los puntos medios de los lados *AB* y *AC*, ¿cuánto mide el segmento *MN*?**




Por semejanza: $|MN| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}7 = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ cm}$

**5.55 Los perímetros de dos triángulos isósceles son de 15 y 5 centímetros, respectivamente. ¿Cuál es la razón de semejanza?**

**Si el lado desigual del primero mide 3 centímetros, ¿cuánto miden los lados del segundo?**

$\frac{p'}{p} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

Lado desigual $= 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ cm

Lados iguales $= \frac{5 - 1}{2} = 2$ cm

**5.56 Se realiza una fotocopia de un rectángulo de 8 centímetros de base y 6 de altura reduciendo su tamaño en un 25%. ¿Cuánto mide la diagonal del rectángulo fotocopiado?**

Por el teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm

Si se reduce un 25%, queda un 75%; entonces, $k = 0{,}75$.

$d' = d \cdot k = 10 \cdot 0{,}75 = 7{,}5$ cm

**5.57 En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos que miden 4 y 16 centímetros, respectivamente. Halla el área de un triángulo semejante a él si la razón de semejanza es $k = \frac{1}{2}$.**

Por el teorema de la altura: $h^2 = 4 \cdot 16 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8$ cm

$A = \frac{(4 + 16) \cdot 8}{2} = 80 \text{ cm}^2$

$\frac{A'}{A} = k^2 \Rightarrow A' = A \cdot k^2 = 80 \cdot \frac{1}{4} = 20 \text{ cm}^2$

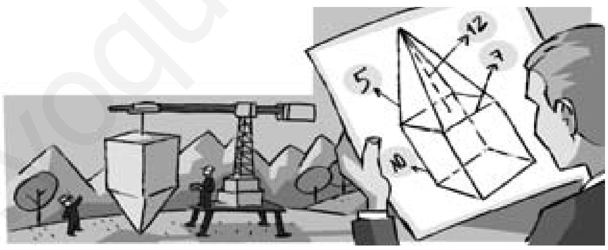
## AMPLIACIÓN

**5.58 Un alumno de 4.º de ESO necesita para la realización de un trabajo una copia reducida de un dibujo rectangular de 35 centímetros de alto y 15 de ancho.**
**¿Qué porcentaje de reducción tiene que aplicar para incluirlo en un hueco de 20 centímetros de alto?**

Razón $= \frac{20}{35} = \frac{4}{7} < 0{,}58$ (se acota superiormente porque tiene que caber en el hueco)

Escala = 58% $\Rightarrow$ Tiene que reducirlo un 42%.

**5.59 El Ayuntamiento de una ciudad tiene previsto construir una torre con las dimensiones del dibujo. Los profesionales que concursan para realizar el proyecto deben presentar una maqueta de 4,9 decímetros cúbicos. Calcula las dimensiones de la misma.**




Volumen real $= 7 \cdot 5 \cdot 10 + \frac{7 \cdot 5 \cdot 12}{3} = 350 + 140 = 490 \text{ m}^3 = 490\ 000 \text{ dm}^3$

Razón $= \sqrt[3]{\frac{4{,}9}{490\ 000}} = \sqrt[3]{0{,}000\,01} = 0{,}02$

Dimensiones:

$12 \times 0{,}02 = 0{,}24$ m $= 2{,}4$ dm
$5 \times 0{,}02 = 0{,}1$ m $= 1$ dm
$7 \times 0{,}02 = 0{,}14$ m $= 1{,}4$ dm
$10 \times 0{,}02 = 0{,}2$ m $= 2$ dm

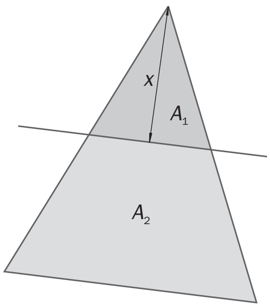
**5.60 La diagonal de una pista deportiva rectangular mide 13 metros y la razón entre sus lados es 2,4.**
**Existe otra pista semejante con perímetro de 102 metros. ¿Cuánto mide su diagonal?**

$\frac{b}{a} = 2{,}4 \Rightarrow b = 2{,}4a$

$x + x + 2{,}4x + 2{,}4x = 102 \Rightarrow 6{,}8x = 102 \Rightarrow x = 15 \text{ m} \Rightarrow 2{,}4x = 36$ m

Diagonal $= \sqrt{36^2 + 15^2} = 39$ m

**5.61 La altura del triángulo mayor de la figura es de 8 centímetros, y las bases de ambos son paralelas. Calcula el valor de $x$ para que las áreas $A_1$ y $A_2$ sean iguales.**




En la figura se generan dos triángulos semejantes. Razón $= \dfrac{8}{x}\, b_2 = \dfrac{8}{x}\, b_1$

Área del triángulo pequeño $= \dfrac{b_1 \cdot x}{2}$

Área del triángulo grande $= \dfrac{b_2 \cdot 8}{2} = 4b_2$

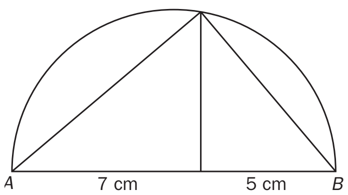
Área del trapecio $= \dfrac{(b_1 + b_2) \cdot (8 - x)}{2}$

Área del triángulo pequeño = área del trapecio

$$\frac{b_1 \cdot x}{2} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot (8 - x)}{2} \Rightarrow b_1 \cdot x = \left(b_1 + \frac{8}{x} b_1\right)(8 - x) \Rightarrow x = \left(1 + \frac{8}{x}\right)(8 - x) \Rightarrow x = \frac{(x + 8)(8 - x)}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 64 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 64 \Rightarrow x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

**5.62 Dibuja un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo cuyos lados miden 5 y 7 centímetros. Utiliza el teorema de la altura.**




$A_{\text{rectángulo}} = 5 \cdot 7 = 35 \text{ cm}^2 \qquad A_{\text{cuadrado}} = 35 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{lado} = \sqrt{35} \text{ cm}$

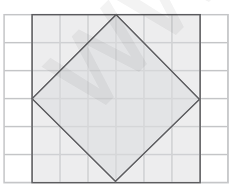
Para dibujar el lado $\sqrt{35}$ cm dibujamos un segmento $AB$ de medida $5 + 7 = 12$ cm; con centro en el punto medio del segmento trazamos una semicircunferencia de radio 6 cm. A 7 cm de $A$ trazamos una perpendicular a $AB$ que se corte con la semicircunferencia. Este nuevo segmento será la altura del triángulo $ABC$. Además, por el teorema de la altura sabemos que $h^2 = 5 \cdot 7$; $h = \sqrt{35}$ cm = $\text{lado}_{\text{cuadrado}}$. Tomando esa medida con el compás podremos dibujar el cuadrado pedido.

## PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

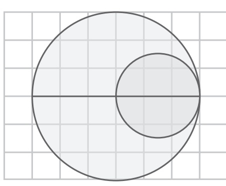
**5.63 Figuras semejantes**

**Determina si la figura interior es semejante a la exterior y calcula, si es posible, la razón de semejanza, la de los perímetros y la de las áreas.**

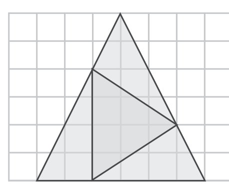
**a)**



**b)**



**c)**



a) Para los cuadrados

El lado del cuadrado menor es:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

La razón entre los perímetros es $\dfrac{7}{5}$.

La razón entre las áreas es $\dfrac{49}{25}$.

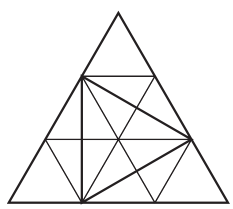
b) Para las circunferencias

La razón entre los perímetros es:

$$\frac{3}{1{,}5} = 2\ .$$

La razón entre las áreas es $2^2 = 4$ .

c) Para los triángulos



La razón entre las áreas es:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{18}{6} = 3$$

La razón entre los perímetros será $\sqrt{3}$.

**5.64 Latas de diseño**

**Una conocida marca de refrescos ha diseñado una nueva forma de recipientes para su producto estrella. Las capacidades son de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ de litro, respectivamente, y el diseño es el mismo para los dos, es decir, las latas son semejantes.**

**a) Calcula la altura de la lata grande sabiendo que la de la pequeña es de 12 centímetros.**

**b) Halla la superficie de la base de la lata pequeña sabiendo que la de la grande es de 75 centímetros cuadrados.**

La razón de los volúmenes es: $\frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1,5$

La razón de las medidas lineales será: $\frac{L'}{L} = \sqrt[3]{1,5} = 1,14$

La razón de las áreas será: $\frac{A'}{A} = \left(\sqrt[3]{1,5}\right)^2 = 1,30$

a) Si la altura de la lata menor es de 12 cm, la de la mayor será $h' = 12 \cdot 1,14 = 13,68$ cm.

b) Si la superficie de la base de la lata mayor es de 75 cm$^2$, la de la menor será $A = \frac{75}{1,3} = 57,69$ cm$^2$.

## AUTOEVALUACIÓN

**5.A1 Indica cuáles de los siguientes pares de triángulos son semejantes y, en ese caso, calcula la razón de semejanza de sus lados.**

**a) 3, 4, 5 y 4,5; 6; 7,5 cm**

**b) 2, 5, 6 y 4, 10, 11 cm**

**c) 5, 12, 13 y 12,5; 30; 32,5 cm**

**d) 4, 7, 10 y 2,4; 4,2; 6 cm**

a) Sí $\Rightarrow k = \frac{3}{2}$  b) No  c) Sí $\Rightarrow k = \frac{5}{2}$  d) Sí $\Rightarrow k = \frac{3}{5}$

**5.A2 Si ambas figuras son semejantes, calcula el área de *A* sabiendo que la de *B* es de 43 unidades cuadradas.**

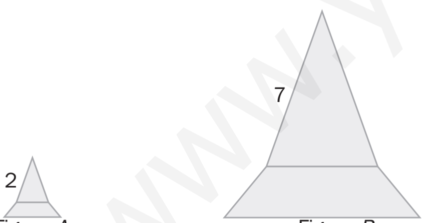



Figura *A* Figura *B*

Razón $= \frac{2}{7}$

$$A = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot 43 = \frac{4}{49} \cdot 43 = \frac{172}{49} = 3,51 \text{ u}^2$$

**5.A3 Me han regalado una reproducción de la torre Eiffel a escala 1:4000 que mide 8 centímetros. ¿Cuál es la altura real del monumento?**

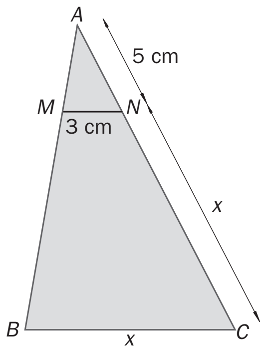
$8 \cdot 4000 = 32\,000$ cm $= 320$ m

**5.A4 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 centímetros, respectivamente. Se quiere dibujar otro triángulo rectángulo semejante de modo que el cateto menor mida 6 centímetros. ¿Cuánto debe medir el otro cateto?**

Ya que los triángulos están en posición de Tales, son semejantes y, por tanto, sus lados son proporcionales:

$k = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow b = 4 \cdot 2 = 8$ cm

**5.A5** **Considera los triángulos de la figura.**




**a) ¿Cómo deben ser los lados *MN* y *BC* para que los triángulos *AMN* y *ABC* sean semejantes?**

**b) Halla el valor de *x*.**

a) Deben ser paralelos.

b) $\frac{x+5}{5} = \frac{x}{3} \Rightarrow 3 \cdot (x+5) = 5x \Rightarrow 15 = 2x \Rightarrow x = \frac{15}{2} = 7{,}5$ cm

**5.A6** **Calcula el perímetro de un rombo semejante a otro, cuyas diagonales miden 24 y 16 centímetros, si la razón de sus áreas es $k = \frac{1}{16}$.**

Por el teorema de Pitágoras:

$12^2 + 8^2 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{208} = 4\sqrt{13} \Rightarrow p = 4 \cdot l = 16\sqrt{13}$ cm

$\frac{A'}{A} = \frac{1}{16} = k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

$\frac{p'}{p} = k \Rightarrow p' = k \cdot p = \frac{1}{4} \cdot 16\sqrt{13} = 4\sqrt{13}$ cm

**5.A7** **En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos que miden 2 y 18 centímetros, respectivamente.**
**Calcula el área de un triángulo rectángulo semejante con razón de semejanza $k = \frac{3}{2}$.**

Por el teorema de la altura:

$h^2 = 18 \cdot 2 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36} = 6$ cm $\qquad h' = h \cdot k = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9$ cm

$b' = b \cdot k = 20 \cdot \frac{3}{2} = 30$ cm $\qquad A = \frac{b' \cdot h'}{2} = \frac{30 \cdot 9}{2} = 135$ cm$^2$

**MURAL DE MATEMÁTICAS**

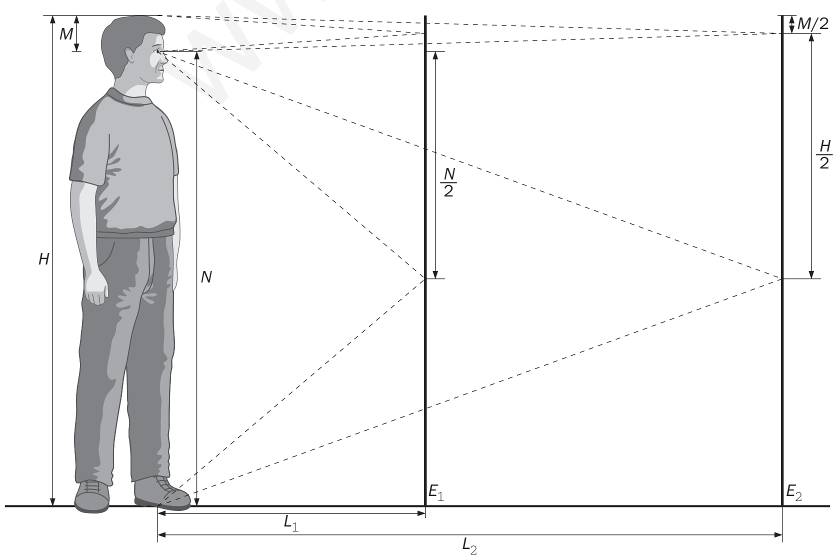
**MATETIEMPOS**

## El espejo

### ¿Qué dimensiones debe tener un espejo para que puedas verte en él a ti mismo por completo?

Cuando se plantea el problema las primeras ideas que se dan son que depende de la distancia a que esté el espejo o que el mismo tamaño que la persona. Haciendo un análisis más profundo se comprueba que ambas conjeturas son erróneas.

Plantearemos el siguiente gráfico:




Podemos observar que el tamaño del espejo debe ser la mitad de la persona que mira y es independiente de la distancia a la que se lo coloque.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**6.1 Indica la medida de estos ángulos en radianes.**

**a) 0º** **b) 45º** **c) 60º** **d) 120º**

a) $0^\circ = 0 \text{ rad}$

b) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \dfrac{x}{45^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 45}{360} = \dfrac{\pi}{4} \text{ rad}$

c) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \dfrac{x}{60^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 60}{360} = \dfrac{\pi}{3} \text{ rad}$

d) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \dfrac{x}{120^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 120}{360} = \dfrac{2\pi}{3} \text{ rad}$

**6.2 Expresa en grados los siguientes ángulos.**

**a)** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$ **rad** **b) 0,8 rad** **c)** $\boldsymbol{\dfrac{3\pi}{4}}$ **rad** **d) 3π rad**

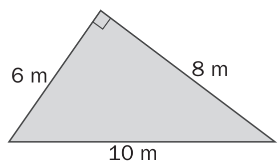
a) $\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{\pi}{6}\text{ rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot \pi}{12\pi} = 30^\circ$

b) $\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{0{,}8 \text{ rad}} \Rightarrow x = \dfrac{288}{2\pi} = \dfrac{144}{\pi} = 45{,}86^\circ = 45^\circ\, 51'\, 35''$

c) $\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{3\pi}{4}\text{ rad}} \Rightarrow x = \dfrac{1080 \cdot \pi}{8\pi} = 135^\circ$

d) $\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{3\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = \dfrac{1080 \cdot \pi}{2\pi} = 540^\circ$

**6.3 Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud.**




$\text{sen } \alpha = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$

$\cos \alpha = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{6}{8} = 0{,}75$

**6.4 Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa y uno de sus catetos miden 13 y 5 centímetros, respectivamente.**

Para calcular el otro cateto usamos el teorema de Pitágoras:

$x^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$

$\text{sen } \alpha = \dfrac{12}{13} = 0{,}923$ $\cos \alpha = \dfrac{5}{13} = 0{,}385$ $\text{tg } \alpha = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$

$\text{sen } \beta = \dfrac{5}{13} = 0{,}385$ $\cos \beta = \dfrac{12}{13} = 0{,}923$ $\text{tg } \beta = \dfrac{5}{12} = 0{,}417$

**6.5 Calcula las restantes razones trigonométricas de un ángulo agudo sabiendo que:**

**a) sen α =** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{5}}$ **b) cos α =** $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

a) $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{3}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{22}{25} \Rightarrow \cos \alpha \dfrac{\sqrt{22}}{5}$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{5}}{\dfrac{\sqrt{22}}{5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{22}} = \dfrac{\sqrt{66}}{22}$

b) $\text{sen}^2 \alpha + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \dfrac{1}{9} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \dfrac{8}{9} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

**6.6** **La tangente de un ángulo agudo $\alpha$ es igual a $\frac{4}{3}$. Halla sen $\alpha$ y cos $\alpha$.**

$$\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{16}{9} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow = \frac{9}{25} = \cos^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$$

**6.7** **Simplifica la siguiente expresión: $(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha) + (\text{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha)$.**

$$(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha) + (\text{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha) = 2\text{sen}^2\,\alpha$$

**6.8** **Calcula las razones trigonométricas de estos ángulos.**

**a) $\pi$ rad** **b) 270º**

a) $\text{sen}\,\pi = \frac{0}{1} = 0$ $\cos\pi = \frac{-1}{1} = -1$ $\text{tg}\,\pi = \frac{0}{-1} = 0$

b) $\text{sen}\,270º = \frac{-1}{1} = -1$ $\cos 270º = \frac{0}{1} = 0$ $\text{tg}\,270º = \frac{-1}{0} = \infty$

**6.9** **La tangente de un ángulo del tercer cuadrante es tg $\alpha = 4$. Halla las otras dos razones trigonométricas de este ángulo.**

Tercer cuadrante sen $\alpha < 0$, cos $\alpha < 0$, tg $\alpha > 0$; tomaremos las raíces negativas.

$$4^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{17} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17} \qquad 4 = \frac{\text{sen}\,\alpha}{-\frac{\sqrt{17}}{17}} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

**6.10** **Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas.**

**a) sen $\frac{5\pi}{6}$** **b) cos $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$**

a) $\text{sen}\,\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ b) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**6.11** **Halla las razones trigonométricas de estos ángulos.**

**a) 150º** **c) 225º**

**b) −120º** **d) 300º**

a) $\text{sen}\,150º = \text{sen}\,(180 - 30) = \text{sen}\,30º = \frac{1}{2}$ $\cos 150º = \cos(180 - 30) = -\cos 30º = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}\,150º = \text{tg}\,(180 - 30) = -\text{tg}\,30º = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{sen}\,(-120º) = -\text{sen}\,(120º) = -\text{sen}\,(180 - 60) = -\text{sen}\,60º = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-120º) = \cos(120º) = \cos(180 - 60) = -\cos 60º = -\frac{1}{2}$

$\text{tg}\,(-120º) = -\text{tg}\,(120º) = -\text{tg}\,(180 - 60) = \text{tg}\,60º = \sqrt{3}$

c) $\text{sen}\,225º = \text{sen}\,(180 + 45) = -\text{sen}\,45º = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 225º = \cos(180 + 45) = -\cos 45º = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg}\,225º = \text{tg}\,(180 + 45) = \text{tg}\,45º = 1$

d) $\text{sen}\,300º = \text{sen}\,(-60) = -\text{sen}\,60º = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 300º = \cos(-60º) = \cos 60º = \frac{1}{2}$

$\text{tg}\,300º = \text{tg}\,(-60) = -\text{tg}\,60º = -\sqrt{3}$

**6.12 Con la ayuda de la calculadora, halla el seno, el coseno y la tangente de estos ángulos.**

**a) 275º** **b) 124º 16′** **c) 1,5 rad** **d) $\frac{2\pi}{5}$ rad**

a) sen 275º = −0,996 cos 275º = 0,087 tg 275º = −11,43

b) sen 124º 16′ = 0,826 cos 124º 16′ = −0,563 tg 124º 16′ = −1,468

c) sen 1,5 rad = −1 cos 1,5 rad = 0 tg 1,5 rad = ∞

d) sen $\frac{2\pi}{5}$ rad = 0,951 cos $\frac{2\pi}{5}$ rad = 0,309 tg $\frac{2\pi}{5}$ rad = 3,078

**6.13 Resuelve estas ecuaciones trigonométricas.**

**a) tg $x = -1$** **c) sen $x = 0$**

**b) cos $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$** **d) cos $x = -0{,}7561$**

a) Segundo y cuarto cuadrante: $x = 360 - 45 = 315º$ ó $x = 180 - 45 = 135º$ $\begin{cases} x = 135º + 360º\,k \\ x = 315º + 360º\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Equivalentemente: $x = 135º + 180º\,k$ con $k \in \mathbf{Z}$

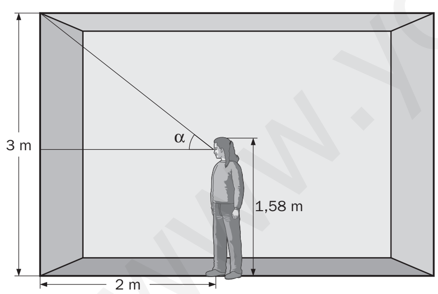
b) Primero y cuarto: $x = 45º$ ó $x = 360 - 45 = 315º$ $\begin{cases} x = 45º + 360º\,k \\ x = 315º + 360º\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$.

c) $x = 0$ ó $x = 180º$ $\begin{cases} x = 360º\,k \\ x = 180º + 360º\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$. Equivalentemente, $x + 180º\,k$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) Segundo y tercero: $x = 139{,}122º = 139º\,7'\,18''$ ó $x = 220{,}878º = 220º\,52'\,42''$ $\begin{cases} x = 139º\,7'\,18'' + 360º\,k \\ x = 220º\,52'\,42'' + 360º\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$.

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

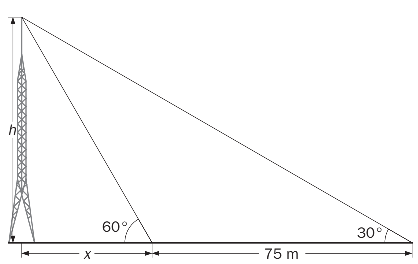
**6.14 Inés mide 158 centímetros y la altura de su aula es de 3 metros.**
**Si se sitúa a 2 metros de la pared, ¿qué ángulo de elevación obtiene?**




$3 - 1{,}58 = 1{,}42$ m

$\text{tg}\ \alpha = \frac{1{,}42}{2} = 0{,}71 \Rightarrow \alpha = 35º\,22'\,29''$

**6.15 Desde el suelo se ve el punto más alto de una antena bajo un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 75 metros hacia su pie, este ángulo mide 60º. Halla la altura de la antena.**




$$\begin{cases} \text{tg}\ 60º = \frac{h}{x} \\ \text{tg}\ 30º = \frac{h}{x + 75} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} = \frac{h}{x} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{x + 75} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x = h \\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}x}{x + 75} \end{cases} \quad \Rightarrow x + 75 = 3x \Rightarrow x = \frac{75}{2} = 37{,}5 \qquad h = 37{,}5\sqrt{3}\ \text{m}$$

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

## Medida de ángulos

**6.16 Expresa en radianes la medida de estos ángulos.**

**a) 30º**

**b) 240º**

**c) 90º**

**d) 270º**

**e) 135º**

**f) 300º**

a) $\frac{2\pi\text{rad}}{360°} = \frac{x}{30°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 30}{360} = \frac{\pi}{6}$ rad

b) $\frac{2\pi\text{rad}}{360°} = \frac{x}{240°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 240}{360} = \frac{4\pi}{3}$ rad

c) $\frac{2\pi\text{rad}}{360°} = \frac{x}{90°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 90}{360} = \frac{\pi}{2}$ rad

d) $\frac{2\pi\text{rad}}{360°} = \frac{x}{270°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 270}{360} = \frac{3\pi}{2}$ rad

e) $\frac{2\pi\text{rad}}{360°} = \frac{x}{135°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 135}{360} = \frac{3\pi}{4}$ rad

f) $\frac{2\pi\text{rad}}{360°} = \frac{x}{300°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 300}{360} = \frac{5\pi}{3}$ rad

**6.17 Indica la medida en el sistema sexagesimal de los siguientes ángulos expresados en radianes.**

**a) $5\pi$**

**b) $\frac{5\pi}{6}$**

**c) $\frac{7\pi}{4}$**

**d) $\frac{\pi}{8}$**

**e) $\frac{4\pi}{3}$**

**f) $\frac{7\pi}{11}$**

a) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{5\pi\text{rad}} \Rightarrow x = \frac{1800 \cdot \pi}{2\pi} = 900°$

b) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{5\pi}{6}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 5\pi}{12\pi} = 150°$

c) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{7\pi}{4}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 7\pi}{8\pi} = 315°$

d) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{\pi}{8}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot \pi}{16\pi} = 22{,}5° = 22°\ 30'$

e) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{4\pi}{3}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 4\pi}{6\pi} = 240°$

f) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{7\pi}{11}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 7\pi}{22\pi} = 114°\ 32'\ 44''$

**6.18 Halla el ángulo del intervalo [0º, 360º] que corresponde a:**

**a) 450º**

**b) 720º**

**c) 1300º**

**d) 1800º**

**e) 540º**

**f) 900º**

a) $450° = 360° \cdot 1 + 90°$. El ángulo es 90º.

b) $720° = 360° \cdot 2 + 0°$. El ángulo es 0º.

c) $1300° = 360° \cdot 3 + 220°$. El ángulo es 220º.

d) $1800° = 360° \cdot 5 + 0°$. El ángulo es 0º.

e) $540° = 360° \cdot 1 + 180°$. El ángulo es 180º.

f) $900° = 360° \cdot 2 + 180°$. El ángulo es 180º.

**6.19 Expresa en radianes el ángulo $\alpha$, menor que 360º, al que equivalen estos ángulos.**

**a) 480º**

**b) 1235º**

**c) 930º**

**d) 1440º**

a) $480° = 360° \cdot 1 + 120°$. El ángulo es 120º. $\frac{2\pi \text{rad}}{360°} = \frac{x}{120°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 120}{360} = \frac{2\pi}{3}$ rad

b) $1235° = 360° \cdot 3 + 155°$. El ángulo es 155º. $\frac{2\pi \text{rad}}{360°} = \frac{x}{155°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 155}{360} = \frac{31\pi}{36}$ rad

c) $930° = 360° \cdot 2 + 210°$. El ángulo es 210º. $\frac{2\pi \text{rad}}{360°} = \frac{x}{210°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 210}{360} = \frac{7\pi}{6}$ rad

d) $1440° = 360° \cdot 4 + 0°$. El ángulo es $0° = 0$ rad.

**6.20 Calcula el ángulo equivalente en sentido positivo a cada uno de los siguientes. Utiliza en cada caso la misma unidad de medida en que vienen dados.**

**a) $-330°$**

**b) $-\frac{3\pi}{4}$ rad**

**c) $-120°$**

**d) $-\frac{\pi}{2}$ rad**

a) $360° - 330° = 30°$

b) $2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ rad

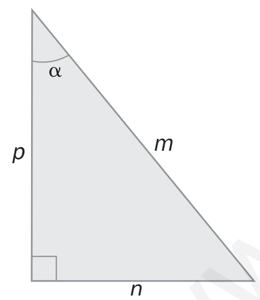
c) $360° - 120° = 240°$

d) $2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ rad

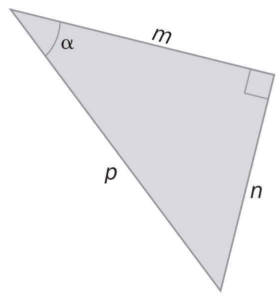
## Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

**6.21 Escribe, en función de *m*, *n* y *p*, el seno, el coseno y la tangente del ángulo $\alpha$ en estos triángulos rectángulos.**

**a)**




**b)**




a) $\text{sen}\,\alpha = \frac{n}{m}$; $\cos\alpha = \frac{p}{m}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{n}{p}$

b) $\text{sen}\,\alpha = \frac{n}{p}$; $\cos\alpha = \frac{m}{p}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{n}{m}$

**6.22 La hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo miden 10, 8 y 6 decímetros, respectivamente. ¿Cuáles son las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud del triángulo?**

El ángulo agudo más pequeño es el opuesto al cateto más pequeño.

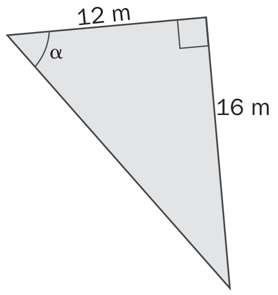
$\text{sen}\,\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

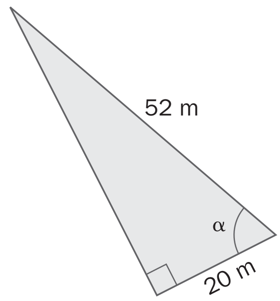
$\text{tg}\,\alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

**6.23 Halla las razones trigonométricas del ángulo $\alpha$ en cada triángulo rectángulo.**

**a)**




**b)**



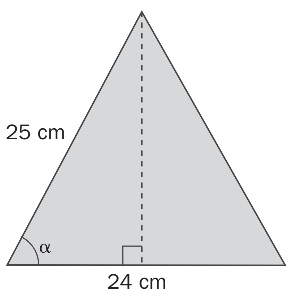

a) Si $a$ es la hipotenusa, $a = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$

$\text{sen } \alpha = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$; $\cos \alpha = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$; $\text{tg } \alpha = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$

b) Si $b$ es el cateto opuesto, $b = \sqrt{52^2 - 20^2} = 48$

$\text{sen } \beta = \dfrac{48}{52} = \dfrac{12}{13}$; $\cos \beta = \dfrac{20}{52} = \dfrac{5}{13}$; $\text{tg } \beta = \dfrac{48}{20} = \dfrac{12}{5}$

**6.24 Calcula las razones trigonométricas del ángulo $\alpha$.**




$h = \sqrt{25^2 - 12^2} = 21{,}93$ cm

$\text{sen } \alpha = \dfrac{21{,}93}{25} = 0{,}8772$; $\cos \alpha = \dfrac{12}{25} = 0{,}48$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{21{,}93}{12} = 1{,}8295$

**6.25 Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo $\alpha$ si $\text{sen } \alpha = 0{,}6$.**

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 0{,}6^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0{,}36 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

**6.26 Halla el seno y la tangente de un ángulo agudo $\alpha$ cuyo coseno vale $\dfrac{4}{5}$.**

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \text{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \dfrac{16}{25} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \dfrac{16}{25}} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{4}$

**6.27 Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo $\alpha$ si su tangente es igual a $\sqrt{5}$.**

$1 + \text{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \dfrac{6}{36} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{\dfrac{30}{36}} = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$

**6.28 Halla la medida en el sistema sexagesimal de los ángulos del primer cuadrante que cumplen cada una de las siguientes condiciones.**

**a)** $\mathbf{sen\ \alpha = \frac{1}{5}}$

**b)** $\mathbf{tg\ \beta = 4}$

**c)** $\mathbf{cos\ \gamma = \frac{5}{9}}$

**d)** $\mathbf{sen\ \delta = 0{,}4}$

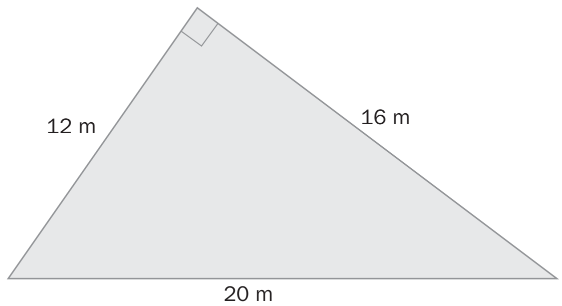
a) $\alpha = 11^\circ\ 32'\ 13''$

b) $\beta = 75^\circ\ 57'\ 49''$

c) $\gamma = 56^\circ\ 15'\ 4''$

d) $\delta = 23^\circ\ 34'\ 41''$

**6.29 Calcula la medida de los ángulos del triángulo.**




Comprobamos que el triángulo es rectángulo:

$12^2 + 16^2 = 20^2$

$\text{sen}\ \alpha = \frac{12}{20} \Rightarrow \alpha = 36^\circ\ 52'\ 12''$

$\beta = 90^\circ - 36^\circ\ 52'\ 12'' = 53^\circ\ 7'\ 48''$

## Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

**6.30 Sin calcular su valor, indica el signo que tienen las siguientes razones trigonométricas.**

**a) cos 315°**

**b) sen 150°**

**c) tg 190°**

**d) sen 850°**

**e) tg 118°**

**f) cos 230°**

**g) sen 340°**

**h) cos 460°**

a) $\cos 315^\circ > 0$

b) $\text{sen}\ 150^\circ > 0$

c) $\text{tg}\ 190^\circ > 0$

d) $\text{sen}\ 850^\circ > 0$

e) $\text{tg}\ 118^\circ < 0$

f) $\cos 230^\circ < 0$

g) $\text{sen}\ 340^\circ < 0$

h) $\cos 460^\circ < 0$

**6.31 ¿En qué cuadrantes se pueden encontrar cada uno de los siguientes ángulos?**

**a)** $\boldsymbol{\alpha}$**, si sen** $\boldsymbol{\alpha > 0}$

**b)** $\boldsymbol{\beta}$**, si tg** $\boldsymbol{\beta > 0}$

**c)** $\boldsymbol{\chi}$**, si cos** $\boldsymbol{\chi < 0}$

**d)** $\boldsymbol{\delta}$**, si sen** $\boldsymbol{\delta < 0}$

a) En el primero y en el segundo

b) En el primero y en el tercero

c) En el segundo y en el tercero

d) En el tercero y en el cuarto

**6.32 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de 135° y 225° a partir de las del ángulo de 45°.**

$\text{sen}\ 135^\circ = \text{sen}\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg}\ 135^\circ = -\text{tg}\ 45^\circ = -1$

$\text{sen}\ 225^\circ = -\text{sen}\ 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg}\ 225^\circ = \text{tg}\ 45^\circ = 1$

**6.33 Halla las otras dos razones trigonométricas del ángulo $\alpha$ en cada caso.**

**a) Si $\cos \alpha = \frac{6}{7}$ y $270° \le \alpha \le 360°$**

**b) Si $\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{8}$ y $90° \le \alpha \le 180°$**

**c) Si $\text{tg}\ \alpha = \sqrt{2}$ y $180° \le \alpha \le 270°$**

a) $\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \text{sen}^2\ \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha = 1 - \frac{36}{49} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = -\sqrt{\frac{13}{49}} = -\frac{\sqrt{13}}{7}$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{13}}{7}}{\frac{6}{7}} = -\frac{\sqrt{13}}{6}$$

b) $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{64} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{55}{64}} = -\frac{\sqrt{55}}{8}$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{8}}{-\frac{\sqrt{55}}{8}} = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$$

c) $1 + \text{tg}^2\ \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

**6.34 Calcula las razones trigonométricas del ángulo $\alpha$, expresado en radianes, en cada caso.**

**a) Si $\text{tg}\ \alpha = 5$ y $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$**

**b) Si $\cos \alpha = 0{,}8$ y $\frac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$**

a) $1 + \text{tg}^2\ \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 5^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{26} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 5\frac{\sqrt{26}}{26} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

b) $0{,}8^2 + \text{sen}^2\ \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha = 0{,}36 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = -0{,}6 \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{-0{,}6}{0{,}8} = -\frac{3}{4}$

**6.35 Si $\alpha$ es un ángulo agudo y $\cos \alpha = \frac{5}{9}$, ¿cuáles son las razones trigonométricas del ángulo $\alpha + 180°$?**

$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \text{sen}^2\ \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha = 1 - \frac{25}{81} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \sqrt{\frac{56}{81}} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{14}}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{5}$$

$\text{sen}\ (\alpha + 180) = -\frac{2\sqrt{14}}{9}$, $\cos\ (\alpha + 180) = -\frac{5}{9}$, $\text{tg}\ (\alpha + 180) = \frac{2\sqrt{14}}{5}$

**6.36 El coseno de un ángulo del primer cuadrante vale $\frac{12}{13}$. Calcula:**

**a) sen (α + 180º)**

**b) tg (90º − α)**

**c) cos (180º − α)**

**d) sen (−α)**

$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \text{sen}^2\ \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$

$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

a) $\text{sen}\ (180° + \alpha) = -\text{sen}\ \alpha = -\frac{5}{13}$

b) $\text{tg}\ (90° - \alpha) = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha} = \frac{12}{5}$

c) $\cos\ (180° - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{12}{13}$

d) $\text{sen}\ (-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha = -\frac{5}{13}$

**6.37 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en grados.**

**a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$**

**b) $1 - 2\cos x = 0$**

**c) $\text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$**

**d) $\text{tg}\, x = 1$**

a) $x = \text{arcos}\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = 150°$ ó $x = 210°$ $\begin{cases} x = 150° + 360°\ k \\ x = 210° + 360°\ k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

b) $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60°$ ó $x = 300°$ $\begin{cases} x = 60° + 360°\ k \\ x = 300° + 360°\ k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

c) $x = 240°$ ó $x = 300° \Rightarrow \begin{cases} x = 240° + 360°\ k \\ x = 300° + 360°\ k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) $x = 45°$ ó $x = 225° \Rightarrow x = 45° + 180°\ k$ con $k \in \mathbf{Z}$

**6.38 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en radianes.**

**a) tg $x = -2$**

**b) $2 - 5 \cos x = 6$**

**c) sen $x = 0{,}81$**

**d) $4$ sen $x + 1 = 0$**

a) $\text{arctg}\ (-2) = -0{,}35\pi \Rightarrow x = -0{,}35\pi + k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

b) $\cos x = -\frac{4}{5} \Rightarrow x = \text{arcos}\left(-\frac{4}{5}\right) = 0{,}8\pi$ ó $x = 1{,}2\ \pi \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}8\pi + 2k\pi \\ x = 1{,}2\pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \text{arcsen}\ 0{,}81 = 0{,}3\pi$ ó $x = 0{,}7\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}3\pi + 2k\pi \\ x = 0{,}7\pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) $\text{sen}\ x = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{4}\right) = 1{,}92\pi$ ó $x = 1{,}08\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 1{,}08\pi + 2k\pi \\ x = 1{,}92\pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

**6.39 Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.**

**a) $\text{tg}^2\ \alpha \cdot (1 - \text{sen}^2\ \alpha) = \text{sen}^2\ \alpha$**

**b) $\frac{\text{sen}\ \alpha \cdot \cos \alpha}{\text{tg}\ \alpha} = 1 - \text{sen}^2\ \alpha$**

**c) $(1 + \text{tg}^2\ \alpha) \cdot \cos^2 \alpha = 1$**

a) $\text{tg}^2\ \alpha \cdot (1 - \text{sen}^2\ \alpha) = \text{tg}^2\ \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{\text{sen}^2\ \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \text{sen}^2\ \alpha$

b) $\frac{\text{sen}\ \alpha \cdot \cos \alpha}{\text{tg}\ \alpha} = \frac{\text{sen}\ \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\text{sen}\ \alpha} = \cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2\ \alpha$

c) $(1 + \text{tg}^2\ \alpha) \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = 1$

**6.40 Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.**

**a) El coseno de un ángulo agudo es positivo.**

**b) La tangente de un ángulo del segundo o del tercer cuadrante es negativa.**

**c) El seno de un ángulo es positivo si está comprendido entre 0º y 180º.**

**d) Hay dos ángulos entre 0 y 2π radianes con el mismo valor de la tangente.**

a) Verdadera.

b) Falsa. En el tercero, el seno y el coseno son negativos, y, por tanto, la tangente es positiva.

c) Verdadera.

d) Verdadera.

**6.41 Comprueba si existe un ángulo α tal que sen α = $\frac{1}{4}$ y cos α = $\frac{3}{4}$.**

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1+9}{16} \neq 1$ No puede existir.

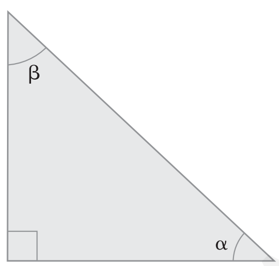
**6.42 Los lados de un triángulo miden 45, 27 y 36 centímetros. Demuestra que el seno de uno de sus ángulos vale $\frac{3}{5}$.**

**¿Cuáles son las otras dos razones trigonométricas de ese ángulo?**

Primero hay que comprobar que es rectángulo: $45^2 = 27^2 + 36^2 \Rightarrow 2025 = 729 + 1296$.

$\text{sen}\,\alpha = \frac{27}{45} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{36}{45} = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

**6.43 Si sen α = 0,68 y cos α = 0,73, calcula sen β y cos β.**




$\cos\beta = \text{sen}\,\alpha = 0{,}68$

$\text{sen}\,\beta = \cos\alpha = 0{,}73$

**6.44 Escribe en radianes el cuadrante en el que se encuentra un ángulo α si:**

**a) sen α = 0,35**

**b) tg α = −1,5**

**c) cos α = −0,9**

a) $0 \leq \alpha \leq \pi$

b) $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ y $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$

c) $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$

**6.45 ¿Qué relación existe entre las tangentes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?**

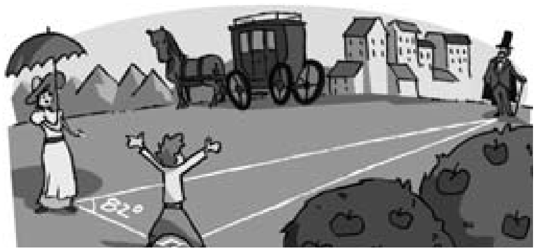
$\text{tg}\,\beta = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

**6.46 En el momento del día en que los rayos del sol forman un ángulo de 60º con la horizontal, la sombra que proyecta un árbol en el suelo es de 2,6 metros.**

**¿Cuánto mide el árbol?**

Si $h$ es la altura del árbol, $\text{tg } 60° = \dfrac{h}{2{,}6} \Rightarrow h = 2{,}6 \cdot \text{tg } 60° = 4{,}5$ m

**6.47 Para medir la distancia entre dos puntos muy alejados *A* y *B*, se han situado dos personas sobre ellos. Una tercera persona está en un punto *C*, a 50 metros de distancia de *A*.**




**Calcula la distancia que separa los puntos *A* y *B*.**

Si $a$ es la distancia que separa los puntos $A$ y $B$: $\text{tg } 82° = \dfrac{a}{50} \Rightarrow a = 50 \cdot \text{tg } 82° = 355{,}77$ m.

**6.48 Unas cigüeñas han construido su nido sobre el tejado de un edificio a 25 metros del suelo. Un chico lo observa desde un punto situado a 50 metros del edificio.**

**Calcula el ángulo de observación.**

$$\text{tg } \alpha = \frac{25}{50} \Rightarrow \alpha = \text{arctg } \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$$

**6.49 Juan ha subido en un globo aerostático hasta una altura de 50 metros. Sus padres siguen el vuelo desde el suelo.**


**a) ¿A qué distancia del punto A se encuentran los padres de Juan?**

**b) Si el globo continúa subiendo en la misma dirección y se detiene cuando el ángulo de observación de Juan es de 60º, ¿a cuántos metros de altura se encuentra el globo en este momento?**

a) Si $a$ es la distancia: $\text{tg } 75° = \dfrac{a}{50} \Rightarrow a = 50 \cdot \text{tg } 75° = 186{,}60$ m.

b) Si $h$ es la distancia al suelo: $\text{tg } 60° = \dfrac{180{,}60}{h} \Rightarrow h = \dfrac{180{,}6}{\text{tg } 60°} = 107{,}74$ m.

**6.50 El tronco de una palmera mide 3,5 metros y crece de forma inclinada debido al peso de la parte superior. La perpendicular desde su parte más alta hasta la tierra mide 2 metros.**

**Calcula el ángulo de inclinación del tronco respecto a la vertical.**

$\cos \alpha = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7} \Rightarrow \alpha = \text{arcos } \dfrac{4}{7} \Rightarrow \alpha = 55{,}15°$

6.51 **Alba va a poner una bombilla de bajo consumo en una lámpara que está situada a 2 metros del suelo.**


**Alba mide 1,53 metros, y cada lado de la escalera, 70 centímetros. Averigua si alcanza con ella para poner la bombilla.**

Al abrir la escalera, sus lados forman con el suelo un triángulo isósceles. La altura del triángulo es la altura a la que estará el último peldaño una vez abierta.

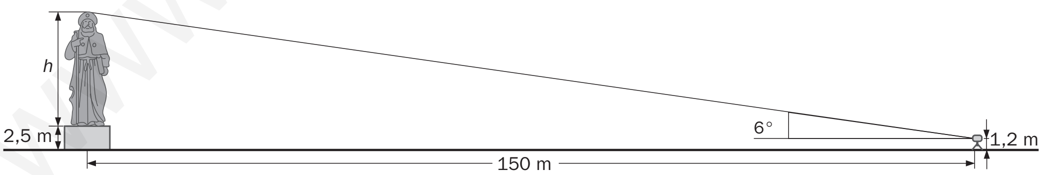
$$\text{sen } 50^\circ = \frac{h}{70} \Rightarrow h = 70 \cdot \text{sen } 50^\circ = 53{,}62 \text{ cm.}$$

La altura a la que llegará la cabeza de Alba es: $53{,}62 + 153 = 206{,}62$ cm.

Por tanto, llegará para cambiar la bombilla sin esfuerzo.

6.52 **En el centro de una plaza de forma circular de 300 metros de diámetro hay una estatua sobre un pedestal que mide 2,5 metros de altura.**

**Con un teodolito situado en el borde de la plaza se observa la parte más alta de la estatua bajo un ángulo de 6°. Si la mira del teodolito se encuentra a 1,2 metros sobre el suelo, ¿cuánto mide la estatua?**




El radio de la plaza es de 150 m. Si $h$ es la altura de la estatua: $\text{tg } 6^\circ = \dfrac{h + 2{,}5 - 1{,}2}{150} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h + 1{,}3 = 150 \cdot \text{tg } 6^\circ = 15{,}77 \text{ m} \Rightarrow h = 15{,}77 - 1{,}3 = 14{,}47 \text{ m}$$

**6.53 Desde un lugar situado junto al pie de una montaña se observa el pico más alto de la misma con un ángulo de elevación de 45º. Si se retrocede 1061 metros, el ángulo es de 30º.**

**Calcula la altura de la montaña.**

Si $h$ es la altura, y $x$, la distancia de la base de esta al primer punto de observación:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 45^\circ = \dfrac{h}{x} \\[2ex] \text{tg } 30^\circ = \dfrac{h}{x + 1061} \end{array}\right\} x = h$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{h}{x + 1061} \Rightarrow \text{tg } 30^\circ \cdot h + 1061 \cdot \text{tg } 30^\circ = h \Rightarrow h = \frac{1061 \cdot \text{tg } 30^\circ}{1 - \text{tg } 30^\circ} = 1449{,}35 \text{ m}$$

**6.54 Una antena se ha clavado en el suelo. Para que permanezca vertical y bien sujeta se han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados de la antena alineados con su base.**

**La distancia entre los anclajes es de 40 metros y, si se observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30º y 60º, respectivamente.**

**Calcula la altura de la antena.**

Si $h$ es la altura, y $x$, la distancia de la base de esta al punto en el que el ángulo de observación es de 60º:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 60^\circ = \dfrac{h}{x} \\[2ex] \text{tg } 30^\circ = \dfrac{h}{40 - x} \end{array}\right\} h = x \cdot \text{tg } 60^\circ$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\text{tg } 60^\circ \cdot x}{40 - x} \Rightarrow 40 \cdot \text{tg } 30^\circ - \text{tg } 30^\circ \cdot x = \text{tg } 60^\circ \cdot x \Rightarrow x = \frac{40 \cdot \text{tg } 30^\circ}{\text{tg } 60^\circ + \text{tg } 30^\circ} = 10 \text{ m}, \ h = 10\sqrt{3} \text{ m}$$



### R E F U E R Z O

## Medida de ángulos

**6.55 Calcula la medida en radianes de estos ángulos.**

**a) 36º**

**b) 20º**

**c) 216º**

**d) 160º**

**e) 324º**

**f) 290º**

a) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \dfrac{x}{36^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 36}{360} = \dfrac{\pi}{5}$ rad

b) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \dfrac{x}{20^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 20}{360} = \dfrac{\pi}{9}$ rad

c) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \dfrac{x}{216^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 216}{360} = \dfrac{6\pi}{5}$ rad

d) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \dfrac{x}{160^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 160}{360} = \dfrac{8\pi}{9}$ rad

e) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \dfrac{x}{324^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 324}{360} = \dfrac{9\pi}{5}$ rad

f) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \dfrac{x}{290^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 290}{360} = \dfrac{29\pi}{18}$ rad

**6.56 Expresa en grados:**

**a)** $4\pi$ **rad**

**b)** $\frac{9\pi}{4}$ **rad**

**c)** $\frac{7\pi}{9}$ **rad**

**d)** $\frac{13\pi}{6}$ **rad**

**e)** $\frac{5\pi}{12}$ **rad**

**f)** $\frac{11\pi}{5}$ **rad**

a) $\frac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{4\pi\text{rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 4\pi}{2\pi} = 720^\circ$

b) $\frac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{9\pi}{4}\text{rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 9\pi}{8\pi} = 405^\circ$

c) $\frac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{7\pi}{9}\text{rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 7\pi}{18\pi} = 140^\circ$

d) $\frac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{13\pi}{6}\text{rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 13\pi}{12\pi} = 390^\circ$

e) $\frac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{5\pi}{12}\text{rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 5\pi}{24\pi} = 75^\circ$

f) $\frac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{11\pi}{5}\text{rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 11\pi}{10\pi} = 396^\circ$

**6.57 ¿A qué ángulo menor que 360º equivalen los siguientes?**

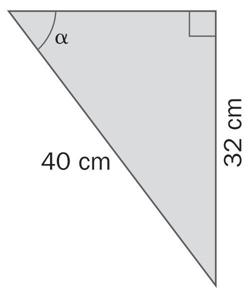
**a) 720º**
**b) 1050º**
**c) 990º**
**d) 840º**
**e) 600º**
**f) 1260º**

a) $720^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 0^\circ$. El ángulo es 0º.
b) $1050^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 330^\circ$. El ángulo es 330º.
c) $990^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 270^\circ$. El ángulo es 270º.
d) $840^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 120^\circ$. El ángulo es 120º.
e) $600^\circ = 360^\circ \cdot 1 + 240^\circ$. El ángulo es 240º.
f) $1260^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 180^\circ$. El ángulo es 180º.

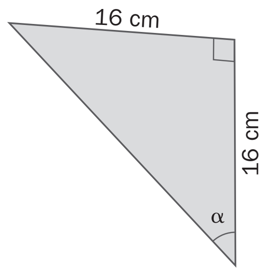
## Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

**6.58 Halla las razones trigonométricas del ángulo $\alpha$ en estos triángulos rectángulos.**

**a)**




**b)**




a) Si $b$ es el cateto que falta: $b = \sqrt{40^2 - 32^2} = 24$.

$\text{sen } \alpha = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$; $\cos \alpha = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$; $\text{tg } \alpha = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$

b) Si $a$ es la hipotenusa: $a = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$.

$\text{sen } \alpha = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \alpha = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg } \alpha = \frac{16}{16} = 1$

**6.59 Calcula la tangente del ángulo agudo $\alpha$ en cada caso.**

**a) Si $\cos \alpha = 0{,}2$**

**b) Si $\text{sen } \alpha = \frac{5}{8}$**

a) $1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{0{,}2^2} = 25 \Rightarrow \text{tg } \alpha = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

b) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{64} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{\sqrt{39}}{8}} = \frac{5\sqrt{39}}{39}$

## Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

**6.60 Si cos 70° = 0,34, halla:**

**a) sen 20°**

**b) cos 110°**

**c) cos 250°**

**d) cos 290°**

a) sen 20° = sen (90° − 70°) = cos 70° = 0,34

b) cos 110° = cos (180° − 70°) = −cos 70° = −0,34

c) cos 250° = cos (180° + 70°) = −cos 70° = −0,34

d) cos 290° = cos (−70°) = cos 70° = 0,34

**6.61 Si α es un ángulo agudo y sen α = 0,64, calcula:**

**a) sen (180° − α)**

**b) cos (90° − α)**

**c) sen (−α)**

**d) sen (α + 180°)**

a) sen (180° − α) = sen α = 0,64

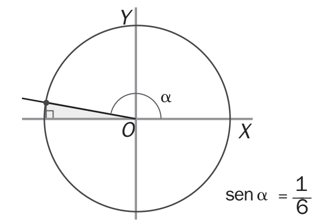
b) cos (90° − α) = sen α = 0,64

c) sen (−α) = −sen α = −0,64

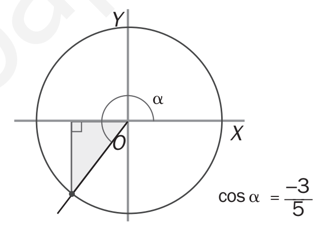
d) sen (α + 180°) = −sen α = −0,64

**6.62 Halla el valor de los ángulos.**

**a)**




**b)**




a) $\text{sen } \alpha = \dfrac{1}{6}$ en el segundo cuadrante $\Rightarrow \alpha = 170{,}41°$

b) $\cos \alpha = \dfrac{-3}{5}$ en el tercer cuadrante $\Rightarrow \alpha = 233{,}13°$

**6.63 Calcula las otras dos razones trigonométricas del ángulo α en cada caso.**

**a) Si $\cos \alpha = -\dfrac{4}{7}$ y $180° \le \alpha \le 270°$**

**b) Si $\text{sen } \alpha = -\dfrac{9}{10}$ y $270° \le \alpha \le 360°$**

**c) Si $\text{tg } \alpha = -\sqrt{8}$ y $90° \le \alpha \le 180°$**

a) $\left(-\dfrac{4}{7}\right)^2 + \text{sen}^2\, \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\, \alpha = 1 - \dfrac{16}{49} \Rightarrow \text{sen } \alpha = -\sqrt{\dfrac{33}{49}} = -\dfrac{\sqrt{33}}{7} \quad \text{tg } \alpha = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{33}}{7}}{-\dfrac{4}{7}} = \dfrac{\sqrt{33}}{4}$

b) $\left(-\dfrac{9}{10}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{81}{100} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\dfrac{19}{100}} = \dfrac{\sqrt{19}}{10} \quad \text{tg } \alpha = \dfrac{-\dfrac{9}{10}}{\dfrac{\sqrt{19}}{10}} = -\dfrac{9\sqrt{19}}{19}$

c) $1 + \left(-\sqrt{8}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \cos \alpha = -\dfrac{1}{3};\ -\sqrt{8} = \dfrac{\text{sen}\, \alpha}{-\dfrac{1}{3}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = -\sqrt{8}\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

**6.64 Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos reduciéndolos primero a uno equivalente menor que 360º.**

**a) 450º** 	**c) 1125º**

**b) 2190º** 	**d) 630º**

a) $450^\circ = 360^\circ + 90^\circ$

$\text{sen } 450^\circ = \text{sen } 90^\circ = 1$, $\cos 450^\circ = \cos 90^\circ = 0$, $\text{tg } 450^\circ = \text{tg } 90^\circ = \infty$

b) $2190^\circ = 360^\circ \cdot 6 + 30^\circ$

$\text{sen } 2190^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 2190^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg } 2190^\circ = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $1125^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 45^\circ$

$\text{sen } 1125^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 1125^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg } 1125^\circ = \text{tg } 45^\circ = 1$

d) $630^\circ = 360^\circ + 270^\circ$

$\text{sen } 630^\circ = \text{sen } 270^\circ = -1$, $\cos 630^\circ = \cos 270^\circ = 0$, $\text{tg } 630^\circ = \text{tg } 270^\circ = \infty$

**6.65 El seno de un ángulo agudo $\alpha$ vale $\frac{7}{9}$. Calcula:**

**a) cos ($\alpha$ + 90º)** 	**c) tg (540º − $\alpha$)**

**b) sen ($\alpha$ + 270º)** 	**d) tg ($\alpha$ + 1440º)**

$$\left(\frac{7}{9}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{49}{81} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{32}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \quad \text{tg } \alpha = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{4\sqrt{2}}{9}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

a) $\cos(\alpha + 90^\circ) = -\text{sen } \alpha = -\frac{7}{9}$

b) $\text{sen } (\alpha + 270) = -\cos\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

c) $\text{tg } (540^\circ - \alpha) = -\text{tg } \alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$

d) $\text{tg } (\alpha + 1440) = \text{tg } \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{8}$

**6.66 Si $\cos\alpha = \frac{10}{11}$ y $\frac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$, calcula las razones trigonométricas de estos ángulos.**

**a) $\alpha + \pi$** 	**c) $\pi - \alpha$**

**b) $2\pi - \alpha$** 	**d) $\frac{\pi}{2} - \alpha$**

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{10}{11}\right)^2 + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{100}{121} \Rightarrow \text{sen } \alpha = -\sqrt{\frac{21}{121}} = -\frac{\sqrt{21}}{11}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{11}}{\frac{10}{11}} = -\frac{\sqrt{21}}{10}$$

a) $\text{sen } (\pi + \alpha) = -\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{21}}{11}$; $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{10}{11}$; $\text{tg } (\pi + \alpha) = \text{tg } \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{10}$

b) $\text{sen } (2\pi - \alpha) = -\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{21}}{11}$; $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha = \frac{10}{11}$; $\text{tg } (2\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{21}}{10}$

c) $\text{sen } (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{11}$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{10}{11}$; $\text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{21}}{10}$

d) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{10}{11}$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{11}$; $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = -\frac{10\sqrt{21}}{21}$

**6.67** **Si tg $\alpha = -\sqrt{15}$ y $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, halla las razones trigonométricas de los ángulos suplementario y opuesto a $\alpha$.**

$$1 + \left(\sqrt{15}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{16} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{4};\ -\sqrt{15} = \frac{\text{sen } \alpha}{-\frac{1}{4}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{sen } (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4};\ \cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{1}{4};\ \text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha = \sqrt{15}$$

$$\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4};\ \cos (-\alpha) = \cos \alpha = -\frac{1}{4};\ \text{tg } (-\alpha) = -\text{tg } \alpha = \sqrt{15}$$

**6.68** **Demuestra estas igualdades trigonométricas.**

**a)** $\dfrac{\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$

**b)** $\cos \alpha + \dfrac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{1}{\cos \alpha}$

a) $\dfrac{\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \dfrac{(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot (\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$

b) $\cos \alpha + \dfrac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{1}{\cos \alpha}$

**6.69** **Resuelve estas ecuaciones.**

**a)** $|\text{sen}\, x| = 1$

**b)** $|\cos x| = \frac{1}{2}$

**c)** $|\text{tg}\, x| = 1$

**d)** $|\text{sen}\, x| = \frac{1}{2}$

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ó $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$; $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

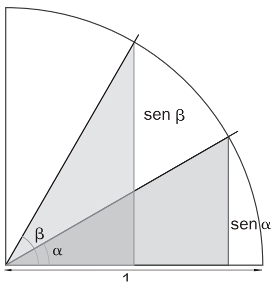
c) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ó $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$; $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$; $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ó $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$; $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

**6.70 ¿Cantidades proporcionales?**

**En la figura aparece dibujado el primer cuadrante de la circunferencia goniométrica.**

**En ella se consideran dos ángulos $\alpha$ y $\beta$ tales que la amplitud del segundo es igual a la del primero aumentada en un 50%.**




**a) Halla el valor del seno de cada uno de los ángulos si $\alpha$ = 30º. Determina en qué porcentaje ha aumentado el seno de $\beta$ en relación con el de $\alpha$.**

**b) ¿En qué porcentaje aumenta el seno de $\beta$ si el ángulo $\alpha$ mide 60º?**

**c) ¿Crees que los senos de los ángulos son proporcionales a las amplitudes de los mismos?**

a) sen $\alpha$ = sen 30º = 0,5  sen $\beta$ = sen (1,5 · 30) = sen 45º = 0,707

$\frac{0{,}707}{0{,}5} = 1{,}414 \Rightarrow$ Mientras que la amplitud crece en un 50%, el valor del seno aumenta en un 41,4%.

b) sen $\alpha$ = sen 60º = 0,866  sen $\beta$ = sen (1,5 · 60) = sen 90º = 1

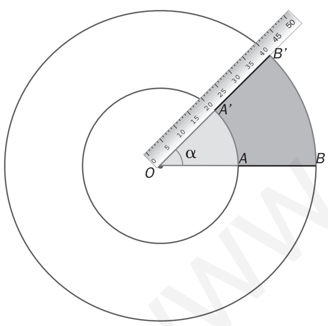
$\frac{1}{0{,}866} = 1{,}155 \Rightarrow$ El valor del seno ha aumentado en solo un 15,5%.

c) Al pasar de 30º a 45º, la amplitud ha aumentado en un 50%, y el seno, en un 41,4%. Al pasar de 60º a 90º, la amplitud ha aumentado en un 50%, pero el seno sólo lo ha hecho en un 15,5%. Las amplitudes no son, pues, proporcionales a los senos.

**6.71 Colores circulares**

**La regla de la figura gira en el sentido contrario a las agujas del reloj y describe una vuelta completa en 2 minutos.**

**La longitud de los segmentos *OA* y *AB* es de 20 centímetros.**




**a) Calcula, en radianes, el ángulo $\alpha$ descrito en un segundo.**

**b) Halla, en centímetros cuadrados, las áreas de color gris y de color naranja que se han pintado cuando ha pasado un segundo.**

**c) Calcula la relación de las áreas pintadas cuando ha transcurrido un segundo. ¿Cuál es esa relación al cabo de 40 segundos?**

a) En 120 segundos describe $2\pi$ radianes. En un segundo describe $\frac{2\pi}{120} = \frac{\pi}{60}$ radianes.

b) Área del sector *OBB*' cuando ha pasado 1 segundo: $\frac{\pi \cdot OB^2}{120} = \frac{\pi \cdot 1600}{120} = \frac{40\pi}{3}$ cm$^2$.

Área del sector *OAA*' cuando ha pasado 1 segundo: $\frac{\pi \cdot OA^2}{120} = \frac{\pi \cdot 400}{120} = \frac{10\pi}{3}$ cm$^2$.

Área de la zona gris: $\frac{10\pi}{3}$ cm$^2$  Área de la zona naranja: $\frac{(40 - 10)\pi}{3} = 10\pi$ cm$^2$

c) La relación de las áreas pintadas cuando han pasado 1 y 40 segundos es la misma:

$$\frac{\text{Zona Gris}}{\text{Zona Naranja}} = \frac{\frac{10\pi}{3}}{10\pi} = \frac{1}{3}$$

**6.A1 Expresa en grados la medida de estos ángulos.**

**a)** $\dfrac{3\pi}{5}$ **rad** **b)** $\dfrac{15\pi}{4}$ **rad** **c)** $9\pi$ **rad**

a) $\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{3\pi}{5}\text{ rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 3\pi}{10\pi} = 108^\circ$

b) $\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{15\pi}{4}\text{ rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 15\pi}{8\pi} = 675^\circ$

c) $\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{9\pi\text{ rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 9\pi}{2\pi} = 1620^\circ$

**6.A2 Pasa a radianes las medidas de los siguientes ángulos.**

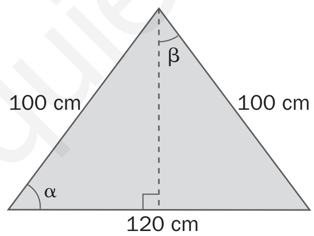
**a)** $36^\circ$ **b)** $100^\circ$ **c)** $310^\circ$

a) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \dfrac{x}{36^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 36}{360} = \dfrac{\pi}{5}\text{ rad}$

b) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \dfrac{x}{100^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 100}{360} = \dfrac{5\pi}{9}\text{ rad}$

c) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \dfrac{x}{310^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 310}{360} = \dfrac{31\pi}{18}\text{ rad}$

**6.A3 Halla las razones trigonométricas de los ángulos $\alpha$ y $\beta$.**

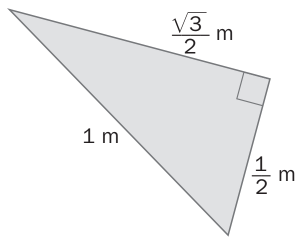



$h^2 = 100^2 - 60^2 = 6400 \Rightarrow h = 80$ cm

$\text{sen } \alpha = \dfrac{80}{100} = 0{,}8$ $\cos \alpha = \dfrac{60}{100} = 0{,}6$ $\text{tg } \alpha = \dfrac{80}{60} = 1{,}33$

$\text{sen } \beta = \dfrac{60}{100} = 0{,}6$ $\cos \beta = \dfrac{80}{100} = 0{,}8$ $\text{tg } \beta = \dfrac{60}{80} = 0{,}75$

**6.A4 Calcula la medida de los ángulos agudos del triángulo.**




$\text{sen } \alpha = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ $\text{sen } \beta = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$

**6.A5 Halla las otras dos razones trigonométricas en cada caso.**

**a) Si sen $\alpha = \dfrac{3}{10}$ y $90° \le \alpha \le 180°$**

**b) Si tg $\alpha = \sqrt{24}$ y $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$**

**c) Si cos $\alpha = \dfrac{1}{8}$ y $270° \le \alpha \le 360°$**

**d) Si tg $\alpha = \dfrac{4}{3}$ y $\pi \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{2}$**

a) $\left(\dfrac{3}{10}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{9}{100} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{91}{100}} = -\dfrac{\sqrt{91}}{10};\ \text{tg}\ \alpha = \dfrac{\dfrac{3}{10}}{-\dfrac{\sqrt{91}}{10}} = -\dfrac{3\sqrt{91}}{91}$

b) $1 + \left(\sqrt{24}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{5};\ \text{sen}\ \alpha = \sqrt{24}\cdot\dfrac{1}{5} = \dfrac{\sqrt{24}}{5} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

c) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^2 + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{64} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = -\sqrt{\dfrac{63}{64}} = -\dfrac{\sqrt{63}}{8};\ \text{tg}\ \alpha = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{63}}{8}}{\dfrac{1}{8}} = -\sqrt{63} = -3\sqrt{7}$

d) $1 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{3}{5};\ \text{sen}\ \alpha = \dfrac{4}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{4}{5}$

**6.A6 Si el seno de un ángulo agudo $\alpha$ vale $\dfrac{1}{5}$, calcula:**

**a) sen $(180° - \alpha)$** **b) cos $(-\alpha)$** **c) cos $(90° - \alpha)$** **d) sen $(\alpha + 180°)$**

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

a) $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\ \alpha = \dfrac{1}{5}$

b) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

c) $\cos(90° - \alpha) = \text{sen}\ \alpha = \dfrac{1}{5}$

d) $\text{sen}\,(\alpha + 180°) = -\text{sen}\ \alpha = -\dfrac{1}{5}$

**6.A7 Calcula los ángulos que cumplen cada una de las siguientes condiciones.**

**a) cos $\alpha = -0{,}44$** **b) tg $\beta = \sqrt{43}$** **c) sen $\chi = \dfrac{8}{15}$** **d) sen $\delta = -0{,}96$**

a) $\alpha = 116°\ 6'\ 14'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ y $\alpha = 243°\ 53'\ 46'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

b) $\beta = 81°\ 19'\ 45'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ y $\beta = 261°\ 19'\ 45'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

c) $\chi = 32°\ 13'\ 51'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ y $\chi = 147°\ 46'\ 8'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

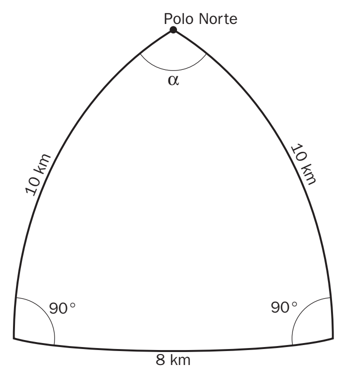
d) $\delta = 253°\ 44'\ 23'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ y $\delta = 286°\ 15'\ 37'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

## MURAL DE MATEMÁTICAS

### MATETIEMPOS

### El recorrido del oso

**Un oso camina 10 kilómetros hacia el sur; luego gira al este y camina 8, gira hacia el norte y, andando otros 10 kilómetros llega al punto de partida. ¿Cómo es posible? ¿Cuál es la figura que muestra el recorrido del oso? ¿Cuánto miden sus ángulos?**




Para que el recorrido sea posible, el oso debe ser blanco y estar en el polo norte.

El oso recorre el perímetro de un triángulo isósceles curvo.

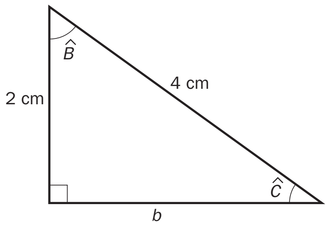
Dos de sus ángulos internos son de 90º, el otro es:

$$\alpha = \frac{8}{2\pi \cdot 6370} \cdot 360° = 0{,}072°$$

donde 6370 es el radio de la Tierra en kilómetros.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

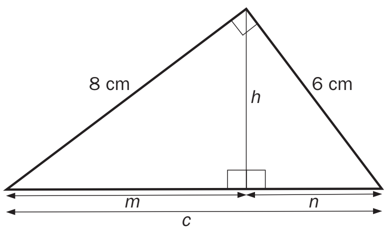
**7.1 La hipotenusa y uno de los catetos de un triángulo rectángulo miden 4 y 2 centímetros, respectivamente. Halla las medidas de sus ángulos.**




$$\widehat{C} = \text{arcsen}\ \frac{2}{4} = 30°$$

$$\widehat{B} = 90° - 30° = 60°$$

**7.2 En un triángulo rectángulo, los catetos miden 6 y 8 centímetros. Calcula la medida de la altura sobre la hipotenusa y la distancia desde su pie hasta los extremos.**

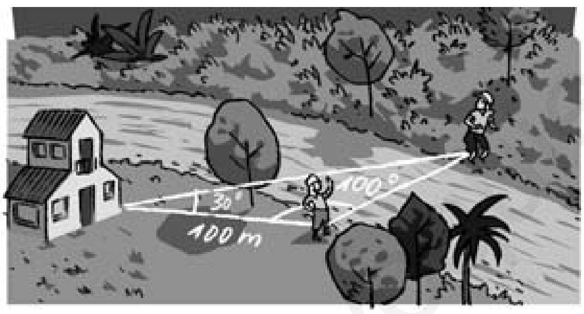



$$c^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow c = 10 \text{ cm} \quad \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{10h}{2} \Rightarrow h = 4{,}8 \text{ cm}$$

$$8^2 = m \cdot 10 \Rightarrow m = 6{,}4 \text{ cm}$$

$$6^2 = n \cdot 10 \Rightarrow n = 3{,}6 \text{ cm}$$

**7.3 Ana y Blanca se encuentran a ambos lados de la orilla de un río en los puntos *A* y *B*.**




**¿Qué anchura tiene el río?**

$$\widehat{B} = 180° - 100° - 30° = 50° \qquad \frac{100}{\text{sen } 50°} = \frac{d}{\text{sen } 30°} \Rightarrow d = \frac{100 \cdot \text{sen } 30°}{\text{sen } 50°} = 65{,}27 \text{ m}$$

**7.4 Resuelve estos triángulos.**

**a) $a = 25$ m, $b = 20$ m, $\widehat{A} = 90°$**

**b) $a = 6$ cm, $\widehat{B} = 45°$, $\widehat{C} = 105°$**

**c) $a = 10$ mm, $c = 7$ mm, $\widehat{B} = 30°$**

a) Triángulo rectángulo; $c^2 = 25^2 - 20^2 = 225 \Rightarrow c = 15$ m

$$\widehat{B} = \text{arcsen}\ \frac{20}{25} = 53°\ 7'\ 48''$$

$$\widehat{C} = 36°\ 52'\ 12''$$

b) $\widehat{A} = 180° - 45° - 105° = 30°$

$$\frac{6}{\text{sen } 30°} = \frac{b}{\text{sen } 45°} = \frac{c}{\text{sen } 105°}$$

$$b = \frac{6 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 30} = 8{,}49 \text{ cm} \quad c = \frac{6 \text{ sen } 105°}{\text{sen } 30°} = 11{,}59 \text{ cm}$$

c) $b^2 = 10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cos 30° \Rightarrow b^2 = 27{,}76 \Rightarrow b = 5{,}27$ mm

$10^2 = 7^2 + 5{,}27^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5{,}27 \cdot \cos \widehat{A} \Rightarrow \cos \widehat{A} = -0{,}315 \Rightarrow \widehat{A} = 108{,}35°$

$\widehat{C} = 180° - 30° - 108{,}35° = 41{,}65°$

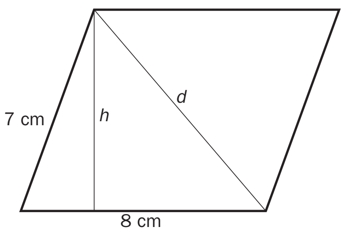
**7.5** **Los brazos de un compás miden 12 centímetros. ¿Qué ángulo forman cuando se traza un arco de 7 centímetros de radio?**

$$7^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}83 \Rightarrow \alpha = 33{,}92°$$

**7.6** **Los lados de un paralelogramo forman un ángulo de 70°. Sus medidas son 7 y 8 centímetros.**

**a) Calcula la longitud de la diagonal menor.**

**b) Halla el área del paralelogramo.**




a) $d^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cos 70° = 74{,}694 \Rightarrow d = 8{,}643$ cm

b) $\text{sen}\, 70° = \dfrac{h}{7} \Rightarrow h = 6{,}578$ cm

$A = 8 \cdot 6{,}578 = 52{,}624 \text{ cm}^2$

**7.7** **El lado de un octógono regular mide 12 metros. Calcula la longitud de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita.**

El radio de la circunferencia inscrita se corresponde con la apotema: $r$

El radio de la circunferencia circunscrita se corresponde con el radio del octógono: $R$

Ángulo central $= 360° : 8 = 45°$ $\qquad 2\alpha = 180° - 45° = 135°$ $\qquad \alpha = 67{,}5°$

$$\frac{12}{\text{sen}\, 45°} = \frac{R}{\text{sen}\, 67{,}5°} \Rightarrow R = 15{,}68 \text{ m} \quad r^2 = 15{,}68^2 - 6^2 = 209{,}86 \qquad r = 14{,}49 \text{ m}$$

**7.8** **Halla el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 10 centímetros de radio.**

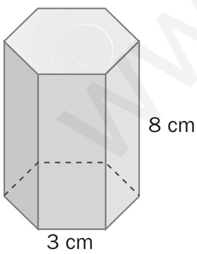
Ángulo central $= 360° : 5 = 72°$ $\qquad 2\alpha = 180° - 72° = 108°$ $\qquad \alpha = 54°$

$$\frac{10}{\text{sen}\, 54°} = \frac{x}{\text{sen}\, 72°} \Rightarrow x = 11{,}76 \text{ cm} \quad a^2 = 10^2 - 5{,}88^2 = 65{,}43 \Rightarrow a = 8{,}09 \text{ cm}$$

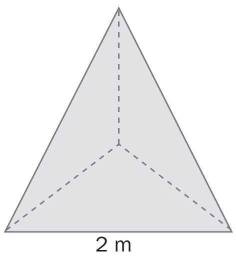
$$A = \frac{11{,}76 \cdot 5 \cdot 8{,}09}{2} = 237{,}85 \text{ cm}^2$$

**7.9** **Calcula el área lateral y el área total de estos cuerpos.**

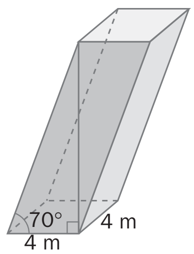
**a)**



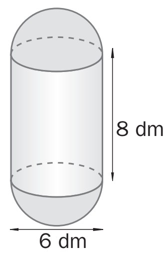

**b)**




**c)**




**d)**




a) $a^2 = 3^2 - 1{,}5^2 = 6{,}75 \Rightarrow a = 2{,}6 \text{ cm} \Rightarrow A_{base} = \dfrac{3 \cdot 6 \cdot 2{,}6}{2} = 23{,}4 \text{ cm}^2$; $A_{lateral} = 3 \cdot 6 \cdot 8 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{total} = 23{,}4 \cdot 2 + 144 = 190{,}8 \text{ cm}^2$

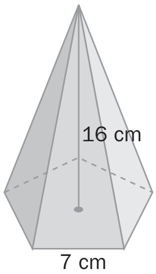
b) $h^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \Rightarrow h = 1{,}73 \text{ m} \Rightarrow A_{triángulo} = \dfrac{2 \cdot 1{,}73}{2} = 1{,}73 \text{ m}^2 \Rightarrow A_{tetraedro} = 4 \cdot 1{,}73 = 6{,}92 \text{ m}^2$

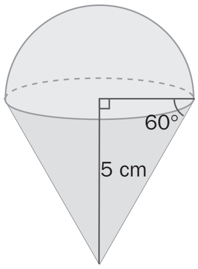
c) $\widehat{A} = 90° - 70° = 20° \Rightarrow \dfrac{4}{\text{sen}\, 20°} = \dfrac{h}{\text{sen}\, 70°} \Rightarrow h = \dfrac{4 \,\text{sen}\, 70°}{\text{sen}\, 20°} = 10{,}99 \text{ m} \Rightarrow$

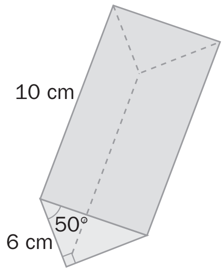
$\Rightarrow A_{lateral} = 4 \cdot 4 \cdot 10{,}99 = 175{,}84 \text{ m}^2 \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 175{,}84 = 207{,}84 \text{ m}^2$

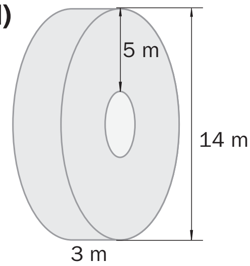
d) $A_{lateral} = 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 = 48\pi \text{ dm}^2$; $A_{2semiesferas} = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi \text{ dm}^2 \Rightarrow A_{total} = 48\pi + 36\pi \Rightarrow A_{total} = 84\pi \text{ dm}^2$

**7.10 Halla el volumen de estos cuerpos.**

a)



b)



c)



d)



a) $\dfrac{7}{\text{sen } 72^\circ} = \dfrac{R}{\text{sen } 54^\circ} \Rightarrow R = 5{,}95 \text{ cm} \Rightarrow a^2 = 5{,}95^2 - 3{,}5^2 = 23{,}15 \Rightarrow a = 4{,}81 \text{ cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\text{base}} = \dfrac{7 \cdot 5 \cdot 4{,}81}{2} = 84{,}18 \text{ cm}^2$ $\qquad V = \dfrac{84{,}18 \cdot 16}{3} = 448{,}96 \text{ cm}^3$

b) $\text{tg } 60^\circ = \dfrac{5}{r} \Rightarrow r = 2{,}89 \text{ cm}$ $\qquad V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} + \dfrac{4}{3}\dfrac{\pi r^3}{2} = \dfrac{\pi 2{,}89^2 5}{3} + \dfrac{4\pi 2{,}89^3}{2} = 94{,}24 \text{ cm}^3$

c) $\text{tg } 50^\circ = \dfrac{b}{6} \Rightarrow b = 7{,}15 \text{ cm}$ $\qquad A_{\text{base}} = \dfrac{6 \cdot 7{,}15}{2} = 21{,}45 \text{ cm}^2 \Rightarrow V = 21{,}45 \cdot 10 = 214{,}5 \text{ cm}^3$

d) $R = 14 : 2 = 7 \text{ m}$ $\qquad r = (14 - 5 \cdot 2) : 2 = 2 \text{ m}$

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi 7^2 3 - \pi 2^2 3 = 135\pi \text{ m}^3 = 423{,}9 \text{ m}^3$$

### RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

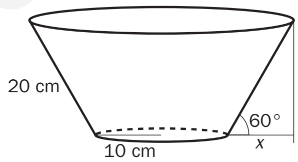
**7.11 Se quiere forrar una maceta con forma de tronco de cono. Si el diámetro de la base mide 20 centímetros y la generatriz, que tiene la misma longitud, forma un ángulo de 60° con el suelo, ¿qué cantidad de papel se necesita?**

$x = 10 \cdot \cos 60^\circ = 5 \text{ cm} \Rightarrow R = 10 + 5 = 15 \text{ cm}$

$A_{\text{lateral}} = \pi(15 + 10) \cdot 20 = 500\pi \text{ cm}^2$

$A_{\text{base}} = \pi 10^2 = 100\pi \text{ cm}^2$

$A_{\text{maceta}} = 500\pi + 100\pi = 600\pi \text{ cm}^2$




**7.12 ¿Qué volumen de tierra se necesita para llenar una maceta de interior que tiene la forma de un tronco de cono si los radios de las bases miden 10 y 20 centímetros, y la generatriz forma un ángulo de 60° con el suelo?**

$h^2 = 20^2 - 10^2 = 300 \Rightarrow h = 17{,}32 \text{ cm}$ $\qquad V = \dfrac{\pi 10^2 \cdot 17{,}32}{3} = 1812{,}83 \text{ cm}^3$

$H^2 = 40^2 - 20^2 = 1200 \Rightarrow H = 34{,}64 \text{ cm}$ $\qquad V = \dfrac{\pi 20^2 \cdot 34{,}64}{3} = 14\,502{,}61 \text{ cm}^3$

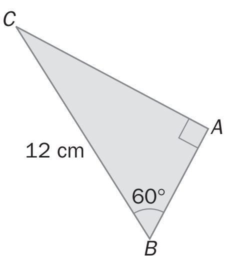
$$V_{\text{tronco}} = 14\,502{,}61 - 1812{,}83 = 12\,689{,}78 \text{ cm}^3$$

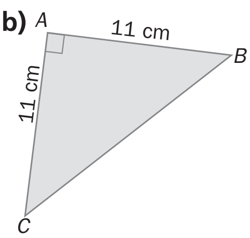
## ACTIVIDADES

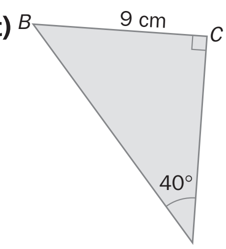
### EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

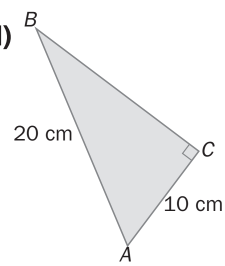
### Resolución de triángulos rectángulos

**7.13 Calcula la medida de los lados y los ángulos que faltan en los siguientes triángulos rectángulos.**

a)



b)



c)



d)


a) $\widehat{C} = 90° - 30° = 60°$ $\quad$ $\text{sen}\, 30° = \frac{c}{12} \Rightarrow c = 6$ cm $\quad$ $\text{sen}\, 60° = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 6\sqrt{3}$ cm $= 10{,}39$ cm

b) $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$ $\quad$ $a^2 = 11^2 + 11^2 \Rightarrow a = 11\sqrt{2}$ cm $= 15{,}56$ cm

c) $\widehat{B} = 90° - 40° = 50°$ $\quad$ $\text{sen}\, 40° = \frac{9}{c} \Rightarrow c = 14$ cm $\Rightarrow \text{tg}\, 50° = \frac{b}{9} \Rightarrow b = 10{,}73$ cm

d) $a^2 = 20^2 - 10^2 = 300 \Rightarrow a = 10\sqrt{3}$ cm $= 17{,}32$ cm $\Rightarrow \text{sen}\, \widehat{B} = \frac{10}{20} \Rightarrow \widehat{B} = 30°; \widehat{A} = 60°$

**7.14 Resuelve los triángulos sabiendo que $\widehat{C}$ es un ángulo recto.**

**a) $\widehat{A} = 55°$, $a = 18$ cm**

**b) $c = 10$ cm, $b = 6$ cm**

**c) $a = 18$ cm, $b = 15$ cm**

a) $\widehat{B} = 90° - 55° = 35°$ $\quad$ $\text{sen}\, 55° = \frac{18}{c} \Rightarrow c = \frac{18}{\text{sen}\, 55°} = 21{,}97$ cm

$b = 21{,}97 \cdot \text{sen}\, 35° = 12{,}6$ cm

b) $a^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow a = 8$ cm $\quad$ $\text{sen}\, \widehat{B} = \frac{6}{10} = 0{,}6$ $\quad$ $\widehat{B} = \text{arcsen}\, 0{,}6 = 36{,}87°$

$\widehat{A} = 90° - 36{,}87° = 53{,}13°$

c) $c^2 = 18^2 + 15^2 = 549 \Rightarrow c = 23{,}43$ cm $\quad$ $\text{sen}\, \widehat{B} = \frac{15}{23{,}43} = 0{,}64$ $\quad$ $\widehat{B} = \text{arcsen}\, 0{,}64 = 39{,}81°$

$\widehat{A} = 90° - 39{,}81° = 50{,}19°$

**7.15 Halla la longitud de la altura de un triángulo equilátero de 12 centímetros de lado.**

$$h^2 = 12^2 - 6^2 \Rightarrow h = \sqrt{108} = 10{,}39 \text{ cm}$$

**7.16 El lado desigual de un triángulo isósceles mide 16 metros, y el ángulo desigual, 80°. ¿Cuál es la medida de la altura sobre este lado?**

$$\text{tg}\, 40° = \frac{8}{h} \Rightarrow h = \frac{8}{\text{tg}\, 40°} = 9{,}53 \text{ m}$$

**7.17 Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 6,4 y 3,6 centímetros. Halla la longitud de los lados.**

$c = 6{,}4 + 3{,}6 = 10$ cm mide la hipotenusa.

$a^2 = m \cdot c \Rightarrow a^2 = 6{,}4 \cdot 10 = 64 \Rightarrow a = 8$ cm

$b^2 = n \cdot c \Rightarrow b^2 = 3{,}6 \cdot 10 = 36 \Rightarrow b = 6$ cm

**7.18 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 centímetros, y la proyección de uno de los catetos sobre ella, 4 centímetros.**
**Resuelve el triángulo.**

$c = m + n \Rightarrow m = 20 - 4 = 16$ cm

$a^2 = m \cdot c \Rightarrow a^2 = 16 \cdot 20 = 320 \Rightarrow a = 17{,}89$ cm

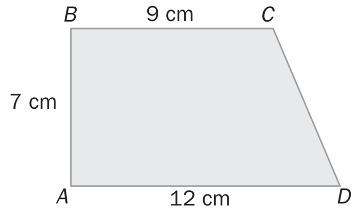
$b^2 = n \cdot c \Rightarrow b^2 = 4 \cdot 20 = 80 \Rightarrow b = 8{,}94$ cm

$$\text{tg}\, \widehat{A} = \frac{17{,}89}{8{,}94} \Rightarrow \widehat{A} = 63{,}45° \Rightarrow \widehat{B} = 90° - 63{,}45° = 26{,}55°$$

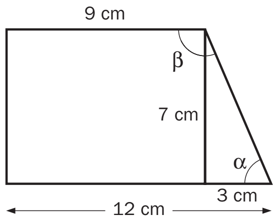
**7.19 La diagonal mayor de un rombo mide 8 centímetros y forma con cada lado contiguo un ángulo de 26°. ¿Cuánto mide el lado del rombo?**

$$\cos 26° = \frac{4}{c} \Rightarrow c = \frac{4}{\cos 26°} = 4{,}45 \text{ cm mide el lado.}$$

**7.20 Halla la medida de los ángulos de este trapecio rectángulo.**




Trazando la altura desde el vértice superior derecho se obtiene un triángulo rectángulo.



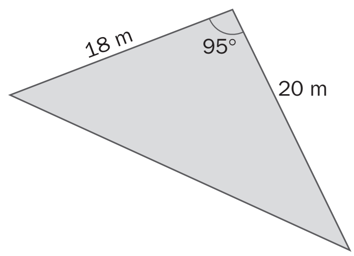

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{7}{3} \Rightarrow \alpha = 66{,}80°$$

$$\beta = 360° - 90° \cdot 2 - 66{,}80° = 113{,}20°$$

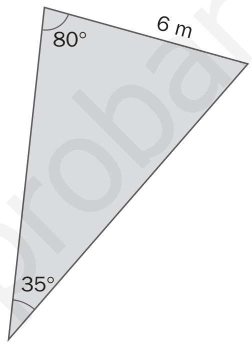
## Resolución de triángulos cualesquiera

**7.21 Resuelve estos triángulos.**

**a)**




**b)**




a) $a^2 = 18^2 + 20^2 - 2 \cdot 18 \cdot 20 \cdot \cos 95° = 786{,}75 \Rightarrow a = 28{,}05$ m

$$\frac{28{,}05}{\text{sen } 95°} = \frac{18}{\text{sen } \widehat{A}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{A} = \frac{18 \cdot \text{sen } 95°}{28{,}05} \Rightarrow \widehat{A} = 39{,}74°$$

$$\widehat{B} = 180° - 95° - 39{,}74° = 45{,}60°$$

b) $\widehat{B} = 180° - 80° - 35° = 65°$

$$\frac{6}{\text{sen } 35°} = \frac{c}{\text{sen } 80°} \Rightarrow c = 6 \cdot \frac{\text{sen } 80°}{\text{sen } 35°} = 10{,}30 \text{ m}$$

$$\frac{6}{\text{sen } 35°} = \frac{b}{\text{sen } 65°} \Rightarrow b = 6 \cdot \frac{\text{sen } 65°}{\text{sen } 35°} = 9{,}48 \text{ m}$$

**7.22 Halla la medida de los ángulos y los lados desconocidos en cada caso.**

**a)** $\widehat{A} = 56°$, $b = 14$ cm, $c = 8$ cm

**b)** $\widehat{B} = 45°$, $\widehat{C} = 75°$, $a = 25$ cm

**c)** $a = 38$ cm, $b = 46$ cm, $c = 22$ cm

**d)** $\widehat{A} = 42°$, $\widehat{C} = 65°$, $b = 14$ cm

a) $a^2 = 8^2 + 14^2 - 2 \cdot 8 \cdot 14 \cdot \cos 56° = 134{,}74 \Rightarrow a = 11{,}61$ cm

$$\frac{11{,}61}{\text{sen } 56°} = \frac{8}{\text{sen } \widehat{B}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \frac{8 \cdot \text{sen } 56°}{11{,}61} \Rightarrow \widehat{B} = 34{,}84° \qquad \widehat{C} = 180° - 56° - 34{,}84° = 89{,}16°$$

b) $\widehat{C} = 180° - 45° - 75° = 60°$

$$\frac{25}{\text{sen } 60°} = \frac{b}{\text{sen } 45°} \Rightarrow b = \frac{25 \cdot \text{sen } 45°}{\text{sen } 60°} = 20{,}41 \text{ cm}$$

$$c^2 = 25^2 + 20{,}41^2 - 2 \cdot 25 \cdot 20{,}41 \cdot \cos 75° = 777{,}44 \Rightarrow c = 27{,}88 \text{ cm}$$

c) $38^2 = 46^2 + 22^2 - 2 \cdot 46 \cdot 22 \cdot \cos \widehat{A} \Rightarrow \cos \widehat{A} = \dfrac{38^2 - 46^2 - 22^2}{-2 \cdot 46 \cdot 22} \Rightarrow \widehat{A} = 55{,}17°$

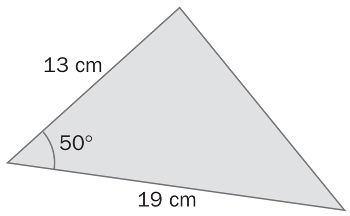
$$\frac{38}{\text{sen } 55{,}17°} = \frac{46}{\text{sen } \widehat{B}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \frac{46 \cdot \text{sen } 55{,}17°}{38} \Rightarrow \widehat{B} = 83{,}54° \quad \widehat{C} = 180° - 55{,}17° - 83{,}54° = 41{,}29°$$

d) $\widehat{B} = 180° - 42° - 65° = 73°$

$$\frac{a}{\text{sen } 42°} = \frac{14}{\text{sen } 73°} \Rightarrow a = \frac{14 \cdot \text{sen } 42°}{\text{sen } 73°} = 9{,}80 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\text{sen } 65°} = \frac{14}{\text{sen } 73°} \Rightarrow c = \frac{14 \cdot \text{sen } 65°}{\text{sen } 73°} = 13{,}27 \text{ cm}$$

**7.23 Resuelve el triángulo. ¿De qué tipo es?**




$c^2 = 19^2 + 13^2 - 2 \cdot 19 \cdot 13 \cdot \cos 50° = 212{,}46 \Rightarrow c = 14{,}58$ cm

Es escaleno.

**7.24 Resuelve los siguientes triángulos.**

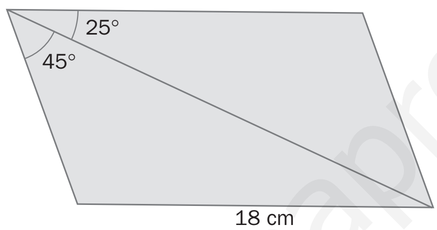
**a) $a = 3$ cm, $c = 2$ cm, $\widehat{C} = 140°$**

**b) $a = 19$ cm, $b = 8$ cm, $\widehat{B} = 62°$**

a) $\dfrac{2}{\text{sen}\,140°} = \dfrac{3}{\text{sen}\,\widehat{A}} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{A} = \dfrac{3 \cdot \text{sen}\,140°}{2} = 0{,}96 \Rightarrow \widehat{A} = 74{,}62°$. No es posible.

b) $\dfrac{8}{\text{sen}\,62°} = \dfrac{19}{\text{sen}\,\widehat{A}} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{A} = \dfrac{19 \cdot \text{sen}\,62°}{8} = 2{,}1$. No es posible.

**7.25 Halla la medida de la diagonal del paralelogramo.**

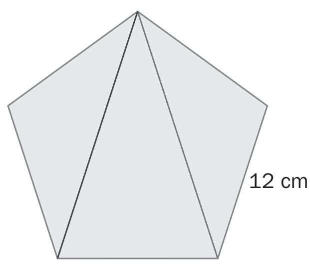



La diagonal divide el paralelogramo en dos triángulos de los que se conocen dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.

El tercer ángulo es $\widehat{C} = 180° - 25° - 95° = 60°$.

Por el teorema del seno: $\dfrac{18}{\text{sen}\,95°} = \dfrac{c}{\text{sen}\,60°} \Rightarrow c = \dfrac{18 \cdot \text{sen}\,60°}{\text{sen}\,95°} = 15{,}65$ cm mide la diagonal.

**7.26 Calcula la medida de las diagonales dibujadas en el pentágono regular de la figura.**




La suma de los ángulos interiores de un pentágono es $180° \cdot 3 = 540°$.

Cada uno de ellos mide: $540° : 5 = 108°$.

En los triángulos de la izquierda o derecha que se obtienen al trazar las diagonales se conocen dos de sus lados, 12 cm, y el ángulo comprendido entre ellos, 108°.

$$d^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 108° = 199 \Rightarrow d = 14{,}11 \text{ cm}$$

## Longitudes y áreas de figuras planas

**7.27 Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo miden 14,4 y 25,6 centímetros. Calcula el área del triángulo.**

Hipotenusa: $c = 14{,}4 + 25{,}6 = 40$ cm

Altura sobre la hipotenusa: $h^2 = m \cdot n = 14{,}4 \cdot 25{,}6 = 368{,}64 \Rightarrow h = 19{,}2$ cm

$$A = \frac{40 \cdot 19{,}2}{2} = 384 \text{ cm}^2$$

**7.28 La diagonal de un rectángulo mide 28,84 decímetros y forma con la base un ángulo de 33° 41′ 24″. Halla su perímetro y su área.**

$33° \, 41' \, 24'' = 33{,}69°$

Si $b$ es la base del rectángulo, y $a$, la altura:

$$\cos 33{,}69° = \frac{b}{28{,}84} \Rightarrow b = 28{,}84 \cdot \cos 33{,}69° = 24 \text{ cm}$$

$$\text{sen}\, 33{,}69° = \frac{a}{28{,}84} \Rightarrow a = 28{,}84 \cdot \text{sen}\, 33{,}69° = 16 \text{ cm}$$

$p = 2 \cdot 24 + 2 \cdot 16 = 80$ cm

$A = 24 \cdot 16 = 384$ cm$^2$

**7.29 El lado de un octógono regular mide 20 centímetros. Calcula la medida de la apotema y el área del octógono.**

La apotema y un radio, junto con la mitad del lado del octógono, forman un triángulo rectángulo.

Un ángulo es la mitad del ángulo central formado por dos radios consecutivos.

Ángulo central $= \dfrac{360°}{8} = 45°$

El ángulo opuesto a la mitad del lado del octógono mide 22,5°.

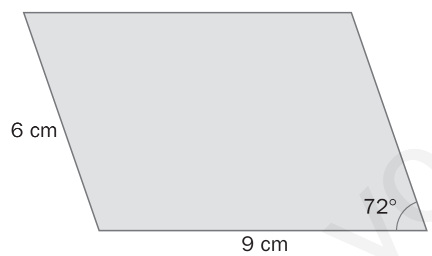
Si $a$ es la apotema, $\text{tg}\, 22{,}5° = \dfrac{10}{a} \Rightarrow a = \dfrac{10}{\text{tg}\, 22{,}5°} = 24{,}14$ cm.

$$A = \frac{8 \cdot 20 \cdot 24{,}14}{2} = 1931{,}2 \text{ cm}^2$$

**7.30 Calcula la longitud de la circunferencia que se traza con un compás cuyos brazos miden 7 centímetros y forman un ángulo de 70°.**

Sea $r$ el radio de la circunferencia: $r^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos 70° = 64{,}48 \Rightarrow r = 8{,}03 \text{ cm} \Rightarrow l = 2\pi r = 50{,}43$ cm

**7.31 Halla el área de este paralelogramo.**

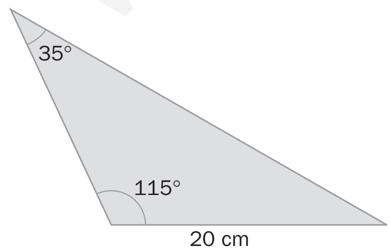



Altura $= h$

$\text{sen}\, 72° = \dfrac{h}{6} \Rightarrow h = 5{,}71$ cm

$A = 9 \cdot 5{,}71 = 51{,}39$ cm$^2$

**7.32 Calcula el perímetro de este triángulo.**




$$\frac{20}{\text{sen}\, 35°} = \frac{c}{\text{sen}\, 115°} \Rightarrow c = \frac{20 \cdot \text{sen}\, 115°}{\text{sen}\, 35°} = 31{,}60 \text{ cm}$$

$\widehat{A} = 180° - 35° - 115° = 30°$

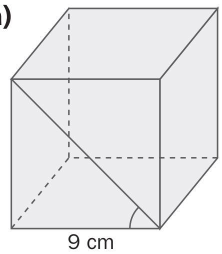
$A^2 = 20^2 + 31{,}60^2 - 2 \cdot 20 \cdot 31{,}6 \cdot \cos 30° = 303{,}9 \Rightarrow a = 17{,}43$ cm

$p = 20 + 17{,}43 + 31{,}60 = 69{,}03$ cm

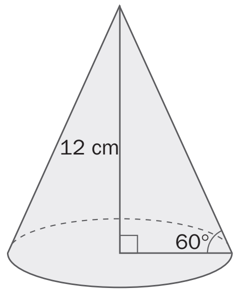
## Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

7.33 **Calcula el área total y el volumen de estos cuerpos geométricos.**

**a)**




**b)**




a) $A_B = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$

Altura: $h = 9 \cdot \text{tg } 60° = 15{,}59$ cm

$A_T = 4 \cdot 9 \cdot 15{,}59 + 2 \cdot 81 = 723{,}24 \text{ cm}^2$

$V = 81 \cdot 15{,}59 = 1262{,}79 \text{ cm}^3$

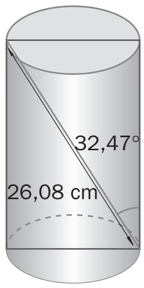
b) El radio: $r = \dfrac{12}{\text{tg } 60°} = 6{,}93$ cm $\qquad A_B = \pi \cdot 6{,}93^2 = 150{,}80 \text{ cm}^2$

La generatriz : $g = \dfrac{12}{\text{sen } 60°} = 13{,}86$ cm

$A_T = 150{,}80 + 2 \cdot \pi \cdot 6{,}93 \cdot 13{,}86 = 753{,}99 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 150{,}8 \cdot 12 = 603{,}2 \text{ cm}^3$

7.34 **Calcula el volumen del cilindro.**

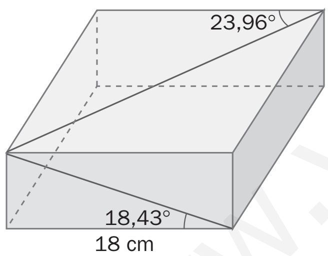



$h = 26{,}08 \cdot \cos 32{,}47° = 22$ cm

Diámetro: $d = 26{,}08 \cdot \text{sen } 32{,}47° = 14 \Rightarrow r = 7$ cm

$V = \pi\, 7^2 \cdot 22 = 3386{,}64 \text{ cm}^3$

7.35 **Halla el área total y el volumen del ortoedro.**




Altura del ortoedro: $h = 18 \cdot \text{tg } 18{,}43° = 6$ cm

Lado de la base: $18 \cdot \text{tg } 23{,}96° = 8$ cm

$A_T = 2 \cdot 18 \cdot 8 + 2 \cdot 18 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 8 = 600 \text{ cm}^2$

$V = 18 \cdot 8 \cdot 6 = 864 \text{ cm}^3$

### CUESTIONES PARA ACLARARSE

7.36 **Si las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo tienen la misma medida, ¿cómo es el triángulo? ¿Cuánto miden sus ángulos agudos?**

Isósceles. Sus ángulos agudos miden 45°.

7.37 **Responde a las siguientes preguntas.**

**a) ¿Qué elementos de un triángulo rectángulo hay que conocer para resolverlo?**

**b) ¿Y de un triángulo cualquiera?**

a) Dos: dos lados, o un ángulo agudo y un lado.

b) Tres: los tres lados, o dos lados y un ángulo, o dos ángulos y un lado.

7.38 **¿Se pueden utilizar los teoremas del seno y del coseno para resolver un triángulo rectángulo? Razona tu respuesta.**

Es más rápido utilizar las razones trigonométricas, pero también se pueden utilizar esos teoremas.

**7.39 Al unir los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrado se obtienen dos rectángulos, y al trazar una diagonal, dos triángulos.**
**¿Cuál es la relación entre las áreas de los rectángulos y los triángulos obtenidos?**

Son iguales.

En los dos casos, el área es $\frac{a^2}{2}$.

**7.40 Al resolver un triángulo, los resultados son los siguientes: $a = 30$ cm, $b = 42$ cm, $c = 23$ cm, $\widehat{A} = 58°$, $\widehat{B} = 35°$ y $\widehat{C} = 87°$.**
**¿Es correcta la solución?**

No, porque al lado *b*, que es el mayor, le debe corresponder el ángulo mayor, y no es así.

**7.41 De un triángulo se conocen los tres lados y un ángulo. Si se quiere calcular uno de los ángulos desconocidos, ¿se puede utilizar el teorema del seno? ¿Y el del coseno?**
**En caso de poder utilizar los dos, ¿cuál es el más conveniente?**

Se pueden usar los dos teoremas. Es más conveniente el del coseno porque al ser un ángulo de entre 0° y 180°, si resulta positivo, es del primer cuadrante, y si resulta negativo, es del segundo, de modo que solo hay un ángulo en cada uno de los casos.

Si por el contrario se utiliza el teorema del seno, solo se obtiene un valor del seno positivo que puede corresponder a un ángulo del primer cuadrante o del segundo y, por tanto, no queda totalmente determinado.

**7.42 ¿Se puede resolver un triángulo conociendo solo sus ángulos? Razona tu respuesta.**

No, porque los triángulos semejantes tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales, y si no se conoce uno de los lados, es imposible determinar de cuál de todos los triángulos semejantes se trata.

**7.43 Explica si es posible resolver un triángulo rectángulo conociendo la altura sobre la hipotenusa y la proyección de uno de los catetos sobre la misma.**

Con esos datos se puede calcular la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa y esta, al sumar las dos proyecciones.

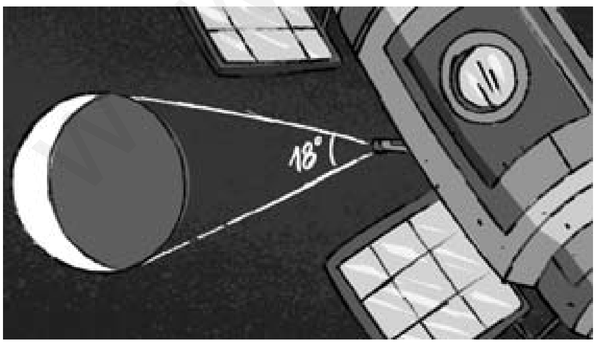
Luego, se calculan los catetos con el teorema del cateto, y con los tres lados se pueden hallar los ángulos del triángulo.

Por tanto, sí es posible resolverlo.



## PROBLEMAS PARA APLICAR

**7.44 El radio de la Tierra mide, aproximadamente, 6378 kilómetros. Desde un satélite se dirigen las visuales a dos puntos como muestra el dibujo.**




**¿A qué distancia del centro se encuentra el satélite? ¿Y de los puntos determinados por las visuales?**

Se forma un triángulo isósceles, de modo que la medida del lado desigual es el diámetro de la Tierra:

La distancia a la Tierra es la altura de ese triángulo.

$$h = \frac{6378}{\text{tg}\ 9°} = 40\,269{,}11 \text{ km del centro}$$

$$d = \frac{6378}{\text{sen}\ 9°} = 40\,711{,}07 \text{ km de los puntos determinados por las visuales}$$

**7.45** **Juan ha decidido donar sus muebles. Como tiene una mesa muy grande y vive en un cuarto piso, antes de trasladarla quiere comprobar si la puede bajar en el ascensor una vez quitadas las patas.**


**¿Tendrá que utilizar las escaleras o podrá bajar la mesa en el ascensor?**

Las medidas de la mesa son: $a = 144{,}22 \cdot \cos 33{,}69° = 120$ cm un lado.

$b = 144{,}22 \cdot \operatorname{sen} 33{,}69° = 80$ cm el otro lado.

Se puede bajar en el ascensor.

**7.46** **Se invierten 6 segundos en la observación de un avión que sobrevuela un punto de la Tierra. En ese intervalo de tiempo, el avión ha cambiado ligeramente de posición.**

**Si el avión se observa perpendicularmente a una altura de 1350 metros y lleva una velocidad de 600 kilómetros por hora, ¿qué ángulo diferencia las dos visuales del observador?**

La distancia entre las dos posiciones del avión es: $s = 600$ km/h $\cdot$ 6 seg $= \dfrac{600\,000}{3600}$ m/seg $\cdot$ 6 seg $= 1000$ m.

El ángulo que diferencia las visuales es $\alpha$: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{1350} \Rightarrow \alpha = 2'32{,}79''$.

**7.47** **Cuando se hace una fotografía con una cámara compacta se produce lo que se denomina paralaje: la imagen que captura el visor no coincide con la del objetivo porque no están situados a la misma distancia.**

**Calcula el ángulo *a* que mide la paralaje.**


$$\operatorname{sen} a = \frac{17{,}5}{2000} = 0{,}00875 \Rightarrow a = 30'4{,}84''$$

7.48 **Una balda se va a sujetar con unas piezas que tienen forma de triángulo rectángulo para colocar un objeto pesado.**

**Al situarlas en la pared se observa que ha habido un error y que las piezas no tienen ningún ángulo recto.**

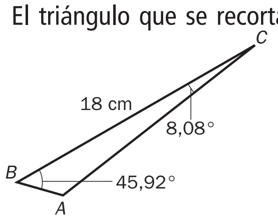

**Si el lado de 22 centímetros es el que sujetará la balda, ¿qué dimensiones tendrá el triángulo que hay que cortar para que se obtenga el ángulo recto necesario?**

$$\frac{22}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{18}{\operatorname{sen} 36°} \Rightarrow \operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{22 \cdot \operatorname{sen} 36°}{18} \Rightarrow \widehat{A} = 45{,}92°$$

$$\widehat{C} = 180° - 36° - 45{,}92° = 98{,}08°$$

Hay que cortar 8,08° del ángulo $\widehat{C}$.

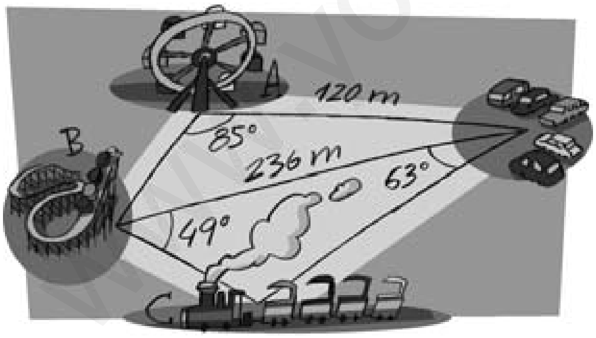
El triángulo que se recorta es:




$$\widehat{A} = 180° - 8{,}08° - 45{,}92° = 126°$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen} 8{,}08°} = \frac{18}{\operatorname{sen} 126°} = \frac{b}{\operatorname{sen} 45{,}92°} \Rightarrow c = 3{,}13 \text{ cm} \qquad b = 15{,}98 \text{ cm}$$

7.49 **Para conocer la distancia entre varios puntos se realiza una triangulación, esto es, se unen los puntos de modo que formen triángulos no solapados.**




**Calcula las distancias que faltan en el dibujo.**

$$\frac{236}{\operatorname{sen} 85°} = \frac{120}{\operatorname{sen}\widehat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{120 \cdot \operatorname{sen} 85°}{236} \Rightarrow \widehat{B} = 30{,}53°$$

$$\widehat{D} = 180° - 85° - 30{,}53° = 64{,}47°$$

$$\frac{236}{\operatorname{sen} 85°} = \frac{AB}{\operatorname{sen} 64{,}47°} \Rightarrow AB = \frac{236 \cdot \operatorname{sen} 64{,}47°}{\operatorname{sen} 85°} = 213{,}67 \text{ m}$$

$$\widehat{C} = 180° - 49° - 63° = 68°$$

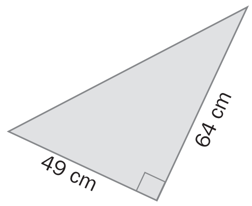
$$\frac{236}{\operatorname{sen} 68°} = \frac{BC}{\operatorname{sen} 63°} \Rightarrow BC = \frac{236 \cdot \operatorname{sen} 63°}{\operatorname{sen} 68°} = 226{,}79 \text{ m}$$

$$\frac{236}{\operatorname{sen} 68°} = \frac{DC}{\operatorname{sen} 49°} \Rightarrow DC = \frac{236 \cdot \operatorname{sen} 49°}{\operatorname{sen} 68°} = 192{,}1 \text{ m}$$

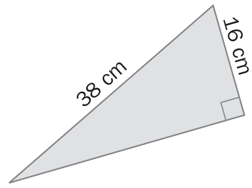
## Resolución de triángulos

**7.50 Calcula las medidas de los ángulos y de los lados desconocidos de estos triángulos.**

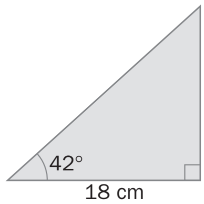
**a)**



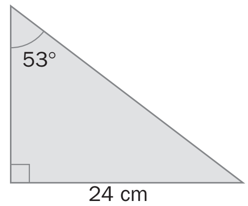

**b)**




**c)**




**d)**




a) $\operatorname{tg}\widehat{B} = \dfrac{64}{49} \Rightarrow \widehat{B} = 52{,}56°$

$\widehat{A} = 90° - 52{,}56° = 37{,}44°$

$c = \sqrt{49^2 + 64^2} = 80{,}60$ cm

b) $\cos\widehat{A} = \dfrac{16}{38} \Rightarrow \widehat{A} = 65{,}09°$

$\widehat{B} = 180° - 90° - 65{,}09° = 24{,}91°$

$a = \sqrt{38^2 - 16^2} = 34{,}46$ cm

c) $c = \dfrac{18}{\cos 42°} = 24{,}22$ cm

$\widehat{B} = 180° - 90° - 42° = 48°$

$b = 24{,}22 \cdot \operatorname{sen} 42° = 16{,}20$ cm

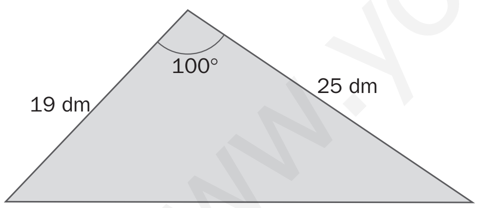
d) $c = \dfrac{24}{\operatorname{sen} 53°} = 30{,}05$ cm

$\widehat{B} = 180° - 90° - 53° = 37°$

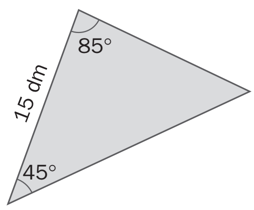
$a = \sqrt{30{,}05^2 - 24^2} = 18{,}08$ cm

**7.51 Resuelve estos triángulos.**

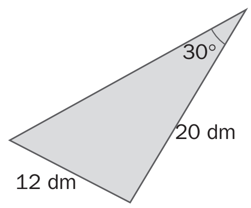
**a)**




**b)**




**c)**




a) $a^2 = 19^2 + 25^2 - 2 \cdot 19 \cdot 25 \cdot \cos 100° = 1150{,}97 \Rightarrow a = 33{,}93$ dm

$\dfrac{19}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \dfrac{33{,}93}{\operatorname{sen} 100°} \Rightarrow \operatorname{sen}\widehat{B} = \dfrac{19 \cdot \operatorname{sen} 100°}{33{,}93} \Rightarrow \widehat{B} = 33{,}47°$

$\widehat{C} = 180° - 100° - 33{,}47° = 46{,}53°$

b) $\widehat{C} = 180° - 85° - 45° = 50°$

$\dfrac{15}{\operatorname{sen} 50°} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} 85°} \Rightarrow b = \dfrac{15 \cdot \operatorname{sen} 85°}{\operatorname{sen} 50°} \Rightarrow b = 19{,}51$ dm

$\dfrac{15}{\operatorname{sen} 50°} = \dfrac{a}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow a = \dfrac{15 \cdot \operatorname{sen} 45°}{\operatorname{sen} 50°} \Rightarrow a = 13{,}85$ dm

c) $\dfrac{20}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \dfrac{12}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow \operatorname{sen}\widehat{B} = \dfrac{20 \cdot \operatorname{sen} 30°}{12°} \Rightarrow \widehat{B} = 56{,}44°$

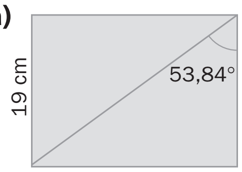
$\widehat{C} = 180° - 30° - 56{,}44° = 93{,}56°$

$\dfrac{12}{\operatorname{sen} 30°} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} 93{,}56°} \Rightarrow c = \dfrac{12 \cdot \operatorname{sen} 93{,}56°}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow c = 23{,}95$ dm

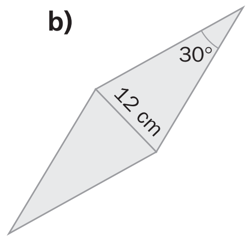
## Longitudes y áreas de figuras planas

**7.52 Calcula el perímetro y el área de estas figuras.**

**a)**




**b)**




a) $b = 19 \cdot \text{tg}\, 53{,}84° = 26$ cm

$p = 2 \cdot 26 + 2 \cdot 19 = 90$ cm

$A = 26 \cdot 19 = 494$ cm$^2$

b) Lado del rombo: $l = \dfrac{6}{\text{sen}\, 15°} = 23{,}18$ cm

Diagonal mayor: $\dfrac{D}{2} = \dfrac{6}{\text{tg}\, 15°} = 22{,}39$ cm $\Rightarrow D = 44{,}78$ cm

$p = 4 \cdot 23{,}18 = 92{,}72$ cm

$A = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{44{,}78 \cdot 12}{2} = 268{,}68$ cm$^2$

**7.53 Halla el área y el perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 20 centímetros, y la proyección de uno de los catetos sobre ella, 9,6 centímetros.**

El cateto cuya proyección es 9,6, $b$: $b^2 = 9{,}6 \cdot 20 \Rightarrow b = 13{,}86$ cm

La proyección del otro cateto sobre la hipotenusa, $m$: $m = 20 - 9{,}6 = 10{,}4$ cm

El cateto, $c$: $c^2 = 10{,}4 \cdot 20 \Rightarrow c = 14{,}42$ cm

$p = 14{,}42 + 13{,}86 + 20 = 48{,}28$ cm

$A = \dfrac{13{,}86 \cdot 14{,}42}{2} = 99{,}93$ cm$^2$

## Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

**7.54 La generatriz de un cono mide 10 decímetros y el ángulo que forma esta con la altura del cono es de 36°. Calcula el área total y el volumen del cono.**

El radio, $r = 10 \cdot \text{sen}\, 36° = 5{,}88$ dm

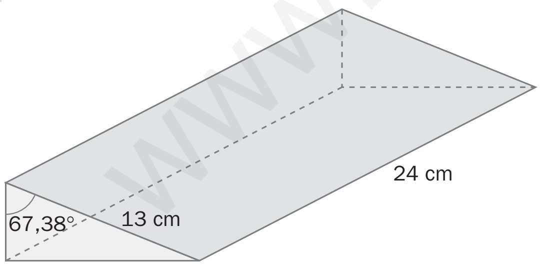
Altura, $h = 10 \cdot \cos 36° = 8{,}09$ dm

$A_L = \pi \cdot 5{,}88 \cdot 10 = 184{,}63$ dm$^2$

$A_T = \pi \cdot 5{,}88^2 + 184{,}63 = 293{,}19$ dm$^2$

$V = \dfrac{\pi \cdot 5{,}88^2 \cdot 8{,}09}{3} = 292{,}76$ dm$^3$

**7.55 Calcula el volumen del prisma.**




$b = 13 \cdot \text{sen}\, 67{,}38° = 12$ cm

$c = 13 \cdot \cos 67{,}38° = 5$ cm

$V = \dfrac{12 \cdot 5}{2} \cdot 24 = 720$ cm$^3$

**AMPLIACIÓN**

**7.56 Resuelve este triángulo.**


Si $H$ es el punto de corte de la altura con la hipotenusa,

$HB = 33{,}33 \cdot \text{tg}\, 53{,}13° = 44{,}44$ dm.

$a = CB = \dfrac{33{,}33}{\cos\, 53{,}13°} = 55{,}55$ dm

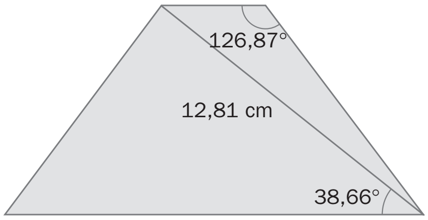
$\widehat{A} = 90° - 36{,}87° = 53{,}13°$

$c = \sqrt{41{,}66^2 + 55{,}55^2} = 69{,}44$ dm

$\widehat{B} = 90° - 53{,}13° = 36{,}87°$

$b = \dfrac{33{,}33}{\text{sen}\, 53{,}13°} = 41{,}66$ dm

**7.57 Halla la medida de los lados de este trapecio isósceles.**




$\widehat{A} = \widehat{B} = 126{,}87°$

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360°$. Como $\widehat{A} = \widehat{B}$ y $\widehat{D} = \widehat{C}$, entonces $\widehat{D} = \widehat{C} = \dfrac{360° - 2 \cdot 126{,}87°}{2} = 53{,}13°$

En el triángulo $ABC$, $\widehat{C} = 53{,}13° - 38{,}66° = 14{,}47°$ y $\widehat{A} = 180° - 126{,}87° - 14{,}47° = 38{,}66°$

Por el teorema del seno, $\dfrac{12{,}81}{\text{sen}\,126{,}87°} = \dfrac{AB}{\text{sen}\,14{,}47°} \Rightarrow AB = \dfrac{12{,}81 \cdot \text{sen}\,14{,}47°}{\text{sen}\,126{,}87°} \Rightarrow AB = 4$ cm

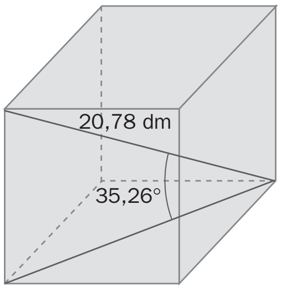
$$\frac{12{,}81}{\text{sen}\,126{,}87°} = \frac{BC}{\text{sen}\,38{,}66°} \Rightarrow BC = \frac{12{,}81 \cdot \text{sen}\,38{,}66°}{\text{sen}\,126{,}87°} \Rightarrow BC = 10 \text{ cm} = AD$$

En el triángulo $ACD$, $\widehat{A} = 180° - 53{,}13° - 38{,}66° = 88{,}21°$

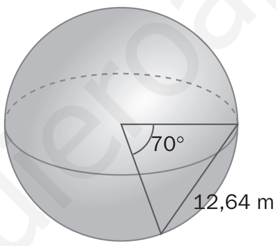
Por el teorema del seno, $\dfrac{12{,}81}{\text{sen}\,53{,}13°} = \dfrac{DC}{\text{sen}\,88{,}21°} \Rightarrow DC = \dfrac{12{,}81 \cdot \text{sen}\,88{,}21°}{\text{sen}\,53{,}23°} \Rightarrow DC = 16$ cm

**7.58 Calcula el área y el volumen de estos cuerpos geométricos.**

**a)**




**b)**




a) El lado del cubo forma con la diagonal de la base un ángulo de 90°. Por tanto, la diagonal del cubo es la hipotenusa del triángulo rectángulo que forman las dos diagonales y el lado.
   Si $l$ es la medida del lado, $l = 20{,}78 \cdot \text{sen}\,35{,}26° = 12$ dm.
   $V = 12^3 = 1728 \text{ dm}^3$

b) Los lados desconocidos del triángulo son los radios de la esfera, $R$.
   Por el teorema del coseno,
   $12{,}64^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 70° \Rightarrow 159{,}77 = 2R^2 - 0{,}68R^2 \Rightarrow R^2 = 121{,}04 \Rightarrow R = 11$ m

$$A = 4 \cdot \pi \cdot 11^2 = 1520{,}53 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 11^3 = 5575{,}28 \text{ m}^3$$

**7.59 Unos módulos para guardar ropa debajo de la cama tienen la base con forma de sector circular. La amplitud de la misma es de 80° y su radio mide 60 centímetros.**
**Si la altura de los módulos es de 20 centímetros, ¿qué capacidad tienen?**

Si la base fuera un círculo completo, la figura sería un cilindro, de modo que es una parte de él.

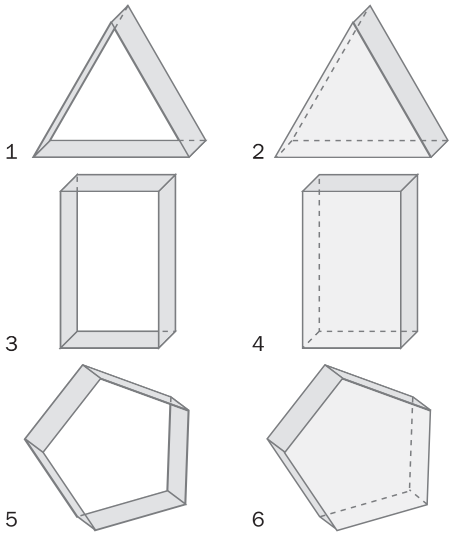
$$A_{\text{sector}} = \frac{\pi \cdot 60^2 \cdot 80°}{360°} = 2512 \text{ cm}^2$$

$$V = 2512 \cdot 20 = 50\,240 \text{ cm}^3$$

**7.60 Característica de Euler**

**Para cada una de las siguientes figuras calcula el número $E = C + V - A$, siendo $C$ el número de caras, $V$ el número de vértices y $A$ el número de aristas.**

**¿Qué propiedad observas?**




1: $E = C + V - A = 3 + 6 - 9 = 0$

2: $E = C + V - A = 5 + 6 - 9 = 2$

3: $E = C + V - A = 4 + 8 - 12 = 0$

4: $E = C + V - A = 6 + 8 - 12 = 2$

5: $E = C + V - A = 5 + 10 - 15 = 0$

6: $E = C + V - A = 7 + 10 - 15 = 2$

Las figuras con un agujero tienen $E = 0$; las que carecen de agujero tienen $E = 2$.

**7.61 Conservar el frío**

**Una empresa está diseñando un tipo de conducto formado por un prisma hexagonal recubierto por un envoltorio de forma cilíndrica de material aislante capaz de conservar el frío.**


**El resultado es un prisma metálico, de base un hexágono regular, inscrito en un cilindro de material aislante.**

**La empresa cuenta con 10 metros cuadrados de plancha metálica para fabricar una cierta longitud del prisma que forma el conducto.**

**a) Halla la relación entre las áreas laterales del prisma y del cilindro. ¿Depende de la altura?**

**b) Calcula la superficie de material aislante que deberá adquirir la empresa para recubrir la pieza metálica construida.**

a) El lado de la base del prisma mide $r$.

Para una longitud $h$ del conducto:

Área lateral del prisma hexagonal: $A_{L_1} = 6 \cdot r \cdot h$

Área lateral del cilindro: $A_{L_2} = 2\pi r \cdot h$

Relación entre las áreas laterales: $\frac{A_{L_1}}{A_{L_2}} = \frac{6 \cdot r \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot h} = \frac{3}{\pi}$, que no depende de $h$.

b) $\frac{3}{\pi} = \frac{10}{S} \Rightarrow S = 10{,}47\ \text{m}^2$ de material aislante.

**7.A1 Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 5 y 8 centímetros.**
**a) Calcula la altura sobre la hipotenusa.**
**b) Resuelve el triángulo.**

a) $h^2 = 5 \cdot 8 = 40 \Rightarrow h = 6{,}32$ cm

$a = 5 + 8 = 13$ cm

$b^2 = 5 \cdot 13 = 65 \Rightarrow b = 8{,}06$ cm

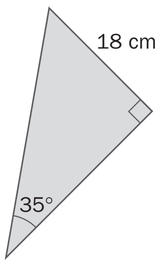
$c^2 = 8 \cdot 13 = 104 \Rightarrow c = 10{,}20$ cm

b) $\text{sen}\,\widehat{B} = \dfrac{8{,}06}{13} = 0{,}62 \Rightarrow \widehat{B} = \text{arcsen}\,0{,}62 = 38{,}32°$

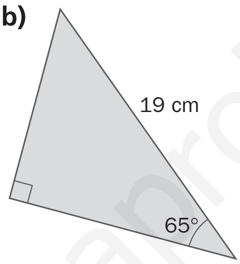
$\widehat{C} = 90° - 38{,}32° = 51{,}68°$

**7.A2 Calcula la medida de los lados y de los ángulos desconocidos.**

**a)**




**b)**




a) $\widehat{B} = 55°$ $\quad \text{sen}\,35° = \dfrac{18}{a} \Rightarrow a = \dfrac{18}{\text{sen}\,35°} = 31{,}38$ cm

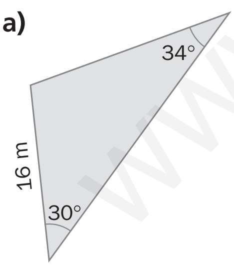
$\text{tg}\,35° = \dfrac{18}{b} \Rightarrow b = \dfrac{18}{\text{tg}\,35°} = 25{,}71$ cm

b) $\widehat{B} = 25°$ $\quad \text{sen}\,65° = \dfrac{a}{19} \Rightarrow a = 19 \cdot \text{sen}\,65° = 17{,}22$ cm

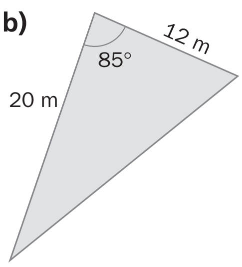
$\cos 65° = \dfrac{b}{19} \Rightarrow b = 19 \cdot \cos\,65° = 8{,}03$ cm

**7.A3 Resuelve los siguientes triángulos.**

**a)**




**b)**




a) $\widehat{A} = 180° - 30° - 34° = 116°$

$\dfrac{16}{\text{sen}\,34°} = \dfrac{b}{\text{sen}\,30°} \Rightarrow b = \dfrac{16 \cdot \text{sen}\,30°}{\text{sen}\,34°} \Rightarrow b = 14{,}31$ m

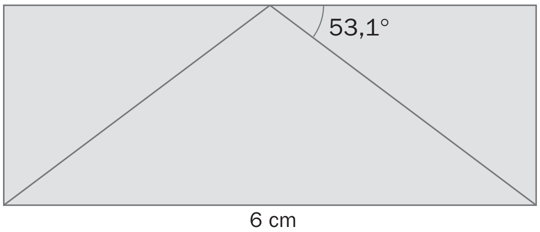
$\dfrac{16}{\text{sen}\,34°} = \dfrac{a}{\text{sen}\,116°} \Rightarrow a = \dfrac{16 \cdot \text{sen}\,116°}{\text{sen}\,34°} \Rightarrow a = 25{,}72$ m

b) $a^2 = 12^2 + 20^2 - 2 \cdot 12 \cdot 20 \cdot \cos 85° = 502{,}16 \Rightarrow a = 22{,}41$ m

$\dfrac{20}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \dfrac{22{,}41}{\text{sen}\,85°} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{B} = \dfrac{20 \cdot \text{sen}\,85°}{22{,}41} \Rightarrow \widehat{B} = 62{,}76°$

$\widehat{C} = 180° - 85° - 62{,}76° = 32{,}24°$

**7.A4 En un rectángulo se han unido los vértices de la base con el punto medio del lado opuesto formando tres triángulos.**




**Calcula el perímetro y el área del rectángulo y del triángulo sombreado.**

El lado contiguo a 53,13° es la mitad de la base del rectángulo, 3 cm.

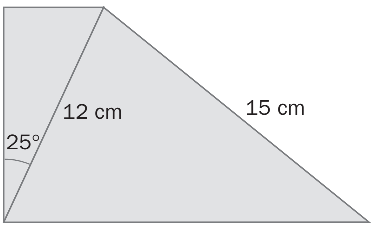
La altura: $a = 3 \cdot \text{tg}\, 53{,}13 = 4$ cm.

$$p_{\text{rectángulo}} = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 20 \text{ cm}$$

$$A_{\text{rectángulo}} = 6 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{triángulo}} = 24 : 2 = 12 \text{ cm}^2$$

**7.A5 Halla la medida de los lados desconocidos de este trapecio rectángulo.**




$$h = 5 \cdot \text{tg}\, 25° = 2{,}33 \text{ cm}$$

En el triángulo de la derecha, el ángulo inferior izquierdo es: $\widehat{A} = 90° - 25° = 65°$.

Por el teorema del seno, $\dfrac{15}{\text{sen}\, 65°} = \dfrac{12}{\text{sen}\, \widehat{B}} \Rightarrow \widehat{B} = 46{,}47°$

$\widehat{C} = 180° - 65° - 46{,}47° = 68{,}53°$

$$\frac{15}{\text{sen}\, 65°} = \frac{c}{\text{sen}\, 68{,}53°} \Rightarrow c = 15{,}4 \text{ cm}$$

**7.A6 La generatriz de un cono mide 26 centímetros y forma un ángulo de 67,38° con el radio de la base. Halla el área total y el volumen del cono.**

El radio, $r = 26 \cdot \cos 67{,}38° = 10$ cm

Altura, $h = 26 \cdot \text{sen}\, 67{,}38° = 24$ cm

$$A_L = \pi \cdot 10 \cdot 26 = 816{,}81 \text{ cm}^2$$

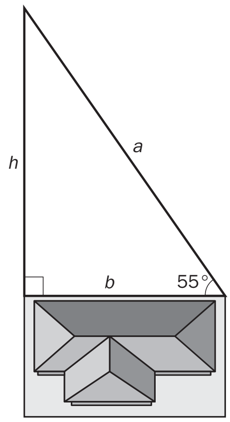
$$A_T = \pi \cdot 10^2 + 816{,}81 = 1130{,}97 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 24}{3} = 2512 \text{ cm}^3$$

MATETIEMPOS

## La parcela de mi abuelo

**Mi padre ha heredado una parcela triangular de 400 metros cuadrados. Uno de sus lados está limitado por la casa de un vecino y los otros dos forman con ella ángulos de 55° y 90° de amplitud, respectivamente. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?**




El terreno forma un triángulo rectángulo. Si llamo $b$ a uno de los catetos y $h$ al otro me queda el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{b\cdot h}{2}=400\\ \text{tg}\,55°=\dfrac{h}{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}h=\dfrac{800}{b}\\ \text{tg}\,55°=\dfrac{\frac{800}{b}}{b}\end{array}\right\}\text{tg}\,55°=\frac{800}{b^2}\Rightarrow b^2=\frac{800}{\text{tg}\,55°}\Rightarrow b^2=560{,}17\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}b=23{,}67\text{ m}\\ h=33{,}8\text{ m}\end{array}\right.$$

$$a=\sqrt{23{,}67^2+33{,}8^2}=41{,}26\text{ m}$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

8.1 **Las coordenadas de los vértices de un rectángulo son *A*(2, 2); *B*(2, 5); *C*(6, 5), y *D*(6, 2).**
**Halla las coordenadas y representa los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DA}$. ¿Qué relación existe entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$? ¿Y entre $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{DA}$?**

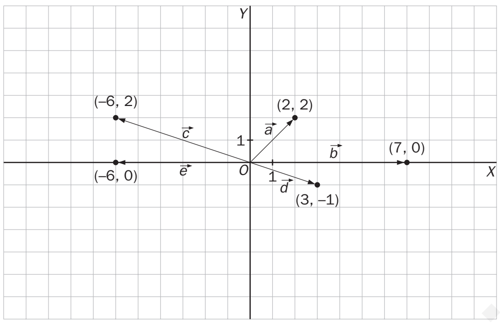
$\overrightarrow{AB} = (0, 3)$ $\quad \overrightarrow{BC} = (4, 0)$ $\quad \overrightarrow{CD} = (0, -3)$ $\quad \overrightarrow{DA} = (-4, 0)$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$

8.2 **Las coordenadas de un punto *A* son (3, 1) y las del vector $\overrightarrow{AB}$ son (3, 4). ¿Cuáles son las coordenadas del punto *B*? Determina otro punto *C* de modo que el vector $\overrightarrow{AC}$ tenga el mismo módulo y la misma dirección que el vector $\overrightarrow{AB}$, pero distinto sentido.**

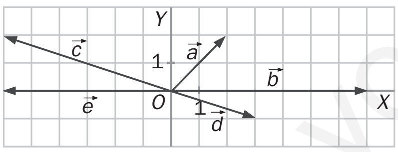
$B = (3 + 3, 4 + 1) = (6, 5)$ $\quad \overrightarrow{AC} = (-3, -4)$ $\quad C = (-3 + 3, -4 + 1) = (0, -3)$

8.3 **Representa los vectores $\vec{a} = (2, 2)$; $\vec{b} = (7, 0)$; $\vec{c} = (-6, 2)$; $\vec{d} = (3, -1)$, y $\vec{e} = (-6, 0)$ con origen en el origen de coordenadas. ¿Qué coordenadas tienen los extremos de cada vector?**




Las coordenadas de los extremos de cada vector coinciden con las coordenadas de los vectores.

8.4 **Halla las coordenadas de los vectores de la figura.**

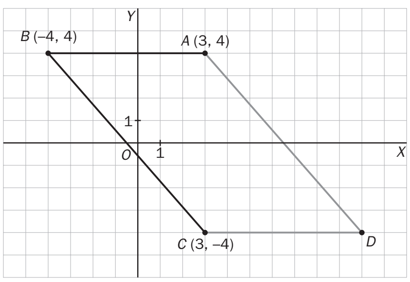



$\vec{a} = (2, 2)$
$\vec{b} = (7, 0)$
$\vec{c} = (-6, 2)$
$\vec{d} = (3, -1)$
$\vec{e} = (-6, 0)$

8.5 **Dados los vectores $\vec{u} = (6, 5)$; $\vec{v} = (-3, 0)$ y $\vec{w} = (2, -4)$, calcula:**
**a) $2\vec{u}$**
**b) $3\vec{v} - \vec{w}$**
**c) $5(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w}$**

a) $2\vec{u} = 2 \cdot (6, 5) = (12, 10)$
b) $3\vec{v} - \vec{w} = 3 \cdot (-3, 0) - (2, -4) = (-9, 0) - (2, -4) = (-11, 4)$
c) $5(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w} = 5 \cdot [(6, 5) - (-3, 0)] + (2, -4) = 5 \cdot (9, 5) + (2, -4) = (45, 25) + (2, -4) = (47, 21)$

8.6 **Los vértices de un paralelogramo son *A*(3, 4); *B*(−4, 4); *C*(3, −4), y *D*. ¿Cuáles son las coordenadas de *D*?**




*D*(10, −4)

**8.7 Dados los vectores $\vec{a} = (-7, 2)$; $\vec{b} = (10, -4)$; $\vec{c} = (14, -4)$, y $\vec{d} = (-19, 2)$, determina si son linealmente dependientes:**

**a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$**

**b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{d}$**

**c) $\vec{a}$ y $\vec{c}$**

**d) $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$**

a) $\vec{a} = \lambda\vec{b} \Rightarrow (-7, 2) = \lambda(10, -4)$ no tiene solución; por tanto, son linealmente independientes.

b) $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{d} \Rightarrow (-7, 2) = \alpha(10, -4) + \beta(-19, 2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -7 = 10\alpha - 19\beta \\ 2 = -4\alpha + 2\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = \frac{-3}{7} \\ \beta = \frac{1}{7} \end{array} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{d}$ son linealmente dependientes.

c) $(-2) \cdot \vec{a} = \vec{c} \Rightarrow$ linealmente dependientes.

d) $\vec{b} = \alpha\vec{c} + \beta\vec{d} \Rightarrow (10, -4) = \alpha(14, -4) + \beta(-19, 2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10 = 14\alpha - 19\beta \\ -4 = -4\alpha + 2\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = \frac{7}{6} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{array} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{d}$ son linealmente dependientes.

**8.8 Indica las coordenadas de los siguientes vectores y represéntalos gráficamente.**

**a) $\vec{a} = -7\vec{i} + 2\vec{j}$**

**b) $\vec{b} = 10\vec{i} - 4\vec{j}$**

**c) $\vec{c} = 14\vec{i} - 4\vec{j}$**

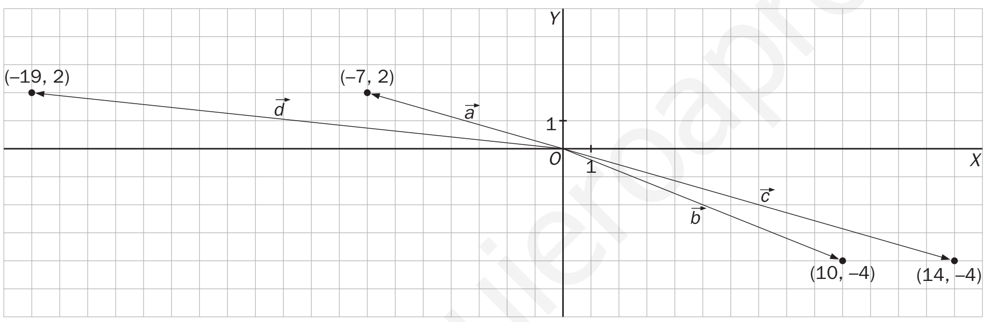
**d) $\vec{d} = -19\vec{i} + 2\vec{j}$**

a) $\vec{a} = -7\vec{i} + 2\vec{j} = -7(1, 0) + 2(0, 1) = (-7, 2)$

b) $\vec{b} = 10\vec{i} - 4\vec{j} = (10, -4)$

c) $\vec{c} = 14\vec{i} - 4\vec{j} = (14, -4)$

d) $\vec{d} = -19\vec{i} + 2\vec{j} = (-19, 2)$




**8.9 Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2)$; $\vec{v} = (3, -4)$; $\vec{w} = (2, -3)$ y $\vec{z} = (4, -6)$ realiza estas operaciones.**

**a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$**

**b) $\vec{w} \cdot \vec{z}$**

**c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2) \cdot (3, -4) = 3 - 8 = -5$

b) $\vec{w} \cdot \vec{z} = (2, -3) \cdot (4, -6) = 8 + 18 = 26$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = [(1, 2) + (3, -4)] \cdot (2, -3) = (4, -2) \cdot (2, -3) = 8 + 6 = 14$

**8.10 Los módulos de dos vectores son 6 y 10. Halla el producto escalar de ambos vectores si el ángulo que forman es de 60°.**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 6 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$$

**8.11 Calcula el módulo de estos vectores.**

**a) $\vec{a} = (3, -1)$**

**b) $\vec{b} = (-2, -7)$**

**c) $\vec{c} = (-4, 5)$**

**d) $\vec{d} = (6, 0)$**

a) $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

b) $|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}$

c) $|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

c) $|\vec{d}| = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$

**8.12 Halla el módulo del vector de origen $A(1, 1)$ y de extremo $B(5, 4)$.**

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 1, 4 - 1) = (4, 3) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

**8.13 Dados los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ y $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{j}$, calcula:**

**a) $\vec{u}$**

**b) $\vec{v}$**

**c) Ángulo ($\vec{u}$, $\vec{v}$)**

a) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

c) $\text{Ángulo}\,(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{(2, 3) \cdot (1, 5)}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \dfrac{2 + 15}{13\sqrt{2}} = \dfrac{17}{13\sqrt{2}} = \dfrac{17\sqrt{2}}{26}$

**8.14 ¿Qué ángulo forman dos vectores opuestos? ¿Qué ángulo forman dos vectores equipolentes? Razona tu respuesta con un dibujo.**

Dos vectores opuestos forman un ángulo de 180°.

Dos vectores equipolentes forman un ángulo de 0°.

**8.15 Dados los vectores $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{v} = (12, 5)$, halla el ángulo que forman estas parejas.**

**a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ b) $-\vec{u}$ y $-\vec{v}$ c) $-\vec{u}$ y $\vec{v}$ d) $\vec{u}$ y $-\vec{v}$**

a) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{(4, 3) \cdot (12, 5)}{\sqrt{4^2 + 3^2}\sqrt{12^2 + 5^2}} = \dfrac{48 + 15}{5 \cdot 13} = \dfrac{63}{65};$

$\text{ángulo}\,(\vec{u}, \vec{v}) = \text{arcos}\,\dfrac{63}{65} = 14°\ 15'$

b) $\cos(-\vec{u}, -\vec{v}) = \dfrac{(-4, -3) \cdot (-12, -5)}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}\sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}} = \dfrac{48 + 15}{5 \cdot 13} = \dfrac{63}{65};$

$\text{ángulo}\,(-\vec{u}, -\vec{v}) = \text{arcos}\,\dfrac{63}{65} = 14°\ 15'$

c) $\cos(-\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{(-4, -3) \cdot (12, 5)}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}\sqrt{12^2 + 5^2}} = \dfrac{-48 - 15}{5 \cdot 13} = \dfrac{-63}{65};$

$\text{ángulo}\,(-\vec{u}, \vec{v}) = \text{arcos} = \dfrac{-63}{65} = 165°\ 45'$

d) $\cos(\vec{u}, -\vec{v}) = \dfrac{(4, 3) \cdot (-12, -5)}{\sqrt{4^2 + 3^2}\sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}} = \dfrac{-48 - 15}{5 \cdot 13} = \dfrac{-63}{65};$

$\text{ángulo}\,(\vec{u}, -\vec{v}) = \text{arcos}\, -\dfrac{63}{54} = 165°\ 45'$

**8.16 Los vértices de un triángulo son $A(1, 2)$; $B(6, 2)$, y $C(4, 6)$. Calcula las longitudes de sus lados.**

$l_1 = d(A, B) = \sqrt{(6 - 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{25 + 0} = 5$ u.l.

$l_2 = d(B, C) = \sqrt{(4 - 6)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ u.l.

$l_3 = d(C, A) = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ u.l.

**8.17 Dado el punto $A(3, 2)$, halla las coordenadas de otro punto B sabiendo que se encuentra en el eje de ordenadas y que dista 5 unidades de $A$.**

$B$ será de la forma $(0, y)$.

$5 = d(A, B) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (2 - y)^2} = \sqrt{9 + (2 - y)^2} \Rightarrow 25 = 9 + (2 - y)^2 \Rightarrow 25 = 9 + 4 - 4y + y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-12)}}{2} = \dfrac{4 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 6 \\ -2 \end{array} \right.$

Hay dos soluciones: $B(0, 6)$ ó $B(0, -2)$.

**8.18 Las coordenadas del punto medio del segmento $AB$ son (3, 5). Halla las del punto $B$ siendo $A(2, 9)$.**

$$(3, 5) = \left(\frac{2 + a}{2}, \frac{9 + b}{2}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6 = 2 + a \\ 10 = 9 + b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 4 \\ b = 1 \end{array} \Rightarrow B(4, 1)$$

**8.19 Sean $A(2, 3)$ y $B(-8, 7)$ dos puntos del plano. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento $AB$.**

$$M = \left(\frac{2-8}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = (-3, 5)$$

**8.20 Halla la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta $r$ que pasa por $A(-2, 4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$.**

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-2, 4) + t(3, -1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \end{array}\right\}$

**8.21 Determina todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 5)$ y lleva la dirección $\vec{v} = (4, 1)$.**

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-2, 5) + t(4, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -2 + 4t \\ y = 5 + t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-5}{1}$

$x + 2 = 4y - 20 \Rightarrow x - 4y + 22 = 0$; ecuación general

Ecuación punto-pendiente: $y - 5 = \dfrac{1}{4}(x + 2)$

$y - 5 = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{11}{2}$; ecuación explícita

**8.22 Halla la ecuación punto-pendiente y la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(2, 8)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 9)$.**

Ecuación punto-pendiente: $y - 8 = -9(x - 2)$

$y - 8 = -9x + 18 \Rightarrow y = -9x + 26$; ecuación explícita.

**8.23 Indica un punto y un vector de estas rectas.**

**a)** $(x, y) = (2, 4) + t(5, -3)$

**b)** $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{2}$

**c)** $\left.\begin{array}{l} x = -1 + 9t \\ y = -8 - 6t \end{array}\right\}$

**d)** $2x - 3y + 8 = 0$

a) $P(2, 4)$ $\vec{v}(5, -3)$

b) $P(3, -2)$ $\vec{v}(3, 2)$

c) $P(-1, -8)$ $\vec{v}(9, -6)$

d) $P(-4, 0)$ $\vec{v}(3, 2)$

**8.24 Halla todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene como pendiente $m = -7$.**

Ecuación punto-pendiente: $y = -7x$

Ecuación explícita: $y = -7x$

Ecuación vectorial: $(x, y) = t(1, -7)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -7t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-7}$

Ecuación general: $7x + y = 0$

**8.25 Halla la ecuación en forma continua de la recta que pasa por los puntos $P(-4, 0)$ y $Q(0, 2)$.**

$PQ(4, 2)$; ecuación continua: $\dfrac{x+4}{4} = \dfrac{y}{2}$

**8.26 Halla todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por los puntos *P*(3, 0) y *Q*(0, −3).**

Ecuación segmentaria: $\frac{x}{3} + \frac{y}{-3} = 1$

$\overrightarrow{PQ}(-3, -3)$; ecuación continua: $\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{-3}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (3, 0) + t(-3, -3)$

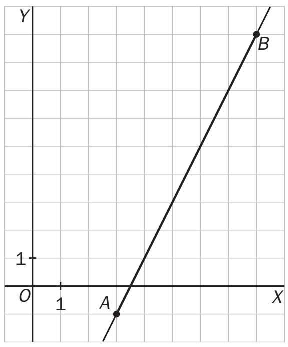
Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{r} x = 3 - 3t \\ y = -3t \end{array}\right\}$

Ecuación general: $x - y - 3 = 0$

Ecuación punto-pendiente: $y = x - 3$

Ecuación explícita: $y = x - 3$

**8.27 Representa gráficamente la recta que pasa por los puntos *A*(3, −1) y *B*(8, 9), y halla todas las formas de su ecuación.**




$\overrightarrow{AB}(5, 10)$. Ecuación continua: $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{10}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (3, -1) + t(5, 10)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{r} x = 3 + 5t \\ y = -1 + 10t \end{array}\right\}$ $10x - 30 = 5y + 5$

Ecuación general: $10x - 5y - 35 = 0$; $2x - y - 7 = 0$

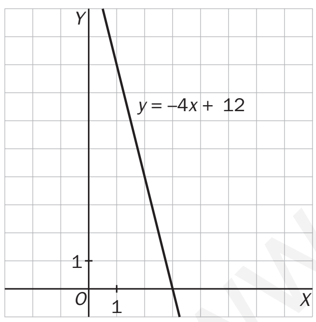
Ecuación punto-pendiente: $y + 1 = 2(x - 3)$

Ecuación explícita: $y = 2x - 7$

Puntos de corte con los ejes: (3,5; 0) (0, −7)

Ecuación segmentaria: $\frac{x}{3{,}5} + \frac{y}{-7} = 1$

**8.28 Representa la recta de ecuación $y = -4x + 12$, y halla las restantes formas de su ecuación.**




Ecuación explícita: $y = -4x + 12$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 12) + t(1, -4)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{r} x = t \\ y = 12 - 4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\frac{x}{1} = \frac{y-12}{-4}$

Ecuación general: $4x + y - 12 = 0$

Ecuación punto-pendiente: $y - 12 = -4x$

Puntos de corte con los ejes: (3, 0) (0, 12)

Ecuación segmentaria: $\frac{x}{3} + \frac{y}{12} = 1$

**8.29 Dadas la recta r, determinada por los puntos *A*(2, 3) y *B*(4, 7), y la recta *s*, determinada por los puntos C(2, 7) y *D*(7, 8), razona si *r* y *s* son paralelas o secantes.**

$\overrightarrow{AB}(2, 4)$. Ecuación continua: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{4} \Rightarrow 4x - 8 = 2y - 6 \Rightarrow$ ecuación general: $4x - 2y - 2 = 0$

$\overrightarrow{CD}(5, 1)$. Ecuación continua: $\frac{x-2}{5} = \frac{y-7}{1} \Rightarrow x - 2 = 5y - 35 \Rightarrow$ ecuación general: $x - 5y + 33 = 0$

$$\frac{4}{1} \neq \frac{-2}{-5} \Rightarrow r \text{ y } s \text{ son secantes.}$$

**8.30 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto *A*(1, 2) y es paralela a la recta de ecuación $5x + 3y + 7 = 0$.**

Si son paralelas, sus pendientes coincidirán: $m = -\frac{5}{3}$; además conocemos un punto de la recta.

$$y - 2 = -\frac{5}{3}(x - 1)$$

**8.31 Calcula el ángulo obtuso que forman los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ del cuadrilátero anterior.**

$A(4, 1)$, $B(1, 5)$, $C(9, 11)$, $D(4 + 8, 6 + 1) = (12, 7)$ $\qquad \overrightarrow{AC}(5, 10)$ $\overrightarrow{BD}(11, 2)$

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{(5, 10) \cdot (11, 2)}{\sqrt{5^2 + 10^2}\sqrt{11^2 + 2^2}} = \frac{55 + 20}{125} = \frac{75}{125} = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{arcos}\ \frac{3}{5} = 53°\ 7'\ 48''$$

Ángulo obtuso $= 180° - 53°\ 7'\ 48'' = 126°\ 52'\ 12''$

**8.32 Halla las coordenadas del punto medio $M$ del lado $\overrightarrow{BC}$ del cuadrilátero anterior, y calcula el ángulo agudo formado por los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AM}$.**

$$M = \left(\frac{1 + 9}{2}, \frac{5 + 11}{2}\right) = (5, 8) \qquad \overrightarrow{AC}(5,10),\ \overrightarrow{AM}(1, 7)$$

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}) = \frac{(5, 10) \cdot (1, 7)}{\sqrt{5^2 + 10^2}\sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{5 + 70}{\sqrt{125}\sqrt{50}} = \frac{75}{25\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \text{Ángulo: } 18°\ 26'\ 6''$$

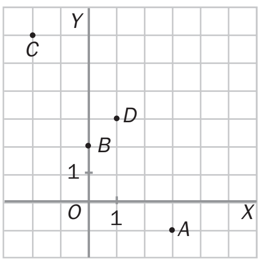


# ACTIVIDADES

## EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

### Vectores y operaciones

**8.33 Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$. ¿Qué relación existe entre ellos?**

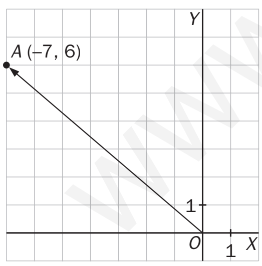



a) $\overrightarrow{AB} = (0, 2) - (3, -1) = (-3, 3)$

b) $\overrightarrow{CD} = (1, 3) - (-2, 6) = (3, -3)$

Los vectores son opuestos.

**8.34 Representa el vector de posición del punto $A(-7, 6)$. ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?**




Las coordenadas de $\overrightarrow{OA}$ son las mismas que las de $A$, $(-7, 6)$.

**8.35 Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son (5, 3). Siendo $B(-1, 4)$, calcula las coordenadas del punto $A$.**

$$(5, 3) = (-1 - x, 4 - y) \Rightarrow x = -1 - 5 = -6;\ y = 4 - 3 = 1 \Rightarrow A = (-6, 1)$$

**8.36 Opera:**

**a) $(2, -1) - (4, 3)$**
**b) $6(-3, 1) + (10, -2)$**
**c) $2(-4, 0) - 3(-1, 2)$**
**d) $4(1, -1) + 2(3, 0)$**
**e) $(3, -1) - 5(1, -2)$**
**f) $(9, 6) - 2(4, 1)$**

a) $(2, -1) - (4, 3) = (-2, -4)$
b) $6 \cdot (-3, 1) + (10, -2) = (-8, 4)$
c) $2(-4, 0) - 3(-1, 2) = (-5, -6)$
d) $4 \cdot (1, -1) + 2 \cdot (3, 0) = (10, -4)$
e) $(3, -1) - 5(1, -2) = (-2, 9)$
f) $(9, 6) - 2(4, 1) = (1, 4)$

**8.37 Dados los vectores $\vec{u} = (5, -3)$; $\vec{v} = (-1, 4)$, y $\vec{w} = (2, 2)$, calcula:**

**a) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w})$**

**b) $3\vec{u} - 2(\vec{w} - \vec{v})$**

**c) $\frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u})$**

**d) $5\vec{w} - 3\vec{v} + \vec{u}$**

**e) $2(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u}$**

**f) $\frac{3}{4}\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$**

a) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = (5, -3) - [(-1, 4) + (2, 2)] = (5, -3) - (1, 6) = (4, -9)$

b) $3\vec{u} - 2(\vec{w} - \vec{v}) = 3 \cdot (5, -3) - 2 \cdot [(2, 2) - (-1, 4)] = (15, -9) - 2 \cdot (3, -2) = (9, -5)$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{2}[(-1, 4) - (5, -3)] = \left(-3, \frac{7}{2}\right)$

d) $5\vec{w} - 3\vec{v} + \vec{u} = 5 \cdot (2, 2) - 3 \cdot (-1, 4) + (5, -3) = (10, 10) - (-3, 12) + (5, -3) = (18, -5)$

e) $2(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u} = 2 \cdot [(2, 2) + (-1, 4)] - (5, -3) = 2 \cdot (1, 6) - (5, -3) = (-3, 15)$

f) $\frac{3}{4}\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} = \frac{3}{4}(5, -3) - 2(-1, 4) + (2, 2) = \left(\frac{15}{4}, \frac{-9}{4}\right) - (-2, 8) + (2, 2) = \left(\frac{15}{4}, \frac{-9}{4}\right) + (4, -6) = \left(\frac{31}{4}, \frac{-33}{4}\right)$

**8.38 Calcula el valor de $x$ e $y$ en las siguientes igualdades.**

**a) $(5, -9) = 3(x, y) - 2(x, 0)$**

**b) $(x, -4) = 2(y, 5) + (3, x)$**

**c) $(2y, 0) = (x, y) - 2(x, 5)$**

**d) $(3x, -y) = 2(1, -x) + (y, 9)$**

a) $(5, -9) = (3x - 2x, 3y) \Rightarrow 5 = x, -9 = 3y$ ; $x = 5, y = -3$

b) $(x, -4) = (2y + 3, 10 + x) \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ -4 = 10 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -14 \\ 2y = -17;\ y = -\frac{17}{2} \end{matrix}$

c) $(2y, 0) = (x - 2x, y - 10) \Rightarrow \begin{cases} 2y = -x \\ 0 = y - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = 10 \\ x = -20 \end{matrix}$

d) $(3x, -y) = (2 + y, -2x + 9) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2 + y \\ -y = -2x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -7 \\ y = -23 \end{matrix}$

## Combinación lineal de vectores

**8.39 Considera el vector $\vec{z} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, siendo $\vec{i} = (1, 0)$ y $\vec{j} = (0, 1)$. ¿Es $\vec{z}$ combinación lineal de $\vec{i}$ y de $\vec{j}$? ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?**

$\vec{z} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, es combinación lineal de $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

Coordenadas cartesianas $(-4, 3)$

**8.40 Sabiendo que $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w}$, expresa:**

**a) $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$.**

**b) $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

a) $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{w}$

b) $\vec{w} = \frac{2}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{u}$

**8.41 Estudia si los vectores $\vec{u} = (2, -4)$; $\vec{v} = (3, 1)$, y $\vec{w} = (11, -15)$ son linealmente dependientes.**

$(11, -15) = a(2, -4) + b(3, 1) \Rightarrow \begin{cases} 11 = 2a + 3b \\ -15 = -4a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11 = 2a + 3b \\ 45 = 12a - 3b \end{cases}$

$56 = 14a \Rightarrow a = 4$

$b = -15 + 4 \cdot 4 = 1$

Son linealmente dependientes.

**8.42 Calcula las coordenadas cartesianas de los vectores $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ y $\vec{v} = 6\vec{a} - 4\vec{b}$ sabiendo que:**

**$\vec{a} = -3\vec{i} + 6\vec{j}$ $\quad$ $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$**

a) $\vec{u} = 2(-3\vec{i} + 6\vec{j}) - (5\vec{i} + 2\vec{j}) = -11\vec{i} + 10\vec{j}$. Sus coordenadas cartesianas son $(-11, 10)$.

b) $\vec{v} = 6(-3\vec{i} + 6\vec{j}) - 4(5\vec{i} + 2\vec{j}) = -38\vec{i} + 28\vec{j}$. Sus coordenadas cartesianas son $(-38, 28)$.

## Producto escalar

**8.43 Dados los vectores $\vec{u} = (-6, 8)$ y $\vec{v} = (1, 7)$, calcula:**

**a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $(-2\vec{u}) \cdot \vec{v}$ c) $|\vec{u}|$**

a) $(-6, 8) \cdot (1, 7) = -6 + 56 = 50$

b) $(12, -16) \cdot (1, 7) = 12 - 112 = -100$

c) $\sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$

**8.44 Estudia si los vectores de las siguientes parejas son perpendiculares entre sí.**

**a) $\vec{u} = (6, 9)$ y $\vec{v} = (-3, 2)$**

**b) $\vec{u} = (2, 4)$ y $\vec{v} = (-8, -4)$**

**c) $\vec{u} = (-3, 6)$ y $\vec{v} = (10, 5)$**

**d) $\vec{u} = (-1, -2)$ y $\vec{v} = (4, 2)$**

a) $(6, 9) \cdot (-3, 2) = -18 + 18 = 0$. Sí son perpendiculares.

b) $(2, 4) \cdot (-8, -4) = -16 - 16 = -32$. No son perpendiculares.

c) $(-3, 6) \cdot (10, 5) = -30 + 30 = 0$. Sí son perpendiculares.

d) $(-1, -2) \cdot (4, 2) = -4 - 4 = -8$. No son perpendiculares.

**8.45 Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en cada caso.**

**a) $\vec{u} = \left(2, \sqrt{3}\right)$ y $\vec{v} = \left(\sqrt{3}, 1\right)$**

**b) $\vec{u} = (-6, 10)$ y $\vec{v} = (3, -5)$**

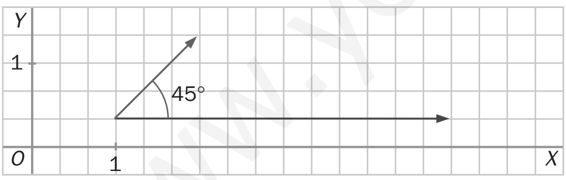
**c) $\vec{u} = \left(2, \sqrt{2}\right)$ y $\vec{v} = \left(-2, \sqrt{2}\right)$**

a) $\cos\alpha = \dfrac{\left(2, \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3}, 1\right)}{\sqrt{4 + 3} \cdot \sqrt{3 + 1}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \alpha = 10{,}89° = 10°\ 53'\ 36''$

b) $\cos\alpha = \dfrac{(-6, 10) \cdot (3, -5)}{\sqrt{36 + 100} \cdot \sqrt{9 + 25}} = \dfrac{-68}{\sqrt{4624}} = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\left(2, \sqrt{2}\right) \cdot \left(-2, \sqrt{2}\right)}{\sqrt{4 + 2} \cdot \sqrt{4 + 2}} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 109{,}47° = 109°\ 28'\ 16''$

**8.46 Halla el producto escalar de los vectores de la figura.**




$|\vec{u}| = 4$

$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4\sqrt{2}\cos 45° = 4$

**8.47 Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en cada uno de los siguientes casos.**

**a) $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3}$ b) $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 8$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 16\sqrt{2}$**

a) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2 \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{16\sqrt{2}}{4 \cdot 8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$

**8.48 Siendo $\vec{u} = (4, x)$, halla el valor de $x$ en cada una de las siguientes situaciones.**

**a) Si el módulo de $\vec{u}$ mide 20 unidades.**

**b) Si el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v} = (3, -5)$ es igual a 2.**

a) $\sqrt{16 + x^2} = 20 \Rightarrow 16 + x^2 = 400 \Rightarrow x^2 = 384 \Rightarrow x = \sqrt{384} = 8\sqrt{6}$

b) $(4, x) \cdot (3, -5) = 2 \Rightarrow 12 - 5x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{10}{5} = 2$

**8.49 Calcula el valor de $a$ para que los vectores $\vec{u} = (a, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 5)$ sean perpendiculares.**

$(a, 3) \cdot (-1, 5) = 0 \Rightarrow -a + 15 = 0 \Rightarrow a = 15$

**8.50 Determina un vector cuyo módulo mida $\sqrt{10}$ unidades y que sea perpendicular a $\vec{v} = (6, -2)$.**

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) \cdot (6, -2) = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}6x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}y = 3x \\ x^2 + (3x)^2 = 10 \rightarrow 10x^2 = 10 \rightarrow x = \pm 1;\ y = \pm 3\end{array}$$

Vectores: (1, 3) (−1, −3)

**8.51 Calcula la distancia entre los puntos:**
**a) $A(4, -2)$ y $B(0, 9)$**
**b) $C(-1, 10)$ y $D(8, -5)$**

a) $d(A, B) = \sqrt{(0 - 4)^2 + (9 + 2)^2} = \sqrt{137}$

b) $d(C, D) = \sqrt{(8 + 1)^2 + (-5 - 10)^2} = \sqrt{306} = 3\sqrt{34}$

**8.52 Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo de vértices $A(2, 1)$; $B(2, 5)$ y $C(-2, 3)$.**

$M_{AB} = \left(\frac{2 + 2}{2}, \frac{1 + 5}{2}\right) = (2, 3)$ $\quad M_{BC} = \left(\frac{2 - 2}{2}, \frac{5 + 3}{2}\right) = (0, 4)$ $\quad M_{CA} = \left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{3 + 1}{2}\right) = (0, 2)$

## Ecuaciones de la recta

**8.53 Determina un punto por el que pasan y un vector director de cada una de las siguientes rectas.**

**a) $\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 4}{5}$**

**b) $4x - y = 0$**

**c) $\left.\begin{array}{l}x = 2 - t \\ y = 5 + 3t\end{array}\right\}$**

**d) $(x, y) = (4, 0) + t(2, -6)$**

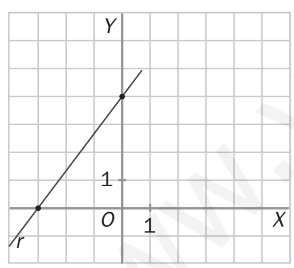
a) $A(3, -4)$; $\vec{v} = (-2, 5)$

b) $A(1, 4)$; $\vec{v} = (1, 4)$

c) $A(2, 5)$; $\vec{v} = (-1, 3)$

d) $A(4, 0)$; $\vec{v} = (2, -6)$

**8.54 Halla todas las formas de la ecuación de la recta de la figura.**




Ecuación segmentaria: $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$

Ecuación continua: $\frac{x + 3}{3} = \frac{y}{4}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-3, 0) + t(3, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l}x = -3 + 3t \\ y = 4t\end{array}\right\}$

Ecuación general: $4x - 3y + 12 = 0$

Ecuación punto-pendiente: $y = \frac{4}{3}(x + 3)$

Ecuación explícita: $y = \frac{4}{3}x + 4$

$P(-3, 0)$ $\quad Q(0, 4)$ $\quad \overrightarrow{PQ}(3, 4)$

**8.55 Halla la pendiente de la recta $3x + 2y - 6 = 0$.**

$$m = -\frac{3}{2}$$

**8.56 Escribe la ecuación segmentaria de la recta que pasa por los puntos $A(5, 0)$ y $B(0, 2)$.**

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$$

**8.57 Expresa en forma continua la recta $y = 2x + 1$.**

$$P(0, 1);\ \vec{v} = (1, 2) \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y - 1}{2}$$

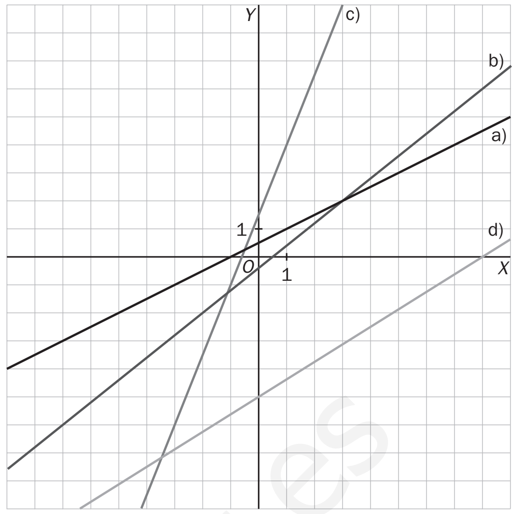
**8.58** **Halla la pendiente y un punto por el que pasa cada una de las siguientes rectas. Represéntalas gráficamente.**

**a)** $\dfrac{x+1}{2} = y$

**b)** $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{-4}$

**c)** $5x - 2y + 3 = 0$

**d)** $\dfrac{x}{8} - \dfrac{y}{5} = 1$




a) $A(-1, 0)$ $\quad \vec{v} = (2, 1) \quad m = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{-4} \Rightarrow A(3, 2);\ \vec{v} = (5, -4) \quad m = \dfrac{-4}{5}$

c) $x = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = 4$

$\Rightarrow A(1, 4)\ ;\ \vec{v} = (2, 5) \quad m = \dfrac{5}{2}$

d) $A(0, -5);\ \vec{v} = (8, 5) \quad m = \dfrac{5}{8}$

## Posiciones relativas

**8.59** **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas y, si son secantes, halla su punto de corte.**

**a)** $r$: $2x - 5y + 7 = 0$ $\quad$ $s$: $x - 2y - 2 = 0$

**b)** $r$: $6x + 4y - 12 = 0$ $\quad$ $s$: $3x + 2y - 6 = 0$

**c)** $r$: $x - 5y + 3 = 0$ $\quad$ $s$: $3x - 15y + 8 = 0$

a) $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-5}{-2} \Rightarrow$ Son secantes.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 5y + 7 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - 5y + 7 = 0 \\ -2x + 4y + 4 = 0 \\ \hline -y + 11 = 0 \Rightarrow y = 11 \\ x = 2 \cdot 11 + 2 = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Punto de corte } (24, 11)$$

b) $\dfrac{6}{3} = \dfrac{4}{2} = \dfrac{-12}{-6} \Rightarrow$ Son coincidentes.

c) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{-5}{-15} \neq \dfrac{3}{8} \Rightarrow$ Son paralelas.

**8.60** **Se consideran las rectas $r$: $y = x - 3$ y $s$, determinada por los puntos $A(7, 5)$ y $B(-4, 1)$. ¿Cuál es su posición relativa?**

$r$: $x - y + 3 = 0$

$s$: $\dfrac{x-7}{-4-7} = \dfrac{y-5}{1-5} \Rightarrow -4x + 28 = -11y + 55 \Rightarrow 4x - 11y + 27 = 0$

$\dfrac{1}{4} \neq \dfrac{-1}{-11} \Rightarrow$ Son secantes.

**8.61** **Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $A(1, 3)$ y tiene la misma pendiente que la recta $y = 4x + 9$.**

$m = 4 \qquad y - 3 = 4 \cdot (x - 1)$

**8.62** **Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$ y es paralela a la que tiene por ecuación $7x - 14y + 3 = 0$.**

$m = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2} \qquad y - 4 = \dfrac{1}{2} \cdot (x + 2) \ \Rightarrow\ y = \dfrac{1}{2}x + 5$

**8.63 Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de *r*: $8x - 5y + 2 = 0$ y *s*: $2x + y - 4 = 0$, y por el punto $A(0, 3)$.**

$$\left.\begin{array}{r} 8x - 5y + 2 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 4 - 2x$$

$8x - 5 \cdot (4 - 2x) + 2 = 0 \Rightarrow 8x - 20 + 10x + 2 = 0 \Rightarrow 18x = 18 \Rightarrow x = 1; y = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow A(1, 2)$

La recta es $\dfrac{x - 1}{0 - 1} = \dfrac{y - 2}{3 - 2} \Rightarrow \dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y - 2}{1}$.

**8.64 Estudia si las rectas**

***r*: $3x + y - 5 = 0$**

***s*: $2x - y = 0$**

***t*: $x + 4y - 9 = 0$**

**se cortan en un mismo punto y, en caso afirmativo, calcula sus coordenadas.**

Se halla primero el punto de corte de dos de ellas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y - 5 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}$$

El punto de corte de *r* y *s* es (1, 2).

Ahora se comprueba si ese punto pertenece a *t*: $1 + 4 \cdot 2 - 9 = 0$.

Por tanto, las tres rectas se cortan en el mismo punto: (1, 2).

## CUESTIONES PARA ACLARARSE

**8.65 Siendo $A(1, 4)$ y $B(0, 6)$, ¿el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector libre $\vec{u} = (-1, 2)$?**

$\overrightarrow{AB} = (0, 6) - (1, 4) = (-1, 2)$

Sí lo es, porque tienen las mismas coordenadas.

**8.66 ¿Son equipolentes dos vectores opuestos? Razona tu respuesta.**

No, porque tienen distinto sentido.

**8.67 Clasifica las siguientes operaciones según sea su resultado un número o un vector.**

**a) $k(\vec{u} \cdot \vec{v})$** **b) $k(\vec{u} + \vec{v})$** **c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$** **d) $k + (\vec{u} \cdot \vec{v})$**

a) Número b) Vector c) Número d) Número

**8.68 ¿Cuál es el producto escalar de dos vectores de igual módulo y dirección, pero que tienen sentido contrario?**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 180° = -|\vec{a}|^2$

**8.69 Si el producto escalar de dos vectores de módulo 1 es igual a 1, ¿cómo son su dirección y su sentido?**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha = 1 \cdot 1 \cdot \cos \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0°$

Su dirección y su sentido son iguales

**8.70 ¿Es posible que el producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea igual a 12 si $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 4$? ¿Por qué?**

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = 3 \cdot 4 \cdot \cos \alpha = 12$ si $\cos \alpha = 1$; es decir, si tienen la misma dirección y sentido.

**8.71 a) Razona si es posible determinar la ecuación de una recta sabiendo que pasa por el punto $A(0, 6)$ y que su ordenada en el origen es 6.**

**b) ¿Y si la recta pasa por el punto *A* y por el origen de coordenadas?**

a) No, porque que la ordenada en el origen sea 6 quiere decir que pasa por el punto de primera coordenada 0 y de segunda coordenada 6, que es el punto *A*, y, por tanto, solo se sabe un punto de la recta y, para que quede determinada, se necesita al menos otro.

b) En este caso, sí es posible determinarla, porque se conocen dos puntos por los que pasa.

**8.72 Relaciona en tu cuaderno las rectas dadas por las siguientes ecuaciones con los elementos que les corresponden.**

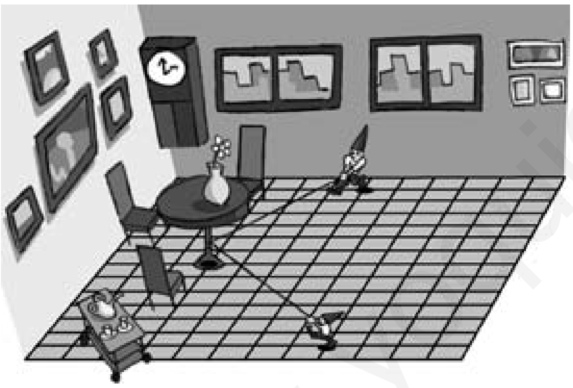
| | |
|---|---|
| $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-2}{-4}$ | $n = \dfrac{5}{8}$ |
| $y + 1 = 3x$ | $A(7, -2)$ |
| $3x + 8y - 5 = 0$ | $\vec{u} = (1, 5)$ |
| $y = 5x + 4$ | $m = 3$ |

**8.73 ¿Cuál es la posición relativa de dos rectas**
**a) que tienen la misma dirección y un punto en común?**
**b) con distinta dirección?**
**c) que en su ecuación punto-pendiente tienen la misma pendiente y el punto distinto?**

a) Coincidentes.
b) Secantes.
c) Paralelas

## PROBLEMAS PARA APLICAR

**8.74 Para arrastrar una mesa muy pesada de tablero circular y con una pata en el centro, se atan dos cuerdas y se tira de ellas como muestra la figura.**



**Si se utilizase una única cuerda para obtener el mismo resultado que con las dos anteriores, ¿qué fuerza debería aplicarse?**

La fuerza que se ejerce sobre cada una de las cuerdas tiene el mismo módulo, dirección y sentido que los vectores

$\vec{a} = (3, 6)$ y $\vec{b} = (5, -6)$.

La cuerda se obtendría como resultado de sumar las otras dos.

$\vec{a} + \vec{b} = (3, 6) + (5, -6) = (8, 0) = (8, 0)$

**8.75 Una maqueta de un barco de vela es empujada por la corriente del agua de un estanque que ejerce una fuerza $\vec{f}_a = (10, 8)$. A su vez, el viento sopla con una fuerza $\vec{f}_v = (-3, -1)$.**
**¿En qué dirección y sentido es la fuerza resultante? ¿Cuál es su módulo?**

El barco se desplaza según el resultado de sumar a la fuerza de la corriente la del viento: $(10, 8) + (-3, -1) = (7, 7)$

El barco se desplaza en el mismo sentido que la fuerza de la corriente.

Su módulo es: $\sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

**8.76 En un radar se observa el vuelo de dos aviones. Uno de ellos se encuentra en el punto de coordenadas (5, 3) y se desplaza siguiendo la dirección del vector $\vec{u} = (-4, 7)$. La trayectoria del segundo queda determinada por la recta de ecuación $7x + 4y + 83 = 0$.**
**Si continuaran su vuelo de forma indefinida, ¿chocarían en algún momento?**

Trayectoria del primer avión: $\dfrac{x-5}{-4} = \dfrac{y-3}{7} \Rightarrow 7x + 4y - 47 = 0$

Trayectoria del segundo avión: $7x + 4y + 83 = 0$

La posición relativa de los dos es: $\dfrac{7}{7} = \dfrac{4}{4} \neq \dfrac{-47}{83}$

Las trayectorias son paralelas. Por tanto, no chocarían en ningún momento.

**8.77 Para regar los árboles de un jardín se van a colocar unas tuberías que comuniquen unos con otros. Si dos de esos árboles están situados en puntos de coordenadas *A*(4, 6) y *B*(9, 8) y otro de ellos en el punto *C*(0, 6), ¿sería posible conseguir que una tubería recta pasase por los tres a la vez?**

Recta que une los puntos *A* y *B*: $\frac{x-4}{9-4} = \frac{y-6}{8-6} \Rightarrow \frac{x-4}{5} = \frac{y-6}{2}$

Se comprueba si el punto *C* pertenece a esa recta: $\frac{0-4}{5} = \frac{6-6}{2} \Rightarrow \frac{0-4}{5} \neq \frac{6-6}{2}$

No se podría colocar una tubería recta que pasara por los tres árboles a la vez.

**8.78 Un barco lanza un mensaje de socorro. Su posición viene dada por el punto *A*(1460, 765). Dos barcos situados en *B*(3525, 2490) y *C*(585, 3500) acuden en su ayuda. Si los dos navegan a la misma velocidad y en línea recta hacia *A*, ¿cuál llegará primero?**

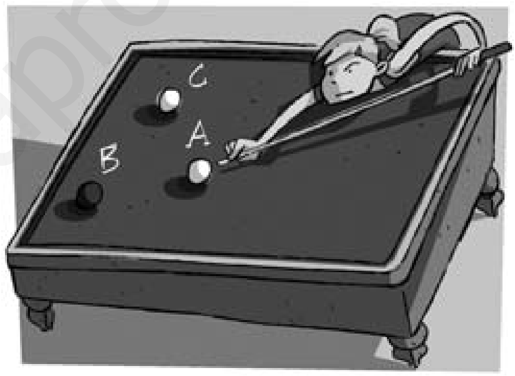
Llegará primero el que esté más cerca de *A*.

$$d(A, B) = \sqrt{(3525 - 1460)^2 + (2490 - 765)^2} = \sqrt{7\,239\,850} = 2690{,}70$$

$$d(A, C) = \sqrt{(585 - 1460)^2 + (3500 - 765)^2} = \sqrt{8\,245\,850} = 2871{,}56$$

Llegará antes el barco que está en la posición *B*.

**8.79 Con un solo golpe sobre la bola *A*, esta debe golpear primero a la bola *B* y luego a la *C*. Considerando los lados de la mesa como ejes de coordenadas, las posiciones de las bolas son *A*(20, 28); *B*(5, 10), y *C*(12, 36). ¿Con qué ángulo respecto a la trayectoria seguida por *A* cuando golpea a *B* debe salir la bola para golpear a *C*?**




Hay que calcular el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (20, 28) - (5, 10) = (15, 18)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (12, 36) - (5, 10) = (7, 26)$$

$$\cos\alpha = \frac{(15, 18)\cdot(7, 26)}{\sqrt{15^2 + 18^2}\cdot\sqrt{7^2 + 26^2}} = 0{,}9082 \Rightarrow \alpha = 24{,}74°$$

**8.80 Una cigüeña tiene su nido situado sobre una torre a 250 metros de altura. Ella está sobre el suelo a 100 metros de distancia de la torre.**

**a) Si subiera hasta el nido en línea recta, ¿cuál sería la ecuación de la trayectoria seguida? ¿Y cuál la pendiente de la misma?**

**b) ¿A qué distancia del nido se encuentra la cigüeña?**

a) La posición del nido respecto a esos ejes es (0, 250), y la de la cigüeña sobre el suelo, (100, 0).

Ecuación de la trayectoria: $\frac{x}{100} = \frac{y - 250}{-250} \Rightarrow m = \frac{-250}{100} = -\frac{5}{2}$

b) Distancia entre el nido y la cigüeña: $\sqrt{100^2 + 250^2} = \sqrt{72\,500} = 50\sqrt{29}$ m

**8.81 Un rayo de luz incide en un espejo con una trayectoria rectilínea determinada por los puntos *A*(3, 2) y *B*(5, 7), siendo este último el punto de contacto con el espejo. Al reflejarse, la pendiente de la recta que describe su trayectoria es $-\frac{2}{5}$.**

**a) Escribe la ecuación de las rectas determinadas por el rayo incidente y el reflejado.**

**b) Halla un vector director de cada una de ellas y el ángulo que forman.**

**c) Si el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales, ¿cuánto vale cada uno de ellos en este caso?**

a) Incidente: $\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-2}{7-2} \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{5}$ Reflejada: $y - 7 = -\frac{2}{5}\cdot(x - 5)$

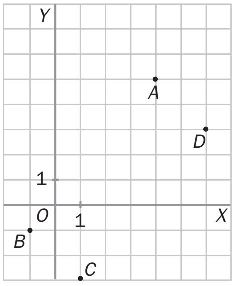
b) Vector director de la recta incidente: (2, 5) Vector director de la recta reflejada: (5, −2)

$$\cos\alpha = \frac{(2, 5)\cdot(5, -2)}{\sqrt{2^2 + 5^2}\cdot\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$$

c) Como forman un ángulo de 90° entre los dos, cada uno de ellos medirá 45°.

## Vectores. Operaciones y producto escalar

**8.82 Dados los puntos *A*, *B*, *C* y *D* de la figura, calcula los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$. ¿Cuáles de ellos son equipolentes?**




$A = (4, 5)$; $B = (-1, -1)$; $C = (1, -3)$; $D = (6, 3)$

$\overrightarrow{BA} = (5, 6)$ $\overrightarrow{CD} = (5, 6)$

$\overrightarrow{BC} = (2, -2)$ $\overrightarrow{AD} = (2, -2)$

Son equipolentes $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CD}$, y también $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

**8.83 Calcula:**

**a) (5, 9) + 2(−4, 8) − (6, 0)**
**b) 3(−4, 7) − (2, 6) + 5(1, −3)**
**c) (7, 11) − [(4, 9) + (−3, 1)]**
**d) (−6, 8) + 3[(5, −2) + (4, 7)]**

a) $(5, 9) + 2(-4, 8) - (6, 0) = (5, 9) + (-8, 16) - (6, 0) = (-9, 25)$

b) $3(-4, 7) - (2, 6) + 5(1, -3) = (-12, 21) - (2, 6) + (5, -15) = (-9, 0)$

c) $(7, 11) - [(4, 9) + (-3, 1)] = (7, 11) - (1, 10) = (6, 1)$

d) $(-6, 8) + 3[(5, -2) + (4, 7)] = (-6, 8) + 3 \cdot (9, 5) = (-6, 8) + (27, 15) = (21, 23)$

**8.84 Dados los vectores $\vec{u} = (5, 8)$ y $\vec{v} = (-2, 6)$, halla:**

**a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{v} \cdot \vec{v}$ c) $|\vec{u}|$ d) $|\vec{v}|$**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (5, 8) \cdot (-2, 6) = -10 + 48 = 38$

b) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-2, 6) \cdot (-2, 6) = 4 + 36 = 40$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$

d) $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

**8.85 Calcula el ángulo que forman los vectores:**

**a) $\vec{u} = (-2, -4)$ y $\vec{v} = (2, -1)$ b) $\vec{a} = (3, 9)$ y $\vec{b} = (-1, -3)$**

a) $\cos\alpha = \dfrac{(-2, -4) \cdot (2, -1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{(3, 9) \cdot (-1, -3)}{\sqrt{3^2 + 9^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}} = \dfrac{-30}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{-30}{30} = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

**8.86 ¿Son perpendiculares los vectores $\vec{u} = (6, 15)$ y $\vec{v} = (5, -2)$?**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (6, 15) \cdot (5, -2) = 30 - 30 = 0$$

Son perpendiculares porque su producto escalar es cero.

**8.87 Halla la distancia entre los puntos *A*(4, 9) y *B*(−2, 1).**

$$d(A, B) = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (1 - 9)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

**8.88 Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos A(2, −5) y B (4, 1).**

$$M = \left(\frac{2 + 4}{2}, \frac{-5 + 1}{2}\right) = (3, -2)$$

## Rectas. Posiciones relativas

**8.89 Obtén un punto, un vector director y la pendiente de la recta de ecuaciones paramétricas: .**

$$\left.\begin{array}{r} x = -1 + 2t \\ y = 5t \end{array}\right\}$$

$A(-1, 0)$; $\vec{v} = (2, 5)$; $m = \dfrac{5}{2}$

**8.90 Escribe en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (5, -2)$.**

Vectorial: $(x, y) = (3, 1) + t(5, -2)$

Paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 3 + 5t \\ y = 1 - 2t \end{array}\right\}$

Continua: $\dfrac{x - 3}{5} = \dfrac{y - 1}{-2}$

General: $2x + 5y - 11 = 0$

Punto-pendiente: $y - 1 = \dfrac{-2}{5} \cdot (x - 3)$

Explícita: $y = \dfrac{-2}{5}x + \dfrac{11}{5}$

$P\left(0, \dfrac{11}{5}\right)$; $Q\left(\dfrac{11}{2}, 0\right)$

Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{\frac{11}{2}} + \dfrac{y}{\frac{11}{5}} = 1$

**8.91 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 6)$ y $B(4, 1)$.**

$$\frac{x + 3}{4 + 3} = \frac{y - 6}{1 - 6} \Rightarrow 5x + 7y - 27 = 0$$

**8.92 Comprueba si el punto $B(4, -6)$ pertenece a alguna de estas rectas.**
**a) $y = 9 - 3x$**
**b) $5x + 3y - 2 = 0$**

a) $-6 = 9 - 3 \cdot 4 \Rightarrow -6 = -3$. No pertenece.
b) $5 \cdot 4 + 3 \cdot (-6) - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Sí pertenece.

**8.93 ¿Son secantes las rectas $r$: $4x - 5y - 2 = 0$ y $s$: $y = 2x - 4$? En caso afirmativo, calcula su punto de corte.**

Se escribe la segunda en forma general: $2x - y - 4 = 0$.

$$\frac{4}{2} \neq \frac{-5}{-1}. \text{ Por tanto, son secantes.}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x - 5y - 2 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x - 5 \cdot (2x - 4) - 2 = 0 \Rightarrow 4x - 10x + 20 - 2 = 0 \Rightarrow -6x = -18 \Rightarrow x = 3;\ y = 2$$

Se cortan en el punto $(3, 2)$.

**8.94 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.**
**a) $r$: $4x - 6y + 10 = 0$**
**$s$: $2x - 3y + 4 = 0$**
**b) $r$: $2x + 3y + 6 = 0$**
**$s$: $6x + 9y + 18 = 0$**

a) $\dfrac{4}{2} = \dfrac{-6}{-3} \neq \dfrac{10}{4}$. Son paralelas.

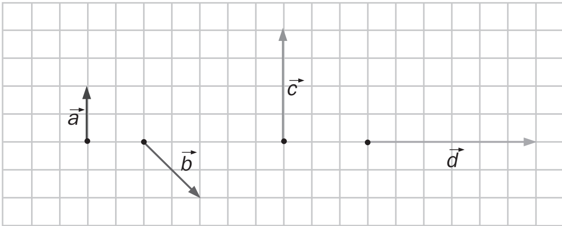
b) $\dfrac{2}{6} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{6}{18}$. Son coincidentes.

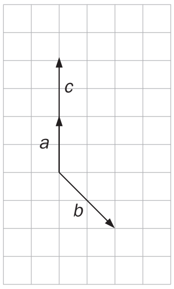
**8.95 Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $P(0, 2)$ y tiene la misma pendiente que $\dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y + 2}{3}$.**
**¿Cuál es la posición relativa de las dos rectas?**

$$m = \frac{3}{-1} = -3 \qquad y - 2 = -3 \cdot (x - 0)$$

Las rectas son paralelas.

**8.96 Expresa los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.**




Primero se sitúan los 3 vectores con origen en el mismo punto.

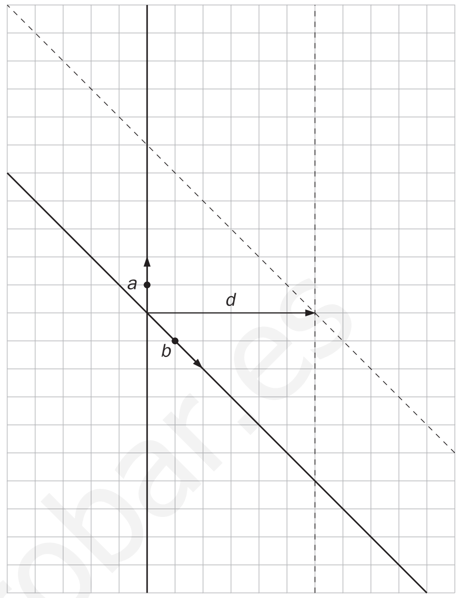
Se observa que el vector $\vec{c}$ es el doble de $\vec{a}$.

Por tanto, la combinación lineal es $\vec{c} = 2\vec{a} + 0\vec{b}$.

Se trazan las rectas que tienen la dirección de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Desde el extremo de $\vec{d}$ se traza una paralela al vector $\vec{a}$ hasta que corte la recta con la dirección de $\vec{b}$, y se observa que la longitud desde el origen hasta ese punto es $3\vec{b}$.

Desde el extremo de $\vec{d}$ se traza una paralela al vector $\vec{b}$ hasta que corte la recta con la dirección de $\vec{a}$, y se observa que la longitud desde el origen hasta ese punto es $3\vec{a}$. Por tanto, $\vec{d} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$.

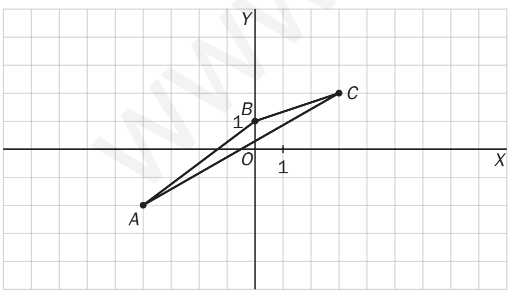



**8.97 Calcula el valor de a para que los vectores $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{v} = (a, 1)$ formen un ángulo de 45°.**

$$\cos 45° = \frac{(4, 3) \cdot (a, 1)}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{a^2 + 1^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4a + 3}{5\sqrt{a^2 + 1}} \Rightarrow 8a + 6 = 5\sqrt{2a^2 + 2} \Rightarrow 64a^2 + 96a + 36 = 50a^2 + 50$$

$$14a^2 + 96a - 14 = 0;\ 7a^2 + 48a - 7 = 0 \qquad a = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-7)}}{14} = \frac{-48 \pm 50}{14} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{7} \\ a = -7 \end{cases}$$

**8.98 Determina, mediante vectores, si es rectángulo el triángulo de vértices $A(-4, -2)$; $B(0, 1)$, y $C(3, 2)$.**




Un dibujo ayuda a ver si existe algún ángulo recto.

Se observa que no, pero se comprueba analíticamente hallando primero los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$, y comprobando si son perpendiculares.

$\overrightarrow{AB} = (4, 3)$; $\overrightarrow{BC} = (3, 1)$; $\overrightarrow{AC} = (7, 4)$

Para que sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 12 + 3 = 15$. No son perpendiculares.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28 + 12 = 40$. No son perpendiculares.

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 21 + 4 = 25$. No son perpendiculares.

Por tanto, el triángulo no es rectángulo.

**8.99 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(5, -4)$ y forma un ángulo de 30º con el eje de abscisas.**

$$m = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y + 4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 5) \Rightarrow \sqrt{3}x - 3y - \left(12 + 5\sqrt{3}\right) = 0$$

**8.100 Calcula la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto en el que $6x + 9y - 12 = 0$ corta al eje de abscisas y es paralela a $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.**

El punto de corte con el eje de abscisas tiene la segunda coordenada igual a cero.
Entonces, si $y = 0$, $6x + 9 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.
La recta pedida pasa por el punto (2, 0).
La pendiente debe ser igual que la de $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow m = -\frac{3}{4}$. La recta es $y = -\frac{3}{4} \cdot (x - 2)$.

**8.101 Los lados de un triángulo vienen dados por las rectas de ecuaciones $3x - y - 6 = 0$, $3x + y - 18 = 0$ e $y = 0$.**
**a) Halla sus vértices.**
**b) Clasifica el triángulo en función de sus lados.**
**c) Halla las ecuaciones de las rectas determinadas por sus medianas.**

a) Para calcular sus vértices se resuelven los sistemas formados por las rectas dos a dos:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 6 = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x - y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Los vértices son $A(4, 6)$, $B(2, 0)$ y $C(6, 0)$.

b) $d(A, B) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{40}$
$d(A, C) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{40}$
$d(C, B) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{16} = 4$
Es un triángulo isósceles porque tiene dos lados iguales y uno desigual.

c) $M_{AB} = \left(\frac{4 + 2}{2}, \frac{6 + 0}{2}\right) = (3, 3) \qquad M_{BC} = \left(\frac{2 + 6}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right) = (4, 0) \qquad M_{CA} = \left(\frac{6 + 4}{2}, \frac{0 + 6}{2}\right) = (5, 3)$

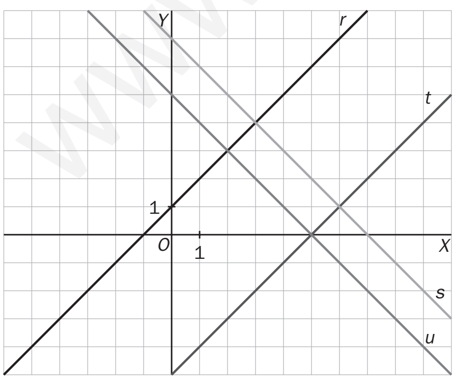
$$\frac{x - 3}{6 - 3} = \frac{y - 3}{0 - 3} \Rightarrow \frac{x - 3}{3} = \frac{y - 3}{-3} \Rightarrow x + y - 6 = 0$$

$$\frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{3} \Rightarrow x - y - 2 = 0$$

$$\frac{x - 4}{4 - 4} = \frac{y}{6 - 0} \Rightarrow 6x - 24 = 0 - x = 4$$

**8.102 Las rectas $r$: $x - y + 1 = 0$, $s$: $x + y - 7 = 0$, $t$: $x - y - 5 = 0$ y $u$: $x + y - 5 = 0$ forman un cuadrilátero.**
**a) Calcula la medida de sus lados y de sus ángulos interiores.**
**b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es?**

a) Al dibujar las rectas se observa cuáles son los puntos de corte de cada dos de ellas que hay que obtener para calcular los vértices pedidos.




Hay que resolver los sistemas formados por las rectas $r$ y $s$, obteniéndose el punto $A(3, 4)$; $s$ y $t$, calculando el punto $B(6, 1)$; $t$ y $u$, obteniendo el punto $C(5, 0)$, y $r$ y $u$, con el punto $D(2, 3)$.

$d(A, B) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{18}$
$d(B, C) = \sqrt{(5 - 6)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{2}$
$d(C, D) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{18}$
$d(A, D) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{2}$
$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -3)$
$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1, -1)$
$\overrightarrow{CD} = D - C = (-3, 3)$
$\overrightarrow{AD} = D - A = (-1, -1)$

Como en el dibujo parece un rectángulo, los ángulos interiores deben ser de 90°. Se calcula el producto escalar de los vectores para comprobar si es cero.

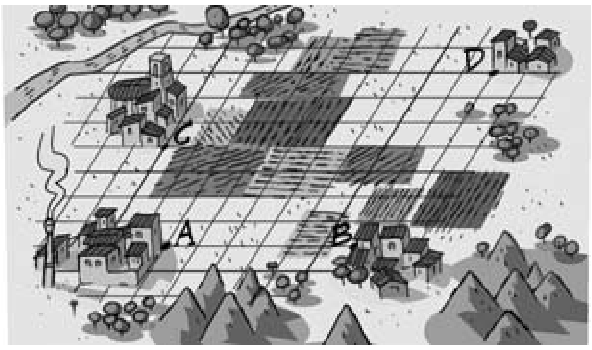
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \qquad \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Por tanto, todos los ángulos interiores son de 90°.

b) Es un rectángulo porque sus ángulos interiores son rectos, y sus lados, iguales y paralelos dos a dos.

**8.103 La piscina pública**

**En la figura se representa la situación de cuatro localidades vecinas, *A*, *B*, *C* y *D*. Cada lado de la cuadrícula representa 1 kilómetro.**



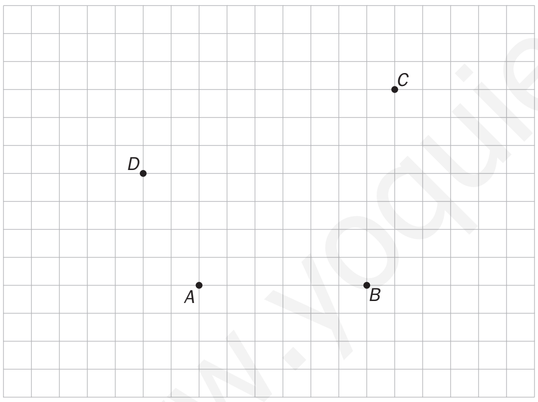

**Los correspondientes municipios han decidido construir una piscina pública. Sin embargo, el Consistorio de *D* expone que no dispone de presupuesto para su construcción y se retira del proyecto. Los otros tres ayuntamientos deciden, finalmente, construir la instalación deportiva en un lugar que equidiste de sus tres localidades y sufragando los gastos de forma proporcional a su número de habitantes.**

**a) Elige una referencia cartesiana situando el origen de coordenadas en el punto *A* y de forma que la abscisa de *B* sea nula. ¿Qué coordenadas tienen los puntos de cada localidad en esa referencia?**

**b) Sitúa el punto donde debe ser construida la piscina indicando las coordenadas que lo determinan.**

**c) Calcula la distancia que separa el lugar de la piscina de cada una de las localidades *A*, *B* y *C*, y compárala con la distancia que la separa de *D*.**

**d) El Ayuntamiento de *C* rechaza este primer acuerdo aduciendo que, al ser su población más numerosa, la piscina debe quedar, como mucho, a 4 kilómetros de su localidad. Los Ayuntamientos de *A* y de *B* aceptan la propuesta siempre y cuando la piscina equidiste de los mismos. Estudia las posibilidades de situar la instalación de acuerdo con las nuevas condiciones.**




a) $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(-2, 4)$, $D(7, 7)$

Mediatriz del segmento $AB$: $x = 3$

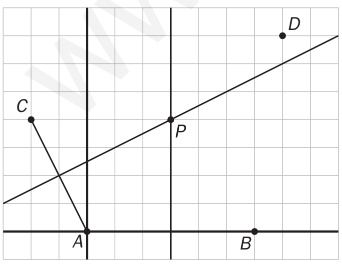
La mediatriz del segmento $AC$ pasa por

$\left(\frac{0-2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (-1, 2)$ y es perpendicular a $(-2, 4)$.

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow 2y - 4 = x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

b) Punto que equidista de $A$, $B$ y $C$:

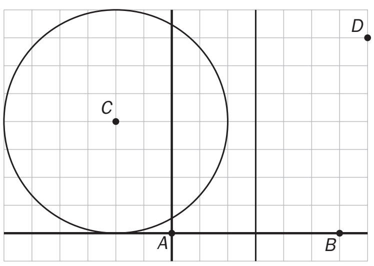
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow P(3, 4)$$




c) $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ km

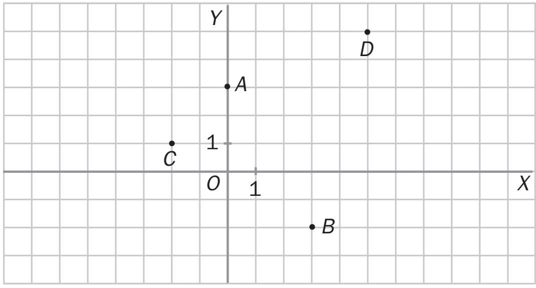
$\overrightarrow{PD} = \sqrt{(3-7)^2 + (4-7)^2} = 5$ km

La piscina dista lo mismo de $D$ que de las otras tres localidades.




d) La instalación debería está situada en algún punto del círculo de centro $C$ y radio 4, y en la mediatriz del segmento $AB$. Como se aprecia en el dibujo, no existe tal punto.

**8.A1 Calcula las coordenadas y el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.**




$A(0,3)$ $B(8, -3)$ $C(-4, 6)$ $D(5, 5)$

$\overrightarrow{AB}(8, -6)$

$\overrightarrow{CD}(9, -1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9^2 + (-1)^2} = \sqrt{82}$

**8.A2 Calcula:**

**a) 3(6, 2) + (5, −4) − 6(2, 1)** **b) 5[(7, −2) + (−8, 1)]** **c) (2, 3) − [(6, 1) − 4(−3, −2)]**

a) $3(6, 2) + (5, -4) - 6(2, 1) = (18, 6) + (5, -4) - (12, 6) = (11, -4)$

b) $5[(7, -2) + (-8, 1)] = 5(-1, -1) = (-5, -5)$

c) $(2, 3) - [(6, 1) - 4(-3, -2)] = (2, 3) - [(6, 1) + (12, 8)] = (2, 3) - (18, 9) = (-16, -6)$

**8.A3 Estudia si son perpendiculares:**

**a) $\vec{u} = (-2, 8)$ y $\vec{v} = (4, 1)$** **b) $\vec{u} = (-3, 7)$ y $\vec{v} = (2, -1)$**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2, 8) \cdot (4, 1) = -8 + 8 = 0$. Sí son perpendiculares.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, 7) \cdot (2, -1) = -6 - 7 = -13$. No son perpendiculares.

**8.A4 Calcula el ángulo que forman los vectores:**

**a) $\vec{u} = (-1, 6)$ y $\vec{v} = (3, 1)$** **b) $\vec{u} = (0, -2)$ y $\vec{v} = (0, 2)$**

a) $\cos\alpha = \dfrac{(3, 1) \cdot (-1, 6)}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 6^2}} = \dfrac{-3 + 6}{\sqrt{10}\sqrt{37}} = \dfrac{3}{\sqrt{370}} \Rightarrow \alpha = 56{,}79°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{(0, 2) \cdot (0, -2)}{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2}} = \dfrac{-4}{4} = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

**8.A5 Halla la distancia entre los puntos $A(5, -9)$ y $B(7, 2)$.**

$$d(A, B) = \sqrt{(7 - 5)^2 + (2 + 9)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

**8.A6 Calcula las coordenadas del punto medio del segmento $AB$ siendo $A(4, 0)$ y $B(-2, 6)$.**

$$M = \left(\frac{4 - 2}{2}, \frac{0 + 6}{2}\right) = (1, 3)$$

**8.A7 Escribe en todas las formas posibles la ecuación de la recta:**

**a) Que pasa por el punto $P(4, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (-2, 5)$.**

**b) Que pasa por los puntos $A(9, 4)$ y $B(8, 1)$.**

a) Vectorial: $(x, y) = (4, 1) + t(-2, 5)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 4 - 2t \\ y = 1 + 5t \end{array}\right\}$

Continua: $\dfrac{x - 4}{-2} = \dfrac{y - 1}{5}$

General: $5x + 2y - 22 = 0$

Punto-pendiente: $y - 1 = -\dfrac{5}{2} \cdot (x - 4)$

Explícita: $y = -\dfrac{5}{2}x + 11$ $P(0, 11)$; $Q\left(\dfrac{22}{5}, 0\right)$

Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{\frac{22}{5}} + \dfrac{y}{11} = 1$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, -3)$ Vectorial: $(x, y) = (9, 4) + t(-1, -3)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 9 - t \\ y = 4 - 3t \end{array}\right\}$

Continua: $\dfrac{x - 9}{-1} = \dfrac{y - 4}{-3}$

General: $3x - y - 23 = 0$

Punto-pendiente: $y - 4 = 3 \cdot (x - 9)$

Explícita: $y = 3x - 23$ $P(0, -23)$; $Q\left(\dfrac{23}{3}, 0\right)$

Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{\frac{23}{3}} + \dfrac{y}{-23} = 1$

**8.A8** **Comprueba si la recta $6x + 4y = 0$ pasa por el punto $(3, -3)$.**

$6 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 18 - 12 \neq 0 \quad \Rightarrow$ No pasa por el punto.

**8.A9** **Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene el mismo vector que $r$: $\left.\begin{matrix} x = -1 + t \\ y = 3 + 5t \end{matrix}\right\}$**

Vector (1, 5) $\qquad y = 5x$

**8.A10** **Estudia la posición relativa de las rectas:**

**a)** $r$: $3x - y + 6 = 0$
$s$: $3x - 4y + 2 = 0$

**b)** $r$: $4x + 6y + 12 = 0$
$s$: $2x + 3y + 9 = 0$

a) $\dfrac{3}{3} \neq \dfrac{-1}{-4}$. Son secantes.

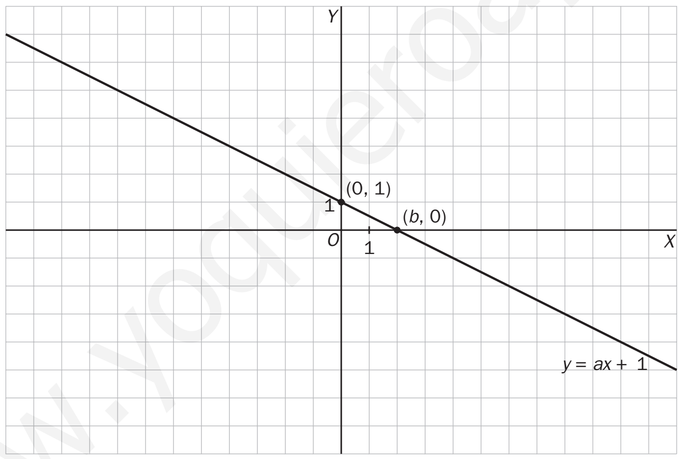
b) $\dfrac{4}{2} = \dfrac{6}{3} \neq \dfrac{12}{9}$. Son paralelas.

## MURAL DE MATEMÁTICAS

### MATETIEMPOS

### El área mínima de un triángulo

**Todas las rectas de ecuación $y = ax + 1$ forman triángulos con los ejes de coordenadas para diferentes valores de $a(a \neq 0)$. Calcula el valor de $a$ para que el triángulo sea isósceles. ¿Qué valor debe tener para que el área del triángulo sea mínima?**




El valor de $a$ podrá ser positivo si la recta es creciente o negativo si es decreciente, y siempre la recta pasará por el punto (0, 1). Analicemos la recta decreciente (la recta creciente será simétrica al eje $x = 0$ y tendrá los mismos resultados), el área será:

$$A = \frac{b \times 1}{2} = \frac{b}{2}$$

El área del triángulo será mínima, cuando $b$ se acerque a cero, luego el área tenderá a cero.

El del triángulo será isósceles cuando $b = 1$ y la recta pase por el punto (1, 0), entonces $a = -1$

También será isósceles si $b = -1$ y la recta pase por el punto (−1 0), entonces $a = 1$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**9.1 Con una calculadora, forma términos de las siguientes sucesiones y estudia a qué valores tienden.**

**a)** $a_n = \dfrac{2n^2}{n^2 + 1}$ **b)** $b_n = \dfrac{-3n}{n + 1}$ **c)** $c_n = \dfrac{1}{5n}$

a) $a_1 = 1$ $a_2 = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$ $a_{10} = \dfrac{200}{101} = 1{,}98\ldots$ $a_{100} = \dfrac{20\,000}{10\,001} = 1{,}9998$

Se observa que tiende a 2.

b) $b_1 = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5$ $b_{10} = -\dfrac{30}{11} = -2{,}757\ldots$ $b_{100} = -\dfrac{300}{101} = -2{,}97\ldots$ $b_{1000} = -\dfrac{3000}{1001} = -2{,}997\ldots$

Se observa que tiende a $-3$.

c) $c_1 = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ $c_2 = 0{,}1$ $c_{10} = 0{,}02$ $c_{100} = 0{,}002$ $c_{1000} = 0{,}0002$ $c_{10\,000} = 0{,}00002$

Se observa que tiende a 0.

**9.2 Calcula términos de las siguientes sucesiones y observa si tienen límite.**

**a)** $a_n = n^2 + 1$ **b)** $b_n = -n^3$ **c)** $c_n = \dfrac{n^2}{n + 2}$

a) $a_1 = 2$ $a_2 = 5$ $a_{10} = 101$ $a_{1000} = 1\,000\,001$

La sucesión no parece tender a ningún número real; por tanto, no tiene límite.

b) $b_1 = -1$ $b_2 = -8$ $b_{10} = -1000$ $b_{100} = -1\,000\,000$

La sucesión no parece tender a ningún número real; por tanto, no tiene límite.

c) $c_1 = \dfrac{1}{3}$ $c_2 = 1$ $c_{10} = 8{,}33\ldots$ $c_{100} = 98{,}039\ldots$ $c_{1000} = 998{,}004$ $c_{10\,000} = 9998$

La sucesión no parece tender a ningún número real; por tanto, no tiene límite.

**9.3 Dada la sucesión $a_n = \dfrac{6n}{3n + 1}$:**

**a) Halla su límite.**

**b) Calcula las distancias entre los términos $a_{10}$, $a_{100}$ y $a_{1000}$, y el límite.**

**c) ¿A partir de qué término esta distancia es menor que una centésima?**

**d) ¿Y menor que una diezmilésima?**

a) Calculamos algunos términos:

$a_{10} = 1{,}9354\ldots$ $a_{100} = 1{,}993355\ldots$ $a_{1000} = 1{,}999333\ldots$ Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n}{3n + 1} = 2$.

b) $|a_{10} - 2| = |1{,}9354 - 2| = 0{,}0646$; $|a_{100} - 2| = |1{,}993355 - 2| = 0{,}006645$; $|a_{1000} - 2| = |1{,}999333 - 2| = 0{,}000667$

c) $|a_n - 0| = \left|\dfrac{6n}{3n + 1} - 2\right| = \left|\dfrac{6n - 6n + 2}{3n + 1}\right| = \dfrac{2}{3n + 1} < \dfrac{1}{100} \Rightarrow 200 < 3n + 1 \Rightarrow \dfrac{200 - 1}{3} < n \Rightarrow 66{,}33 < n$

A partir del término 67, la diferencia entre los términos de la sucesión y su límite es menor que una centésima.

d) $|b_n - 0| = \dfrac{2}{3n + 1} < \dfrac{1}{10\,000} \Rightarrow 20\,000 < 3n + 1 \Rightarrow \dfrac{20\,000 - 1}{3} < n \Rightarrow 6666{,}33 < n$. A partir del término 6667, la diferencia entre los términos de la sucesión y su límite es menor que una diezmilésima.

**9.4 La sucesión de término general $b_n = \dfrac{3}{n + 1}$ tiene por límite 0. Halla a partir de qué término se verifica que $|b_n - 0| < 0{,}00001$.**

$$\left|\frac{3}{n+1}\right| < \frac{1}{100\,000} \Rightarrow 300\,000 < n + 1 \Rightarrow n > 299\,999$$

Por tanto, a partir del término 299 999 se verifica que: $|b_n - 0| < \dfrac{1}{100\,000}$

**9.5 La sucesión de término general $c_n = \dfrac{n^2 + 2}{2n^2 + 1}$ tiene por límite $\dfrac{1}{2}$. Calcula a partir de qué término se verifica que $\left|c_n - \dfrac{1}{2}\right| < 0{,}0001$.**

$$\left|\frac{n^2+2}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10\,000} \Rightarrow \left|\frac{2n^2 + 4 - 2n^2 - 1}{4n^2 + 2}\right| < \frac{1}{10\,000} \Rightarrow \left|\frac{3}{4n^2+2}\right| < \frac{1}{10\,000} \Rightarrow 30\,000 < 4n^2 + 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 29\,998 < 4n^2 \Rightarrow n > \sqrt{\dfrac{29\,998}{4}} = 86{,}6$. Por tanto, a partir del término 87 se verifica que: $\left|c_n - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{10\,000}$

**9.6 Comprueba que la sucesión de término general $a_n = -n - 7$ tiende a menos infinito.**

Calculamos algunos términos de la sucesión: $a_{10} = -17$; $a_{100} = -107$; $a_{1000} = -1007$; $a_{10\,000} = -10\,007$

Los términos se van haciendo cada vez menores, de forma que por muy pequeño que sea un valor, siempre encontramos términos inferiores a él.

Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$.

**9.7 Comprueba que $\lim\limits_{n \to \infty}(3n^2 - 5n) = +\infty$.**

Formamos algunos términos de la sucesión: $a_{10} = 250$; $a_{100} = 29\,500$; $a_{10\,000} = 29\,950\,000$. Los términos se van haciendo cada vez mayores, de forma que por muy grande que sea un valor, siempre encontramos términos superiores a él.

Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty}(3n^2 - 5n) = +\infty$.

**9.8 Dados $k = 10\,000$ y la sucesión de término general $a_n = n^2 - 1$, averigua a partir de qué valor del índice $n$ sus términos son mayores que $k$.**

$|a_n| > 10\,000 \Rightarrow |n^2 - 1| > 10\,000 \Rightarrow n^2 > 9999 \Rightarrow n > \sqrt{9999} = 99{,}995$

A partir del término 100, los términos siguientes son mayores que 10 000.

**9.9 Efectúa las siguientes operaciones cuando $n \to \infty$.**

**a) $(n + 1)$**

**b) $\dfrac{1}{3n^2 + 1}$**

a) $(n + 1) = (+\infty) + 1 = +\infty$

b) $\dfrac{1}{3n^2 + 1} = \dfrac{1}{(+\infty) + 1} = \dfrac{1}{(+\infty)} = 0$

**9.10 Realiza las correspondientes operaciones cuando $n \to \infty$.**

**a) $3n(-5)$**

**b) $\dfrac{254}{-n^2}$**

a) $3n(-5) = -15n = -15 \cdot (+\infty) = -\infty$

b) $\dfrac{254}{-n^2} = \dfrac{254}{-\infty} = 0$

**9.11** **Dadas las sucesiones $a_n = \dfrac{2n}{n+5}$ y $b_n = \dfrac{n+3}{5n-9}$, calcula:**

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **y** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

**b)** $\lim\limits_{n\to\infty} 5a_n$ **y** $\lim\limits_{n\to\infty} 7b_n$

**c)** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ **y** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}$

a) Formamos algunos términos de las sucesiones para hallar los límites.

$a_{10} = 1{,}33\ldots;\quad a_{100} = 1{,}9047\ldots;\quad a_{1000} = 1{,}9900\ldots$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+5} = 2$

$b_{10} = 0{,}31\ldots;\quad b_{100} = 0{,}2097\ldots;\quad b_{1000} = 0{,}2009\ldots$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{5n-1} = 0{,}2 = \dfrac{1}{5}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(5a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(5\dfrac{2n}{n+5}\right) = 5\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+5} = 5\cdot 2 = 10$

$\lim\limits_{n\to\infty}(7b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(7\dfrac{n+3}{5n-9}\right) = 7\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{5n-9} = 7\cdot\dfrac{1}{5} = \dfrac{7}{5}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{n+5}\cdot\dfrac{n+3}{5n-9}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+5}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{5n-9} = 2\cdot\dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{5}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$

**9.12** **Dadas las sucesiones $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+5}$ y $b_n = \dfrac{7n}{n+1}$, halla:**

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **y** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

**b)** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$

**c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ **y** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}$

a) Formamos algunos términos de las sucesiones para hallar los límites.

$a_{10} = 0{,}9523\ldots;\quad a_{100} = 0{,}9995\ldots;\quad a_{1000} = 0{,}99995\ldots$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+5} = 1$

$b_{10} = 6{,}3636\ldots;\quad b_{100} = 6{,}9306\ldots;\quad b_{1000} = 6{,}933\ldots$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n}{n+1} = 7$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^2+5} + \dfrac{7n}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+5} + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n}{n+1} = 1 + 7 = 8$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n^2}{n^2+5}}{\dfrac{7n}{n+1}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+5}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n}{n+1}} = \dfrac{1}{7}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = 1^7 = 1$

**9.13** **Halla $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3 + 7n^2 + 5n - 2}{3n^3 + 2n - 5}$.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3 + 7n^2 + 5n - 2}{3n^3 + 2n - 5} = \lim_{n\to\infty}\frac{4 + \dfrac{7}{n} + \dfrac{5}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}}{3 + \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{5}{n^3}} = \frac{4}{3}$$

**9.14 Calcula $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{25} + 2}{3n^{24} + n + 2}$.**

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^{25} + 2}{3n^{24} + n + 2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{n^{25}}}{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^{24}} + \frac{2}{n^{25}}} = +\infty$$

**9.15 Dada la sucesión de término general: $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n + 9}\right)^{n+9}$.**

**a) Halla los términos $a_{100}$, $a_{1000}$ y $a_{10\,000}$.**

**b) ¿Está acortada la sucesión?¿Es creciente?**

a) $a_{100} = \left(1 + \dfrac{1}{100 + 9}\right)^{109} = 2{,}7059\ldots$; $a_{1000} = \left(1 + \dfrac{1}{1000 + 9}\right)^{1009} = 2{,}7169\ldots$; $a_{10\,000} = \left(1 + \dfrac{1}{10\,000 + 9}\right)^{10\,009} = 2{,}7181\ldots$

b) La sucesión está acotada superiormente y es creciente.

**9.16 Dada la sucesión de término general: $a_n = \left(\dfrac{n + 4}{n + 3}\right)^{n+3}$.**

**a) Calcula los términos $a_{100}$, $a_{1000}$ y $a_{10\,000}$.**

**b) ¿Está acortada la sucesión? ¿Es creciente?**

a) $a_{100} = \left(\dfrac{100 + 4}{100 + 3}\right)^{103} = 2{,}7052\ldots$; $a_{1000} = \left(\dfrac{1000 + 4}{1000 + 3}\right)^{1003} = 2{,}71692\ldots$; $a_{10\,000} = \left(\dfrac{10\,000 + 4}{10\,000 + 3}\right)^{10\,003} = 2{,}71814\ldots$

b) La sucesión está acotada superiormente y es creciente

**9.17 Calcula:**

**a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{5n}$**

**b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{5n+2}$**

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{5n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{5}\right]^{n} = e^5$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{5n+2} = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{5n} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2}\right] = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{5n} \cdot \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2} = e^5 \cdot 1 = e^5$

**9.18 Calcula:**

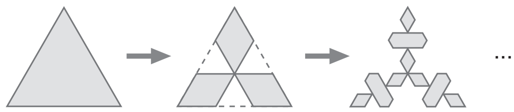
**a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n + 1}{n + 2}\right)^{n+2}$**

**b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n + 5}{n + 1}\right)^{n+1}$**

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n + 1}{n + 2}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n + 2}{n + 2} - \dfrac{1}{n + 2}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{n + 2}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{-(n + 2)}\right)^{-(n+2)}\right]^{-1} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n + 5}{n + 1}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n + 1}{n + 1} + \dfrac{4}{n + 1}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{\frac{n + 1}{4}}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{\frac{n + 1}{4}}\right)^{\frac{n+1}{4}}\right]^{4} = e^4$

**9.19 De forma muy parecida se obtiene el *anticopo de nieve*. Observa la secuencia siguiente.**



**¿Cuáles serán los perímetros sucesivos de las figuras *anticopo de nieve*? Forma la sucesión de los perímetros.**

Sea $L$ la medida del lado del triángulo equilátero.

Los parámetros sucesivos de las figuras anticopo de nieve son:

$$p_1 = 3L$$

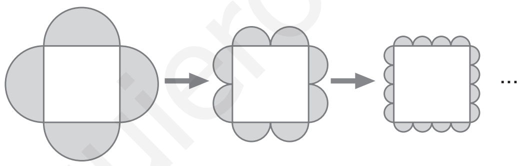
$$p_2 = 4\frac{L}{3}3 = 4\ L$$

$$p_3 = 4\frac{L}{9}6 + 8\frac{L}{9}3 = \frac{8L}{3} + \frac{8L}{3} = \frac{16L}{3}$$

Para pasar del perímetro de una figura al de la siguiente, basta con multiplicar por $\frac{4}{3}$. La sucesión de los perímetros es una progresión geométrica de razón $\frac{4}{3}$; por tanto, los términos de esta sucesión son los siguientes:

$$3L; \quad \frac{4}{3}(3L); \quad \left(\frac{4}{3}\right)^2(3L); \quad \dots \quad \left(\frac{4}{3}\right)^n(3L) \quad \dots$$

**9.20 Observa las siguientes figuras.**



**A partir de un recuadro, lo vamos bordeando con semicircunferencias y aparecen dos sucesiones: las áreas rayadas en verde y los perímetros de las semicircunferencias. Estudia ambas sucesiones.**

Sea $L$ la medida del lado del cuadrado.

Sucesión de las áreas rayadas en verde:

$$A_1 = 2\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{\pi L^2}{2}$$

$$A_2 = 4\pi\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{\pi L^2}{4}$$

$$A_3 = 8\pi\left(\frac{L}{8}\right)^2 = \frac{\pi L^2}{8}$$

Por tanto, $\frac{\pi L^2}{2}; \frac{\pi L^2}{2^2}; \frac{\pi L^2}{2^3}; \frac{\pi L^2}{2^4} \quad \dots \quad \frac{\pi L^2}{2^n}, \dots$

Sucesión de los perímetros de las semicircunferencias:

$$p_1 = 2 \cdot 2\pi\frac{L}{2} = 2\pi L$$

$$p_2 = 4 \cdot 2\pi\frac{L}{4} = 2\pi L$$

$$p_3 = 8 \cdot 2\pi\frac{L}{8} = 2\pi L$$

Se trata de una sucesión constante. $\quad 2\pi L, 2\pi L, 2\pi L\dots$

## E J E R C I C I O S  P A R A  E N T R E N A R S E

## Sucesiones. Hacia la idea de límite

9.21 **Calcula algunos términos de estas sucesiones y halla el valor al que tienden.**

**a)** $a_n = \frac{5n^2 - 2}{n^2}$

**b)** $b_n = \frac{3}{n + 1}$

**c)** $c_n = \frac{6n}{3 - 2n}$

**d)** $d_n = \frac{n + 1}{2n}$

a)

| $n$ | 10 | 100 | 1000 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 4,98 | 4,9998 | 4,999998 | $\to 5$ |

b)

| $n$ | 10 | 100 | 1000 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | 0,2727 | 0,0297 | 0,002997 | $\to 0$ |

c)

| $n$ | 10 | 100 | 1000 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $c_n$ | −3,529 | −3,046 | −3,004 | $\to -3$ |

d)

| $n$ | 10 | 100 | 1000 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $d_n$ | 0,55 | 0,505 | 0,5005 | $\to 0,5$ |

9.22 **Comprueba si la sucesión $a_n = \frac{1 - n}{n}$ tiene límite.**

$a_{10} = -0,9$;  $a_{100} = -0,99$;  $a_{100} = -0,999 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 - n}{n} = -1$

9.23 **¿Cuáles de las siguientes sucesiones no tienden a un valor real?**

**a)** $a_n = 1 - n$

**b)** $b_n = \frac{4n - 1}{4n}$

**c)** $c_n = \frac{n^2 - 1}{2n}$

**d)** $d_n = 3n^2 + 7n + 2$

a) $a_{10} = -9$;  $a_{100} = -99$;  $a_{1000} = -9999$

b) $b_{10} = 0,975$;  $b_{100} = 0,9975$;  $b_{1000} = 0,99975$

c) $c_{10} = 4,95$;  $c_{100} = 49,995$;  $c_{1000} = 499,9995$

d) $d_{10} = 372$;  $d_{100} = 30\,702$;  $d_{1000} = 3\,007\,002$

Las sucesiones $a_n$, $c_n$ y $d_n$ no tienden a un número real.

9.24 **Escribe el término general de una sucesión cuyo límite sea 1.**

$a_n = \frac{2n + 1}{2n + 3}$

## Límite de una sucesión

9.25 **El límite de la sucesión $a_n = \frac{n}{n + 9}$ es 1. Halla el término a partir del cual la distancia al límite es menor que 0,01.**

$\left| \frac{n}{n + 9} - 1 \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left| \frac{-9}{n + 9} \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{9}{n + 9} < \frac{1}{100} \Rightarrow 900 < n + 9 \Rightarrow n > 891$

A partir de $a_{891}$

**9.26 Dada la sucesión $a_n = \dfrac{8n}{1 - 2n}$:**

**a) Calcula su límite.**

**b) Halla la distancia entre el término $a_{100}$ y el límite. ¿Es menor que una milésima?**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n}{1-2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{8n}{n}}{\dfrac{1}{n} - \dfrac{2n}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8}{\dfrac{1}{n} - 2} = -\dfrac{8}{2} = -4$

b) $\left|\dfrac{8 \cdot 100}{1 - 2 \cdot 100} + 4\right| = |-4{,}020 + 4| = 0{,}020$. No es menor que una milésima.

**9.27 Halla el límite de la sucesión $b_n = \dfrac{2n}{n+1}$ calculando algunos términos.**

**¿A partir de cuál de ellos la diferencia entre estos y el límite es menor que 0,0001?**

$b_{10} = 1{,}81\ldots;\quad b_{100} = 1{,}98\ldots;\quad b_{1000} = 1{,}998\ldots\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$

$\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right| < \dfrac{1}{10\,000} \Rightarrow \left|\dfrac{-2}{n+1}\right| < \dfrac{1}{10\,000} \Rightarrow \dfrac{2}{n+1} < \dfrac{1}{10\,000} \Rightarrow 2000 < n + 1 \Rightarrow n > 1999$

A partir de $a_{1999}$.

**9.28 Considera las sucesiones $a_n = \dfrac{1}{n}$ y $b_n = -\dfrac{1}{n}$.**

**a) Calcula sus límites.**

**b) Encuentra en cada una de ellas el término a partir del cual la diferencia entre los términos y el límite es menor que una millonésima.**

**c) Compara los resultados obtenidos.**

a) $a_{10} = 0{,}1;\quad a_{100} = 0{,}01;\quad a_{1000} = 0{,}001;\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$b_{10} = -0{,}1;\quad b_{100} = -0{,}01;\quad b_{1000} = -0{,}001;\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

b) $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \dfrac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow n > 1\,000\,000$

$\left|\dfrac{-1}{n} - 0\right| < \dfrac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow n > 1\,000\,000$

En los dos casos es a partir del término $a_{1\,000\,000}$.

c) Los límites son iguales, y el término a partir del cual la diferencia entre los términos y el límite es menor que una determinada cantidad es también el mismo.

**9.29 Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n}{2-4n} = \dfrac{1}{4}$.**

$\left|\dfrac{1-n}{2-4n} - \dfrac{1}{4}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{2 - 2n - 1 + 2n}{2-4n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{1}{2-4n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{-1}{2-4n} < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{1}{-2+4n} < \varepsilon \Rightarrow n > \dfrac{2\varepsilon + 1}{4\varepsilon}$

Por tanto, para cualquier valor de $\varepsilon$ se puede encontrar un valor de $n$ de tal modo que a partir del término $a_n$, la distancia entre estos y el límite es menor que $\varepsilon$.

## Sucesiones divergentes

**9.30 Indica a qué tienden estas sucesiones.**

**a)** $6n^2 + 10$

**b)** $2n - n^2$

**c)** $5 - 3n$

**d)** $10n - 4$

a) $a_{10} = 610$; $a_{100} = 60\,010$; $a_{1000} = 6\,000\,010$

Por tanto, $\lim_{n \to \infty} (6n^2 + 10) = \infty$

b) $b_{10} = 80$; $b_{100} = 9800$; $b_{1000} = 998\,000$

Por tanto, $\lim_{n \to \infty} (2n - n^2) = -\infty$

c) $c_{10} = -25$; $c_{100} = -295$; $c_{1000} = -2995$

Por tanto, $\lim_{n \to \infty} (5 - 3n) = -\infty$

d) $d_{10} = 96$; $d_{100} = 996$; $d_{1000} = 9996$

Por tanto, $\lim_{n \to \infty} (10n - 4) = \infty$

**9.31 Calcula el término de la sucesión $a_n = 4 + 2n$ a partir del cual todos son mayores que 10 000.**

$4 + 2n > 10\,000 \Rightarrow 2n > 9996 \Rightarrow n > 4998$

A partir de $a_{4998}$.

**9.32 Halla el término de la sucesión $a_n = 3 - n$ a partir del cual todos son menores que $-1000$.**

$3 - n < -1000 \Rightarrow -n < -1003 \Rightarrow n > 1003$

A partir de $a_{1003}$.

**9.33 Comprueba que a partir del término $b_{23}$, todos los términos de la sucesión $b_n = 12 - 2n^2$ son menores que $-1000$. ¿Cuál es su límite?**

$12 - 2n^2 < -1000 \Rightarrow -2n^2 < -1012 \Rightarrow n^2 > 506 \Rightarrow n > 22{,}49 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (12 - 2n^2) = -\infty$

**9.34 Demuestra que $\lim_{n \to \infty} \frac{6 - 2n}{3} = -\infty$.**

Dado $k < 0$, $\frac{6 - 2n}{3} < k \Rightarrow 6 - 2n < 3k \Rightarrow -2n < 3k - 6 \Rightarrow n > \frac{6 - 3k}{2}$

Entonces, para cada valor $k < 0$ se puede encontrar un valor de $n$ de modo que todos los términos a partir de $a_n$ sean menores que ese valor de $k$.

**9.35 Dada la sucesión $a_n = \frac{n^2}{n + 2}$:**

**a) Calcula su límite.**

**b) Demuestra que se puede encontrar un término a partir del cual todos son mayores que 100.**

a) $a_{10} = 8{,}3\ldots$; $a_{100} = 98{,}03\ldots$; $a_{1000} = 998{,}00\ldots$ Por tanto, $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n + 2} = \infty$

b) $\frac{n^2}{n + 2} > 100 \Rightarrow n^2 - 100n - 200 > 0$

Resolvemos la inecuación obteniendo las raíces de $n^2 - 100n - 200$.

$n = \frac{100 \pm \sqrt{10\,000 + 800}}{2}$; $n_1 = 101{,}96$, y $n_2 = -1{,}96$

Como lo que buscamos es el término de la sucesión $a_n$ a partir del cual todos los términos son mayores que él, consideramos solo la raíz positiva. El término buscado es 102.

## Límites de operaciones con sucesiones

**9.36** **Si $\lim_{n\to\infty} a_n = -4$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 3$, calcula:**

**a)** $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$

**b)** $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$

**c)** $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3a_n}{b_n}$

**d)** $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}$

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = -4 + 3 = -1$

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = -4 \cdot 3 = -12$

c) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3a_n}{b_n} = \dfrac{3 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{-12}{3} = -4$

d) $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = \lim_{n\to\infty}(a_n)^{\lim_{n\to\infty} b_n} = (-4)^3 = -64$

**9.37** **Halla el resultado de estas operaciones cuando $n \to \infty$.**

**a)** $7n^2 + 2n$

**b)** $\dfrac{n^3 - 2}{-9}$

**c)** $\dfrac{4}{1 - n}$

**d)** $(n + 3) \cdot (5 - n^2)$

a) $(7n^2 + 2n) = \infty + \infty = \infty$

b) $\dfrac{n^3 - 2}{-9} = \dfrac{\infty - 2}{-9} = -\infty$

c) $\dfrac{4}{1 - n} = \dfrac{4}{-\infty} = 0$

d) $(n + 3) \cdot (5 - n^2) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$

**9.38** **Calcula:**

**a)** $\lim_{n\to\infty}\left(3 \cdot \dfrac{2}{n - 5}\right)$

**b)** $\lim_{n\to\infty}\left(6 + \dfrac{4}{n}\right)^2$

**c)** $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n + 1}}{4}\right)$

**d)** $\lim_{n\to\infty} 4^{\frac{-5}{2n}}$

**e)** $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{8}{n}\right)\left(2 + \dfrac{1}{3n}\right)$

**f)** $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{5}{\sqrt{n}}\right)$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(3 \cdot \dfrac{2}{n - 5}\right) = 3 \cdot 0 = 0$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(6 + \dfrac{4}{n}\right)^2 = 6^2 = 36$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n + 1}}{4}\right) = \infty$

d) $\lim_{n\to\infty} 4^{\frac{-5}{2n}} = 4^0 = 1$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{8}{n}\right)\left(2 + \dfrac{1}{3n}\right) = 1 \cdot 2 = 2$

f) $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{5}{\sqrt{n}}\right) = 1$

## Indeterminaciones

**9.39** **Calcula:**

**a)** $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2 + 5n + 2}{3n - 6}$

**b)** $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^3 + 4n}{n^3 - 1}$

**c)** $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2 + n - 2}{3n^4 + n^2}$

**d)** $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{3n - 1}\right)^{3n - 1}$

**e)** $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2 + n}\right)^{2 + n}$

a) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2 + 5n + 2}{3n - 6} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{3}{n} - \dfrac{6}{n^2}}$

b) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^3 + 4n}{n^3 - 1} = \dfrac{2 + \dfrac{4}{n^2}}{1 - \dfrac{1}{n^3}} = 2$

c) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2 + n - 2}{3n^4 + n^2} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} - \dfrac{2}{n^4}}{3 + \dfrac{1}{n^2}} = 0$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{3n - 1}\right)^{3n - 1} = e$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2 + n}\right)^{2 + n} = e$

**9.40 Halla:**

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+n+n^4}{3n^4+2n^2}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^6-4n^3+2}{4n^4+3n-9}$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+n}{4n^2+1}}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+2}{\sqrt{4n^3+n}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+n+n^4}{3n^4+2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{5}{n^4}+\dfrac{1}{n^3}+1}{3+\dfrac{2}{n^2}} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+n}{4n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{4+\dfrac{1}{n^2}}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^6-4n^3+2}{4n^4+3n-9} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-\dfrac{4}{n^3}+\dfrac{2}{n^6}}{\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{3}{n^5}-\dfrac{9}{n^6}} = \infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+2}{\sqrt{4n^3+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{5}{n^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{2}{n^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}} = 0$

**9.41 Encuentra los siguientes límites:**

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{2n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^2 \cdot 1 = e^2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^8 = e^8$

**9.42 Halla:**

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{7}{n+1}\right)^{n}$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n}$

**b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-3}{n+5}\right)^{n+1}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^2-1}{4n^2+1}\right)^{n^2}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{7}{n+1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{n+1}{-7}}\right)^{\frac{n+1}{-7}}\right]^{\frac{-7n}{n+1}} = e^{-7}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-3}{n+5}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+5-5-3}{n+5}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{-8}{n+5}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{n+5}{-8}}\right)^{\frac{n+5}{-8}}\right]^{\frac{-8n-8}{n+5}} = e^{-8}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1-1+1}{n+2}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+2}-\dfrac{1}{n+2}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{-n-2}\right)^{-n-2}\right]^{\frac{n}{-n-2}} = e^{-1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^2-1}{4n^2+1}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^2+1-1-1}{4n^2+1}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{-2}{4n^2+1}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{4n^2+1}{-2}}\right)^{\frac{4n^2+1}{-2}}\right]^{\frac{-2n^2}{4n^2+1}} = e^{\frac{-1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

**9.43 Si una sucesión tiende a 0, ¿se puede afirmar que tiene límite? Razona tu respuesta.**

Sí, puesto que 0 es un número real.

**9.44 A partir del término $a_{50}$ de una sucesión, todos los términos son mayores que 1000. ¿A qué tiende esa sucesión?**

La sucesión tiende a $+\infty$.

**9.45 Si a partir de un término, todos los de una sucesión están a una distancia de 3 menor que 0,00001, ¿es 3 el límite de esa sucesión?**

Sí

**9.46 Si la diferencia entre los diez primeros términos de una sucesión y 5 es menor que 0,0001, ¿es 5 el límite de la sucesión?**

No necesariamente, puesto que la distancia entre los primeros términos de la sucesión y el límite no es importante en el concepto de límite.

**9.47 Razona si es posible encontrar una sucesión de términos negativos que tienda a $+\infty$. ¿Y una de términos positivos que tienda a $-\infty$?**

En el primer caso, si los términos son negativos y la sucesión es decreciente, tenderá a $-\infty$, y si son negativos y la sucesión creciente, no tenderá a un número.

Del mismo modo, si los términos son positivos y la sucesión creciente, tenderá a $+\infty$, y si son positivos y la sucesión decreciente, tenderá a un número.

**9.48 Escribe una sucesión que tienda a:**

**a)** $+\infty$
**b)** 2
**c)** $-\infty$
**d)** $-1$

a) 2, 8, 24, 96, 480, 2880…
b) 1; 1,5; 1,8; 1,9; 1,99…
c) $-2, -8, -24, -96, -480, -2880$…
d) $-2; -1,5; -1,1; -1,01; -1,001$…

**9.49 Explica si una sucesión puede tener dos límites diferentes.**

No es posible. Como a partir de un término de la sucesión la diferencia entre los términos y el límite es tan pequeña como queramos, si existieran dos límites, no se podría cumplir esa condición para los dos valores, puesto que si sucede para uno, es imposible que suceda lo mismo para el otro.

**9.50 Razona si son verdaderas o falsas estas afirmaciones:**

**a) El límite de una sucesión cuyos términos son todos negativos es $-\infty$.**

**b) Una sucesión con todos sus términos iguales no tiene límite.**

**c) Si a partir de un término, todos los de la sucesión son mayores que un valor positivo cualquiera, la sucesión es divergente.**

**d) Una sucesión de términos decimales no puede tener por límite un número entero.**

a) Falsa. La sucesión $a_n = -\dfrac{1}{n}$ tiende a 0 y todos sus términos son negativos.

b) Falsa. Su límite sería el valor de todos los términos de la sucesión.

c) Verdadera. Tienden a $+\infty$.

d) Falsa. La sucesión del apartado a es un ejemplo de ello.

**9.51 Cuando al calcular el límite de una sucesión surge una indeterminación, significa que:**

**a) El límite no se puede calcular.**

**b) Tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.**

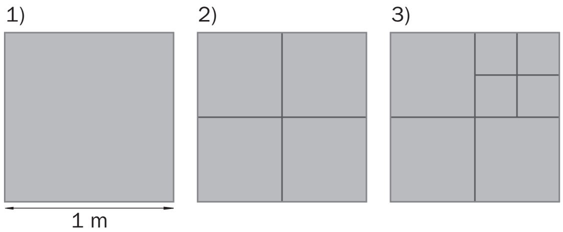
**c) Es necesario utilizar otro método para obtener el límite.**

**Señala la respuesta correcta.**

La respuesta correcta es la c.

## PROBLEMAS PARA APLICAR

**9.52 Partiendo de un cuadrado de 1 metro de lado, se construyen otros trazando paralelas a los lados por sus puntos medios.**




**a) Copia en tu cuaderno y completa esta tabla.**

| Pasos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| N.º de cuadrados | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 |
| Longitud del lado del cuadrado más pequeño (m) | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |

**b) ¿Cuántos cuadrados hay en el décimo paso? ¿Cuánto mide el lado de los cuadrados más pequeños en este paso?**

**c) Estudia a qué tienden la sucesión del número de cuadrados y la de la longitud del cuadrado más pequeño.**

b) La sucesión del número de cuadrados en cada paso es una progresión aritmética de primer término 1 y diferencia 3; por tanto, en el décimo paso habrá 28 cuadrados.

La sucesión de la longitud del cuadrado más pequeño es una progresión geométrica de primer término 1 y razón $\frac{1}{2}$; por tanto, en el décimo paso la longitud del cuadrado más pequeño será $\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$.

c) La sucesión del número de cuadrados tiende a $+\infty$, y la del lado del cuadrado más pequeño, a 0.

**9.53 Javier y Laura se encuentran a una distancia de 10 metros. Javier avanza la mitad de esa distancia y Laura retrocede la cuarta parte. Después, Javier avanza de nuevo la mitad de la distancia que lo separa de Laura y esta retrocede la cuarta parte.**

**a) Halla los términos de la sucesión que indica en cada movimiento la distancia que los separa.**

**b) ¿Llegarán a juntarse en algún momento?**

a) $a_1 = 10 + \frac{1}{4} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10 = \frac{3}{4} \cdot 10 = 7{,}5$

$a_2 = \frac{3}{4} \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 10 = 5{,}625$

$a_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 10 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 10 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 10 = 4{,}21875$

$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 10$

b) Se trata de encontrar un término, o lo que es lo mismo, un valor de $n$ de modo que $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 10 = 0$.

Pero eso no es posible puesto que $\left(\frac{3}{4}\right)^n \neq 0$ para cualquier valor de $n$.

Sin embargo, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 10 = 0$. Por tanto, solo se juntarían en el $\infty$.

**9.54 Los padres de Juan abrieron una cartilla con 60 euros a un 2 % anual cuando nació.**

**a) Si no volvieron a ingresar dinero, calcula qué cantidad había al finalizar el primer año, el segundo y el tercero.**

**b) Escribe el término general que permite obtener el dinero que tiene la cartilla al final de cada año.**

**c) Halla el límite de la sucesión.**

**d) Si no se saca dinero, ¿a partir de qué año tendrá una cantidad superior a 10 000 euros?**

a) Al finalizar el primer año: $a_1 = 60 + 60 \cdot 0{,}02 = 60 \cdot 1{,}02 = 61{,}12$

Al finalizar el segundo año: $a_2 = 60 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 = 60 \cdot 1{,}02^2 = 62{,}424$

Al finalizar el tercer año: $a_3 = 60 \cdot 1{,}02^2 \cdot 1{,}02 = 60 \cdot 1{,}02^3 = 63{,}67248$

b) $a_n = 60 \cdot 1{,}02^n$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} (60 \cdot 1{,}02^n) = \infty$

d) $60 \cdot 1{,}02^n > 10\,000 \Rightarrow 1{,}02^n > \dfrac{10\,000}{60} \Rightarrow \log 1{,}02^n > \log\left(\dfrac{1000}{6}\right) \Rightarrow n \log 1{,}02 > \log\left(\dfrac{1000}{6}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow n > \dfrac{\log\left(\dfrac{1000}{6}\right)}{\log 1{,}02} \Rightarrow n > 258{,}3$

A partir del año 259.

**9.55 El crecimiento de ciertas plantas es de aproximadamente 0,1 milímetros al día.**

**a) Calcula el término general de la sucesión que muestra su crecimiento diario.**

**b) Si se dejan crecer indefinidamente, ¿a partir de qué día su altura será superior a 1 metro?**

a) Si $l$ es la longitud de la planta, $a_n = l + 0{,}1n$

b) 1 m = 1000 mm

$l + 0{,}1n > 1000 \Rightarrow 0{,}1n > 1000 - l \Rightarrow n > 10\,000 - 10\,l$

Según la longitud inicial de la planta, el valor de $n$ varía.

**9.56 De un material radiactivo se sabe que 1 kilogramo se reduce a la mitad cada año.**

**a) ¿Cuál es el término general de la sucesión que expresa la pérdida de material con el tiempo?**

**b) ¿A qué tiende esta sucesión?**

**c) Encuentra el año a partir del cual la cantidad de material que queda es inferior a 1 gramo.**

a) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

c) $\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right| < 0{,}001 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^n < 0{,}001 \Rightarrow -\log 2 \cdot n < \log 0{,}001 \Rightarrow n > \dfrac{\log 0{,}001}{-\log 2} \Rightarrow n > 9{,}97$

A partir del décimo año.

**9.57 Cada persona produce al año unos 300 kilogramos de basura, de la que un 90% se puede reciclar. Calcula a partir de qué año la cantidad de basura reciclable es superior a 10 000 toneladas.**

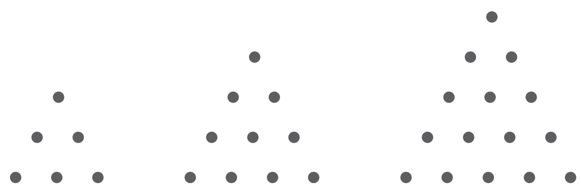
Cantidad anual de basura reciclada por persona: $300 \cdot 0{,}9 = 270$ kilos.

Al cabo de $n$ años se obtendrán $270n$ kilos de basura reciclada.

$270n > 10\,000\,000 \Rightarrow n > \dfrac{10\,000\,000}{270} \Rightarrow n > 37\,037{,}037$

A partir del año 37 038.

**9.58 La cantidad de puntos en estas figuras determina los llamados números triangulares.**



**a) Determina los primeros términos de la sucesión de los números triangulares.**

**b) Calcula su término general.**

**c) ¿Qué término es igual a 231?**

**d) ¿Es una sucesión convergente o divergente? Demuéstralo.**

a) $a_1 = 6;\quad a_2 = 10;\quad a_3 = 15;\quad a_4 = 21;\quad a_5 = 28$

b) $a_n = 6 + 4 + 5 + 6 + 7 + \ldots + (n + 2) = 6 + (4 + 5 + \ldots + n + 2) = 6 + \dfrac{4 + n + 2}{2}(n - 1) = \dfrac{n^2 + 5n + 6}{2}$

c) $\dfrac{n^2 + 5n + 6}{2} = 231 \Rightarrow n^2 + 5n + 6 = 462 \Rightarrow n^2 + 5n - 456 = 0$

$$n = \frac{-5 \pm \sqrt{425 + 1824}}{2} = \frac{-5 \pm 43}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = \dfrac{-5 + 43}{2} = 19 \\ n = \dfrac{-5 - 43}{2} = -24 \end{cases}$$

$a_{19} = 231$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 + 5n + 6}{2} = \infty$

Es divergente.

**R E F U E R Z O**

## Sucesiones. Hacia la idea de límite

**9.59 ¿Cuál es el límite, si lo tienen, de estas sucesiones?**

**a) 1, 3, 5, 7, 9, 11…**

**b) 0,1; 0,3; 0,7; 0,8; 0,9; 0,99…**

**c) −1,7; −1,8; −1,9; −1,99; −1,999…**

a) No tiene límite; es divergente.

b) 1

c) −2

**9.60 Indica, obteniendo algunos términos, si tienen límite estas sucesiones.**

**a)** $a_n = \dfrac{5}{n^2}$

**b)** $b_n = \dfrac{2n}{n - 1}$

**c)** $c_n = 4n^{6n}$

**d)** $d_n = \dfrac{3n + 2}{n}$

a)

| $n$ | 10 | 100 | 1000 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 0,05 | 0,0005 | 0,000005 | $\to 0$ |

b)

| $n$ | 10 | 100 | 1000 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | 2,22 | 2,02 | 2,002 | $\to 2$ |

c)

| $n$ | 10 | 100 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|
| $c_n$ | $1{,}32 \cdot 10^{36}$ | $1{,}723 \cdot 10^{361}$ | $\to \infty$ |

d)

| $n$ | 10 | 100 | 1000 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $d_n$ | 3,2 | 3,02 | 3,002 | $\to 3$ |

9.61 **Comprueba que existe un término de la sucesión $a_n = \dfrac{2 + 3n}{n}$ a partir del cual la diferencia entre los términos y 3 es menor que 0,000001.**

$$\left|\frac{2 + 3n}{n} - 3\right| < \frac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow \left|\frac{2 + 3n - 3n}{n}\right| < \frac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow \left|\frac{2}{n}\right| < \frac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow \frac{2}{n} < \frac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow n > 2\,000\,000$$

A partir del término $a_{2\,000\,000}$.

9.62 **Halla el límite de la sucesión $a_n = \dfrac{1}{3 + n}$ y comprueba que, a partir del término $a_{998}$, todos distan del límite menos de 0,001.**

$a_{10} = 0{,}076\ldots$; $a_{100} = 0{,}0097\ldots$; $a_{1000} = 0{,}00099\ldots$ Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{3 + n} = 0$

$$\left|\frac{1}{3 + n}\right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{1}{3 + n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 1000 < 3 + n \Rightarrow n > 997$$

A partir del término $a_{997}$, todos distan del límite menos de 0,001.

9.63 **Dada la sucesión $a_n = 4 + \dfrac{1}{n}$.**

**a) Calcula su límite.**

**b) Halla el término a partir del cual la diferencia entre los términos de la sucesión y el límite es menor que 0,001.**

a) $a_{10} = 4{,}1$; $a_{100} = 4{,}01$; $a_{1000} = 4{,}001$. Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(4 + \dfrac{1}{n}\right) = 4$.

b) $\left|4 + \dfrac{1}{n} - 4\right| < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow n > 1000$. A partir de $a_{1000}$.

## Sucesiones divergentes

9.64 **Encuentra el término de la sucesión $a_n = 4n^2$ a partir del cual todos son mayores que 10 000.**

$4n^2 > 10000 \Rightarrow n^2 > 2500 \Rightarrow n > 50$

A partir de $a_{50}$.

9.65 **Comprueba que existe un término de la sucesión $a_n = 2 - 3n$ a partir del cual todos son menores que $-1000$.**

$2 - 3n < -1000 \Rightarrow 3n > 1002 \Rightarrow n > 334$

A partir de $a_{334}$.

9.66 **Copia en tu cuaderno y completa.**

$\dfrac{4}{2n^3}$ $\qquad \dfrac{6n + 1}{2}$ $\qquad -5n^2$ $\qquad \dfrac{3}{n - 1}$ $\qquad \dfrac{8n}{4n + 3}$

| Convergentes | Divergentes |
|---|---|
| $\dfrac{4}{n^3}$ | $\dfrac{6n + 1}{2}$ |
| $\dfrac{3}{n - 1}$ | $-5n^2$ |
| $\dfrac{8n^3}{4n + 3}$ | |

## Cálculo de límites

**9.67 Calcula:**

**a)** $\lim\limits_{n \to \infty} (3 - n^2)$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(6 + \frac{5}{n}\right)$ **c)** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{7 + 8n}{4}$ **d)** $\lim\limits_{n \to \infty} 2^n$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} (3 - n^2) = -\infty$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{7 + 8n}{4} = +\infty$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(6 + \frac{5}{n}\right) = 6$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} 2^n = +\infty$

**9.68 Calcula:**

**a)** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n - 1}{2n + 4}$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3 + 2n}{1 + n^2}$ **c)** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{10n^2 - n}{5n^2 + 3}$ **d)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{4n + 1}\right)^{4n + 1}$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n - 1}{2n + 4} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{4}{n}} = \frac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{10n^2 - n}{5n^2 + 3} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{10 - \frac{1}{n}}{5 + \frac{3}{n^2}} = 2$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3 + 2n}{1 + n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{3}{n^2} + \frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} + 1} = 0$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{4n + 1}\right)^{4n + 1} = e$

### A M P L I A C I Ó N

**9.69 Halla los siguientes límites.**

**a)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1 + 2n}{2n}\right)^{2n}$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3 + n}{n}\right)^{n}$ **c)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{5n}{2n - 1}\right)^{n}$ **d)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1 + 2n}{2n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n}{2n} + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{5n}{2n - 1}\right)^{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{5}{2}\right)^{\infty} = \infty$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3 + n}{4n}\right)^{n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}} = e$

**9.70 Demuestra que la sucesión $a_n = n^2 - 2n$ es divergente. ¿A qué tiende?**

$a_{10} = 80$; $a_{100} = 9800$; $a_{1000} = 998\,000$. Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} (n^2 - 2n) = \infty$

**9.71 Escribe el término general de dos sucesiones cuyo límite sea 3. ¿El término a partir del cual la distancia entre los términos y el límite es menor que una milésima es el mismo en ambas?**

$a_n = \frac{3n - 1}{n}$; $\left|\frac{3n - 1}{n} - 3\right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \left|\frac{3n - 1 - 3n}{n}\right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow n > 1000$

A partir de $a_{1000}$.

$b_n = \frac{3n^2 - 1}{n^2}$; $\left|\frac{3n^2 - 1}{n^2} - 3\right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \left|\frac{3n^2 - 1 - 3n^2}{n^2}\right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1000} \Rightarrow n^2 > 1000 \Rightarrow n > 31{,}62$

A partir de $b_{32}$.

9.72 **Encuentra el valor de *k* para que el límite sea el que se indica.**

a) $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{kn - 3}{2n + 1} \right) = 2$

b) $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{kn^2 - 1}{3n^2 + 2} \right) = -1$

a) $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{kn - 3}{2n + 1} \right) = 2 \Rightarrow \left( \frac{kn - 3}{2n + 1} \right) = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} = 2 \Rightarrow k = 4$

b) $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{kn^2 - 1}{3n^2 + 2} \right) = -1 \Rightarrow \left( \frac{kn^2 - 1}{3n^2 + 2} \right) = \frac{k}{3} \Rightarrow \frac{k}{3} = -1 \Rightarrow k = -3$

9.73 **Halla el valor de *a* para que se cumpla:**

a) $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{2n^3 - 1}{4n^a + n - 3} \right) = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{3n^a - n}{n + 2} \right) = +\infty$

a) $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{2n^3 - 1}{4n^a + n - 3} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 3$

b) $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{3n^a - n}{n + 2} \right) = +\infty \Rightarrow a > 1$

9.74 **Calcula los límites y comprueba que no se cumplen las igualdades de las operaciones con límites. ¿A qué crees que es debido?**

a) $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{3 + n}{2} - \frac{n^2 + 1}{n} \right)$

b) $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{7 + n^2}{n} : \frac{2 + n^3}{n^2} \right)$

a) $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{3 + n}{2} - \frac{n^2 + 1}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left( \frac{3n + n^2 - 2n^2 - 2n}{2n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left( \frac{-n^2 + n}{2n} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{-1 + \frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = -\infty$

$\lim_{n \to \infty} \frac{3 + n}{2} - \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 1}{n} = \infty - \infty$

b) $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{7 + n^2}{n} : \frac{2 + n^3}{n^2} \right) = \lim_{n \to \infty} \left( \frac{7n^2 + n^4}{2n + n^4} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{7}{n^2} + 1}{\frac{2}{n^3} + 1} = 1$

$\left( \lim_{n \to \infty} \frac{7 + n^2}{n} \right) : \left( \lim_{n \to \infty} \frac{2 + n^3}{n^2} \right) = \infty : \infty$

No se cumplen las igualdades porque en el caso de aplicar las operaciones con límites salen indeterminaciones.

9.75 **Calcula el término de la sucesión $a_n = 3^n$ a partir del cual todos los términos son mayores que 1000.**

$3^n > 1000 \Rightarrow n \log 3 > \log 1000 \Rightarrow n > 6{,}29$

A partir de $a_7$.

**9.76 Dada la sucesión $a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$:**

**a) Calcula su límite.**

**b) Halla el término de la sucesión a partir del cual la diferencia entre los términos y el límite es menor que una centésima.**

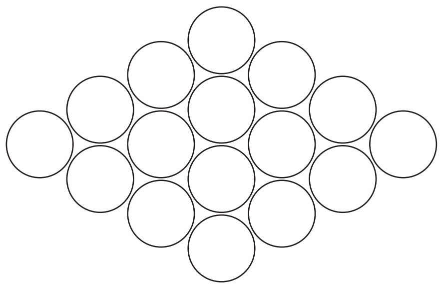
a) $a_{10} = 0{,}000\,104\ldots$; $a_{100} = 1{,}60 \cdot 10^{-40}$; $\qquad \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

b) $\left|\left(\frac{2}{5}\right)^n\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^n < \frac{1}{100} \Rightarrow n \log\left(\frac{2}{5}\right) < \log\frac{1}{100} \Rightarrow -0{,}39 \cdot n < -2 \Rightarrow n > 5{,}02$. A partir de $a_6$.

## PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

**9.77 Rombo de naranjas**

**Un conjunto de naranjas se agrupan en una especie de rombo con cuatro naranjas por cada lado.**



**a) Indica el número de naranjas necesarias para construir una figura semejante a la dada, pero suponiendo que el lado del rombo tuviera dos, tres y cinco unidades en cada caso.**

**b) ¿Cuál de los siguientes términos generales representa el número de naranjas necesarias para construir una figura con $n$ unidades por lado?**

**$a_n = 6(n - 1)$ $b_n = n^2 + n$ $c_n = 6 \cdot 2^{n-2}$**

a) Para la figura de lado dos se necesitarán $2(1 + 2) = 6$ naranjas; para la de lado tres se necesitarán $2(1 + 2 + 3) = 12$ naranjas, y para la figura de lado cinco se necesitarán $2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 30$ naranjas.

b) Para una figura con $n$ unidades por lado se necesitan $2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) = n^2 + n$.

**9.78 Autoalimentación**

**Cierta especie de insectos parecidos a las abejas se organiza de la siguiente forma:**

- **150 animales se dedican al mantenimiento de la colmena y a proporcionarle calor, y el resto de los insectos liba el néctar necesario de las flores para fabricar la miel que alimenta a toda la población.**
- **Cada 100 recolectores elaboran 5 gramos de miel diarios, y la miel producida se reparte entre todos los miembros de la colmena.**

**a) Suponiendo que haya 500 individuos, ¿de cuánta miel puede disponer cada insecto al día?**

**b) ¿Y considerando que sean 1000 individuos? ¿Y si son 10 000?**

**c) Generaliza los resultados calculando los gramos de miel con los que puede contar cada insecto suponiendo que la colmena está formada por $n$ individuos. Después, estima dichos gramos suponiendo que la población de la colmena es inmensa.**

a) Hay $500 - 150 = 350$ recolectores, que obtienen $350 \cdot 0{,}05 = 17{,}5$ gramos de miel. Por tanto, cada individuo recibirá $17{,}5 : 500 = 0{,}035$ gramos diarios de miel.

b) En una población de 1000 insectos hay $1000 - 150 = 850$ recolectores, que obtienen $850 \cdot 0{,}05 = 42{,}5$ gramos. Por tanto, cada insecto dispondrá de 0,0425 gramos de miel.

En una población de 10 000 insectos hay $10\,000 - 150 = 9850$ recolectores, que obtienen $9850 \cdot 0{,}05 = 492{,}5$ gramos. Cada individuo tendrá 0,04925 gramos de miel.

c) Generalizando los resultados anteriores, la cantidad de miel diaria de que dispone cada insecto en una población de $n$ individuos viene dada por $\frac{(n - 150) \cdot 0{,}05}{n}$. El límite de la sucesión anterior es 0,05 y, por tanto, en una población inmensa de insectos, cada uno de ellos dispone de 0,05 gramos de miel al día.

9.A1 **Halla los términos que sean necesarios para obtener el valor al que tienden estas sucesiones y calcula dicho valor.**

**a)** $a_n = \dfrac{4 - n}{3 + 2n}$ **b)** $b_n = \dfrac{2n + 5}{n^2 - 1}$

a)

| $n$ | 10 | 100 | 1000 | 10 000 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $-0{,}260$ | $-0{,}47$ | $-0{,}497$ | $-0{,}4997$ | $\to -0{,}5$ |

b)

| $n$ | 10 | 100 | 1000 | 10 000 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | 0,25 | 0,0205 | 0,002 | 0,0002 | $\to 0$ |

9.A2 **Calcula el límite de estas sucesiones y halla el valor del término a partir del cual todos los demás difieren del límite menos de 0,001.**

**a)** $a_n = \dfrac{2n}{n + 1}$

**b)** $b_n = \dfrac{3n - 1}{n + 2}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2$

$\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right| < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow \left|\dfrac{2n - 2n - 2}{n+1}\right| < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow \dfrac{2}{n+1} < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow 2000 < n + 1 \Rightarrow n > 1999$

A partir de $a_{1999}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{n+2} = \dfrac{3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 3$

$\left|\dfrac{3n-1}{n+2} - 3\right| < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow \left|\dfrac{3n - 1 - 3n - 6}{n+2}\right| < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow \dfrac{7}{n+2} < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow 7000 < n + 2 \Rightarrow n > 6998$

A partir de $a_{6998}$.

9.A3 **Calcula, si es posible, el término de las sucesiones a partir del cual todos los siguientes son menores que −10 000.**

**a)** $a_n = 5 - n$ **b)** $b_n = 2n^2 + 8$

a) $5 - n < -10\,000 \Rightarrow n > 10\,005 \Rightarrow$ A partir de $a_{10\,005}$.

b) $2n^2 + 8 < -10\,000 \Rightarrow n^2 < 5004 \Rightarrow n < 70{,}73$

No existe un término a partir del cual todos los demás sean menores que $-10\,000$, ya que el valor de $n$ que se obtiene indica que cumplen esa condición los términos menores que $a_{70}$.

9.A4 **Indica si estas sucesiones son divergentes. ¿A qué tienden?**

**a)** $a_n = \dfrac{2 + n^2}{1 - n^2}$ **b)** $b_n = \dfrac{1 + n^2}{3n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + n^2}{1 - n^2} = \dfrac{\frac{2}{n^2} + 1}{\frac{1}{n^2} - 1} = -1$. No es divergente.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + n^2}{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^2} + 1}{\frac{3}{n}} = \infty$. Sí es divergente.

**9.A5** **Calcula los siguientes límites.**

**a)** $\lim\limits_{n \to \infty} (2n^3 + 5)$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{n-8}$ **c)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n^2 - 3}{7}\right)$ **d)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(4 + \frac{9}{n^2}\right)$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} (2n^3 + 5) = \infty$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{n-8} = \infty$ c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n^2 - 3}{7}\right) = \infty$ d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(4 + \frac{9}{n^2}\right) = 4$

**9.A6** **Halla los siguientes límites.**

**a)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^4 + 1}\right)$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{6n^3 - 3n}{2n^3 + 7}\right)$ **c)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n - 5}{3n^2 + 2}\right)$ **d)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{5n^2}{n - 1}\right)$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^4 + 1}\right) = 0$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{6n^3 - 3n}{2n^3 + 7}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{6 - \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{7}{n^3}} = 3$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n - 5}{3n^2 + 2}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{2}{n^2}} = 0$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{5n^2}{n - 1}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{5}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \infty$

**9.A7** **Calcula:**

**a)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n - 5}\right)^{3n}$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n - 5}\right)^{3n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n - 5}\right)^{n-5}\right]^{\frac{3n}{n-5}} = e^3$

## MURAL DE MATEMÁTICAS

### MATETIEMPOS

### Sumas y más sumas

**Fíjate en las siguientes sumas.**

$$1 + \frac{1}{1} = 2 \qquad 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} = 2{,}5 \qquad 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}67$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}71$$

**Calcula las tres sumas que continúan la serie. ¿Cuál crees que es el resultado si se suman infinitos términos?**

Construiremos la siguiente tabla.

| Término | $a_1$ | $a_2$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor | $1 + 1$ | $a_1 + \frac{1}{2}$ | $a_2 + \frac{1}{6}$ | $a_3 + \frac{1}{24}$ | $a_4 + \frac{1}{120}$ | $a_5 + \frac{1}{720}$ | $a_6 + \frac{1}{5040}$ |
| Suma | 2 | 2,5 | 2,67 | 2,7083 | 2,7167 | 2,7181 | 2,7183 |

El resultado de la suma de infinitos términos es el número e.

### EJERCICIOS PROPUESTOS

**10.1 Halla el dominio y el recorrido de estas funciones.**

**a)** $f(x) = 3x - 1$ **b)** $g(x) = |x|$ **c)** $h(x) = x^3$

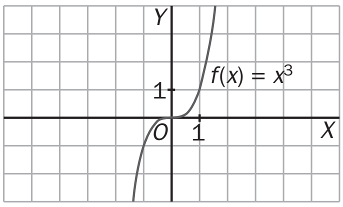
a) $D(f) = \mathbf{R}$; Recorrido $(f) = \mathbf{R}$ b) $D(g) = \mathbf{R}$; Recorrido $(g) = [0, +\infty)$ c) $D(h) = \mathbf{R}$; Recorrido $(h) = \mathbf{R}$

**10.2 Calcula el dominio de estas funciones.**

**a)** $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 1}$ **b)** $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ **c)** $h(x) = \dfrac{2x + 3}{x(x^2 + 1)}$ **d)** $j(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

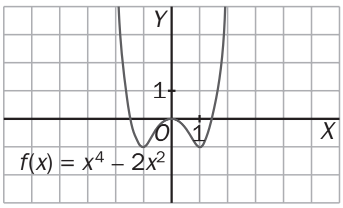
a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ b) $D(g) = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ c) $D(h) = \mathbf{R} - \{0\}$ d) $D(j) = \mathbf{R}$

**10.3 Estudia el crecimiento o decrecimiento de la función $f(x) = x^3$.**




La función $f(x) = x^3$ es constantemente creciente, pues $TV\,[x, x + h] = (x + h)^3 - x^3 > 0$, ya que si $h > 0$, $x + h > x$, y, en consecuencia, $(x + h)^3 > x^3$.

**10.4 Indica en qué intervalos es creciente o decreciente la función $y = x^4 - 2x^2$.**

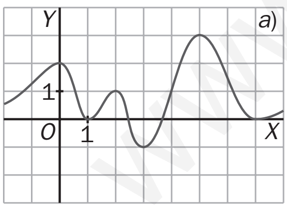


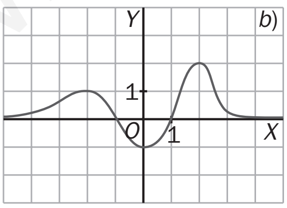

A la vista de la gráfica se observa que:

$f(x)$ es creciente en: $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

$f(x)$ es decreciente en: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

**10.5 Señala los máximos y mínimos de estas funciones.**



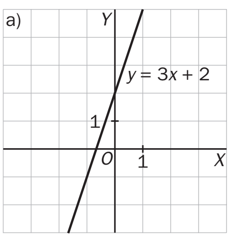

a) La función presenta máximos relativos en los puntos (0, 2), (2, 1) y (5, 3); un máximo absoluto en (5, 3); mínimos relativos en (1, 0), (3, −1) y (7,0) y un mínimo absoluto en (3, −1).

b) La función presenta máximos relativos en los puntos (−2, 1) y (2, 2); un máximo absoluto en (2, 2); un mínimo relativo en (0, −1) y un mínimo absoluto en (0, −1).

**10.6 Indica los máximos y mínimos de estas funciones.**

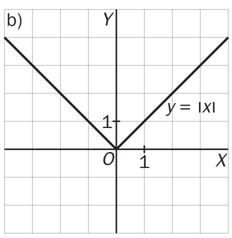
**a)** $y = 3x + 2$ **b)** $y = |x|$ **c)** $y = (x - 2)^2 + 3$ **d)** $y = x^2 - 4$

a)



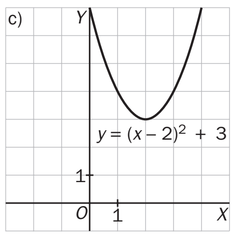

No tiene ni máximos ni mínimos.

b)



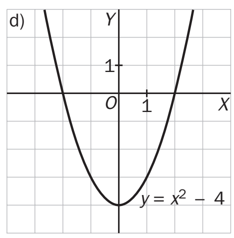

Presenta un mínimo absoluto en el origen.

c)



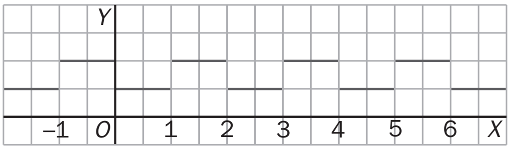

Presenta un mínimo absoluto en (2, 3).

d)




Presenta un mínimo absoluto en (0, −4).

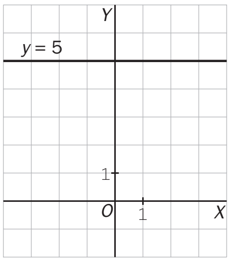
**10.7 Indica si es periódica la siguiente función. En caso afirmativo, calcula su período.**




La función dada por su gráfica es periódica, de período 2, ya que $f(x) = f(x + 2)$.

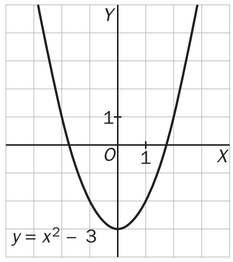
**10.8 Estudia si están acotadas y qué tipo de acotación presentan las siguientes funciones.**

**a)** $y = 5$




Está acotada superior e inferiormente.

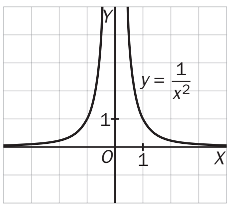
**b)** $y = x^2 - 3$




Está acotada inferiormente.

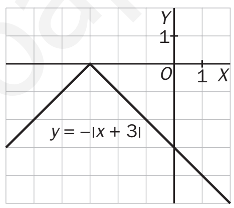
**10.9 Comprueba si están acotadas y qué tipo de acotación presentan las siguientes funciones.**

**a)** $y = \dfrac{1}{x^2}$




Está acotada inferiormente.

**b)** $y = -|x + 3|$




Está acotada superiormente.

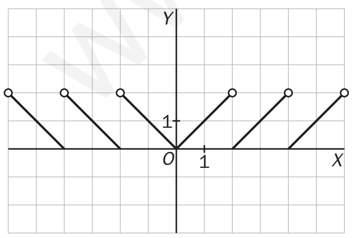
**10.10 La función $f(x)$ asocia a cada número real su parte decimal. Por ejemplo: $f(2,6) = 0{,}6$; $f(-4,2) = 0{,}2$.**

**a) Dibuja su gráfica.**

**b) ¿Es periódica? En caso afirmativo, indica su período.**

**c) ¿Está acotada?**

a)




b) No es periódica.

c) Está acotada superior e inferiormente.

**10.11 ¿Presentan algún tipo de simetría estas funciones?**

**a)** $y = 3x$ **b)** $y = 3x + 2$ **c)** $y = 5x^2 + 3$

a) $f(-x) = 3(-x) = -3x = -f(x)$. Simetría impar.

b) $f(-x) = 3(-x) + 2 = -3x + 2$. No presenta ninguna simetría.

c) $f(-x) = 5(-x)^2 + 3 = 5x^2 + 3 = f(x)$. Simetría par.

**10.12 Estudia la simetría de las siguientes funciones.**

**a)** $y = |x|$ **b)** $y = -3x^2 + 1$ **c)** $y = -2x^3 + 2$

a) $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. Simetría par.

b) $f(-x) = -3(-x)^2 + 1 = -3x^2 + 1$. Simetría par.

c) $f(-x) = -2(-x)^3 + 2 = 2x^3 + 2$. No presenta simetrías.

**10.13 Si $f(x) = |x|$, $g(x) = 3x$ y $h(x) = x^2 + 4$, calcula las siguientes funciones.**

**a)** $3f$ **b)** $f + 2g$ **c)** $g \cdot h$ **d)** $\dfrac{g}{h}$

a) $3f(x) = 3 \cdot f(x) = 3|x|$

b) $(f + 2g)\ (x) = f(x) + 2g(x) = |x| + 2 \cdot 3x = |x| + 6x$

c) $(g \cdot h)\ (x) = 3x \cdot (x^2 + 2) = 3x^3 + 6x$

d) $\left(\dfrac{g}{h}\right)(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 4}$

**10.14 Dadas las funciones $f(x) = 5x^2 + 3$ y $g(x) = x + 7$:**

**a) Calcula las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$.**

**b) ¿Es conmutativa la composición de funciones?**

a) $(g \circ f)\ (x) = g[f(x)] = g(5x^2 + 3) = 5x^2 + 3 + 7 = 5x^2 + 10$

$(f \circ g)\ (x) = f[g(x)] = f(x + 7) = 5\ (x + 7)^2 + 3 = 5\ (x^2 + 14x + 49) + 3 = 5x^2 + 70x + 248$

b) Como $g \circ f \neq f \circ g$, se deduce que la composición de funciones no es conmutativa.

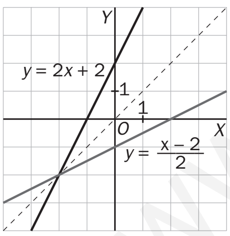
**10.15 Considera la función $f(x) = y = 2x + 2$.**

**a) Halla la función recíproca de $f$.**

**b) Representa la función $f$ y su recíproca. ¿Cómo son respecto de la recta $y = x$?**

a) $y = 2x + 2 \Rightarrow 2x = y - 2 \Rightarrow x = \dfrac{y - 2}{2} \Rightarrow y = \dfrac{x - 2}{2}$

b)




Son simétricas respecto de $y = x$.

**10.16 Dada la función $f(x) = 3x^2 - 5$:**

**a) Halla la función $f^{-1}$.**

**b) Calcula la composición de estas funciones: $f^{-1} \circ f$ $\quad f \circ f^{-1}$**

a) $y = 3x^2 + 5 \Rightarrow 3x^2 = y + 5 \Rightarrow x^2 = \dfrac{y + 5}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{y + 5}{3}} \Rightarrow y = +\sqrt{\dfrac{x + 5}{3}} \Rightarrow f^{-1}(x) = +\sqrt{\dfrac{x + 5}{3}}$

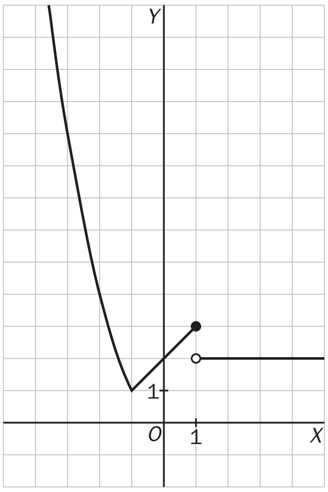
b) $(f^{-1} \text{ o } f)\ (x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x^2 - 5) = +\sqrt{\dfrac{3x^2 - 5 + 5}{3}} = +\sqrt{x^2} = x$

$(f \text{ o } f^{-1})\ (x) = f\,(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt{\dfrac{x + 5}{3}}\right) = 3\left(\sqrt{\dfrac{x + 5}{3}}\right)^2 - 5 = 3\,\dfrac{x + 5}{3} - 5 = x$

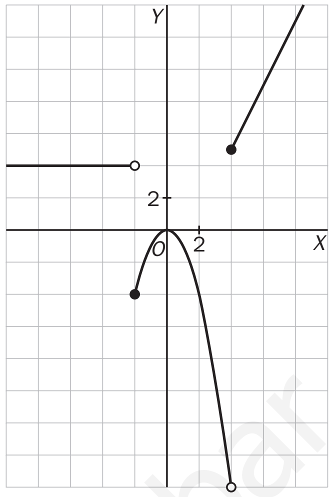
**10.17 Representa estas funciones definidas a trozos.**

**a)** $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} 4 & x < -2 \\ -x^2 & -2 \le x < 4 \\ 2x - 3 & x \ge 4 \end{cases}$

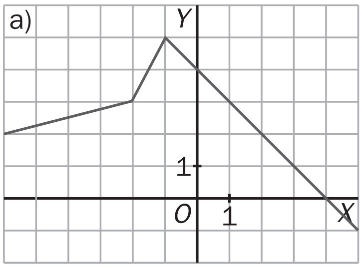
a)

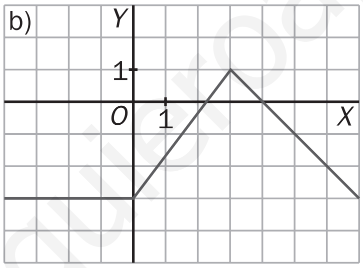



b)




**10.18 Observa estas dos representaciones gráficas y escribe las fórmulas de las funciones a las que corresponden.**




a) Ecuación de recta que pasa por $(-6, 2)$ y $(-2, 3)$:

$$m = \frac{3 - 2}{-2 - (-6)} = \frac{1}{4};\ y - 2 = \frac{1}{4}(x + 6);\ y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$$

Ecuación de recta que pasa por $(-2, 3)$ y $(-1, 5)$:

$$m = \frac{5 - 3}{-1 - (-2)} = 2;\ y - 3 = 2(x + 2);\ y = 2x + 7$$

Ecuación de recta que pasa por $(-1, 5)$ y $(4, 0)$:

$y = -x + 4$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{7}{2} & x \le -2 \\ 2x + 7 & -2 < x < -1 \\ -x + 4 & x \ge -1 \end{cases}$$

b) Función constante $-3$:

$y = -3$

Ecuación de recta que pasa por $(0, -3)$ y $(3, 1)$:

$$m = \frac{1 - (-3)}{3 - 0} = \frac{4}{3};\ y + 3 = \frac{4}{3}x;\ y = \frac{4}{3}x - 3$$

Ecuación de la recta que pasa por $(3, 1)$ y $(4, 0)$:

$y = -x + 4$

$$f(x) = \begin{cases} -3 & x < 1 \\ \frac{4}{3}x - 3 & 1 \le x < 3 \\ -x + 4 & x \ge 3 \end{cases}$$

10.19 **Un automóvil parte desde Logroño hacia Palencia a 100 km/h. Simultáneamente, otro sale desde Palencia hacia Logroño a 60 km/h.**

**Sabiendo que ambas capitales distan 200 kilómetros, ¿a qué distancia de Logroño se producirá el encuentro?**

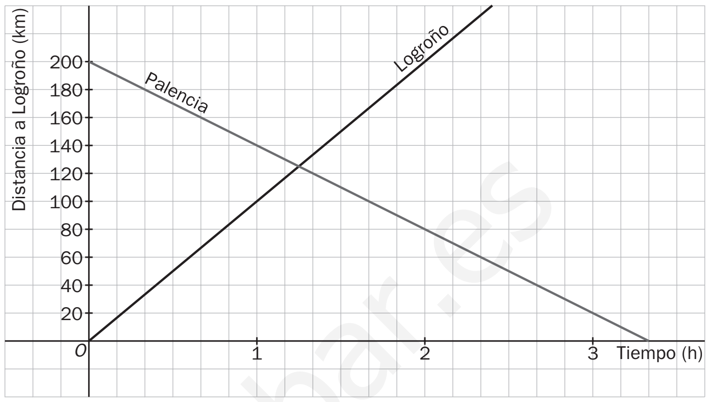
Representamos las gráficas distancia-tiempo de cada vehículo, considerando la distancia de los vehículos a Logroño. Para ello solo necesitamos calcular dos valores en cada caso.

Vehículo que sale desde Logroño

| t | d |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 200 |

Vehículo que sale desde Palencia

| t | d |
|---|---|
| 0 | 200 |
| 2 | 80 |




Se encuentran a 125 km de Logroño.

10.20 **Resuelve de nuevo la situación del ejercicio anterior si la velocidad de cada coche aumentase en 20 km/h por hora.**

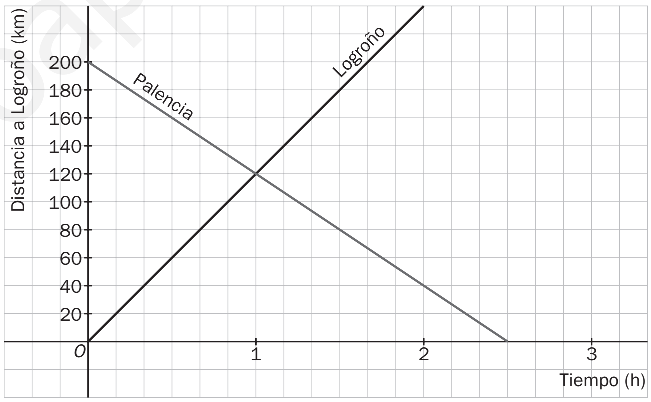
**¿A qué distancia de Logroño se cruzarían en este caso?**

Vehículo que sale desde Logroño

| t | d |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 120 |

Vehículo que sale desde Palencia

| t | d |
|---|---|
| 0 | 200 |
| 2 | 20 |




Se encuentran a 120 km de Logroño.

# ACTIVIDADES

## EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

### Concepto de función

10.21 **Construye una tabla de 6 valores para las funciones:**

**a)** $f(x) = 5x + 3$ **b)** $g(x) = x^2 + 2x$ **c)** $y = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$ **d)** $y = \sqrt{10 - x}$

a)

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 |

b)

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | $-1$ | 0 | 3 | 8 | 15 |

c)

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{-1}{2}$ | $-3$ | 7 | $\frac{9}{2}$ | 18 |

d)

| $x$ | $-15$ | $-6$ | 1 | 6 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

**10.22 Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.**

**a)** $f(x) = 4x - 6$ **c)** $y = \sqrt{x^2 + 2}$ **e)** $h(x) = \sqrt{3 + 2x}$

**b)** $y = x^2 + 3$ **d)** $g(x) = \sqrt{15 - 3x}$ **f)** $y = \sqrt{8x - 6}$

a) $D(f) = \mathbf{R}$; $R(f) = \mathbf{R}$

c) $D(f) = \mathbf{R}$; $R(f) = [\sqrt{2}, +\infty)$

e) $D(h) = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$; $R(h) = [0, +\infty)$

b) $D(f) = \mathbf{R}$; $R(f) = [3, +\infty)$

d) $D(g) = (-\infty, 5]$; $R(g) = [0, +\infty)$

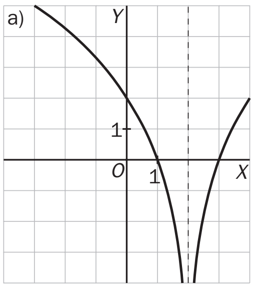
f) $D(f) = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$; $R(f) = [0, +\infty)$

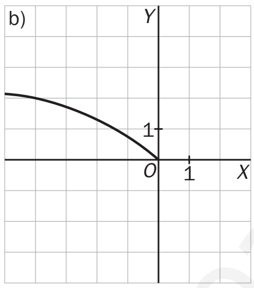
**10.23 Dibuja una función:**

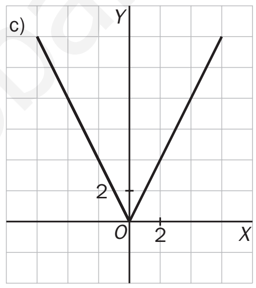
**a) Que su dominio sea R − {2} y su recorrido R.**

**b) Que su dominio sea (−∞, 0].**

**c) Que su dominio sea [−6, 6] y su recorrido [0, 12].**




**10.24 Calcula el dominio de estas funciones.**

**a)** $f(x) = \dfrac{2x - x^3}{4x^2 + 6}$ **c)** $g(x) = \dfrac{x - 2}{3x^2 - 3}$ **e)** $h(x) = \dfrac{x}{2x + 8}$

**b)** $y = \dfrac{1}{x^3 - 8}$ **d)** $y = \dfrac{1}{2 - x}$ **f)** $y = \dfrac{3x^2 - 6}{x^2 + 5x + 4}$

a) $D(f) = \mathbf{R}$

c) $D(g) = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

e) $D(h) = \mathbf{R} - \{-4\}$

b) $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$

d) $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$

f) $D(f) = \mathbf{R} - \{-4, -1\}$

**10.25 Escribe la fórmula de una función:**

**a) Cuyo dominio sea [3, +∞).**

**b) Cuyo dominio sea R, y su recorrido, R⁺.**

**c) Cuyo dominio sea [0, +∞), y su recorrido, R⁻.**

a) $f(x) = \sqrt{x - 3}$ b) $g(x) = x^2$ c) $h(x) = -\sqrt{x}$

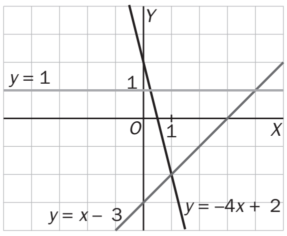
**10.26 Halla el dominio de estas funciones.**

**a)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 10}$ **b)** $y = \dfrac{1 - 5x - x^2}{x^3 + 3x^2 - 4x}$ $x$ **c)** $y = \dfrac{x + 3}{x^2 - 5x + 4}$ **d)** $y = \dfrac{2}{\sqrt{x - 7}}$

a) $D(f) = \mathbf{R} - \left\{\frac{5}{2}, -2\right\}$ b) $D(f) = \mathbf{R} - \{-4, 0, 1\}$ c) $D(f) = \mathbf{R} - \{1, 4\}$ d) $D(f) = (7, +\infty)$

## Características de las funciones

**10.27 Dibuja las funciones $y = x - 3$, $y = 2 - 4x$ e $y = 1$. A la vista de la gráfica, ¿qué tipo de crecimiento presenta cada una de ellas?**




$y = x - 3$, creciente

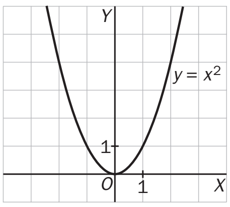
$y = 2 - 4x$, decreciente

$y = 1$, constante

**10.28 Teniendo en cuenta su gráfica, estudia la función $y = x^2$ en los intervalos [0; 0,5] y [−0,5; 0].**

**a) ¿Es creciente o decreciente?**

**b) ¿Qué se puede afirmar del punto (0, 0)?**




a) La función es creciente en [0; 0,5] y decreciente en [−0,5; 0].

b) El punto (0, 0) es un mínimo de la función.

**10.29 Para cada una de las funciones representadas a continuación, estudia:**

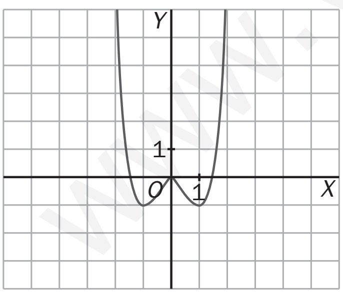
**a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

**b) Los máximos y mínimos relativos y absolutos.**

**c) La simetría.**

**d) Si están acotadas y, en su caso, el tipo de acotación que presentan.**

$f(x) = x^4 - 2x^2$




a) Crece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Decrece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

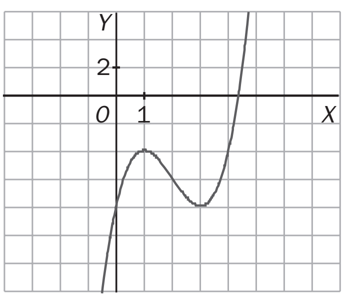
b) $(-1, -1)$ y $(1, -1)$ son mínimos relativos y absolutos.

$(0, 0)$ es máximo relativo. No tiene máximos absolutos.

c) Presenta simetría par.

d) Está acotada inferiormente.

$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$




a) Decrece en $(1, 3)$ . Crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

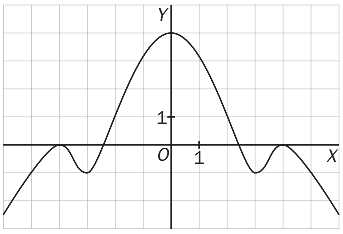
b) $(3, -8)$ es un mínimo relativo, y $(1, -4)$ es un máximo relativo.

No tiene máximos ni mínimos absolutos.

c) No presenta simetrías.

d) No está acotada.

**10.30 Dibuja una función con las siguientes características: tiene un mínimo relativo en (−3, −1); un máximo relativo en (0, 4), y es par.**




**10.31 Estudia la simetría de las siguientes funciones, indicando en caso afirmativo de qué tipo de simetría se trata.**

**a)** $f(x) = x^3 - 4x$ **b)** $g(x) = 2 - x^4$ **c)** $h(x) = \dfrac{3}{x - 1}$ **d)** $j(x) = 1 - x^3$

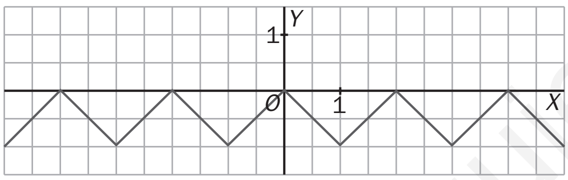
a) $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -f(x) \Rightarrow$ Es impar.

b) $f(-x) = 2 - (-x)^4 = 2 - x^4 = f(x) \Rightarrow$ Es par.

c) $f(-x) = \dfrac{3}{-x - 1} \neq f(x) \Rightarrow$ No es par. $f(-x) = \dfrac{3}{-x - 1} \neq -f(x) \Rightarrow$ No es impar.

d) $f(-x) = 1 - (-x)^3 = 1 + x^3 \neq f(x) \Rightarrow$ No es par. $f(-x) = 1 - (-x)^3 = 1 + x^3 \neq -f(x) \Rightarrow$ No es impar.

**10.32 Observa la gráfica siguiente:**




**a) Si es una función periódica, indica su período.**

**b) ¿Qué valor toma la función cuando $x$ es par? ¿Y cuando $x$ es impar?**

**c) Indica una cota superior y una cota inferior de la función.**

a) Es periódica de período $T = 2$.

b) Cuando $x$ es par, $f(x) = 0$, y cuando $x$ es impar, $f(x) = -1$.

c) 0 es una cota superior, y −1 es una cota inferior.

## Operaciones con funciones

**10.33 Dadas $f(x) = 3x - 6$ y $g(x) = x^2 + 2x - 4$, calcula:**

**a)** $(2f + g)(x)$ **b)** $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$ **c)** $(4g - 3f)(x)$ **d)** $(g \circ f)(x)$ **e)** $(f \cdot g)(x)$ **f)** $f^{-1}(x)$

a) $(2f + g)(x) = 6x - 12 + x^2 + 2x - 4 = x^2 + 8x - 16$

b) $(4g - 3f)(x) = 4x^2 + 8x - 16 - 9x + 18 = 4x^2 - x + 2$

c) $(f \cdot g)(x) = 3x^3 + 6x^2 - 12x - 6x^2 - 12x + 24 = 3x^3 - 24x + 24$

d) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{3x - 6}{x^2 + 2x - 4}$

e) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x - 6) = (3x - 6)^2 + 2 \cdot (3x - 6) - 4 = 9x^2 - 36x + 36 + 6x - 12 = 9x^2 - 30x + 24$

f) $y = 3x - 6 \Rightarrow 3x = y + 6 \Rightarrow x = \dfrac{y + 6}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x + 6}{3}$

**10.34** **Si $f(x) = \dfrac{3}{x+5}$ y $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, calcula:**

**a) $(2f - 4g)(x)$** **b) $(f \cdot g)(x)$** **c) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$**

a) $(2f - 4g)(x) = \dfrac{6}{x+5} - \dfrac{4x^2+4}{x} = \dfrac{6x - 4x^3 - 20x^2 - 4x - 20}{x^2+5x} = \dfrac{-4x^3 - 20x^2 + 2x - 20}{x^2+5x}$

b) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{3x^2+3}{x^2+5x}$

c) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{x^2+1}{x} : \dfrac{3}{x+5} = \dfrac{(x^2+1)(x+5)}{3x} = \dfrac{x^3+5x^2+x+5}{3x}$

**10.35** **Comprueba si $f(x) = 2x^2 - 4$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+4}{2}}$ son funciones recíprocas.**

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x^2 - 4) = \sqrt{\dfrac{2x^2 - 4 + 4}{2}} = x$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt{\dfrac{x+4}{2}}\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{\dfrac{x+4}{2}}\right)^2 - 4 = x$

Son recíprocas porque su composición es la identidad.

**10.36** **Calcula las imágenes de $x = 0$, $x = -1$ y $x = 2$ mediante las funciones $(g \circ f)(x)$ y $g^{-1}(x)$, siendo $f(x) = 3x^2 + 4x$ y $g(x) = \sqrt{x+9}$.**

$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = \sqrt{0+9} = 3$

$(g \circ f)(-1) = g[f(-1)] = g(-1) = \sqrt{-1+9} = \sqrt{8}$

$(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g(20) = \sqrt{20+9} = \sqrt{29}$

$y = \sqrt{x+9} \Rightarrow y^2 = x + 9 \Rightarrow x = y^2 - 9 \Rightarrow g^{-1}(x) = x^2 - 9$

$g^{-1}(0) = 0^2 - 9 = -9$ $g^{-1}(-1) = (-1)^2 - 9 = -8$ $g^{-1}(2) = 2^2 - 9 = -5$

**10.37** **Si $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ y $g(x) = \sqrt{5-2x}$, calcula:**

**a) $f^{-1}(x)$** **c) $f^{-1}(3)$**

**b) $g^{-1}(x)$** **d) $g^{-1}(2)$**

a) $y = \dfrac{x-1}{x+3} \Rightarrow yx + 3y = x - 1 \Rightarrow yx - x = -1 - 3y \Rightarrow x(y-1) = -1 - 3y \Rightarrow x = \dfrac{1+3y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1+3x}{1-x}$

b) $y = \sqrt{5-2x} \Rightarrow y^2 = 5 - 2x \Rightarrow 2x = 5 - y^2 \Rightarrow x = \dfrac{5-y^2}{2}$

c) $f^{-1}(3) = \dfrac{1 + 3 \cdot 3}{1-3} = \dfrac{10}{-2} = -5$

d) $g^{-1}(2) = \dfrac{5-2^2}{2} = \dfrac{5-4}{2} = \dfrac{1}{2}$

**10.38** **Calcula $(g \circ f)(-2)$ y $(f \circ g)(1)$, siendo $f(x) = 2x^2 - 9$ y $g(x) = \dfrac{1}{2x-1}$.**

$(g \circ f)(-2) = g[f(-2)] = g(-1) = \dfrac{-1}{3}$ $(f \circ g)(1) = f[g(1)] = f(1) = -7$

## Funciones definidas a trozos

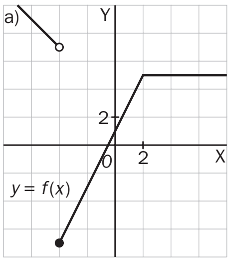
**10.39 Considera la función $f(x) = \begin{cases} 8 - x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 + 9 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ y calcula $f(3)$, $f(10)$, $f(0)$, $f(-1)$ y $f\left(\frac{3}{4}\right)$.**

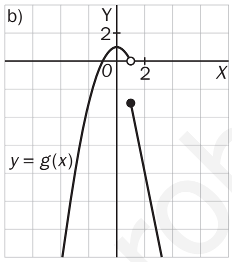
$f(3) = 3 \cdot 3^2 + 9 = 36$ $\quad$ $f(10) = 3 \cdot 10^2 + 9 = 309$ $\quad$ $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 9 = 9$

$f(-1) = 8 - (-1)^2 = 7$ $\quad$ $f\left(\frac{3}{4}\right) = 8 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{23}{16}$

**10.40 Dibuja las siguientes funciones definidas a trozos.**

**a)** $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -4 \\ 2x + 1 & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2 - 5x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$




**10.41 Calcula la imagen de $x = 2$ en cada una de las funciones siguientes.**

**a)** $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si } x < 2 \\ 4 - 3x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $g(x) = \begin{cases} 6x + 3 & \text{si } x < 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \\ 2x^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $\qquad$ **c)** $h(x) = \begin{cases} 8x^3 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2 + 7x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

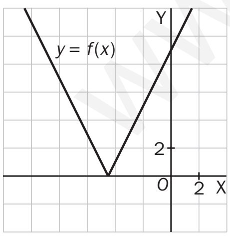
a) $f(2) = -2$ $\qquad$ b) $g(2) = 0$ $\qquad$ c) $h(2)$ no se puede calcular.

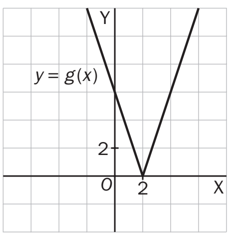
**10.42 Dibuja $f(x) = |2x + 9|$ y $g(x) = |6 - 3x|$. Indica para cada una de ellas:**

**a) ¿Qué valores de $x$ tienen por imagen 1?**

**b) ¿Cuáles tienen por imagen 0?**

**c) ¿Y cuáles son las que tienen por imagen $-2$?**




a) $x = -4$ y $x = -5$ en $f(x)$; $x = \frac{5}{3}$ y $x = \frac{7}{3}$ en $g(x)$.

b) $x = \frac{-9}{2}$ en $f(x)$, y $x = 2$ en $g(x)$.

c) Ningún valor de $x$ puede tener como imagen $-2$ porque el valor absoluto de un número nunca es negativo.

### CUESTIONES PARA ACLARARSE

**10.43 Si una función es periódica de período 4, ¿es suficiente conocer su gráfica en el intervalo $[-2, 2]$ para poder representarla en R?**

Sí, ya que la amplitud del intervalo es 4, y si es periódica, basta conocer su gráfica en un intervalo de amplitud igual al período para dibujarla en **R**.

**10.44 Si la imagen de 0 mediante una función, *f*, es 3, ¿qué se puede afirmar de la imagen de 3 respecto de la función recíproca de *f*, $f^{-1}$?**

Que es 0.

**10.45 ¿Qué relación tienen dos funciones que son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante?**

Son recíprocas.

**10.46 Una función continua está definida en R, es creciente en $(-\infty, -3)$ y en $(4, +\infty)$, y decreciente en $(-3, 4)$. ¿Tiene máximos y/o mínimos relativos?**

Sí. Tiene un mínimo relativo en $x = -3$ y un máximo relativo en $x = 4$.

**10.47 El recorrido de una función es $(-1, 1)$. Razona si está acotada superior y/o inferiormente.**

Está acotada superior e inferiormente, ya que por su recorrido se observa que la función no toma valores menores e iguales que $-1$ ni mayores o iguales que 1.

**10.48 Si una función es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$, ¿se puede afirmar que tiene un máximo en $x = 0$?**

No, porque puede ser que no esté definida en $x = 0$.

**10.49 Demuestra si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:**

**a) $y = |x|$ es una función impar.**

**b) $y = x^2 + 4$ es creciente en R.**

**c) $y = 1 - x^2$ está acotada superiormente.**

**d) $y = \dfrac{2x}{x^3 - x}$ es una función par.**

a) Falsa. $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

b) Falsa. Es creciente solo en $(0, +\infty)$.

Si $0 < a < b$, entonces $TV[a, b] = f(b) - f(a) = b^2 + 4 - a^2 - 4 = (b + a) \cdot (b - a) > 0$.

Si $a < b < 0$, entonces $TV[a, b] = f(b) - f(a) = b^2 + 4 - a^2 - 4 = (b + a) \cdot (b - a) < 0$.

c) Verdadera. 1 es una cota superior de la función, puesto que $1 - x^2 > 1$.

d) Verdadera. $f(-x) = \dfrac{2\,(-x)}{(-x)^3 + x} = \dfrac{-2x}{-(x^3 - x)} = f(x)$.

**10.50 El dominio de una función $f(x)$ es R, y el de otra, $g(x)$ es R $-$ {2}. ¿Se puede calcular $(f + g)(2)$? ¿Y $(f \circ g)(2)$?**

No se puede calcular ninguno de los dos valores, ya que en ambos casos es necesario hallar $g(2)$, y la función $g$ no está definida para ese valor de $x$.

**10.51 La función $f(x)$ se anula cuando $x = -1$, $x = 0$ y $x = 3$. Halla el dominio de $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x)$.**

$D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 0, 3\}$

**10.52 Demuestra que son ciertas las siguientes afirmaciones:**

**a) Si dos funciones son pares, su suma también es par.**

**b) El cociente de dos funciones impares es par.**

a) $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$

b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-x) = \dfrac{f(-x)}{g(-x)} = \dfrac{-f(x)}{-g(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

**10.53 Juan está estudiando dos ofertas de trabajo como comercial de electrodomésticos, *A* y *B*, que solo se diferencian en el sueldo.**

**Oferta *A*: 1050 euros mensuales y 10 euros por cada aparato vendido hasta un máximo de 20 al mes.**

**Oferta *B*: 600 euros al mes y 20 euros por cada electrodoméstico vendido.**

**a) Escribe la fórmula que expresa el sueldo mensual de Juan en cada caso en función del número de electrodomésticos vendidos.**

**b) Calcula el dominio y el recorrido de cada una de las funciones correspondientes.**

**c) ¿Aumentará siempre el sueldo en función del número de aparatos que venda?**

**d) ¿Tienen las funciones algún máximo o mínimo?**

a) Oferta A: $f(x) = 1050 + 10x$

Oferta B: $g(x) = 600 + 20x$

b) $D(f) = [0, 20]$; $R(f) = [1050, 1250]$

$D(g) = [0, +\infty)$; $R(g) = [600, +\infty)$

c) Si $a < b \leq 20 \Rightarrow TV[a, b] = f(b) - f(a) = 10b - 10a > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

Si $a > b > 20$, la función $f$ es constante, ya que no recibe más dinero por electrodoméstico vendido.

$a < b \Rightarrow TV[a, b] = g(b) - g(a) = 20b - 20a > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

d) La función $f(x)$ tiene un mínimo absoluto en (0, 1050) y un máximo absoluto en (20, 1250).

La función $g(x)$ solo tiene un mínimo absoluto en (0, 600).

**10.54 En su movimiento de rotación, la Tierra da una vuelta completa alrededor de su eje en un día.**

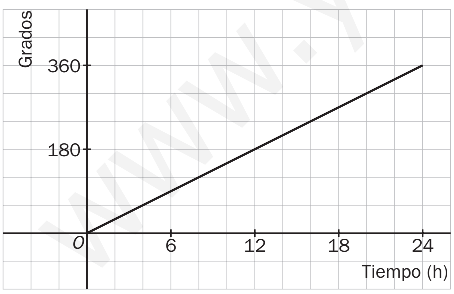
**a) Representa la gráfica de la función que indica el número de grados que gira en función del tiempo durante un día.**

**b) ¿Cuál sería la gráfica anterior a lo largo de una semana?**

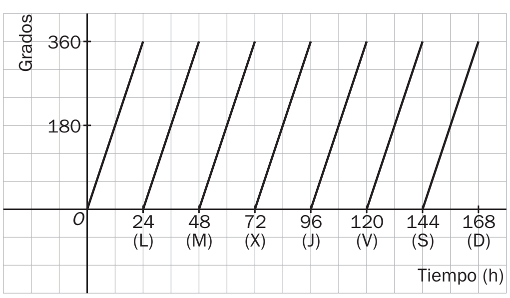
**c) ¿Está acotada la función semanal?**

**d) ¿Es una función periódica? ¿Y simétrica?**

a) La velocidad de giro de la Tierra es constante, la gráfica que representa el número de grados en función del tiempo es un recta.




b)




c) Sí, una cota superior es 360°.

d) La función semanal es periódica, y no simétrica.

**10.55 Una empresa fabrica DVD y sus costes de producción, en euros, vienen dados por la expresión $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 25x - 15$, donde $x$ es el número de DVD producidos. El precio de venta por unidad es $P(x) = 75 - \frac{x}{2}$. ¿Cuál es la función que expresa el beneficio obtenido con la venta de $x$ DVD?**

$B(x) = x \cdot P(x) - C(x) = 75x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^2 - 25x + 15 = -x^2 + 50x + 15$

**10.56 Cuando dejas caer una pelota desde una altura cualquiera, el espacio que recorre, $h$, viene dado por la expresión $h = 9{,}8 \cdot t^2$, siendo $t$ el tiempo.**

**Calcula la fórmula que permite obtener el tiempo transcurrido desde que se lanzó la pelota, $t$, en función de la altura a la que se encuentra.**

$t = \sqrt{\frac{h}{9{,}8}}$

**10.57 Un aljibe tiene 750 litros de agua al comienzo del día. Por una fisura pierde 2 litros cada hora. A la vez, está recibiendo agua a razón de 6 litros a la hora.**

**a) Estudia el crecimiento de la función que expresa el volumen de agua en el aljibe durante ese día.**

**b) ¿A qué hora estará más lleno? ¿Y más vacío? Indica las cantidades de agua almacenadas en esos momentos.**

a) $y = 750 - 2x + 6x$; $y = 750 + 4x$; $a < b \Rightarrow TV[a, b] = f(b) - f(a) = 4b - 4a > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

b) Mínimo en (0, 750), y máximo en (24, 846)

**10.58 Un jardinero quiere vallar un terreno de forma cuadrada y área desconocida en el que ha plantado unas flores. Encuentra la fórmula que permite obtener el lado del cuadrado en función de su área.**

**a) Si el área estuviera comprendida entre 120 y 180 metros cuadrados, ¿cuáles serían el dominio y el recorrido de la función?**

**b) La función descrita, ¿es creciente o decreciente?**

**c) ¿Tiene máximos o mínimos?**

El lado en función del área viene dado por $l = \sqrt{A}$

a) $D(f) = [120, 180]$; $R(f) = \left[\sqrt{120}, \sqrt{180}\right]$

b) $a < b \Rightarrow TV[a, b] = f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

c) Mínimo $(120, \sqrt{120})$ y máximo $(180, \sqrt{180})$

**10.59 Calcula la fórmula que permite obtener el diámetro de una lata cilíndrica de zumo en función de su altura para que contenga 500 mililitros del mismo.**

**Si la altura de la lata está comprendida entre 12 y 16 centímetros, ¿cuáles son el dominio y el recorrido de esa función?**

Si $d$ es el diámetro, $r$ el radio y $h$ la altura, entonces $d = 2 \cdot r = 2 \cdot \sqrt{\frac{500}{\pi h}}$.

$D(f) = [12, 16]$ $\qquad$ $R(f) = [6, 31; 7, 28]$

**10.60 Expresa mediante una función la distancia al lugar de partida a la que se encuentra un grupo de amigos que realiza la siguiente excursión.**

**a) Durante la primera hora y media caminan a una velocidad constante de 3 kilómetros por hora.**

**b) Descansan durante la media hora siguiente.**

**c) Regresan a una velocidad constante de 4,5 km/h.**

$$f(x) = \begin{cases} 3x & 0 \le x < 1{,}5 \\ 4{,}5 & 1{,}5 \le x < 2 \\ 13{,}5 - 4{,}5x & 2 \le x < 3 \end{cases}$$

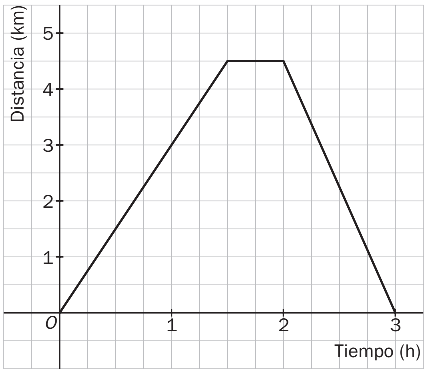
**10.61 Considera la función del problema anterior.**

**a) Calcula el dominio y el recorrido.**

**b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

**c) Indica sus máximos y mínimos si los tiene.**

**d) Explica si es una función acotada.**




a) $D(f) = [0, 3]$; $R(f) = [0; 4,5]$

b) Es creciente en $(0; 1,5)$ .Es decreciente en $(2, 3)$.

c) No tiene.

d) Está acotada superiormente, ya que la distancia al lugar de partida no es mayor de 4,5 km.

**R E F U E R Z O**

## Concepto y características de las funciones

**10.62 Halla el dominio de las funciones:**

**a)** $y = -x^2 - 4$

**b)** $y = \dfrac{2x}{4x^2 - 1}$

**c)** $y = \dfrac{3x^3 + 9}{7x^2 + 5x}$

**d)** $y = \sqrt{6x - 18}$

**e)** $y = \sqrt{12 - 4x}$

**f)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

a) $D(f) = \mathbf{R}$

b) $D(f) = \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

c) $D(f) = \mathbf{R} - \left\{0, \frac{-5}{7}\right\}$

d) $D(f) = [3, +\infty)$

e) $D(f) = (-\infty, 3]$

f) $D(f) = \mathbf{R}$

**10.63 Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 4x + x^2$ en los intervalos $[-2,2; -2]$ y $[-2; -1,8]$.**

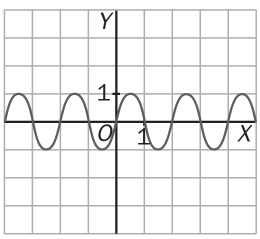
$TV[-2,2; -2] = f(-2) - f(-2,2) = -4 + 3,96 < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

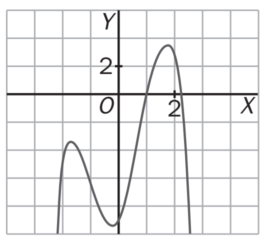
$TV[-2; -1,8] = f(-1, 8) - f(-2) = -3,96 + 4 > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

**10.64 De las siguientes funciones, indica cuáles son periódicas y cuáles están acotadas.**

**a)** $f(x) = \text{sen}(\pi \cdot x)$

**b)** $f(x) = -x^4 + 6x^2 + 2x - 9$




a) Es periódica de período $T = 2$ y está acotada superiormente por 1 e inferiormente por $-1$.

b) No es periódica. Está acotada superiormente por 4.

**10.65** **Estudia si las siguientes funciones presentan algún tipo de simetría.**

**a)** $f(x) = 1 - 2x + x^3$ **b)** $g(x) = x^4 + 2x^2 - 4$ **c)** $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5}$ **d)** $l(x) = 6x^3 - x$

a) $f(-x) = 1 - 2(-x) + (-x)^3 = 1 + 2x - x^3 \Rightarrow$ No es par ni impar.

b) $g(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 - 4 = x^4 + 2x^2 - 4 = f(x) \Rightarrow$ Es par.

c) $h(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2 - 5} = \dfrac{1}{x^2 - 5} = h(x) \Rightarrow$ Es par.

d) $l(-x) = 6(-x)^3 + (-x) = -6x^3 + x = -l(x) \Rightarrow$ Es impar.

## Operaciones con funciones

**10.66** **A partir de las funciones $f(x) = 8 - x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{2x}$, calcula las siguientes funciones.**

**a)** $(g - 2f)(x)$ **c)** $(f \cdot g)(x)$ **e)** $(f \circ g)(x)$

**b)** $(f + 3g)(x)$ **d)** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ **f)** $(g \circ f)(x)$

a) $(g - 2f)(x) = \dfrac{1}{2x} - 16 + 2x^2 = \dfrac{4x^3 - 32x + 1}{2x}$

b) $(f + 3g)(x) = 8 - x^2 + \dfrac{3}{2x} = \dfrac{16x - 2x^3 + 3}{2x}$

c) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{8 - x^2}{2x}$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 16x - 2x^3$

e) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{1}{2x}\right) = 8 - \dfrac{1}{4x^2}$

f) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(8 - x^2) = \dfrac{1}{16 - 2x^2}$

**10.67** **Halla la función recíproca de cada una de las siguientes.**

**a)** $f(x) = 5x + 2$ **b)** $g(x) = 2 - x^2$ **c)** $h(x) = \sqrt{1 + 3x}$ **d)** $l(x) = \dfrac{7}{4x}$

a) $y = 5x + 2 \Rightarrow 5x = y - 2 \Rightarrow x = \dfrac{y - 2}{5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x - 2}{5}$

b) $y = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 2 - y \Rightarrow x = \sqrt{2 - y} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{2 - x}$

c) $y = \sqrt{1 + 3x} \Rightarrow y^2 = 1 + 3x \Rightarrow 3x = y^2 - 1 \Rightarrow x = \dfrac{y^2 - 1}{3} \Rightarrow h^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$

d) $y = \dfrac{7}{4x} \Rightarrow x = \dfrac{7}{4y} = \Rightarrow l^{-1}(x) = \dfrac{7}{4x}$

## Funciones definidas a trozos

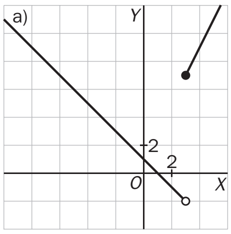
**10.68** **Calcula $f(-3)$, $f(0)$ y $f(4)$ en la siguiente función.** $f(x) = \begin{cases} 9x - x^2 & \text{si } x < 4 \\ 3x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

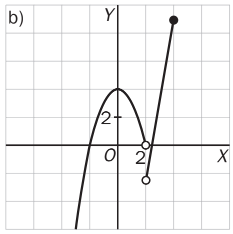
$f(-3) = 9 \cdot (-3) - (-3)^2 = -36$ $f(0) = 0$ $f(4) = 3 \cdot 4 = 12$

**10.69** **Dibuja las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ 6x - 15 & \text{si } 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$




## AMPLIACIÓN

**10.70** **Halla el dominio de las siguientes funciones.**

a) $y = \sqrt{\dfrac{x + 4}{x - 2}}$

b) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

c) $y = \sqrt{10 + 3x - x^2}$

d) $y = \sqrt{(x - 2)(x + 4)(x - 1)}$

e) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 - 9}}$

f) $y = \dfrac{|x - 6|}{\sqrt[4]{x^2 - 1}}$

a) $\dfrac{x + 4}{x - 2} \geq 0$ y $x - 2 \neq 0$. $D(f) = (-\infty, -4] \cup (2, +\infty)$

b) $x^2 + 4x + 3 \geq 0$. $D(f) = (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$

c) $D(f) = [-2, 5]$

d) $(x - 2)(x + 4)(x - 1) \geqslant 0$ $D(f) = [-4, 1] \cup [2, +\infty)$

e) $x^2 - 9 \neq 0$. $D(f) = \mathbf{R} - \{-3, 3\}$

f) $x^2 - 1 > 0$. $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

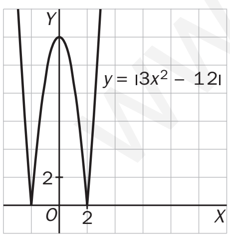
**10.71** **Si el dominio de una función $f(x)$ es $[3, +\infty)$, y el de otra, $g(x)$, es $\mathbf{R} - \{-2, -1, 3\}$, ¿cuál es el dominio de $(f + g)(x)$?**

$(3, +\infty)$

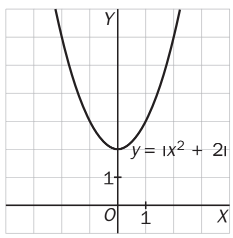
**10.72** **Dibuja las siguientes funciones e indica si tienen algún máximo o mínimo y de qué tipo es.**

a) $f(x) = |3x^2 - 12|$

b) $g(x) = |x^2 + 2|$




- Máximo relativo: (0, 12)
- Mínimos absolutos y relativos: (−2, 0), (2, 0)




- Mínimo absoluto y relativo: (0, 2)

**10.73** **El dominio de la función $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$ es R. Explica si es posible que exista un valor en el que $f(x)$ sea igual a 0.**

No es posible, puesto que en ese caso el dominio de la función sería **R** menos esos valores en los que se anula $f(x)$.

**10.74** **Dadas las funciones $f(x) = 1 - 5x$, $g(x) = \dfrac{2x}{x - 4}$ y $h(x) = \sqrt{3x - 2}$, calcula $(h \circ g \circ f)(x)$.**

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g \circ f)(x) = h[g(f(x))] = h[g(1 - 5x)] = h\left(\frac{2 - 10x}{-3 - 5x}\right) = \sqrt{3\,\frac{2 - 10x}{-3 - 5x} - 2} = \sqrt{\frac{12 - 20x}{-3 - 5x}}$$

**10.75 Estudia la simetría de las siguientes funciones.**

**a)** $y = |x^2 - 5x|$ **b)** $y = |1 + 4x - x^3|$ **c)** $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ **d)** $y = \dfrac{3x^2}{4 + x^4}$

a) $f(-x) = |(-x)^2 - 5\,(-x)| = |x^2 + 5x| \neq f(x) \Rightarrow$ No es par ni impar.

b) $f(-x) = |1 + 4\,(-x) - (-x)^3| = |1 - 4x + x^3| \neq f(x) \Rightarrow$ No es par ni impar.

c) $f(-x) = \dfrac{2\,(-x)}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{-2x}{x^2 + 1} = -f(x) \Rightarrow$ Es impar.

d) $f(-x) = \dfrac{3\,(-x)^2}{4 + (-x)^4}\,\dfrac{3x^2}{4 + x^4} = f(x) \Rightarrow$ Es par.

**10.76 Si $f(x)$ es una función impar y $g(x)$ es par, ¿qué tipo de simetría tiene la composición $(g \circ f)(x)$?**

$(g \circ f)(-x) = g\,[f(-x)] = g[-f(x)] = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$. Es par.

**10.77 Calcula la función recíproca de las siguientes.**

**a)** $f(x) = x^2 - 2x$ **b)** $g(x) = |9x - 5|$

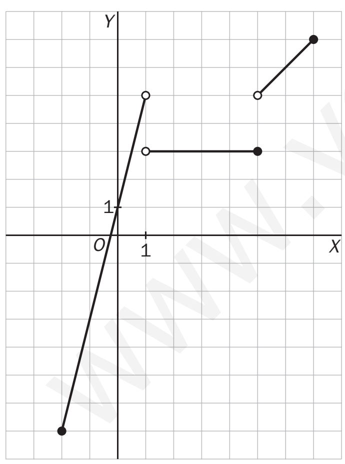
a) $y = x^2 - 2x \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 4y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 + x};\ f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 - x}$

b) $y = |9x - 5| \Rightarrow y = 9x - 5 \Rightarrow 9x = y + 5 \Rightarrow x = \dfrac{y + 5}{9} \Rightarrow g^{-1}(x) = \dfrac{x + 5}{9}$

**10.78 Representa gráficamente las siguientes funciones e indica si están acotadas.**

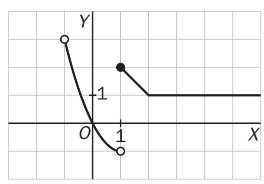
**a)** $f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x \leq 5 \\ x & \text{si } 5 < x \leq 7 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a)




$f\,(x)$ está acotada superiormente por 7 e inferiormente por $-7$

b)



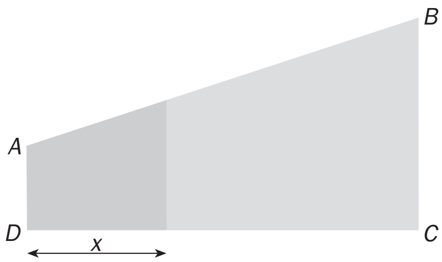

$g\,(x)$ está acotada superiormente por 3 e inferiormente por $-1$

**10.79 Evolución del área**

**En el trapecio rectángulo *ABCD* de la figura adjunta se verifica que:**

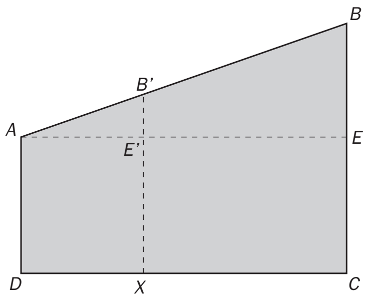
**$AD = 4$ cm** **$DC = 14$ cm** **$BC = 8$ cm**

**Un punto *x* se desplaza por el segmento *DC* de tal forma que su distancia a *D* es *x* centímetros.**




**a) Escribe, en función de *x*, el área de la figura sombreada.**

**b) Halla el valor de *x* para que las dos zonas en las que queda dividido el trapecio tengan la misma área.**




a) Área de la zona sombreada: área $AEE'$ + área $AE'XD$

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{BE}{AE} = \frac{B'E'}{AE'} \Rightarrow \frac{4}{14} = \frac{B'E'}{x} \Rightarrow B'E' = \frac{4x}{14} = \frac{2x}{7}$$

$$\text{Área} = 4x + \frac{x^2}{7}$$

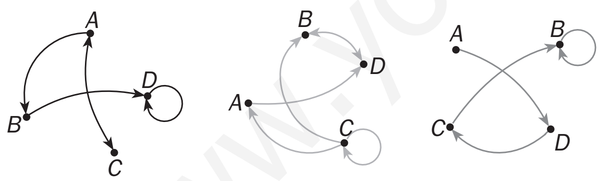
b) $\text{Área de la figura} = \dfrac{(8+4)\cdot 14}{2} = 84$

$$4x + \frac{x^2}{7} = \frac{84}{2} = 42;\ x^2 + 28x - 294 = 0;\ x = \frac{-28 \pm 44{,}26}{2}$$

Consideramos solo la raíz positiva.

**10.80 Grafos**

**Un grafo es una representación de una relación entre los elementos de un mismo conjunto. Observa tres posibles grafos del conjunto {*A*, *B*, *C*, *D*}.**




**Un grafo se puede representar mediante una tabla de unos y ceros: un uno indica que el elemento de esa fila está relacionado con el de esa columna, y un cero, que no lo está.**

**Observa la tabla correspondiente al primer grafo.**

| | ***A*** | ***B*** | ***C*** | ***D*** |
|---|---|---|---|---|
| ***A*** | **0** | **1** | **1** | **0** |
| ***B*** | **0** | **0** | **0** | **1** |
| ***C*** | **1** | **0** | **0** | **0** |
| ***D*** | **0** | **0** | **0** | **1** |

**a) Escribe las tablas asociadas a los otros dos grafos.**

**b) ¿Cuáles de estos grafos pueden considerarse funciones?**

a)

| | *A* | *B* | *C* | *D* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 0 | 0 | 0 | 1 |
| *B* | 0 | 0 | 0 | 1 |
| C | 1 | 1 | 1 | 0 |
| *D* | 0 | 1 | 0 | 0 |

| | *A* | *B* | *C* | *D* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 0 | 0 | 0 | 1 |
| *B* | 0 | 1 | 0 | 0 |
| C | 0 | 1 | 0 | 0 |
| *D* | 0 | 0 | 1 | 0 |

b) El tercero

**10.A1** **Calcula el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.**

**a)** $y = x^2 + 4x - 5$ **b)** $y = x^3 + 2x - 3$ **c)** $y = \sqrt{3x^2 + 4}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$

a) $D(f) = \mathbf{R}$ ; $R(f) = [-9, +\infty)$

b) $D(f) = \mathbf{R}$; $R(f) = \mathbf{R}$

c) $D(f) = \mathbf{R}$ ; $R(f) = [2, +\infty)$

d) $D(f) = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$; $R(f) = \mathbf{R}^+$

**10.A2** **Estudia el crecimiento y decrecimiento de las funciones en los intervalos que se indican. Ten presente cómo es la gráfica de cada una.**

**a)** $f(x) = 5 - 6x$ **en** $[0,5; 1]$ **b)** $g(x) = x + x^2$ **en** $[-1,5; -1]$ **y en** $[0,2; 1]$

a) $TV[0,5; 1] = f(1) - f(0,5) = -1 - 2 = -3 < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

b) $TV[-1; -1,5] = f(-1) - f(-1,5) = 0 - 1,05 < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

$TV[-1; 0,2] = f(0,2) - f(-1) = 0,24 - 0 > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

**10.A3** **Realiza las siguientes operaciones con las funciones** $f(x) = 4x - 2x^2$ **y** $g(x) = 3 - x - x^2$**.**

**a)** $(5f - 2g)(x)$ **b)** $\left(\frac{3g}{f}\right)(x)$ **c)** $(f \cdot g)(x)$ **d)** $(f + 4g)(x)$

a) $(5f - 2g)(x) = 20x - 10x^2 - 6 + 2x + 2x^2 = -8x^2 + 22x - 6$

b) $(f \cdot g)(x) = 12x - 4x^2 - 4x^3 - 6x^2 + 2x^3 + 2x^4 = 2x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 12x$

c) $\left(\frac{3g}{f}\right)(x) = \frac{9 - 3x - 3x^2}{4x - 2x^2}$

d) $(f + 4g)(x) = 4x - 2x^2 + 12 - 4x - 4x^2 = -6x^2 + 12$

**10.A4** **Calcula la función recíproca de cada una de las siguientes.**

**a)** $f(x) = 7x - 1$ **b)** $g(x) = \frac{2}{1 - x}$ **c)** $h(x) = \sqrt{6x + 9}$ **d)** $j(x) = x^2 + 9$

a) $y = 7x - 1 \Rightarrow 7x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y + 1}{7} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{7}$

b) $y = \frac{2}{1 - x} \Rightarrow (1 - x)\,y = 2 \Rightarrow y - xy = 2 \Rightarrow -xy = 2 - y \Rightarrow x = \frac{y - 2}{y} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x - 2}{x}$

c) $y = \sqrt{6x + 9} \Rightarrow y^2 = 6x + 9 \Rightarrow 6x = y^2 - 9 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 9}{6} \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{x^2 - 9}{6}$

d) $y = x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = y - 9 \Rightarrow x = \sqrt{y - 9} \Rightarrow j^{-1}(x) = \sqrt{x - 9}$

**10.A5** **Para las funciones del ejercicio anterior, calcula:**

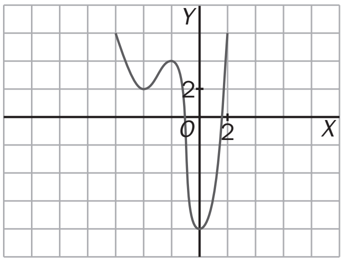
**a)** $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ h)(x)$ **c)** $(g \circ f)(0)$

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{2}{1 - x}\right) = 7\,\frac{2}{1 - x} - 1 = \frac{14 - 1 + x}{1 - x} = \frac{13 + x}{1 - x}$

b) $(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g(\sqrt{6x + 9}) = \frac{2}{1 - \sqrt{6x + 9}}$

c) $(g \circ f)(0) = g[f(0)] = g(-1) = \frac{2}{1 - (-1)} = 1$

**10.A6** **Observa la gráfica de la función *f*.**




**a) Encuentra el dominio y el recorrido.**

**b) Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**

**c) Halla sus máximos y mínimos e indica de qué tipo son.**

**d) ¿Qué tipo de acotación tiene?**

a) $D(f) = \mathbf{R}$; $R(f) = [-8, +\infty)$

b) Es creciente en $(-4, -2) \cup (0, +\infty)$. Es decreciente en $(-\infty, -4) \cup (-2, 0)$.

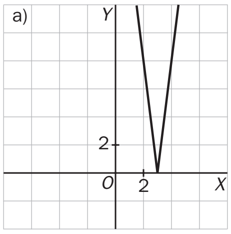
c) La función tiene mínimos relativos en $(-4, 2)$ y $(0, -8)$; un mínimo absoluto en $(0, -8)$, y un máximo relativo en $(-2, 4)$.

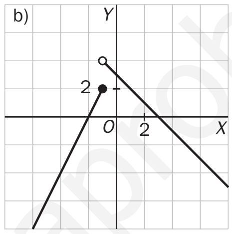
d) Está acotada inferiormente.

**10.A7** **Dibuja las siguientes funciones.**

**a)** $f(x) = |24 - 8x|$

**b)** $g(x) = \begin{cases} 4 + 2x & \text{si } x \le -1 \\ 3 - x & \text{si } x > -1 \end{cases}$




**10.A8** **Estudia si son simétricas y, en su caso, de qué tipo son las siguientes funciones.**

**a)** $f(x) = 5x^3 + 4x$

**b)** $g(x) = \dfrac{x^4}{1 - x^2}$

a) $f(-x) = 5(-x)^3 + 4(-x) = -5x^3 - 4x = -f(x)$. La función es impar.

b) $g(-x) = \dfrac{(-x)^4}{1 - (-x)^2} = \dfrac{x^4}{1 - x^2} = g(x)$. La función es par.

## MURAL DE MATEMÁTICAS

### MATETIEMPOS

### Nombres y apellidos

**El apellido representa la familia a la que perteneces y el nombre te identifica entre sus componentes. Juan Pérez, Jordi Castellet, Carmen Martínez, Pavel Iovanescu y Amal Kasar son algunos alumnos de una clase de 4.º de ESO. Si relacionamos el nombre de cada uno con su apellido, ¿esta relación es una función? Si cada alumno tuviera dos nombres, ¿la relación seguiría siendo una función? ¿Y si utilizasen los dos apellidos?**

Si relacionamos el nombre de cada persona con su apellido, tendremos una relación biunívoca en la que a todo nombre (elemento del primer conjunto) le corresponda un apellido (imagen del segundo conjunto) y solo uno. Luego la relación es una función.

Si se tienen dos nombres, también será una función, ya que cada nombre tiene imagen y una sola.

Si se utilizan los dos apellidos, dejará de ser función, ya que a cada nombre le corresponderán dos apellidos (imágenes).

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**11.1 ¿A qué valor tiende la función $f(x) = \dfrac{2}{x - 5}$?**

**a) Cuando $x$ se acerca a 3.**

**b) Cuando $x$ se aproxima a 5.**

**c) Cuando $x$ se acerca a $+\infty$.**

**d) Cuando $x$ se aproxima a $-\infty$.**

a) $x$ se aproxima a 3 por la izquierda: $x \rightarrow 3^-$

$x$ se aproxima a 3 por la derecha: $3^+ \leftarrow x$

| $x$ | … | 2,99 | 2,999 | 2,9999 | … | 3 | … | 3,0001 | 3,001 | 3,01 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)\ \dfrac{2}{x-5}$ | … | −0,995 | −0,9995 | −0,99995 | | −1 | … | −1,00005 | −1,0005 | −1,005 | |

Cuando $x$ se acerca a 3, se verifica que $f(x)$ tiende a −1.

b) $x$ se aproxima a 5 por la izquierda: $x \rightarrow 5^-$

$x$ se aproxima a 5 por la derecha: $5^+ \leftarrow x$

| $x$ | … | 4,99 | 4,999 | 4,9999 | … | 5 | … | 5,0001 | 5,001 | 5,01 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)\ \dfrac{2}{x-5}$ | … | −200 | −2000 | −20 000 | | No está definido | … | 20 000 | 2000 | 200 | … |

Cuando $x$ se acerca a 5 por la izquierda, se verifica que $f(x)$ tiende a $-\infty$.

Cuando $x$ se acerca a 5 por la derecha, se verifica que $f(x)$ tiende a $+\infty$.

c) $x$ tiende a $+\infty$: $x \rightarrow +\infty$

Cuando $x$ tiende a $+\infty$, $f(x)$ tiende a 0.

| $x$ | … | 1000 | … | 100 000 | … | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)\ \dfrac{2}{x-5}$ | … | 0,002 | … | 0,00002 | … | 0 |

d) $x$ tiende a $-\infty$: $-\infty \leftarrow x$

Cuando $x$ tiende a $-\infty$, $f(x)$ tiende a 0.

| $x$ | $-\infty$ | … | −100 000 | … | −1000 | … | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)\ \dfrac{2}{x-5}$ | 0 | … | −0,00002 | … | −0,002 | … | −0,4 |

**11.2 Indica a qué valor tiende la función $g(x) = \dfrac{3x + 2}{x(x + 2)}$.**

**a) Cuando $x$ se aproxima a 4.**

**b) Cuando $x$ se acerca a 0.**

**c) Cuando $x$ se aproxima a $+\infty$.**

**d) Cuando $x$ se acerca a $-\infty$.**

a) $x$ se aproxima a 4 por la izquierda: $x \rightarrow 4^-$

$x$ se aproxima a 4 por la derecha: $4^+ \leftarrow x$

| $x$ | … | 3,99 | 3,999 | 3,9999 | … | 4 | … | 4,0001 | 4,001 | 4,01 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x) = \dfrac{3x+2}{x(x+2)}$ | … | 0,5845 | 0,5834 | 0,5833 | | $\dfrac{14}{24}$ | | 0,5833 | 0,5832 | 0,5822 | … |

Cuando $x$ se acerca a 5, se verifica que $g(x)$ tiende a $0{,}58\widehat{3} = \dfrac{14}{24}$.

b) $x$ se aproxima a 0 por la izquierda: $x \to 0^-$ — $x$ se aproxima a 0 por la derecha: $0^+ \leftarrow x$

| $x$ | … | $-0{,}01$ | $-0{,}001$ | $-0{,}0001$ | … | 0 | … | 0,0001 | 0,001 | 0,01 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x) = \dfrac{3x+2}{x(x+2)}$ | … | $-98{,}99$ | $-998{,}99$ | $-9998{,}99$ | … | No está definido | … | 10000,99 | 1000,99 | 100,99 | … |

Cuando $x$ se acerca a 0 por la izquierda, se verifica que $g(x)$ tiende a $-\infty$.

Cuando $x$ se acerca a 0 por la derecha, se verifica que $g(x)$ tiende a $+\infty$.

c) y d) $x$ tiende a $-\infty$: $-\infty \leftarrow x$ — $x$ tiende a $+\infty$: $x \to +\infty$

| $x$ | $-\infty$ | … | $-100\,000$ | … | $-1000$ | … | 0 | … | 1000 | … | 100 000 | … | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x) = \dfrac{3x+2}{x(x+2)}$ | 0 | … | $-0{,}00003$ | … | $-0{,}003$ | … | No está definido | … | 0,0029 | … | 0,000029 | … | 0 |

Cuando $x$ tiende a $+\infty$, $g(x)$ tiende a 0. — Cuando $x$ tiende a $-\infty$, $g(x)$ tiende a 0.

**11.3 Halla el límite de la función $f(x) = 3x^2 + 3$ en los puntos $x = 1$ y $x = -3$.**

$x$ se aproxima a 1 por la izquierda: $x \to 1^-$ — $x$ se aproxima a 1 por la derecha: $1^+ \leftarrow x$

| $x$ | … | 0,99 | 0,999 | 0,9999 | … | 1 | … | 1,0001 | 1,001 | 1,01 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 3x^2 + 3$ | … | 5,9403 | 5,994003 | 5,99940003 | … | 6 | … | 6,0006 | 6,006 | 6,06 | … |

$x$ se aproxima a $-3$ por la izquierda: $x \to -3^-$ — $x$ se aproxima a $-3$ por la derecha: $-3^+ \leftarrow x$

| $x$ | … | $-3{,}01$ | $-3{,}001$ | $-3{,}0001$ | … | $-3$ | … | $-2{,}9999$ | $-2{,}999$ | $-2{,}99$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 3x^2 + 3$ | … | 30,1803 | 30,018 | 30,0018 | … | 30 | … | 29,9982 | 29,98 | 29,82 | … |

$\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 + 3) = 6$ $\qquad \lim\limits_{x \to -3} (3x^2 + 3) = 30$

**11.4 Calcula el límite de la función $g(x) = \dfrac{3x + 1}{x(x + 5)}$ en los puntos $x = 1$ y $x = 0$.**

$x$ se aproxima a 1 por la izquierda: $x \to 1^-$ — $x$ se aproxima a 1 por la derecha: $1^+ \leftarrow x$

| $x$ | … | 0,99 | 0,999 | 0,9999 | … | 1 | … | 1,0001 | 1,001 | 1,01 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x) = \dfrac{3x+1}{x(x+5)}$ | … | 0,6695 | 0,66694 | 0,666694 | … | $\dfrac{2}{3}$ | … | 0,66664 | 0,6664 | 0,664 | … |

$x$ se aproxima a 0 por la izquierda: $x \to 0^-$ — $x$ se aproxima a 0 por la derecha: $0^+ \leftarrow x$

| $x$ | … | $-0{,}01$ | $-0{,}001$ | $-0{,}0001$ | … | 0 | … | 0,0001 | 0,001 | 0,01 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x) = \dfrac{3x+1}{x(x+5)}$ | … | $-19{,}44$ | $-199{,}44$ | $-19999{,}44$ | … | No está definido | … | 2000,56 | 200,56 | 20,56 | … |

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x + 1}{x(x + 5)} = \frac{2}{3}$$

Cuando $x$ tiende a 0 por la izquierda, el límite tiende a $-\infty$.

Cuando $x$ tiende a 0 por la derecha, el límite tiende a $+\infty$.

**11.5** **Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}$**

$x$ tiende a $-\infty$: $-\infty \leftarrow x$ 　　　　　　　　 $x$ tiende a $+\infty$: $x \rightarrow +\infty$

| $x$ | $-\infty$ | … | $-100\,000$ | … | $-1000$ | … | 0 | … | 1000 | … | 100 000 | … | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)=\frac{1}{x^2}$ | 0 | … | $10^{-10}$ | … | $10^{-6}$ | … | No está definido | … | $10^{-6}$ | … | $10^{-10}$ | … | 0 |

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ 　　　　 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

**11.6** **Halla $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x - 1}{x + 2}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x - 1}{x + 2}$**

$x$ tiende a $-\infty$: $-\infty \leftarrow x$ 　　　　　　　　 $x$ tiende a $+\infty$: $x \rightarrow +\infty$

| $x$ | $-\infty$ | … | $-100\,000$ | … | $-1000$ | … | 0 | … | 1000 | … | 100 000 | … | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ | 3 | … | 3,00007 | … | 3,007 | … | $\frac{-1}{2}$ | … | 2,993 | … | 2,99993 | … | 3 |

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x - 1}{x + 2} = 3$ 　　　　 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x - 1}{x + 2} = 3$

**11.7** **Dadas $f(x) = \dfrac{5x}{x + 1}$ y $g(x) = \dfrac{-2x + 3}{x - 4}$, calcula:**

**a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 　　 **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ 　　 **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \cdot g(x)$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x}{x + 1} = 5$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x + 3}{x - 4} = -2$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x}{x + 1} \cdot \dfrac{(-2x + 3)}{x - 4} = -10$

**11.8** **Dada la función $f(x) = \dfrac{5x + 3}{2x + 1}$, halla:**

**a)** $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 　　 **b)** $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{f}\right)(x)$ 　　 **c)** $\lim\limits_{x\to1} 4f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{5x + 3}{2x + 1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to1} (5x + 3)}{\lim\limits_{x\to1} (2x + 1)} = \dfrac{5 \cdot 1 + 3}{2 \cdot 1 + 1} = \dfrac{8}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{\frac{5x+3}{2x+1}} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x + 1}{5x + 3} = \dfrac{\lim\limits_{x\to1} (2x + 1)}{\lim\limits_{x\to1} (5x + 3)} = \dfrac{2 \cdot 1 + 1}{5 \cdot 1 + 3} = \dfrac{3}{8}$

c) $\lim\limits_{x\to1} 4\left(\dfrac{5x + 3}{2x + 1}\right) = 4 \lim\limits_{x\to1} \dfrac{5x + 3}{2x + 1} = 4 \cdot \dfrac{8}{3} = \dfrac{32}{3}$

**11.9** **Dadas las funciones $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = \dfrac{5x^2 - x + 7}{x + 1}$ calcula estos límites:**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)]$ **d)** $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5x + 3) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - x + 7}{x + 1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5x + 3 - \dfrac{5x^2 - x + 7}{x + 1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 + 3x + 5x + 3 - 5x^2 + x - 7}{x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x - 4}{x + 1} = 9$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5x^2 - x + 7}{x + 1} = +\infty$

**11.10** **Halla los siguientes límites:**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 3}{x + 1}\right)^{\frac{x+2}{2}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{2x+5}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 3}{x + 1}\right)^{2x+5}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2}\right)^{x^2-3}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 3}{x + 1}\right)^{\frac{x+2}{2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 1 + 2}{x + 1}\right)^{\frac{x+2}{2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x + 1}\right)^{\frac{x+2}{2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{x+2}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x+1}} = e$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{2x+5} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (2x+5)\left(1+\frac{1}{x}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+5}{x}} = e^2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 3}{x + 1}\right)^{2x+5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 1 + 2}{x + 1}\right)^{2x+5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x + 1}\right)^{2x+5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{\frac{x + 1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{2(2x+5)}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x+10}{x+1}} = e^4$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2}\right)^{x^2-3} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2-3)\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2-3)\left(\frac{x^2+2x+1-x^2}{x^2}\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2-3)\frac{2x+1}{x^2}} = e^{+\infty} = +\infty$

**11.11** **Construye una tabla que recoja si las funciones estudiadas en los ejemplos de esta página están definidas en $x = 2$, si existe el límite en ese punto, si ambas cantidades coinciden y si las funciones son continuas en él.**

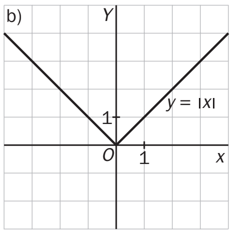
| | $f(2)$ | $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ | $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ | ¿continua en $x = 2$? |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) = E(x)$ | 2 | $\lim\limits_{x \to 2} E(x)$ no existe | No coincide | No |
| $g(x) = \begin{cases} x + 3 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ | 1 | $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = 5$; $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = 5$; $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 5$ | No coincide | No |
| $h(x) = x^2$ | 4 | $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 4$ | Coincide | Sí |

11.12 **Estudia la continuidad de estas funciones.**

**a)** $|x|$

**b)** $y = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ 2x - 1 & x > 0 \end{cases}$

a)




A la vista de la gráfica, la función $|x|$ es continua en todo su dominio.

b) La función $f(x)$ está definida por dos trozos, uno lineal y el otro cuadrático; en consecuencia, continua en sus dominios, respectivamente. Veamos si es continua en el punto de unión de ambos trozos, es decir, en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

$f(0) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = -1$. Por tanto, $f$ es continua en toda la recta real.

11.13 **Estudia la continuidad de estas funciones.**

**a)** $f(x) = \dfrac{2}{x + 5}$ **b)** $g(x) = +\sqrt{x}$ **d)** $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ **c)** $j(x) = \sqrt{2 + x^2}$

a) La función $f(x) = \dfrac{2}{x + 5}$ es continua en toda la recta real excepto en $x = -5$, ya que no existe $f(-5)$ al anularse el denominador en $x = -5$.

b) La función $g(x) = +\sqrt{x}$ es continua en todo su dominio, $[0, +\infty)$.

c) La función $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ es continua en toda la recta real excepto en $x = -1$, ya que no existe $h(-1)$ al anularse el denominador en $x = -1$.

d) La función $j(x) = \sqrt{2 + x^2}$ es continua en todo su dominio, **R**.

11.14 **Analiza la continuidad de la siguiente función. ¿Cuál es su verdadero valor en $x = 3$?**

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ es una función continua en $\mathbf{R} - \{3\}$. Veamos si $g(x)$ es continua en 3.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

Como la función en $x = 3$, vale 2, se deduce que $f(x)$ es discontinua en $x = 3$.

Para que $g(x)$ fuese continua en $x = 3$, tendría que suceder que $g(3) = 6$.

**11.15 ¿Crees que soltando inicialmente el doble de peces se llenaría el estanque en la mitad de tiempo?**

**Estudia la función correspondiente, $N(t) = \dfrac{150}{1 + 6{,}5 \cdot 1{,}05^{-t}}$**

Construimos la tabla de valores de la función.

| Años | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ejemplares | 20 | 32 | 50 | 71 | 92 | 111 | 126 | 135 | 141 | 145 | 147 |
| Incremento | | 62,36 | 53,19 | 42,09 | 30,61 | 20,55 | 12,92 | 7,75 | 4,51 | 2,58 | 1,46 |

| Años | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ejemplares | 148 | 149 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 |
| Incremento | 0,82 | 0,46 | 0,26 | 0,14 | 0,08 | 0,04 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 |

La capacidad máxima del estanque es de 150 carpas y se alcanza en el año 13. Por tanto, el soltar el doble de número de peces no implica que el estanque se llene en la mitad de tiempo.

Hasta el sexto año, la población del estanque crece a un ritmo anual superior al 10 %, estabilizándose en el año 13 en torno a los 150 ejemplares.

**11.16 ¿Qué ocurriría si soltáramos los 10 peces en un estanque con una capacidad máxima de 300? Analiza la función correspondiente, $N(t) = \dfrac{300}{1 + 29 \cdot 1{,}05^{-t}}$**

| Años | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ejemplares | 10 | 17 | 30 | 50 | 79 | 118 | 161 | 203 | 237 | 261 | 277 |
| Incremento | | 74,94 | 71,62 | 66,34 | 58,58 | 48,41 | 36,90 | 25,86 | 16,82 | 10,34 | 6,11 |

| Años | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ejemplares | 287 | 292 | 296 | 298 | 299 | 299 | 300 | 300 | 300 | 300 |
| Incremento | 3,52 | 2,00 | 1,13 | 0,63 | 0,35 | 0,20 | 0,11 | 0,06 | 0,03 | 0,02 |

La capacidad máxima del estanque se alcanza en el año 17. Hasta el noveno año, la población crece a un ritmo anual superior al 10 %, estabilizándose en el año 14-15 en torno a los 300 ejemplares.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

## Concepto de límite

**11.17 Utilizando una tabla, halla el valor al que tienden las siguientes funciones cuando $x$ se acerca a $+\infty$.**

**a)** $f(x) = 4x^2 + 5$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ **c)** $f(x) = 3x - 2x^3$ **d)** $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 6}$

a)

| $x$ | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | $\rightarrow +\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4005 | 4000005 | 400000005 | 40000000005 | $\rightarrow +\infty$ |

b)

| $x$ | 100 | 1000 | 10000 | $\rightarrow +\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,010204 | 0,001002004 | 0,00010002 | $\rightarrow 0$ |

c)

| $x$ | 100 | 1000 | 10000 | $\rightarrow +\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1999700$ | $-1999997000$ | $-1{,}99999997 \cdot 10^{12}$ | $\rightarrow -\infty$ |

d)

| $x$ | 100 | 1000 | 10000 | $\rightarrow +\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,49 | 0,499 | 0,4999 | $\rightarrow 0{,}5$ |

**11.18 Halla el valor al que tienden las funciones del ejercicio anterior cuando $x$ se aproxima a $-\infty$. ¿En qué apartados obtienes el mismo resultado que en el ejercicio anterior?**

a)

| $x$ | $-100$ | $-1000$ | $-10000$ | $-100000$ | $\rightarrow -\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4005 | 4000005 | 400000005 | 40000000005 | $\rightarrow +\infty$ |

b)

| $x$ | $-100$ | $-1000$ | $-10000$ | $\rightarrow -\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-0{,}0098$ | $-0{,}000998$ | $-0{,}00009998$ | $\rightarrow 0$ |

c)

| $x$ | $-100$ | $-100$ | $-1000$ | $-10000$ | $\rightarrow -\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1999700 | $-1999700$ | 1999997000 | $1{,}99999997 \cdot 10^{12}$ | $\rightarrow +\infty$ |

d)

| $x$ | $-100$ | $-1000$ | $-10000$ | $\rightarrow -\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,51 | 0,501 | 0,5001 | $\rightarrow 0{,}5$ |

Se obtiene el mismo resultado en los apartados a, b y d.

**11.19 Calcula la tendencia de las siguientes funciones cuando $x$ se acerca a 3, distinguiendo si es por la derecha o por la izquierda.**

**a)** $y = 5x - 8$ **b)** $y = \dfrac{x}{x+1}$ **c)** $y = 7 - x^2$ **d)** $y = \dfrac{6}{x}$

a)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2,9 | 2,99 | 2,999 | $\to 3^-$ |
| 6,5 | 6,95 | 6,9995 | $\to 7$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3,1 | 3,01 | 3,001 | $\to 3^+$ |
| 7,5 | 7,05 | 7,005 | $\to 7$ |

b)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2,9 | 2,99 | 2,999 | $\to 3^-$ |
| 0,74 | 0,749 | 0,7499 | $\to 0{,}75$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3,1 | 3,01 | 3,001 | $\to 3^+$ |
| 0,756 | 0,7506 | 0,75006 | $\to 0{,}75$ |

c)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2,9 | 2,99 | 2,999 | $\to 3^-$ |
| −1,41 | −1,9401 | −1,994 | $\to -2$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3,1 | 3,01 | 3,001 | $\to 3^+$ |
| −2,61 | −2,0601 | −2,006 | $\to -2$ |

d)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2,9 | 2,99 | 2,999 | $\to 3^-$ |
| 2,068 | 2,0066 | 2,000666 | $\to 2$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3,1 | 3,01 | 3,001 | $\to 3^+$ |
| 1,935 | 1,9933 | 1,999333 | $\to 2$ |

**11.20 ¿Cuál es el límite de estas funciones cuando $x$ tiende a 4?**

**a)** $f(x) = \dfrac{2}{x-4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x}{(x-4)^2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x-4}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x+1}{4-x}$

a)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3,9 | 3,99 | 3,999 | $\to 4^-$ |
| −20 | −200 | −2000 | $\to -\infty$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4,1 | 4,01 | 4,001 | $\to 4^+$ |
| 20 | 200 | 2000 | $\to +\infty$ |

Como no coinciden los límites laterales en $x = 4$, no existe el límite de la función en dicho punto.

b)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3,9 | 3,99 | 3,999 | $\to 4^-$ |
| 390 | 39900 | 39999000 | $\to +\infty$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4,1 | 4,01 | 4,001 | $\to 4^+$ |
| 410 | 40100 | 4001000 | $\to +\infty$ |

$$\lim_{x\to 4} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty$$

c)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3,9 | 3,99 | 3,999 | $\to 4^-$ |
| 7,9 | 7,99 | 7,999 | $\to 8$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4,1 | 4,01 | 4,001 | $\to 4^+$ |
| 8,1 | 8,01 | 8,001 | $\to 8$ |

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = 8$$

d)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3,9 | 3,99 | 3,999 | $\to 4^-$ |
| 49 | 499 | 4999 | $\to +\infty$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4,1 | 4,01 | 4,001 | $\to 4^+$ |
| −51 | −501 | −5001 | $\to -\infty$ |

Como no coinciden los límites laterales en $x = 4$, no existe el límite de la función en dicho punto.

**11.21** **Halla el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$:**

**a)** $f(x) = 2^x$ **b)** $f(x) = x^x$ **c)** $f(x) = \left(\frac{1}{x-6}\right)^x$ **d)** $f(x) = \left(\frac{x+1}{2x}\right)^x$

a)

| | | |
|---|---|---|
| 50 | 100 | $\to +\infty$ |
| $1{,}13 \cdot 10^{15}$ | $1{,}27 \cdot 10^{30}$ | $\to +\infty$ |

| | | |
|---|---|---|
| $-50$ | $-100$ | $\to -\infty$ |
| $8{,}88 \cdot 10^{-16}$ | $7{,}88 \cdot 10^{-31}$ | $\to 0$ |

$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$

b)

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 50 | $\to +\infty$ |
| $10^{10}$ | $8{,}88 \cdot 10^{89}$ | $\to +\infty$ |

| | | |
|---|---|---|
| $-10$ | $-50$ | $\to -\infty$ |
| $10^{-10}$ | $1{,}12 \cdot 10^{-85}$ | $\to 0$ |

$\lim_{x\to+\infty} x^x = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^x = 0$

c)

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 100 | $\to +\infty$ |
| 0,000000953 | $1{,}2 \cdot 10^{-23}$ | $\to 0$ |

| | | |
|---|---|---|
| $-10$ | $-100$ | $\to -\infty$ |
| $1{,}1 \cdot 10^{12}$ | $2{,}57 \cdot 10^{87}$ | $\to +\infty$ |

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x-6}\right)^x = 0$ $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x-6}\right)^x = +\infty$

d)

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 100 | $\to +\infty$ |
| 0,0025 | $2{,}13 \cdot 10^{-30}$ | $\to 0$ |

| | | |
|---|---|---|
| $-10$ | $-100$ | $\to -\infty$ |
| 2936,8 | $3{,}46 \cdot 10^{30}$ | $\to +\infty$ |

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{2x}\right)^x = 0$ $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x+1}{2x}\right)^x = +\infty$

**11.22** **Calcula la tendencia de estas funciones en los puntos que se indican:**

**a)** $y = \sqrt{\frac{x+6}{x-2}}$ **cuando** $x \to 3$ **b)** $y = (1+x)^{\frac{1}{x-2}}$**, cuando** $x \to 2$ **c)** $y = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$ **cuando** $x \to 0$

a)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2,9 | 2,99 | 2,999 | $\to 3^-$ |
| 3,1446 | 3,013 | 3,0013 | $\to 3$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3,1 | 3,01 | 3,001 | $\to 3^+$ |
| 2,88 | 2,99 | 2,999 | $\to 3$ |

$\lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{x+6}{x-2}} = 3$

b)

| | | |
|---|---|---|
| 1,9 | 1,99 | $\to 2^-$ |
| 0,0000237 | $2{,}71 \cdot 10^{-48}$ | $\to 0$ |

| | | |
|---|---|---|
| 2,1 | 2,01 | $\to 2^+$ |
| 81962,83 | $7{,}19 \cdot 10^{47}$ | $\to +\infty$ |

Al no coincidir los límites laterales no existe el límite.

c)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-0{,}1$ | $-0{,}01$ | $-0{,}001$ | $\to 0^-$ |
| 1,077 | 1,007 | 1,0007 | $\to 1$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,01 | 0,001 | $\to 0^+$ |
| 0,937 | 0,993 | 0,9993 | $\to 1$ |

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x = 1$

## Cálculo de límites

**11.23 Calcula los siguientes límites:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 4x + 3)$ **c)** $\lim\limits_{x\to -4} (2x + 6)^{x-4}$ **e)** $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x - x^2}{x - 2}$

**b)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{9 - 5x}\right)^0$ **d)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x + 2}{x^2 + 1}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 6} \left(\dfrac{6 - x}{2x + 3}\right)^x$

a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 4x + 3) = -1$ c) $\lim\limits_{x\to -4} (2x + 6)^{x-4} = \dfrac{1}{256}$ e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x - x^2}{x - 2} = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{9 - 5x}\right)^0 = 1$ d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x + 2}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{2}$ f) $\lim\limits_{x\to 6} \left(\dfrac{6 - x}{2x + 3}\right)^x = 0$



**11.24 Halla estos límites de funciones en el infinito:**

**a)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (5x^2 + x - 1)$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (8 - x^4)$ **c)** $\lim\limits_{x\to -\infty} (2 - x^3)$ **d)** $\lim\limits_{x\to -\infty} (1 + x + x^3)$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (5x^2 + x - 1) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (8 - x^4) = -\infty$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (2 - x^3) = +\infty$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (1 + x + x^3) = -\infty$

**11.25 Indica cuáles de los siguientes límites dan lugar a una indeterminación y cuál es esta:**

**a)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x^2 - 3x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 + 2x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x + 1}{x - 5}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2 - 8}{x - 1}$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x^2 - 3x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 + 2x} = \dfrac{0}{0}$, indeterminación

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x + 1}{x - 5} = \dfrac{\infty}{\infty}$, indeterminación

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2 - 8}{x - 1} = \dfrac{-4}{0}$, indeterminación

**11.26 Halla los siguientes límites en el infinito:**

**a)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4 + 3x}{x^2 - 2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1 + 3x^2}{x^3 - 2x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3 + x + x^2}{5x^2 - x + 1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^3 - x^2}{2x^3 + 3x}$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4 + 3x}{x^2 - 2} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1 + 3x^2}{x^3 - 2x} = 0$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3 + x + x^2}{5x^2 - x + 1} = \dfrac{1}{5}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^3 - x^2}{2x^3 + 3x} = 2$

**11.27 Calcula los límites que se indican:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x + 2}{x^2 - 1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 - x}{x^3 + 4x}$

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 5} = 6$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2} = 6$ c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x + 2}{x^2 - 1} = -1$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 - x}{x^3 + 4x} = -\dfrac{1}{4}$

**11.28 Halla el valor de estos límites:**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3-4x}{x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{x}$ e) $\lim\limits_{x\to-4}\left(\dfrac{x^2+6x+8}{4x+4}\right)^{x+5}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)^{x^2}$ i) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x^2-2x+2}\right)^{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-8x^2}{x^4-x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ f) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-5}{x-3}$ h) $\lim\limits_{x\to-2}\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)^{x^2}$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x-5}{2x+3}\right)^{1-x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3-4x}{x+2}\right)^{\frac{1}{x}}=1$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-8x^2}{x^4-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2(x-2)}{x^2(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4(x-2)}{x^2-1}=8$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{x+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+2}}=e$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\dfrac{1}{e}$

e) $\lim\limits_{x\to-4}\left(\dfrac{x^2+6x+8}{4x+4}\right)^{x+5}=0$

f) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-5}{x-3}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x-5}{x-3}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x-5}{x-3}=+\infty\end{cases}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)^{x^2}=0$

h) $\lim\limits_{x\to-2}\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)^{x^2}=\left(\dfrac{7}{4}\right)^{4}$

i) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x^2-2x+2}\right)^{x+1}=1$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x-5}{2x+3}\right)^{1-x}=0$

**11.29 Calcula los límites siguientes:**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{2x^2+x}{2x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^3+3x^2+3x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4}$

c) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x+1}{x-3}-\dfrac{x^2-2}{x^2-9}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{2x^2+x}{2x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-2x-2x^3-4x^2-x^2-2x}{2x(x+2)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x^2-4x}{2x^2+4x}=-\dfrac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^3+3x^2+3x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x+1)^2}{(x+1)^3}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{x+1}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x}{x+1}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x}{x+1}=-\infty\end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x+1}{x-3}-\dfrac{x^2-2}{x^2-9}\right)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+1)(x+3)-(x^2-2)}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x+1}{x^2-9}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{4x+1}{x^2-9}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{4x+1}{x^2-9}=+\infty\end{cases}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{x-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\left(\frac{3x+1}{3x-2}+1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3(x-1)}{3x-2}}=e$

e) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4}=\infty$

## Continuidad

11.30 **Calcula $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 6} f(x)$, siendo**

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 8x & \text{si } x \leq 3 \\ x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

**¿En qué punto es posible que $f(x)$ sea discontinua?**

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (4 - 8x) = 12$

$\lim\limits_{x \to 3^-} (4 - 8x) = -20$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 3^+} (x - 1) = 2$

Al no coincidir los límites laterales en $x = 3$, no existe el límite de la función en ese punto.

$\lim\limits_{x \to 6} f(x) = \lim\limits_{x \to 6} (x - 1) = 5$

Es una función definida a trozos, formada por funciones lineales. Solo puede ser discontinua en el punto $x = 3$.

11.31 **Dada la función $f(x) = \dfrac{2x - 6}{x + 3}$:**

**a) Calcula $f(-3)$.**

**b) Halla $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$.**

**c) ¿Es continua en $x_0 = -3$?**

a) No se puede obtener $f(-3)$.

b) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x - 6}{x - 3} = 2$

c) No, ya que no existe $f(-3)$.

11.32 **Estudia la continuidad de las funciones siguientes en los puntos que se indican:**

**a)** $f(x) = x^2 + 1$ **en** $x_0 = 0$

**b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} + 2 & \text{si } x > 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ **en** $x_0 = 1$

**c)** $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x^2 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \\ 4x + 5 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ **en** $x_0 = -1$

**d)** $f(x) = \begin{cases} 5x - x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ **en** $x_0 = 2$

a) 1) $f(0) = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Es continua en $x = 0$.

b) 1) $f(1) = 2$

2) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{x}{4} + 2\right) = \dfrac{9}{4}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 2$. No existe límite de $f(x)$ en $x = 1$. La función no es continua en $x = 1$.

c) 1) $f(-1) = 1$

2) $\lim\limits_{x \to -1^-} (3 - 2x^2) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -1^+} (4x + 5) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$

3) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$. La función es continua en $x = -1$.

d) 1) $f(2) = 6$

2) $\lim\limits_{x \to 2} (5x - x^2) = 6$

3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$. La función es continua en $x = 2$.

11.33 **Comprueba si son continuas las siguientes funciones definidas a trozos y, en caso negativo, especifica el tipo de discontinuidad que presentan:**

**a)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + x & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

**b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 4}{3} & \text{si } x \leq -1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

**c)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x} & \text{si } x \geq 8 \\ 2x - 6 & \text{si } x < 8 \end{cases}$

a) La función $f$ es una función definida a trozos formada por una función cuadrática y otra constante, que son continuas en su dominio de definición. Por tanto, $f$ es continua al menos en $\mathbf{R} - \{-2\}$. Veamos qué pasa en $x = -2$.

1) $f(-2) = 5$

2) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{x^2}{4} + x\right) = -1$

3) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$. $f(x)$ no es continua en $x = -2$, presenta una discontinuidad evitable.

b) La función $f$ es una función definida a trozos formada por una función cuadrática y otra lineal, que son continuas en su dominio de definición. Por tanto, $f$ es continua al menos en $\mathbf{R} - \{-1\}$. Veamos que pasa en $x = -1$.

1) $f(-1) = 1$

2) $\lim\limits_{x \to -1^-} \left(\dfrac{x + 4}{3}\right) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to -1^+} (2 - x^2) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$

3) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$. $f(x)$ es continua en $x = -1$.

c) La función $f$ es una función definida a trozos formada por una función lineal y otra de proporcionalidad inversa, que son continuas en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R} - \{0\}$. Por tanto, $f$ es continua al menos en $\mathbf{R} - \{8\}$. Veamos qué pasa en $x = 8$.

1) $f(8) = \dfrac{3}{4}$

2) $\lim\limits_{x \to 8^+} \left(\dfrac{6}{x}\right) = \dfrac{3}{4}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 8^-} (2x - 6) = 10$

Los límites laterales existen, pero no coinciden; la función no es continua en $x = 8$, presenta una discontinuidad de salto.

11.34 **Considera la función $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 + 2x - 3}$:**

**a) Calcula su dominio.**

**b) ¿Es continua en los puntos que no pertenecen al dominio?**

**c) Indica qué tipo de discontinuidad presenta en los puntos $x_0 = 1$ y $x_0 = -3$.**

a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-3, 1\}$

b) No es continua porque la función no está definida en ellos.

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 3}{x^2 + 2x - 3} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{(x + 3)(x - 1)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x - 1} = -\dfrac{1}{2}$

$f(x)$ presenta en $x = 1$ una discontinuidad de segunda especie, y en $x = -3$, una evitable.

**11.35 Estudia las posibles discontinuidades de la siguiente función y aclara de qué tipo son.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 4x & \text{si } -1 \le x < 2 \\ \dfrac{x^3}{3} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

$f(x)$ es una función definida a trozos, formada por dos funciones polinómicas y por una racional cuyo dominio es $\mathbf{R} - \{-1\}$. Por tanto, la función $f(x)$ es continua al menos en $\mathbf{R} - \{-1, 2\}$. Veamos qué sucede en esos puntos.

I) $f(-1) = 5$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x+1} = \infty \qquad \lim_{x\to -1^+} (x^2 - 4x) = 5$$

No existe el límite de la función en $x = -1$, ya que uno de los límites laterales no es finito; por tanto, la función presenta en $x = -1$ una discontinuidad de segunda especie.

II) $f(2) = \dfrac{8}{3}$

$$\lim_{x\to 2^-} (x^2 - 4x) = -4 \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3}{3} = \frac{8}{3}$$

Los límites laterales no coinciden; por tanto, en $x = 2$ la función presenta una discontinuidad de salto finito.

## CUESTIONES PARA ACLARARSE

**11.36 Si $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 6$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 9$, ¿cuál es $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?**

No existe el límite en 0 porque los laterales no coinciden.

**11.37 En ocasiones, al hallar el límite de una función en un punto se calculan los límites laterales, pero otras veces no.**

**¿En qué tipo de funciones es conveniente calcular esos límites laterales porque es posible que los resultados sean diferentes?**

En las funciones que no están definidas en esos puntos y en las que están definidas a trozos y el valor de la función cambia en ese punto.

**11.38 Explica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:**

**a) Una función es continua en un punto si existe el límite de la función en ese punto.**

**b) Si una función es constante, el límite de la función en cualquier punto es siempre el mismo.**

**c) Dos funciones con el mismo límite cuando $x \to +\infty$ son iguales.**

**d) El límite de una función en un punto puede tomar dos valores distintos.**

a) Falsa. Además debe estar definida en el punto y coincidir este valor con el límite de la función en ese punto.

b) Verdadera.

c) Falsa. $f(x) = x + 1$ y $f(x) = x$ tienen el mismo límite en el infinito y no son iguales.

d) Falsa. El límite de una función en un punto, si existe, es único.

**11.39 La función $f$ es continua en R y $f(5) = 9$. ¿Cuál es $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$?**

Al ser continua en $\mathbf{R}$, en particular lo es en 5 y, por tanto, $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = f(5) = 9$.

**11.40** **Si $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ y $\lim_{x\to 2} g(x) = -1$, calcula:**

**a)** $\lim_{x\to 2} [f - 2g](x)$ **b)** $\lim_{x\to 2} [(f)^g](x)$ **c)** $\lim_{x\to 2} [f \cdot g](x)$ **d)** $\lim_{x\to 2} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

a) $\lim_{x\to 2} [f - 2g](x) = 5 - 2 \cdot (-1) = 7$

b) $\lim_{x\to 2} [(f)^g](x) = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

c) $\lim_{x\to 2} [f \cdot g](x) = 5 \cdot (-1) = -5$

d) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{5}{-1} = -5$

**11.41** **El dominio de una función, $f(x)$, es R − {2} y $\lim_{x\to 2} f(x) = -1$. ¿Es continua en $x_0 = 2$?**

**Si la respuesta es negativa, indica el tipo de discontinuidad que presenta.**

No es continua, es discontinua evitable.

**11.42** **Sabiendo $\lim_{x\to -3} f(x) = 7$ y $g(7) = -2$, calcula $\lim_{x\to -3} (g \circ f)(x)$.**

$\lim_{x\to -3} (g \circ f)(x) = g[\lim_{x\to -3} f(x)] = g(7) = -2$

**11.43** **Si $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, calcula:**

**a)** $\lim_{x\to +\infty} (f + g)(x)$ **b)** $\lim_{x\to +\infty} (f^g)(x)$

a) $\lim_{x\to +\infty} (f + g)(x) = +\infty$ b) $\lim_{x\to +\infty} (f^g)(x) = +\infty$

**11.44** **Si una función, $f(x)$, está acotada, ¿es posible que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$? ¿Y que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$?**

No es posible ninguna de las dos cosas, puesto que significaría que a valores muy grandes o muy pequeños de *x* les corresponden valores muy grandes y muy pequeños, respectivamente, de *y*. Pero si la función está acotada, los valores de *y* estarán comprendidos entre dos números reales.

## PROBLEMAS PARA APLICAR

**11.45** **Jaime ha empezado a trabajar en el departamento de atención al cliente de una compañía de telefonía móvil. El número de llamadas diarias que atiende un empleado viene expresado por la siguiente función.**

$$N(t) = \frac{72t}{t + 9}$$

**Donde *t* es el número de días que lleva trabajando.**

**¿Cuántas llamadas diarias atenderá Jaime cuando lleve mucho tiempo en esa compañía?**

$\lim_{x\to +\infty} \frac{72t}{t+9} = 72$ llamadas diarias atenderá Jaime.

**11.46** **Cuando existían 3 000 000 de ejemplares de una especie vegetal, esta comenzó a ser atacada por una plaga. Con el paso del tiempo, su población en millones, $f(t)$, disminuyó según la función:**

$$f(t) = \frac{3}{t^2 + 1}$$

**En la que *t* es el número de años transcurridos.**

**Cuando hayan transcurrido muchos años, ¿a qué valor tenderá el número de ejemplares?**

$\lim_{x\to +\infty} \frac{3}{t^2+1} = 0$ es el valor al que tenderá el número de animales de esa especie.

11.47 **Un determinado automóvil emite 121 gramos de $CO_2$ por cada kilómetro recorrido, *x*.**

**a) Escribe la fórmula que exprese la cantidad de gramos de $CO_2$ emitidos en función del número de kilómetros.**

**b) Según que el automóvil vaya recorriendo más kilómetros, ¿tenderá a estabilizarse la cantidad total de $CO_2$ emitida por este vehículo?**

a) $f(x) = 2{,}10x$ b) $\lim_{x \to \infty} 2{,}10x = \infty$

11.48 **En una práctica de Química se ha medido la temperatura de una sustancia durante el transcurso de una reacción que dura 24 horas. Las medidas obtenidas se ajustan a esta función, donde *t* es el tiempo en horas.**

$$T(t) = \begin{cases} t^2 - 11t - 2 & \text{si } 0 \le t < 12 \\ 2t - 14 & \text{si } 12 \le t < 15 \\ 64 - \dfrac{16}{5}t & \text{si } 15 \le t < 24 \end{cases}$$

**Estudia si la temperatura anterior es una función continua.**

La temperatura es una función a trozos, formada por funciones polinómicas, continuas en su dominio de definición. Estudiemos la continuidad en $t = 12$ y $t = 15$.

$T(12) = 2 \cdot 12 - 14 = 10$

$\lim_{x \to 12^-} (t^2 - 11t - 2) = 10$ $\lim_{x \to 12^+} (2t - 14) = 10$ $\lim_{x \to 12} T(t) = 10$ $\lim_{x \to 12} T(t) = T(12)$

$T(15) = 64 - \dfrac{16}{5} \cdot 15 = 16$

$\lim_{x \to 15^-} (2t - 14) = 16$ $\lim_{x \to 15^+} \left(64 - \dfrac{16}{5}t\right) = 16$ $\lim_{x \to 15} T(t) = 16$ $\lim_{x \to 15} T(t) = T(15)$

La función de la temperatura es continua.

11.49 **En un país, se ha estimado que la tasa de fecundidad, el número de hijos que tiene una mujer, va a evolucionar con el número de años transcurridos, *t*, según esta expresión.**

$$f(t) = \frac{3t^2 + 1}{2t^2 + 3}$$

**Con el paso del tiempo, ¿tenderá a estabilizarse este índice o aumentará?**

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3t^2 + 1}{2t^2 + 3} = \dfrac{3}{2}$. Tenderá a estabilizarse de modo que cada mujer tendrá una media de 1,5 hijos.

11.50 **En un hospital se está probando un tratamiento contra una enfermedad que reduce la vida media de los glóbulos rojos.**

**En los pacientes a los que se ha aplicado se ha encontrado que la vida media de los glóbulos rojos, *V*, varía dependiendo de la duración del tratamiento en días, *t*, según la expresión:**

$$V(t) = \frac{132t}{t + 1}$$

**a) Si se empleara el tratamiento indefinidamente, ¿se podría alargar la vida de los glóbulos rojos de modo que nunca murieran?**

**b) La vida media de estas células en una persona es de 120 días. ¿En qué momento del tratamiento se alcanza esa cifra?**

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{132t}{t + 1} = 132$. No, durarían un máximo de 132 días.

b) $\dfrac{132t}{t + 1} = 120 \Rightarrow 132t = 120t + 120 \Rightarrow 12t = 120 \Rightarrow t = 10$ días

**11.51 Durante una campaña publicitaria, la cantidad de unidades vendidas de un producto de limpieza, *C*, ha dependido del número de veces que ha aparecido su publicidad en televisión, *x*.**

$$C(x) = 3000 - 10 \cdot 2^{1-x}$$

**a) ¿Cuántas unidades se han vendido al aumentar al máximo posible su publicidad en televisión?**

**b) ¿Ha resultado beneficiosa la campaña?**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3000 - 10 \cdot 2^{1-x}) = 3000$

b) Si $x = 0 \Rightarrow C(0) = 3000$. Si no se hubiera hecho publicidad en televisión, se habría vendido el mismo número de unidades que si su aparición en televisión hubiese sido muy elevada, y en este caso hay gastos. Por tanto, la campaña no ha resultado beneficiosa.

**11.52 A los 20 años de su fundación, una empresa realizó un cambio en la forma de realizar su contabilidad. En consecuencia, sus beneficios, en millones de euros, se calculan con esta función.**

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{3t + 10}{t} & \text{si } 0 < t \leq 20 \\ at - \dfrac{193}{2} & \text{si } t > 20 \end{cases}$$

**Donde *t* es el número de años transcurridos.**

**¿Cuál debe ser el valor de *a* para que el cambio en los beneficios resulte continuo?**

$f(20) = \dfrac{3 \cdot 20 + 10}{20} = 3{,}5$ $\qquad \lim\limits_{t \to 20^-} \left(\dfrac{3t + 10}{t}\right) = 3{,}5$ $\qquad \lim\limits_{t \to 20^+} \left(at - \dfrac{193}{2}\right) = 20a - \dfrac{193}{2}$

Es continuo si $3{,}5 = 20a - \dfrac{193}{2} \Rightarrow 7 = 40a - 193 \Rightarrow a = 5$.

## R E F U E R Z O

### Cálculo de límites

**11.53 Calcula el valor de los siguientes límites en el infinito:**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 5x + 3x^4)$ $\qquad$ **c)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^5 + x - 6)$ $\qquad$ **e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - x + 5x^3}{6x^2 - x}$

**b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 8x)$ $\qquad$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 12}{2x^2 - 1}$ $\qquad$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 + 9x + 2}{6x^4 - x^2 + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - 5x + 3x^4) = +\infty$ $\qquad$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^5 + x - 6) = -\infty$ $\qquad$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - x + 5x^3}{6x^2 - x} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 8x) = +\infty$ $\qquad$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 12}{2x^2} = \dfrac{3}{2}$ $\qquad$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 + 9x + 2}{6x^4 - x^2 + 1} = 0$

**11.54 Resuelve estos límites.**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{5}{2x + 8}\right)^x$ $\qquad$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}\right)^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x - 7}\right)^{x+3}$ $\qquad$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 2}{x + 4}\right)^x$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{5}{2x + 8}\right)^x = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{5}{2x+8} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x}{2x+8}} = e^{\frac{5}{2}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x - 7}\right)^{x+3} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (x+3)\left(1 + \frac{2}{x-7} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2(x+3)}{x-7}} = e^2$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 2}{x + 4}\right)^x = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{x+2}{x+4} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x}{x+4}} = e^{-2}$

**11.55 Halla los límites que siguen:**

**a)** $\lim\limits_{x\to -2} (x^3 - x^2 + 4x - 1)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 13x + 12}{x^2 - 3x - 18}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$ **g)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x^3}{2x^2 + 5x}$

**b)** $\lim\limits_{x\to 1} (x + x^2)^{3x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{2x}{x - 9}$ **f)** $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x + 5}{x^2 + 6x + 5}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2 - 1}{2x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to -2} (x^3 - x^2 + 4x - 1) = -21$

b) $\lim\limits_{x\to 1} (x + x^2)^{3x} = 2^3 = 8$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 13x + 12}{x^2 - 3x - 18} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{2x}{x - 9} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 9^-} \dfrac{2x}{x-9} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 9^+} \dfrac{2x}{x-9} = +\infty \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-4)(x+2)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} (x+2) = 6$

f) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x + 5}{x^2 + 6x + 5} = \lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x+5}{(x+1)(x+5)} = \lim\limits_{x\to -5} \dfrac{1}{x+1} = -\dfrac{1}{4}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x^3}{2x^2 + 5x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-x^2)}{x(2x+5)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-x^2}{2x+5} = \dfrac{1}{5}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2 - 1}{2x^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{4x^2-1}{2x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4x^2-1}{2x^2} = -\infty \end{cases}$

## Continuidad

**11.56 Estudia si son continuas las siguientes funciones en los puntos que se indican:**

**a)** $f(x) = \begin{cases} -9 & \text{si } x = -2 \\ 7 + 2x^3 & \text{si } x \neq -2 \end{cases}$ **en** $x_0 = -2$

**b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x & \text{si } x < 1 \\ 3x - 10 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **en** $x_0 = 1$

**c)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{9} & \text{si } x > -3 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \leq -3 \end{cases}$ **en** $x_0 = -3$

**d)** $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{si } x < 5 \\ -6 & \text{si } x = 5 \\ -x^2 + 5x - 6 & \text{si } x > 5 \end{cases}$ **en** $x_0 = 5$

a) 1) $f(-2) = -9$

2) $\lim\limits_{x\to -2} (7 + 2x^3) = -9$

3) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2)$. La función es continua en $x_0 = -2$.

b) 1) $f(1) = -7$

2) $\lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - 8x) = -7$ $\lim\limits_{x\to 1^+} (3x^2 - 10) = -7$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -7$

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. La función es continua en $x_0 = 1$.

c) 1) $f(-3) = -8$

2) $\lim\limits_{x\to -3^-} (1 - x^2) = -8$ $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x}{9} = -\dfrac{1}{3}$. Los límites laterales no coinciden. La función es discontinua en $x_0 = -3$.

d) 1) $f(5) = -6$

2) $\lim\limits_{x\to 5^-} (4 - 2x) = -6$ $\lim\limits_{x\to 5^+} (-x^2 + 5x - 6) = -6$ $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -6$

3) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = f(5)$. La función es continua en $x_0 = 5$.

**11.57 Dada la función $f(x) = \dfrac{x - 2}{4x - 8}$:**

**a) Calcula $f(2)$.**

**b) Halla $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.**

**c) Explica si es una función continua en $x_0 = 2$, indicando en caso contrario el tipo de discontinuidad que presenta.**

a) La función no está definida en $x = 2$.

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{4x-8} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{4(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

c) Es discontinua evitable.

**11.58 Explica si la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x + 4}$ tiene una discontinuidad evitable en $x_0 = -4$.**

No está definida en ese punto.

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 4} = \lim_{x \to -4} \frac{(x+1)(x+4)}{x+4} = \lim_{x \to -4} (x + 1) = -3$$

Es discontinua evitable, puesto que aunque no está definida en el punto, existe el límite en ese punto.



## AMPLIACIÓN

**11.59 Calcula:**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{7x^3 - 2x^2 + 9x}$

**b)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6}$

**c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x + 2}}{3x}$

**d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{8x + 3}{x - 1}}$

**e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 8x}{\sqrt{x^4 + 2}}$

**f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1 - 4x}{5 - 4x}\right)^{\frac{1-x^2}{3x}}$

**g)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + x}\right)^{x}$

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{7x^3 - 2x^2 + 9x} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x - 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} = \dfrac{3}{45}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x + 2}}{3x} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{8x + 3}{x - 1}} = 2$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 8x}{\sqrt{x^4 + 2}} = 6$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1-4x}{5-4x}\right)^{\frac{1-x^2}{3x}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1-x^2}{3x}\right)\left(\frac{1-4x}{5-4x} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4(1-x^2)}{3x(5-4x)}} = e^{\frac{-1}{3}}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x}\right)^{x} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(2x-1)}{x^2-x}} = e^{2}$

**11.60 Indica los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x^3 + 2x^2 - 3x}$ y señala en cada caso el tipo de discontinuidad que presenta.**

$x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{-3, 0, 1\} \Rightarrow$ No es continua en $-3$, 0 y 1 porque no está definida.

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x + 12}{x^3 + 2x^2 + 3x} = \lim_{x \to -3} \frac{x - 4}{x(x - 1)} = \frac{7}{12}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x - 12}{x^3 + 2x^2 - 3x} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x - 4}{x(x - 1)} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 4}{x(x - 1)} = -\infty \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x - 12}{x^3 + 2x^2 - 3x} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x - 4}{x(x - 1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 4}{x(x - 1)} = +\infty \end{cases}$$

En 0 y 1 es discontinua de 2.ª especie, y en $-3$ es discontinua evitable.

**11.61 ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9x + 14}{x - 2}$? ¿Cómo se puede definir la función para que sea continua en todo R?**

La función es discontinua en $x = 2$ porque no está definida en ese punto. Como $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 9x + 14}{x - 2} = -5$, presenta una discontinuidad evitable en ese $x = 2$.

Para que sea continua en **R**, la nueva definición es: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9x + 14}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ -5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

**11.62 Estudia si es evitable la discontinuidad de la siguiente función.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**Defínela, si es posible, de modo que resulte continua en todo R.**

La función no está definida en $x = 1$ y, por tanto, es discontinua en ese punto.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = 2 \qquad \lim\limits_{x \to 1^+} (3x - 1) = 2 \qquad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

La nueva definición, para que sea continua en **R**, es: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

**11.63 Analiza si es continua esta función, indicando en su caso el tipo de discontinuidad que presenta:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2x^2 + x - 3}{4x^2 - 3x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, formada por dos funciones racionales.

El dominio de la función es $\mathbf{R} - \{0\}$. Por tanto, puede ser discontinua en $x = 0$ y en $x = 1$.

I) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x + 2)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (x + 2) = 2$. Es una discontinuidad de segunda especie.

II) $f(1) = 3 \qquad \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 2x}{x} = 3 \qquad \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x^2 + x - 3}{4x^2 - 3x - 1} = 1$. Es una discontinuidad de salto finito.

**11.64 Calcula el valor que debe tener *a* para que sean correctos estos límites.**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{ax^4 + 5x + 9}}{2x^2 - 1} = 2$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{2x^2 - 1}{ax} - \dfrac{x^2 + 3}{x - 1} \right) = -1$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{ax^4 + 5x + 9}}{2x^2 - 1} = \dfrac{\sqrt{a}}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a}}{2} = 2 \Rightarrow a = 16$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{2x^2 - 1}{ax} - \dfrac{x^2 + 3}{x - 1} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 2x^2 - x + 1 - ax^3 - 3ax}{ax^2 - ax} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(2 - a)x^3 - 2x^2 - (1 + 3a)x + 1}{ax^2 + ax} = -1$

Para que esa igualdad sea cierta, los grados de los polinomios deben ser iguales.

Entonces, $2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$

Se puede comprobar que en ese caso el límite es $-1$.

## PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

**11.65 El precio de los cuadernos**

**Una papelería presenta la siguiente oferta para estudiantes en la compra de cuadernos.**

- **El precio de cada uno es de 2,25 euros.**
- **Si se compran ocho o más, el precio *P* de todo el lote es el determinado por la función:**

$$P(x) = \sqrt{5x^2 + 3}$$

**Donde *x* es el número de cuadernos comprados.**

**a) Calcula el precio que se ha de pagar para comprar 5, 10 y 15 unidades.**

**b) La función que representa el precio de *x* cuadernos, ¿es continua?**

**c) Halla el precio de cada cuaderno si se compran 5, 10 ó 15 unidades.**

**d) ¿Cuál sería el precio de cada cuaderno si se comprase una gran cantidad de ellos?**

**e) Un cliente tiene dudas sobre si se trata de una verdadera oferta o una estrategia publicitaria. ¿Crees que se produce un descuento apreciable cuando se compran más de ocho cuadernos?**

a) $P(x) = \begin{cases} 2{,}25x & \text{si } x < 8 \\ \sqrt{5x^2 + 3} & \text{si } x \geq 8 \end{cases}$

$x = 5 \Rightarrow P(5) = 2{,}25 \cdot 5 = 11{,}25$ €

$x = 10 \Rightarrow P(10) = \sqrt{5 \cdot 100 + 3} = 22{,}42$ €

$x = 15 \Rightarrow P(15) = \sqrt{1125 + 3} = 33{,}59$ €

b) $\lim\limits_{x \to 8^-} P(x) = \lim\limits_{x \to 8} 2{,}25x = 18$ $\lim\limits_{x \to 8^+} P(x) = \lim\limits_{x \to 8} \sqrt{5x^2 + 3} = 17{,}97$

No es continua.

c) Si se compran 5 unidades, cada cuaderno sale a 2,25 €.

Si se compran 10 unidades, cada cuaderno sale a 2,24 €.

Si se compran 15 unidades, cada cuaderno sale a 2,24 €.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{5x^2 + 3}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{5x^2 + 3}{x^2}}}{\dfrac{x}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{5 + \dfrac{3}{x^2}}}{1} = \sqrt{5} = 2{,}24$ €

e) Obviamente, el precio de cada cuaderno es muy cercano a 2,25 €, independientemente de las unidades que se compren. No existe tal oferta.

**11.66 Población de bivalvos**

**Ante la peligrosa proliferación de una especie de bivalvos en las aguas fluviales de una región, las autoridades sanitarias han tomado ciertas medidas que pretenden conseguir que la población de estos animales se adapte a la siguiente relación:**

$$p(x) = \frac{ax + 1250}{3x + b}$$

**Donde $x$ es el tiempo transcurrido en meses desde que se toman las citadas medidas, y $p(x)$, el número de ejemplares de esa especie por cada metro cuadrado de superficie de río.**

**Los parámetros $a$ y $b$ serán determinados por los expertos teniendo en cuenta que:**

- **El número inicial de bivalvos por metro cuadrado es aproximadamente 250.**
- **Se desea que, con el paso del tiempo, la población se estabilice en unos 100 ejemplares por metro cuadrado.**

**Calcula el valor de dichos parámetros.**

$$p(0) = \frac{a \cdot 0 + 1250}{3 \cdot 0 + b} = \frac{1250}{b} = 250 \Rightarrow b = \frac{1250}{250} = 5$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax + 1250}{3x + 5} = \frac{a}{3} = 100 \Rightarrow a = 300$$



## AUTOEVALUACIÓN

**11.A1 Calcula los siguientes límites en el infinito:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (6 - x + x^3)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - x^2 + 4x^3}{6x^2 + 7x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + 5}{2x + 1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{4}{x^2 + 7}\right)^{x^2+3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^4 - 9x^2 + 4)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 2x + 4}{3x^4 - 9x^2}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x}\right)^{x}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x + 2}{5x - 3}\right)^{x+1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (6 - x + x^3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - x^2 + 4x^3}{6x^2 + 7x - 1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + 5}{2x + 1}\right)^{\frac{1}{x^2}} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{4}{x^2 + 7}\right)^{x^2+3} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4(x^2+3)}{x^2+7}} = e^4$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^4 - 9x^2 + 4) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 2x + 4}{3x^4 - 9x^2} = \dfrac{5}{3}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x}\right)^{x} = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x + 2}{5x - 3}\right)^{x+1} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5(x+1)}{5x-3}} = e$

**11.A2 Halla los límites que se indican:**

a) $\lim\limits_{x \to -4} \left(3 + x^2 - \dfrac{x^3}{8}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 5} (2x - 9)^{-x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 - x}{x^4 - 3x^2}$

f) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4x^2 + 5x + 1}{x^3 + 1}$

g) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 15}$

h) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 6x + 5}$

a) $\lim\limits_{x \to -4} \left(3 + x^2 - \dfrac{x^3}{8}\right) = 27$

b) $\lim\limits_{x \to 5} (2x - 9)^{-x} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1)(x^2 + 1) = 4$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} x(x + 2) = 8$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 - x}{x^4 - 3x^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2x^3 - x}{x^4 - 3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - 3} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x^3 - x}{x^4 - 3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - 3} = +\infty \end{cases}$

f) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4x^2 + 5x + 1}{x^3 + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(4x + 1)(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4x + 1}{x^2 - x + 1} = -1$

g) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 15} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x - 1}{x + 5} = -2$

h) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 6x + 5} = \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x - 2}{x + 1} = \dfrac{7}{4}$

**11.A3** **Estudia si las siguientes funciones son o no continuas.**

**a)** $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x \neq -3 \\ 10 & \text{si } x = -3 \end{cases}$

**b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} - 1 & \text{si } x \leq 6 \\ 2 - x & \text{si } x > 6 \end{cases}$

**c)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ -3 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ 4x - 2x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) 1) $f(-3) = 10$

2) $\lim\limits_{x \to -3} (2x - x^2) = -15$

3) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$. La función es discontinua en $x = -3$.

b) Es una función continua en $\mathbf{R} - \{6\}$. Veamos qué sucede en $x = 6$.

1) $f(6) = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 6^-} \left(\dfrac{x}{3} - 1\right) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to 6^+} (2 - x) = -4$. La función es discontinua en $x = 6$.

c) Es una función que no está definida en $x = 3$. Por tanto, es continua al menos en $\mathbf{R} - \{-2, 3\}$.

1) $f(-2) = -3$

2) $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{x+2} = -\infty$. La función es discontinua en $x = -2$.

**11.A4** **¿Qué tipo de discontinuidad presentan estas funciones?**

**a)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$ en $x_0 = -3$ **b)** $f(x) = \dfrac{4x + 3}{x - 6}$ en $x_0 = 6$ **c)** $f(x) = \begin{cases} 2 + 3x - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - 5x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

a) No está definida en $-3$ y $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} = 0$. En este punto es discontinua evitable.

b) La función no está definida en 6.

$$\lim_{x \to 6} \frac{4x + 3}{x - 6} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 6^-} \dfrac{4x + 3}{x - 6} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 6^+} \dfrac{4x + 3}{x - 6} = +\infty \end{cases}$$

En este punto es discontinua de 2.ª especie.

c) 1) $f(1) = 4$

2) $\lim\limits_{x \to 1^-} (2 + 3x - x^2) = 4$ $\qquad \lim\limits_{x \to 1^+} (1 - 5x) = -4$. En este punto es discontinua de salto finito.

MATETIEMPOS

## El aterrizaje de un avión

**Construye un gráfico que represente la altura de un avión desde que empieza la operación de aterrizaje hasta que se posa en la pista. ¿A qué valor tiende la función que representa este gráfico?**


Este es el concepto de límite, el avión se acercará cada vez más a la pista, se posará en ella, pero no formará parte de ella. El valor al que tiende es cero.

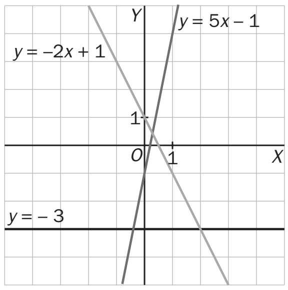
## EJERCICIOS PROPUESTOS

**12.1 Representa las siguientes funciones lineales e indica el valor de sus pendientes.**

**a)** $y = -3$

**b)** $y = 5x - 1$

**c)** $y = -2x + 1$




a) $m = 0$
b) $m = 5$
c) $m = -2$

**12.2 Representa estas funciones cuadráticas encontrando primero el vértice de las parábolas.**

**a)** $y = x^2$ **b)** $y = x^2 + 2x + 3$ **c)** $y = -x^2 + 2x + 1$

a) $y = x^2$. El vértice está en $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{0}{2 \cdot 1} = 0$.

La ordenada del vértice es: $f(0) = 0^2 = 0 \Rightarrow V(0, 0)$.

Corte con el eje $y$: $x = 0 \Rightarrow y = 0$ Corte con el eje $x$: $y = 0 \Rightarrow x^2 = 0$, $x = 0$

b) $y = x^2 + 2x + 3$. El vértice está en $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-2}{2 \cdot 1} = -1$.

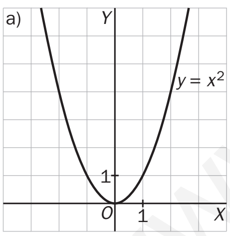
La ordenada del vértice es: $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 2 \Rightarrow V(-1, 2)$.

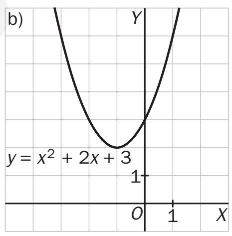
Corte con el eje $y$: $x = 0 \Rightarrow y = 3$ Corte con el eje $x$: $y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$, no tiene soluciones reales.

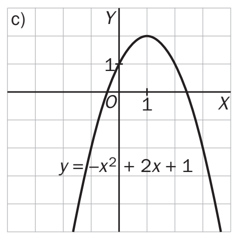
c) $y = -x^2 + 2x + 1$. El vértice está en $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1$.

La ordenada del vértice es: $f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 2 \Rightarrow V(1, 2)$.

Corte con el eje $y$: $x = 0 \Rightarrow y = 1$ Corte con el eje $x$: $y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$, $x = 1 - \sqrt{2}$



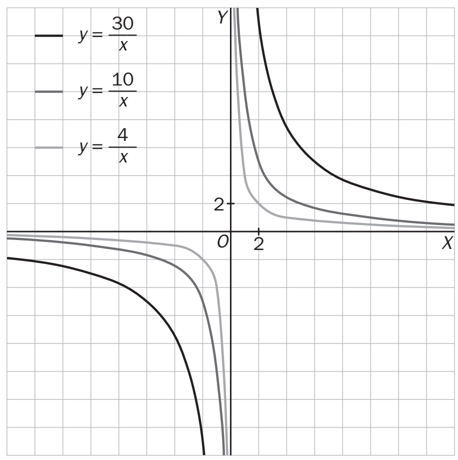




**12.3 Representa en los mismos ejes estas funciones.**

**a)** $y = \dfrac{4}{x}$

**b)** $y = \dfrac{10}{x}$

**c)** $y = \dfrac{30}{x}$

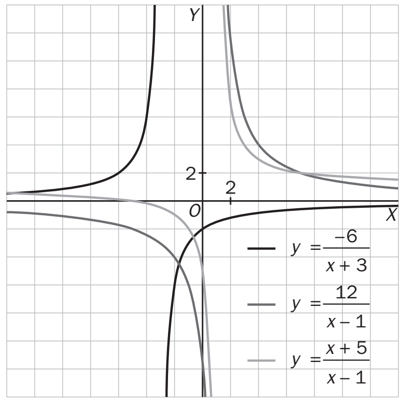


**12.4 Representa en los mismos ejes estas funciones.**

**a)** $y = \dfrac{-6}{x + 3}$

**b)** $y = \dfrac{12}{x - 1}$

**c)** $y = \dfrac{x + 5}{x - 1}$




**12.5 ¿Cuáles de estas funciones son racionales?**

**a)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2}$ **b)** $h(x) = \dfrac{5x + 3}{4}$ **c)** $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 5}$ **d)** $j(x) = \dfrac{x^2 + 2x^3}{x^2 + 7}$

Son funciones racionales las de los apartados c y d.

**12.6 Dadas las funciones:**

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ $g(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - 2x}$ $h(x) = \dfrac{3x + 1}{x^2 - x - 2}$

**a) Halla el dominio de cada una.**

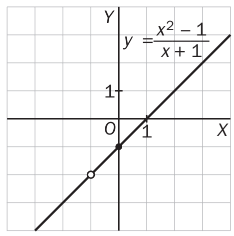
**b) Representa la gráfica de *f(x).***

a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$

Las raíces del denominador son: $x = -2$; $x = 0$; $x = 1$. $D(g) = \mathbf{R} - \{-2, 0, 1\}$.

Las raíces del denominador son: $x = 2$ y $x = -1$. $D(h) = \mathbf{R} - \{-1, 2\}$.

b)




**12.7 Encuentra las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones:**

**a)** $y = \dfrac{5x + 2}{x - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-3x + 2}{x}$ **c)** $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - x - 6}$ **d)** $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - x}$

a) $x - 1 = 0$ ; $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x + 2}{x - 1} = \infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 2}{x - 1} = 5$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x + 2}{x - 1} = 5$

Asíntota vertical: $x = 1$

Asíntota horizontal: $y = 5$

b) $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-3x + 2}{x} = \infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x + 2}{x} = -3$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x + 2}{x} = -3$

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota horizontal: $y = -3$

c) $x^2 - x - 6 = 0$; $x = -2$ y $x = 3$

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2}{x^2 - x - 6} = \infty$ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2}{x^2 - x - 6} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2}{x^2 - x - 6} = 2$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{x^2 - x - 6} = 2$

Asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 3$

Asíntota horizontal: $y = 2$

d) $x^3 - x = 0$; $x = -1$, $x = 1$, $x = 0$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - x} = \infty$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - x} = \infty$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - x} = \infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - x} = 1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - x} = 1$

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 1$

**12.8 Calcula las asíntotas oblicuas de esta función $y = \dfrac{-2x^3 + 5x + 3}{x^2 - 4}$.**

Para hallar la asíntota oblicua de la función racional, dividimos el numerador entre el denominador.

$$y = \frac{-2x^3 + 5x + 3}{x^2 - 4} = -2x - \frac{3(x - 1)}{x^2 - 4}$$

Por tanto, la asíntota oblicua es $y = -2x$.

**12.9 Halla todas las asíntotas de la siguiente función $y = \dfrac{4x^3}{x^2 - x - 6}$.**

$x^2 - x - 6 = 0$; $x = -2$ y $x = 3$; $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^3}{x^2 - x - 6} = \infty$ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x^3}{x^2 - x - 6} = \infty$. Asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 3$

$\dfrac{4x^3}{x^2 - x - 6} = 4x + 4 + \dfrac{28x + 24}{x^2 - x - 6}$. Asíntota oblicua: $y = 4x + 4$. Asíntota horizontal: no tiene.

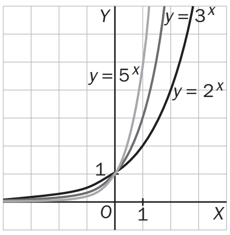
**12.10 Calcula las siguientes potencias:**

**a)** $5^{2,23}$ **b)** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1,15}$ **c)** $3^{-4,23}$ **d)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2,47}$

a) $5^{2,23} = 36,1995...$ b) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1,15} = 6,36525...$ c) $3^{-4,23} = 0,009589...$ d) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2,47} = 0,0663...$

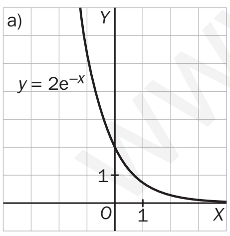
**12.11 Representa en los mismos ejes las siguientes funciones exponenciales.**

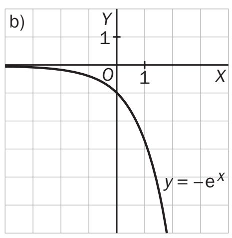
**a)** $y = 2^x$ **b)** $y = 3^x$ **c)** $y = 5^x$




**12.12 Representa estas funciones exponenciales.**

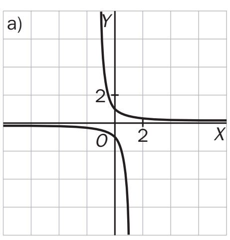
**a)** $y = 2e^{-x}$ **b)** $y = -e^x$

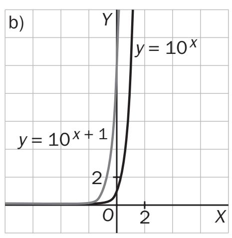


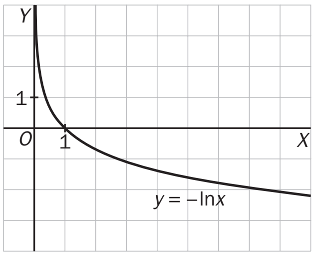

**12.13 Representa en los mismos ejes las siguientes funciones exponenciales.**

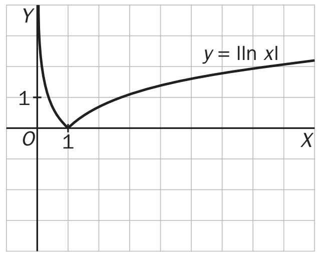
**a)** $y = -10^x$ e $y = 10^{-x}$ **b)** $y = 10^x$ e $y = 10^{x+1}$



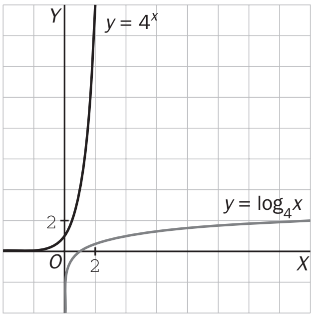



**12.14** **A partir de la gráfica de la función $y = \ln x$, representa la gráfica de las funciones $y = -\ln x$ e $y = |\ln x|$.**



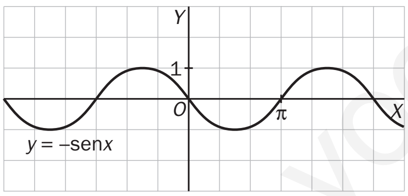

**12.15** **Representa la función $y = 4^x$ y, a partir de su gráfica, dibuja la de la función $y = \log_4 x$.**



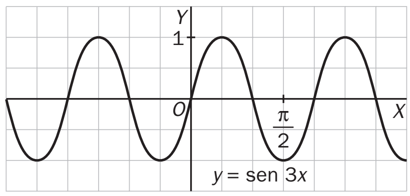

**12.16** **Representa estas funciones trigonométricas.**

**a) $y = -\text{sen } x$ b) $y = \text{sen } 3x$ c) $y = |\cos x|$ d) $y = 2 \cos x$ e) $y = \text{tg}(-x)$ f) $y = \text{tg } \dfrac{x}{2}$**

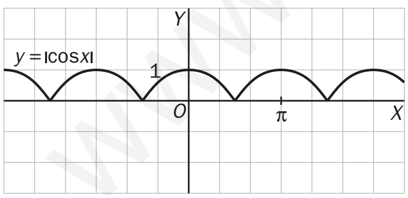
a)



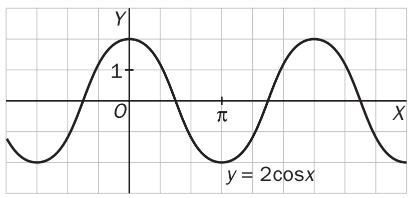

b)



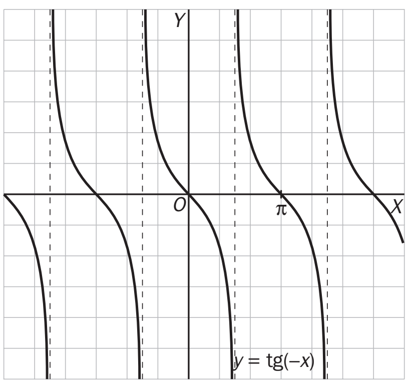

c)



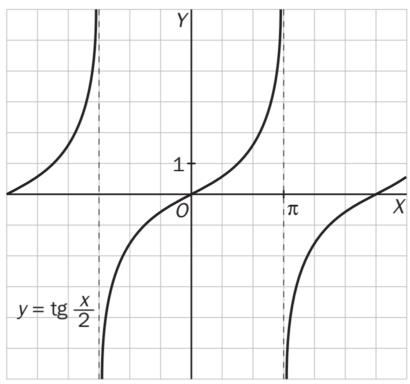

d)




e)




f)



**12.17 Estudia el dominio, el recorrido, la periodicidad, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos, y la simetría de estas funciones.**

**a)** $y = -\text{sen } x$ **b)** $y = |\cos x|$ **c)** $y = \text{tg } \dfrac{x}{2}$

Para el estudio de estas funciones nos fijaremos en las gráficas del ejercicio anterior.

a) Su dominio es **R**, y su recorrido, $[-1, 1]$.
Es una función periódica de período $2\pi$.
La función crece en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ y decrece en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.
La función tiene un mínimo en $\left(\dfrac{-\pi}{2}, -1\right)$ y un máximo en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 1\right)$.
Es simétrica respecto al origen.

b) Su dominio es **R**, y su recorrido, $[0, 1]$.
Es una función periódica de período $\pi$.
La función crece en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ y decrece en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
La función tiene dos máximos en $(0, 1)$ y $(\pi, 1)$, y un mínimo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.
Es simétrica respecto al eje *OY*.

c) Su dominio es **R**, excepto los múltiplos impares de $\pi$.
Es una función periódica de período $2\pi$.
La función es siempre creciente y, por tanto, no presenta ni máximos ni mínimos.
Es simétrica respecto al origen.

**12.18 Representa la función: $y = 3 \cos 2(x - \pi) - 5$. A partir de otras más sencillas.**

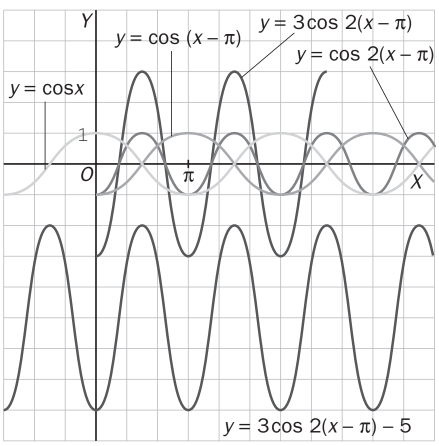
1.º Partimos de la función $y = \cos x$.

2.º Trasladamos horizontalmente a la derecha $\pi$ unidades y obtenemos: $y = \cos(x - \pi)$.

3.º Contraemos horizontalmente a la mitad y obtenemos: $y = \cos 2(x - \pi)$.
El período ahora es $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

4.º Dilatamos en vertical al multiplicar por 3 y obtenemos: $y = 3 \cos 2(x - \pi)$.

5.º Trasladamos verticalmente cinco unidades hacia abajo y obtenemos: $y = 3 \cos 2(x + \pi) - 5$.



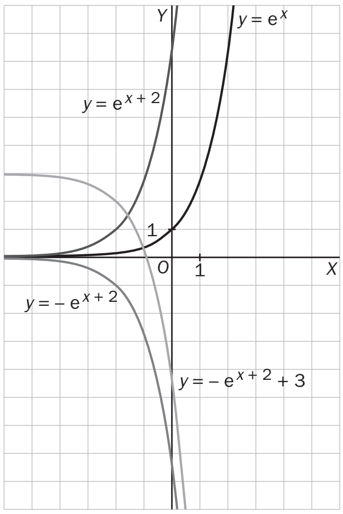
**12.19 Representa la función: $y = -e^{x+2} + 3$. A partir de otras más sencillas.**

1.º Partimos de la función $y = e^x$.

2.º Trasladamos horizontalmente a la izquierda 2 unidades y obtenemos: $y = e^{x+2}$.

3.º Representamos la función opuesta, $y = -e^{x+2}$, que es simétrica respecto del eje $x$.

4.º Trasladamos verticalmente tres unidades hacia arriba y obtenemos: $y = -e^{x+2} + 3$.




## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**12.20 Halla dos números reales tales que su suma sea 10, y su producto, el mayor posible. ¿Y si buscamos que su producto sea el menor posible?**

Sean $x$ e $y$ los dos números buscados. Como $x + y = 10$, $y = 10 - x$.

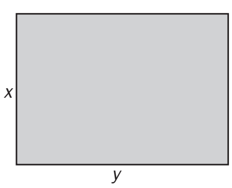
Su producto es $P(x) = x(10 - x)$. $P(x) = -x^2 + 10x$. Se trata de una función cuadrática abierta hacia abajo, tenemos que hallar el vértice.

$x = \dfrac{-10}{2 \cdot (-1)} = 5$. La ordenada es $P(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 = 25$.

Por tanto, los números son $x = 5$ y $y = 10 - x = 10 - 5 = 5$.

El problema no tiene solución cuando se trata de encontrar el producto mínimo, ya que la función $P(x)$ no tiene mínimo.

**12.21 Un jardinero dispone de 100 metros de valla para rodear un jardín rectangular. Halla las dimensiones del mismo de forma que su área sea máxima.**




Sean $x$ e $y$ las dimensiones del rectángulo.

El perímetro es $p = 2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$.

El área es $S(x) = x \cdot y = x(50 - x) = 50x - x^2$.

Se trata de una función cuadrática abierta hacia abajo, vamos a hallar su vértice.

$x = \dfrac{50}{2} = 25$ m $\quad y = 50 - x = 50 - 25 = 25$ m

Así pues, el rectángulo de área máxima es el cuadrado.

## A C T I V I D A D E S

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

### Funciones polinómicas

**12.22 Clasifica las siguientes funciones en lineales o cuadráticas.**

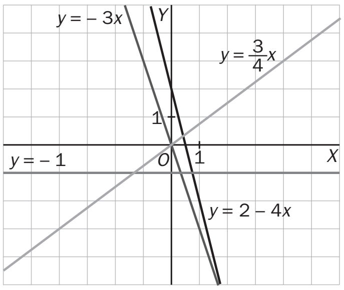
**a)** $y = 3x + 5$ **c)** $y = 1 - x$ **e)** $y = 1 + x + x^2$

**b)** $y = x^2 - 4x$ **d)** $y = 6 + x^2$ **f)** $y = 2x$

Lineales: a, c y f. Cuadráticas: b, d y e.

**12.23 Representa gráficamente estas funciones lineales.**

**a)** $y = 2 - 4x$ **b)** $y = -3x$ **c)** $y = -1$ **d)** $y = \frac{3}{4}x$




**12.24 Indica la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones lineales.**

**a)** $y = 4x - 2$ **b)** $y = -x + 3$ **c)** $y = 7$ **d)** $y = 1 + 2x$

a) $m = 4$; $n = -2$ b) $m = -1$; $n = 3$ c) $m = 0$; $n = 7$ d) $m = 2$; $n = 1$

**12.25 Escribe la fórmula de una función lineal que cumpla las condiciones de cada apartado.**

**a)** Pendiente, 4, y ordenada en el origen, −1.

**b)** Es creciente y pasa por el origen.

**c)** Decrece y su gráfica incluye el punto (0, 3).

**d)** Es de pendiente positiva y con ordenada en el origen negativa.

a) $y = 4x - 1$ b) $y = 5x$ c) $y = -x + 3$ d) $y = 6x - 2$

**12.26 Halla el vértice y el eje de simetría de estas parábolas y luego dibújalas.**

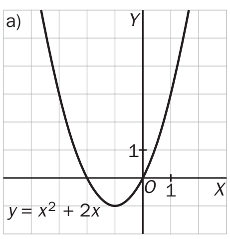
**a)** $y = x^2 + 2x$ **b)** $y = 1 - x^2$ **c)** $y = x^2 - x - 12$ **d)** $y = -2x^2 + 6x + 20$

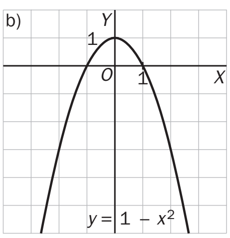
a) $x_v = -\dfrac{2}{2 \cdot 1} = -1;\quad y_v = -1 \Rightarrow V(-1, -1)$

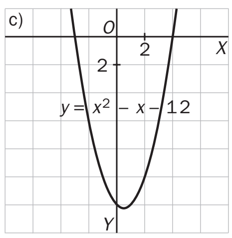
b) $x_v = -\dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0;\quad y_v = 1 \Rightarrow V(0, 1)$

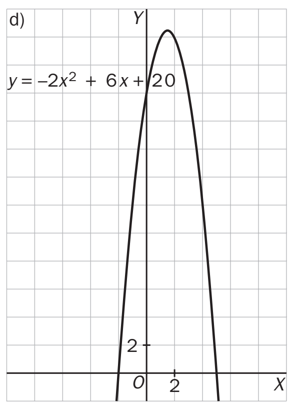
c) $x_v = -\dfrac{-1}{2 \cdot 1} = \dfrac{1}{2};\quad y_v = -\dfrac{49}{4} \Rightarrow V\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{49}{4}\right)$

d) $x_v = \dfrac{-6}{2 \cdot (-2)} = \dfrac{3}{2};\quad y_v = \dfrac{37}{2} \Rightarrow V\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{49}{2}\right)$



**12.27 Indica, sin dibujarlas, cuáles de estas parábolas son abiertas hacia arriba y cuáles hacia abajo.**

**a)** $y = -3x^2 + 9x + 2$ **b)** $y = 5 - x + x^2$ **c)** $y = 2x^2 - x + 1$ **d)** $y = -2x^2 - x + 1$

Hacia arriba: b y c Hacia abajo: a y d

**12.28 Sin realizar la gráfica, indica cuáles de las siguientes funciones pasan por el origen de coordenadas.**

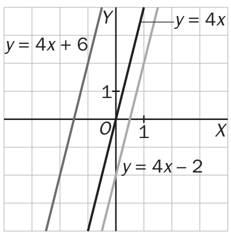
**a)** $y = 2x + 1$ **b)** $y = -6x$ **c)** $y = x^2 + x$ **d)** $y = -3x^2$

Pasan por el origen b, c y d.

**12.29 Dibuja en los mismos ejes de coordenadas las funciones $y = 4x + 6$, $y = 4x - 2$ e $y = 4x$.**

**a) ¿Cómo son las gráficas?**

**b) ¿Qué elemento tienen en común las tres funciones?**




a) Las gráficas son paralelas.

b) La pendiente de la recta, que es 4 en los tres casos.

**12.30 Para la funciones polinómicas $f(x) = -x^3 + x$ y $g(x) = x^4 + x^2$.**

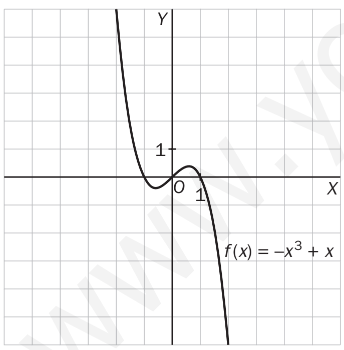
**a) Construye una tabla de valores y dibújalas en el intervalo $[-2, 2]$.**

**b) Indica dominio y recorrido, cortes con los ejes, continuidad, simetría, crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos.**

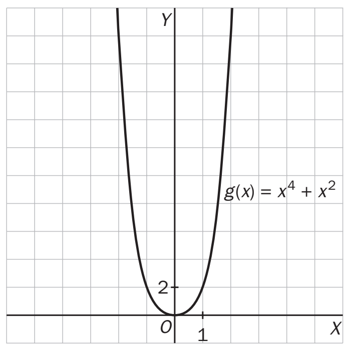
a)

| | −2 | −1,5 | −1 | −0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***f*(*x*)** | 6 | 1,875 | 0 | −0,375 | 0 | 0,375 | 0 | −1,875 | −6 |
| ***g*(*x*)** | 20 | 7,3125 | 2 | 0,3125 | 0 | 0,3125 | 2 | 7,3125 | 20 |

***f*(*x*)**




***g*(*x*)**




b) Función: $f(x) = -x^3 + x$

Su dominio y recorrido es **R**. Tiene tres puntos de corte con los ejes: $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(1, 0)$.

Es continua en todo **R**. La función tiene simetría impar.

La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ y crece en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

La función tiene un mínimo en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ y un máximo en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$.

Función: $g(x) = x^4 + x^2$

Su dominio es **R**, y su recorrido, $[0, +\infty)$. Tiene un punto de corte con los ejes: $(0, 0)$.

Es continua en todo **R**. La función tiene simetría par.

La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$. La función tiene un mínimo en $(0, 0)$.

## Funciones de proporcionalidad inversa y racionales

**12.31 Identifica entre las siguientes funciones las que son de proporcionalidad inversa.**

**a)** $y = \dfrac{-3x}{2}$ **b)** $y = \dfrac{4x}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{-5}{x}$ **d)** $y = \dfrac{7}{2x}$

Son funciones de proporcionalidad inversa c y d.

**12.32 Escribe la fórmula de dos funciones de proporcionalidad inversa, una creciente y otra decreciente.**

Creciente: $y = \dfrac{-2}{x}$ Decreciente: $y = \dfrac{3}{x}$

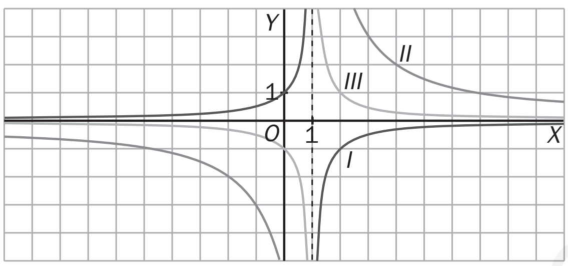
**12.33 Halla el dominio de estas funciones.**

**a)** $y = \dfrac{2x + 4}{3x - 6}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{1 - x^2}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 16}$

a) $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$ b) $D(f) = \mathbf{R} - \{1, -1\}$ c) $D(f) = \mathbf{R} - \{4\}$

**12.34 Asigna en tu cuaderno a cada una de las funciones representadas la fórmula que le corresponde.**

**a)** $y = \dfrac{1}{x - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x - 1}$ **c)** $y = \dfrac{6}{x - 1}$




A es $y = \dfrac{1}{x - 1}$

B es $y = \dfrac{-1}{x - 1}$

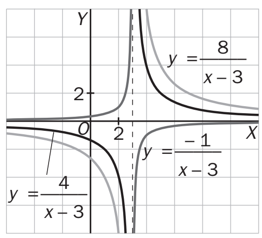
C es $y = \dfrac{6}{x - 1}$

**12.35 Dibuja las gráficas de las siguientes funciones en los mismos ejes.**

**a)** $y = \dfrac{4}{x - 3}$

**b)** $y = \dfrac{-1}{x - 3}$

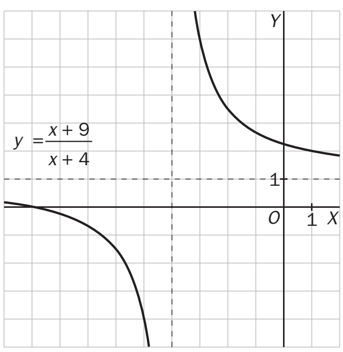
**c)** $y = \dfrac{8}{x - 3}$



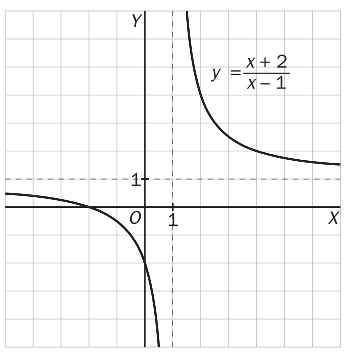

**12.36 Representa las siguientes funciones.**

**a)** $y = \dfrac{x + 9}{x + 4}$ **b)** $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

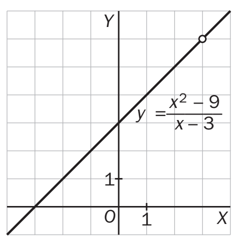
a)




b)




c)



## Asíntotas

12.37 **Calcula las asíntotas verticales y horizontales de las funciones siguientes:**

**a)** $y = \dfrac{6}{x - 2}$ **b)** $y = \dfrac{x}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{-2}{4x + 3}$ **d)** $y = \dfrac{1 - x}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{6}{x - 2} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{6}{x - 2} = +\infty$; Tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6}{x - 2} = 0$ Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x + 1} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x + 1} = -\infty$; Tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x + 1} = 1$ Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

c) $\lim\limits_{x \to -\left(\frac{3}{4}\right)^-} \dfrac{-2}{4x + 3} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\left(\frac{3}{4}\right)^+} \dfrac{-2}{4x + 3} = -\infty$; Tiene una asíntota vertical en $x = -\dfrac{3}{4}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2}{4x + 3} = 0$; Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1 - x}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - x}{x} = +\infty$; Tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - x}{x} = -1$; Tiene un asíntota horizontal en $y = -1$.

12.38 **Halla el dominio y las ecuaciones de las asíntotas de estas funciones.**

**a)** $y = \dfrac{x^3}{x^3 - 8}$ **b)** $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$ **c)** $y = \dfrac{3x^2 + 12}{x^2 - 5x}$

a) $x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^3}{x^3 - 8} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^3}{x^3 - 8} = +\infty \Rightarrow$ Tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x^3 - 8} = 1$. Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

Al tener asíntota horizontal, no tiene oblicua.

b) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3 - 1}{x^2} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 - 1}{x^2} = -\infty$. Tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

$\dfrac{x^3 - 1}{x^2} = x + \dfrac{-1}{x^2}$; Tiene una asíntota oblicua: $y = x$.

c) $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 5 \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{0, 5\}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3x^2 + 12}{x^2 - 5x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x^2 + 12}{x^2 - 5x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{3x^2 + 12}{x^2 - 5x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{3x^2 + 12}{x^2 - 5x} = +\infty$

Tiene dos asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = 5$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 12}{x^2 - 5x} = 3$; Tiene una asíntota horizontal en $y = 3$.

No tiene asíntota oblicua, ya que tiene horizontal.

## Funciones exponenciales y logarítmicas

**12.39 Completa en tu cuaderno la siguiente tabla indicando de qué tipo es cada una de estas funciones.**

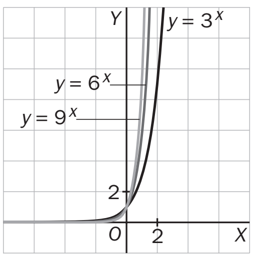
$y = e^{2x}$ $\qquad y = e \cdot x$ $\qquad y = \log(x + 3)$ $\qquad y = x \cdot \ln 2$

$y = 4^{-x}$ $\qquad y = x^3$ $\qquad y = \ln(2x)$ $\qquad y = 5^x$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Exponencial** | $y = e^{2x}$ | $y = 4^{-x}$ | $y = 5^x$ |
| **Logarítmica** | $y = \log(x + 3)$ | $y = \ln(2x)$ | |
| **Ni exponencial ni logarítmica** | $y = e \cdot x$ | $y = x^3$ | $y = x \cdot \ln 2$ |

**12.40 Representa en los mismos ejes estas funciones.**

**a)** $y = 3^x$ $\qquad$ **b)** $y = 6^x$ $\qquad$ **c)** $y = 9^x$




**12.41 Escribe en tu cuaderno estas funciones recíprocas.**

| **Función** | $y = 4^x$ | $y = \log_5 x$ | $y = \log x$ | $y = 7^x$ |
|---|---|---|---|---|
| **Recíproca** | $\log_4 x$ | $5^x$ | $10^x$ | $\log_7 x$ |

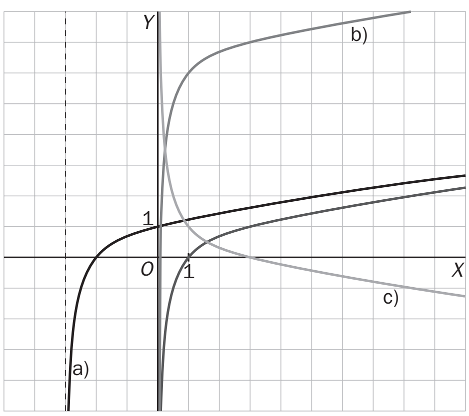
**12.42 Indica, sin dibujarlas, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.**

**a)** $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ $\qquad$ **b)** $y = 7^x$ $\qquad$ **c)** $y = 5^{-x}$ $\qquad$ **d)** $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

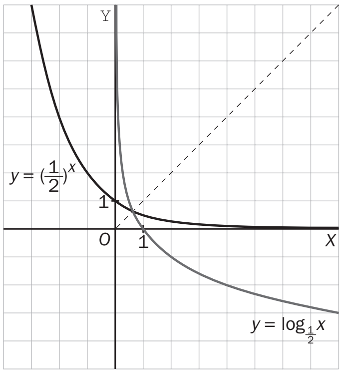
Crecientes: b y d  Decrecientes: a y c

**12.43 Representa la función $y = \ln x$ y, utilizando su gráfica, dibuja la de estas otras funciones.**

**a)** $y = \ln(x + 3)$ $\qquad$ **b)** $y = 6 + \ln x$ $\qquad$ **c)** $y = 1 - \ln x$



**12.44 Dibuja la gráfica de la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y, a partir de ella, la de $y = \log_{1/2} x$.**



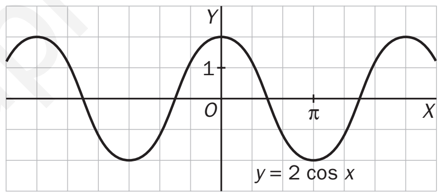

## Funciones trigonométricas

**12.45 Representa gráficamente las siguientes funciones completando previamente una tabla de valores:**

**a)** $y = 2 \cos x$ **b)** $y = 3 \text{ tg } x$ **c)** $y = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ **d)** $y = \text{sen}(x + 2\pi)$

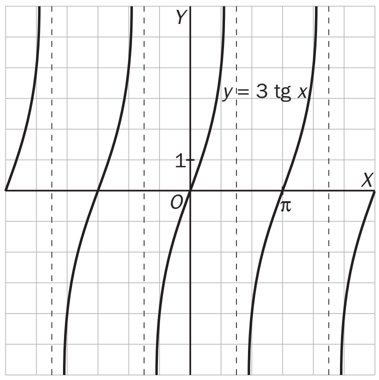
a)

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 0 | −2 | 0 | 2 |



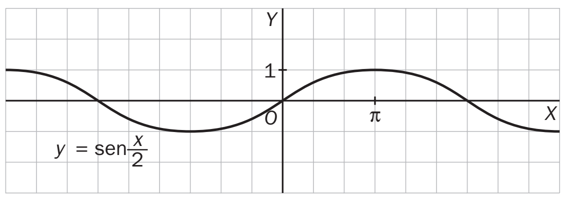

b)

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 | — | −3 | 0 |



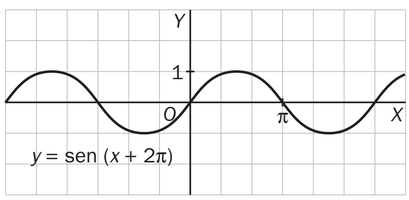

c)

| $x$ | $0$ | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi$ | $4\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 0 | −1 | 0 |



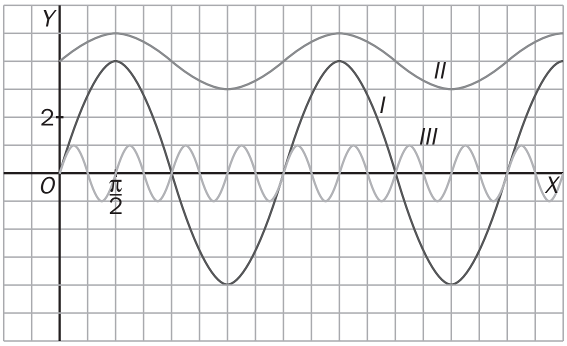

d)

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 0 | −1 | 0 |



**12.46 Asocia en tu cuaderno cada una de las funciones representadas con la fórmula que le corresponde:**

**a)** $y = 4 \text{ sen } x$ **b)** $y = \text{sen}(4x)$ **c)** $y = 4 + \text{sen } x$




I) $y = 4 \text{ sen } x$

II) $y = 4 + \text{sen } x$

III) $y = \text{sen } (4x)$

**12.47 Calcula el período de las siguientes funciones.**

**a)** $y = \cos(4x)$ **b)** $y = \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$ **c)** $y = \text{tg}(x + \pi)$ **d)** $y = \text{tg}(2x)$

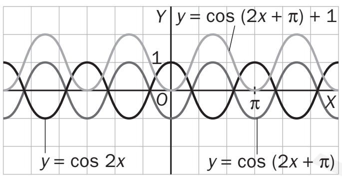
a) $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ b) $T = 3 \cdot 2\pi = 6\pi$ c) $T = \pi$ d) $T = \frac{\pi}{2}$

**12.48 Representa gráficamente estas funciones.**

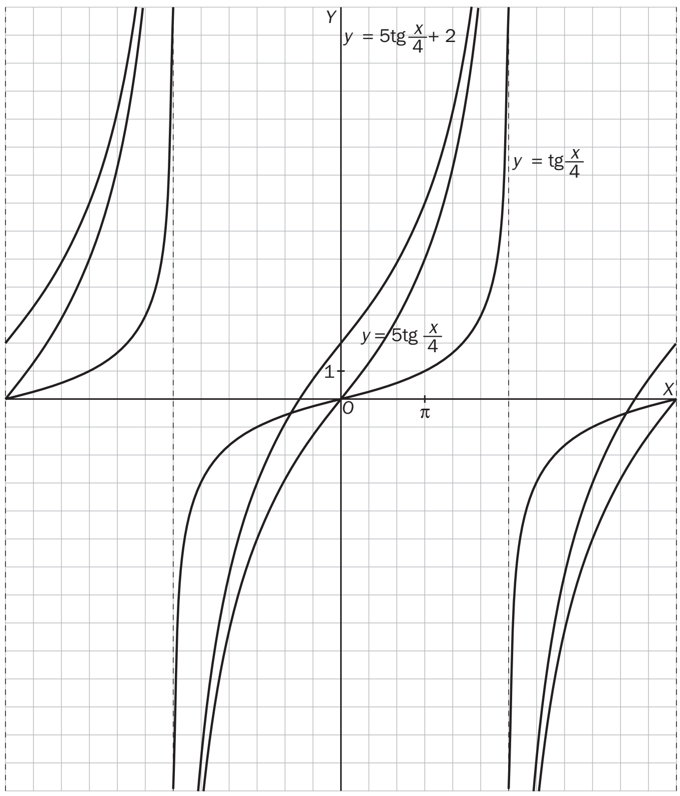
**a)** $y = \cos(2x + \pi) + 1$ **c)** $y = 2 \text{ sen}(x - \pi) - 3$

**b)** $y = 5 \text{ tg}\left(\frac{x}{4}\right) + 2$ **d)** $y = \frac{1}{2}\cos(x - \pi) - 6$

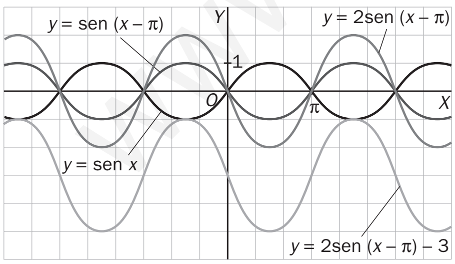
a)



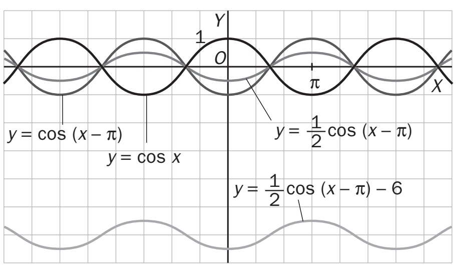

b)




c)




d)



12.49 **Si la pendiente de una función lineal es 0, ¿qué tipo de crecimiento experimenta?**

Es constante.

12.50 **La fórmula de las funciones lineales es del tipo $y = mx + n$. Completa en tu cuaderno el cuadro siguiente marcando una cruz donde corresponda.**

| | $m > 0$, $n = 0$ | $m > 0$, $n \neq 0$ | $m < 0$, $n = 0$ | $m < 0$, $n \neq 0$ |
|---|---|---|---|---|
| **Creciente** | X | X | | |
| **Decreciente** | | | X | X |
| **Pasa por el origen** | X | | X | |
| **No pasa por el origen** | | X | | X |

12.51 **Explica si puede haber alguna función racional cuyo dominio sean todos los números reales y, en caso afirmativo, escribe un ejemplo.**

Una función racional cuyo denominador no tenga raíces reales, por ejemplo, $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

12.52 **¿En qué puntos corta a los ejes de coordenadas la gráfica de $y = 8^x$? ¿Presenta algún tipo de asíntota?**

a) Si $x = 0$, entonces $y = 1$. Corta al eje $OY$ en (0, 1). No corta al eje $OX$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 8^x = 0$. Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ a la que se aproxima sólo en $-\infty$.

12.53 **Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y explica por qué.**

**a) Todas las funciones racionales tienen asíntotas verticales.**

**b) El recorrido de la función $y = e^{-x}$ es $\mathbf{R}^-$.**

**c) El dominio de una función de proporcionalidad inversa nunca es R.**

**d) La función $y = \log_{-2} x$ decrece en todo su dominio.**

a) Falsa. Si su dominio es **R**, entonces no tiene asíntotas verticales.

b) Falsa. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} > 0$ para cualquier valor de $x$.

c) Verdadera. La forma más general del denominador es $ax + b = 0$, que se anula en $-\dfrac{b}{a}$. Por tanto, el dominio nunca será **R**.

d) No es una función porque la base del logaritmo debe ser un número positivo y distinto de 1.

12.54 **La función racional $f$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$ y el dominio de la función $g$ es R − {1}.**

**a) ¿Se puede afirmar que 2 no es un punto del dominio de $f$?**

**b) ¿Es $x = 1$ una asíntota vertical de $g$?**

a) Sí, ya que las asíntotas verticales anulan el denominador de la función.

b) No necesariamente, ya que se debe cumplir además que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$, y eso no tiene por qué suceder. Un caso que lo muestra es $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

**12.55 En algunos países, la temperatura se mide en grados Fahrenheit en lugar de en grados Celsius. La relación entre estas dos escalas viene determinada por la fórmula $y = 1{,}8x + 32$, siendo $x$ e $y$ las temperaturas medidas en grados Celsius y Fahrenheit, respectivamente.**

**a) ¿Qué tipo de función es la que relaciona las dos escalas de temperatura?**

**b) ¿Cuál es su pendiente? ¿Es una función creciente o decreciente?**

**c) ¿Cuál es su ordenada en el origen? Explica qué significa su valor en este caso.**

a) Lineal

b) $m = 1{,}8 > 0$. Por tanto, es creciente.

c) $n = 32$, que significa que una temperatura de 0º Celsius corresponde a 32º Fahrenheit.

**12.56 Una tenista ha lanzado una pelota que sigue una trayectoria dada por la fórmula $y = 8t - t^2 + 1{,}6$ siendo $t$ el tiempo (en segundos) transcurrido desde el lanzamiento, e $y$ la altura (en metros) a la que se encuentra la pelota.**

**a) ¿A qué tipo de gráfica corresponde esa trayectoria?**

**b) ¿Cuándo alcanza la pelota su máxima altura?**

**c) ¿Cuál es esa altura máxima conseguida?**

**d) ¿En qué momento cae la pelota a la pista?**

a) A una parábola.

b) En el vértice: $t = -\dfrac{8}{2 \cdot (-1)} = 4$. A los 4 segundos.

c) $y(4) = 32 - 16 + 1{,}6 = 17{,}6$ metros

d) $8t - t^2 + 1{,}6 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 + 6{,}4}}{-2} = \dfrac{-8 \pm 8{,}39}{-2}$. La pelota cae a los 8,195 segundos.

**12.57 Los alumnos de Biología y Geología van a vallar una zona rectangular del patio del centro escolar para utilizarla en sus prácticas. Para uno de los lados del recinto se aprovechará una de las paredes del centro.**

**Si disponen de 12 metros de alambre, ¿cuánto deben medir los lados del rectángulo para que ocupe la máxima superficie?**


$2x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 2x$

Área: $A = y \cdot x = (12 - 2x) \cdot x = 12x - 2x^2$

La función área es una parábola abierta hacia abajo, y su máximo es el vértice:

$x_v = -\dfrac{12}{2 \cdot (-2)} = 3$. $y = 12 - 2 \cdot 3 = 6$

El lado de la pared debe medir 6 m, y el otro lado, 3 m.

**12.58 Un invernadero visto de frente presenta la forma de la gráfica de la función $y = 2x - \dfrac{1}{4}x^2$.**

**a) ¿Cuál es esta forma?**

**b) Calcula la altura máxima del invernadero.**

a) De parábola.

b) La máxima altura se alcanza en el vértice: $x_v = -\dfrac{2}{2 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right)} = 4 \Rightarrow y_v = 8 - 4 = 4$.

La máxima altura es 4 m.

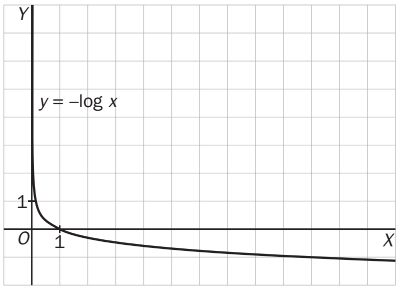
**12.59 El pH mide el carácter ácido o básico de una sustancia, y se encuentra relacionado con la concentración de iones de hidrógeno de la misma, $x$, que se mide en mol por litro, según la fórmula pH $= -\log x$.**

**a) Representa la función del pH.**

**b) El pH de un gel de ducha es 5,5. ¿Qué concentración de iones de hidrógeno tiene?**

**c) Para valores de pH menores que 7, la sustancia es ácida y, en caso contrario, básica. ¿Cuántos moles por litro de iones de hidrógeno puede contener una sustancia en cada caso?**

a)




b) $5{,}5 = -\log x \Rightarrow -5{,}5 = \log x \Rightarrow x = 10^{-5{,}5}$ moles/litro.

c) $7 > -\log x \Rightarrow -7 < \log x \Rightarrow x > 10^{-7}$ moles/litro tiene carácter ácido.

$7 < -\log x \Rightarrow -7 > \log x \Rightarrow x < 10^{-7}$ moles/litro tiene carácter básico.

**12.60 La sonoridad o sensación auditiva de un sonido, $\beta$, se mide en decibelios (dB), y se encuentra relacionada con la intensidad de la onda sonora, $I$, que se mide en vatios por metro cuadrado.**

$$\beta = 120 + 10 \log I$$

**a) La intensidad de las ondas sonoras que son audibles sin producir dolor está entre $10^{-12}$ y 1 vatio por metro cuadrado. ¿Entre qué valores se halla comprendida la sonoridad que producen?**

**b) Si estás escuchando música en un reproductor MP3 con 20 decibelios, ¿cuál es la intensidad de las ondas al salir de los auriculares?**

a) $\beta(10^{-12}) = 120 + 10 \log 10^{-12} = 120 + 10 \cdot (-12) = 120 - 120 = 0$

$\beta(1) = 120 + 10 \log 1 = 120 + 10 \cdot 0 = 120$

La sensación auditiva de las ondas audibles que no producen dolor está comprendida entre 0 y 120 dB.

b) $20 = 120 + 10 \log I \Rightarrow -100 = 10 \log I \Rightarrow -10 = \log I \Rightarrow I = 10^{-10}$ vatios por metro cuadrado

**12.61 Si aprietas un balón entre tus manos comprobarás que, al disminuir su volumen, $V$, te cuesta cada vez más apretarlo, porque aumenta la presión, $P$, del aire en su interior.**

**La presión del aire en el balón se incrementa de forma inversamente proporcional al volumen, es decir,**

**$P \cdot V = k$, donde $k$ es una constante.**

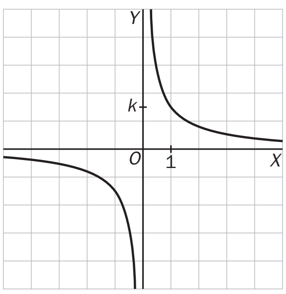
**a) ¿De qué tipo es la función $P(V)$?**

**b) Represéntala gráficamente.**

**c) ¿Corta la gráfica a los ejes de coordenadas?**

a) Es una función de proporcionalidad inversa.

b) $k$ debe ser positivo porque la presión y el volumen lo son.

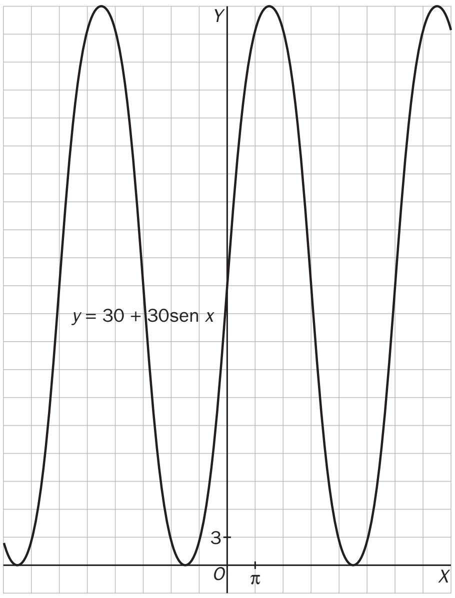



c) No corta a los ejes.

**12.62** **La distancia al suelo de un punto *A* en el borde de un neumático de 60 centímetros de diámetro viene dada por la expresión $y = 30 + 30 \text{ sen } x$, donde $x$ es el ángulo que forma con la horizontal el radio de la rueda correspondiente a ese punto.**

**Dibuja la gráfica que refleje la distancia al suelo de cada uno de los puntos del borde del neumático en función de $x$.**

Partiendo de la función sen $x$, se dilata en vertical multiplicándola por 30 y luego se traslada en vertical 30 unidades hacia arriba.

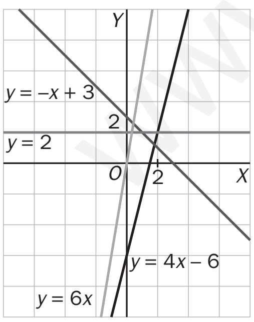



**R E F U E R Z O**

## Funciones polinómicas

**12.63** **Representa las siguientes funciones lineales, e indica su pendiente y su ordenada en el origen.**

**a)** $y = 4x - 6$ **b)** $y = -x + 3$ **c)** $y = 2$ **d)** $y = 6x$




a) $y = 4x - 6: \ m = 4, n = -6$

b) $y = -x + 3: \ m = -1, n = 3$

c) $y = 2: \ m = 0, n = 2$

d) $y = 6x: \ m = 6, n = 0$

**12.64** **Sin dibujar la gráfica, explica si son crecientes o decrecientes estas funciones.**

**a)** $y = \frac{1}{4}x$ **b)** $y = 5x - 7$ **c)** $y = 2 - 3x$

a) Creciente

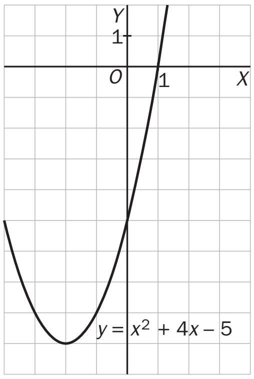
b) Creciente

c) Decreciente

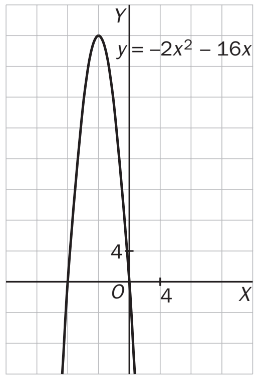
**12.65 Calcula el vértice de las parábolas y luego dibújalas.**

**a)** $y = x^2 + 4x - 5$ **b)** $y = x^2 - 9$ **c)** $y = -2x^2 - 16x$ **d)** $y = x^2 + 4x + 2$

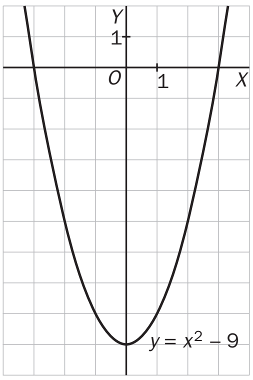
a) $x_v = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2$; $y_v = -9 \Rightarrow V(-2, -9)$



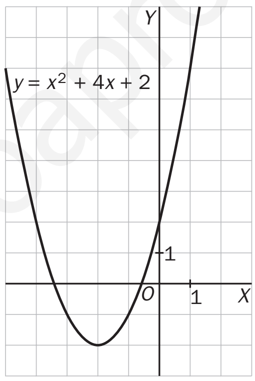

c) $x_v = -\dfrac{-16}{2 \cdot (-2)} = -4$; $y_v = 32 \Rightarrow V(-4, 32)$




b) $x_v = -\dfrac{0}{2 \cdot 2} = 0$; $y_v = -9 \Rightarrow V(0, -9)$



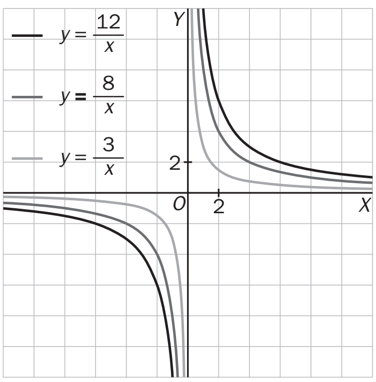

d) $x_v = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2$; $y_v = -2 \Rightarrow V(-2, -2)$




## Funciones de proporcionalidad inversa y racionales. Asíntotas

**12.66 Representa en los mismos ejes estas funciones.**

**a)** $y = \dfrac{8}{x}$ **b)** $y = \dfrac{12}{x}$ **c)** $y = \dfrac{3}{x}$



**12.67 Calcula el dominio de las siguientes funciones.**

**a)** $y = \dfrac{2x + 5}{x - 3}$ **b)** $y = \dfrac{4x^2}{16 - 8x}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - x - 12}$ **d)** $y = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 9x}$

a) $D(f) = \mathbf{R} - \{3\}$ b) $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$

c) $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{-3, 4\}$

d) $x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x + 9) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -9 \Rightarrow \mathbf{R} - \{0, -9\}$

**12.68 Halla las asíntotas de estas funciones.**

**a)** $y = \dfrac{2}{x - 1}$ **b)** $y = \dfrac{3x + 2}{x + 5}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2}{x - 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{x - 1} = +\infty$. Tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x - 1} = 0$; Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$; por tanto, no tiene asíntota oblicua.

b) $\lim\limits_{x \to -5^-} \dfrac{3x + 2}{x + 5} = +\infty$;$\lim\limits_{x \to -5^+} \dfrac{3x + 2}{x + 5} = -\infty$. Tiene asíntota vertical en $x = -5$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 2}{x + 5} = 3$. Tiene asíntota horizontal en $y = 3$; por tanto, no tiene asíntota oblicua.

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{x - 2} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{x - 2} = +\infty$. Tiene asíntota vertical en $x = 2$.

$\dfrac{x^2}{x - 2} = x + 2 + \dfrac{4}{x - 2}$. Tiene asíntota oblicua: $y = x + 2$.

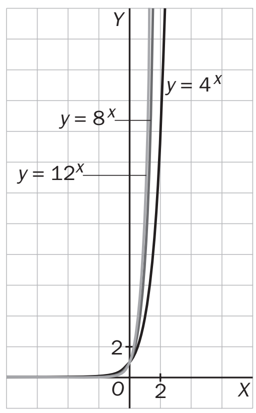
## Funciones exponenciales y logarítmicas

**12.69 Representa gráficamente estas funciones.**

**a)** $y = 4^x$ **b)** $y = 8^x$ **c)** $y = 12^x$

**¿Cuáles son crecientes y cuáles decrecientes?**

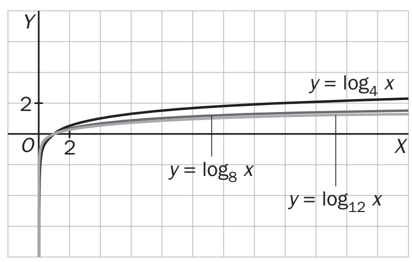
Todas son crecientes.




**12.70 A partir de las funciones del ejercicio anterior, realiza la gráfica de las siguientes.**

**a)** $y = \log_4 x$ **b)** $y = \log_8 x$ **c)** $y = \log_{12} x$

Al ser las recíprocas de las anteriores, son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



**12.71 Escribe la recíproca de las siguientes funciones.**

**a)** $y = \log_2 x$ **b)** $y = 7^x$ **c)** $y = \log_6 x$

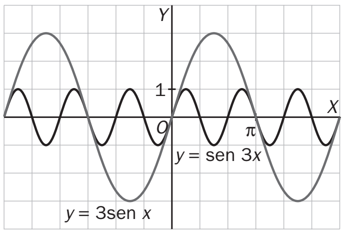
a) $y = 2^x$ b) $y = \log_7 x$ c) $y = 6^x$

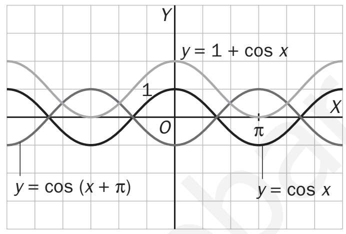
## Funciones trigonométricas

**12.72 Representa las siguientes funciones basándote en las gráficas de $y = \text{sen}\ x$ y de $y = \cos x$.**

**a)** $y = \text{sen}(3x)$ **c)** $y = \cos(x + \pi)$

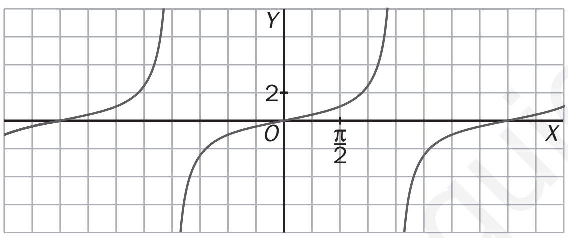
**b)** $y = 3\ \text{sen}\ x$ **d)** $y = 1 + \cos x$




**12.73 De entre las siguientes funciones, ¿cuál corresponde a la función que se ha representado?**

**a)** $y = \text{sen}(2x)$ **b)** $y = \text{tg}\ x$ **c)** $y = \text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$




La función que corresponde a la que se ha representado es la c) $y = \text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

### AMPLIACIÓN

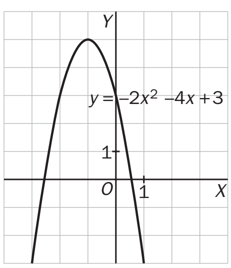
**12.74 a) Calcula el valor que debe tener $a$ para que la parábola $y = ax^2 - 4x + 3$ presente un máximo en el punto de abscisa $-1$.**

**b) Para el valor de $a$ obtenido, halla el vértice de la parábola y represéntala gráficamente.**

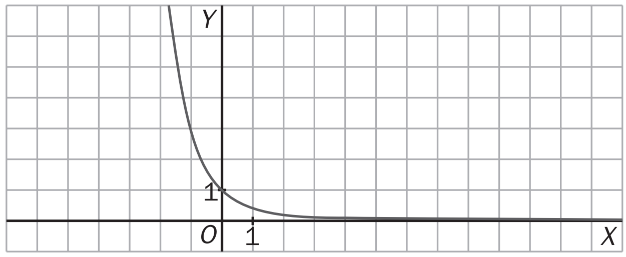
a) El máximo de una parábola es su vértice. La primera coordenada de este es $x_v = -\dfrac{b}{2a}$.

Sustituyendo el valor de $x$ y el de $b$ se obtiene: $-1 = -\dfrac{-4}{2a} \Rightarrow -2a = 4 \Rightarrow a = -2$.

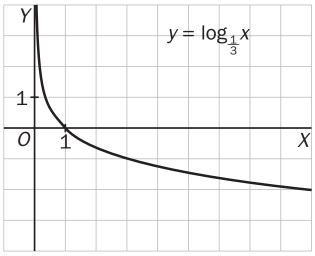
b) $y_v = -2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 5 \Rightarrow V(-1, 5)$



**12.75** **La siguiente gráfica, ¿corresponde a la función $y = 3^{-x}$ o $y = \log_{\frac{1}{3}} x$?**




**Representa la otra función a partir de la que se ha dibujado.**




La gráfica dada corresponde a la función $y = 3^{-x}$

**12.76** **Si $k$ y $a$ son dos números reales cualesquiera, calcula las asíntotas de las siguientes funciones.**

**a)** $y = \dfrac{k}{x}$ **b)** $y = \dfrac{k}{x + a}$ **c)** $y = \dfrac{kx}{x + a}$ **d)** $y = \dfrac{kx^2}{x + a}$

a) Si $k > 0$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{k}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{k}{x} = +\infty$ Si $k < 0$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{k}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{k}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{k}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{k}{x} = 0$

Tiene asíntota vertical en $x = 0$ y otra horizontal en $y = 0$. No tiene asíntota oblicua.

b) Si $k > 0$ $\lim\limits_{x \to -a^-} \dfrac{k}{x + a} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -a^+} \dfrac{k}{x + a} = +\infty$ Si $k < 0$ $\lim\limits_{x \to -a^-} \dfrac{k}{x + a} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -a^+} \dfrac{k}{x + a} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{k}{x + a} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{k}{x + a} = 0$

Tiene una asíntota vertical en $x = -a$ y otra horizontal en $y = 0$. No tiene asíntota oblicua.

c) Si $k > 0$

Si $a > 0$ $\lim\limits_{x \to -a^-} \dfrac{kx}{x + a} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -a^+} \dfrac{kx}{x + a} = -\infty$ Si $a < 0$ $\lim\limits_{x \to -a^-} \dfrac{kx}{x + a} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -a^+} \dfrac{kx}{x + a} = +\infty$

Si $k < 0$

Si $a > 0$ $\lim\limits_{x \to -a^-} \dfrac{kx}{x + a} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -a^+} \dfrac{kx}{x + a} = +\infty$ Si $a < 0$ $\lim\limits_{x \to -a^-} \dfrac{kx}{x + a} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -a^+} \dfrac{kx}{x + a} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{kx}{x + a} = k$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{kx}{x + a} = k$

Tiene una asíntota vertical en $x = -a$ y otra horizontal en $y = k$. No tiene asíntota oblicua.

d) Si $k > 0$

Si $a > 0$ $\lim\limits_{x \to -a^-} \dfrac{kx^2}{x + a} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -a^+} \dfrac{kx^2}{x + a} = +\infty$ Si $a < 0$ $\lim\limits_{x \to -a^-} \dfrac{kx^2}{x + a} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -a^+} \dfrac{kx^2}{x + a} = +\infty$

Si $k < 0$

Si $a > 0$ $\lim\limits_{x \to -a^-} \dfrac{kx^2}{x + a} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -a^+} \dfrac{kx^2}{x + a} = -\infty$ Si $a < 0$ $\lim\limits_{x \to -a^-} \dfrac{kx^2}{x + a} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -a^+} \dfrac{kx^2}{x + a} = -\infty$

$\dfrac{kx^2}{x - 1} = kx + k + \dfrac{k}{x - 1}$

Tiene una asíntota vertical, $x = -a$, y otra oblicua, $y = kx + k$.

**12.77 Halla el período de las siguientes funciones trigonométricas e indica en qué intervalo es suficiente estudiarlas.**

**a)** $y = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = 4 + \text{tg}\left(\dfrac{2x}{3}\right)$

a) $\cos\left(3(x + T) + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 3(x + T) + \dfrac{\pi}{2} = 3x + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{3}$

b) $4 + \text{tg}\left(\dfrac{2(x + T)}{3}\right) = 4 + \text{tg}\left(\dfrac{2x}{3}\right) \Rightarrow \dfrac{2(x + T)}{3} = \dfrac{2x}{3} + \pi \Rightarrow T = \dfrac{3\pi}{2}$

**12.78 A partir de la expresión** $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$**, calcula el dominio y las asíntotas verticales de la función** $y = \text{tg}\, x$**.**

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2} \ldots$

El denominador se anula en los múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2}$. Por tanto, $D(f) = \mathbf{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2}, k = 1, 3, 5, 7\ldots\right\}$.

$\lim\limits_{x \to (k\pi/2)^-} \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to (k\pi/2)^+} \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = -\infty$

Tiene asíntotas verticales en las rectas $x = \dfrac{k\pi}{2}$, $k = 1, 3, 5, 7\ldots$

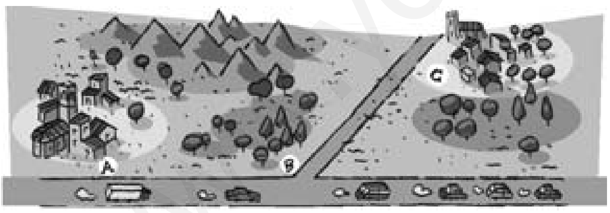
## PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

**12.79 Nueva carretera**

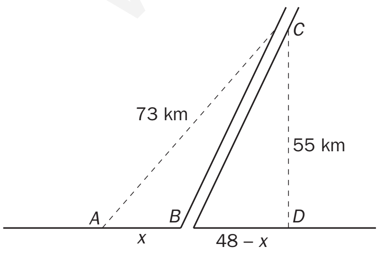
**Las localidades *A* y *C* distan 73 kilómetros.**

**Por *A* cruza una autopista donde los automóviles pueden circular a una velocidad máxima de 120 kilómetros por hora. La distancia de la localidad *C* a la autopista es de 55 kilómetros.**

**Se desea construir una nueva carretera que salga de *C* y desemboque en algún punto de la autopista, *B*. Dicha vía está pensada para que los vehículos puedan circular a una velocidad máxima de 90 kilómetros por hora.**



**Escribe la función que determina el tiempo que se emplea en viajar de *A* a *C* dependiendo de la posición de *B*. Como caso particular, calcula lo que se tardará si *B* se encuentra a 20 kilómetros de *A*.**




$AD = \sqrt{73^2 - 55^2} = 48$

Tiempo que se tarda en recorrer $AB$: $\dfrac{x}{120}$.

Tiempo que se tarda en recorrer $BC$: $\dfrac{\sqrt{55^2 + (48 - x)^2}}{90}$.

Tiempo que se tarda en ir de $A$ a $C$:

$$t = \frac{x}{120} + \frac{\sqrt{3025 + 2304 + x^2 - 96x}}{90} = \frac{x}{120} + \frac{\sqrt{5329 - 96x + x^2}}{90}$$

$$t(20) = \frac{20}{120} + \frac{\sqrt{5329 - 96 \cdot 20 + 20^2}}{90} = 0{,}8524 \text{ h} = 51 \text{ min}$$

**12.80** **La presión atmosférica y la altura**

**Rocío está realizando un trabajo de investigación sobre cómo varia la presión atmosférica en relación con la altura sobre el nivel del mar. Como parte de su trabajo, ha buscado los siguientes datos.**

| Altura (m) | 100 | 1100 | 2100 | 3100 |
|---|---|---|---|---|
| Presión (mbar) | 980 | 882 | 790 | 718 |

**Ella ha propuesto el siguiente modelo para determinar la presión, *p*, a una determinada altura, *h*.**

$$p = p_0 \cdot k^{\frac{h}{1000}}$$

**a) Utiliza los dos primeros datos de la tabla para determinar los valores aproximados de $p_0$ y $k$ según la propuesta de Rocío.**

**b) Rocío solo considerará válido el modelo si los otros dos datos se desvían menos del 1 % del valor predicho para ellos según su propuesta. ¿Debe considerarlo válido?**

**c) Calcula la presión, según el modelo de Rocío, a una altura de 4100 metros.**

a) $\left.\begin{array}{l} 980 = p_0 \cdot k^{0,1} \\ 882 = p_0 \cdot k^{1,1} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{p_0 \cdot k^{1,1}}{p_0 \cdot k^{0,1}} = \dfrac{882}{980} \Rightarrow k = 0,9 \quad p_0 = \dfrac{980}{0,9^{0,1}} = 990 \Rightarrow p = 990 \cdot 0,9^{\frac{h}{1000}}$

b) Si $h = 2100$, $p = 990 \cdot 0,9^{2,1} = 793,5 \Rightarrow \dfrac{793,5}{790} = 1,004$

Si $h = 3100$, $p = 990 \cdot 0,9^{3,1} = 714,15 \Rightarrow \dfrac{714,15}{718} = 0,995$

Ninguno de estos valores se aleja más de un 1 % de los datos obtenidos. Por tanto, se acepta el modelo.

c) $p(4100) = 990 \cdot 0,9^{\frac{4100}{1000}} = 643$ milibares

## AUTOEVALUACIÓN

**12.A1** **Indica de qué tipo es cada una de las funciones siguientes.**

**a)** $y = 5 + x + 2x^2$

**b)** $y = \dfrac{3x^2 + x - 4}{x - 5}$

**c)** $y = -\dfrac{1}{3} \ln x$

**d)** $y = \dfrac{2}{x}$

**e)** $y = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$

**f)** $y = 1 - 6x$

a) Cuadrática

b) Racional

c) Logarítmica

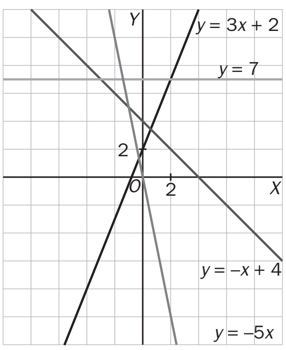
d) De proporcionalidad inversa

e) Exponencial

f) Lineal

**12.A2** **Representa gráficamente estas funciones lineales.**

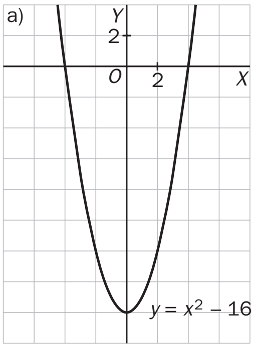
**a)** $y = 3x + 2$ **b)** $y = 4 - x$ **c)** $y = -5x$ **d)** $y = 7$



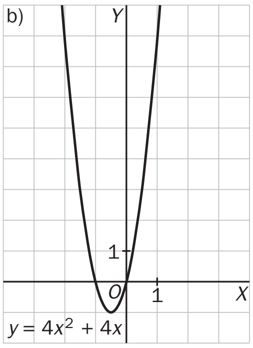
12.A3 **Calcula el vértice de estas parábolas y dibújalas.**

**a)** $y = x^2 - 16$ **b)** $y = 4x^2 + 4x$ **c)** $y = x^2 + 4x + 3$ **d)** $y = x^2 + x - 12$

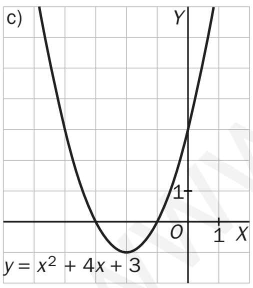
a) $x_v = -\dfrac{0}{2 \cdot 1} = 0;\ y_v = -16 \Rightarrow V(0, -16)$



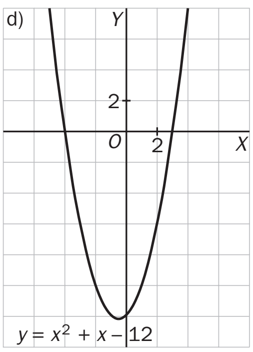

b) $x_v = -\dfrac{4}{2 \cdot 4} = -\dfrac{1}{2};\ y_v = -1 \Rightarrow V\left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$




c) $x_v = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2;\ y_v = -1 \Rightarrow V\left(-2, -1\right)$

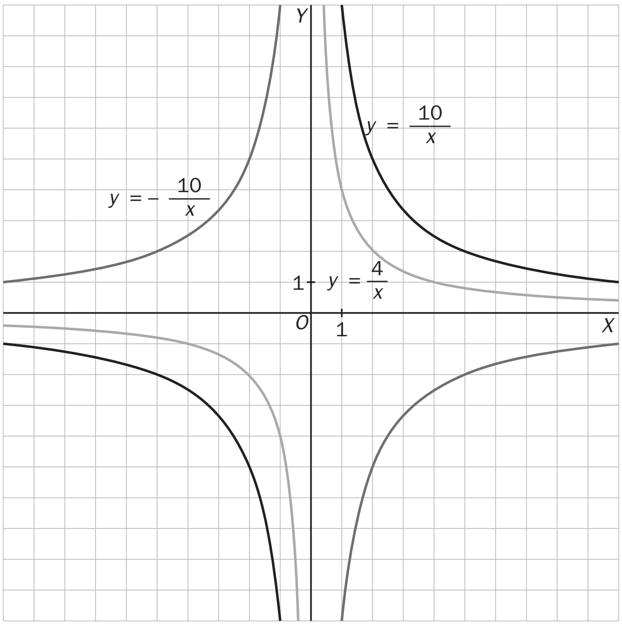



d) $x_v = -\dfrac{1}{2 \cdot 1} = -\dfrac{1}{2};\ y_v = -\dfrac{49}{4} \Rightarrow V\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{49}{4}\right)$



**12.A4** **Representa en los mismos ejes las siguientes funciones.**

**a)** $y = \dfrac{10}{x}$ **b)** $y = -\dfrac{10}{x}$ **c)** $y = \dfrac{4}{x}$




**12.A5** **Escribe la recíproca de estas funciones.**

**a)** $y = 9^x$ **b)** $y = \log_6 x$ **c)** $y = e^x$

a) $y = \log_9 x$ b) $y = 6^x$ c) $y = \ln x$

**12.A6** **Halla el dominio de las funciones siguientes.**

**a)** $y = \dfrac{3x}{2x - 12}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 4}{5x}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x^2 + x}$ **d)** $y = \dfrac{x + 3}{x^2 - 4x - 5}$

a) $D(f) = \mathbf{R} - \{6\}$

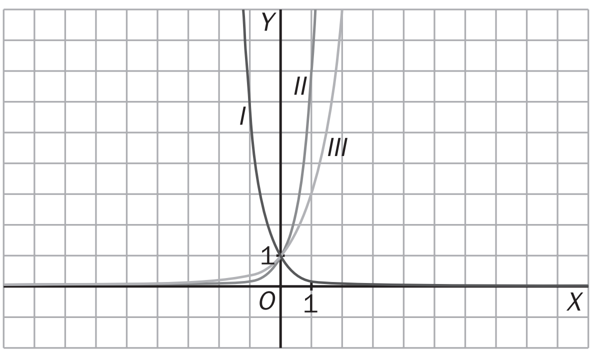
b) $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$

c) $x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -1 \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 0\}$

d) $x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 5\}$

**12.A7** **Identifica en tu cuaderno cada gráfica con la fórmula que le corresponde.**

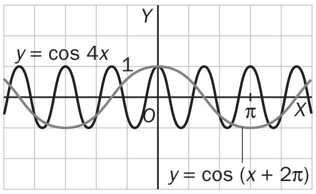
**a)** $y = 7^x$ **b)** $y = \left(\dfrac{1}{6}\right)^x$ **c)** $y = 3^x$




I) $y = \left(\dfrac{1}{6}\right)^x$ II) $y = 7^x$ III) $y = 3^x$

**12.A8** **A partir de la gráfica de $y = \cos x$, representa las siguientes funciones.**

**a)** $y = \cos(x + 2\pi)$ **b)** $y = \cos(4x)$



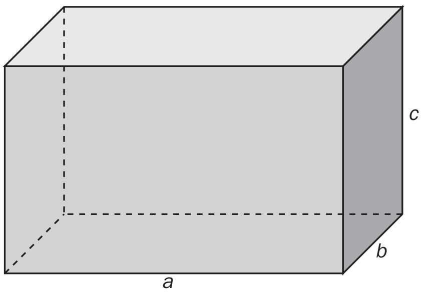

MURAL DE MATEMÁTICAS

MATETIEMPOS

## El equipaje de vuelo

**Una compañía aérea tiene esta norma sobre la dimensión del equipaje que se puede transportar en sus aviones: “El equipaje de los pasajeros debe cumplir que la suma de sus tres dimensiones (largo, ancho y alto) no exceda de 1,80 metros.” ¿Qué tamaño pueden tener las maletas para ser admitidas por esta compañía aérea?**

El problema plantea la búsqueda de las dimensiones óptimas de un prisma sabiendo que la suma de sus tres dimensiones es de 1,80 m. Por comodidad, trabajaremos en adelante con decímetros, o sea, una suma de 18 dm, luego:




$a + b + c = 18 \quad \rightarrow \quad c = 18 - a - b$

De todos los prismas posibles, buscamos el que tenga mayor volumen. Este será:

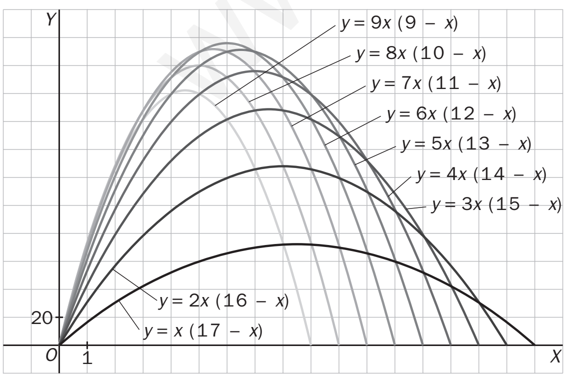
$V = abc = ab(18 - a - b) = 18ab - a^2b - ab^2$

Si damos diferentes valores a $b$, obtendremos una función $V(a)$ para cada valor de $b$.

Construimos una tabla.

| $b$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(a)$ | $a(17 - a)$ | $2a(16 - a)$ | $3a(15 - a)$ | $4a(14 - a)$ | $5a(13 - a)$ | ... |

Si construimos una gráfica (con la ayuda de una calculadora gráfica) para cada valor de $b$ entre 1 y 9, tenemos todas las posibilidades:




El máximo se produce cuando $a = 6$, $b = 6$ y $c = 18 - 6 - 6 = 6$, luego las dimensiones óptimas serán:

$a = 6$ dm $= 60$ cm

$b = 6$ dm $= 60$ cm

$c = 6$ dm $= 60$ cm

E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

13.1 **Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en los siguientes intervalos.**

**a) [3, 4]**

**b) [6, 7]**

**¿En cuál de ellos la función $f$ crece o decrece, en media, más rápidamente?**

a) $TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 - [3^2 - 3 \cdot 3 + 1] = 4$

b) $TV[6, 7] = f(7) - f(6) = 7^2 - 3 \cdot 7 + 1 - [6^2 - 3 \cdot 6 + 1] = 10$

Como la tasa de variación en el intervalo [6, 7] es mayor que en el intervalo [3, 4], siendo la amplitud la misma, concluimos que la función $f$ crece más deprisa en el intervalo [6, 7] que en el intervalo [3, 4].

13.2 **Calcula la tasa de variación media de las funciones $f(x) = x^3 - 3x + 1$ y $g(x) = x^3 - 2x + 1$ en el intervalo $[-1, 0]$.**

**Compara el crecimiento medio de ambas funciones en ese intervalo.**

$$TVM[-1, 0] = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{(0^3 - 3 \cdot 0 + 1) - [(-1)^3 - 3(-1) + 1]}{1} = \frac{1 - 3}{1} = -2$$

$$TVM[-1, 0] = \frac{g(0) - g(-1)}{0 - (-1)} = \frac{(0^3 - 2 \cdot 0 + 1) - [(-1)^3 - 2(-1) + 1]}{1} = \frac{1 - 2}{1} = -1$$

Las dos funciones decrecen, en media, en el intervalo $[-1, 0]$, decreciendo más rápido la función $f$, porque su tasa de variación media en el mismo intervalo es mayor en valor absoluto.

13.3 **Calcula la tasa de variación instantánea de la función $f(x) = x^2 + 1$ en los puntos $x = 2$ y $x = 5$.**

$$TVI[2] = \lim_{h\to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2 + h)^2 + 1 - (2^2 + 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h\to 0}(h + 4) = 4$$

$$TVI[5] = \lim_{h\to 0} \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(5 + h)^2 + 1 - (5^2 + 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 10h}{h} = \lim_{h\to 0}(h + 10) = 10$$

13.4 **Dada la función $g(x) = 2x^2 + 3$, halla la tasa de variación instantánea en $x = 1$ y en $x = -2$.**

$$TVI[1] = \lim_{h\to 0} \frac{g(1 + h) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(1 + h)^2 + 3 - (2 \cdot 1^2 - 3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2 + 4h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h + 4) = 4$$

$$TVI[-2] = \lim_{h\to 0} \frac{g(-2 + h) - g(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(-2 + h)^2 + 3 - [2 \cdot (-2)^2 + 3]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2 - 8h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h - 8) = -8$$

13.5 **Calcula la derivada de las siguientes funciones en $x_0 = 2$.**

**a) $f(x) = -7$**

**b) $g(x) = -4x + 1$**

**c) $h(x) = x^2 - 5$**

a) $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-7 - (-7)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$

b) $g'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{g(2 + h) - g(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[-4(2 + h) + 1] - [-4 \cdot 2 + 1]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{h} = -4$

c) $h'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{h(2 + h) - h(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(2 + h)^2 - 5] - (2^2 - 5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 5 + 1}{h} = 4$

**13.6 Halla la derivada de $f(x) = 6x^2 - 2x - 3$ en estos puntos.**

**a) $x_0 = 0$** **b) $x_0 = -3$** **c) $x_0 = 6$**

a) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[6h^2 - 2h - 3] - (-3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{6h^2 - 2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(6h - 2) = -2$

b) $f'(-3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[6(-3+h)^2 - 2(-3+h) - 3] - 57}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{6h^2 - 38h}{h} = -38$

c) $f'(6) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[6(6+h)^2 - 2(6+h) - 3] - 201}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{6h^2 + 70h}{h} = 70$

**13.7 Halla la pendiente de las tangentes a las siguientes funciones en los puntos indicados.**

**a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, en el punto $x = 2$**

**b) $f(x) = x^3 - 2$, en el punto $x = 1$**

a) $m = f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[(2+h)^2 - 2(2+h) + 1] - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 + 2h}{h} = 2$

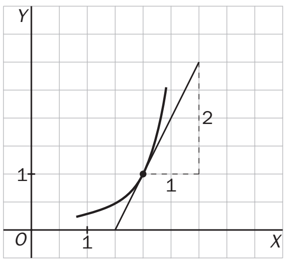
b) $m = f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[(1+h)^3 - 2] - (-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h^2 + 3h + 3) = 3$

**13.8 Esboza la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ si su derivada vale lo siguiente.**

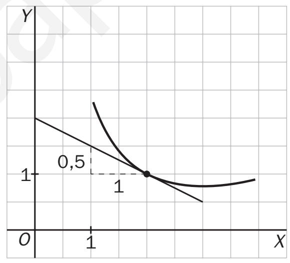
**a) $g'(2) = 2$** **c) $g'(2) = -0{,}5$**

**b) $g'(2) = -3$** **d) $g'(2) = 0{,}3$**

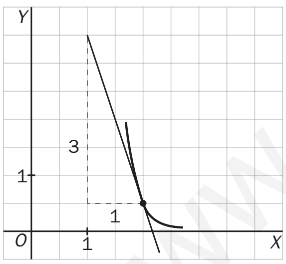
a)



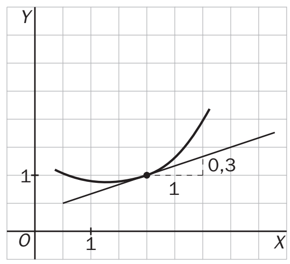

c)




b)




d)






**13.9 Halla la ecuación de las rectas tangentes a estas funciones en los puntos indicados.**

**a) $y = x^2$ en $x_0 = -1$**

**b) $y = 2x^2 + 3x$ en $x_0 = 2$**

a) $m = f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-1+h)^2 - (-1)^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 - 2h}{h} = -2$

$y_0 = f(-1) = (-1)^2 = 1$

La recta tangente a $f(x) = x^2$ en $x_0 = -1$ es: $y - 1 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 1$.

b) $m = f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[2(2+h)^2 + 3(2+h)] - 14}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h^2 + 11h}{h} = 11$

$y_0 = f(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 14$

La recta tangente a $f(x) = 2x^2 + 3x$ en $x_0 = 2$ es: $y - 14 = 11(x - 2) \Rightarrow y = 11x - 8$.

**13.10 ¿En qué punto la tangente a la gráfica de la función $g(x) = 6x^2 - 24x + 11$ es paralela al eje de abscisas?**

Al ser la tangente paralela al eje de abscisas, $y = 0$, tiene su misma pendiente, $m = 0$.

$$m = 0 = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[6(x_0 + h)^2 - 24(x_0 + h) + 11] - (6x_0^2 - 24x_0 + 11)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[6(x_0^2 + 2x_0h + h^2) - 24(x_0 + h) + 11] - 6x_0^2 + 24x_0 - 11}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12x_0h + 6h^2 - 24h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0}(12x_0 + 6h - 24) = 12x_0 - 24$$

Entonces, $m = 0 = 12x_0 - 24$, por lo que $x_0 = 2$.

En el punto $(2, f(2)) = (2, -13)$, la tangente a $f(x) = 6x^2 - 24x + 11$ es paralela al eje de abscisas.

**13.11 Indica cuál de las siguientes rectas es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + 15\,000$ en $x_0 = 0$.**

**a) $y = 15\,000$**

**b) $y = 15\,000x$**

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 15\,000 - 15\,000}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

$f(0) = 15\,000$

La recta tangente a $f(x) = x^2 + 15\,000$ en $x_0 = 0$ es la del apartado a.

**13.12 Encuentra un punto perteneciente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5x + 7$, en el que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.**

Al ser la tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante, $y = x$, tiene su misma pendiente, $m = 1$.

$$m = 1 = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x_0 + h)^2 - 5(x_0 + h) + 7] - (x_0^2 - 5x_0 + 7)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(x_0^2 + 2x_0h + h^2) - 5(x_0 + h) + 7] - x_0^2 + 5x_0 - 7}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0h + h^2 - 5h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0}(2x_0 + h - 5) = 2x_0 - 5$$

Entonces, $m = 1 = 2x_0 - 5$, por lo que $x_0 = 3$

En el punto $(3, f(3)) = (3, 1)$, la tangente a $f(x) = x^2 - 5x + 7$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

**13.13 Halla la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en los puntos $x = 0$, 1 y 2 por estos dos procedimientos.**

**a) Calculando directamente $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$.**

**b) Obteniendo la función derivada $f'(x)$ y sustituyendo en ella los puntos $x = 0$, 1 y 2.**

a) $$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{[(1 + h)^2 + 1] - (1^2 + 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 - 2}{h} = \lim_{h \to 0}(h + 2) = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{[(2 + h)^2 + 1] - (2^2 + 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 1 - 5}{h} = \lim_{h \to 0}(h + 4) = 4$$

b) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x + h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0}(h + 2x) = 2x$$

$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$ $\qquad f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ $\qquad f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

**13.14 Calcula la función derivada de las siguientes funciones aplicando la definición.**

**a)** $f(x) = -2$ **c)** $f(x) = x^2 - 3x$

**b)** $f(x) = -2x + 5$ **d)** $f(x) = 5x^2 + 2$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2 - (-2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[-2(x+h) + 5] - (-2x + 5)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[(x+h)^2 - 3(x+h)] - (x^2 - 3x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2xh + h^2 - 3h}{h} = 2x - 3$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[5(x+h)^2 + 2] - 5x^2 - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{10xh + 5h^2}{h} = 10x$

**13.15 Si $f'(x) = 0$, ¿qué podemos decir de la función $f$?**

$0 = f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para cualquier valor de $x \Rightarrow f(x+h) - f(x) = 0$ para cualquier valor de $x \Rightarrow f(x+h) = f(x)$ para cualquier valor de $x$. Por tanto, la función $f(x)$ es constante.

**13.16 Halla las derivadas de las siguientes funciones.**

**a)** $y = -2$ **c)** $y = \sqrt{x}$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^4}$

**b)** $y = x$ **d)** $y = \sqrt[5]{x^4}$ **f)** $y = x^{-\frac{7}{3}}$

a) $y' = 0$

c) $y' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $y' = \left(x^{-4}\right)' = -4x^{-5} = -\dfrac{4}{x^5}$

b) $y' = 1$

d) $y' = \left(x^{\frac{4}{5}}\right)' = \dfrac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = \dfrac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}$

f) $y' = -\dfrac{7}{3}x^{-\frac{7}{3}-1} = -\dfrac{7}{3}x^{-\frac{10}{3}} = -\dfrac{7}{3}\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^{10}}}$

**13.17 Calcula las derivadas de estas funciones.**

**a)** $y = e^x$ **b)** $y = \dfrac{2^x}{3^x}$ **c)** $y = e^x \cdot 2^x$ **d)** $y = e^x \cdot 2^x \cdot 5^x$

a) $y' = e^x$ b) $y' = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \ln\dfrac{2}{3}$ c) $y' = (2e)^x \cdot \ln(2e)$ d) $y' = (10e)^x \cdot \ln(10e)$

**13.18 Halla las derivadas del ejercicio anterior en el punto $x_0 = 0$.**

a) $1$ b) $\ln\dfrac{2}{3}$ c) $\ln(2e)$ d) $\ln(10e)$

**13.19 Halla las siguientes derivadas.**

**a)** $(7x^5)'$ **d)** $(6x^9 - 21x^7 + 14x^4 - 3x^2 + 7)'$

**b)** $(12 \text{ sen } x)'$ **e)** $(2 \text{ sen } x - 15 \cos x)'$

**c)** $(23 \cdot 5^x)'$ **f)** $(\ln x^7 - \sqrt[6]{x^4} - 12^x)'$

a) $(7x^5)' = 35x^4$

b) $(12 \text{ sen } x)' = 12 \cos x$

c) $(23 \cdot 5^x)' = 23 \cdot 5^x \ln 5$

d) $(6x^9 - 21x^7 + 14x^4 - 3x^2 + 7)' = 54x^8 - 147x^6 + 56x^3 - 6x$

e) $(2 \text{ sen } x - 15 \cos x)' = 2 \cos x + 15 \text{ sen } x$

f) $(7 \ln x - x^{\frac{4}{6}} - 12^x)' = \dfrac{7}{x} - \dfrac{4}{6}x^{\frac{4}{6}-1} - 12^x \ln 12 = \dfrac{7}{x} - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 12^x \ln 12$

**13.20 Calcula estas derivadas.**

**a)** $[(x^5 - 2x^4)(x^3 - 2x + 5)]'$

**b)** $[\ln x(\cos x - 3 \operatorname{sen} x)]'$

**c)** $\left(\dfrac{2x^4 - 3x}{x^5 - 4x + 3}\right)'$

**d)** $\left(\dfrac{2 + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\right)'$

a) $[(x^5 - 2x^4)(x^3 - 2x + 5)]' = (5x^4 - 8x^3)(x^3 - 2x + 5) + (3x^2 - 2)(x^5 - 2x^4) = 8x^7 - 14x^6 - 12x^5 + 45x^4 - 40x^3$

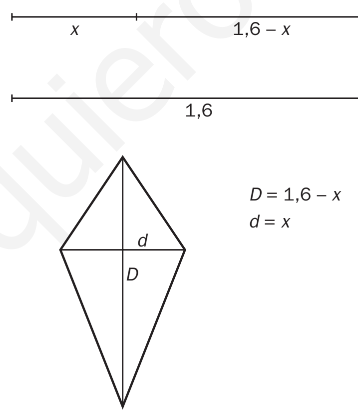
b) $[\ln x(\cos x - 3 \operatorname{sen} x)]' = \dfrac{1}{x}(\cos x - 3 \operatorname{sen} x) + (-\operatorname{sen} x - 3 \cos x)\ln x$

c) $\left(\dfrac{2x^4 - 3x}{x^5 - 4x + 3}\right)' = \dfrac{(8x^3 - 3)(x^5 - 4x + 3) - (5x^4 - 4)(2x^4 - 3x)}{(x^5 - 4x + 3)^2}$

d) $\left(\dfrac{2 + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\right)' = \dfrac{\cos x(1 + \cos x) - (-\operatorname{sen} x)(2 + \operatorname{sen} x)}{(1 + \cos x)^2}$

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**13.21 Rosa necesita cortar un listón de madera de 1,6 metros en dos partes para construir el armazón de una cometa con forma de rombo. ¿Qué medidas deben tener las partes para que la superficie de la cometa sea máxima?**



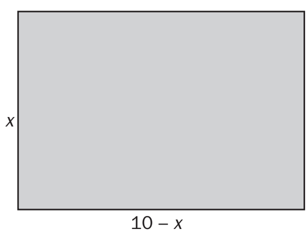

Las diagonales medirán $x$ y $1,6 - x$. El área del rombo será:

$$A(x) = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{(1,6 - x)x}{2} = 0,8x - \frac{x^2}{2}$$

La derivada será: $A'(x) = 0,8 - x$, que se anula para $x = 0,8$ metros.

El rombo de área máxima tiene las dos diagonales iguales, luego en realidad es un cuadrado de 0,32 m² de área.

**13.22 Con una cuerda de 20 metros de largo queremos formar un rectángulo atando sus extremos. De todos los rectángulos posibles, ¿cuál será el que tenga mayor área?**




Los lados medirán $x$ y $10 - x$. El área será:

$$A(x) = b \cdot h = (10 - x)x = 10x - x^2$$

La derivada será $A'(x) = 10 - 2x$, que se anula para $x = 5$ metros.

La figura de área máxima es un cuadrado.

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

## Tasa de variación media. Tasa de variación instantánea

**13.23 Halla la tasa de variación media de estas funciones en los intervalos que se indican.**

**a) $f(x) = x - 6$, en $[0, 2]$**

**b) $g(x) = 2x + 5$, en $[4, 5]$**

**c) $h(x) = x^2 - 4$, en $[-1, 0]$**

**d) $j(x) = 3 - x$, en $[-1, 1]$**

a) $TVM[0, 2] = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{-4 + 6}{2} = 1$

b) $TVM[4, 5] = \dfrac{g(5) - g(4)}{5 - 4} = \dfrac{15 - 13}{1} = 2$

c) $TVM[-1, 0] = \dfrac{h(0) - h(-1)}{0 - (-1)} = \dfrac{-4 - (-3)}{1} = -1$

d) $TVM[-1, 1] = \dfrac{j(1) - j(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{2 - 4}{2} = -2$

**13.24 Estudia si las siguientes funciones crecen o decrecen en promedio en el intervalo $[2, 3]$.**

**a) $y = 3x + 1$**

**b) $y = 6 - 5x$**

**c) $y = x^2 + 3$**

**d) $y = x^2 + x$**

**e) $y = 2 - x^2$**

**f) $y = x^2 - 6x$**

a) $TVM[2, 3] = \dfrac{y(3) - y(2)}{3 - 2} = \dfrac{10 - 7}{1} = 3$ Crece.

b) $TVM[2, 3] = \dfrac{y(3) - y(2)}{3 - 2} = \dfrac{-9 - (-4)}{1} = -5$ Decrece.

c) $TVM[2, 3] = \dfrac{y(3) - y(2)}{3 - 2} = \dfrac{12 - 7}{1} = 5$ Crece.

d) $TVM[2, 3] = \dfrac{y(3) - y(2)}{3 - 2} = \dfrac{12 - 6}{1} = 6$ Crece.

e) $TVM[2, 3] = \dfrac{y(3) - y(2)}{3 - 2} = \dfrac{-7 - (-2)}{1} = -5$ Decrece.

f) $TVM[2, 3] = \dfrac{y(3) - y(2)}{3 - 2} = \dfrac{-9 - (-8)}{1} = -1$ Decrece.

**13.25 Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = -8$ en el intervalo $[-2, -1]$ y, a partir de ella, describe cómo es su crecimiento.**

$TVM[-2, -1] = \dfrac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \dfrac{-8 + 8}{1} = 0$. Es una función constante.

**13.26 Identifica cuáles de las siguientes funciones crecen y cuáles decrecen, en promedio, en el intervalo $[-1, 1]$.**

**a) $f(x) = x^2 - 4x$**

**b) $g(x) = 9x - x^3$**

**c) $h(x) = -x^2 - 5x - 6$**

**d) $m(x) = x^3 + 1$**

a) $TVM[-1, 1] = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{-3 - 5}{2} = -4$ Decrece.

b) $TVM[-1, 1] = \dfrac{g(1) - g(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{8 - (-8)}{2} = 8$ Crece.

c) $TVM[-1, 1] = \dfrac{h(1) - h(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{-12 - (-2)}{2} = -5$ Decrece.

d) $TVM[-1, 1] = \dfrac{m(1) - m(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{2 - 0}{2} = 1$ Crece.

**13.27 Compara el crecimiento medio de estas funciones en el intervalo [−2, −1].**

**a) $f(x) = 4x + 3$** **b) $g(x) = x^2 - 4x$**

a) $TVM[-2, -1] = \dfrac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \dfrac{-1 - (-5)}{1} = 4$ Crece.

b) $TVM[-2, -1] = \dfrac{g(-1) - g(-2)}{-1 - (-2)} = \dfrac{5 - 12}{1} = -7$ Decrece.

En valor absoluto es mayor la tasa de variación media de la función $g(x)$. Por tanto, $g(x)$ decrece más rápidamente.

**13.28 Calcula la tasa de variación instantánea de estas funciones en los siguientes puntos.**

**a) $f(x) = 7 + 2x$, en $x = 0$ y $x = 3$**

**b) $g(x) = 4 - 3x$, en $x = -1$ y $x = 2$**

**c) $h(x) = -x^2$, en $x = 1$ y $x = -2$**

a) $TVI[0] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{7 + 2h - 7}{h} = 2$

$TVI[3] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{7 + 6 + 2h - 13}{h} = 2$

b) $TVI[-1] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(-1 + h) - g(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4 + 3 - 3h - 7}{h} = -3$

$TVI[2] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(2 + h) - g(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4 - 6 - 3h + 2}{h} = -3$

c) $TVI[1] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(1 + h) - h(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(1 + h)^2 - (-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1 - 2h - h^2 + 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(-2 - h)}{h} = -2$

$TVI[-2] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(-2 + h) - h(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(-2 + h)^2 - (-4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-4 + 4h - h^2 + 4}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(4 - h)}{h} = 4$

**13.29 Halla la tasa de variación instantánea de estas funciones en los puntos $x = -2$, $x = 1$ y $x = 4$.**

**a) $y = x^3 + 2x^2$**

**b) $y = 3x + 2$**

**c) $y = x^2 - 2x + 1$**

**d) $y = \dfrac{1 + x}{x}$**

a) $TVI[-2] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{y(-2 + h) - y(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-2 + h)^3 + 2(-2 + h)^2 - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4h - 4h^2 + h^3}{h} = 4$

$TVI[1] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{y(1 + h) - y(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1 + h)^3 + 2(1 + h)^2 - 3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{7h + 5h^2 + h^3}{h} = 7$

$TVI[4] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{y(4 + h) - y(4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(4 + h)^3 + 2(4 + h)^2 - 96}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{64h + 14h^2 + h^3}{h} = 64$

b) $TVI[-2] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{y(-2 + h) - y(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(-2 + h) + 2 - (-4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-6 + 3h + 6}{h} = 3$

$TVI[1] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{y(1 + h) - y(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(1 + h) + 2 - 5}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3 + 3h - 3}{h} = 3$

$TVI[4] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{y(4 + h) - y(4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(4 + h) + 2 - 14}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{12 + 3h - 12}{h} = 3$

c) $TVI[-2] = \lim_{h\to 0} \dfrac{y(-2+h) - y(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(-2+h)^2 - 2(-2+h) + 1 - 9}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-6h + h^2}{h} = -6$

$TVI[1] = \lim_{h\to 0} \dfrac{y(1+h) - y(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 - 2(1+h) + 1 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1h^2}{h} = 0$

$TVI[4] = \lim_{h\to 0} \dfrac{y(4+h) - y(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(4+h)^2 - 2(4+h) + 1 - 9}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{6h + h^2}{h} = -6$

d) $TVI[-2] = \lim_{h\to 0} \dfrac{y(-2+h) - y(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1-2+h}{-2+h} - \dfrac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{-2+2h+2-h}{-4+2h}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{h(-4+2h)} = \dfrac{-1}{4}$

$TVI[1] = \lim_{h\to 0} \dfrac{y(1+h) - y(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1+1+h}{1+h} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{2+h-2-2h}{1+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-h}{h(1+h)} = -1$

$TVI[4] = \lim_{h\to 0} \dfrac{y(4+h) - y(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1+4+h}{4+h} - \dfrac{5}{4}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{20+4h-20-5h}{16+4h}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-h}{h(16+4h)} = \dfrac{-1}{16}$

## Derivada en un punto. Recta tangente

13.30 **Halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados.**

**a)** $f(x) = -6$, **en** $x_0 = 4$

**b)** $g(x) = 3x + 9$, **en** $x_0 = -2$

**c)** $h(x) = x^3$, **en** $x_0 = 0$

**d)** $j(x) = 4 + 2x^2$, **en** $x_0 = 0$

a) $f'(4) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-6+6}{h} = 0$

b) $g'(-2) = \lim_{h\to 0} \dfrac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{3(-2+h) + 9 - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-6 + 3h + 6}{h} = 3$

c) $h'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{h(0+h) - h(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^3 - 0}{h} = 0$

d) $j'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{j(0+h) - j(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{4 + 2h^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} 2h = 0$

13.31 **Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos señalados.**

**a)** $f(x) = \dfrac{3}{x}$, **en** $x_0 = -6$

**b)** $g(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$, **en** $x_0 = 0$

a) $f'(-6) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(-6+h) - f(-6)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{3}{-6+h} + \dfrac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{6-6+h}{2(-6+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{2h(-6+h)} = \dfrac{-1}{12}$

b) $g'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{h+1}{2h-1} + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{h+1+2h-1}{2h-1}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{3h}{h(2h-1)} = -3$

**13.32 Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 - x$ en el punto $x_0 = -2$.**

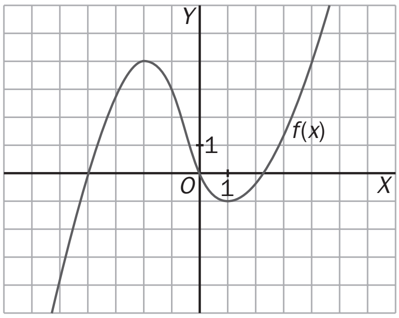
$f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - (-2) = 14$

$$m = f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(-2+h)^2 - (-2+h) - 14}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{12 - 12h + 3h^2 + 2 - h - 14}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(-13 + 13h)}{h} = -13$$

Recta tangente: $y - 14 = -13 \cdot (x + 2)$

**13.33 Observando la gráfica de la función, ¿en qué puntos de la misma la derivada de la función es cero?**

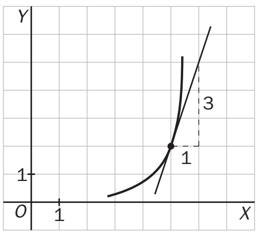



En $(-2, 4)$ y en $(1, -1)$.

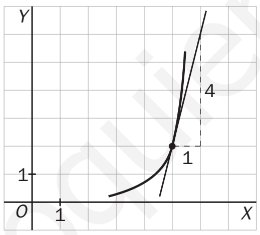
**13.34 Esboza la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x_0 = 5$ en los siguientes supuestos.**

**a) $f'(5) = 3$** **b) $f'(5) = 4$** **c) $f'(5) = -1$** **d) $f'(5) = -2$**

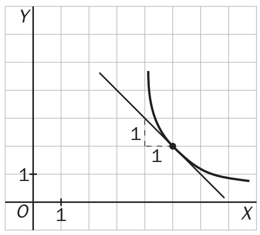
a)



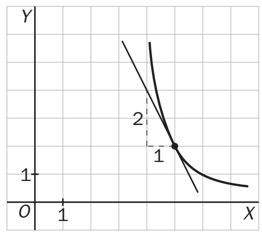

b)




c)




d)




**13.35 Halla el ángulo que forma la recta tangente a la curva $y = 4x^3 + 9x + 2$ en el punto $x_0 = 3$ con el eje de abscisas.**

$$y'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{y(3+h) - y(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(3+h)^3 + 9(3+h) + 2 - 137}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4(27 + 27h + 9h^2 + h^3) + 27 + 9h - 135}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{108 + 108h + 36h^2 + 4h^3 - 108 + 9h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4h^2 + 36h + 117)}{h} = 117 \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = 117 \Rightarrow 89^\circ\ 30'\ 37''$$

**13.36 Calcula en qué punto la gráfica de $f(x) = 2 + 4x^2 - x^4$ corta al eje de ordenadas y halla la recta tangente a la misma en ese punto.**

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$

$$m = f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 + 4h^2 - h^4 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4h - h^2)}{h} = 0.$$

Recta tangente: $y - 2 = 0$

## Derivada de una función

13.37 **Calcula, utilizando la definición, la derivada de las funciones siguientes.**

**a)** $f(x) = 4$

**b)** $g(x) = 7x$

**c)** $h(x) = 2 - 5x$

**d)** $i(x) = x^2 + 5x$

**e)** $j(x) = x^4 + 9x^2$

**f)** $m(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4 - 4}{h} = 0$

b) $g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{7(x+h) - 7x}{h} = 7$

c) $h'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2 - 5(x+h) - 2 + 5x}{h} = -5$

d) $i'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{i(x+h) - i(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 + 5(x+h) - x^2 - 5x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2xh + h^2 + 5h}{h} = 2x + 5$

e) $j'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{j(x+h) - j(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^4 + 9(x+h)^2 - x^4 - 9x^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 + 18xh + 9h^2}{h} = 4x^3 + 18x$

f) $m'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{m(x+h) - m(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{(x+h)^2 + 1}{x+h} - \dfrac{x^2 + 1}{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{hx^2 + hx^2 - h}{hx(x+h)} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

13.38 **Dada la función $f(x) = 6x^2 + 2x$:**

**a) Usa la definición para hallar su derivada.**

**b) A partir del resultado anterior, calcula $f'(0)$, $f'(3)$ y $f'(-1)$.**

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{6(x+h)^2 + 2(x+h) - 6x^2 - 2x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{12xh + 6h^2 + 2h}{h} = 12x + 2$

b) $f'(0) = 2$  $f'(3) = 38$  $f'(-1) = -10$

## Derivada de funciones elementales y operaciones

13.39 **Halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados.**

**a)** $f(x) = x^2 - 5$, **en** $x_0 = 0$

**b)** $g(x) = x^2 + 6x - 2$, **en** $x_0 = -1$

**c)** $h(x) = x^3 - x + 3$, **en** $x_0 = 1$

**d)** $j(x) = 4x - x^2$, **en** $x_0 = 2$

a) $f'(x) = 2x$; $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$

b) $g'(x) = 2x + 6$; $g'(-1) = 2 \cdot (-1) + 6 = 4$

c) $h'(x) = 3x^2 - 1$; $h'(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$

d) $j'(x) = 4 - 2x$; $j'(2) = 4 - 2 \cdot 2 = 0$

**13.40 Calcula la derivada de las siguientes funciones.**

**a)** $y = 3x^5 - 6x^3 + 2x - 9$

**b)** $y = 4 \ln x + 5\, e^x$

**c)** $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 8x - 7$

**d)** $y = \sqrt{x} - \frac{1}{5}x + \frac{9}{8}$

**e)** $y = 2 \text{ sen } x - 3 \cos x$

**f)** $y = \sqrt[4]{x} - 6x^{-2} + 5\sqrt[3]{x}$

a) $y' = 15x^4 - 18x^2 + 2$

b) $y' = \frac{4}{x} + 5e^x$

c) $y' = x^3 + 3x + 8$

d) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{5}$

e) $y' = 2 \cos x + 3 \text{ sen } x$

f) $y' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 12x^{-3} + \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{12}{x^3} + \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

**13.41 Calcula $f'(2)$, $f'(-3)$, $f'(7)$ y $f'(-4)$ obteniendo previamente la derivada de $f(x) = x^2 \cdot e^x$.**

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (2x + x^2)$

$f'(2) = e^2 \cdot (4 + 4) = 8\, e^2$

$f'(-3) = e^{-3} \cdot (-6 + 9) = 3\, e^{-3}$

$f'(7) = e^7 \cdot (14 + 49) = 63\, e^7$

$f'(-4) = e^{-4} \cdot (-8 + 16) = 8\, e^{-4}$

**13.42 Halla la derivada de las siguientes funciones.**

**a)** $y = (4x + 2) \cdot e^x$

**b)** $y = (x^3 - 7x^2) \cdot \ln x$

**c)** $y = \sqrt[5]{x} \cdot \text{sen x}$

**d)** $y = \frac{x - 1}{2x + 3}$

**e)** $y = \frac{x^2}{2x + 5}$

**f)** $y = \frac{4x + 6}{3 - x}$

a) $y' = 4 \cdot e^x + e^x \cdot (4x + 2)$

b) $y' = (3x^2 - 14x) \cdot \ln x + \frac{x^3 - 7x^2}{x}$

c) $y' = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \cdot \text{sen } x + \sqrt[5]{x} \cdot \cos x$

d) $y' = \frac{2x + 3 - (x - 1) \cdot 2}{(2x + 3)^2} = \frac{5}{(2x + 3)^2}$

e) $y' = \frac{2x(2x + 5) - 2x^2}{(2x + 5)^2} = \frac{2x^2 + 10x}{(2x + 5)^2}$

f) $y' = \frac{4(3 - x) + 4x + 6}{(3 - x)^2} = \frac{18}{(3 - x)^2}$

**13.43 Obtén la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{x^2 - 5}{4x}$ en el punto $x_0 = -5$.**

$f'(x) = \frac{8x^2 - 4(x^2 - 5)}{16x^2} = \frac{4x^2 + 20}{16x^2} \Rightarrow m = f'(-5) = \frac{120}{400} = \frac{3}{10}$

$f(-5) = \frac{(-5)^2 - 5}{4(-5)} = -1$

Recta tangente: $y + 1 = \frac{3}{10} \cdot (x + 5) \Rightarrow y = \frac{3}{10}x + \frac{1}{2}$

**13.44 La ecuación de la recta tangente a una curva es $y - 5 = 3 \cdot (x + 1)$.**

**a) ¿Cuál es el punto de tangencia?**

**b) ¿Y la derivada de la función en ese punto?**

a) $(-1, 5)$

b) $f'(-1) = 3$

**13.45 Comprueba que la pendiente de la recta tangente a las curvas $f(x) = 2x^2 + x$ y $g(x) = x$ en $x_0 = 0$ es la misma.**

$f'(x) = 4x + 1;\ f'(0) = 1$ $\qquad$ $g'(x) = 1;\ g'(0) = 1$

**13.46 Considera la función $f(x) = \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} - 2x + 5$.**

**a) Halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa 2.**

**b) Encuentra otro punto de esa curva en el que la recta tangente sea paralela a la obtenida en el apartado anterior.**

a) $f'(x) = 2x^2 - 3x - 2$ $\qquad$ $f'(2) = 8 - 6 - 2 = 0$

$f(2) = \dfrac{16}{3} - 6 - 4 + 5 = \dfrac{16}{3} - 5 = \dfrac{1}{3}$. Recta tangente: $y - \dfrac{1}{3} = 0;\ y = \dfrac{1}{3}$

b) $m = f'(a) = 2a^2 - 3a - 2 = 0;\ a = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \dfrac{3 \pm 5}{4};\ a = 2$ y $a = -\dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{133}{24}\right)$

**13.47 Halla la ecuación de las rectas tangentes a la curva $y = 2x^2 - 24x$ en los puntos en los que esta corta al eje de abscisas.**

$y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 2x(x - 12) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 12$

$y' = 4x - 24;\quad y'(0) = -24;\quad y'(12) = 24$

Rectas tangentes: $y = -24x;\ \ y = 24 \cdot (x - 12)$

**13.48 Halla la derivada de las siguientes funciones.**

**a)** $y = \dfrac{x^9}{5} - \dfrac{x^6}{3} + \dfrac{2x^2}{8} + \dfrac{4}{7}$ $\qquad$ **b)** $y = 3\sqrt[4]{x} - \dfrac{\sqrt{x}}{5} + \sqrt{10}$

a) $y' = \dfrac{9x^8}{5} - 2x^5 + \dfrac{x}{2}$ $\qquad$ b) $y' = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} - \dfrac{1}{10\sqrt{x}} = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{1}{10\sqrt{x}}$

**13.49 Calcula la derivada de estas funciones.**

**a)** $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{7}{8x^3} + 3x$

**b)** $y = \dfrac{7}{x^3 - 4x^2 + 6x + 2}$

**c)** $y = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

**d)** $y = \dfrac{9x^3 - 1}{3^x}$

**e)** $y = 2^x \cdot x^2 + 2x$

**f)** $y = \dfrac{5 \ln x - 7}{1 - x^2}$

**g)** $y = \dfrac{3 \operatorname{sen} x - 1}{\cos x}$

**h)** $y = (x^{-4} - 6x^{-1}) \cdot \ln x$

**i)** $y = \dfrac{1}{x} - x^6 \cdot 6^x$

**j)** $y = (2x^4 - 6x + 9) \cdot 3^x$

a) $y' = -2x^{-2} - 10x^{-3} - \dfrac{21}{8}x^{-4} + 3 = \dfrac{-2}{x^2} - \dfrac{10}{x^3} - \dfrac{21}{8x^4} + 3$

b) $y' = \dfrac{-21x^2 + 56x - 42}{(x^3 - 4x^2 + 6x + 2)^2}$

c) $y' = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

d) $y' = \dfrac{27x^2 \cdot 3^x - (9x^3 - 1) \cdot 3^x \cdot \ln 3}{(3^x)^2}$

e) $y' = 2^x \cdot (\ln 2 \cdot x^2 + 2x) + 2$

f) $y' = \dfrac{\dfrac{5 - 5x^2}{x} + 2x(5 \ln x - 7)}{(1 - x^2)^2}$

g) $y' = \dfrac{3 \cos^2 x + (3 \operatorname{sen} x - 1)\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \dfrac{3 - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

h) $y' = (-4x^{-5} + 6x^{-2}) \cdot \ln x + x^{-5} - 6x^{-2}$

i) $-\dfrac{1}{x^2} - (6x^5 \cdot 6^x + x^6 \cdot 6^x \cdot \ln 6)$

j) $y' = 3^x \cdot [(8x^3 - 6) + (2x^4 - 6x + 9) \cdot \ln 3]$

13.50 **Si la tasa de variación media de una función $f(x)$ en el intervalo [3, 4] es 6 y la de otra función $g(x)$ en el mismo intervalo es $-6$, ¿cuál de ellas crece o decrece más rápidamente en media?**

Las dos crecen y decrecen con la misma rapidez.

13.51 **La tasa de variación instantánea de una función $g(x)$ en el punto $x = 4$ es 7. ¿Cuál es la derivada de esa función en $x_0 = 4$?**

**a) 4** **b) 3** **c) 7** **d) 28**

$f'(4) = 7$

13.52 **Si la recta tangente a una curva $f(x)$ en un punto es $y - 9 = -2 \cdot (x + 3)$, ¿cuánto vale $f'(-3)$?**

$f'(-3) = -2$

13.53 **La pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $(-1, -5)$ es 2 y $f'(9) = 2$.**

**¿Qué se puede decir de las rectas tangentes a $f(x)$ en los puntos $x = -1$ y $x = 9$?**

Que son paralelas.

13.54 **Escribe tres funciones cuya derivada sea 2.**

**a) ¿En qué se diferencian esas funciones?**

**b) ¿Cuántas funciones tienen su derivada igual a 2?**

$f(x) = 2x$ $f(x) = 2x + 1$ $f(x) = 2x + 9$

a) En la constante.

b) Infinitas.

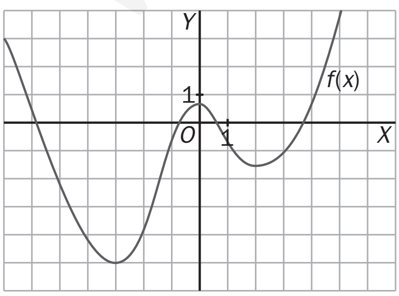
13.55 **El dominio de una función racional es R − {3}. ¿Tiene derivada en $x_0 = 3$? Razona tu respuesta.**

No, porque al hacer la derivada, en el denominador aparece el que tenía la función elevado al cuadrado y, por tanto, su dominio sería el mismo.

13.56 **Explica si es posible que una función tenga el mismo valor de su derivada en dos puntos distintos. En caso afirmativo, pon un ejemplo que lo confirme.**

Sí es posible: $f(x) = x$. La derivada es 1 en todos los números reales.

13.57 **Observa la gráfica e indica si las siguientes derivadas en un punto son positivas, negativas o nulas.**




**a) $f'(-3)$** **c) $f'(4)$** **e) $f'(-2)$**

**b) $f'(-4)$** **d) $f'(2)$** **f) $f'(0)$**

Son positivas: $f'(4)$ y $f'(-2)$.

Es negativa: $f'(-4)$.

Son nulas: $f'(-3)$, $f'(0)$ y $f'(2)$.

13.58 **Teniendo en cuenta la derivada de la función exponencial $a^x$, ¿cómo se llega a la conclusión de que $(e^x)' = e^x$?**

$(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$.

13.59 **En un tramo de una prueba ciclista, la velocidad del ganador, en kilómetros por minuto, ha seguido la función $v(t) = 0{,}8t - 0{,}2t^2$, siendo $t$ el tiempo en minutos. La aceleración media es la tasa de variación media de la velocidad, y la aceleración instantánea, la derivada de la velocidad.**

**a) ¿Cuál ha sido la aceleración media en el período [1, 2], es decir, durante el segundo minuto? ¿Y durante el cuarto minuto?**

**b) ¿En cuál de ellos ha crecido o decrecido más rápidamente la velocidad?**

**c) Halla la aceleración en el instante $t = 0$, a los 2 y a los 4 minutos.**

a) $VM[1, 2] = \dfrac{v(2) - v(1)}{2 - 1} = \dfrac{0{,}8 - 0{,}6}{1} = 0{,}2$

$VM[3, 4] = \dfrac{v(4) - v(3)}{4 - 3} = \dfrac{0 - 0{,}6}{1} = -0{,}6$

b) $|0{,}2| < |-0{,}6|$. Ha decrecido más rápidamente en el segundo intervalo.

c) $a(t) = 0{,}8 - 0{,}4t$

$a(0) = 0{,}8 - 0{,}4 \cdot 0 = 0{,}8$ $\qquad a(2) = 0{,}8 - 0{,}4 \cdot 2 = 0$ $\qquad a(4) = 0{,}8 - 0{,}4 \cdot 4 = -0{,}8$

13.60 **El número de habitantes de una ciudad (en miles), en función del tiempo, $t$, en años es:**

$$N(t) = 10 + 6t - t^2$$

**a) Halla la tasa de variación media de la población en los intervalos [1, 2] y [4, 5].**

**b) ¿Cómo ha sido su crecimiento medio en los dos intervalos anteriores? ¿En cuál de los dos ha crecido o decrecido más rápidamente?**

**c) Calcula la tasa de variación instantánea de la población en $t = 3$ y $t = 6$.**

a) $TVM[1, 2] = \dfrac{N(2) - N(1)}{2 - 1} = \dfrac{18 - 15}{1} = 3$

$TVM[4, 5] = \dfrac{N(5) - N(4)}{5 - 4} = \dfrac{15 - 18}{1} = -3$

b) Entre los años 1 y 2 ha crecido, y entre los años 4 y 5 ha decrecido.

En los dos intervalos ha variado al mismo ritmo.

c) $TVI[3] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{N(3 + h) - N(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{10 + 6(3 + h) - (3 + h)^2 - 19}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2}{h} = 0$

$TVI[6] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{N(6 + h) - N(6)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{10 + 6(6 + h) - (6 + h)^2 - 10}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-6h - h^2}{h} = -6$

13.61 **Una de las curvas de un circuito de fórmula 1 tiene la forma de la gráfica de esta función.**

$$y = x^3 - 3x + 4, \text{ con } 0 \leqslant x \leqslant 2$$

**Al llegar al punto de la curva en el que la abscisa es $x = 0{,}5$, uno de los vehículos se ha salido del trazado y ha seguido la trayectoria de la tangente a la curva en ese punto.**

**Escribe la ecuación de dicha trayectoria.**

$y(0{,}5) = 2{,}625.$ $\qquad y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(0{,}5) = 3 \cdot 0{,}5^2 - 3 = -2{,}25.$

Trayectoria: $y - 2{,}625 = -2{,}25 \cdot (x - 0{,}5)$

13.62 **Una comunidad autónoma viene publicando un boletín sobre comercio justo. Su tirada ha variado según la fórmula $f(t) = 20t^2 + 8t + 5000$, donde $t$ se expresa en años.**

**a) Calcula el crecimiento medio de la tirada en el primer año y entre los años quinto y sexto. ¿En cuál de los dos períodos ha sido más rápido?**

**b) Halla el crecimiento del número de ejemplares distribuidos justo en el décimo año.**

a) $TVM[0, 1] = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{5028 - 5000}{1} = 28$ $\qquad TVM[5, 6] = \dfrac{f(6) - f(5)}{1 - 0} = \dfrac{5768 - 5540}{1} = 228$

El crecimiento ha sido más rápido entre el quinto y el sexto año.

b) $TVI[10] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(10 + h) - f(10)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{20 \cdot (10 + h)^2 + 8 \cdot (10 + h) + 5000 - 7080}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(408 + 20h)}{h} = 408$

**13.63 La contaminación lumínica dificulta algunas actividades como las observaciones astronómicas.**

**Para medir el brillo del cielo respecto al brillo natural en un determinado emplazamiento, *I*, se utiliza la fórmula $I = 1200 \cdot r^{-2,5}$, siendo *r* la distancia en kilómetros del lugar de observación al centro urbano más próximo.**

**Calcula la velocidad media de variación del brillo entre dos lugares situados a 90 y 95 kilómetros del centro urbano. ¿Crece o decrece el brillo?**

$$TVM[90,\ 95] = \frac{I(95) - I(90)}{95 - 90} = \frac{0{,}0136 - 0{,}0156}{5} = -0{,}0004.$$

Decrece.

**13.64 El índice de masa corporal (IMC) es una magnitud que ayuda a valorar si la alimentación y el desarrollo de una persona son adecuados. Se obtiene dividiendo el peso de una persona, en kilogramos, entre el cuadrado de su estatura, *h*, en metros.**

**Se está realizando un estudio nutricional de un grupo de adolescentes que pesan 50 kilogramos. En ellos, el IMC sigue la función $y\,(h) = \frac{50}{h^2}$.**

**a) Estudia si el índice de masa corporal es creciente o decreciente en el intervalo [1,50; 1,60].**

**b) Describe por escrito lo que significa el resultado anterior.**

**c) ¿Existe algún valor de la altura para el que la variación del índice de masa corporal sea nula?**

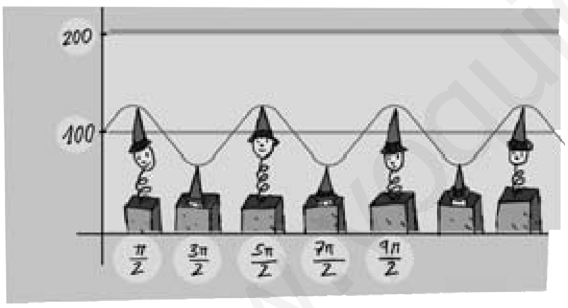
a) $TVM[1{,}50;\ 1{,}60] = \dfrac{\text{IMC}(1{,}60) - \text{IMC}(1{,}50)}{1{,}60 - 1{,}50} = \dfrac{19{,}53 - 22{,}22}{0{,}10} = -26{,}9.$

Decrece.

b) A medida que aumenta la altura de los adolescentes, el IMC disminuye.

c) No, la función no se anula nunca.

**13.65 El hermanito de Andrés tiene un muñeco que oscila arriba y abajo sujeto a un muelle. Su altura en centímetros se corresponde con la función $y(t) = 100 + 30 \text{ sen } t$, con *t* en segundos.**




**a) Halla la velocidad media del muñeco en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ segundos.**

**b) Estudia, en promedio, el crecimiento y decrecimiento de la altura en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.**

**c) Calcula la velocidad del muñeco en los instantes $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ y $t = \pi$ segundos.**

a) $TVM\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] = \dfrac{y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y(0)}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{130 - 100}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{60}{\pi}$

b) $TVM\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] = \dfrac{60}{\pi}$. Crece.

$TVM\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] = \dfrac{y(\pi) - y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi - \frac{\pi}{2}} = \dfrac{100 - 130}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{-60}{\pi}$. Decrece.

c) $y'(t) = 30 \cos t$

$y'(0) = 30 \cos 0 = 30$

$y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 30 \cos \dfrac{\pi}{4} = 15\sqrt{2}$

$y'(\pi) = 30 \cos \pi = -30.$

## Tasa de variación media. Tasa de variación instantánea

**13.66 Calcula la tasa de variación media de estas funciones en los intervalos que se indican.**

**a)** $f(x) = 2x + 4$, **en** $[-2, -1]$

**b)** $g(x) = 2x^4 - 6x^2$, **en** $[-1, 0]$

**c)** $h(x) = x^3 + 3x^2 - 8$, **en** $[1, 2]$

**d)** $m(x) = x + \dfrac{1}{x}$, **en** $[2, 3]$

a) $TVM[-2, -1] = \dfrac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \dfrac{2 - (-4)}{1} = 6$

b) $TVM[-1, 0] = \dfrac{g(0) - g(-1)}{0 + 1} = \dfrac{0 + 4}{1} = 4$

c) $TVM[1, 2] = \dfrac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = \dfrac{12 + 4}{1} = 16$

d) $TVM[2, 3] = \dfrac{m(3) - m(2)}{3 - 2} = \dfrac{3 + \dfrac{1}{3} - 2 - \dfrac{1}{2}}{1} = \dfrac{5}{6}$

**13.67 Estudia el crecimiento medio de las siguientes funciones en el intervalo [4, 5].**

**a)** $f(x) = 1 - 2x^3$

**b)** $g(x) = 3x^2 + x - 2$

a) $TVM[4, 5] = \dfrac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = \dfrac{-249 + 127}{1} = -122.$

Decrece.

b) $TVM[1, 2] = \dfrac{g(2) - g(1)}{2 - 1} - 1 = \dfrac{78 - 50}{1} = 28.$

Crece.

**13.68 Halla la tasa de variación instantánea de las funciones siguientes en** $x_0 = 3$.

**a)** $f(x) = 7x + 9$

**b)** $g(x) = -1$

**c)** $h(x) = 2x^2 - 5$

**d)** $i(x) = 4x + x^2$

a) $TVI[3] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{7(3 + h) + 9 - 30}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{7h}{h} = 7$

b) $TVI[3] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(3 + h) - g(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1 + 1}{h} = 0$

c) $TVI[3] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(3 + h) - h(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(3 + h)^2 - 5 - 13}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{12h + 2h^2}{h} = 12$

d) $TVI[3] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{i(3 + h) - i(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4(3 + h) + (3 + h)^2 - 21}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{10h + h^2}{h} = 10$

## Derivada en un punto. Recta tangente

**13.69 Utiliza la definición de derivada en un punto para calcular estas cantidades.**

**a)** $f'(2)$, **si** $f(x) = 6 - 4x$

**b)** $g'(0)$, **si** $g(x) = 3x + 2x^2$

**c)** $h'(-1)$, **si** $h(x) = x^3 - x$

**d)** $i'(1)$, **si** $i(x) = 5 - 2x$

a) $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{6 - 4(2 + h) + 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-4h}{h} = -4$

b) $g'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h + 2h^2 - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(3 + 2h)}{h} = 3$

c) $h'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(-1 + h) - h(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(-1 + h)^3 - (-1 + h) - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h - 3h^2 + h^3}{h} = 2$

d) $i'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{i(1 + h) - i(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5 - 2(1 + h) - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

**13.70 Comprueba que el valor de la derivada de la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 1$ es el mismo en $x_0 = 0$ y $x_0 = 2$.**

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^3 - 6h^2 + h - 1 + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2h^2 - 6h + 1)}{h} = 1$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(2+h)^3 - 6(2+h)^2 + 2 + h - 1 + 7}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h + 6h^2 + 2h^3}{h} = 1$$

**13.71 Halla la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x - 4x^2$ en estos puntos.**

**a) $x_0 = 4$**

**b) $x_0 = 0$**

**c) $x_0 = -3$**

a) $f(4) = -56$

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(4+h) - 4(4+h)^2 + 56}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-30h - 4h^2}{h} = -30$$

Recta tangente: $y + 56 = -30(x - 4)$

b) $f(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h - 4h^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2 - 4h)}{h} = 2$$

Recta tangente: $y = 2 \cdot x$

c) $f(-3) = -42$

$$f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(-3+h) - 4(-3+h)^2 + 42}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{26h - 4h^2}{h} = 26$$

Recta tangente: $y + 42 = 26(x + 3)$

## Derivada de funciones elementales y operaciones

**13.72 Obtén la recta tangente a las curvas siguientes en los puntos que se indican.**

**a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, en $x_0 = 2$**

**b) $g(x) = 3x^2 - 3$, en $x_0 = -1$**

**c) $h(x) = x^3 - x + 4$, en $x_0 = 0$**

a) $f(2) = 9$

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(2) = 6$

Recta tangente: $y - 9 = 6(x - 2)$

b) $g(-1) = 0$

$g'(x) = 6x$

$g'(-1) = -6$

Recta tangente: $y = -6(x + 1)$

c) $h(0) = 4$

$h'(x) = 3x^2 - 1$

$h'(0) = -1$

Recta tangente: $y - 4 = -x$

**13.73 Calcula la derivada de estas funciones.**

**a)** $y = 2x^3 - 6x^2 + x$

**b)** $y = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$

**c)** $y = x^{-1} + 2x^{-3}$

**d)** $y = \frac{3}{4}x^{-4} - \frac{5}{2}x^{-2} + \frac{7}{9}$

**e)** $y = \sqrt[8]{x} - 3\sqrt{x}$

**f)** $y = 9x + 6x^{-1} + 3$

**g)** $y = \frac{1}{4}\sqrt[3]{x}$

**h)** $y = 5x^{\frac{8}{3}} - x^{\frac{4}{7}}$

**i)** $y = 2x - 4 \ln x$

**j)** $y = 3 \cdot 7^x + 9^x$

**k)** $y = 5 \cos x + 2$

**l)** $y = 3x - 4 \text{ sen } x$

a) $y' = 6x^2 - 12x$

b) $y' = 2x^4 - x^2 + x$

c) $y' = -x^{-2} - 6x^{-4}$

d) $y' -3x^{-5} + 5x^{-3}$

e) $y' = \frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

f) $y' = 9 - 6x^{-2}$

g) $y' = \frac{1}{12}x^{-\frac{2}{3}}$

h) $y' = \frac{40}{4}x^{\frac{5}{3}} - \frac{4}{7}x^{-\frac{3}{7}}$

i) $y' = 2 - \frac{4}{x}$

j) $y' = 3 \cdot 7^x \cdot \ln 7 + 9^x \cdot \ln 9$

k) $y' = -5 \text{ sen } x$

l) $y' = 3 - 4 \cos x$

**13.74 Halla la derivada de los siguientes productos y cocientes de funciones.**

**a)** $y = x^2 \cdot \ln x$

**b)** $y = (4x - 1) \cdot \text{sen } x$

**c)** $y = \dfrac{6x}{1 - 2x}$

**d)** $y = (3x^2 - x) \cdot e^x$

**e)** $y = \dfrac{4x + 3}{x}$

**f)** $y = \dfrac{x^2}{3x + 2}$

a) $y' = 2x \cdot \ln x + x$

b) $y' = 4 \text{ sen } x + (4x - 1) \cdot \cos x$

c) $y' = \dfrac{6(1 - 2x) - 6x \cdot (-2)}{(1 - 2x)^2} = \dfrac{6}{(1 - 2x)^2}$

d) $y' = (6x - 1) \cdot e^x + (3x^2 - x) \cdot e^x = e^x \cdot (3x^2 + 5x - 1)$

e) $y' = \dfrac{4x - (4x + 3) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{-3}{x^2}$

f) $y' = \dfrac{2x\,(3x + 2) - x^2 \cdot 3}{(3x + 2)^2} = \dfrac{3x^2 + 4x}{(3x + 2)^2}$

## AMPLIACIÓN

**13.75 Si la derivada de una función $f(x)$ es una constante, esto es, $f'(x) = k$, ¿cómo es la función?**

$f(x) = kx + b$. Es una función lineal.

**13.76 Comprueba que la tasa de variación instantánea de la función $f(x) = x^5$ es la misma en los valores de $x$ opuestos entre sí.**

$$TVI[x] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^5 - x^5}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5 - x^5}{h} = 5x^4$$

$$TVI[-x] = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x + h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-x + h)^5 + x^5}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-x^5 + 5x^4h - 10x^3h^2 + 10x^2h^3 - 5xh^4 + h^5 + x^5}{h} = 5x^4$$

13.77 **Utilizando la definición, calcula la derivada de estas funciones.**

**a)** $f(x) = \sqrt{x}$

**b)** $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 2}}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{(x+h)^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 2}\right)\left(\sqrt{(x+h)^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 2}\right)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 2}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 2 - (x^2 + 2)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 2}\right)} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2 - x^2 - 2}{h\left(\sqrt{x^2 + 2xh + h^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 2}\right)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

13.78 **¿En qué puntos de la curva $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ la recta tangente tiene pendiente $-2$?**

$y' = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} = -2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = -2(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

13.79 **Halla los puntos de la curva $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 2}$ en los que las rectas tangentes a la misma forman un ángulo de 45° con el eje de abscisas.**

$f'(x) = m = \text{tg } \alpha = 1$

$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} = 1 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 3 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$

$f\left(-2 + \sqrt{3}\right) = \frac{2\left(-2 + \sqrt{3}\right) + 1}{-2 + \sqrt{3} + 2} = \frac{-4 + 2\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

$f\left(-2 - \sqrt{3}\right) = \frac{2\left(-2 - \sqrt{3}\right) + 1}{-2 - \sqrt{3} + 2} = \frac{-4 - 2\sqrt{3} + 1}{-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

Los puntos buscados son $\left(-2 + \sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3}\right)$ y $\left(-2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}\right)$.

13.80 **Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - x^2 - x - 4$ en el punto de ordenada $-2$.**

$y = -2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x - 4 = -2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$y' = 3x^2 - 2x - 1$

$y'(2) = 7$

Recta tangente: $y + 2 = 7(x - 2)$

**13.81 Calcula la derivada de estas funciones.**

**a)** $y = (\ln 3)x + 3 \ln x$

**b)** $y = ex^2 + 4^x \cdot e^x$

**c)** $y = \dfrac{x \cdot e^x}{x^2 - 1}$

**d)** $y = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{3x^3 + 2}$

**e)** $y = \dfrac{1}{6}\sqrt[6]{x} - \dfrac{3}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

**f)** $y = x \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$

**g)** $y = \dfrac{(x^3 - 2x) \cdot \ln x}{e^x + 2}$

**h)** $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

a) $y' = \ln 3 + \dfrac{3}{x}$

b) $y' = 2ex + 4^x \cdot \ln 4 \cdot e^x + 4^x \cdot e^x$

c) $y' = \dfrac{(e^x + x \cdot e^x)(x^2 - 1) - x \cdot e^x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2}$

d) $y' = \dfrac{(4x^3 - 4x)(3x^3 + 2) - (x^4 - 2x^2 + 1) \cdot 9x^2}{(3x^3 + 2)^2}$

e) $y' = \dfrac{1}{36}x^{-\frac{5}{6}} + \dfrac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{36\sqrt[6]{x^5}} + \dfrac{3}{4\sqrt{x^3}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

f) $y' = \text{sen } x \cdot \cos x + x \cos^2 x - x \text{ sen}^2 x$

g) $y' = \dfrac{[(3x^2 - 2)\ln x + (x^2 - 2)]\,(e^x + 2) - (x^3 - 2x)\ln x \cdot e^x}{(e^x + 2)^2}$

h) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}$

**13.82 Encuentra el valor de los términos desconocidos en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ si se cumplen estas tres condiciones.**

**$f(0) = 5$ $\quad$ $f'(0) = 0$ $\quad$ $f''(0) = 3$**

**(La derivada segunda, $f''$, es la función que se obtiene al calcular la derivada de la derivada de $f$.)**

$f'(x) = 2ax + b$

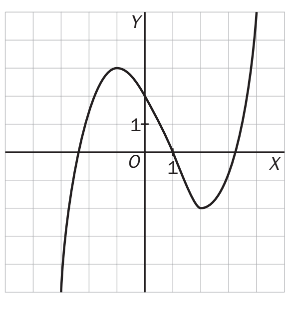
$f''(x) = 2a$

$f(0) = 5 \Rightarrow c = 5$

$f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$f''(0) = 3 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2}$

**13.83 Dibuja una función con derivada nula en $x = -1$ y $x = 2$, derivada positiva en los puntos de los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$, y derivada negativa en el intervalo $(-1, 2)$.**



**13.84 El cultivo de bacterias**

**En el laboratorio de un hospital han analizado la evolución de un cultivo de bacterias al aplicarle un antibiótico, obteniendo estos datos.**

- **El número inicial de bacterias fue de 600.**
- **Al sexto día no quedaba ninguna.**
- **El número máximo de patógenos se alcanzó a las 60 horas.**

**a) Halla los valores de $a$, $b$ y $c$ que permiten ajustar los datos anteriores a este tipo de función.**

$$N(t) = at^2 + bt + c$$

**Donde $N(t)$ es el número de bacterias cuando han transcurrido $t$ días.**

**b) Calcula el número máximo de bacterias.**

**c) Estudia si el número de patógenos estaba creciendo más deprisa cuando había pasado un día o cuando habían transcurrido dos.**

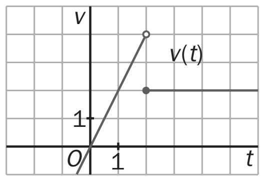
a) $$\left.\begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow N(t) = 600 \Rightarrow c = 600 \\ t = 6 \Rightarrow N(t) = 0 \Rightarrow 36a + 6b + 600 = 0 \\ t = \dfrac{60}{24} = 2{,}5 \Rightarrow N'(t) = 2at + b = 0 \Rightarrow 5a + b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -100 \\ b = 500 \\ c = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow N(t) = -100t^2 + 500t + 600$$

b) $N(t) = -100 \cdot 2{,}5^2 + 500 \cdot 2{,}5 + 600 = 1225$

c) $N'(t) = -200t + 500 \Rightarrow \begin{cases} N'(1) = 300 \\ N'(2) = 100 \end{cases}$

El número de bacterias crecía más deprisa cuando había pasado un día.

**13.85 Gráfica de la velocidad**




**La gráfica de la derecha representa la velocidad de un vehículo, $v$, en función del tiempo, $t$, para $t \geqslant 0$.**

**La función velocidad es la derivada de la función $e(t)$ que nos da el espacio recorrido por el vehículo.**

**a) ¿Cuál de las siguientes expresiones es la ecuación de $v(t)$?**

**A)** $v(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t < 2 \\ 2 & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$

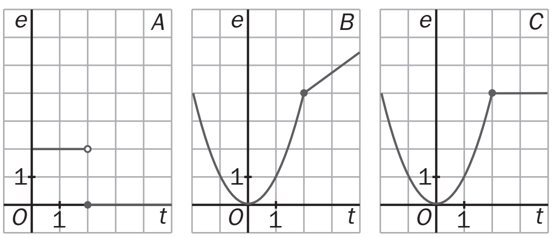
**B)** $v(t) = \begin{cases} -2t & \text{si } t < 2 \\ 2 & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$

**b) ¿Cuál de las siguientes es la ecuación de $e(t)$?**

**A)** $e(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t < 2 \\ t & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$

**B)** $e(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } t < 2 \\ 2t & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$

**c) ¿Cuál de estas gráficas representa a $e(t)$?**




a) La $A$  b) La $B$  c) La $B$

**13.A1 Halla la tasa de variación media de estas funciones en los intervalos que se indican.**

**a) $f(x) = 8 - 3x$, en $[-2, -1]$**

**b) $g(x) = 2x^2 + x$, en $[3, 4]$**

**c) $h(x) = x^2 + 5x - 1$, en $[-1, 0]$**

a) $TVM[-2, -1] = \dfrac{f(-1) - f(-2)}{-1 + 2} = \dfrac{11 - 14}{1} = -3$

b) $TVM[3, 4] = \dfrac{g(4) - g(3)}{4 - 3} = \dfrac{36 - 21}{1} = 15$

c) $TVM[-1, 0] = \dfrac{h(0) - h(-1)}{0 + 1} = \dfrac{-1 + 5}{1} = 4$

**13.A2 Calcula la tasa de variación instantánea de estas funciones en los puntos señalados.**

**a) $f(x) = x^3 + 6x$, en $x_0 = 2$**

**b) $g(x) = 2x + 5x^2$, en $x_0 = -1$**

**c) $h(x) = 4x^2 - 2x^3$, en $x_0 = -3$**

a) $TVI[2] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 + 6(2 + h) - 20}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 + 12 + 6h - 20}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(18 + 6h + h^2)}{h} = 18$

b) $TVI[-1] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(-1 + h) - g(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(-1 + h) + 5(-1 + h)^2 - 3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2 + 2h + 5 - 10h + 5h^2 - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(-8 + 5h)}{h} = -8$

c) $TVI[-3] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(-3 + h) - h(-3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4(-3 + h)^2 - 2(-3 + h)^3 - 90}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{36 - 24h + 4h^2 + 54 - 54h + 18h^2 - 2h^3 - 90}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(-78 + 22h - 2h^2)}{h} = -78$

**13.A3 Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, halla $y'(4)$ para las siguientes funciones.**

**a) $y(x) = 6 - 8x$**

**b) $y(x) = \dfrac{2}{3x + 6}$**

**c) $y(x) = 3x^2 + 2x - 7$**

**d) $y(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2}$**

a) $y'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{y(4 + h) - y(4)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{6 - 8(4 + h) + 26}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-8h}{h} = -8$

b) $y'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{y(4 + h) - y(4)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2}{3(4 + h) + 6} - \dfrac{1}{9}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2}{3(h + 6)} - \dfrac{1}{9}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{6 - h - 6}{9(h + 6)}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{9h(h + 6)} = \dfrac{-1}{54}$

c) $y'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{y(4 + h) - y(4)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(4 + h)^2 + 2(4 + h) - 7 - 49}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{48 + 24h + 3h^2 + 8 + 2h - 56}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(3h + 26)}{h} = 26$

d) $y'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{y(4 + h) - y(4)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{4 + h}{3} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{6}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{8 + 2h - 3 - 5}{6}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{3h} = \dfrac{1}{3}$

**13.A4 Halla la derivada de las siguientes funciones.**

**a)** $y = 3x^6 + 8x^5 - 4x^4 - 6x$

**b)** $y = 2x^{-1} + 5x^{-3} - 3$

**c)** $y = \dfrac{3\sqrt[4]{x}}{4} - 6\sqrt[5]{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

a) $y' = 18x^5 + 40x^4 - 16x^3 - 6$

b) $y' = -2x^{-2} - 15x^{-4} = \dfrac{-2}{x^2} - \dfrac{15}{x^4}$

c) $y' = \dfrac{3x^{-\frac{3}{4}}}{16} - \dfrac{6x^{-\frac{4}{5}}}{5} + \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{4} = \dfrac{3}{16\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{6}{5\sqrt[5]{x^4}} + \dfrac{1}{4\sqrt{x}}$

**13.A5 Calcula la ecuación de la recta tangente a las gráficas de estas funciones en los puntos citados.**

**a)** $f(x) = 9x^2 - 6x + 3$, **en** $x_0 = 0$

**b)** $g(x) = 8x - 7$, **en** $x_0 = -5$

**c)** $h(x) = 2x^4 + 4x^2 + 1$, **en** $x_0 = 2$

**d)** $m(x) = \dfrac{1}{2 - x}$, **en** $x_0 = 1$

a) $f(0) = 3$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{9h^2 - 6h + 3 - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(9h - 6)}{h} = -6$$

Recta tangente: $y - 3 = -6x$

b) $g(-5) = -47$

$$g'(-5) = \lim_{h\to 0} \frac{g(-5 + h) - g(-5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8(-5 + h) - 7 + 47}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8h}{h} = 8$$

Recta tangente: $y + 47 = 8 \cdot (x + 5)$

c) $h(2) = 49$

$$h'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{h(2 + h) - h(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(2 + h)^4 + 4(2 + h)^2 + 1 - 49}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(80 + 52h + 16h^2 + 8h^3)}{h} = 80$$

Recta tangente: $y - 49 = 80 \cdot (x - 2)$

d) $m(1) = 1$

$$m'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{m(1 + h) - m(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{2 - (1 + h)} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1 - 1 + h}{1 - h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(1 - h)} = 1$$

Recta tangente: $y - 1 = 1 \cdot (x - 1)$

**13.A6 Halla la derivada de las siguientes funciones y después particulariza su valor en los puntos indicados.**

**a)** $f(x) = 9x^3 + 3x^2 - 6x - 2$, **en** $x_0 = 3$

**b)** $g(x) = 5 - 2x + x^3 + 4x^4$, **en** $x_0 = 1$

**c)** $h(x) = 4^x \cdot (x^2 + 2)$, **en** $x_0 = 0$

**d)** $m(x) = \dfrac{3 - 2x^2}{5x + 4}$, **en** $x_0 = -2$

a) $f'(x) = 27x^2 + 6x - 6 \Rightarrow f'(3) = 255$

b) $g'(x) = -2 + 3x^2 + 16x^3 \Rightarrow g'(1) = 17$

c) $h'(x) = 4^x \cdot \ln 4(x^2 + 2) + 2x \cdot 4^x \Rightarrow h'(0) = 2 \cdot \ln 4$

d) $m'(x) = \dfrac{-4x(5x + 4) - (3 - 2x^2) \cdot 5}{(5x + 4)^2} = \dfrac{-10x^2 - 16x - 15}{(5x + 4)^2} \Rightarrow m'(-2) = \dfrac{-40 + 32 - 15}{(-6)^2} = -\dfrac{33}{36}$

**13.A7 Calcula la derivada de estas funciones.**

**a)** $y = 7x \cdot e^x$

**b)** $y = (x - 2) \cdot \ln x$

**c)** $y = \dfrac{2x + 4}{x^2 - 1}$

**d)** $y = \dfrac{3 - x^2}{1 + 4x}$

**e)** $y = (9x^2 - x) \cdot \cos x$

**f)** $y = \dfrac{6x + 2}{x}$

a) $y' = 7e^x \cdot (1 + x)$

b) $y' = \ln x + \dfrac{x - 2}{x}$

c) $y' = \dfrac{2(x^2 - 1) - (2x + 4) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-2x^2 - 8x - 2}{(x^2 - 1)^2}$

d) $y' = \dfrac{-2x(1 + 4x) - (3 - x^2) \cdot 4}{(1 + 4x)^2} = \dfrac{-4x^2 - 2x - 12}{(1 + 4x)^2}$

e) $y' = (18x - 1) \cdot \cos x - (9x^2 - x) \cdot \operatorname{sen} x$

f) $y' = \dfrac{6x - (6x + 2)}{x^2} = -\dfrac{2}{x^2}$

## MURAL DE MATEMÁTICAS

### MATETIEMPOS

### La escalada

**Sabes que la derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. Si una función describe la trayectoria que sigues cuando caminas o te mueves, cómo sería la derivada si:**

**– Subes una montaña.**

**– Caminas por la playa.**

**– Bajas la ladera de un monte.**

**– Escalas la pared de un edificio.**

**– Escalas por el techo de una enorme piedra.**

a) Si subes a una montaña, la derivada será positiva por ser la pendiente positiva.

b) Al caminar en la playa no se tiene pendiente, luego la derivada es cero.

c) Si bajas una ladera, la pendiente será negativa, por lo que la derivada será negativa.

d) Si escalas la pared de un edificio, no existe tangente, por ser la escalada paralela al eje $y$, luego la derivada tenderá a infinito ($\infty$).

e) Si escalas por el techo de una piedra, la pendiente será nula.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

14.1 **Clasifica los siguientes caracteres estadísticos.**

**a) Número de canastas encestadas en un partido de baloncesto.**

**b) Canal de televisión preferido por los vecinos de una casa.**

**c) Medida, en metros, del salto de longitud en unos juegos olímpicos.**

a) Cuantitativo discreto

b) Cualitativo

c) Cuantitativo continuo

14.2 **En una ciudad hay tres millones de personas con derecho a voto, de las que el 53 % son mujeres. Se quiere elegir una muestra constituida por 3000 personas.**

**¿Cuántos hombres y mujeres deberán formar parte de la muestra para que sea representativa de la población?**

Para que la muestra guarde la misma proporción de hombres y mujeres que en la población, se deberá elegir:

$\frac{53 \cdot 3000}{100} = 1590$ mujeres $\qquad \frac{47 \cdot 3000}{100} = 1410$ hombres

14.3 **La tabla adjunta muestra el número de faltas de asistencia en una clase a lo largo de un mes.**

| N.º de faltas | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N.º de alumnos | 10 | 7 | 6 | 2 | 1 | 4 |

**Calcula la media aritmética y la moda.**

Media aritmética: $\bar{x} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 4}{10 + 7 + 6 + 2 + 1 + 4} = \frac{49}{30} = 1{,}6$ faltas

Moda $= M_o = 0$ faltas

14.4 **La siguiente tabla muestra los resultados de unos alumnos en la prueba de salto de longitud.**

| Salto (m) | [2; 2,5) | [2,5; 3) | [3; 3,5) | [3,5; 4) |
|---|---|---|---|---|
| N.º de alumnos | 6 | 12 | 15 | 4 |

**Halla la media aritmética y la moda.**

Media aritmética: $\bar{x} = \frac{2{,}25 \cdot 6 + 2{,}75 \cdot 12 + 3{,}25 \cdot 15 + 3{,}75 \cdot 4}{6 + 12 + 15 + 4} = \frac{110{,}25}{37} = 2{,}98$ m

Moda: La clase modal es [3; 3,5), y tomaremos como valor aproximado de la moda la marca de la clase modal.

Así, $M_o = 3{,}25$ m.

14.5 **Calcula la mediana y los cuartiles de la distribución estadística dada por esta tabla.**

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 11 | 17 | 23 | 24 | 15 |

**Primer cuartil.** El número de datos es 90. La cuarta parte es 22,5. El primer cuartil es 3, ya que es el valor de la variable cuya frecuencia absoluta acumulada excede por primera vez la cuarta parte del número de datos. Por tanto, $Q_1 = 3$.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|
| 2 | 11 | $11 < 22{,}5$ |
| 3 | 17 | $28 > 22{,}5$ |
| 4 | 23 | 51 |
| 5 | 24 | 75 |
| 6 | 15 | 90 |

**Mediana.** El número de datos es 90. La mitad es 45. La mediana es 4, ya que es el valor de la variable cuya frecuencia absoluta acumulada excede por primera vez la mitad del número de datos. Por tanto, $M = 4$.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|
| 2 | 11 | 11 |
| 3 | 17 | $28 < 45$ |
| 4 | 23 | $51 > 45$ |
| 5 | 24 | 75 |
| 6 | 15 | 90 |

**Tercer cuartil.** Las tres cuartas partes del número de datos son 67,5. El tercer cuartil es 5, ya que es el valor de la variable cuya frecuencia absoluta acumulada excede por primera vez las tres cuartas partes del número de datos. Por tanto, $Q_3 = 5$.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|
| 2 | 11 | 11 |
| 3 | 17 | 28 |
| 4 | 23 | $51 < 67{,}5$ |
| 5 | 24 | $75 > 67{,}5$ |
| 6 | 15 | 90 |

14.6 **Calcula la mediana, $Q_1$ y $Q_3$ de la siguiente distribución.**

| $x_i$ | [0, 10) | [10, 20) | [20, 30) | [30, 40) |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 12 | 16 | 17 | 11 |

**Primer cuartil.** El número de datos es 56. La cuarta parte del número de datos es 14. La clase que contiene al primer cuartil es [0, 10), ya que su frecuencia absoluta acumulada excede por primera vez la cuarta parte del número de datos. Tomaremos como aproximación al primer cuartil la marca de la clase [0, 10). Por tanto, $Q_1 = 5$.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|
| [0, 10) | 12 | $12 < 14$ |
| [10, 20) | 16 | $28 > 14$ |
| [20, 30) | 17 | 45 |
| [30, 40) | 11 | 56 |

**Mediana.** El número de datos es 56. La mitad del número de datos es 28. En este caso, la mediana será la media entre las marcas de la clase [10, 20) y [20, 30). Por tanto, $M = 20$.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|
| [0, 10) | 12 | 12 |
| [10, 20) | 16 | 28 |
| [20, 30) | 17 | 45 |
| [30, 40) | 11 | 56 |

**Tercer cuartil.** Las tres cuartas partes del número de datos son 42. La clase que contiene al tercer cuartil es [20, 30), ya que su frecuencia absoluta acumulada excede por primera vez las tres cuartas partes del número de datos. Tomaremos como aproximación al tercer cuartil la marca de la clase [20, 30). Por tanto, $Q_3 = 25$.

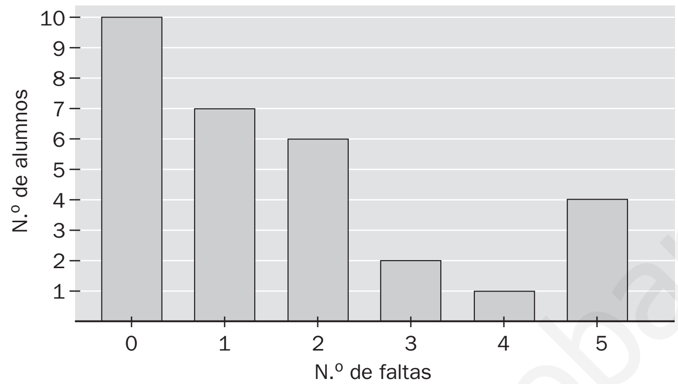
| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|
| [0, 10) | 12 | 12 |
| [10, 20) | 16 | $28 < 42$ |
| [20, 30) | 17 | $45 > 42$ |
| [30, 40) | 11 | 56 |

**14.7 La tabla adjunta muestra el número de faltas en una clase a lo largo de un mes.**

| N.º de faltas | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N.º de alumnos | 10 | 7 | 6 | 2 | 1 | 4 |

**Representa los datos gráficamente.**

Representamos los datos mediante el siguiente diagrama de barras.




**14.8 La siguiente tabla muestra los resultados de unos alumnos en la prueba de salto de longitud.**

| Salto (m) | [2; 2,5) | [2,5; 3) | [3; 3,5) | [3,5; 4) |
|---|---|---|---|---|
| N.º de alumnos | 10 | 9 | 11 | 7 |

**Dibuja el diagrama de cajas y bigotes.**

$L_i$: 2,25

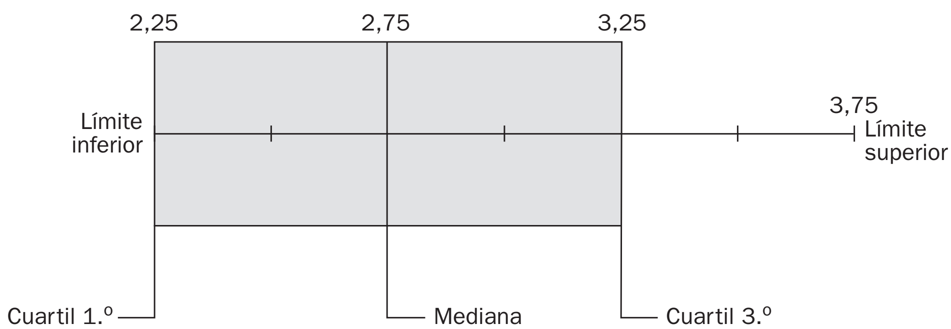
$Q_1$: La clase que contiene el primer cuartil es [2; 2,5), ya que su frecuencia absoluta acumulada excede por primera vez la cuarta parte de los datos, $\frac{37}{4} = 9{,}25$. El primer cuartil será la marca de clase, es decir, $Q_1 = 2{,}25$.

$M$: La clase que contiene la mediana es [2,5; 3), ya que su frecuencia absoluta acumulada excede por primera vez la mitad de los datos, $\frac{37}{2} = 18{,}5$. La mediana será la marca de clase, es decir, $M = 2{,}75$.

$Q_3$: La clase que contiene el tercer cuartil es [3; 3,5), ya que su frecuencia absoluta acumulada excede por primera vez las tres cuartas partes de los datos, $\frac{111}{4} = 27{,}75$. El tercer cuartil será la marca de clase, es decir, $Q_3 = 3{,}25$.

$L_s$: 3,75

Con estos datos, el diagrama de cajas y bigotes es el siguiente:



**14.9 La siguiente tabla muestra el número de faltas en una clase a lo largo de un mes.**

| **N.º de faltas** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **N.º de alumnos** | **10** | **7** | **6** | **2** | **1** | **4** |

**a) Calcula el rango.**

**b) Halla la varianza y la desviación típica.**

Formamos la siguiente tabla.

| $x_i$ | $f_i$ | $x_i^2$ | $f_i x_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 0 | 0 |
| 1 | 7 | 1 | 7 |
| 2 | 6 | 4 | 24 |
| 3 | 2 | 9 | 18 |
| 4 | 1 | 16 | 16 |
| 5 | 4 | 25 | 100 |
| | 30 | | 165 |

a) Rango $= 5 - 0 = 5$

b) Varianza: $s^2 = \dfrac{165}{30} - \left(\dfrac{49}{39}\right)^2 = 2{,}83$ faltas$^2$

Desviación típica: $s = \sqrt{2{,}83} = 1{,}68$ faltas

**14.10 La tabla adjunta representa los resultados de unos alumnos en la prueba de salto de longitud.**

| **Salto (m)** | **[2; 2,5)** | **[2,5; 3)** | **[3; 3,5)** | **[3,5; 4)** |
|---|---|---|---|---|
| **N.º de alumnos** | **6** | **12** | **15** | **4** |

**a) Halla el rango.**

**b) Calcula la varianza y la desviación típica.**

Formamos la siguiente tabla.

| $x_i$ | $f_i$ | $x_i^2$ | $f_i x_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 2,25 | 6 | 5,0625 | 30,375 |
| 2,75 | 12 | 7,5625 | 90,75 |
| 3,25 | 15 | 10,5625 | 158,4375 |
| 3,75 | 4 | 14,0625 | 56,25 |
| | | | 335,8125 |

a) Rango $= 3{,}75 - 2{,}25 = 1{,}5$

b) Varianza: $s^2 = \dfrac{335{,}8125}{37} - 2{,}9797^2 = 0{,}197$ m$^2$

Desviación típica: $s = \sqrt{0{,}197} = 0{,}444$ m

**14.11** **Una distribución viene dada por la siguiente tabla.**

| $x_i$ | [10, 20) | [20, 30) | [30, 40) | [40, 50) | [50, 60) |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 5 | 12 | 20 | 11 | 6 |

**Halla el porcentaje de datos incluidos en los intervalos ($\bar{x} - s, \bar{x} + s$), ($\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s$) y ($\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s$).**

$\bar{x} = \dfrac{1900}{54} = 35{,}185$ $\qquad$ $s = \sqrt{\dfrac{73550}{54} - 35{,}185^2} = 11{,}137$

$(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (24{,}048; 46{,}322)$.

Si suponemos que los datos se distribuyen de forma uniforme, tenemos, por una simple proporcionalidad, que si de 20 a 30 se distribuyen 12 datos, de 24 a 30 se distribuirán: $\dfrac{6 \cdot 12}{10} \approx 7$ datos.

Del mismo modo, si de 40 a 50 se distribuyen 11 datos, de 40 a 46 se distribuirán: $\dfrac{6 \cdot 11}{10} \approx 7$ datos.

Luego en el intervalo $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ se distribuyen: $7 + 20 + 7 = 34$ datos. 34 de 54 datos totales representan el 63 %.

Razonando de forma análoga se tiene $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (12{,}911; 57{,}459)$.

En este intervalo se distribuyen $4 + 12 + 20 + 11 + 4 = 51$ datos. 51 de 54 datos totales representan el 94,4 %.

$(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s) = (1{,}774; 68{,}596)$

En este intervalo se distribuye el 100 %.

**14.12** **Los porcentajes de uso del cinturón de seguridad en dos ciudades durante 4 días son:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 87 | 78 | 67 | 82 |
| **B** | 60 | 95 | 92 | 47 |

**Calcula el coeficiente de variación en cada ciudad e interpreta el resultado.**

Ciudad $A$: $\bar{x} = \dfrac{87 + 78 + 67 + 82}{4} = 78{,}5$

$s = \sqrt{\dfrac{24\,866}{4} - (78{,}5)^2} = 7{,}36$

Luego $CV_A = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{7{,}36}{78{,}5} = 0{,}094$

Ciudad $B$: $\bar{x} = \dfrac{60 + 95 + 92 + 47}{4} = 73{,}5$

$s = \sqrt{\dfrac{23\,298}{4} - (73{,}5)^2} = 20{,}55$

Luego $CV_B = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{20{,}55}{73{,}5} = 0{,}28$

Como se observa, el coeficiente de variación de la ciudad $A$ es menor que el de la ciudad $B$. Esto quiere decir que el comportamiento de los ciudadanos de $A$ con respecto al uso del cinturón de seguridad es más homogéneo que el de los ciudadanos de $B$.

**14.13 La media y la mediana de un conjunto de cinco números naturales distintos es 7, y el rango es 6. Halla dichos números.**

Sean $a$, $b$, $c$, $d$ y $e$, ordenados de menor a mayor, los cinco números naturales distintos:

Como la media es 7 $\Rightarrow a + b + c + d + e = 35$.

Como la mediana es 7 $\Rightarrow c = 7$.

Como el rango es 6 $\Rightarrow e - a = 6$.

Mediante la estrategia de ensayo − error se tiene que las posibles soluciones son:

Solución 1: 4, 5, 7, 9 y 10

Solución 2: 4, 6, 7, 8 y 10

**14.14 Siete números naturales, no necesariamente distintos, tienen de media 8 y de mediana 11. ¿Cuál puede ser el mayor valor del rango? ¿Y el menor?**

Sean los números $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5 \leq n_6 \leq n_7$.

Como la mediana es 11, se deduce que $n_4 = 11$.

Como la media es 8, la suma de los 7 números es $8 \cdot 7 = 56$.

Para corregir el mayor rango hacemos:

$n_1 = n_2 = n_3 = 1$ y $n_5 = n_6 = 11$; entonces, $n_7 = 56 - 3 - 33 = 20$. En este caso, el rango es $20 - 1 = 19$.

Para corregir el menor rango hacemos:

$n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = 11$; entonces, $n_1 + n_2 + n_3 = 56 - 4 \cdot 11 = 12$, y como queremos el rango menor, $n_1 = n_2 = n_3 = 4$. En este caso, el rango es $11 - 4 = 7$.

# ACTIVIDADES

## EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

### Caracteres y parámetros estadísticos. Gráficos

**14.15 Indica si los siguientes caracteres son cualitativos o cuantitativos, y, en su caso, expresa si la variable estadística es discreta o continua.**

**a) Número de faltas de asistencia de los alumnos de una clase de 4.º de ESO en un mes.**

**b) Número de horas de productividad entre los trabajadores de una oficina.**

**c) Número de móviles que poseen los miembros de las familias de un edificio.**

a) Cuantitativa; variable discreta

b) Cuantitativa; variable continua

c) Cuantitativa; variable discreta

**14.16 Completa los valores de la tabla.**

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $x_if_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | | |
| 3 | | | 21 |
| 4 | | 14 | |
| | 8 | | 56 |
| 8 | | 23 | |
| | 4 | | |
| 11 | | | 33 |
| Total | | | 171 |

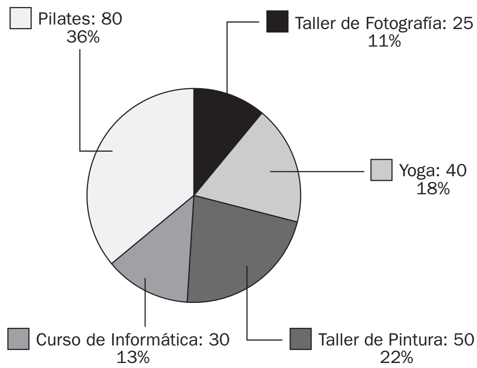
$\Rightarrow$

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $x_if_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | **5** | **5** |
| 3 | **7** | **12** | 21 |
| 4 | **2** | 14 | **8** |
| **7** | 8 | **22** | 56 |
| 8 | **1** | 23 | **8** |
| **10** | 4 | **27** | **40** |
| 11 | **3** | **30** | 33 |
| Total | **33** | | 171 |

**14.17 La siguiente tabla muestra las actividades ofertadas por un centro centro cultural y el número de vecinos del barrio que cursan dichas actividades.**

| Actividades | Número de vecinos |
|---|---|
| **Yoga** | **40** |
| **Taller de pintura** | **50** |
| **Curso de informática** | **30** |
| **Pilates** | **80** |
| **Taller de fotografía** | **25** |

**Representa el diagrama de sectores asociado a la tabla anterior.**




**14.18 Se realiza una encuesta a un grupo de 20 personas acerca del número de veces que acuden al cine a lo largo de un año, obteniéndose los siguientes resultados.**

**4, 2, 6, 8, 3, 4, 3, 5, 7, 1, 3, 4, 5, 7, 2, 2, 1, 3, 4, 5**

**a) Agrupa los datos en una tabla.**

**b) Halla la media, la moda, la mediana y el primer cuartil.**

**c) Calcula el rango, la varianza y la desviación típica.**

**d) Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias de los datos.**

a)

| N.º películas $x_i$ | N.º personas $f_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2 \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 6 | 12 |
| 3 | 4 | 12 | 36 |
| 4 | 4 | 16 | 64 |
| 5 | 3 | 15 | 75 |
| 6 | 1 | 6 | 36 |
| 7 | 2 | 14 | 98 |
| 8 | 1 | 8 | 64 |
| | 20 | 79 | 387 |

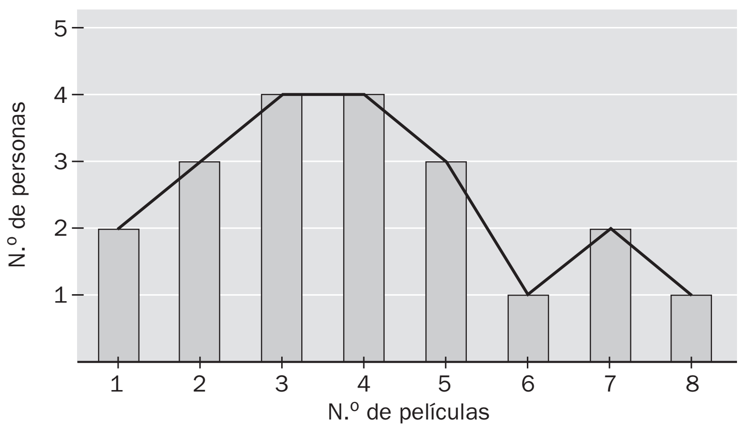
b) $\bar{x} = \dfrac{79}{20} = 3{,}95$

Es una distribución bimodal: $M_o = 3$; $M_o = 4$

$M = 4$ y $Q_1 = 3$

c) Rango $= 8 - 1 = 7$; $s^2 = \dfrac{387}{20} - 3{,}95^2 = 3{,}7475$; $s = \sqrt{3{,}7475} \approx 1{,}93$

d)



**14.19 La siguiente tabla presenta el número de horas semanales que dedican al estudio los 30 alumnos de una clase de 4.º de ESO.**

| N.º de horas | N.º de alumnos |
|---|---|
| [0, 4) | 8 |
| [4, 8) | 10 |
| [8, 12) | 8 |
| [12, 16) | 4 |

**a) Halla la media, la moda, la mediana y los otros dos cuartiles.**

**b) Calcula el rango, la varianza y la desviación típica.**

**c) Representa el histograma y el polígono de frecuencias.**

**d) Dibuja el diagrama de cajas y bigotes.**

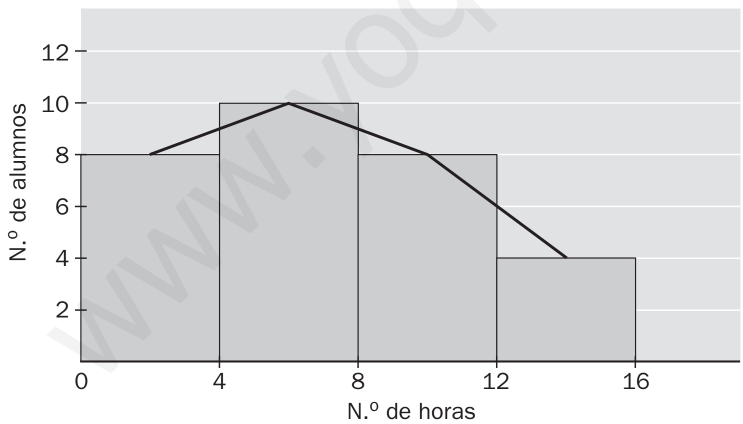
a)

| Marcas ($x_i$) | $f_i$ | $F_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2 \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 8 | 16 | 32 |
| 6 | 10 | 18 | 60 | 360 |
| 10 | 8 | 26 | 80 | 800 |
| 14 | 4 | 30 | 56 | 784 |
| | 30 | | 212 | 1976 |

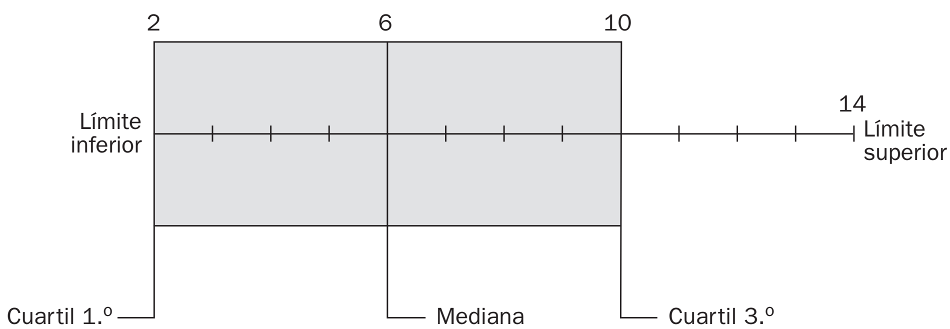
$\bar{x} = \frac{212}{30} = 7{,}07$; $M_o = 6$; $M = 6$ ; $Q_1 = 2$; $Q_3 = 10$

b) Rango $= 14 - 2 = 12$; $s^2 = \frac{1976}{30} - 7{,}07^2 \approx 15{,}88$; $s = \sqrt{15{,}88} \approx 3{,}98$

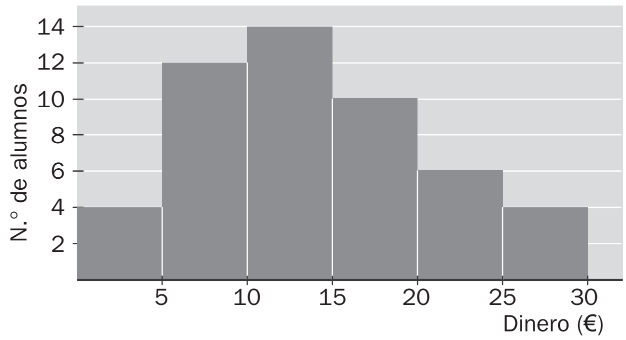
c)




d)



**14.20** **El siguiente histograma representa el dinero gastado en telefonía móvil en un mes por un grupo de 50 estudiantes de Bachillerato.**




**Calcula el gasto medio en móvil del grupo de estudiantes y la desviación típica.**

La tabla asociada al histograma es la siguiente.

| **Dinero (€)** | **N.° alumnos** $f_i$ | **Marcas** $x_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2 \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| [0, 5) | 4 | 2,5 | 10 | 25 |
| [5, 10) | 12 | 7,5 | 90 | 675 |
| [10, 15) | 14 | 12,5 | 175 | 2187,5 |
| [15, 20) | 10 | 17,5 | 175 | 3062,5 |
| [20, 25) | 6 | 22,5 | 135 | 3037,5 |
| [25, 30) | 4 | 27,5 | 110 | 3025 |
| | 50 | | 695 | 12 012,5 |

El gasto medio es: $\bar{x} = \dfrac{695}{50} = 13{,}9$ €

Desviación típica: $s = \sqrt{\dfrac{12\,012{,}5}{50} - 13{,}9^2} \approx 6{,}86$

**14.21** **De una distribución estadística compuesta por cinco datos, se sabe que su moda es 4, su media es 6 y su mediana es 5. Halla una distribución de cinco elementos con estas características.**

Una distribución con esas características es: 4, 4, 5, 8, 9.

## Utilización conjunta de $\bar{x}$ y $s$

**14.22 Se ha realizado un estudio con el fin de averiguar la cantidad de papel reciclado en toneladas de los distintos distritos y se han obtenido los siguientes resultados. 64, 65, 68, 67, 68, 67, 72, 74, 80, 74, 68, 74, 68, 72, 68, 65, 72, 67, 68, 85.**

**a) Halla la media y la desviación típica.**

**b) Calcula el porcentaje de distritos cuyas cantidades recicladas se encuentran dentro del intervalo $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$**

a)

| $x_i$ | $f_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2 \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|
| 64 | 1 | 64 | 4096 |
| 65 | 2 | 130 | 8450 |
| 67 | 3 | 201 | 13 467 |
| 68 | 6 | 408 | 27 744 |
| 72 | 3 | 216 | 15 552 |
| 74 | 3 | 222 | 16 428 |
| 80 | 1 | 80 | 6400 |
| 85 | 1 | 85 | 7225 |
| | 20 | 1406 | 99 362 |

$$\bar{x} = \frac{1406}{20} = 70{,}3;\ s = \sqrt{\frac{99\,362}{20} - 70{,}3^2} \approx 5{,}1$$

b) $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (60{,}1;\ 80{,}5)$. Luego los distritos que se encuentran en ese intervalo son 19, lo que supone un porcentaje del 95 %.

**14.23 Se han medido las temperaturas máximas alcanzadas en dos ciudades durante 10 días consecutivos del mes de agosto, obteniéndose los siguientes resultados.**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***A*** | **32** | **33** | **24** | **22** | **35** | **30** | **29** | **31** | **20** | **19** |
| ***B*** | **27** | **28** | **25** | **31** | **24** | **25** | **24** | **26** | **22** | **28** |

**a) ¿Los habitantes de qué ciudad han tenido una temperatura media más alta a lo largo de esos 10 días?**

**b) ¿Qué ciudad ha sufrido una variabilidad de temperatura mayor?**

**c) ¿Qué parámetro has empleado para contestar el anterior apartado? ¿Por qué?**

a) Ya que $\bar{x}_A = \dfrac{275}{10} = 27{,}5°$ y $\bar{x}_B = \dfrac{260}{10} = 26°$, la ciudad *A* ha tenido una temperatura media más alta.

b) Para ver cuál ha sufrido una variabilidad mayor, debemos calcular el coeficiente de variación de ambas ciudades:

$$s_A^2 = \frac{7861}{10} - 27{,}5^2 = 29{,}85 \Rightarrow s_A \approx 5{,}46 \Rightarrow CV_A = \frac{5{,}46}{27{,}5} \approx 0{,}198$$

$$s_B^2 = \frac{6820}{10} - 26^2 = 6 \Rightarrow s_B \approx 2{,}45 \Rightarrow CV_B = \frac{2{,}45}{26} \approx 0{,}09$$

Por tanto, la ciudad *A* ha tenido una variabilidad de temperatura mayor.

c) El parámetro empleado es el *CV*, y se utiliza porque las medias y las desviaciones típicas de las dos distribuciones son distintas, y es la única manera de comparar sus dispersiones.

**14.24 Las notas obtenidas en la asignatura de Matemáticas por los alumnos de dos clases de 4.º de ESO son las siguientes.**

| Notas | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.º A | 5 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 5 |
| 4.º B | 0 | 0 | 2 | 2 | 3 | 6 | 3 | 2 | 2 | 0 | 0 |

**a) ¿Cuál es la calificación media de cada una de las dos clases?**

**b) ¿Cuál de ellas tiene las notas menos dispersas?**

**c) ¿Es necesario calcular el coeficiente de variación para poder determinarlo? ¿Por qué?**

a)

| $x_i \cdot f_i^A$ | $x_i \cdot f_i^B$ | $x_i^2 \cdot f_i^A$ | $x_i^2 \cdot f_i^B$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 4 | 0 |
| 2 | 4 | 4 | 8 |
| 0 | 6 | 0 | 18 |
| 0 | 12 | 0 | 48 |
| 0 | 30 | 0 | 150 |
| 0 | 18 | 0 | 108 |
| 0 | 14 | 0 | 98 |
| 8 | 16 | 64 | 128 |
| 36 | 0 | 324 | 0 |
| 50 | 0 | 500 | 0 |
| 100 | 100 | 896 | 558 |

La nota media de 4.º A es: $\bar{x}_A = \frac{100}{20} = 5$.

La nota media de 4.º B es: $\bar{x}_B = \frac{100}{20} = 5$.

b) Para observar la dispersión calculamos las desviaciones típicas de ambas clases:

$$s_A = \sqrt{\frac{896}{20} - 5^2} = 4,45; \; s_B = \sqrt{\frac{558}{20} - 5^2} \approx 1,7$$

Por tanto, 4.º B tiene las notas menos dispersas.

c) No ha sido necesario calcular *CV*, ya que cuando las medias son iguales tiene menor dispersión la distribución que tenga menor desviación típica.

**14.25 La profesora de Educación Física realiza un estudio referente a la altura y el peso de los alumnos de una clase, obteniendo los siguientes resultados: la altura, en metros, del 95 % de los alumnos se encuentra dentro del intervalo (1,52; 1,92), y el peso, en kilogramos, del mismo porcentaje de alumnos se incluye en el intervalo (56,9; 66,1).**

**¿Cuál de las distribuciones tiene una dispersión relativa mayor?**

El intervalo que contiene el 95 % de los datos de una distribución es $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$. Sustituyendo los datos del enunciado obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para la altura:

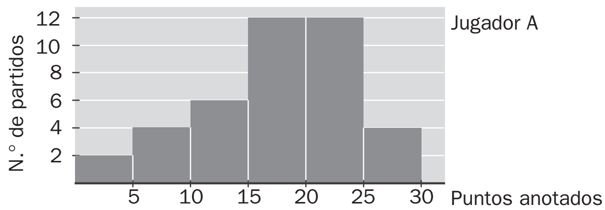
$$\begin{cases} \bar{x} - 2s = 1,52 \\ \bar{x} + 2s = 1,92 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = 1,72; \; s = 0,1. \text{ Por tanto: } CV_a = \frac{0,1}{1,72} \approx 0,06$$

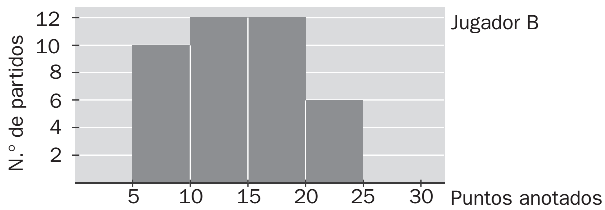
De igual manera, para el peso obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} \bar{x} - 2s = 56,9 \\ \bar{x} + 2s = 66,1 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = 61,5; \; s = 2,3. \text{ Por tanto: } CV_p = \frac{2,3}{61,5} \approx 0,04$$

En definitiva, la distribución de las alturas tiene una dispersión relativa mayor, ya que su *CV* es mayor.

**14.26 Los dos siguientes histogramas muestran los puntos anotados por dos jugadores de baloncesto a lo largo de toda la liga.**




**a) ¿Cuál de ellos alcanza mejor media anotadora?**

**b) ¿Quién es más regular en su anotación?**

a) Nos creamos la tabla asociada a los histogramas anteriores para poder responder a las cuestiones.

| Marcas $x_i$ | $f_i^A$ | $f_i^B$ | $x_i \cdot f_i^A$ | $x_i \cdot f_i^B$ | $x_i^2 \cdot f_i^A$ | $x_i^2 \cdot f_i^B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,5 | 2 | 0 | 5 | 0 | 12,5 | 0 |
| 7,5 | 4 | 10 | 30 | 75 | 225 | 562,5 |
| 12,5 | 6 | 12 | 75 | 150 | 937,5 | 1875 |
| 17,5 | 12 | 12 | 210 | 210 | 3675 | 3675 |
| 22,5 | 12 | 6 | 270 | 135 | 6075 | 3037,5 |
| 27,5 | 4 | 0 | 110 | 0 | 3025 | 0 |
| | 40 | 40 | 700 | 570 | 13 950 | 9150 |

La media anotadora del jugador A es: $\bar{x}_A = \dfrac{700}{40} = 17{,}5$.

La media anotadora del jugador B es: $\bar{x}_B = \dfrac{570}{40} = 14{,}25$.

Por tanto, alcanza mejor media anotadora el jugador A.

b) Para determinar quién es más regular debemos calcular los *CV* de ambos:

$$s_A = \sqrt{\frac{13\,950}{40} - 17{,}5^2} \approx 6{,}52 \Rightarrow CV_A = \frac{6{,}52}{17{,}5} \approx 0{,}37$$

$$s_B = \sqrt{\frac{9150}{40} - 14{,}25^2} \approx 5{,}068 \Rightarrow CV_B = \frac{5{,}068}{14{,}25} \approx 0{,}35$$

Por tanto, es más regular en su anotación el jugador B.

## C U E S T I O N E S   P A R A   A C L A R A R S E

**14.27 ¿Puede ser que la media no coincida con ningún valor de la variable? ¿Y la moda?**

La media puede no coincidir con ningún valor de la variable; sin embargo, la moda siempre estará asociada a un valor concreto de la distribución.

**14.28 Averigua el dato que falta en la siguiente distribución para que la media sea 18.**

**7, 12, 15, 22, 23, 28, 32**

$$\frac{7 + 12 + 15 + 22 + 23 + 28 + 32 + x}{8} = 18 \Rightarrow x = 5$$

**14.29 ¿Por qué en la siguiente tabla la mediana resulta poco significativa?**

| $x_i$ | 3 | 12 | 2000 |
|---|---|---|---|
| $f_i$ | 50 | 1 | 50 |

Claramente, la mediana de la distribución es 12, al ser el valor central de la misma; sin embargo, no informa en absoluto de la realidad de la distribución, que está repleta de los valores 3 y 2000.

**14.30 Al preguntar a 30 alumnos cuántas asignaturas han suspendido, 13 de ellos contestan que 5 materias. ¿Qué sector circular le corresponde al valor 5 de la variable *Número de suspensos*?**

Le corresponde el sector circular de 156°, ya que si 360° corresponde al total de los alumnos, entonces a 13 alumnos les corresponden 156°.

**14.31 Si se suma a todos los valores de la variable una constante, ¿cómo quedan afectadas la media y la varianza? ¿Y si se multiplican por una constante?**

Si se suma a todos los valores de la variable una constante, la media queda aumentada en esa constante, mientras que la varianza no varía.

Si se multiplican todos los valores de la variable por una constante, la media queda multiplicada por esa constante, mientras que la varianza queda multiplicada por el cuadrado de dicha constante.

**14.32 Pon un ejemplo de una distribución donde la media, la moda y la mediana coincidan.**

Por ejemplo, la siguiente distribución: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5

En este caso, Media = Moda = Mediana = 3

Puede considerarse también cualquier otro ejemplo que conserve una simetría.

**14.33 El rango es un valor que mide la dispersión de valores de la variable. Calcula el rango de estas dos distribuciones e indica en cuál de ellas el rango es más significativo de la realidad de los datos y por qué.**

| $x_i$ | 5 | 15 | 40 |
|---|---|---|---|
| $f_i$ | 2 | 25 | 3 |

| $y_i$ | 5 | 15 | 40 |
|---|---|---|---|
| $f_i$ | 12 | 2 | 16 |

El rango de las dos distribuciones es $40 - 5 = 35$, es decir, indica una dispersión grande de los datos que es mucho más real en $y_i$ que en $x_i$, ya que, en general, en esta última están muy poco dispersos.

**14.34 Relaciona cada variable con su desviación típica. Razónalo.**

| $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 4 | 4 |
| 6 | 3 |
| 8 | 4 |

| $y_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 4 | 1 |
| 6 | 13 |
| 8 | 1 |

| $z_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 2 | 6 |
| 4 | 2 |
| 6 | 1 |
| 8 | 6 |

**$s$ = 1,32** **$s$ = 2,7** **$s$ = 2,29**

| $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 4 | 4 |
| 6 | 3 |
| 8 | 4 |

| $y_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 4 | 1 |
| 6 | 13 |
| 8 | 1 |

| $z_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 2 | 6 |
| 4 | 2 |
| 6 | 1 |
| 8 | 6 |

$s$ = 2,29 $s$ = 1,32 $s$ = 2,7

Ya que la mayor dispersión se produce en $z_i$, después en $x_i$, y, sin embargo, en $y_i$ están muy concentrados los datos.

## PROBLEMAS PARA APLICAR

**14.35 En una ciudad de Castilla y León, el 35 % de sus habitantes son hombres y el 65 %, mujeres. Entre las mujeres, el 20 % son niñas; el 25 %, adultas, y el 55 %, mayores. Entre los hombres, el 15 % son niños; el 25 %, adultos, y el 60 %, mayores.**

**Para elaborar un estudio exhaustivo sobre los hábitos cotidianos de la población de esa ciudad, se elige una muestra de 1200 habitantes. ¿Cuál es la muestra más representativa de la población?**

| | Muestra 1 | | Muestra 2 | | Muestra 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | H | M | H | M | H | M |
| Niñ. | 63 | 156 | 58 | 160 | 70 | 145 |
| Adul. | 105 | 195 | 100 | 182 | 95 | 170 |
| May. | 252 | 429 | 262 | 438 | 255 | 465 |

La muestra más representativa es la 1:

| | Muestra 1 | |
|---|---|---|
| | H | M |
| Niñ. | 63 | 156 |
| Adul. | 105 | 195 |
| May. | 252 | 429 |

**14.36** **La moda y la media aritmética tratan de resumir en un número los valores que la variable ha ido tomando. En ocasiones, la media se ajusta más que la moda a la distribución, y a veces lo contrario. En cada una de las siguientes tablas, ¿qué parámetro ($\bar{x}$ o $M_o$ ) es más significativo y por qué?**

| $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 138 | 2 |
| 254 | 1 |
| 351 | 1 |
| 2 | 30 |

| $y_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 3 | 8 |
| 7 | 6 |
| 12 | 7 |
| 21 | 5 |

En la variable $A$: $\bar{x} \approx 27{,}7$; $M_0 = 2$. La moda es mucho más representativa, ya que de 34 datos, 30 toman el valor 2, que es la moda.

En la variable $B$: $\bar{x} \approx 9{,}8$; $M_0 = 3$, y ya que los datos están mucho más repartidos, es más representativa la media.

**14.37** **Los resultados obtenidos al tirar un dado han sido los siguientes.**

**3, 2, 4, 3, 1, 2, 6, 3, 5, 5, 1, 3, 2**

**Ordena los datos y averigua los tres cuartiles y la mediana.**

Ordenación: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6

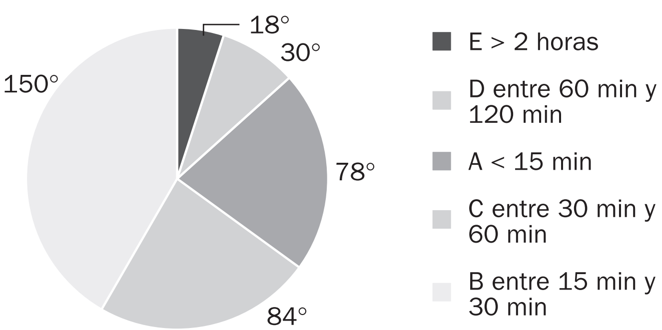
Los cuartiles son:

$Q_1 = 2$

$Q_2 = 3 = M$

$Q_3 = 4$

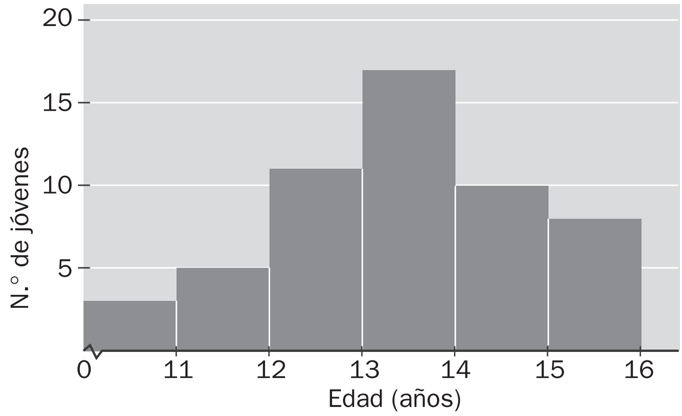
**14.38** **A 60 alumnos de Secundaria se les pregunta sobre el tiempo que dedican al ordenador diariamente. Las respuestas obtenidas las refleja este diagrama de sectores.**




**¿Cuántos alumnos respondieron a las distintas categorías del estudio?**

Realizando sendas reglas de tres obtenemos los siguientes resultados: A: 13 alumnos; B: 25; C: 14; D: 5, y E: 3.

**14.39 Según datos del Plan Nacional de Drogas, la edad media de inicio en el consumo de alcohol es de 13,6 años. En un estudio que se ha realizado en un centro de Secundaria a 54 jóvenes sobre la edad en la que comenzaron a ingerir alcohol, se han obtenido los siguientes resultados.**




**a) Elabora una tabla con los datos del gráfico y calcula su media y su mediana.**

**b) Compara los resultados con la media nacional.**

a)

| Edad (años) | N.° de alumnos $f_i$ | Marcas $x_i$ | $F_i$ | $x_i \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| [10, 11) | 3 | 10,5 | 3 | 31,5 |
| [11, 12) | 5 | 11,5 | 8 | 57,5 |
| [12, 13) | 11 | 12,5 | 19 | 137,5 |
| [13, 14) | 17 | 13,5 | 36 | 229,5 |
| [14, 15) | 10 | 14,5 | 46 | 145 |
| [15, 16) | 8 | 15,5 | 54 | 124 |
| | 54 | | | 725 |

Media: $\bar{x} = \dfrac{725}{54} \approx 13{,}4$

Mediana: $M = 13{,}5$

b) La media nacional es de 13,6, así que el estudio ratifica la bajada de edad en el consumo de alcohol e incluso con una media menor.

**14.40 El número de asignaturas suspensas en 4.º de ESO en un centro de Secundaria en septiembre viene reflejado en la siguiente tabla.**

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 20 | 12 | 8 | 7 | 17 | 13 | 8 | 7 | 5 | 3 | 5 |

**a) Calcula la mediana y los cuartiles.**

**b) Haz un diagrama de cajas y bigotes, y analiza la simetría de la distribución.**

**c) ¿Cuál es la media de suspensos?**

**d) En este centro han definido los siguientes parámetros: el *índice de éxito escolar*, que mide el porcentaje de alumnos con posibilidad de titular (dos o menos suspensos); el *índice de repetición*, que establece los alumnos entre tres y seis suspensos, y el *índice de fracaso escolar*, que determina los alumnos con siete o más suspensos.**

**Calcula los tres índices relativos a la tabla expresados en tantos por ciento.**

a)

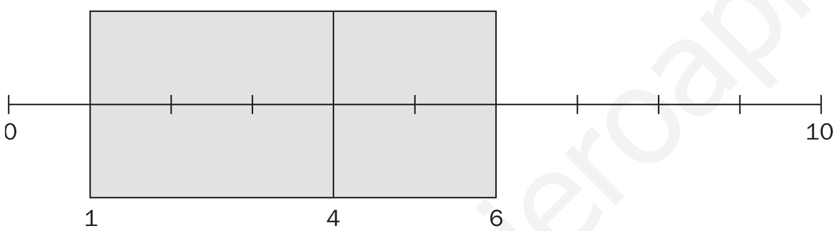
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 20 | 12 | 8 | 7 | 17 | 13 | 8 | 7 | 5 | 3 | 5 |
| $F_i$ | 20 | 32 | 40 | 47 | 64 | 77 | 85 | 92 | 97 | 100 | 105 |

$Q_1 = 1$

$Q_2 = M = 4$

$Q_3 = 6$

b)




Analizando el diagrama de cajas y bigotes, se observa que hay más concentración de datos en la primera cuarta parte al tener el bigote más corto. Se produce mayor dispersión entre el 25 % y el 50 % que entre el 50 % y el 75 %. Por último, la vertical que corta la caja no está en el centro, lo que indica asimetría.

c) $\bar{x} = \dfrac{396}{105} \approx 3{,}77$

d) Índice de éxito escolar $\approx$ 38,09 %

Índice de repetición $\approx$ 42,86 %

Índice de fracaso escolar $\approx$ 19,05 %

**14.41 En una población nórdica con 2500 habitantes adultos se ha realizado un estudio sobre su altura. La distribución de alturas es normal (unimodal y simétrica).**

**Sabiendo que en el intervalo (172, 196) se encuentran 2375 habitantes y que la altura media es de 184 centímetros, calcula:**

**a) La desviación típica de la distribución.**

**b) El número de habitantes que miden entre 178 y 190 centímetros.**

a) En el intervalo (172, 196) se encuentran 2375 habitantes, lo que supone el 95 % de la población total. Como el intervalo que contiene el 95 % de los datos de una distribución es $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$, se tiene que $\bar{x} - 2s = 172$. Sustituyendo los datos del enunciado obtenemos la siguiente ecuación:

$$184 - 2s = 172 \Rightarrow 2s = 184 - 172 \Rightarrow s = \frac{184 - 172}{2} = 6$$

b) El número de habitantes que miden entre 178 y 190 cm será igual al número de habitantes que se encuentren en el intervalo $(178, 190) = (\bar{x} - s, \bar{x} + s)$. Este último intervalo contiene el 68 % de los datos, lo que supone que hay 1700 habitantes que miden entre 178 y 190 cm.

## Caracteres y parámetros estadísticos. Gráficos

**14.42 La siguiente tabla muestra las edades de las personas que acuden a un bibliobús de barrio solicitando préstamos de libros en un día cualquiera.**

| Edad | N.º de personas |
|---|---|
| [6, 8) | 5 |
| [8, 10) | 12 |
| [10, 12) | 14 |
| [12, 14) | 13 |
| [14, 16) | 4 |
| [16, 18) | 2 |

**a) Halla la media, la moda y el tercer cuartil.**

**b) Calcula la desviación típica.**

**c) Representa el histograma y el polígono de frecuencias.**

a)

| Marcas ($x_i$) | N.º personas ($f_i$) | $F_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2 \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 5 | 35 | 245 |
| 9 | 12 | 17 | 108 | 972 |
| 11 | 14 | 31 | 154 | 1694 |
| 13 | 13 | 44 | 169 | 2197 |
| 15 | 4 | 48 | 60 | 900 |
| 17 | 2 | 50 | 34 | 578 |
| | 50 | | 560 | 6586 |

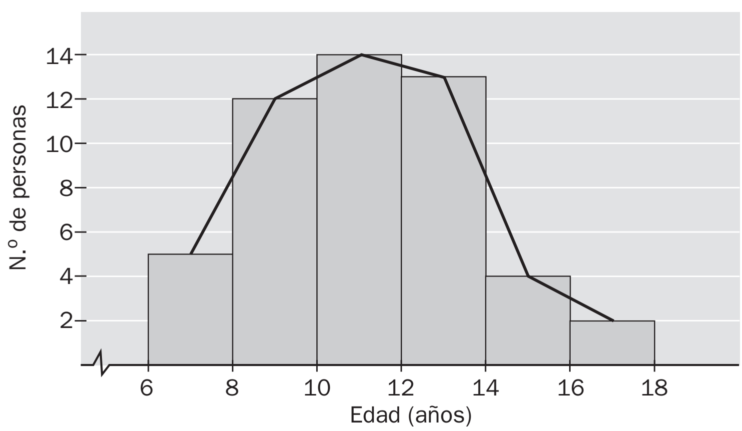
La media es: $\bar{x} = \frac{560}{50} = 11{,}2$ años.

La moda es: $M_o = 11$ años.

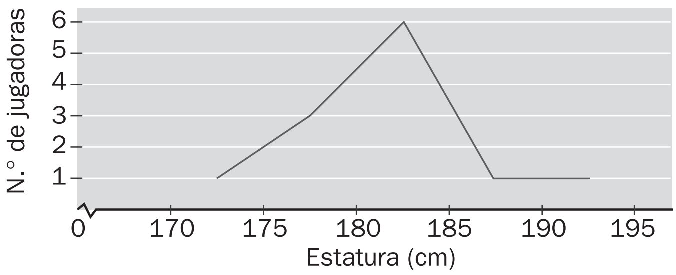
El tercer cuartil es: $Q_3 = 13$ años.

b) $s = \sqrt{\frac{6586}{50} - 11{,}2^2} \approx 2{,}5$

c)



**14.43 Observa el siguiente polígono de frecuencias, que muestra las estaturas de las 12 jugadoras de un equipo de voleibol femenino.**




**Calcula la media aritmética y la desviación típica.**

Nos creamos la tabla asociada al polígono de frecuencias anterior para poder responder a las cuestiones:

| **Marcas (cm) ($x_i$)** | **N.° jugadoras ($f_i$)** | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2 \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|
| 172,5 | 1 | 172,5 | 29 756,25 |
| 177,5 | 3 | 532,5 | 94 518,75 |
| 182,5 | 6 | 1095 | 199 837,5 |
| 187,5 | 1 | 187,5 | 35 156,25 |
| 192,5 | 1 | 192,5 | 37 056,25 |
| | 12 | 2180 | 396 325 |

La media aritmética es: $\bar{x} = \dfrac{2180}{12} = 181{,}67$ cm.

La desviación típica es: $s = \sqrt{\dfrac{396\,325}{12} - 181{,}67^2} = 4{,}93$.

**14.44 Susana, profesora de Educación Plástica y Visual, evalúa a sus alumnos cada trimestre con la media de 10 calificaciones sobre distintas pruebas y trabajos. Bilal ha obtenido, de momento, las siguientes notas:**

**2, 4, 4, 5, 8, 3, 6, 3, 5**

**Le queda tan solo la nota del último examen que debe realizar. ¿Qué calificación debe obtener para aprobar la asignatura con un 5?**

Lo que necesita Bilal es que su media sea 5, es decir:

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 4 + 5 + 8 + 3 + 6 + 3 + 5 + a}{10} = 5 \Rightarrow \frac{40 + a}{10} = 5 \Rightarrow a = 10$$

Por tanto, para aprobar la asignatura con un 5, Bilal debe obtener un 10.

## Utilización conjunta de $\bar{x}$ y $s$

14.45 **Se ha registrado en la siguiente tabla el número de goles marcados por dos equipos de balonmano en 8 partidos del campeonato nacional de liga.**

| EQ. 1 | 25 | 24 | 27 | 24 | 26 | 25 | 27 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| EQ. 2 | 28 | 30 | 21 | 22 | 27 | 20 | 28 | 30 |

**a) Calcula el número medio de goles de cada uno de los equipos.**

**b) ¿Cuál de ellos es más regular en su tanteo?**

a)

| Goles ($x_i$) | $f_{i1}$ | $f_{i2}$ | $x_i \cdot f_{i1}$ | $x_i \cdot f_{i2}$ | $x_i^2 \cdot f_{i1}$ | $x_i^2 \cdot f_{i2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0 | 1 | 0 | 20 | 0 | 400 |
| 21 | 0 | 1 | 0 | 21 | 0 | 441 |
| 22 | 0 | 1 | 0 | 22 | 0 | 484 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 24 | 3 | 0 | 72 | 0 | 1728 | 0 |
| 25 | 2 | 0 | 50 | 0 | 1250 | 0 |
| 26 | 1 | 0 | 26 | 0 | 676 | 0 |
| 27 | 2 | 1 | 54 | 27 | 1458 | 729 |
| 28 | 0 | 2 | 0 | 56 | 0 | 1568 |
| 29 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 30 | 0 | 2 | 0 | 60 | 0 | 1800 |
| | 8 | 8 | 202 | 206 | 5112 | 5422 |

La media del equipo 1 es: $\bar{x}_1 = \frac{202}{8} = 25{,}25$ goles.

La media del equipo 2 es: $\bar{x}_2 = \frac{206}{8} = 25{,}75$ goles.

b) Ya que las medias son distintas, para comprobar la regularidad de cada uno debemos calcular el $CV$:

$$s_1 = \sqrt{\frac{5112}{8} - 25{,}25^2} \approx 1{,}2 \Rightarrow CV_1 = \frac{1{,}2}{25{,}25} \approx 0{,}047$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{5422}{8} - 25{,}75^2} \approx 3{,}83 \Rightarrow CV_2 = \frac{3{,}83}{25{,}75} \approx 0{,}15$$

Por tanto, es más regular en su tanteo el equipo 1, ya que su $CV$ es menor.

14.46 **Se ha realizado una encuesta entre los alumnos de un colegio de Enseñanza Primaria con el objeto de conocer el número de horas semanales que ven la televisión. El estudio arroja la siguiente información: el número de horas del 95 % de los alumnos se encuentra en el intervalo (3,18; 17,1). Calcula la media aritmética y la desviación típica.**

El intervalo que contiene el 95 % de los datos de una distribución es $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$. Sustituyendo los datos del enunciado obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} \bar{x} - 2s = 3{,}18 \\ \bar{x} + 2s = 17{,}1 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = 10{,}14;\ s = 3{,}48$$

**14.47** **Completa la siguiente distribución con dos datos más de forma que:**

**2, 5, 6, 7, 7, 9**

**a) Se conserve la media, pero la desviación típica aumente.**

**b) Se conserve la media, pero la desviación típica disminuya.**

a) Para que se conserve la media y aumente la desviación típica, podemos añadir los datos 3 y 9.

b) Para que se conserve la media y disminuya la desviación típica, podemos añadir los datos 6 y 6.

**14.48** **Dadas las distribuciones:**

| $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 3 | 7 |
| 5 | 11 |
| 7 | 18 |
| 9 | 21 |

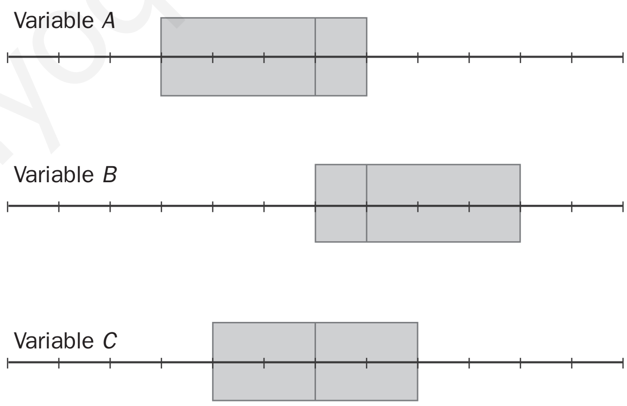
| $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 1 | 15 |
| 3 | 7 |
| 5 | 15 |
| 7 | 8 |
| 9 | 15 |

| $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 3 | 12 |
| 5 | 25 |
| 7 | 14 |
| 9 | 4 |

**¿En cuál de ellas se puede decir que en el intervalo ($\bar{x} - s$, $\bar{x} + s$) se encuentra el 68 % de los datos? ¿Por qué?**

La tercera variable es la única donde se puede asegurar dicha afirmación, ya que es simétrica y unimodal. En la primera variable no se puede garantizar por ser asimétrica, y en la segunda tampoco por ser trimodal.

**14.49** **Estos son los diagramas de cajas y bigotes de tres variables.**




**Determina qué se puede decir de cada uno de ellos en cuanto a los siguientes aspectos.**

**a) Concentración de los datos.** **b) Dispersión de los datos.** **c) Simetría.**

Variable *A*: Más concentración de datos en la primera cuarta parte al tener el bigote más corto. Más dispersión entre el 25 % y el 50 % que entre el 50 % y el 75 %. La vertical que corta la caja no está en el centro, lo que indica asimetría.

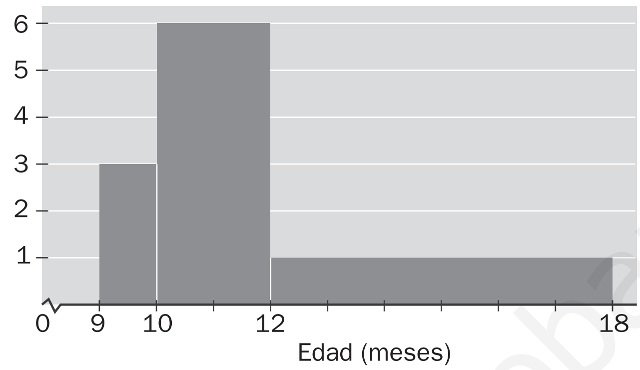
Variable *B*: Más concentración de datos en la cuarta parte más alta al tener el bigote más corto. Más concentración entre el 25 % y el 50 % que entre el 50 % y el 75 %. La vertical que corta la caja no está en el centro, lo que indica asimetría.

Variable *C*: Concentración simétrica a lo largo de los cuatro cuartos.

14.50 **Echar a andar**

**Se ha realizado un estudio sobre los meses de edad que tenían un grupo de bebés en el momento en que comenzaron a caminar.**

**Los resultados vienen expresados mediante el siguiente histograma, donde las áreas de los rectángulos son proporcionales a las frecuencias.**




**Se sabe que hay 21 bebés que echaron a andar entre los 9 y 10 meses.**

**a) ¿Cuántos bebés se observaron para realizar el estudio? ¿Cuántos comenzaron entre los 10 y 12 meses? ¿Y entre los 12 y 18 meses?**

**b) Se consideran como casos "dentro de lo habitual" todos aquellos cuya edad de echar a andar no se aleje de la media más de tres desviaciones típicas. En estas condiciones, ¿cuántos casos no se pueden considerar como "dentro de lo habitual"? ¿Qué porcentaje representan?**

a) Construimos la siguiente tabla:

| Intervalos | Marcas | $f_i$ | $f_i \cdot x_i$ | $f_i \cdot x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| [9, 10) | 9,5 | 21 | 199,5 | 1895,25 |
| [10, 12) | 11 | 84 | 924 | 10 164 |
| [12, 18) | 15 | 42 | 630 | 9450 |
| Totales | | 147 | 1753,5 | 21 509,25 |

Analizando dicha tabla se deduce que se observaron 147 bebés para realizar el estudio. 84 de ellos echaron a andar entre los 10 y 12 meses, y 42, entre los 12 y 18 meses.

b) $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{1753{,}5}{147} \approx 11{,}93 \qquad s = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i \cdot x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{21\,509{,}25}{147} - 11{,}93^2} \approx 2$

$(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s) = (5{,}93;\ 17{,}93)$

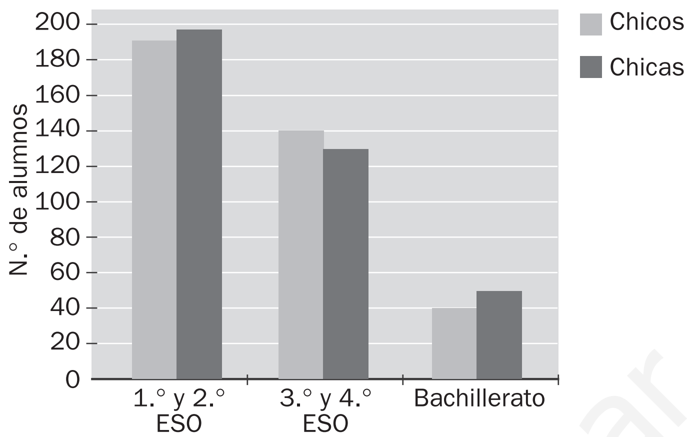
Solo se consideran como "fuera de lo habitual" aquellos casos cuya edad de echar a andar haya sido superior a 17,93 meses.

Por tanto: $\dfrac{18 - 12}{42} = \dfrac{18 - 17{,}93}{x} \Rightarrow x = 0{,}49$ , que representan el $\dfrac{0{,}49}{147} \cdot 100 = 0{,}33\ \%$.

**14.51 La encuesta**

**Se quiere realizar una encuesta entre los alumnos de un centro escolar sobre sus preferencias en materia de actividades extraescolares.**

**El siguiente gráfico muestra la distribución de los alumnos según el sexo y el nivel que estudian.**




**Para el estudio se ha elegido una muestra de 50 alumnos distribuidos de la siguiente forma.**

| | 1.º - 2.º ESO | 3.º - 4.º ESO | Bachillerato |
|---|---|---|---|
| **Chicos** | **12** | **10** | **3** |
| **Chicas** | **13** | **9** | **3** |

**¿Crees que la composición de la muestra es la adecuada o, por el contrario, habría que variar la misma? Justifica tu respuesta.**

La distribución de los alumnos, en porcentajes, es:

| | 1.º - 2.º ESO | 3.º - 4.º ESO | Bachillerato |
|---|---|---|---|
| **Chicos** | 24,14 % | 19,31 % | 5,52 % |
| **Chicas** | 26,21 % | 17,93 % | 6,90 % |

Repartiendo los 50 alumnos de la muestra de acuerdo con los porcentajes quedaría:

| | 1.º - 2.º ESO | 3.º - 4.º ESO | Bachillerato |
|---|---|---|---|
| **Chicos** | 12,07 | 9,655 | 2,76 |
| **Chicas** | 13,105 | 8,965 | 3,45 |

Considerando que los números deben ser naturales y sumar 50, la distribución más ajustada de la muestra es precisamente la aportada en el enunciado.

14.A1 **El entrenador de un saltador de longitud decide estudiar las últimas diez pruebas en las que participó su pupilo, obteniendo la siguiente tabla.**

| Longitud del salto (m) | N.º de saltos |
|---|---|
| **[7,8; 7,9)** | **1** |
| **[7,9; 8,0)** | **2** |
| **[8,0; 8,1)** | **3** |
| **[8,1; 8,2)** | **2** |
| **[8,2; 8,3)** | **2** |

**a) Halla la media, la moda, la mediana y el primer cuartil.**

**b) Calcula el rango y la desviación típica.**

**c) Representa un histograma.**

a)

| Marcas ($x_i$) | N.º saltos ($f_i$) | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2 \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|
| 7,85 | 1 | 7,85 | 61,6225 |
| 7,95 | 2 | 15,9 | 126,405 |
| 8,05 | 3 | 24,15 | 194,4075 |
| 8,15 | 2 | 16,3 | 132,845 |
| 8,25 | 2 | 16,5 | 136,125 |
| | 10 | 80,7 | 651,405 |

La media es: $\bar{x} = \dfrac{80{,}7}{10} = 8{,}07$ m.

La moda es: $M_o = 8{,}05$ m.

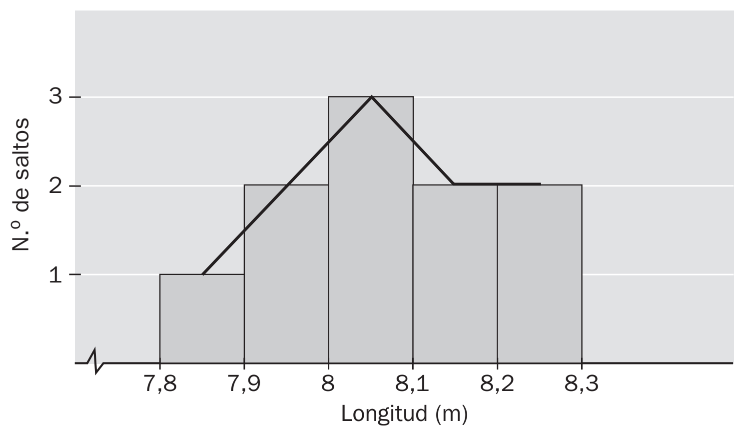
La mediana es: $M = 8{,}05$ m.

El primer cuartil es: $Q_1 = 7{,}95$ m.

b) Rango $= 8{,}25 - 7{,}85 = 0{,}4$ m.

La desviación típica es: $s = \sqrt{\dfrac{651{,}405}{10} - 8{,}07^2} = \sqrt{0{,}0156} \approx 0{,}125$.

c) El histograma que se obtiene es el siguiente:

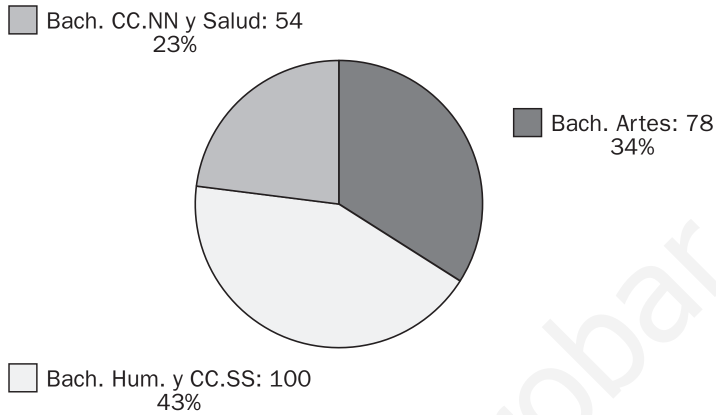


**14.A2 Si la media de una distribución es $\bar{x} = 1{,}97$ y la desviación típica es $s = 0{,}08$, halla el intervalo en el cual se encuentran el 99 % de los datos de la distribución.**

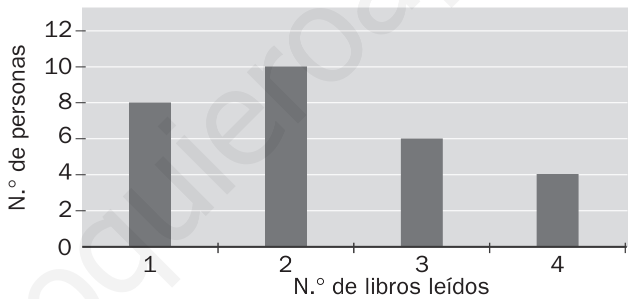
El intervalo que contiene el 99 % de los datos de una distribución es $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$. Por tanto, al sustituir los datos del enunciado en el intervalo obtenemos (1,73; 2,21), que es el intervalo pedido.

**14.A3 En las aulas de Bachillerato de un centro escolar hay 100 alumnos en la modalidad de Humanidades y CC. SS., 54 en la de CC. NN. y de la Salud, y 78 en la de Artes.**

**Representa estos datos en un diagrama de sectores.**




**14.A4 El siguiente diagrama de barras nos muestra el número de libros leídos en un año por las treinta personas que trabajan en una oficina.**




**a) Calcula la media aritmética y la desviación típica.**

**b) ¿Cuál es el coeficiente de variación?**

a) Nos creamos la tabla asociada al diagrama de barras anterior para poder responder a las cuestiones:

| Libros leídos ($x_i$) | N.° personas ($f_i$) | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2 \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 8 | 8 |
| 2 | 10 | 20 | 40 |
| 3 | 7 | 21 | 63 |
| 4 | 5 | 20 | 80 |
| | 30 | 69 | 191 |

La media es: $\bar{x} = \dfrac{69}{30} = 2{,}3$

La desviación típica es: $s = \sqrt{\dfrac{191}{30} - 2{,}3^2} \approx 1{,}04$

b) $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{1{,}04}{2{,}3} \approx 0{,}45$

MATETIEMPOS

## El precio de la gasolina

**La capacidad media de un barril de petróleo es de 158,98 litros. El coste medio del barril en el mercado de Londres durante un determinado mes es de 70 dólares. Si el precio de la gasolina, en ese mismo mes, fue de 1 euro por litro y un dólar se cotizó a 0,7 euros, ¿cuál fue la diferencia entre el precio de coste y el de venta?**

Precio de un litro de petróleo en dólares: $\frac{70}{158,98} = 0,4403$

Precio de un litro de petróleo en euros: $0,4403 \cdot 0,7 = 0,3082$

Diferencia, en euros, entre el precio de venta y el de coste: $1 - 0,3082 = 0,6918$ €

## EJERCICIOS PROPUESTOS

15.1 **Copia y completa la siguiente tabla.**

| Y \ X | *A* | *B* | *C* | Total |
|---|---|---|---|---|
| *a* | 2 | | 1 | 4 |
| *b* | | 2 | 2 | 5 |
| *c* | | | 0 | 7 |
| Total | 7 | 6 | | |

$\Rightarrow$

| Y \ X | *A* | *B* | *C* | Total |
|---|---|---|---|---|
| *a* | 2 | **1** | 1 | 4 |
| *b* | **1** | 2 | 2 | 5 |
| *c* | **4** | **3** | 0 | 7 |
| Total | 7 | 6 | **3** | **16** |

**a) ¿Qué porcentaje de datos presentan la característica *B* en la variable unidimensional *X*?**

**b) ¿Qué porcentaje de datos presentan la característica *c* en la variable unidimensional *Y*?**

**c) ¿Qué porcentaje de datos presentan la característica (*B*, *c*) en la variable bidimensional (*X*, *Y*)?**

a) Porcentaje de datos que presenta la característica *B* en la variable unidimensional $X = \frac{6}{16} \cdot 100 = 37{,}5\,\%$

b) Porcentaje de datos que presenta la característica *c* en la variable unidimensional $Y = \frac{7}{16} \cdot 100 = 43{,}75\,\%$

c) Porcentaje de datos que presenta la característica (*B*, *c*) en la variable bidimensional $(X, Y) = \frac{3}{16} \cdot 100 = 18{,}75\,\%$

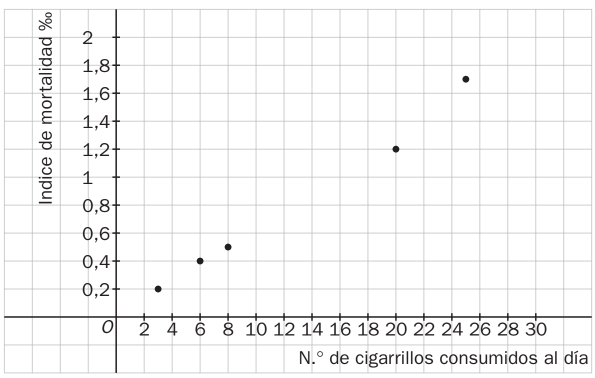
15.2 **Observa la siguiente variable bidimensional.**

| N.° de cigarrillos consumidos al día | 3 | 6 | 8 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| Índice de mortalidad | 0,2 | 0,4 | 0,5 | 1,2 | 1,7 |

**a) Representa la nube de puntos.**

**b) Indica el tipo de correlación.**

a) La nube de puntos es la siguiente:




b) Como al aumentar el número de cigarrillos consumidos aumenta el índice de mortalidad, la correlación es positiva.

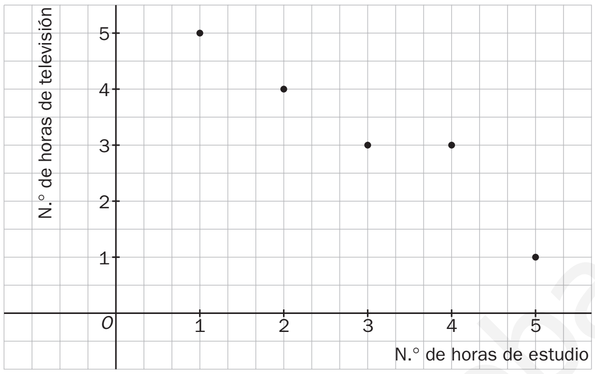
**15.3 Una variable bidimensional viene dada por la siguiente tabla.**

| N.º de horas de estudio | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| N.º de horas de televisión | 5 | 4 | 3 | 3 | 1 |

**a) Representa el diagrama de dispersión.**

**b) Indica el tipo de correlación.**

a) La nube de puntos es la siguiente:




b) Como al aumentar el número de horas de estudio disminuye el número de horas de televisión, la correlación es negativa.

**15.4 Una variable bidimensional viene dada por la siguiente tabla.**

| ***X*** | **3** | **6** | **8** | **20** | **25** |
|---|---|---|---|---|---|
| ***Y*** | **0,2** | **0,4** | **0,5** | **1,2** | **1,7** |

**a) Calcula las medias y las desviaciones típicas de las variables *X* e *Y*.**

**b) Calcula la covarianza de la variable (*X, Y*).**

Consideramos la siguiente tabla:

| N.º de cigarrillos $x_i$ | Índice de mortalidad $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_iy_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 0,2 | 9 | 0,04 | 0,6 |
| 6 | 0,4 | 36 | 0,16 | 2,4 |
| 8 | 0,5 | 64 | 0,25 | 4 |
| 20 | 1,2 | 400 | 1,44 | 24 |
| 25 | 1,7 | 625 | 2,89 | 42,5 |
| 62 | 4 | 1134 | 4,78 | 73,5 |

a) $\overline{x} = \dfrac{62}{5} = 12,40$

$\overline{y} = \dfrac{4}{5} = 0,8$

$s_X = \sqrt{\dfrac{1134}{5} - 12,4^2} = 8,5463$

$s_Y = \sqrt{\dfrac{4,78}{5} - 0,8^2} = 0,5621$

b) $s_{XY} = \dfrac{73,5}{5} - 12,4 \cdot 0,8 = 4,78$

15.5 **Dados los siguientes valores de una variable bidimensional:**

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 5 | 4 | 3 | 3 | 1 | 3 | 4 | 6 | 3 |

**a) Halla las medias y las desviaciones típicas de las variables $X$ e $Y$.**

**b) Calcula la covarianza de la variable ($X$, $Y$).**

Consideramos la siguiente tabla:

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_iy_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 1 | 25 | 5 |
| 2 | 4 | 4 | 16 | 8 |
| 3 | 3 | 9 | 9 | 9 |
| 4 | 3 | 16 | 9 | 12 |
| 5 | 1 | 25 | 1 | 5 |
| 6 | 3 | 36 | 9 | 18 |
| 7 | 4 | 49 | 16 | 28 |
| 8 | 6 | 64 | 36 | 48 |
| 9 | 3 | 81 | 9 | 27 |
| 45 | 32 | 285 | 130 | 160 |

a) $\overline{x} = \dfrac{45}{9} = 5$

$\overline{y} = \dfrac{32}{9} = 3,\widehat{5}$

$s_X = \sqrt{\dfrac{285}{9} - 5^2} = 2,582$

$s_Y = \sqrt{\dfrac{130}{9} - 3,\widehat{5}^2} = 1,3426$

b) $s_{XY} = \dfrac{160}{9} - 5 \cdot 3,\widehat{5} = 0$

15.6 **Dada la siguiente variable bidimensional, calcula el coeficiente de correlación.**

| $X$ | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 2 | 4 | 10 | 5 | 2 | 6 | 4 |

Consideramos la siguiente tabla:

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_iy_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 9 | 4 | 6 |
| 5 | 4 | 25 | 16 | 20 |
| 6 | 10 | 36 | 100 | 60 |
| 7 | 5 | 49 | 25 | 35 |
| 8 | 2 | 64 | 4 | 16 |
| 9 | 6 | 81 | 36 | 54 |
| 10 | 4 | 100 | 16 | 40 |
| 48 | 33 | 364 | 201 | 231 |

$\overline{x} = \dfrac{48}{7} = 6,8571$

$\overline{y} = \dfrac{33}{7} = 4,7143$

$s_X = \sqrt{\dfrac{364}{7} - 6,8571^2} = 2,2316$

$s_Y = \sqrt{\dfrac{201}{7} - 4,7143^2} = 2,5475$

$s_{XY} = \dfrac{231}{7} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 0,6736$

$r = \dfrac{s_{XY}}{s_X s_Y} = 0,1185$

**15.7** **Calcula el coeficiente de correlación e interprétalo.**

| *X* | 6 | 8 | 11 | 14 | 15 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Y* | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 | 8 |

Consideramos la siguiente tabla:

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_iy_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 36 | 9 | 18 |
| 8 | 4 | 64 | 16 | 32 |
| 11 | 2 | 121 | 4 | 22 |
| 14 | 5 | 196 | 25 | 70 |
| 15 | 6 | 225 | 36 | 90 |
| 18 | 7 | 324 | 49 | 126 |
| 20 | 8 | 400 | 64 | 160 |
| 92 | 35 | 1366 | 203 | 518 |

$$\overline{x} = \frac{92}{7} = 13{,}1429$$

$$\overline{y} = \frac{35}{7} = 5$$

$$s_X = \sqrt{\frac{1366}{7} - 13{,}1429^2} = 4{,}7336$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{203}{7} - 5^2} = 2$$

$$s_{XY} = \frac{518}{7} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 8{,}2855$$

$$r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = 0{,}8752$$

Como $r = 0{,}8752 \Rightarrow$ las variables tienen una correlación positiva media.

**15.8** **Una variable bidimensional viene dada por la siguiente tabla.**

| *X* | 13 | 14 | 11 | 13 | 14 | 14 | 15 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Y* | 54 | 52 | 54 | 53 | 53 | 50 | 49 | 42 |

**a) Calcula el coeficiente de correlación.**

**b) Halla la recta de regresión.**

**c) Si $x = 12$, ¿cuánto valdrá $y$?**

**d) ¿Es fiable esta predicción? Justifícalo.**

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_iy_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 54 | 169 | 2916 | 702 |
| 14 | 52 | 196 | 2704 | 728 |
| 11 | 54 | 121 | 2916 | 594 |
| 13 | 53 | 169 | 2809 | 689 |
| 14 | 53 | 196 | 2809 | 742 |
| 14 | 50 | 196 | 2500 | 700 |
| 15 | 49 | 225 | 2401 | 735 |
| 22 | 42 | 484 | 1764 | 924 |
| 116 | 407 | 1756 | 20 819 | 5814 |

a) $\overline{x} = \frac{116}{8} = 14{,}5$

$$\overline{y} = \frac{407}{8} = 50{,}875$$

$$s_X = \sqrt{\frac{1756}{8} - 14{,}5^2} = 3{,}0414$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{20\,819}{8} - 50{,}875^2} = 3{,}7562$$

$$s_{XY} = \frac{5814}{8} - \overline{x} \cdot \overline{y} = -10{,}9375$$

$$r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = -0{,}9574$$

b) $y - \overline{y} = \frac{s_{XY}}{s_X^2}(x - \overline{x}) \Rightarrow y - 50{,}875 = \frac{-10{,}9375}{9{,}2501}(x - 14{,}5) \Rightarrow y = 50{,}875 - 1{,}1824(x - 14{,}5)$

c) Para $x = 12 \Rightarrow y = 50{,}875 - 1{,}1824(12 - 14{,}5) \Rightarrow y = 53{,}831$

d) La predicción es fiable pues el valor del coeficiente de correlación, $-0{,}9574$, está muy próximo a $-1$.

**15.9 Halla, usando la recta de regresión, los valores de $Y$ para 2, 4, 10, 12, 14, 16 y 18 años. Comprueba que se aproximan lo suficiente a los valores reales y calcula el error relativo cometido.**

La recta de regresión es: $y = 138{,}29 + 5{,}605(x - 10{,}86)$.

Para $x = 2 \Rightarrow y = 88{,}6297 \Rightarrow$ Error relativo $= \dfrac{|90 - 88{,}6297|}{90} = 0{,}0152$

Para $x = 4 \Rightarrow y = 99{,}8397 \Rightarrow$ Error relativo $= \dfrac{|100 - 99{,}8397|}{100} = 1{,}603 \cdot 10^{-3}$

Para $x = 10 \Rightarrow y = 133{,}4697 \Rightarrow$ Error relativo $= \dfrac{|130 - 133{,}4697|}{130} = 0{,}0267$

Para $x = 12 \Rightarrow y = 144{,}6797 \Rightarrow$ Error relativo $= \dfrac{|145 - 144{,}6797|}{145} = 2{,}2090 \cdot 10^{-3}$

Para $x = 14 \Rightarrow y = 155{,}8897 \Rightarrow$ Error relativo $= \dfrac{|155 - 155{,}8897|}{155} = 5{,}74 \cdot 10^{-3}$

Para $x = 16 \Rightarrow y = 167{,}0997 \Rightarrow$ Error relativo $= \dfrac{|170 - 167{,}0997|}{170} = 0{,}0171$

Para $x = 18 \Rightarrow y = 178{,}3097 \Rightarrow$ Error relativo $= \dfrac{|178 - 178{,}3097|}{178} = 1{,}7399 \cdot 10^{-3}$

**15.10 ¿Qué ocurre al tomar pocos valores para construir la recta de regresión? Halla la recta usando sólo las tallas correspondientes a los 10 y 12 años. Comprueba si la aproximación es mejor o peor que en el caso anterior.**

Al tomar pocos valores obtendremos una aproximación peor.

Calculemos la recta de regresión para las tallas correspondientes a los 10 y 12 años.

Para ello, consideremos la siguiente tabla:

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_iy_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 130 | 100 | 16 900 | 1300 |
| 12 | 145 | 144 | 21 025 | 1740 |
| 22 | 275 | 244 | 37 925 | 3040 |

$\overline{x} = \dfrac{22}{11} = 11$

$\overline{y} = \dfrac{275}{2} = 137{,}5$

$s_{XY} = \dfrac{3040}{2} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 7{,}5$

$s_X^2 = \dfrac{244}{2} - 11^2 = 1$

Luego la ecuación de la recta de regresión será:

$$y - \overline{y} = \frac{s_{XY}}{s_X^2}(x - \overline{x}) \Rightarrow y - 137{,}5 = \frac{7{,}5}{1}(x - 11) \Rightarrow y = 137{,}5 + 7{,}5(x - 11)$$

Si hallamos los valores de $Y$ para 2, 4, 10, 12, 14, 16 y 18 usando la ecuación de esta recta de regresión, comprobaremos que, efectivamente, las aproximaciones son peores que en el caso anterior.

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

## Variables bidimensionales, dependencia y diagramas de dispersión

**15.11 Sea la siguiente tabla de doble entrada.**

| Y \ X | 2 | 3 | 5 | 7 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 1 | 4 | 1 | 9 |
| 7 | 1 | 3 | 1 | 1 | 6 |
| 11 | 1 | 1 | 3 | 5 | 10 |
| 13 | 1 | 3 | 1 | 2 | 7 |
| Total | 6 | 8 | 9 | 9 | 32 |

**Copia y completa las siguientes frases.**

**a) La frecuencia absoluta de (5, 11) es…**

**b) El número de puntos del tipo (3, *y*) es…**

**c) El número de puntos del tipo (*x*, 13) es…**

**d) El punto de mayor frecuencia absoluta es…**

**e) El punto ........................ tiene frecuencia 4.**

a) 3   b) 8   c) 7   d) (7, 11)   e) (5, 4)

**15.12 Elabora una tabla de doble entrada a partir de la siguiente variable bidimensional.**

| $X$ | 1 | 3 | 6 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 5 | 10 | 18 | 22 | 25 |
| $f_i$ | 1 | 2 | 4 | 3 | 2 |

**a) ¿Qué porcentaje de datos representa el valor (6, 18) dentro del conjunto de datos de la variable (*X*, *Y*)?**

**b) Calcula $\overline{x}$, $s_X$.**

| Y \ X | 1 | 3 | 6 | 10 | 12 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | | | | | 1 |
| 10 | | 2 | | | | 2 |
| 18 | | | 4 | | | 4 |
| 22 | | | | 3 | | 3 |
| 25 | | | | | 2 | 2 |
| Total | 1 | 2 | 4 | 3 | 2 | 12 |

a) $\frac{4}{12} \cdot 100 = 33,\widehat{3}\,\%$

b) $\overline{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{1 + 6 + 24 + 30 + 24}{12} = \frac{85}{12} = 7,08$

$$s_X = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 f_i}{N} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{1 + 18 + 144 + 300 + 288}{12} - 7,08^2} = \sqrt{62,58 - 50,13} = \sqrt{12,45} = 3,53$$

15.13 **Determina la media y la desviación típica de las variables *X* e *Y*, y representa la nube de puntos de la siguiente distribución.**

| Y \ X | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 3 | | 4 | 1 | |
| **3** | | 3 | 3 | | 1 |
| **5** | 6 | 2 | | 4 | 1 |
| **7** | 5 | | 4 | | 2 |
| **9** | 4 | | 4 | | 1 |

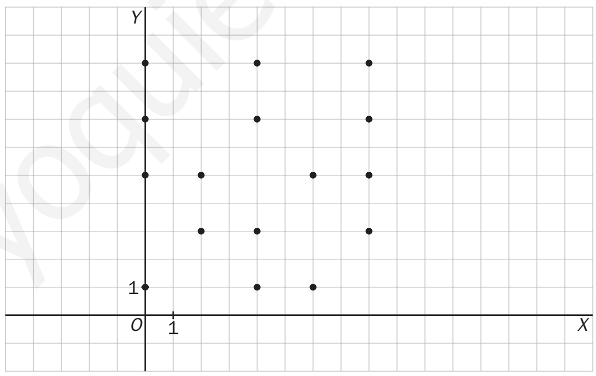
**¿Qué tipo de relación existe entre ambas variables?**

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{0 + 10 + 60 + 30 + 40}{48} = 2{,}9$$

$$s_X = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 f_i}{N} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{0 + 20 + 240 + 180 + 320}{48} - 2{,}9^2} = \sqrt{15{,}8 - 8{,}41} = \sqrt{7{,}39} = 2{,}7$$

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i f_i}{N} = \frac{8 + 21 + 65 + 77 + 81}{48} = 5{,}25$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 f_i}{N} - \overline{y}^2} = \sqrt{\frac{8 + 63 + 325 + 539 + 729}{48} - 5{,}25^2} = \sqrt{34{,}7 - 27{,}6} = 2{,}7$$




Como se observa en el diagrama de dispersión, las variables no están relacionadas. Estamos ante un caso de independencia.

15.14 **Indica qué tipo de relación tienen las variables bidimensionales ($X$, $Y_1$); ($X$, $Y_2$), y ($X$, $Y_3$).**

| **X** | −3 | −1 | 2 | 4 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **$Y_1$** | 9 | 5 | −1 | −5 | −7 | −11 |
| **$Y_2$** | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | −1 |
| **$Y_3$** | −2 | 2 | −1 | 1 | 5 | 3 |

($X$, $Y_1$) $\rightarrow$ Dependencia funcional $\Rightarrow y = -2x + 3$.

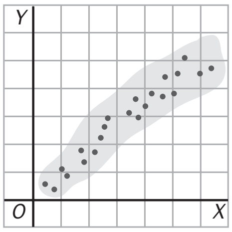
($X$, $Y_2$) $\rightarrow$ Correlación negativa y fuerte.

($X$, $Y_3$) $\rightarrow$ Correlación positiva y débil.

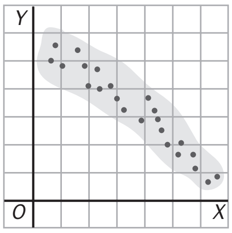
## Covarianza y correlación

**15.15 Asocia cada índice de correlación con el diagrama de dispersión correspondiente.**

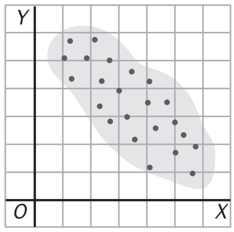
**$r = 1$** **$r = 0{,}92$** **$r = -0{,}25$** **$r = -0{,}78$**

a) 

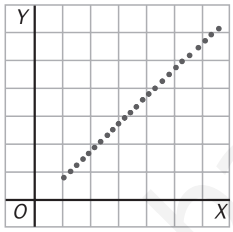

$r = 0{,}92$

b) 


$r = -0{,}78$

c) 


$r = -0{,}25$

d) 


$r = 1$

**15.16 La siguiente tabla muestra los valores de una variable bidimensional.**

| **X** | **0,25** | **1,32** | **1,24** | **0,17** | **−0,12** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Y** | **0,33** | **0,63** | **1,55** | **0,46** | **0,21** |

**a) Calcula el coeficiente de correlación.**

**b) Indica el tipo de correlación que existe entre ambas variables.**

a) $r = \dfrac{s_{XY}}{s_X s_Y}$

$$\overline{x} = \frac{2{,}86}{5} = 0{,}5720$$

$$\overline{y} = \frac{3{,}18}{5} = 0{,}636$$

$$s_{XY} = \frac{0{,}08 + 0{,}83 + 1{,}92 + 0{,}078 - 0{,}025}{5} - 0{,}572 \cdot 0{,}636 = 0{,}5778 - 0{,}3638 = 0{,}2140$$

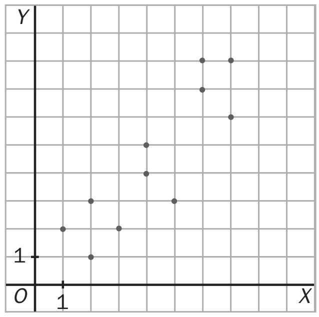
$$s_X = \sqrt{\frac{0{,}0625 + 1{,}7424 + 1{,}5376 + 0{,}0289 + 0{,}0144}{5} - 0{,}57^2} = \sqrt{0{,}6772 - 0{,}3272} = 0{,}5916$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{0{,}1089 + 0{,}3969 + 2{,}4025 + 0{,}2116 + 0{,}0441}{5} - 0{,}636^2} = \sqrt{0{,}6328 - 0{,}4047} = 0{,}4778$$

$$r = \frac{0{,}2140}{0{,}5916 \cdot 0{,}4778} = 0{,}7572$$

b) Entre las dos variables existe una correlación positiva media.

**15.17 Dado el siguiente diagrama de dispersión:**




**a) Elabora una tabla de doble entrada.**

**b) ¿Qué tipo de correlación tienen las dos variables? ¿Fuerte o débil? ¿Positiva o negativa?**

**c) ¿Qué coeficiente de correlación de los indicados se ajustaría mejor a la nube de puntos $r = -0{,}91$, $r = 0{,}35$, $r = 0{,}92$? Compruébalo calculando numéricamente dicho coeficiente.**

a)

| Y \ X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | 1 | | | | | | 1 |
| **2** | 1 | | 1 | | | | | 2 |
| **3** | | 1 | | | | | | 1 |
| **4** | | | | 1 | 1 | | | 2 |
| **5** | | | | 1 | | | | 1 |
| **6** | | | | | | | 1 | 1 |
| **7** | | | | | | 1 | | 1 |
| **8** | | | | | | 1 | 1 | 2 |
| **Total** | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 11 |

b) Correlación positiva y fuerte.

c) Se ajusta más $r = 0{,}92$.

$$r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

$$\overline{x} = \frac{1 + 4 + 3 + 8 + 5 + 12 + 14}{11} = 4{,}3$$

$$\overline{y} = \frac{1 + 4 + 3 + 8 + 5 + 6 + 7 + 16}{11} = 4{,}5$$

$$s_{XY} = \frac{2 + 2 + 6 + 6 + 16 + 20 + 20 + 42 + 48 + 42 + 56}{11} - 4{,}3 \cdot 4{,}5 = \frac{260}{11} - 19{,}35 = 4{,}29$$

$$s_X = \sqrt{\frac{1 + 8 + 9 + 32 + 25 + 72 + 98}{11} - 4{,}3^2} = \sqrt{22{,}27 - 18{,}49} = \sqrt{3{,}8} = 1{,}9$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{1 + 8 + 9 + 32 + 25 + 36 + 49 + 128}{11} - 4{,}5^2} = \sqrt{26{,}18 - 20{,}25} = \sqrt{5{,}93} = 2{,}43$$

$$r = \frac{4{,}29}{1{,}9 \cdot 2{,}43} = \frac{4{,}29}{4{,}617} = 0{,}929 \text{ (como ya se había intuido)}$$

**15.18 La relación entre dos variables viene dada en la siguiente tabla.**

| ***X*** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Y*** | **4** | **9** | **16** | **24** | **30** | **34** | **38** | **42** |

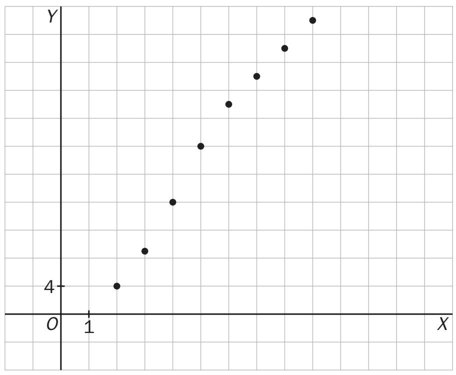
**a) Dibuja la nube de puntos asociada a la tabla.**

**b) Elabora una tabla de doble entrada.**

**c) Halla $\overline{x}$, $\overline{y}$, $s_{XY}$.**

**d) Calcula el coeficiente de correlación lineal. ¿Cómo es la correlación?**

a)




b)

| *Y* \ *X* | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **4** | 1 | | | | | | | | 1 |
| **9** | | 1 | | | | | | | 1 |
| **16** | | | 1 | | | | | | 1 |
| **24** | | | | 1 | | | | | 1 |
| **30** | | | | | 1 | | | | 1 |
| **34** | | | | | | 1 | | | 1 |
| **38** | | | | | | | 1 | | 1 |
| **42** | | | | | | | | 1 | 1 |
| **Total** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 8 |

c) $\overline{x} = \dfrac{44}{8} = 5{,}5$

$\overline{y} = \dfrac{197}{8} = 24{,}625$

$s_{XY} = \dfrac{8 + 27 + 64 + 120 + 180 + 238 + 304 + 378}{8} - 5{,}5 \cdot 24{,}625 = \dfrac{1319}{8} - 135{,}4375 = 29{,}4375$

d) $r = \dfrac{s_{XY}}{s_X s_Y}$

$s_X = \sqrt{\dfrac{4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81}{8} - 5{,}5^2} = \sqrt{35{,}5 - 30{,}25} = \sqrt{5{,}25} = 2{,}2913$

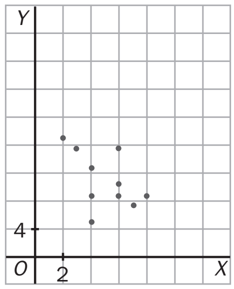
$s_Y = \sqrt{\dfrac{16 + 81 + 256 + 576 + 900 + 1156 + 1444 + 1764}{8} - 24{,}625^2} = \sqrt{167{,}7344} = 12{,}9512$

$r = \dfrac{29{,}4375}{2{,}2913 \cdot 12{,}9512} = 0{,}9920$

La correlación es positiva y muy fuerte.

## Rectas de regresión y estimaciones

**15.19 Observa el siguiente diagrama de dispersión y calcula la recta de regresión.**




Consideramos la siguiente tabla:

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 17 | 34 | 4 | 289 |
| 4 | 5 | 20 | 16 | 25 |
| 4 | 13 | 52 | 16 | 169 |
| 6 | 11 | 66 | 36 | 121 |
| 7 | 7 | 49 | 49 | 49 |
| 3 | 15 | 45 | 9 | 225 |
| 4 | 9 | 36 | 16 | 81 |
| 6 | 9 | 54 | 36 | 81 |
| 6 | 15 | 90 | 36 | 225 |
| 8 | 9 | 72 | 64 | 81 |
| 50 | 110 | 518 | 282 | 1346 |

$\overline{x} = \dfrac{50}{10} = 5$

$\overline{y} = \dfrac{110}{10} = 11$

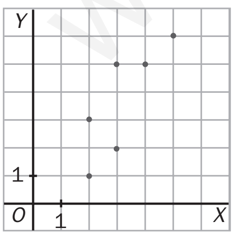
$s_X^2 = \dfrac{282}{10} - 5^2 = 3{,}2$

$s_{XY} = \dfrac{518}{10} - \overline{x} \cdot \overline{y} = -3{,}2$

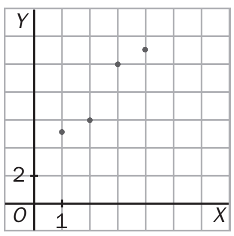
Recta de regresión: $y - 11 = -1(x - 5) \Rightarrow y = 11 - (x - 5)$

**15.20 ¿A qué nube de puntos se ajustaría mejor la recta de regresión de ecuación $y = 3x + 1$? Justifica la respuesta.**

a)




b)




Se ajusta mejor a la distribución *B*. Para comprobarlo, consideramos la siguiente tabla:

| **X** | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Y** | 5 | 6 | 10 | 11 |
| $y = 3x + 1$ | 4 | 7 | 10 | 13 |

Obsérvese que las *Y* de la distribución *B* son muy semejantes a las que proporciona la recta de regresión.

15.21 **En la siguiente variable bidimensional:**

| **X** | **1** | **2** | **3** | **4** | **3** | **7** | **6** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Y** | **45** | **30** | **30** | **25** | **25** | **10** | **20** | **15** | **10** | **15** |

**a) Halla su centro de masas y su covarianza.**

**b) Calcula su coeficiente de correlación lineal.**
**¿Tiene sentido calcular su recta de regresión y realizar predicciones?**

**c) Calcula su recta de regresión.**

**d) Si el valor de la variable *X* es 15, ¿cuál es el valor estimado de la variable *Y*?**

**e) Si el valor de la variable *Y* es 13, ¿cuál es el valor estimado de la variable *X*?**

a) Centro de masas $\equiv (\overline{x}, \overline{y})$

$$\overline{x} = \frac{38}{10} = 3{,}8$$

$$\overline{y} = \frac{225}{10} = 22{,}5$$

$$s_{XY} = \frac{45 + 60 + 90 + 100 + 75 + 70 + 120 + 45 + 40 + 75}{10} - 3{,}8 \cdot 22{,}5 = \frac{720}{10} - 85{,}5 = -13{,}5$$

b) $$s_X = \sqrt{\frac{1 + 4 + 9 + 16 + 9 + 49 + 36 + 9 + 16 + 25}{10} - 3{,}8^2} = 1{,}7205$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{2025 + 900 + 900 + 625 + 625 + 100 + 400 + 225 + 100 + 225}{10} - 22{,}5^2} = 10{,}3078$$

$$r = \frac{-13{,}5}{1{,}7205 \cdot 10{,}3078} = -0{,}7612$$

Es una correlación media, por lo que sí tendría sentido calcular predicciones.

c) Recta de regresión:

$$y - \overline{y} = \frac{s_{XY}}{s_X^2}(x - \overline{x}) \Rightarrow y - 22{,}5 = \frac{-13{,}5}{2{,}9601}(x - 3{,}8) \Rightarrow y = 22{,}5 + 4{,}5608(x - 3{,}8)$$

d) $x = 15 \Rightarrow y = 22{,}5 - 4{,}5608 \cdot (15 - 3{,}8) = -28{,}5811$

e) $y = 13 \Rightarrow 13 - 22{,}5 = -4{,}5608 \cdot (x - 3{,}8) \Rightarrow -9{,}5 = -4{,}5608x + 17{,}33104 \Rightarrow x = 5{,}8830$

**15.22 Contesta verdadero (V) o falso (F) a las siguientes afirmaciones.**

**a) Si $r = 0{,}34$, las estimaciones con la recta de regresión son poco fiables.**

**b) Dos variables no correlacionadas $X$ e $Y$ tienen un coeficiente de correlación de 0,98.**

**c) Dos variables $X$ e $Y$ relacionadas por la ecuación $y = 6x - 7$ tienen un coeficiente de correlación lineal $r = 0{,}85$.**

**d) Una variable bidimensional de centro de masas (3; 5,5) tiene una recta de regresión que pasa por el punto (3, −2).**

a) Verdadero

b) Falso

c) Falso

d) Falso

**15.23 Si la covarianza de una distribución es negativa, ¿qué podemos afirmar tanto del coeficiente de correlación como de la pendiente de la recta de regresión?**

Signo de coeficiente de correlación:

$$r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{-}{(+)(+)} = -$$

Signo de la pendiente:

$$m = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{-}{+} = -$$

**15.24 ¿Un coeficiente de correlación negativo significa una correlación débil de las variables?**

No necesariamente. Lo que significa es una nube de puntos decreciente.

**15.25 Si dos variables bidimensionales ($X$, $Y$), ($Z$, $T$) tienen coeficientes de correlación $r_{XY} = -0{,}989$ y $r_{ZT} = 0{,}989$, ¿en cuál de ellas será más fiable hacer una estimación?**

En cualquiera de las dos, ya que el valor absoluto del coeficiente de correlación es el mismo.

**15.26 El coeficiente de correlación de una distribución bidimensional es 0,85. Si los valores de las variables se multiplican por 10, ¿cuál será el coeficiente de correlación de esa nueva distribución?**

$$r_b = \frac{100 s_{XY}}{10 s_X 10 s_Y} = r_a$$

**15.27 En una distribución de 40 datos, la covarianza vale 2,605 y $\overline{x} = 5{,}45$, $\overline{y} = 5{,}6$.**

**Calcula el valor de: $\sum f_{ij} x_i y_j$**

$$s_{XY} = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \overline{x} \cdot \overline{y} \Rightarrow \sum x_i y_i = (s_{XY} + \overline{x} \cdot \overline{y}) \cdot n = (2{,}605 + 5{,}45 \cdot 5{,}6) \cdot 40 = 1325$$

**15.28** **Sabiendo que *m* es la pendiente de la recta de regresión, justifica si la siguiente igualdad es cierta.**

$$\frac{m}{r} = \frac{s_Y}{s_X}$$

La igualdad es cierta:

$$\frac{m}{r} = \frac{s_Y}{s_X} \Rightarrow \frac{m}{r} = \frac{\frac{s_{XY}}{s_X^2}}{\frac{s_{XY}}{s_X s_Y}} = \frac{s_X s_Y}{s_X^2} = \frac{s_Y}{s_X}$$

**15.29** **La variable bidimensional (*X*, *Y*) tiene como recta de regresión $y = 3x - 2$ y $r = 0{,}75$.**

**La variable bidimensional (*T*, *P*) tiene como recta de regresión $p = 3t - 2$ y $r = 0{,}96$.**

**¿En cuál de las dos rectas es más fiable estimar −12,5? ¿A qué valor corresponde la estimación realizada?**

Es más fiable en (*T*, *P*) al tener una correlación más fuerte.

$$-12{,}5 = 3t - 2 \Rightarrow 3t = -10{,}5 \Rightarrow t = -3{,}5$$

## PROBLEMAS PARA APLICAR

**15.30** **Escoge una variable de las dos primeras tablas y, a partir de la tercera, indica el tipo de relación que existe. Por ejemplo:**

**2. 'Número de horas sentado al cabo del día'.**

***A*: 'Peso del individuo'.**

***Y*: correlación positiva media.**

| |
|---|
| **1.** Número de cigarros fumados al día. |
| **2.** Número de horas sentado al cabo del día. |
| **3.** Velocidad a la que voy en el coche. |
| **4.** Nota en una asignatura. |

| |
|---|
| ***A*.** Peso del individuo. |
| ***B*.** Número de horas diarias de móvil. |
| ***C*.** Capacidad pulmonar. |
| ***D*.** Espacio que recorro. |

| |
|---|
| ***W*.** Dependencia funcional. |
| ***X*.** Correlación negativa fuerte. |
| ***Y*.** Correlación positiva media. |
| ***Z*.** Correlación positiva medio-fuerte. |

Podemos hacer las siguientes relaciones: 1*CX*, 2*AZ*, 3*DW*, 4*BY*

**15.31** **En una encuesta a 30 jóvenes sobre el número de libros que leen al cabo de un año han respondido lo siguiente.**

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\geqslant 7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 5 | 6 | 8 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |

**Y sobre el número de películas vistas en un año:**

| $Y$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 12 | 15 | 18 | $\geqslant 20$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 5 | 6 | 8 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |

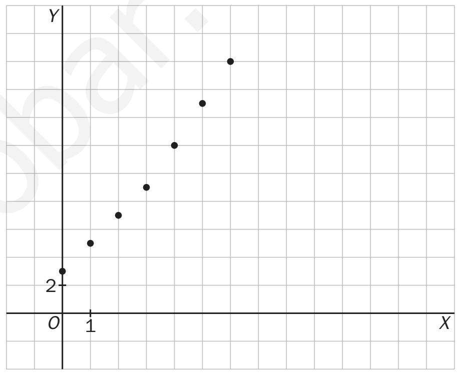
**a) ¿Está relacionado el número de libros que leen los jóvenes con las películas que visualizan? Considera para ello la variable bidimensional ($X$, $Y$) construida a través de los pares ($x_i$, $y_i$), y elabora una tabla de doble entrada.**

**b) Dibuja el diagrama de dispersión. Indica qué tipo de correlación tienen.**

a)

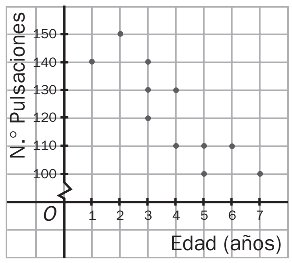
| $Y$ \ $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\geqslant 7$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3** | 5 | | | | | | | | 5 |
| **5** | | 6 | | | | | | | 6 |
| **7** | | | 8 | | | | | | 8 |
| **9** | | | | 3 | | | | | 3 |
| **12** | | | | | 3 | | | | 3 |
| **15** | | | | | | 2 | | | 2 |
| **18** | | | | | | | 2 | | 2 |
| **$\geqslant 20$** | | | | | | | | 1 | 1 |
| **Total** | 5 | 6 | 8 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 30 |

b)




Tienen una correlación positiva y fuerte.

**15.32** **El siguiente diagrama expresa la relación entre la edad y el número de pulsaciones de 12 personas.**




**Calcula la recta de regresión.**

Consideramos la siguiente tabla:

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 160 | 160 | 1 | 25 600 |
| 1 | 140 | 140 | 1 | 19 600 |
| 2 | 150 | 300 | 4 | 22 500 |
| 3 | 140 | 420 | 9 | 19 600 |
| 3 | 130 | 390 | 9 | 16 900 |
| 3 | 120 | 360 | 9 | 14 400 |
| 4 | 130 | 520 | 16 | 16 900 |
| 4 | 110 | 440 | 16 | 12 100 |
| 5 | 110 | 550 | 25 | 12 100 |
| 5 | 100 | 500 | 25 | 10 000 |
| 6 | 110 | 660 | 36 | 12 100 |
| 7 | 100 | 700 | 49 | 10 000 |
| 44 | 1500 | 5140 | 200 | 191 800 |

$$\overline{x} = \frac{44}{12} = 3,\widehat{6}$$

$$\overline{y} = \frac{1500}{12} = 125$$

$$s_X^2 = \frac{200}{12} - 3,\widehat{6}^2 = 3,\widehat{2}$$

$$s_{XY} = \frac{5140}{12} - \overline{x} \cdot \overline{y} = -30$$

Recta de regresión:

$$y - 125 = -9,3103(x - 3,\widehat{6}) \Rightarrow y = 125 - 9,3103(x - 3,\widehat{6})$$

**15.33 Una empresa realiza un estudio de los efectos de la publicidad sobre sus ventas. Los resultados de ese estudio en un determinado producto son los siguientes.**

| Gasto | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N.º productos | 9 | 18 | 32 | 27 | 40 | 46 |

**Los datos están dados en miles de euros.**

**a) Calcula su coeficiente de correlación.**

**b) Obtén su recta de regresión.**

**c) Si se invierten 15 000 euros en publicidad, ¿cuántas ventas del producto se estima que se producirán?**

**d) Si en un determinado año se consiguen vender 60 000 unidades del producto, ¿cuánto se estima que se ha invertido en publicidad ese año?**

a) $r = \dfrac{s_{XY}}{s_X s_Y}$

$\overline{x} = 3{,}5$ mil €

$\overline{y} = 28{,}\widehat{6}$ mil €

$$s_{XY} = \frac{9 + 36 + 96 + 108 + 200 + 276}{6} - 3{,}5 \cdot 28{,}\widehat{6} = 120{,}8 - 100{,}\widehat{3} = 20{,}5$$

$$s_X = \sqrt{\frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} - 3{,}5^2} = \sqrt{15{,}1\widehat{6} - 12{,}25} = 1{,}7078$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{81 + 324 + 1024 + 729 + 1600 + 2116}{6} - 28{,}\widehat{6}^2} = 12{,}5388$$

$$r = \frac{20{,}5}{1{,}7078 \cdot 12{,}5388} = 0{,}9573$$

b) $y - \overline{y} = \dfrac{s_{XY}}{s_X^2}(x - \overline{x}) \Rightarrow y - 28{,}\widehat{6} = \dfrac{20{,}5}{2{,}9167}(x - 3{,}5) \Rightarrow y = 7{,}0284x + 4{,}0673$

c) $x = 15\,000 = 15$ mil € $\Rightarrow y = 7{,}0284 \cdot 15 + 4{,}0673 = 109{,}4933$ mil € $= 109\,493{,}3$ €

d) $y = 60\,000 = 60$ mil € $\Rightarrow 60 = 7{,}0284x + 4{,}0673 \Rightarrow x = 7{,}9581$ mil € $= 7958{,}1$ €

**15.34 La media de los pesos de los individuos de una población es de 72 kilogramos, y la de sus estaturas, 173 centímetros. Las desviaciones típicas son 4 kilogramos y 9 centímetros, y la covarianza es 35.**

**a) ¿Cuál es el coeficiente de correlación?**

**b) Calcula la recta de regresión del peso respecto a la estatura.**

**c) ¿Cuál es el peso estimado para un individuo de 182 centímetros?**

a) Consideremos la variable bidimensional $(X, Y)$ = (Peso, Estatura) $\Rightarrow r = \dfrac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \dfrac{35}{4 \cdot 9} = \dfrac{35}{36} = 0{,}9722$

b) $y - 173 = \dfrac{35}{16} \cdot (x - 72) \Rightarrow y - 173 = 2{,}1875 \cdot (x - 72) \Rightarrow y = 2{,}1875x + 15{,}5$

c) Si $y = 182$ cm $\Rightarrow x = \dfrac{182 - 15{,}5}{2{,}1875} = 76{,}1143$ kg

15.35 **En un curso de Bachillerato de 40 alumnos se ha querido estudiar la correlación de notas de las asignaturas de Lengua ($X$) e Historia ($Y$) como materias clave en itinerarios de letras. Los resultados han sido los siguientes.**

| Y \ X | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | | | | | | |
| 5 | | 7 | 11 | | | | |
| 6 | | | | 5 | 3 | | |
| 7 | | | | 5 | 2 | | |
| 9 | | | | | | 1 | |
| 10 | | | | | | | 2 |

**El coeficiente de correlación es $r = 0{,}919$, y su recta de regresión, $y = x + 0{,}15$.**

**a) Comprueba que la recta pasa por $(\overline{x}, \overline{y})$.**

**b) Se define la desviación de cada punto, $d$, como la diferencia entre el valor real ($y_r$) y el valor estimado ($y_e$); es decir, $d = y_r - y_e$.**

**Calcula todas las desviaciones de los datos y halla su suma, comprobando que se van equilibrando unas con otras.**

a) $(\overline{x}, \overline{y}) = (5{,}45;\ 5{,}6) \Rightarrow$ Sustituyendo en la recta de regresión se comprueba que $5{,}6 = 5{,}45 + 0{,}15$.

b) Consideramos la siguiente tabla:

| $x_i$ | $y_i$ | $y_e$ | $d = y_r - y_e$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 3,15 | −1,15 |
| 4 | 5 | 4,15 | 0,85 |
| 5 | 5 | 5,15 | −0,15 |
| 6 | 6 | 6,15 | −0,15 |
| 6 | 7 | 6,15 | 0,85 |
| 7 | 6 | 7,15 | −1,15 |
| 7 | 7 | 7,15 | −0,15 |
| 8 | 9 | 8,15 | 0,85 |
| 10 | 10 | 10,15 | −0,15 |
| $\sum(y_r - y_e)$ | | | −0,35 |

Como se observa en la tabla, $\sum(y_r - y_e) = -0{,}35$, que es un valor muy pequeño.

Esto nos muestra que las desviaciones de los datos se van equilibrando unas con otras.

## Diagramas de dispersión. Correlación

**15.36 Dada la siguiente distribución bidimensional:**

**a) Dibuja la nube de puntos.**

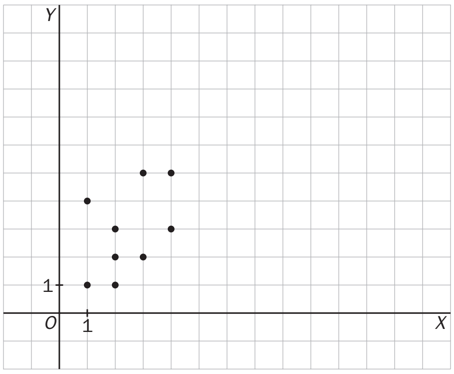
**b) ¿Qué porcentaje de veces aparece (2, 2)?**

**c) ¿Cuál es la frecuencia absoluta del valor (3, *y*)?**

**d) ¿Cuál es la frecuencia absoluta del valor (*x*, 5)?**

| Y \ X | 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | 2 |
| 2 | | 3 | 3 | | 6 |
| 3 | | 1 | | 1 | 2 |
| 4 | 1 | | | | 1 |
| 5 | | | 2 | 2 | 4 |
| Total | 2 | 5 | 5 | 3 | 15 |

a)




b) $\frac{3}{15} \cdot 100 = 20\,\%$

c) 5

d) 4

**15.37 Los valores de una variable bidimensional (*X*, *Y*) son los que siguen.**

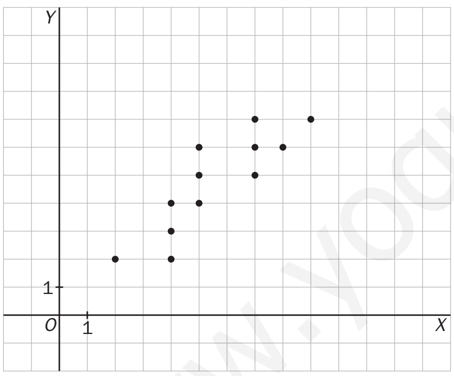
**(2, 2); (4, 2); (4, 4); (4, 3); (7, 5); (7, 7); (7, 6); (5, 6); (5, 5); (5, 4); (8, 6); (9, 7)**

**a) Dibuja el diagrama de dispersión.**

**b) Halla el coeficiente de correlación. Interpreta el resultado.**

**c) Indica el tipo de dependencia entre ambas variables.**

a)




$r = 0{,}8605 \Rightarrow$ Las variables tienen una correlación positiva media.

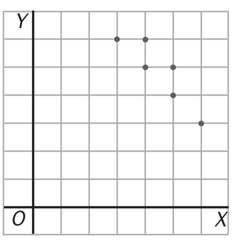
b) Consideramos la siguiente tabla:

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 2 | 8 | 16 | 4 |
| 4 | 4 | 16 | 16 | 16 |
| 4 | 3 | 12 | 16 | 9 |
| 7 | 5 | 35 | 49 | 25 |
| 7 | 7 | 49 | 49 | 49 |
| 7 | 6 | 42 | 49 | 36 |
| 5 | 6 | 30 | 25 | 36 |
| 5 | 5 | 25 | 25 | 25 |
| 5 | 4 | 20 | 25 | 16 |
| 8 | 6 | 48 | 64 | 36 |
| 9 | 7 | 63 | 81 | 49 |
| 67 | 57 | 352 | 419 | 305 |

c) La dependencia entre ambas variables es aleatoria.

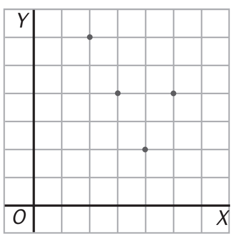
**15.38 Asocia cada coeficiente de correlación con su gráfica correspondiente: −0,26; −0,81; −0,95; 0,71**

a)



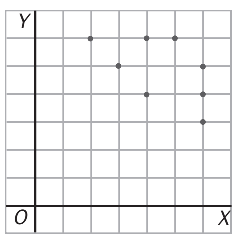

$r = -0{,}95$

b)



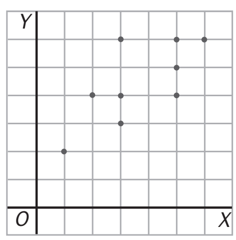

$r = -0{,}26$

c)




$r = -0{,}81$

d)




$r = 0{,}71$

## Recta de regresión y estimaciones

**15.39 La relación entre dos variables (*X*, *Y*) viene dada por la siguiente tabla.**

| *X* | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Y* | 1 | 1 | 2 | 4 | 4 | 6 | 7 | 6 | 7 | 7 |

**a) Calcula el coeficiente de correlación lineal.**

**b) Halla la recta de regresión.**

**c) Si $x = 8$, ¿cuánto valdría $y$?**

**d) ¿Es buena esta predicción? Justifica la respuesta.**

a)

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 1 |
| 2 | 2 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 4 | 12 | 9 | 16 |
| 4 | 4 | 16 | 16 | 16 |
| 4 | 6 | 24 | 16 | 36 |
| 5 | 7 | 35 | 25 | 49 |
| 6 | 6 | 36 | 36 | 36 |
| 6 | 7 | 42 | 36 | 49 |
| 7 | 7 | 49 | 49 | 49 |
| 40 | 45 | 221 | 196 | 257 |

$$\bar{x} = \frac{40}{10} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{45}{10} = 4,5$$

$$s_X = \sqrt{\frac{196}{10} - 4^2} = 1,8974$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{257}{10} - 4,5^2} = 2,3345$$

$$s_{XY} = \frac{221}{10} - \bar{x} \cdot \bar{y} = 4,1$$

Luego $r = \dfrac{s_{XY}}{s_X s_Y} = 0,9256$

b) $y - 4,5 = \dfrac{4,1}{3,6} \cdot (x - 4) \Rightarrow y - 4,5 = 1,1389 \cdot (x - 4) \Rightarrow y = 4,5 + 1,1389(x - 4)$

c) Si $x = 8 \Rightarrow y = 4,5 + 1,1389(8 - 4) = 9,0556$

d) La predicción es buena, ya que el coeficiente de correlación está muy próximo a 1 y el valor pedido no está alejado del resto de valores de *X*.

**AMPLIACIÓN**

**15.40 Se ha medido experimentalmente el área de distintos triángulos equiláteros de lados 1, 2, 3 decímetros, sucesivamente, y se han obtenido los siguientes resultados.**

| (Lado)$^2$ | 2 | 4 | 9 | 16 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| Área | 0,42 | 1,65 | 3,7 | 6,5 | 10,2 |

**a) Calcula el coeficiente de correlación lineal entre el cuadrado del lado y el área del triángulo. ¿Qué tipo de correlación existe?**

**b) ¿Debería haber una relación funcional? ¿A qué se debe que la relación no llegue a ser funcional?**

a) La correlación es positiva y fuerte. Veámoslo:

$r = \dfrac{s_{XY}}{s_X s_Y}$ $\qquad \bar{x} = 11$ $\qquad \bar{y} = 4,5$

$$s_{XY} = \frac{0,84 + 6,6 + 33,3 + 104 + 255}{5} - 11 \cdot 4,5 = 30,4$$

$$s_X = \sqrt{\frac{4 + 16 + 81 + 256 + 625}{5} - 11^2} = 8,7$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{0,18 + 2,72 + 13,7 + 42,25 + 104,04}{5} - 4,5^2} = 3,5$$

$r = \dfrac{30,4}{8,7 \cdot 3,5} = 0,99 \Rightarrow$ La correlación es positiva y fuerte.

b) Sí debería haber relación funcional, pero el coeficiente de correlación no es 1 debido al redondeo que se hace al medir experimentalmente.

**15.41 Una variable bidimensional viene dada por la siguiente tabla.**

| **X** | **2** | **3** | **5** | ***a*** |
|---|---|---|---|---|
| **Y** | **1** | **25** | ***b*** | **3** |

**Sabiendo que $s_{XY} = 1$ y $s_X^2 = 3$ y que *a* es el valor máximo de la variable *X*, calcula *a* y *b*.**

Planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1 = s_{XY} \Rightarrow 1 = \dfrac{2 + 75 + 5b + 3a}{4} - \left(\dfrac{10 + a}{4}\right) \cdot \left(\dfrac{29 + b}{4}\right) \\ 3 = s_X^2 \Rightarrow 3 = \dfrac{4 + 9 + 25 + a^2}{4} - \left(\dfrac{10 + a}{4}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(5b + 9) - a(b + 17) = 16 \\ 3a^2 - 20a + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6{,}4603 \Rightarrow b = 30{,}46 \\ a = 0{,}2064 \Rightarrow b = 0{,}1538 \end{cases}$$

Como nos dicen que *a* es el valor máximo de la variable *X*, la única solución válida es $a = 6{,}4603$ y $b = 30{,}46$.

**15.42 En una variable bidimensional (*X*, *Y*), su coeficiente de correlación lineal es 0,48 y la pendiente de su recta de regresión es 1,34.**

**Sabiendo que la suma de las desviaciones típicas de *X* e *Y* es 7,33, calcula cada una de ellas y la covarianza de la variable bidimensional.**

$$r = 0{,}48 = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

$$m = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = 1{,}34$$

$$s_X + s_Y = 7{,}33$$

$$\begin{cases} \dfrac{s_{XY}}{s_X s_Y} = 0{,}48 \\ \dfrac{s_{XY}}{s_X^2} = 1{,}34 \\ s_X + s_Y = 7{,}33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{XY} = 0{,}48 \cdot s_X s_Y \\ s_{XY} = 1{,}34 \cdot s_X^2 \\ s_Y = 7{,}33 - s_X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}48 \cdot s_X \cdot (7{,}33 - s_X) = 1{,}34 \cdot s_X^2 \\ 3{,}52 \cdot s_X - 0{,}48 \cdot s_X^2 = 1{,}34 \cdot s_X^2 \\ 1{,}82 \cdot s_X^2 - 3{,}52 \cdot s_X = 0 \Rightarrow s_X = \dfrac{3{,}52}{1{,}82} = 1{,}93 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_Y = 7{,}33 - 1{,}93 = 5{,}4 \Rightarrow s_{XY} = 1{,}34 \cdot s_X^2 = 5$$

**15.43 Encuentra la recta de regresión de la variable (*X*, *Y*) sabiendo que es paralela a la recta**

$$\mathbf{2x - 4y = -17}$$

**y que su centro de masas es un punto que comparte con las rectas:**

$$\mathbf{x + 3y = 19} \qquad \mathbf{4x - y = 2}$$

La recta de regresión es paralela a $2x - 4y = -17$; por tanto, tienen la misma pendiente: $m = \dfrac{1}{2}$.

$$(\overline{x}, \overline{y}) \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 19 \\ 4x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 19 \\ 12x - 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow 13x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{13} = 1{,}9 \Rightarrow y = 5{,}6$$

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (1{,}9;\ 5{,}6)$$

La recta de regresión es: $y - 5{,}6 = \dfrac{1}{2} \cdot (x - 1{,}9)$.

**15.44 Una variable bidimensional ($X$, $Y$) tiene de coeficiente de correlación $r = 0{,}78$, y las medias de las distribuciones marginales son $\bar{x} = 2$ e $\bar{y} = 9$. Razona cuál de las siguientes rectas se ajusta más a dicha variable.**

$$y = -3x + 12 \qquad y = 1{,}5x + 6 \qquad y = -2{,}5x + 14$$

Descartamos la recta $y = -3x + 12$ porque el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ no pertenece a ella.

Descartamos también la recta $y = -2{,}5x + 14$, pues el coeficiente de correlación es $r = 0{,}78$, que es número positivo.

Por tanto, la recta que más se ajusta a dicha variable es $y = 1{,}5x + 6$.

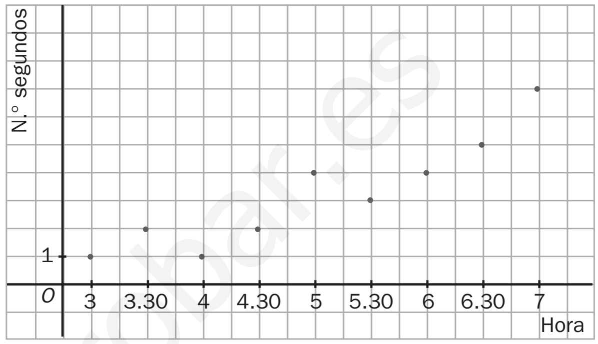
## PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

**15.45 La página del instituto**

**Juan se ha molestado en observar los segundos que ha tardado en acceder a la página web de su instituto en diferentes momentos del día.**

**El siguiente gráfico de dispersión muestra los tiempos empleados en nueve momentos comprendidos entre las tres y las siete de la tarde.**

**Indica cuál de las siguientes opciones (en las que se incluyen la recta de regresión, el coeficiente de correlación y el tiempo esperado cuando se conecta a las 7.30) se corresponde con los datos.**




| *A* | *B* | *C* |
|---|---|---|
| $y = 3{,}45x - 1{,}35$ | $y = 1{,}35x - 3{,}45$ | $y = x - 3$ |
| $r = 0{,}90$ | $r = 0{,}92$ | $r = -0{,}92$ |
| $x = 7{,}5 \Rightarrow y = 7$ | $x = 7{,}5 \Rightarrow y = 6{,}6$ | $x = 7{,}5 \Rightarrow y = 6$ |

La opción que se corresponde con los datos es la *B*.

**15.46 Diferentes rectas**

**La tabla siguiente muestra el crecimiento de los beneficios obtenidos por una empresa en cada uno de los ocho trimestres de los últimos dos años.**

| **Primer año** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Trimestre** | **1.°** | **2.°** | **3.°** | **4.°** |
| **Beneficios (%)** | **7** | **6** | **7** | **5** |

| **Segundo año** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Trimestre** | **1.°** | **2.°** | **3.°** | **4.°** |
| **Beneficios (%)** | **6** | **4** | **3** | **2** |

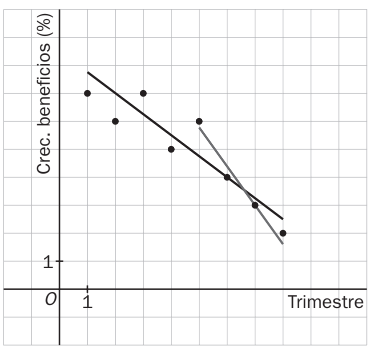
**a) Representa los datos en un diagrama de dispersión.**

**b) Calcula y dibuja la recta de regresión considerando los ocho pares de datos. ¿Qué crecimiento se estima para el primer trimestre del tercer año?**

**c) Calcula y dibuja la recta de regresión considerando únicamente los datos correspondientes al segundo año. ¿Qué crecimiento se estima para el primer trimestre del tercer año?**

**d) Indica alguna ventaja y algún inconveniente al utilizar la segunda recta en vez de la primera para realizar la estimación solicitada.**

a) y b)




Se numeran los trimestres de forma correlativa: 1, 2, 3… 8

Considerando $x$ como el trimestre e $y$ como el crecimiento del beneficio, se obtiene la recta de regresión $y = -0{,}69x + 8{,}1$.

Así pues, para el primer trimestre del tercer año se espera un crecimiento de $-0{,}69 \cdot 9 + 8{,}1 = 1{,}89\,\%$.

c) Si se consideran solo los datos del segundo año, se obtiene la recta $y = -1{,}3x + 12{,}2$. Así, para el primer trimestre del tercer año se espera un crecimiento de $-1{,}3 \cdot 9 + 12{,}2 = 0{,}5\,\%$.

d) Se utilizan datos más cercanos en el tiempo, pero en menor cantidad.

**15.A1 Sea la siguiente tabla simple de una variable bidimensional.**

| $X$ | −4 | −1 | 0 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 9 | 7 | 6 | 4 | 4 | 2 | 1 | 3 |

**a) Elabora una tabla de doble entrada.**

**b) Dibuja su nube de puntos.**

**c) Elige el coeficiente de correlación que crees que se puede ajustar más a la nube y justifica la respuesta.**

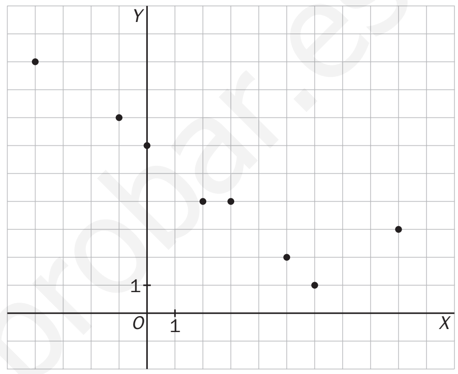
$$r = 0{,}95 \qquad r = -1{,}2 \qquad r = -0{,}25 \qquad r = -0{,}85$$

**d) Calcula $r$ y contrasta tu suposición.**

a)

| $Y$ \ $X$ | −4 | −1 | 0 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | 1 | |
| 2 | | | | | | 1 | | |
| 3 | | | | | | | | 1 |
| 4 | | | | 1 | 1 | | | |
| 6 | | | 1 | | | | | |
| 7 | | 1 | | | | | | |
| 9 | 1 | | | | | | | |

b)




c) $r = -0{,}85$, al tener una correlación fuerte y negativa (decreciente).

d) $r = \dfrac{s_{XY}}{s_X s_Y}$

$\overline{x} = 2{,}5$

$\overline{y} = 4{,}5$

$$s_{XY} = \frac{-36 - 7 + 8 + 12 + 10 + 6 + 27}{8} - 2{,}5 \cdot 4{,}5 = 2{,}5 - 11{,}25 = -8{,}75$$

$$s_X = \sqrt{\frac{16 + 1 + 4 + 9 + 25 + 36 + 81}{8} - 2{,}5^2} = \sqrt{21{,}5 - 6{,}25} = 3{,}9$$

$$s_Y = \sqrt{26{,}5 - 20{,}25} = 2{,}5$$

$$r = \frac{-8{,}75}{3{,}9 \cdot 2{,}5} = \frac{-8{,}75}{9{,}75} = -0{,}89$$

**15.A2 Relaciona en tu cuaderno cada coeficiente de correlación con el tipo de correlación.**

**a) $r = -1$**
**b) $r = 0{,}95$**
**c) $r = 0{,}26$**
**d) $r = -0{,}89$**
**e) $r = -0{,}62$**

**I. Correlación positiva fuerte**
**II. Independientes**
**III. Dependencia funcional**
**IV. Correlación negativa débil**
**V. Correlación negativa fuerte**

$r = -1$ ⟶ Dependencia funcional
$r = 0{,}95$ ⟶ Correlación positiva fuerte
$r = 0{,}26$ ⟶ Independientes
$r = -0{,}89$ ⟶ Correlación negativa fuerte
$r = -0{,}62$ ⟶ Correlación negativa débil

**15.A3** **En una encuesta realizada a 25 personas, se les ha preguntado su edad y el número de horas de ejercicio que realizan al día. Las respuestas han sido las siguientes.**

**(15, 3); (17; 2,5); (25, 2); (35, 1); (40; 0,5); (45, 1); (50, 1); (60, 2); (65, 3); (16, 4); (20, 2); (25, 2); (32; 1,5); (52; 1,5); (47, 1); (52, 2); (68; 2,5); (16, 4); (24; 2,5); (40, 30); (25, 2); (31; 2,5); (45, 50); (62; 2,5); (15; 3,5).**

**Calcula la recta de regresión.**

Realizamos una tabla de doble entrada.

| Y \ X | 15 | 16 | 17 | 20 | 24 | 25 | 31 | 32 | 35 | 40 | 45 | 47 | 50 | 52 | 60 | 62 | 65 | 68 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **20′** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| **30′** | | | | | | | | | | 2 | | | | | | | | | 2 |
| **50′** | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | 1 |
| **1 h** | | | | | | | | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | | | | | 4 |
| **1,5 h** | | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | | | | | 2 |
| **2 h** | | | | 1 | | 3 | | | | | | | | 1 | 1 | | | | 6 |
| **2,5 h** | | | 1 | | 1 | | 1 | | | | | | | | | 1 | | 1 | 5 |
| **3 h** | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | 2 |
| **3,5 h** | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| **4 h** | | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | 2 |
| **Total** | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 |

La recta de regresión es de la forma:

$$y - \overline{y} = \frac{s_{XY}}{s_X^2}(x - \overline{x})$$

$$\overline{x} = \frac{30 + 32 + 17 + 20 + 24 + 75 + 31 + 32 + 35 + 80 + 90 + 47 + 50 + 104 + 60 + 62 + 65 + 68}{25} = 36{,}88 \text{ años}$$

$$\overline{y} = \frac{60 + 50 + 240 + 180 + 720 + 750 + 360 + 210 + 480}{25} = 122 \text{ min}$$

$$s_{XY} = \frac{103\,200}{25} - 36{,}88 \cdot 122 = -371{,}36$$

$$s_X^2 = \frac{40\,972}{25} - 36{,}88^2 = 278{,}7456$$

$$y - 122 = \frac{-371{,}36}{278{,}7456} \cdot (x - 36{,}88) \Rightarrow y - 122 = -1{,}33(x - 36{,}88) \Rightarrow y = -1{,}33x + 171{,}05$$

**15.A4** **Se ha preguntado a los alumnos de un centro el número de horas de estudio diario, *X*, y el número de asignaturas aprobadas al final del curso, *Y*. A la nube de puntos resultado de la encuesta se ha ajustado la recta de regresión $y = 3{,}8x + 0{,}2$.**

**a) Para aprobar 4 asignaturas, ¿cuánto tiempo de estudio deberían emplear?**

**b) Y para superar las 11 asignaturas, es decir, todas, ¿cuál sería la recomendación de horas de estudio?**

a) Si $y = 4 \Rightarrow 4 = 3{,}8x + 0{,}2 \Rightarrow x = \dfrac{4 - 0{,}2}{3{,}8} = 1$ hora

b) Si $y = 11 \Rightarrow 11 = 3{,}8x + 0{,}2 \Rightarrow x = \dfrac{11 - 0{,}2}{3{,}8} = 2{,}84$ horas (aproximadamente 2 h 50 min)

MATETIEMPOS

## ¿Metros y kilogramos?

**Un profesor ha realizado un estudio sobre la altura y el peso medios de los alumnos de una clase de 4.º de ESO, obteniendo los siguientes valores:**

| Variable | Media | Desviación típica |
|---|---|---|
| Altura (m) | 1,72 | 0,29 |
| Peso (kg) | 65,4 | 4,68 |

**¿Qué varía más, la altura o el peso? ¿Por qué?**

La única forma de comparar las magnitudes es mediante el coeficiente de variación definido como $CV = \frac{s}{\overline{x}}$.

De este modo se eliminan las unidades, y el resultado se expresa en porcentaje de variación que compara el grado de dispersión entre las distribuciones. En nuestro caso:

Altura: $CV_A = \frac{0,29}{1,72} \cdot 100 = 16,86\,\%$

Peso: $CV_P = \frac{4,68}{65,4} \cdot 100 = 7,15\,\%$

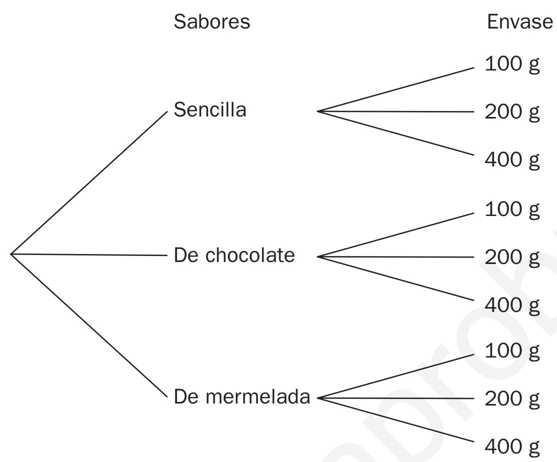
Luego hay más dispersión de valores en la altura que en el peso.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

16.1 **Una pastelería elabora galletas de tres sabores: sencillas, cubiertas de chocolate y rellenas de mermelada, y las envasa en cajas de 100, 200 y 400 gramos. Forma un diagrama en árbol.**

**¿Cuántos productos diferentes se pueden escoger?**

Formamos el diagrama en árbol:

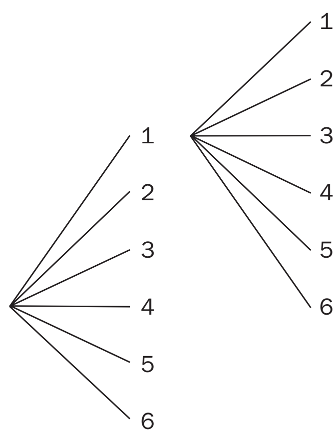



Por tanto, el consumidor puede escoger entre $3 \cdot 3 = 9$ tipos de paquetes de galletas diferentes.

16.2 **Se lanzan al aire 2 dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6 y se anota el resultado de las caras superiores. Forma un diagrama en árbol.**

**¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener? ¿Y si son 3 los dados lanzados?**

Formamos el diagrama en árbol:




Por tanto, se pueden obtener $6 \cdot 6 = 36$ resultados diferentes.

Para el caso de tres dados, el número de resultados diferentes que se pueden obtener es: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

16.3 **Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, ¿cuántos números diferentes de seis cifras se pueden formar sin que se repita ninguna?**

Se podrán formar $P_6 = 6! = 720$ números diferentes.

**16.4 Con las letras de la palabra TEMA, ¿cuántos grupos diferentes de 4 letras puedes escribir sin que se repita ninguna letra? ¿Y si la primera ha de ser la *T*?**

Grupos diferentes de cuatro letras: $P_4 = 4! = 24$.

Grupos diferentes cuya primera letra sea la *T*: $P_3 = 3! = 6$.

**16.5 En una carrera participan 16 caballos y solo se adjudican 3 premios. Suponiendo que no pueden llegar a la meta al mismo tiempo, ¿de cuántas maneras se pueden conceder los premios?**

Como influye el orden, se tiene:

$V_{16,\,3} = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$ formas diferentes de adjudicar los premios.

**16.6 Una asociación ecologista se constituye con 30 socios fundadores. Si tienen que elegir presidente, vicepresidente, secretario y tesorero, ¿de cuántas formas diferentes se pueden cubrir esos cargos?**

$V_{30,\,4} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657\,720$ formas diferentes de cubrir los cargos de la junta directiva.

**16.7 Se lanzan 2 dados cúbicos de diferentes colores con las caras numeradas del 1 al 6.**

**¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Y si son 3 dados?**

Si lanzamos dos dados, obtenemos $VR_{6,\,2} = 6^2 = 36$ resultados distintos.

Si lanzamos tres dados, obtenemos $VR_{6,\,3} = 6^3 = 216$ resultados distintos.

**16.8 Las matrículas de los coches en España están representadas por 4 números seguidos de 3 letras, tomadas de entre 20 consonantes. ¿Cuántos automóviles se podrán matricular con este sistema?**

Formaciones diferentes de los números: $VR_{10,\,4} = 10^4$.

Formaciones diferentes de las letras: $VR_{20,\,3} = 20^3$.

Matrículas diferentes que se pueden formar $= 10^4 \cdot 20^3 = 80\,000\,000$.

**16.9 Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, ¿cuántos productos distintos se pueden realizar multiplicando 4 de ellos que sean diferentes? ¿Y si multiplicamos 5 diferentes?**

Como no influye el orden, resulta:

$C_{9,\,4} = 126$ productos de cuatro cifras diferentes.

$C_{9,\,5} = 126$ productos de cinco cifras diferentes.

**16.10 Mediante caminos, 10 aldeas se encuentran comunicadas de forma que hay uno que une entre sí cada par de pueblos.**

**¿Cuántos caminos diferentes existen?**

Existen $C_{10,\,2} = 45$ caminos diferentes.

**16.11 Calcula el valor de:**

**a)** $\binom{6}{3}$ **b)** $\binom{7}{7}$ **c)** $\binom{49}{31} + \binom{49}{32}$

a) $\binom{6}{3} = \dfrac{6!}{3!\;3!} = 20$ b) $\binom{7}{7} = 1$ c) $\binom{49}{31} + \binom{49}{32} = \binom{50}{32}$

**16.12 Halla el valor de $x (x \neq 6)$ en esta igualdad: $\binom{14}{6} = \binom{14}{x}$**

Por la propiedad 2 de los números combinatorios:

$$\binom{14}{6} = \binom{14}{x} \Rightarrow x + 6 = 14 \Rightarrow x = 8$$

**16.13 Desarrolla estas potencias.**

**a) $(a^2 + 2b)^3$**

**b) $(a^2 + 2b)^5$**

a) $(a + 2b)^3 = a^3 + 6\,a^2b + 12\,ab^2 + 8b^3$

b) $(a + 2b)^5 = a^5 + 10\,a^4b + 40\,a^3b^2 + 80\,a^2b^3 + 80\,ab^4 + 32\,b^5$

**16.14 Desarrolla las siguientes potencias.**

**a) $(3x - 2y)^4$**

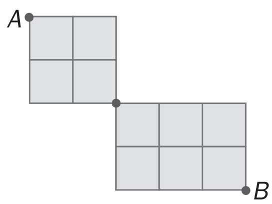
**b) $(3x - 2y)^6$**

a) $(3x - 2y)^4 = 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4$

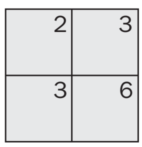
b) $(3x - 2y)^6 = 729x^6 - 2916x^5y + 4860x^4y^2 - 4320x^3y^3 + 2160x^2y^4 - 576xy^5 + 64\,y^6$

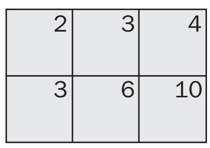
## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**16.15 ¿Cuántos caminos diferentes llevan de *A* a *B* en la siguiente figura si solo se puede caminar de izquierda a derecha y de arriba abajo?**




Colocamos el número de caminos sobre cada punto del diagrama:



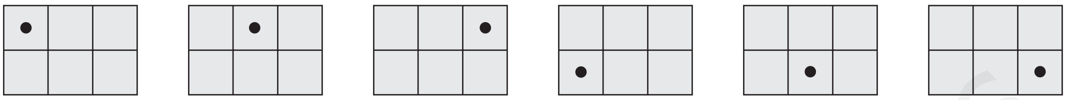

De *A* a *C* hay 60 caminos diferentes. De *C* a *B* hay 20 caminos diferentes.

Por tanto, de *A* a *B* hay $6 \cdot 20 = 120$ caminos diferentes.

**16.16 Considera el rectángulo formado por 6 cuadrados de la figura. ¿Cuántas maneras hay en total de colocar sobre él 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 puntos en relieve? (Siempre a lo sumo un punto en cada cuadrado.)**

Si no se coloca ningún punto sobre la figura, solo habrá una forma.

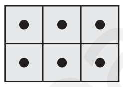
Las formas de colocar un punto pueden ser 6 del siguiente modo:



De lo anterior vemos que:

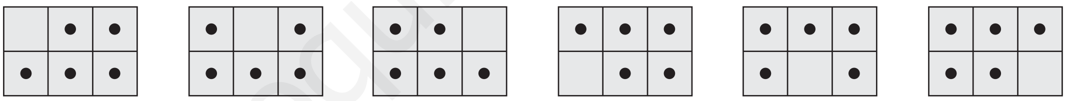
| N.º de puntos colocados | Formas posibles |
|---|---|
| 0 | $1 = C_{6,\,0}$ |
| 1 | $6 = C_{6,\,1}$ |

De forma simétrica a la anterior, por ejemplo, ¿de cuántas formas se pueden colocar 6 puntos? Existe una única forma:



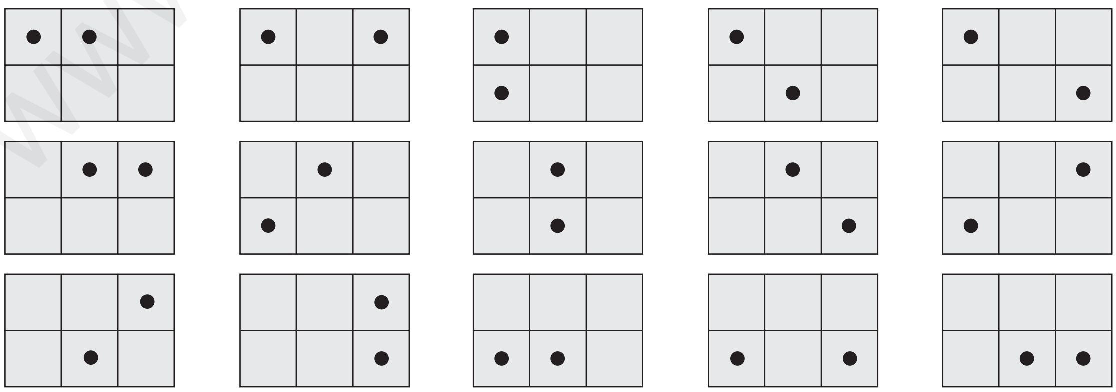
$C_{6,\,6} = 1$

¿Y cinco puntos? Habrá 6 formas del siguiente modo:



Es decir, $C_{6,\,5} = 6$

Así pues, veamos de cuántas formas se pueden colocar 2 puntos en la figura:



Es decir, $15 = C_{6,\,2}$

De forma simétrica, 4 puntos se podrán colocar de $C_{6,\,4} = 15$ formas diferentes.

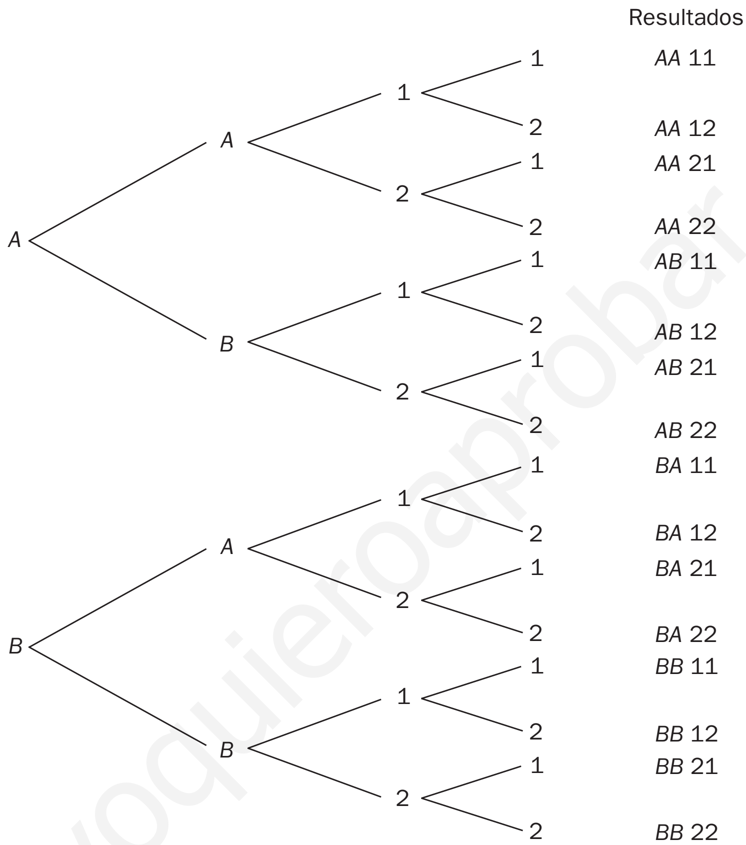
Y por último, 3 puntos se pueden colocar de $C_{6,\,3} = 20$ formas diferentes.

Por tanto, el número total será: $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

## Diagrama en árbol. Recuento

**16.17 El código de un candado consta de 2 letras (*A* y *B*) y de 2 números (1 y 2). Realiza el diagrama en árbol y calcula el número de códigos posibles.**




Número de código posibles: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

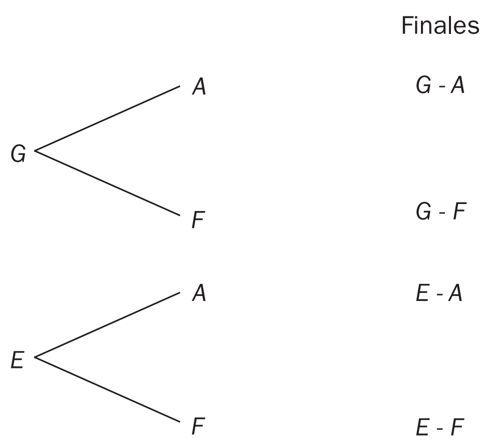
**16.18 Los partidos de semifinales de una competición europea de baloncesto son Grecia-España y Alemania-Francia. Dibuja el diagrama en árbol correspondiente a las posibles finales.**

Grecia ≡ *G*

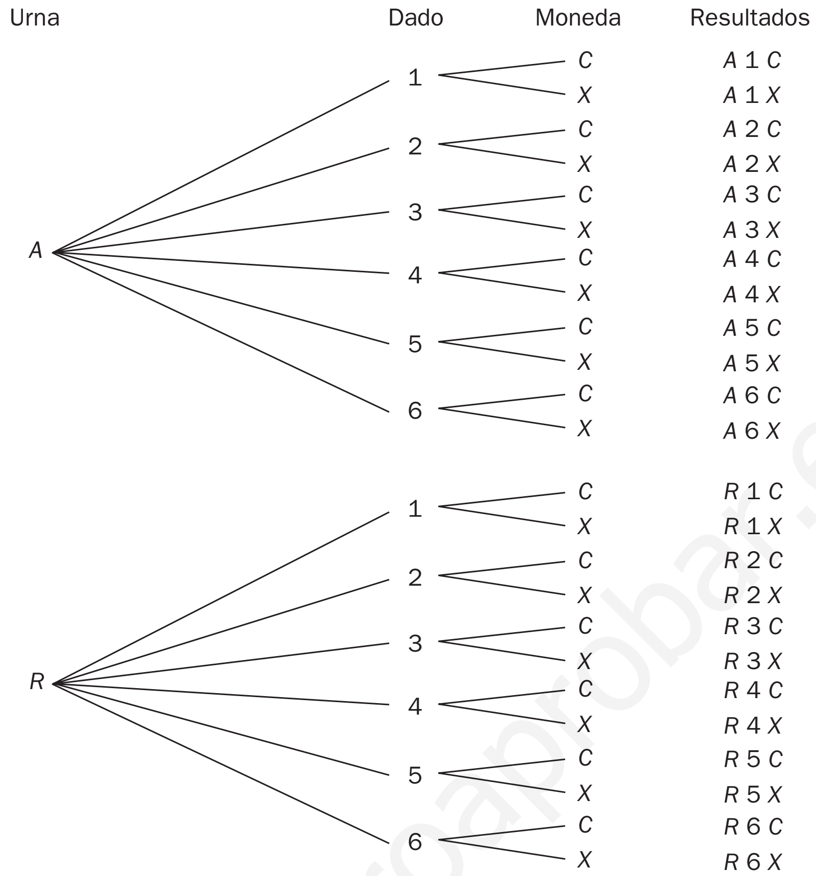
España ≡ *E*

Alemania ≡ *A*

Francia ≡ *F*



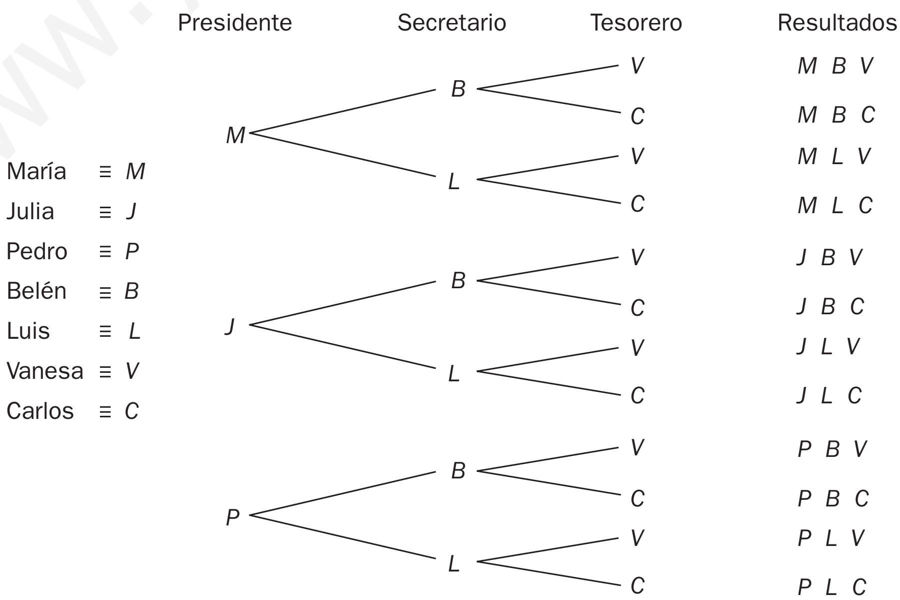
**16.19** **Utilizando un diagrama en árbol, calcula el número de resultados posibles al extraer una bola de una urna que contiene una azul y otra roja, y a la vez que se lanza un dado cúbico y una moneda.**




Número de resultados posibles: $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$

**16.20** **Una ONG quiere escoger una nueva junta directiva. Al cargo de presidente optan 3 personas: María, Julia y Pedro; al de secretario, 2: Belén y Luis, y al de tesorero, otras 2: Vanesa y Carlos.**

**Representa en un diagrama en árbol todas las posibilidades de elección.**




Número de elecciones posibles: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

**16.21 Halla el valor de $x$ en estas igualdades.**

**a)** $3V_{x,2} = 10C_{x-1,2}$

**b)** $5V_{x,3} = V_{x+2,3}$

**c)** $P_x = 30P_{x-2}$

**d)** $2C_{x,2} = V_{x,2}$

a) $3 \cdot \dfrac{x!}{(x-2)!} = \dfrac{10}{2!} \cdot \dfrac{(x-1)!}{(x-3)!} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

b) $5 \cdot \dfrac{x!}{(x-3)!} = \dfrac{(x+2)!}{(x-1)!} \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

c) $x! = 30\,(x-2)! \Leftrightarrow x^2 - x - 30 = 0 \Rightarrow x = 6$

d) $2 \cdot \dfrac{x!}{2!\,(x-2)!} = \dfrac{x!}{(x-2)!} \Rightarrow 1 = 1$

Es cierta para todo número natural.

**16.22 Un chico coloca cada día los libros de texto en su estantería al llegar a casa. En ella dispone los 6 libros que utiliza con mayor frecuencia. ¿Cuántas ordenaciones distintas puede realizar?**

Número de ordenaciones distintas: $P_6 = 6! = 720$

**16.23 Con las letras de la palabra FLAMENCO, ¿cuántos grupos diferentes de 8 letras se pueden formar?**

Grupos diferentes de 8 letras: $P_8 = 8! = 40\,320$

**16.24 La comida básica de un poblado está basada en el arroz, las judías, el maíz y la patata.**

**¿Cuántos platos distintos pueden realizar mezclando 3 alimentos a la vez?**

Número de platos distintos: $C_{4,3} = \dfrac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$

**16.25 En un juego de azar se eligen 6 números del 1 al 49, ambos inclusive.**

**¿Cuántas jugadas distintas pueden efectuarse?**

Número de jugadas distintas: $C_{49,6} = \dfrac{49!}{6! \cdot 43!} = 13\,983\,816$

**16.26 En un juego de cartas, una mano está compuesta por 4 naipes.**

**¿Cuántas manos distintas se pueden formar con una baraja española (40 cartas)?**

Número de manos distintas: $C_{40,4} = \dfrac{40!}{4! \cdot 36!} = 91\,390$

**16.27 En una clase de 4.º de ESO se realiza la elección del delegado y del subdelegado entre 5 alumnos.**

**a) ¿Cuántos resultados posibles existen?**

**b) Si Juan Gómez es uno de los candidatos, ¿en cuántos de los resultados anteriores es elegido como subdelegado?**

a) Resultados posibles: $V_{5,\,2} = 5 \cdot 4 = 20$

b) Juan Gómez sería subdelegado con 4 posibles delegados; por tanto, estaría en 4 elecciones.

**16.28 En un juego de mesa se utilizan 15 tarjetas de 3 colores distintos.**

**Si cada uno de los chicos coge 3 tarjetas, ¿cuántas posibilidades hay de que los dos tengan la misma combinación?**

Número de posibilidades de que los chicos tengan la misma combinación: $P_3 = 3! = 6$

**16.29 Los alumnos del último curso de un centro escolar desean formar una comisión con 3 alumnas y 2 alumnos para organizar el viaje de fin de curso. El número total de alumnas es de 25 y el de alumnos es de 20.**

**¿De cuántas formas distintas pueden completar dicha comisión?**

Formas de completar la comisión: $C_{25,\,3} \cdot C_{20,\,2} = \binom{25}{3} \cdot \binom{20}{2} = \dfrac{25!}{22! \cdot 3!} \cdot \dfrac{20!}{18! \cdot 2!} = 437\,000$

**16.30 Con las letras de la palabra EUROPA, ¿cuántos grupos de 4 letras se pueden formar? ¿Cuántos de ellos acaban en vocal?**

Se pueden formar en total: $V_{6,\,4} = 360$ grupos de 4 letras.

En vocal acaban: $4 \cdot V_{5,\,3} = 240$ grupos.

**16.31 La mesa de un colegio electoral se halla compuesta por el presidente, el vicepresidente, dos vocales y dos interventores.**

**¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse si el presidente y el vicepresidente han de situarse juntos?**

El presidente y el vicepresidente pueden sentarse juntos de 10 formas diferentes.

En total, tendremos $10 \cdot 4! = 240$ maneras distintas de sentarse.

**16.32 Fayna dispone de 5 faldas, 4 camisetas y 3 pares de zapatos.**

**¿Cuántas posibilidades tiene para elegir el conjunto que vestirá mañana? ¿En cuántas de ellas no intervienen ni el rojo ni el negro?**

Posibilidades para elegir el conjunto que vestirá: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Posibilidades en las que no intervienen ni el rojo ni el negro: $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$

## Números combinatorios

**16.33 Calcula el valor de $\binom{15}{8} + \binom{15}{9}$ de dos formas distintas: utilizando la fórmula de obtención de los números combinatorios y usando las propiedades de dichos números.**

$$\frac{15!}{8! \cdot 7!} + \frac{15!}{9! \cdot 6!} = 6435 + 5005 = 11\,440$$

$$\binom{15}{8} + \binom{15}{9} = \binom{16}{9} = \frac{16!}{9! \cdot 7!} = 11\,440$$

**16.34 Determina el valor de estos números combinatorios.**

**a)** $\binom{8000}{0}$

**b)** $\binom{10\,000}{9999}$

**c)** $\binom{5252}{5252}$

**d)** $\binom{10^{10}}{1}$

a) 1

b) 10 000

c) 1

d) $10^{10}$

**16.35 Halla el valor de *x* en estas igualdades.**

**a)** $\binom{52}{6} = \binom{52}{x}$

**b)** $\binom{x}{14} = \binom{x}{32}$

a) $\binom{52}{6} = \binom{52}{x} \Rightarrow x = 52 - 6 = 46$

b) $\binom{x}{14} = \binom{x}{32} \Rightarrow x = 32 + 14 = 46$

## Binomio de Newton

**16.36 Desarrolla las siguientes potencias.**

**a)** $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^5$

**b)** $(2a - b)^6$

**c)** $\left(3x + \dfrac{2}{x}\right)^4$

**d)** $(y^2 - 2z^3)^3$

a) $1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{10}{x^2} - \dfrac{10}{x^3} + \dfrac{5}{x^4} - \dfrac{1}{x^5}$

b) $64a^6 - 192a^5b + 240a^4b^2 - 160a^3b^3 + 60a^2b^4 - 12ab^5 + b^6$

c) $81x^4 + 216x^2 + 216 + \dfrac{96}{x^2} + \dfrac{16}{x^4}$

d) $y^6 - 6y^4z^3 + 12y^2z^6 - 8z^9$

**16.37 Sin realizar todo el desarrollo, halla:**

**a) El término situado en quinto lugar en el desarrollo del binomio $(x + 4y)^{16}$.**

**b) El término colocado en octava posición en el desarrollo del binomio $(a - 3b)^{14}$.**

a) $\dbinom{16}{4}x^{12}\,(4y)^4 = 465\,920x^{12}y^4$

b) $\dbinom{14}{7}a^7\,(-3b)^7 = -7\,505\,784a^7b^7$

**16.38 En el desarrollo de este binomio de Newton: $\left(5x - \dfrac{y}{4}\right)^9$**

**Averigua sin desarrollarlo:**

**a) El coeficiente del monomio $x^2y^7$.**

**b) El coeficiente del monomio $x^5y^4$.**

**c) Los coeficientes de los monomios que solo tienen $x$ o $y$.**

a) $\dbinom{9}{7}(5x)^2\left(\dfrac{-y}{4}\right)^7 = \dfrac{-225}{4096}x^2y^7 \Rightarrow \text{Coeficiente} = \dfrac{-225}{4096}$

b) $\dbinom{9}{4}(5x)^5\left(\dfrac{-y}{4}\right)^4 = \dfrac{196\,875}{128}x^5y^4 \Rightarrow \text{Coeficiente} = \dfrac{196\,875}{128}$

c) $\dbinom{9}{0}(5x)^9 = 1\,953\,125x^9 \Rightarrow \text{Coeficiente} = 1\,953\,125$

$\dbinom{9}{9}\left(\dfrac{-y}{4}\right)^9 = \dfrac{-1}{262\,144}y^9 \Rightarrow \text{Coeficiente} = \dfrac{-1}{262\,144}$

**16.39 Con estos símbolos: # @ & $**

**Forma todos los grupos posibles del siguiente tipo: ###&&$ @@#&$$ &&&$@&**

**Utiliza un diagrama en árbol y realiza el recuento de resultados.**

Se pueden formar todos los grupos de 6 elementos con 4 integrantes distintos, es decir, los grupos correspondientes a las $VR_{4,6} = 4096$.

**16.40 ¿De qué forma se obtienen más grupos diferentes de 4 letras distintas: permutando las de la palabra CANOA o las de la palabra LIBRO? ¿Por qué?**

Permutando las letras de la palabra LIBRO, ya que todas sus letras son distintas, y las $P_5$ palabras posibles son todas diferentes. La palabra CANOA, sin embargo, tiene dos letras iguales que generan palabras repetidas.

**16.41 ¿Por qué 7! es múltiplo de 2, 3 y 5 a la vez?**

$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow 7!$ es múltiplo de 2, 3 y 5 a la vez porque tiene estos tres números entre sus factores.

**16.42 Si $9! = 362\,880$, calcula de forma inmediata el valor de 10! ¿Existe una relación entre $n!$ y $(n + 1)!$?**

$10! = 10 \cdot 9! = 3\,628\,800$

Relación entre $n!$ y $(n + 1)!$ : $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$

**16.43 Si $x! = 479\,001\,600$ y $(x - 1)! = 43\,545\,600$, halla el valor de $x$.**

$$11 = \frac{479\,001\,600}{43\,545\,600} = \frac{x}{(x-1)!} = \frac{x(x-1)!}{(x-1)!} = x \Rightarrow x = 11$$

**16.44 ¿Tiene sentido calcular el número de variaciones de 3 elementos tomados de 5 en 5? Razona tu respuesta.**

No, ya que es imposible formar grupos de 5 miembros con tan solo 3 integrantes si no se pueden repetir.

**16.45 Con los dígitos 3, 5 y 9 se forman todos los números posibles de 4 cifras. ¿Cómo hallamos el número de resultados, con $VR_{3,4}$ o con $V_{4,3}$?**

Con $VR_{3,4}$, pues no queda más remedio que haya repetición, al ser mayor el número de cifras del número que los dígitos disponibles.

**16.46 Relaciona en tu cuaderno las operaciones de la columna de la izquierda con la herramienta combinatoria correspondiente de la derecha.**

| | |
|---|---|
| $\mathbf{7^4}$ | $\boldsymbol{P_7}$ |
| $\mathbf{\dfrac{7!}{4!3!}}$ | $\boldsymbol{VR_{7,4}}$ |
| **7!** | $\boldsymbol{V_{7,4}}$ |
| $\mathbf{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}$ | $\mathbf{C_{7,4}}$ |

$7^4 = VR_{7,4}$ $\quad \dfrac{7!}{4!3!} = C_{7,4}$ $\quad 7! = P_7$ $\quad 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = V_{7,4}$

**16.47** **Calcula:**

**a)** $V_{5,\,5}$

**b)** $P_5$

**c)** $P_8$

**d)** $V_{8,\,8}$

**¿Qué observas? ¿Cuál es la relación entre las variaciones de *n* elementos tomados de *n* en *n* y las permutaciones de *n* elementos?**

a) $V_{5,\,5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) $P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

d) $V_{8,\,8} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

Se observa que $V_{5,\,5} = P_5$ y que $P_8 = V_{8,\,8}$. Se deduce, pues, que, en general, $V_{n,\,n} = P_n$ .

**16.48** **Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.**

**a) En las variaciones con repetición no importa el orden.**

**b) En las variaciones sin repetición sí importa el orden.**

**c) En las permutaciones importa el orden.**

**d) En las combinaciones importa el orden.**

a) Falso.
b) Verdadero.
c) Verdadero.
d) Falso.

**16.49** **Indica qué otro número combinatorio de la misma fila del triángulo de Pascal vale lo mismo que:**

**a)** $\binom{15}{0}$

**b)** $\binom{15}{2}$

a) $\binom{15}{15}$, ya que $15 + 0 = 15$

b) $\binom{15}{13}$, ya que $13 + 2 = 15$

## PROBLEMAS PARA APLICAR

**16.50** **Una persona ha olvidado su clave de la tarjeta de crédito. Sólo recuerda que empieza por 9 y que es un número par.**

**¿Qué posibilidad tiene de encontrarla sabiendo que las claves son de 4 cifras con posible repetición?**

Las posibilidades en cada cifra son las siguientes: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$.

**16.51** **En un intercambio cultural participan 24 alumnos. El monitor responsable desea distribuirlos por parejas para completar los asientos del autobús que van a utilizar en los desplazamientos.**

**a) ¿De cuántas formas puede realizarlo?**

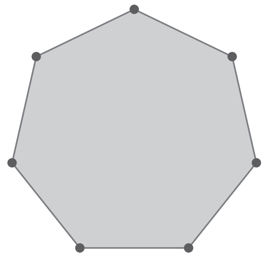
**b) Si hay 8 alumnos del mismo país, ¿en cuántas disposiciones estos 8 alumnos no están emparejados entre ellos?**

a) En total hay $C_{24,\,2} = 276$ agrupamientos posibles.

b) En $C_{8,\,2} = 28$ de esos agrupamientos están los alumnos del mismo país juntos.

Por tanto, en $276 - 28 = 248$ los alumnos del mismo país están mezclados con el resto.

**16.52** **Uniendo 5 vértices de un heptágono se obtiene un pentágono.**



**¿Cuántos pentágonos distintos se pueden conseguir siguiendo este procedimiento?**

Número de pentágonos: $C_{7,\,5} = \dfrac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$

**16.53** **Los números escritos en base ocho solo permiten el uso de las cifras del 0 al 7.**

**¿Cuántos números de 4 cifras escritos en dicha base tienen todas las cifras distintas?**

Números de 4 cifras: $V_{8,\,4} = \dfrac{8!}{4!} = 1680$

**16.54** **Un equipo de balonmano está formado por seis jugadores de campo y por un portero. Si un entrenador dispone de 12 jugadores de campo y de 2 porteros, ¿cuántas alineaciones distintas puede completar?**

Número de alineaciones distintas: $2 \cdot C_{12,\,6} = 2 \cdot \dfrac{12!}{6! \cdot 6!} = 1848$

**16.55** **La contraseña de acceso a la cuenta de cierto correo electrónico está formada por 8 caracteres: los 5 primeros son dígitos del 1 al 9, y los 3 últimos son vocales.**

**¿Cuántas contraseñas distintas se pueden formar?**

Número de contraseñas distintas: $VR_{9,\,5} \cdot VR_{5,\,3} = 9^5 \cdot 5^3 = 7\,381\,125$

**16.56** **Un programa de ordenador descifra claves secretas en tiempo récord. Una agencia de investigación necesita descubrir un código de 5 dígitos y 3 letras (y en ese orden).**

**Sabiendo que emplea una milésima de segundo en analizar cada código, ¿cuántos días tardará en desvelar el código secreto?**

Número de códigos posibles: $VR_{10,\,5} \cdot VR_{27,\,3} = 10^5 \cdot 27^3 = 1\,968\,300\,000$

El tiempo que se tarda en descifrarlos será igual a:

$1\,968\,300\,000 \cdot 0{,}001 = 1\,968\,300$ seg $= 32\,805$ min $= 546{,}75$ h $= 22{,}8$ días aproximadamente

**16.57** **La codificación de los libros de una biblioteca se establece de la siguiente manera: los 3 primeros dígitos del código hacen referencia a la sección a la que pertenecen; los 2 siguientes, al número de la estantería en la que se encuentran, y los 2 últimos, a la posición que ocupan dentro de dicha estantería.**

**Teniendo en cuenta que se utilizan las cifras del 0 al 9, ¿cuántos libros se pueden codificar?**

Número de libros que se pueden codificar: $VR_{10,\,7} = 10^7 = 10\,000\,000$.

**16.58** **Entre las actividades de fin de curso de un centro se organiza un partido y se premia a quien adivine el resultado del encuentro. Contabiliza todos los tanteos que en principio se pueden producir si se ha decidido imponer un tope de 7 goles por equipo.**

**Si han apostado 4 personas por cada resultado y cada apuesta cuesta un euro, ¿cuánto recibe cada uno de los que ganen?**

Tanteos posibles: $VR_{8,\,2} = 8^2 = 64$ posibles resultados

Dinero recaudado $= 64 \cdot 4 = 256$ €

Por tanto, cada uno de los cuatro ganadores recibirá $256 : 4 = 64$ €.

**16.59** **Con las 27 letras independientes del alfabeto:**

**a) ¿Cuántos grupos de 5 letras distintas se pueden formar?**

**b) ¿Cuántos empiezan y terminan con vocal?**

**c) ¿Cuántos empiezan por consonante y terminan con vocal?**

a) Grupos de 5 letras distintas: $V_{27,\,5} = 9\,687\,600$

b) Grupos que empiezan y terminan con vocal:

$V_{25,\,3}$ (las 3 letras del centro) $\cdot$ $V_{5,\,2}$ (las posibles ordenaciones de las 5 vocales en el inicio y final) $= 276\,000$

c) Grupos que empiezan por consonante y terminan con vocal:

22 (posibles consonantes) $\cdot$ $V_{25,\,3}$ (ordenaciones en puestos del centro de todas las letras menos 2) $\cdot$ 5(posibles vocales al final) $= 1\,518\,000$

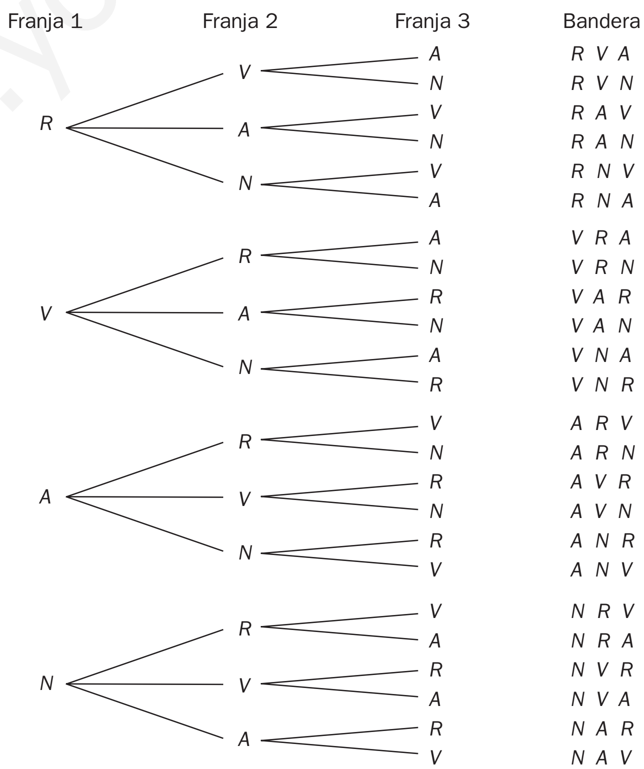


**R E F U E R Z O**

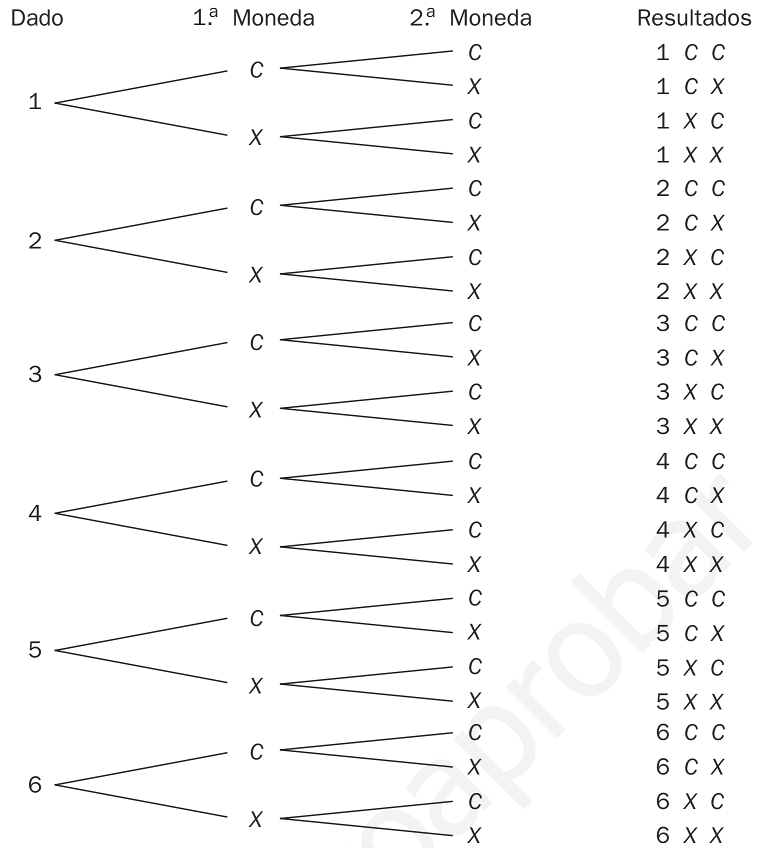
## Diagramas de árbol

**16.60** **Disponemos de los colores rojo, verde, amarillo y negro para formar todas las banderas posibles con 3 franjas verticales.**

**Dibuja un diagrama en árbol que represente todas las banderas resultantes de tal manera que no se repitan colores en la misma bandera.**



**16.61 Dibuja el diagrama en árbol correspondiente a lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6 y dos monedas de un euro.**




## Permutaciones, variaciones y combinaciones

**16.62 ¿De cuántas maneras se pueden sentar 7 amigos que acuden a un concierto de música clásica en una fila de 7 butacas?**

Formas de sentarse: $P_7 = 7! = 5040$

**16.63 Cierta comarca está formada por 15 pueblos, y todos sus ayuntamientos deciden rehabilitar sus carreteras.**

**Si todas las localidades se encuentran comunicadas entre sí, ¿cuántas carreteras deberán rehabilitarse?**

Número de carreteras que se deben rehabilitar: $C_{15,\,2} = \dfrac{15!}{2! \cdot 13!} = 105$

**16.64 En una bolsa hay 8 bolas numeradas del 1 al 8. Extraemos una, anotamos su número y la devolvemos a la bolsa. Repetimos la operación 3 veces.**

**¿Cuántos resultados distintos se pueden dar?**

Número de resultados distintos: $VR_{8,\,3} = 8^3 = 512$

16.65 **Con las cifras 1, 3, 5, 7 y 9:**

**a) ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar?**

**b) ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se pueden conseguir?**

**c) ¿Cuántos productos de 3 factores distintos se pueden realizar?**

Tenemos 5 cifras impares {1, 3, 5, 7, 9}.

a) Números de 3 cifras distintas $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) Números de 5 cifras diferentes: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) Productos de 3 factores distintos: $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$



## Números combinatorios. Binomio de Newton

16.66 **Completa en tu cuaderno los recuadros con el número combinatorio correspondiente.**

**a)** $\binom{8}{5} + \square = \binom{9}{6}$

**b)** $\square + \binom{11}{9} = \binom{12}{9}$

a) $\binom{8}{6}$

b) $\binom{11}{8}$

16.67 **¿Qué número de fila del triángulo de Pascal es la siguiente?**

**1 6 15 20 15 6 1**

Es la fila número 6 del triángulo. La que corresponde a la serie de números combinatorios $\binom{6}{n}$ $0 \leqslant n \leqslant 6$, al tener 7 elementos.

16.68 **Completa en tu cuaderno los recuadros correspondientes en este desarrollo del binomio de Newton.**

$$\left(2a - \frac{1}{a}\right)^3 = \square a^{\square} - \square\, a + \square - \frac{\square}{a^{\square}}$$

$$\left(2a - \frac{1}{a}\right)^3 = 8a^3 - 12a + \frac{6}{a} - \frac{1}{a^3}$$

16.69 **El término 13 del desarrollo de este binomio de Newton es un número natural. $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^{15}$**

**¿De qué número se trata?**

El número natural buscado es: $\binom{15}{12}\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\left(\sqrt{2}\right)^{12} = 87\,360$

**16.70 Con los números del 1 al 6 (ambos inclusive), ¿cuántos números de 3 cifras distintas pueden formarse que sean divisibles por 3?**

Podrán formarse $8 \cdot 3! = 48$ números de 3 cifras distintos.

**16.71 ¿Cuántos números capicúas de 4 cifras existen? ¿Cuántos son pares? ¿Cuántos son múltiplos de 5? ¿Cuántos son menores que 3200?**

Números capicúas de 4 cifras: $VR_{10,\,2} = 10^2 = 100$. Ahora, $100 - 10$ (los que empiezan por 0) $= 90$.

Números capicúas pares: $4 \cdot 10 = 40$

Números capicúas múltiplos de 5 son solo los que terminan por 5. Hay 10 que empiezan o terminan por 5.

Números capicúas menores que 3200 son los que empiezan por 1 (hay 10), los que empiezan por 2 (hay 10) y los que empiezan por 31 (hay 1). En total tendremos 21.

**16.72 De todos los resultados posibles al lanzar 3 dados cúbicos, ¿en cuántos de ellos aparece al menos un 5?**

Todas las posibilidades son: $VR_{6,\,3} = 6^3 = 216$.

(Salir al menos un cinco) $\cup$ (Salir ningún cinco ) = Total.

Salir ningún cinco: $VR_{5,\,3} = 5^3 = 125$.

Salir al menos un cinco: $216 - 125 = 91$.

**16.73 Con las cifras impares 1, 3, 5, 7 y 9:**

**a) ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener al sumar de 3 en 3 las cifras?**

**b) De los números de 5 cifras diferentes que se pueden formar, ¿cuántos son mayores que 70 000?**

**c) ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden conseguir? Averigua la suma de todos ellos.**

a) Número de resultados distintos al sumar de 3 en 3 las cifras $= C_{5,\,3} = 10$.

b) De los números de 5 cifras diferentes que se pueden formar son mayores que 70 000: $2 \cdot P_4 = 48$.

c) Números de 3 cifras distintas $= V_{5,\,3} = 60$

Para calcular la suma de todos ellos:

Al ser números de tres cifras, serán de la forma $\underline{C}\ \underline{D}\ \underline{U}$ (centenas, decenas y unidades).

$\Sigma\, U = V_{4,\,2} \cdot 9 + V_{4,\,2} \cdot 7 + V_{4,\,2} \cdot 5 + \ldots + V_{4,\,2} \cdot 1 = 300$

$\Sigma\, D = 10 \cdot 300 = 3000$

$\Sigma\, C = 100 \cdot 300 = 30\,000$

$\Sigma$ Total $= 33\,300$

**16.74 Determina cuál de las siguientes relaciones es la correcta, siendo $n$ un número natural mayor que 1, y justifica tu respuesta.**

$\boldsymbol{n! < n^n}$ $\qquad$ $\boldsymbol{n! = n^n}$ $\qquad$ $\boldsymbol{n! > n^n}$

La relación correcta es la primera, ya que $n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}_{(n \text{ factores})} < n^n = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{(n \text{ factores})}$

**16.75 Halla todos los valores de $n$ que verifican la siguiente igualdad. $\frac{C_{n+1,\,3}}{C_{n,\,4}} = \frac{6}{5}$**

$$\frac{C_{n+1,\,3}}{C_{n,\,4}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{24(n+1)}{6\,(n-2)\,(n-3)} = \frac{6}{5} \Rightarrow n = 8 \text{ o } n = \frac{1}{3}$$

La solución es $n = 8$, al ser el único número natural.

**16.76 En el triángulo de Pascal suma todos los términos de cada fila y averigua qué tipo de sucesión forman los resultados. Calcula su término general.**

Las sumas de los términos de cada fila son: $S_1 = 2 \quad S_2 = 4 \quad S_3 = 8 \quad S_4 = 16 \ldots$

Se observa que estos sumandos forman una progresión geométrica de razón 2. Su término general es $S_n = 2^n$.

**16.77 Halla los coeficientes desconocidos en este desarrollo del binomio de Newton.**

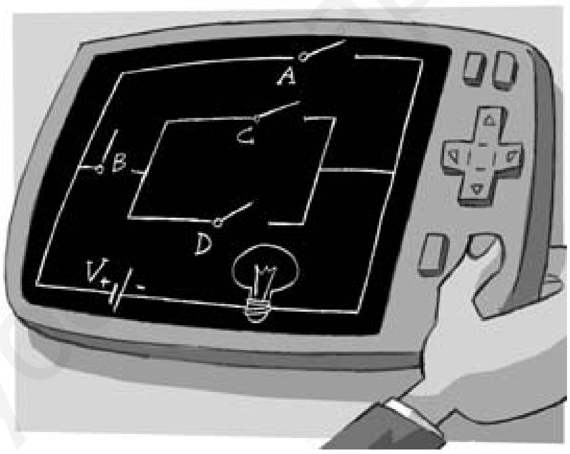
$$\mathbf{(2x^2 - x^3)^5 = x^{10}(ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f)}$$

$$(2x^2 - x^3)^5 = -x^{15} + 10x^{14} - 40x^{13} + 80x^{12} - 80x^{11} + 32x^{10} = x^{10}\,(-x^5 + 10x^4 - 40x^3 + 80x^2 - 80x + 32)$$

## PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

**16.78 El circuito**

**En el circuito eléctrico de la figura, los interruptores pueden estar abiertos (no dejan pasar la corriente) o cerrados (permiten que fluya).**




**Se considera la siguiente notación: [$A$], si el circuito $A$ está cerrado, y ($A$), si se encuentra abierto.**

**a) Indica, en cada uno de los siguientes casos, si la bombilla lucirá o no.**

**1. ($A$) ($B$) [$C$] [$D$]**

**2. [$A$] ($B$) ($C$) ($D$)**

**b) Escribe todas las posibilidades que se pueden dar de circuitos abiertos y cerrados, y especifica en cuántos de ellos lucirá la bombilla y en cuántos no.**

a) En el caso 1, la bombilla no lucirá.

En el caso 2, la bombilla sí lucirá.

b) Las posibilidades son:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ($A$) ($B$) ($C$) ($D$) | no | ($A$) [$B$] ($C$) ($D$) | no | [$A$] ($B$) ($C$) ($D$) | sí | [$A$] [$B$] ($C$) ($D$) | sí |
| ($A$) ($B$) [$C$] ($D$) | no | ($A$) [$B$] [$C$] ($D$) | sí | [$A$] ($B$) [$C$] ($D$) | sí | [$A$] [$B$] [$C$] ($D$) | sí |
| ($A$) ($B$) ($C$) [$D$] | no | ($A$) [$B$] ($C$) [$D$] | sí | [$A$] ($B$) ($C$) [$D$] | sí | [$A$] [$B$] ($C$) [$D$] | sí |
| ($A$) ($B$) [$C$] [$D$] | no | ($A$) [$B$] [$C$] [$D$] | sí | [$A$] ($B$) [$C$] [$D$] | sí | [$A$] [$B$] [$C$] [$D$] | sí |

**16.79 Equipo propio**

**Elena quiere montar un equipo informático. Para ello debe realizar las siguientes actividades.**

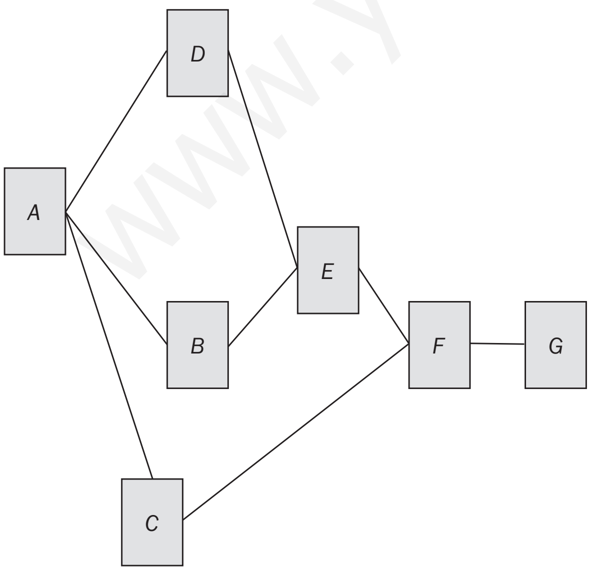
| | |
|---|---|
| ***A*** | **Adquirir los componentes fundamentales: placa base, memoria, disco duro, lector de DVD, etc.** |
| ***B*** | **Disponer los periféricos principales: monitor, teclado, ratón e impresora.** |
| ***C*** | **Comprar el *software* básico.** |
| ***D*** | **Componer la unidad central.** |
| ***E*** | **Conectar los periféricos principales.** |
| ***F*** | **Instalar los programas esenciales.** |
| ***G*** | **Instalar los periféricos principales.** |

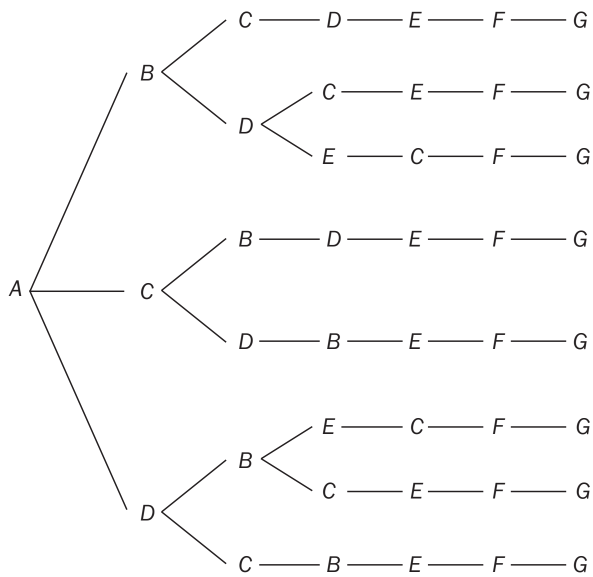
**Para completar el montaje del equipo es necesario establecer un determinado orden y cumplir obligatoriamente las siguientes condiciones.**

- **La primera actividad debe ser la *A*.**
- **Antes de realizar la *E*, deben terminarse la *B* y la *D*.**
- **Es imprescindible completar las actividades *B*, *C*, *D* y *E* antes de ejecutar la *F*.**
- **Antes de desarrollar la actividad *G*, deben quedar terminadas todas las demás.**

**Suponiendo que no se pueden realizar dos actividades a la vez, indica todos los órdenes diferentes en los que se puede completar el montaje. ¿En cuántos se efectúa la actividad *E* antes que la *C*?**

Dibujamos dos diagramas en los que queden reflejados tanto el orden como las condiciones que deben cumplirse para completar el montaje:

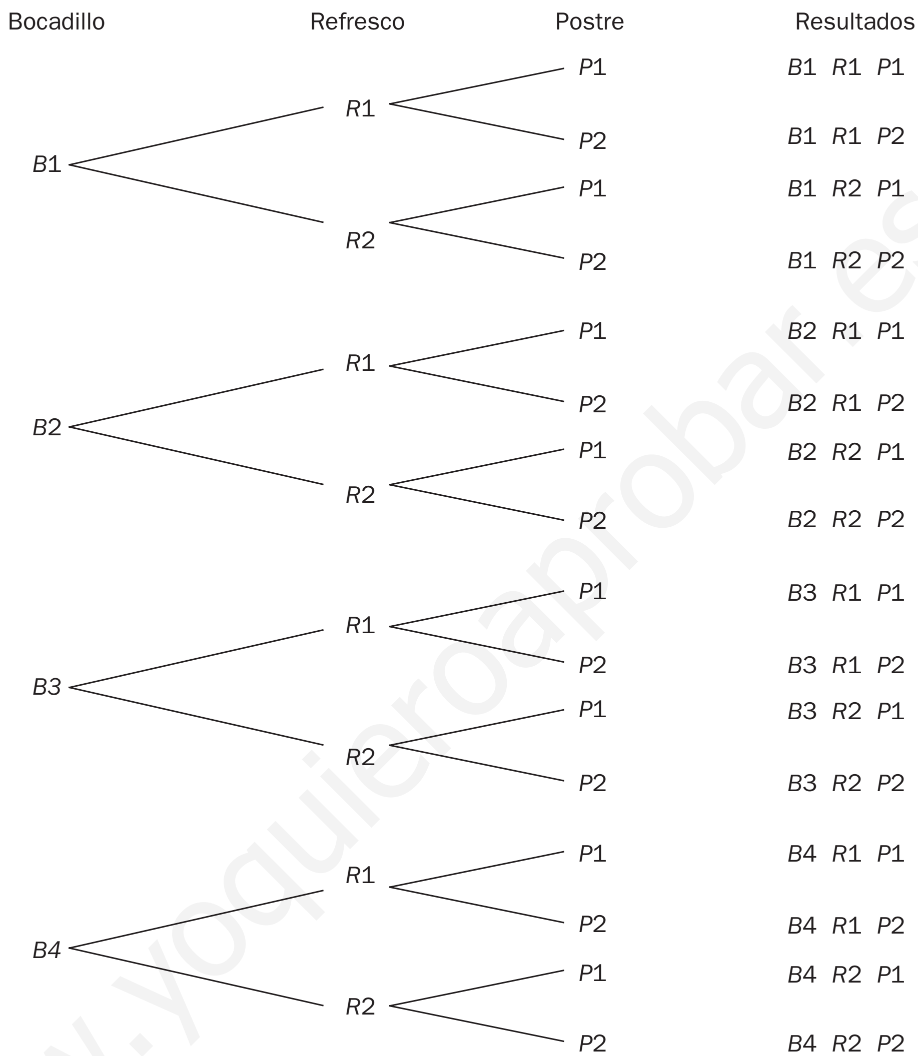



Del segundo diagrama se deduce que se pueden llevar 8 órdenes diferentes.

En dos de ellos se realiza *E* antes que *C*.

**16.A1 Se organiza una fiesta solidaria con el fin de recaudar fondos para el centro de personas mayores del barrio. En dicha fiesta se disponen 4 tipos de bocadillos, 2 clases de refrescos y 2 postres. Dibuja el diagrama en árbol correspondiente a la elección de un bocadillo, un refresco y un postre. ¿Cuántas posibilidades distintas existen?**




Hay $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ posibilidades distintas.



**16.A2 La primera fila del palco presidencial de un estadio de fútbol se halla compuesta de 11 asientos. ¿De cuántas formas pueden completarse con los miembros de los equipos directivos de manera que los dos presidentes se sienten juntos?**

Número de formas de sentarse de modo que los dos presidentes estén juntos: $2 \cdot P_{10} = 2 \cdot 10! = 7\,257\,600$.

**16.A3 Juan quiere irse de viaje el fin de semana, y dispone de 5 camisetas de las cuales desea llevar 3. ¿De cuántas formas distintas puede realizar la elección?**

Número de formas distintas de hacer la elección: $C_{5,\,3} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$.

16.A4 **¿De cuántas formas diferentes se pueden escoger 3 figuras de entre todas las existentes en una baraja española de 40 cartas?**

Número de formas distintas de hacer la elección: $C_{12,\,3} = \dfrac{12!}{3! \cdot 9!} = 220.$

16.A5 **¿Cuántos números de 4 cifras se pueden constituir con los dígitos 2, 4, 6, 8 y 9? ¿Cuántos de ellos son pares? ¿Cuántos se podrían formar sin repetir ningún dígito?**

Números de 4 cifras: $VR_{5,\,4} = 5^4 = 625$

Números pares: $4 \cdot VR_{5,\,3} = 500$

Números con cifras distintas: $V_{5,\,4} = 120$

16.A6 **Calcula el valor de $x$ en estas igualdades.**

**a)** $\boldsymbol{V_{x,4} = 6V_{x,2}}$

**b)** $\boldsymbol{P_x = 20P_{x-2}}$

a) $\dfrac{x!}{(x-4)!} = 6 \cdot \dfrac{x!}{(x-2)!} \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 5$

b) $x! = 20 \cdot (x-2)! \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x = 5$

16.A7 **Halla el valor de $x$ ($x \neq 13$) en esta igualdad.**

$$\boldsymbol{\binom{24}{13} = \binom{24}{x}}$$

$$\binom{24}{13} = \binom{24}{x} \Rightarrow x = 24 - 13 = 11$$

16.A8 **Desarrolla las siguientes potencias.**

**a)** $\boldsymbol{(3a + 5b)^4}$

**b)** $\boldsymbol{(2x - 3y)^5}$

a) $(3a + 5b)^4 = 81a^4 + 540a^3b + 1350a^2b^2 + 1500ab^3 + 625b^4$

b) $(2x - 3y)^5 = 32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5$

## MATETIEMPOS

### Lanzar dados

**Al lanzar dos dados equilibrados, el resultado de sumar sus caras superiores puede ser el mismo de formas distintas. Si se juega con tres dados, el número de formas diferentes en las que aparecen los mismos resultados aumenta. Entonces, ¿por qué al lanzar dos dados se obtiene 9 como resultado con mayor frecuencia que 10, y, al lanzar tres, 10 con mayor frecuencia que 9?**

Si lanzamos dos dados, obtenemos sumas 9 y 10 de dos formas diferentes:

$9 = 3 + 6 = 4 + 5$

$10 = 4 + 6 = 5 + 5$

Pero se han de tener en cuenta todas las permutaciones:

9: $3 + 6$, $6 + 3$, $4 + 5$, $5 + 4$

4 formas diferentes

10: $4 + 6$, $6 + 4$, $5 + 5$

3 formas diferentes

Al lanzar tres dados, la suma de 9 y 10 se puede obtener de 6 formas, pero al contar las permutaciones se tiene:

9:
$1 + 2 + 6 \rightarrow 3! = 6$
$1 + 3 + 5 \rightarrow 3! = 6$
$1 + 4 + 4 \rightarrow 3$
$2 + 2 + 5 \rightarrow 3$
$2 + 3 + 4 \rightarrow 3! = 6$
$3 + 3 + 3 \rightarrow 1! = 1$
25 casos diferentes

10:
$1 + 3 + 6 \rightarrow 3! = 6$
$1 + 4 + 5 \rightarrow 3! = 6$
$2 + 2 + 6 \rightarrow 3$
$2 + 3 + 5 \rightarrow 3! = 6$
$2 + 4 + 4 \rightarrow 3$
$3 + 3 + 4 \rightarrow 3$
27 casos diferentes

Por tanto, con dos dados, de las 36 posibilidades se obtiene suma 9 en 4 casos y suma 10 en 3 casos. Al lanzar 3 dados, de los 216 casos, la suma 9 se obtiene en 25 casos, y la 10, en 27 casos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

**17.1 Se arroja un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6 y se apunta el resultado de la cara superior.**

**a) ¿Es aleatorio este experimento?**

**b) Determina el espacio muestral.**

**c) Forma los sucesos contrarios de $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y $C = \{3\}$.**

a) Sí es aleatorio, ya que por muchas veces que se repita, jamás se puede predecir el resultado que se va a obtener en una próxima experiencia.

b) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) $A = \{2, 4\} \Rightarrow \overline{A} = \{1, 3, 5, 6\}$

$B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow \overline{B} = \{2, 4, 6\}$

$C = \{3\} \Rightarrow \overline{C} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

**17.2 En una urna hay 7 bolas numeradas del 1 al 7. Se extrae una bola al azar y se anota su número.**

**a) Explica si el experimento es aleatorio.**

**b) Determina el espacio muestral.**

**c) Forma dos sucesos compuestos y sus contrarios.**

a) En efecto, es aleatorio ya que por muchas veces que se repita, jamás se puede predecir el resultado que se va a obtener en una próxima experiencia.

b) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

c) $A = \{1, 3\} \Rightarrow \overline{A} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

$B = \{4, 5, 7\} \Rightarrow \overline{B} = \{1, 2, 3, 6\}$

**17.3 Una urna contiene 8 bolas numeradas del 1 al 8. Se extrae una bola al azar y se anota su número. Considera $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{3, 8\}$ y $C = \{1, 2, 5, 7\}$.**

**Halla los siguientes sucesos.**

| | | |
|---|---|---|
| $A \cup B$ | $B \cup C$ | $A \cap C$ |
| $A \cup C$ | $A \cap B$ | $B \cap C$ |

$A \cup B = \{2, 3, 5, 8\}$ $\quad A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ $\quad B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$

$A \cap B = \{3\}$ $\quad A \cap C = \{2, 5\}$ $\quad B \cap C = \varnothing$

**17.4 En el experimento que consiste en lanzar un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6:**

**a) Expón un ejemplo de dos sucesos que sean contrarios. ¿Son incompatibles?**

**b) Muestra dos sucesos que sean incompatibles. ¿Son contrarios?**

a) Sucesos contrarios: $A$ = *"salir par"* = $\{2, 4, 6\}$ y $\overline{A}$ = *"salir impar"* = $\{1, 3, 5\}$.
Efectivamente, $A$ y $\overline{A}$ son incompatibles.

b) Sucesos incompatibles: $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$.
Los sucesos $A$ y $B$ son incompatibles, pues $A \cap B = \varnothing$, pero no son contrarios ($\overline{A} = \{3, 4, 5, 6\} \neq B$).

**17.5 Se saca una carta al azar de una baraja española. Halla la probabilidad de los sucesos:**

**a)** ***Salir un caballo.***

**b)** ***Salir un oro.***

**c)** ***Salir un número menor que seis.***

a) Sea $A$ = *"salir un caballo"* $\Rightarrow P(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

b) Sea $B$ = *"salir un oro"* $\Rightarrow P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

c) Sea $C$ = *"salir un número menor que 6"* $\Rightarrow P(C) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

**17.6 En un intercambio cultural participan 17 alumnos españoles, 8 italianos, 4 franceses y 2 holandeses. Elegido un alumno al azar, halla:**

**a)** ***P*(*ser francés*)**

**b)** ***P*(*ser italiano*)**

**c)** ***P*(*ser holandés*)**

a) $P(\textit{ser francés}) = \frac{4}{31} = 0{,}1290$

b) $P(\textit{ser italiano}) = \frac{8}{31} = 0{,}2581$

c) $P(\textit{ser holandés}) = \frac{2}{31} = 0{,}0645$

**17.7 En una urna hay 8 bolas numeradas del 1 al 8. Se extrae una bola al azar y se apunta su número. Considera los sucesos $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{3, 8\}$ y $C = \{1, 2, 5, 7\}$.**

**Halla la probabilidad de $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$.**

$P(A \cup B)$: Como $A$ y $B$ son compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

$P(B \cup C)$: Como $B$ y $C$ son incompatibles: $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

$P(A \cup C)$: Como $A$ y $C$ son compatibles: $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

**17.8 En una biblioteca están estudiando 5 alumnos de 3.º de ESO, 7 de 4.º, 11 de 1.º de Bachillerato y 15 de 2.º Elegido un estudiante al azar, halla la probabilidad de:**

**a)** ***Ser un alumno de ESO*.**

**b)** ***Ser un alumno de Bachillerato.***

a) $P(\textit{Ser un alumno de ESO}) = \dfrac{5 + 7}{5 + 7 + 11 + 15} = \dfrac{12}{38} = \dfrac{6}{19}$

b) $P(\textit{Ser un alumno de Bachillerato}) = \dfrac{11 + 15}{38} = \dfrac{26}{38} = \dfrac{13}{19}$

**17.9 Se extrae una carta de una baraja española y se tira un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6. Halla la probabilidad de sacar una espada y obtener un número par en el dado.**

$P(\textit{espada y n.º par}) = P(\textit{espada}) \cdot P(\textit{n.º par}) = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{8}$

**17.10 Un experimento consiste en lanzar un dado tetraédrico con las caras numeradas del 1 al 4, y girar la aguja de una ruleta decorada con los colores azul, verde y rojo. Halla la probabilidad de obtener un 1 en el dado y el rojo en la ruleta.**

$P(\textit{obtener 1 y rojo}) = P(\textit{obtener 1}) \cdot P(\textit{rojo}) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$

**17.11 En una bolsa se introducen unas tarjetas con los nombres de los alumnos de una clase: 16 chicas y 12 chicos. Se extraen 2 tarjetas al azar. Halla la probabilidad de que sean de 2 chicas:**

**a) Con devolución de la primera tarjeta.**

**b) Sin devolución.**

a) Con devolución de la tarjeta.

$P(\textit{2 chicas}) = P(\textit{chica la 1.ª y chica la 2.ª}) = P(\textit{chica la 1.ª}) \cdot P(\textit{chica la 2.ª}) = \dfrac{16}{28} \cdot \dfrac{16}{28} = 0{,}3265$

b) Sin devolución de la tarjeta.

$P(\textit{2 chicas}) = P(\textit{chica la 1.ª y chica la 2.ª}) = P(\textit{chica la 1.ª}) \cdot P(\textit{chica la 2.ª/chica la 1.ª}) = \dfrac{16}{28} \cdot \dfrac{15}{27} = 0{,}3175$

**17.12 Una caja contiene 25 caramelos de limón y 15 de menta. Se extraen 2 caramelos al azar. Halla la probabilidad de que el primero sea de menta y el segundo de limón:**

**a) Con devolución del primer caramelo.**

**b) Sin devolución.**

a) Con devolución del primer caramelo.

$P(\textit{1.º menta y 2.º limón}) = P(\textit{ 1.º menta}) \cdot P(\textit{ 2.º limón}) = \dfrac{15}{40} \cdot \dfrac{25}{40} = 0{,}2344$

b) Sin devolución.

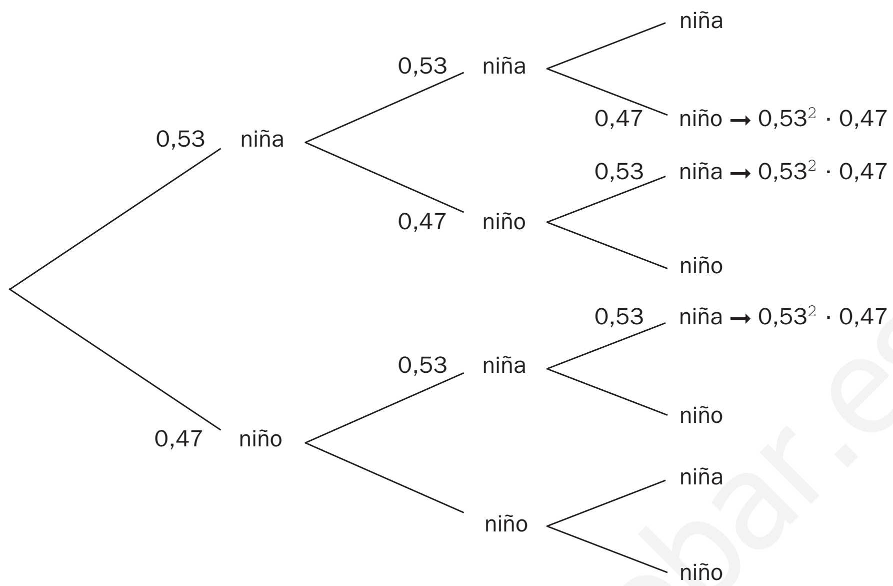
$P(\textit{1.º menta y 2.º limón}) = P(\textit{ 1.º menta}) \cdot P(\textit{ 2.º limón/1.º menta}) = \dfrac{15}{40} \cdot \dfrac{25}{39} = 0{,}2404$

**17.13 De una bolsa que contiene 5 bolas rojas, 10 negras y 12 azules, se extraen 2 bolas al azar. Halla la probabilidad de que ambas sean del mismo color.**

$P(\textit{del mismo color}) = \dfrac{5}{27} \cdot \dfrac{4}{26} + \dfrac{10}{27} \cdot \dfrac{9}{26} + \dfrac{12}{27} \cdot \dfrac{11}{26} = \dfrac{121}{351} = 0{,}3447$

**17.14 Imagina que en una familia la probabilidad de nacer niña es 0,53, y la de nacer niño, 0,47. Si tienen tres descendientes, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos niñas y un niño?**

Consideramos el siguiente diagrama en árbol:




$P(\textit{2 niñas y 1 niño}) = 3 \cdot 0{,}53^2 \cdot 0{,}47 = 0{,}3961$

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**17.15 Alicia elige dos números entre {5, 11, 15, 27} y los suma, y Juan escoge dos del conjunto {5, 7, 9} y los multiplica. ¿Qué probabilidad hay de que Alicia obtenga un resultado mayor?**

Resultados posibles de Alicia:

| | |
|---|---|
| $5 + 11 = 16$ | $11 + 15 = 26$ |
| $5 + 15 = 20$ | $11 + 27 = 38$ |
| $5 + 27 = 32$ | $15 + 27 = 42$ |

Resultados posibles de Juan:

$5 \cdot 7 = 35$ $\quad$ $5 \cdot 9 = 45$ $\quad$ $7 \cdot 9 = 63$

Número de casos posibles $= 6 \cdot 3 = 18$

Hacemos el recuento de los casos favorables:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| • Si Alicia suma 16 | → | Pierde | → | 0 |
| • Si Alicia suma 20 | → | Pierde | → | 0 |
| • Si Alicia suma 32 | → | Pierde | → | 0 |
| • Si Alicia suma 26 | → | Pierde | → | 0 |
| • Si Alicia suma 38 | → | Que Juan obtenga 35 | → | 1 |
| • Si Alicia suma 42 | → | Que Juan obtenga 35 | → | 1 |
| | | | Total: | 2 |

La probabilidad de que gane Alicia es $\frac{2}{18} = \frac{1}{9}$.

**17.16 Con los mismos conjuntos de números del ejercicio anterior, el juego cambia: ahora Alicia sumará tres números, y Juan seguirá multiplicando dos. ¿Qué probabilidad de ganar tiene Alicia?**

Resultados posibles de Alicia:

$5 + 11 + 15 = 31$ $\qquad$ $5 + 15 + 27 = 47$

$5 + 11 + 27 = 43$ $\qquad$ $11 + 15 + 27 = 53$

Resultados posibles de Juan:

$5 \cdot 7 = 35$ $\qquad$ $5 \cdot 9 = 45$ $\qquad$ $7 \cdot 9 = 63$

Número de casos posibles $= 4 \cdot 3 = 12$

Hacemos el recuento de los casos favorables:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| • Si Alicia suma 31 | $\rightarrow$ | Pierde | $\rightarrow$ | 0 |
| • Si Alicia suma 43 | $\rightarrow$ | Que Juan obtenga 35 | $\rightarrow$ | 1 |
| • Si Alicia suma 47 | $\rightarrow$ | Que Juan obtenga 35 ó 45 | $\rightarrow$ | 2 |
| • Si Alicia suma 53 | $\rightarrow$ | Que Juan obtenga 35 ó 45 | $\rightarrow$ | 2 |
| | | | Total: | 5 |

La probabilidad de que gane Alicia es $\frac{5}{12}$.

# A C T I V I D A D E S

## E J E R C I C I O S P A R A E N T R E N A R S E

### Experimentos aleatorios. Sucesos

**17.17 Indica si los siguientes experimentos son aleatorios y, en caso afirmativo, describe el espacio muestral correspondiente.**

**a) Hacer girar la flecha de una ruleta dividida en 6 sectores numerados del 1 al 6.**

**b) Extraer una bola de la urna del dibujo.**

a) Sí es un experimento aleatorio. Su espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) No es un experimento aleatorio.

**17.18 En el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado con 10 caras numeradas del 1 al 10 consideramos los sucesos $A$ = *salir un número par* y $B$ = *salir un número múltiplo de 4.***

**Halla $\overline{A}$, $A \cup B$ y $\overline{A} \cup B$. ¿Son incompatibles los sucesos $A$ y $B$? Razona la respuesta.**

El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

$\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\overline{A} \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

Los sucesos $A$ y $B$ no son incompatibles (es decir, son compatibles), ya que $A \cap B = \{4, 8\} \neq \emptyset$.

**17.19 Se extrae al azar una ficha de un dominó. Calcula la probabilidad de que la suma de los puntos de la ficha sacada sea superior a 5.**

N.º de fichas $= 28 \Rightarrow P(suma > 5) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} = 0{,}5714$

**17.20 Copia y completa la siguiente tabla de contingencia que muestra la distribución de las tres clases de 4.º de ESO de un centro escolar.**

| | Alumnos | Alumnas | |
|---|---|---|---|
| ***A*** | **30** | | |
| ***B*** | | **60** | **100** |
| ***C*** | | | **78** |
| | **100** | | **232** |

**Si se escoge un estudiante al azar:**

**a) ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la clase *A*?**

**b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea alumna?**

**c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea alumna y esté en la clase *B*?**

**d) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que es alumna, corresponda a la clase *C*?**

**e) ¿Cuál es la probabilidad de que sea alumno sabiendo que pertenece a la clase *A*?**

| | Alumnos | Alumnas | |
|---|---|---|---|
| ***A*** | 30 | 24 | 54 |
| ***B*** | 40 | 60 | 100 |
| ***C*** | 30 | 48 | 78 |
| | 100 | 132 | 232 |

a) $P(A) = \frac{54}{232} = \frac{27}{116} = 0{,}125$

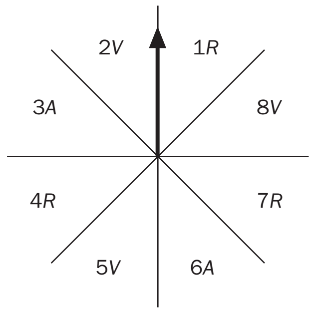
b) $P(alumna) = \frac{132}{232} = \frac{33}{58} = 0{,}5690$

c) $P(alumna \cap B) = \frac{60}{232} = \frac{15}{58} = 0{,}2585$

d) $P(C/Alumna) = \frac{48}{132} = \frac{4}{11} = 0{,}3636$

e) $P(alumno/A) = \frac{30}{54} = \frac{5}{9} = 0{,}\widehat{5}$

**17.21** **Se procede a girar la flecha de la ruleta.**




$R \equiv$ Sector de color rojo
$V \equiv$ Sector de color verde
$A \equiv$ Sector de color amarillo

**Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.**

**a)** ***Salir un número par.***

**b)** ***Salir un número impar y el color rojo.***

**c)** ***Salir un número impar o el color amarillo.***

**d)** ***Salir un número par o el color verde.***

**e)** ***No salir el color rojo.***

a) $P(P) = \frac{1}{2}$

b) $P(I \cap R) = \frac{1}{4}$

c) $P(I \cup A) = P(I) + P(A) - P(I \cap A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

d) $P(P \cup V) = P(P) + P(V) - P(P \cap V) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

e) $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

**17.22** **Cogemos al azar una carta de una baraja francesa formada por 54 cartas (con dos comodines).**
**Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.**

**a)** ***Sacar una pica o una figura.***

**b)** ***Sacar una carta de palo rojo.***

**c)** ***Sacar una carta de palo negro o figura.***

**d)** ***Sacar una carta de palo rojo y menor que 5.***

**e)** ***No sacar un comodín.***

a) $P(P \cup F) = P(P) + P(F) - P(P \cap F) = \frac{13}{54} + \frac{12}{54} - \frac{3}{54} = \frac{22}{54} = \frac{11}{27} = 0{,}4074$

b) $P(R) = \frac{26}{54} = \frac{13}{27} = 0{,}4815$

c) $P(N \cup F) = P(N) + P(F) - P(N \cap F) = \frac{26}{54} + \frac{12}{54} - \frac{6}{54} = \frac{32}{54} = \frac{16}{27} = 0{,}5926$

d) $P(R \cap < 5) = \frac{8}{54} = \frac{4}{27} = 0{,}1481$

e) $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{2}{54} = \frac{52}{54} = \frac{26}{27}$

## Probabilidad en experimentos compuestos

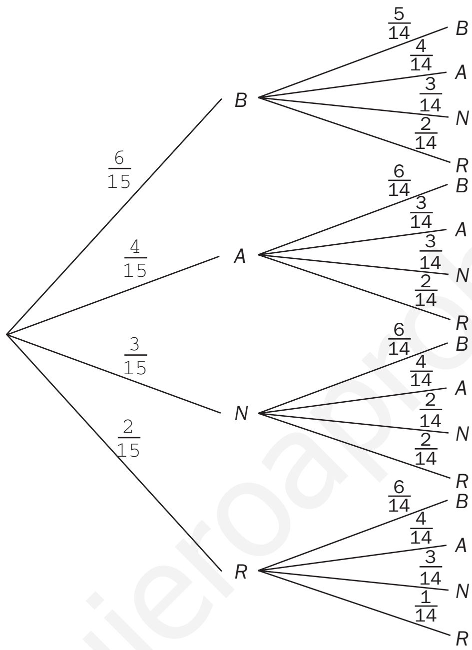
**17.23 En el armario de Luis hay 6 camisetas blancas, 4 azules, 3 negras y 2 rojas. Si saca consecutivamente 2 camisetas, ¿qué tipo de experimento realiza? Dibuja un diagrama en árbol con los resultados posibles y calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.**

**a)** ***Sacar dos camisetas negras*.**

**b)** ***Sacar una camiseta blanca y otra azul*.**

**c)** ***No sacar ninguna camiseta roja*.**

El experimento que realiza es aleatorio.




a) $P(N_1 \cap N_2) = \dfrac{3}{15} \cdot \dfrac{2}{14} = \dfrac{6}{210} = \dfrac{1}{35} = 0{,}0286$

b) $P(B \cap A) = \dfrac{6}{15} \cdot \dfrac{4}{14} + \dfrac{4}{15} \cdot \dfrac{6}{14} = \dfrac{48}{210} = \dfrac{8}{35} = 0{,}2286$

c) $P(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2) = P(\overline{R}_1) \cdot P(\overline{R}_2 / \overline{R}_1) = \dfrac{13}{15} \cdot \dfrac{12}{14} = \dfrac{156}{210} = \dfrac{26}{35} = 0{,}7429$



**17.24 Una urna contiene 4 bolas numeradas del 1 al 4. Si se forman todos los números de 3 cifras posibles al extraer 3 bolas de dicha urna sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que el número formado sea par? ¿Y si las extracciones se efectuasen con reemplazamiento?**

Sin reemplazamiento: $P(n.^{\circ}\ par) = \dfrac{2 \cdot V_{3,2}}{V_{4,3}} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$

Con reemplazamiento: $P(n.^{\circ}\ par) = \dfrac{2 \cdot VR_{4,2}}{VR_{4,3}} = \dfrac{32}{64} = \dfrac{1}{2}$

**17.25 Si se tiran 3 dados, ¿cuál es la probabilidad de que en todas las caras aparezca igual número de puntos?**

$P(\text{igual } n.^{\circ} \text{ de puntos}) = P[(1 \cap 1 \cap 1) \cup (2 \cap 2 \cap 2) \cup ... \cup (6 \cap 6 \cap 6)] = \dfrac{6}{VR_{6,3}} = \dfrac{6}{216} = 0{,}02\overset{\frown}{7}$

**17.26** **Se ha averiguado experimentalmente que la probabilidad de que cierto tipo de chinchetas caigan con la punta hacia arriba es de 0,35.**

**Si se lanzan dos chinchetas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas caiga con la punta hacia arriba?**

$P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) - P(1 \cap 2) = 0{,}35 + 0{,}35 - 0{,}35 \cdot 0{,}35 = 0{,}5775$

**17.27** **Un jugador de dardos dispone de dos oportunidades de dar en el blanco en la diana. La probabilidad de acertar cuando lanza es de 0,63.**

**a) Halla la probabilidad de que atine al menos una vez.**

**b) ¿Cuál es la probabilidad de que falle en los dos lanzamientos?**

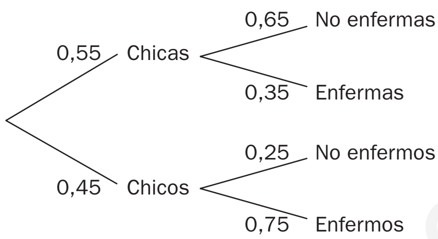
a) $P(B_1 \cup B_2) = 1 - P(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2) = 1 - 0{,}37^2 = 0{,}8631$

b) $P(F_1 \cap F_2) = P(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2) = 0{,}37^2 = 0{,}1369$

## Probabilidad total

**17.28** **En un centro de enseñanza secundaria, el 55 % de los estudiantes matriculados son chicas. Se sabe que el 65 % de las alumnas no han estado enfermas durante el curso y que el 25 % de los alumnos tampoco.**

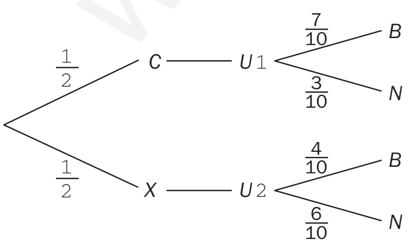
**Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya encontrado enfermo? Realiza el diagrama en árbol correspondiente.**




$P(enfermo) = 0{,}45 \cdot 0{,}75 + 0{,}55 \cdot 0{,}35 = 0{,}53$

**17.29** **Considera el experimento compuesto que consiste en lanzar una moneda al aire y, si sale cara, se extrae una bola de la primera urna, y si aparece cruz, una de la segunda.**

**Dibuja un diagrama en árbol indicando la probabilidad de cada suceso y calcula la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.**




$P(blanca) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{11}{20} = 0{,}55$

**17.30** **Pedro desea coger la bicicleta guardada en su trastero, y para ello necesita abrir dos puertas. Dispone de 4 llaves: dos de ellas abren la primera puerta; otra de ellas, la segunda, y la cuarta es maestra. ¿Cuál es la probabilidad de que abra las dos puertas en el primer intento si escoge las llaves al azar?**

$P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

**17.31 En el lanzamiento de 3 dados de 6 caras, ¿cuál es el suceso contrario al de *sacar al menos un 5*? ¿Cuál es su probabilidad?**

*A = sacar al menos un 5* $\Rightarrow \overline{A}$ = *Ningún 5*

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}5787$$

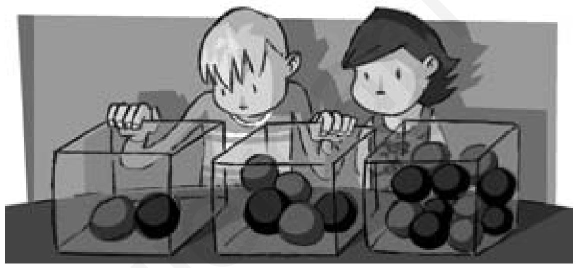
**17.32 En un experimento aleatorio se ha obtenido que la probabilidad de un suceso *A* es de 0,31, y la de un suceso *B*, de 0,69. ¿Podemos asegurar que *A* y *B* son sucesos contrarios?**

Sí, ya que $P(B) = 1 - P(A)$

**17.33 Si lanzo una moneda 9 veces y aparece cara en todos los lanzamientos, ¿es más probable que a la décima vez salga cruz en lugar de cara?**

No, la probabilidad sigue siendo la misma, la moneda no tiene memoria.

**17.34 ¿En cuál de las siguientes urnas es más probable extraer una bola roja?**



1.ª urna: $P(R) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ 2.ª urna: $P(R) = \frac{3}{5} = 0{,}6$ 3.ª urna: $P(R) = \frac{5}{11} = 0{,}4545$

Luego es más probable extraer una bola roja en la 2.ª urna.

**17.35 Si $P(A) = \frac{1}{4}$, ¿quiere decir que hay 4 casos posibles en el experimento y solo 1 favorable al suceso *A*? Justifica la respuesta.**

No, ya que la fracción puede estar simplificada.

**17.36 Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.**

**a) El suceso contrario al suceso seguro es el suceso imposible.**

**b) La probabilidad de un suceso *A* puede ser igual a 1,3.**

**c) *A* y *B* son incompatibles si $A \cup B = \varnothing$.**

**d) Si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, entonces *A* y *B* son compatibles.**

**e) Si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, entonces *A* y *B* son independientes.**

a) Verdadero
b) Falso
c) Falso
d) Falso
e) Verdadero

**17.37 Si al sacar 3 cartas de una baraja española obtengo 3 oros, ¿la probabilidad de conseguir en una cuarta extracción una espada es la misma si devuelvo las cartas a la baraja que si no lo hago? ¿Por qué?**

$A$ = *Obtener 3 oros en tres extracciones*

$B$ = *Obtener espadas*

Con devolución: $P(B) = \frac{10}{40} = 0{,}25$

Sin devolución: $P(B) = \frac{10}{37} = 0{,}27$

Luego la probabilidad no es la misma. Es mayor en el caso de que las extracciones se hagan sin devolución, porque el número de casos posibles es menor que cuando las extracciones se producen con devolución.

**17.38 Si lanzo 2 dados de 6 caras, ¿qué es más probable lograr como suma, 7 ó 10?**

Los casos favorables a 7 son: 1 y 6, 2 y 5, 3 y 4.

Los casos favorables a 10 son: 4 y 6, 5 y 5.

Luego $P(\text{sacar } 7) > P(\text{sacar } 10)$.

**17.39 ¿Qué es más probable?**

**a)** ***Salir 3 al tirar un dado de 6 caras*.**

**b)** ***Sacar espadas al extraer una carta*.**

**c)** ***Obtener dos caras al lanzar dos monedas*.**

a) $P(\text{sacar } 3) = \frac{1}{6} = 0{,}1\overset{\frown}{6}$ b) $P(\text{sacar espadas}) = \frac{1}{4} = 0{,}25$ c) $P(CC) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Luego son más probables los sucesos b y c.

**17.40 Si $P(A \cap B) = \frac{2}{7}$, $P(A) = \frac{4}{5}$ y $P(B) = \frac{5}{6}$, ¿son $A$ y $B$ independientes? Calcula $P(B / A)$.**

$P(A \cap B) = \frac{2}{7} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3}$, luego $A$ y $B$ no son independientes.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A) \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{4}{5} \cdot P(B / A) \Rightarrow P(B / A) = \frac{5}{14}$

## PROBLEMAS PARA APLICAR

**17.41 En una población, la probabilidad de medir más de 170 centímetros es del 30 %, y la de ser aficionado al cine, del 65 %.**

**¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar mida menos de dicha altura y le guste el cine?**

$P(\text{más bajo de } 170 \cap \text{aficionado al cine}) = \frac{70}{100} \cdot \frac{65}{100} = 0{,}455$

**17.42 Los alumnos de 4.° de ESO de un centro escolar sortean un ordenador portátil para conseguir ingresos destinados a su viaje de fin de curso. Venden papeletas numeradas del 1 al 100.**

**Calcula la probabilidad de ganar el ordenador si se adquieren todas las papeletas que sean múltiplos de 3 o de 5.**

$P(\dot{3} \cup \dot{5}) = P(3) + P(5) - P(\dot{3} \cap \dot{5}) = \frac{33}{100} + \frac{20}{100} - \frac{6}{100} = \frac{47}{100} = 0{,}47$

17.43 **Silvia posee una moneda de 2 euros, dos de un euro, una de 50 céntimos y otra de 20.**

**Si toma del monedero dos monedas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad sumada de ambas sea superior a un euro?**

N.º de extracciones de 2 monedas $= \binom{5}{2} = 10 \Rightarrow P(\textit{cantidad} > 1\,€) = \frac{9}{10}$

17.44 **Según un informe de la Cruz Roja sobre los enfermos que padecen paludismo en África, si son atendidos en un dispensario, los $\frac{3}{5}$ se curan al cabo de tres semanas.**

**En una muestra al azar de 5 pacientes, calcula la probabilidad de que:**

**a) Se curen exactamente 3.**

**b) Sanen al menos 2.**

**c) Se recuperen todos.**

Sea $A_i$ = *se cure el enfermo "i"*. Pues bien, $P(A_i) = \frac{3}{5}$ y $P(\overline{A}_i) = \frac{2}{5}$

a) $P(\textit{se curen exactamente 3}) = \binom{5}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0{,}3456$

b) $P(\textit{sanen al menos 2}) = P(\textit{se curen 2} \cup \textit{se curen 3}) = \binom{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3 + \binom{5}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0{,}576$

c) $P(\textit{se recuperen todos}) = \left(\frac{3}{5}\right)^5 = 0{,}0778$

17.45 **En un aula con 24 estudiantes de 1.º de ESO, los profesores de Matemáticas, Lengua e Inglés piden cada día al azar los cuadernos a algunos alumnos para revisarlos. El de Matemáticas se lo reclama a 4 alumnos; el de Lengua, a 6, y el de Inglés, a 8.**

**Halla la probabilidad de que a un alumno concreto, en un día:**

**a) Le pidan 2 cuadernos.**

**b) No le reclamen ninguno.**

**c) Le soliciten los 3 cuadernos.**

a) $P(\textit{le pidan 2 cuadernos}) = P[(\textit{mates y lengua}) \cup (\textit{mates e inglés}) \cup (\textit{lengua e inglés})] =$

$$= \frac{4}{24}\cdot\frac{6}{24} + \frac{4}{24}\cdot\frac{8}{24} + \frac{6}{24}\cdot\frac{8}{24} = \frac{1}{24} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{13}{72} = 0{,}1806$$

b) $P(\textit{ningún cuaderno}) = P(\textit{no mates} \cap \textit{no lengua} \cap \textit{no inglés}) = \frac{20}{24}\cdot\frac{18}{24}\cdot\frac{16}{24} = 0{,}41\overset{\frown}{6}$

c) $P(\textit{le pidan los 3}) = \frac{4}{24}\cdot\frac{6}{24}\cdot\frac{8}{24} = 0{,}0139$

17.46 **Una entidad bancaria realiza un sorteo de 3 premios entre sus clientes, y para ello reparte 1000 papeletas. Uno de los clientes habituales tiene en su poder 20 números.**

**¿Cuál es la probabilidad de que reciba algún premio?**

$P(\textit{algún premio}) = 1 - P(\textit{ningún premio}) = 1 - P(\textit{no 1.º} \cap \textit{no 2.º} \cap \textit{no 3.º}) = 1 - \frac{980}{1000}\cdot\frac{979}{999}\cdot\frac{978}{998} = 0{,}0589$

**17.47 La probabilidad de nacimientos de niños en un país está en torno al 52 %. Halla la probabilidad de que una familia de 4 hijos tenga:**

**a) Por lo menos un niño.**

**b) Exactamente una niña y tres niños.**

a) $P(\textit{por lo menos un niño}) = 1 - P(\textit{ningún niño}) = 1 - \left(\frac{48}{100}\right)^4 = 0{,}9469$

b) $P(\textit{1 niña y 3 niños}) = \binom{4}{3}\left(\frac{52}{100}\right)^3\left(\frac{48}{100}\right) = 0{,}27$

**17.48 El departamento de selección de personal de una multinacional entrevista a 65 candidatos para un puesto de la empresa: 35 de ellos poseen experiencia laboral previa y 40 disponen de un título universitario.**

**¿Cuál es la probabilidad de que se elija a una persona que tenga experiencia laboral y un título universitario?**

$A$ = *experiencia laboral*

$B$ = *título universitario*

$A \cap B = 10$ (ya que $40 + 35 = 75$ que sobrepasan en 10 a los 65 entrevistados)

$P(A \cap B) = \frac{10}{65} = \frac{2}{13} = 0{,}1538$

**17.49 Las estadísticas de los derbis entre dos equipos de la misma ciudad e históricamente rivales son las siguientes: el 25 % de las veces ha ganado el equipo *A*; el 45 %, el conjunto *B*, y el 30 % han empatado. En el próximo torneo van a enfrentarse en 3 ocasiones.**

**a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane *A* los 3 partidos?**

**b) ¿Cuál es la probabilidad de que *A* venza al menos en un partido?**

a) $P(\textit{gane A los 3 partidos}) = P(\textit{1.º gane A} \cap \textit{2.º gane A} \cap \textit{3.º gane A}) = \left(\frac{25}{100}\right)^3 = 0{,}0156$

b) $P(\textit{gane A al menos 1 partido}) = 1 - P(\textit{no gane ninguno}) = 1 - \left(\frac{75}{100}\right)^3 = 0{,}5781$

**17.50 Un árbol de Navidad está alumbrado por una tira de 25 bombillas de colores recién compradas.**

**Si la probabilidad de que una bombilla se funda antes de 15 días es de 0,1, ¿cuál es la probabilidad de que el alumbrado del árbol funcione sin problemas durante los 15 días de las fiestas navideñas?**

$B_i$ = *fundirse la bombilla "i"*

$P(\textit{funcione}) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{25}}) = (0{,}9)^{25} = 0{,}0718$

**17.51 Un profesor tiene 2 estuches. Uno contiene 5 bolígrafos azules y 3 negros, y el otro, 2 azules y 6 negros.**

**Si abre un estuche al azar y extrae un bolígrafo, ¿cuál es la probabilidad de que sea negro?**

$N$ = *ser negro*

$A$ = *escoger estuche A*

$B$ = *escoger estuche B*

$P(N) = P(A) \cdot P(N / A) + P(B) \cdot P(N / B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} = 0{,}5625$

17.52 **En una empresa de control de calidad, los productos pasan por 3 pruebas independientes. En la primera se detecta un 8 % de productos con defectos; en la segunda, un 12 %, y en la tercera, un 15 %. Halla la probabilidad de que un producto tenga:**

**a) 0 defectos.**

**b) 1 defecto.**

**c) 2 defectos.**

Sea $D$ = *defecto* y $B$ = *bien*

a) $P(\textit{0 defectos}) = P(\textit{pase 1.ª criba} \cap \textit{pase 2.ª criba} \cap \textit{pase 3.ª criba}) = \frac{92}{100} \cdot \frac{88}{100} \cdot \frac{85}{100} = 0{,}6882$

b) $P(\textit{1 defecto}) = P(DBB \cup BDB \cup BBD) = \frac{8}{100} \cdot \frac{88}{100} \cdot \frac{85}{100} + \frac{92}{100} \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{85}{100} + \frac{92}{100} \cdot \frac{88}{100} \cdot \frac{15}{100} = 0{,}27$

c) $P(\textit{2 defectos}) = P(DDB \cup DBD \cup BDD) = \frac{8}{100} \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{85}{100} + \frac{8}{100} \cdot \frac{88}{100} \cdot \frac{15}{100} + \frac{92}{100} \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{15}{100} = 0{,}035$

**R E F U E R Z O**

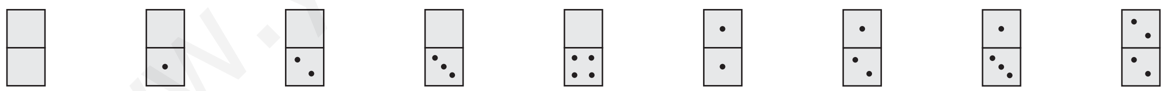
## Experimentos aleatorios. Sucesos

17.53 **Describe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.**

**a) Sacar de una caja una ficha de dominó teniendo en cuenta que solo contiene aquellas cuya suma de puntos es inferior a 5.**

**b) Extraer de una caja una de las piezas del ajedrez.**

a)



b) $E$ = {Peón blanco, peón negro, torre blanca, torre negra, caballo blanco, caballo negro, alfil blanco, alfil negro, reina blanca, reina negra, rey blanco, rey negro}

17.54 **Al tomar una carta de una baraja española, se consideran los sucesos: *A* = *sacar un basto*, *B* = *sacar una figura* y *C* = *sacar un as*.**

**Halla los sucesos $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$. ¿Son compatibles *B* y *C*? ¿Por qué?**

Sea O = *oros*, Co = *copas*, E = *espadas* y B = *bastos*

$A \cup B$ = {1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 7B, SB, CB, RB, SO, CO, RO, SCo, CCo, RCo, SE, CE, RE}

$A \cup C$ = {1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 7B, SB, CB, RB, 1O, 1Co, 1E}

$B \cup C$ = {SO, CO, RO, SCo, CCo, RCo, SE, CE, RE, SB, CB, RB, 1O, 1Co, 1E, 1B}

$B$ y $C$ no son compatibles (es decir, son incompatibles), ya que $B \cap C = \varnothing$.

## Probabilidad de un suceso

**17.55** **Los 450 alumnos de un centro escolar de Secundaria se encuentran repartidos por cursos de esta forma.**

| | 1.º | 2.º | 3.º | 4.º |
|---|---|---|---|---|
| Chicos | 70 | 50 | 46 | 52 |
| Chicas | 80 | 62 | 50 | 40 |

**Calcula las siguientes probabilidades.**

**a)** ***P*(*ser un chico*)**

**b)** ***P*(*ser una chica*)**

**c)** ***P*(*ser de 2.º*)**

**d)** ***P*(*ser de 4.º*)**

**e)** ***P*(*ser un chico de 3.º*)**

**f)** ***P*(*no ser de 1.º*)**

a) $P(chico) = \dfrac{218}{450} = 0{,}48\widehat{4}$

b) $P(chica) = \dfrac{232}{450} = 0{,}51\widehat{5}$

c) $P(\text{ser de 2.º ESO}) = \dfrac{112}{450} = 0{,}24\widehat{8}$

d) $P(\text{ser de 4.º ESO}) = \dfrac{92}{450} = 0{,}20\widehat{4}$

e) $P(\text{ser chico de 3.º ESO}) = \dfrac{46}{450} = 0{,}10\widehat{2}$

f) $P(\text{no ser de 1.º ESO}) = \dfrac{300}{450} = 0{,}\widehat{6}$

**17.56** **Se lanza al aire un dado icosaédrico con las caras numeradas del 1 al 20. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.**

**a)** ***Salir un número par o múltiplo de 5*.**

**b)** ***Salir un número impar o múltiplo de 6*.**

**c)** ***Salir un cuadrado perfecto o múltiplo de 2*.**

**d)** ***No salir un número primo*.**

a) $P(par \cup \dot{5}) = \dfrac{10}{20} + \dfrac{4}{20} - \dfrac{2}{20} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

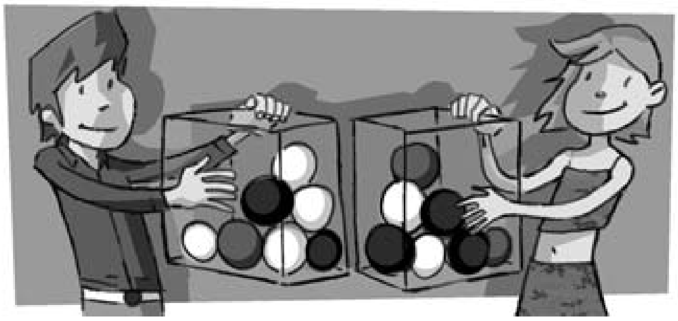
b) $P(impar \cup \dot{6}) = \dfrac{10}{20} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{13}{20} = 0{,}65$

c) $P(cuadrado \cup \dot{2}) = \dfrac{4}{20} + \dfrac{10}{20} - \dfrac{2}{20} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

d) $P(\overline{p}) = 1 - P(p) = 1 - \dfrac{8}{20} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

## Probabilidad en experimentos compuestos

**17.57 Un juego consiste en sacar 2 bolas consecutivamente y sin reemplazamiento de una urna. Gana quien saque de su urna dos bolas del mismo color.**



**¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?**

$P(ganar\ 1) = 2 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = 0{,}2381$; $P(ganar\ 2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}\widehat{3}$

Por tanto, tiene más probabilidad de ganar el jugador que extrae las bolas de la urna 2.

**17.58 Dos amigos juegan a sacar la carta más alta de una baraja española. El orden es: as, dos, tres… y así sucesivamente hasta el rey.**

**Si el primero que realiza la extracción saca una sota, devolviéndola a la baraja, calcula:**

**a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el segundo?**

**b) ¿Cuál es la probabilidad de que venza el primero?**

**c) ¿Cuál es la probabilidad de repetición por empate?**

**d) ¿Cuál es la probabilidad de que gane cada uno de ellos si no se devuelve la sota extraída a la baraja? ¿Importa quién saque la primera carta en este caso?**

a) $P(Gane\ 2.^{o}) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

b) $P(Gane\ 1.^{o}) = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$

c) $P(Empate) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

d) En caso de que la extracción se haga sin devolución:

$P(Gane\ 1.^{o}) = \frac{28}{39}$; $P(Gane\ 2.^{o}) = \frac{8}{39}$

En este caso sí importa quién saque la primera carta.

## Probabilidad total

**17.59** **Se tira un dado octaédrico (8 caras) y, si sale número par, se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas amarillas y 6 moradas; y si aparece impar, se toma una bola de otra urna que guarda 8 bolas amarillas y 2 moradas.**

**Halla la probabilidad de sacar una bola morada.**

$$P(morada) = \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{10} = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}$$

### AMPLIACIÓN

**17.60** **Se extraen 4 cartas sin devolución de una baraja española. Calcula la probabilidad de:**

**a) *Obtener las 4 sotas*.**

**b) *Obtener las 4 del mismo palo*.**

**c) *Obtener al menos un 5*.**

**d) *Obtener las 4 con el mismo número*.**

**e) *Sumar 11*.**

a) $P(obtener\ 4\ sotas) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{1}{37} = 0{,}00001$

b) $P(obtener\ 4\ del\ mismo\ palo) = P(4\ oros \cup 4\ espadas \cup 4\ copas \cup 4\ bastos) = P(4\ oros) + P(4\ copas) + \ldots =$

$$= \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} \cdot \frac{7}{37} \cdot 4 = 0{,}0091$$

c) $P(obtener\ al\ menos\ un\ 5) = 1 - P(no\ obtener\ 5) = 1 - \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} \cdot \frac{33}{37} = 0{,}3554$

d) $P(obtener\ los\ 4\ del\ mismo\ número) = P(4\ unos \cup 4\ doses \cup \ldots \cup 4\ reyes) = P(4\ unos) + \ldots + P(4\ reyes) =$

$$= \left(\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{1}{37}\right) \cdot 10 = 0{,}0001$$

e) $P(sumen\ 11) = P[sacar(7,2,1,1) \cup sacar(6,3,1,1) \cup sacar(6,2,2,1) \cup sacar(5,4,1,1) \cup sacar(5,3,2,1) \cup sacar(5,2,2,2)] =$

$$= P_4 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot \frac{3}{37} + P_4 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot \frac{3}{37} + \ldots + P_4 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{3}{38} \cdot \frac{2}{37} = 0{,}0122$$

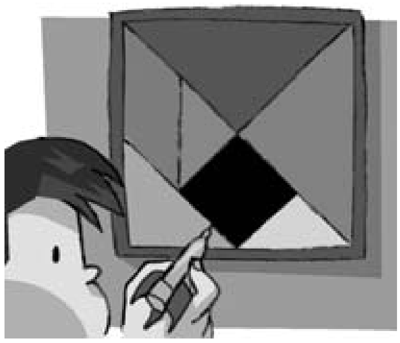
**17.61** **En una zona de reforestación en la Selva Negra, devastada por la lluvia ácida, se han plantado 3 tipos de coníferas: un 20 %, de tipo *A*; un 30 %, de *B*, y un 50 %, de clase *C*.**

**La posibilidad de supervivencia es del 60% en las de tipo *A*, del 45 % en las de *B* y del 75 % en las de *C*.**

**Si selecciono un árbol superviviente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de clase *C*?**

$$P(superviviente\ de\ tipo\ C) = P(sea\ de\ tipo\ C \cap sobreviva) = P(C) \cdot P(sobreviva/C) = \frac{50}{100} \cdot \frac{75}{100} = \frac{3750}{10\,000} = 0{,}375$$

**17.62** **Me han regalado una diana en forma de tangram en la que cada pieza es de un color diferente. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dardo lo clave en la zona coloreada en azul?**



Todas las áreas de las figuras tangram son múltiplos del triángulo pequeño, que llamamos *u*.

Triángulo pequeño $= 1u$

Triángulo mediano $= 2u$

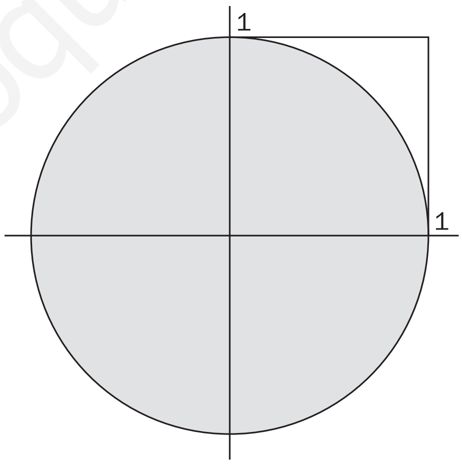
Triángulo grande $= 4u$

Cuadrado $= 2u$

Romboide $= 2u$

$P(romboide) = \frac{2u}{16u} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

**17.63** **Si se generan aleatoriamente dos números reales, *a* y *b*, comprendidos entre 0 y 1, ¿cuál es la probabilidad de que el punto (*a*, *b*) se encuentre en el interior del círculo centrado en el origen y con radio la unidad?**




$P[(a,\ b) \in círculo(0,\ 1)] = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$

**17.64 ¿Más vocales o más consonantes?**

**Ricardo desea estudiar la proporción de vocales y consonantes que se utilizan en su lengua. Para ello ha elegido al azar el siguiente párrafo extraído de su libro de Matemáticas.**

***"El estudio del cálculo de probabilidades se inició al observar cómo se comportaban los juegos de azar."***

**a) Cuenta el número de vocales y de consonantes que contiene el texto, y con los resultados asigna probabilidades a los sucesos que se forman al elegir una letra al azar de un escrito cualquiera, si resulta ser una vocal, y si resulta ser una consonante.**

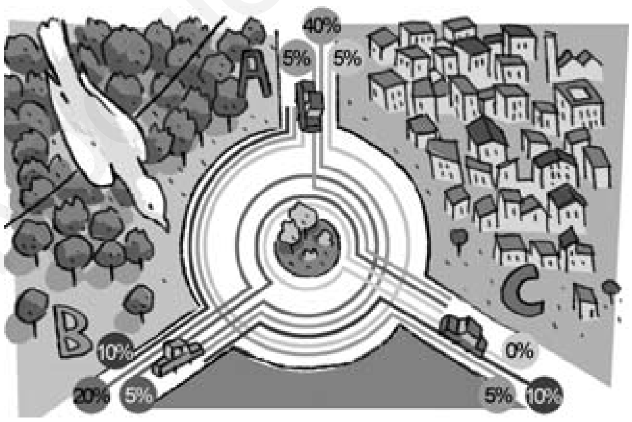
**b) Ricardo intuye que las probabilidades anteriores cambian de manera apreciable si se sabe que la letra anterior a la elegida es vocal o consonante. Con la ayuda de la primera línea del texto, asigna la probabilidad del suceso que se forma si la letra seleccionada resulta ser vocal, sabiendo que la anterior es consonante.**

a) Hay 39 vocales y 46 consonantes. Por tanto: $P(V) = \dfrac{39}{39 + 46} = 0{,}4588$ y $P(C) = \dfrac{46}{39 + 46} = 0{,}5412$.

b) De las 11 letras precedidas de consonante, 8 son vocales. Por tanto, la probabilidad de que una letra sea vocal sabiendo que la anterior a ella es consonante es $\dfrac{8}{11} = 0{,}7273$.

**17.65 La rotonda**

**En una glorieta confluyen tres carreteras de doble sentido. En la figura se indica la distribución de vehículos que entran por una vía y salen por otra.**




**Se elige un conductor al azar de entre todos los que han circulado por la rotonda en un día.**

**a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya entrado y salido por *A*?**

**b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido por *C*?**

**c) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya entrado por *B*?**

a) $P(E_A \cap S_A) = 0{,}05$

b) $P(S_C) = 0{,}05 + 0{,}1 = 0{,}15$

c) $P(\overline{E_B}) = 1 - P(E_B) = 1 - (0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1) = 0{,}3$

**17.A1** **Sea extrae una bola de una urna que contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20. Se consideran los siguientes sucesos.**

***A* = *salir un número múltiplo de 3***

***B* = *salir un número múltiplo de 5***

***C* = *salir un número par***

**Halla $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$.**

**¿Son compatibles *B* y *C*? ¿Por qué?**

Sea $A$ = *salir múltiplo de 3* = {3, 6, 9, 12, 15, 18}. Sea $B$ = *salir múltiplo de 5* = {5, 10, 15, 20}

Sea $C$ = *salir número par* = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

$A \cup B = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20\}$; $A \cup C = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$

$B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$

$B$ y $C$ son compatibles, ya que $B \cap C = \{10, 20\} \neq \varnothing$.

**17.A2** **Copia la siguiente tabla de contingencia sobre la procedencia y el sexo de los candidatos para secretario de las Naciones Unidas.**

| | Mujer | Hombre | |
|---|---|---|---|
| **Europa** | **1** | | **4** |
| **América** | **2** | | **5** |
| **África** | | **0** | **2** |
| **Asia** | **1** | | |
| **Oceanía** | | **1** | |
| | **6** | **9** | |

**Completa la tabla y calcula la probabilidad de:**

**a) Que el secretario sea mujer.**

**b) Que el secretario sea hombre y europeo.**

**c) Que el secretario sea mujer o americano.**

**d) Que el secretario no sea africano.**

| | Mujer | Hombre | |
|---|---|---|---|
| **Europa** | 1 | 3 | 4 |
| **América** | 2 | 3 | 5 |
| **África** | 2 | 0 | 2 |
| **Asia** | 1 | 2 | 3 |
| **Oceanía** | 0 | 1 | 1 |
| | 6 | 9 | 15 |

a) $P(mujer) = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

b) $P(hombre \cap europeo) = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$

c) $P(mujer \cup americano) = P(mujer) + P(americano) - P(mujer \cap americano) = \dfrac{6}{15} + \dfrac{5}{15} - \dfrac{2}{15} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

d) $P(no\ africano) = 1 - P(africano) = 1 - \dfrac{2}{15} = \dfrac{13}{15} = 0{,}8\widehat{6}$

**17.A3 Una urna contiene 4 bolas blancas numeradas del 1 al 4, 3 negras numeradas del 5 al 7, y 3 rojas numeradas del 8 al 10. Si se extrae una bola al azar, calcula las siguientes probabilidades.**

**a)** ***P*(*salir blanca o número par*)**

**b)** ***P*(*salir negra o número impar*)**

**c)** ***P*(*no salir blanca o número múltiplo de 3*)**

a) $P(blanca \cup par) = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$

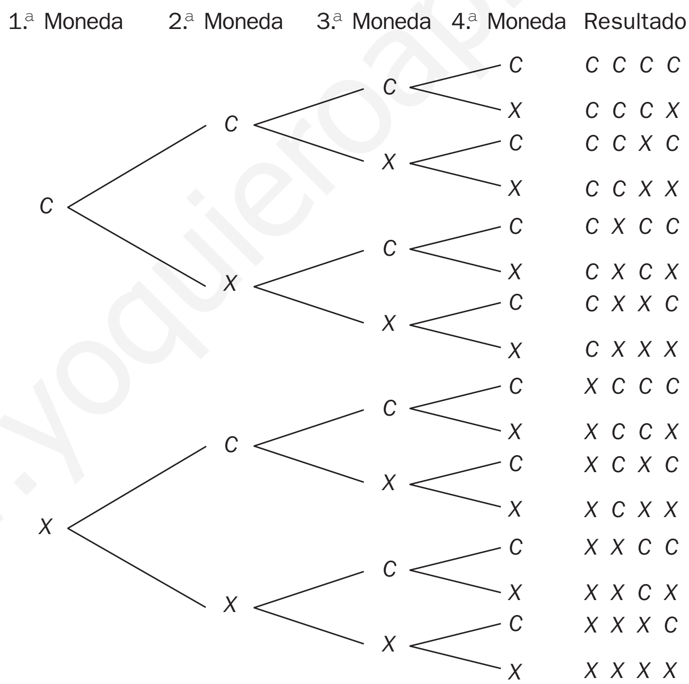
b) $P(negra \cup impar) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{5}$

c) $P(\overline{b} \cup \dot{3}) = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$



**17.A4 Se lanzan 4 monedas de un euro y se anota el resultado de la cara superior. ¿Qué tipo de experimento se realiza?**

**Forma el diagrama en árbol y calcula la probabilidad de obtener 4 caras.**




El experimento que se realiza es aleatorio, ya que por muchas veces que se repita, jamás se puede predecir el resultado que se va a obtener en una próxima experiencia.

$P(CCCC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125$

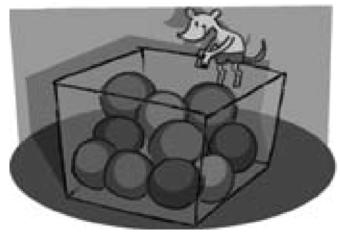
**17.A5** **De la urna de la figura se sacan, consecutivamente y sin reemplazamiento, 2 bolas.**

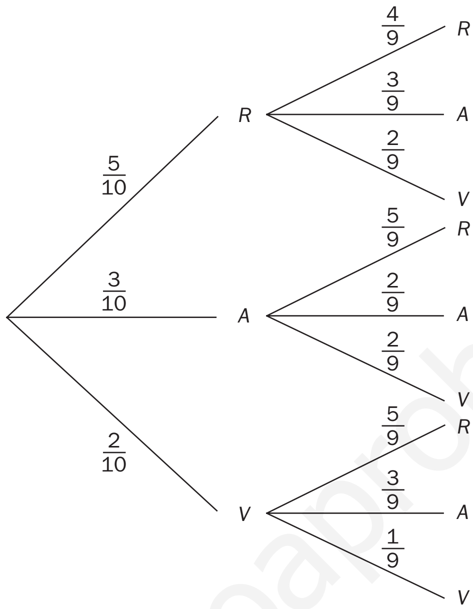
**Realiza un diagrama en árbol del experimento y calcula la probabilidad de que:**

**a) La primera sea azul y la segunda roja.**

**b) Las dos sean azules.**

**c) Las dos sean del mismo color.**






a) $P(A_1 \cap R_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6} = 0{,}1\widehat{6}$

b) $P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15} = 0{,}0\widehat{6}$

c) $P(\textit{mismo color}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{45} = 0{,}3\widehat{1}$

## M U R A L   D E   M A T E M Á T I C A S

### M A T E T I E M P O S

### El día de mi cumpleaños

**¿Cuál es la probabilidad de que entre los 30 alumnos de una clase de 4.º de ESO, al menos dos, cumplan años el mismo día? ¿Y si consideramos los 150 alumnos que cursan 4.º de ESO en un mismo centro escolar?**

*P*(*dos alumnos no hayan nacido el mismo día*) $= \frac{364}{365}$.

*P*(*ninguno de los 30 alumnos de 4.º de ESO haya nacido el mismo día*) $= \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{335}{365} = \frac{364!}{365^{30}(364 - 30)!}$.

Luego se tiene que: *P*(*al menos dos de los 30 estudiantes de 4.º de ESO hayan nacido el mismo día*) $= 1 - \frac{364!}{365^{30}(364 - 30)!}$.

Por otro lado: *P*(*al menos dos de los 150 estudiantes de 4.º de ESO hayan nacido el mismo día*) $= 1 - \frac{364!}{365^{150}(364 - 150)!}$.