# Unidad 1: Números reales.

## 1.- Números racionales e irracionales

**Números racionales:** Son aquellos que se pueden escribir como una fracción.

1. Números enteros $\begin{cases} Los\ números\ naturales: 1, 2, 3, ... \\ El\ número\ 0 \\ Los\ enteros\ negativos \end{cases}$

2. Números decimales exactos y periódicos.

Ejercicios de repaso

1.- Calcula la fracción irreducible:

$$)\frac{5}{200} \quad b)\frac{-1080}{432} \quad c)\frac{26}{130} \quad d)\frac{-702}{1053}$$

2.- Indica cuáles de las siguientes fracciones son irreducibles:

$$\frac{3}{15} \quad \frac{15}{18} \quad \frac{10}{13} \quad \frac{9}{6} \quad \frac{12}{5} \quad \frac{18}{7} \quad \frac{15}{12} \quad \frac{2}{8}$$

3.- Halla *x* para que las fracciones sean equivalentes:

$$)\frac{3}{5} = \frac{6}{x} = \frac{9}{x} = \frac{21}{x} \qquad b)\frac{-5}{2} = \frac{x}{8} = \frac{10}{x} = \frac{25}{x}$$

4.- ¿Puedes escribir una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$ cuyo denominador sea 10? ¿Por qué?

5.- Realiza las siguientes operaciones:

$$)2\cdot\frac{3}{5} - \frac{4}{3}:\frac{3}{4} \quad b)9 - \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{3} + \frac{2}{5} \quad c)\left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(1 - \frac{2}{5}\right)$$

$$d)\left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad e)\left(\frac{5}{2} + \frac{2}{5}\right)^{-1}:\left(\frac{7}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$f)\frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{5}}{\frac{7}{10} - \frac{3}{4}} \quad g)\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{17}{8} - 2\right)^{-2}$$

6.- Ordena de menor a mayor, reduciendo a común denominador:

$$\frac{-7}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{-6}{5} \quad \frac{7}{6}$$

7.- Expresa cada decimal en forma de fracción y calcula:

$$)\ 12,\hat{6}+7,\hat{3} \quad b)\ 3,7\hat{6}\cdot 4,\hat{8} \quad c)\ 1,25{:}\ 2,2\hat{5}$$

**Números irracionales:** Son los que no se pueden expresar como fracción. Su expresión decimal es ilimitada no periódica. ($\sqrt{n}$ con $n$ un número natural no cuadrado perfecto, π, …)

## 2.- Números Reales:

Es el conjunto de números formado por los números racionales e irracionales. Se representa por **R**.

La recta numérica en la que se representan todos los números reales se llama **recta real**.

Ejercicios de repaso

8.- Representa en la recta real.

$$)\sqrt{2} \quad b)\ \sqrt{10} \quad c)\sqrt{3} \quad d)\sqrt{18}$$

9.- Ordena de menor a mayor:

$$4 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{-1}{2} \quad -5 \quad \sqrt{5} \quad -\sqrt{2} \quad 0 \quad 3,1415\ldots$$

10.- Ordena y representa los números.

$$\frac{-3}{2} \quad 0,5 \quad \sqrt{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2$$

Los subconjuntos más importantes de la recta real son los **intervalos**, que se corresponden con los puntos de un segmento o una semirrecta en la recta real.

Cada intervalo viene determinado por sus extremos, siendo dos extremos en el caso de los segmentos y un extremo en el caso de las semirrectas.

Según incluyan o no a los puntos extremos, los intervalos pueden ser **abiertos, semiabiertos o cerrados**.

11.- Describe y representa los siguientes intervalos.

$) \ (0,10) \ \ b) \ (3,7] \ \ c) \ (-\infty,-2) \ d) \ [2,5] \ \ e)[5,10) \ f)[-4,+\infty) \ g) \ (-\infty,6] \ \ h) \ \ (100,+\infty)$

12.- Escribe el intervalo que corresponde a estas desigualdades.

$) \ 1 < x < 3 \ \ \ b) \ 9 < x \leq 7 \ \ \ c) \ 5 \leq x < 9 \ \ d) \ 10 \leq x \leq 12$

13.- Escribe el intervalo que corresponde a:

$) \ x \leq -2 \ \ \ b) \ x < 5 \ \ \ c) \ x > -3 \ \ d) \ x \geq 7 \ \ e) \ x < -9 \ \ \ f) \ x \geq \ -6$

14.- Representa los intervalos (0,5) y (-2, 3) en la misma recta, y señala el intervalo intersección.

15.- Representa en la recta los siguientes conjuntos:

$) \ [-3,0) \cup (-1,3] \ \ \ b) \ (-3,1) \cap [0,3] \ \ \ c) \ |x| > 2 \ \ \ d) \ |x| < 1$

16.- Representa en la recta real los conjuntos $A = \{x \in R/x \geq 4\}$ y $B=(-3,4)$. ¿Cuál es el conjunto $A \cup B$? ¿Y $A \cap B$?

## 3.- Radicales. Potencias de exponente fraccionario.

$\sqrt[n]{a}$ , en caso de existir, es un número *x* que elevado a *n (índice)* da como resultado *a (radicando)*. Es decir: $x^n =$

Ejemplo: $\sqrt[4]{16} = 2 \ ya \ que \ \ 2^4 = 16$

Recuerda que:

- Si el índice es par sólo existe raíz si el radicando es positivo o cero. En este caso, la raíz tiene dos soluciones que son opuestas ($\sqrt[4]{16} = \pm 2$)
- Si el índice es impar siempre tiene solución que es única y del mismo signo que el radicando ( $\sqrt[3]{-64} = -4$

Ejercicios de repaso

17.- Decide si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona la respuesta.

$)\sqrt[4]{-16} = -2 \ \ \ b)\sqrt[8]{256} = \pm 4 \ \ \ c) \ \sqrt[3]{1000000} = \pm 1000 \ \ \ d) \ \sqrt[5]{32} = \pm 2$

18.- Calcula el valor numérico, si existe, de los siguientes radicales.

$)\sqrt[4]{16} \ \ \ b)\sqrt[3]{-8} \ \ \ \ c)\sqrt[4]{-10000} \ \ \ \ d) \ \sqrt[5]{243}$

Las **potencias de exponente fraccionario** se definen como un radical:

$$^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$$

Por ejemplo:

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

19.- Transforma los radicales en potencias, y viceversa:

$$)3^{\frac{1}{4}} \quad b)5^{\frac{2}{3}} \quad c)\ 2^{\frac{1}{6}} \quad d)\ 7^{\frac{3}{5}} \quad e)\ 10^{\frac{2}{7}} \quad f)\sqrt[4]{5^7}$$

Dos **radicales** son **equivalentes** si tienen el mismo valor numérico.

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt{4} = 2$$

**Reducir dos o más radicales a índice común** consiste en transformarlos en radicales equivalentes con igual índice (mcm de los índices).

$$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$$
$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$$
$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$$

El reducir a común índice permite comprobar si dos radicales son o no equivalentes y ordenar dos o más radicales.

Por ejemplo: a) $\sqrt[4]{16} = \sqrt{4}$, $pues\ \sqrt[4]{4^2} = \sqrt{4}$ (radicales equivalentes)

b) $\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{3} < \sqrt{2}$ pues $\sqrt[12]{16} < \sqrt[12]{27} < \sqrt[12]{64}$

20.- Reduce a índice común los siguientes radicales:

$$)\ \sqrt{2}\,, \sqrt[3]{3}\,, \sqrt[5]{5} \quad b)\ \sqrt[4]{4}\ \ y\ \sqrt[3]{7}$$

21.- Indica si son equivalentes o no los siguientes radicales.

$$)\ \sqrt[4]{3^6}\ \ y\ \sqrt{3^3} \quad b)\ \sqrt[5]{2^{10}}\ y\sqrt{2} \quad c)\ \sqrt[4]{36}\ y\sqrt{6} \quad d)\ \sqrt[4]{5^{10}}\ \ y\ \sqrt{5^4}$$

22.- Ordena de mayor a menor, reduciendo a índice común.

$$)\ \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{4}\ y\sqrt[6]{6} \quad b)\ \sqrt[4]{4}\ y\sqrt[5]{5} \quad c)\sqrt[5]{2}, \sqrt[3]{7}\ y\ \sqrt[4]{9}$$

**Simplificar radicales** consiste obtener el radical más simple equivalente al dado. Para ello se **extraen** de la raíz todos los **factores** posibles.

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = 2^1\sqrt{2^1} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^7} = 2^1\sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = dividiendo\ entre\ dos\ el\ índice\ y\ el\ exponente = \sqrt{2}$$

23.- Extrae los factores que puedas de la raíz.

$$)\sqrt{8}\ \ b)\sqrt{18}\ \ c)\ \sqrt{50}\ \ d)\ \sqrt{98}\ \ e)\ \sqrt{12}\ \ f)\ \sqrt{75}\ \ g)\ \sqrt[3]{1000}\ h)\ \sqrt[3]{40}$$

24.- Extrae factores de los radicales.

$$)\ \sqrt[3]{8\ \ ^5}\ \ b)\ \sqrt[4]{16\ \ ^7}\ \ c)\ \sqrt{2^6\ \ ^4b^8}\ \ d)\ \sqrt[4]{a^6b^5c^9}\ \ e)\ \sqrt[5]{a^6b^{10}}$$

25.- Simplifica los siguientes radicales.

$$)\sqrt{27}\ b)\ \sqrt[3]{16}\ \ c)\sqrt[3]{54}\ \ d)\ \sqrt[4]{32}\ \ e)\sqrt{75}\ \ f)\ \sqrt[5]{128}\ \ g)\ \sqrt[6]{27}\ \ h)\ \sqrt[8]{625}$$

Los **factores** que están fuera de la raíz se pueden **introducir dentro** de ésta elevándolos al índice de la raíz.

$$6ab\sqrt{3} = \sqrt{6^2\cdot\ \ ^2\cdot b^2\cdot 3} = \sqrt{108\cdot\ \ ^2\cdot b^2}$$

$$2a\sqrt[3]{2ab^2} = \sqrt[3]{2^3\cdot\ \ ^3\cdot 2ab^2} = \sqrt[3]{16a^4b^2}$$

26.- Introduce los factores bajo el radical.

$$)\ 2\sqrt[3]{5}\ \ b)\ 4\sqrt[4]{20}\ \ c)\ 3\sqrt[5]{15}\ \ d)\ \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\ \ e)\ 2\sqrt[3]{7}\ \ f)\ 5\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$$

**Operaciones con radicales**

- **Suma o resta de radicales.** Para poder sumar y/o restar radicales, estos deben tener el mismo índice e idéntico radicando (los radicales que cumplen esto se llaman radicales semejantes).

$$b\sqrt[n]{a}+c\sqrt[n]{a}=(b+c)\sqrt[n]{a}$$

a) $3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}+9\sqrt[3]{3}=8\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{24}-3\sqrt{6}+\sqrt{54}+5=\sqrt{3\cdot 2^3}-3\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt{3^3\cdot 2}+5=$

$2\sqrt{6}-3\sqrt{6}+3\sqrt{6}+5=2\sqrt{6}+5$

- **Multiplicación o división de radicales.** Para multiplicar y/o dividir radicales, estos deben tener el mismo índice. Si los radicales no tienen el mismo índice, se reducen a índice común y después se opera.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{25}=\sqrt[6]{2^3}:\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{25^2}=\sqrt[6]{2^3:2^2\cdot 5^4}=\sqrt[6]{1250}$$

- **Potencia de un radical y raíz de un radical.**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^{n\cdot m}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

$$)\left(2\sqrt[3]{5}\right)^4=2^4\cdot\sqrt[3]{5^4}=16\cdot 5\sqrt[3]{5}=80\sqrt[3]{5}$$

$$b)\sqrt[4]{2\sqrt[3]{3}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3\cdot 3}}=\sqrt[12]{24}$$

27.- Expresa mediante un solo radical.

$$)\ \sqrt[5]{3\sqrt{5}}\quad b)\ \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}\quad c)\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}\quad d)\ \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}\quad e)\ \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}\quad f)\ \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$$

28.- Efectúa estas operaciones.

$$)\sqrt{20}-3\sqrt{125}+2\sqrt{45}\quad b)\ 7\sqrt[3]{81}-2\sqrt[6]{3^2}+\frac{\sqrt[3]{3}}{5}$$

29.- Opera y simplifica.

$$)4\sqrt{27}\cdot 5\sqrt{6}\quad b)\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3\quad c)\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}\quad d)\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$$

30.- Opera y simplifica.

$$a)\left(3\sqrt{2}-5\right)\left(4\sqrt{2}-3\right)\qquad c)\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$$

$$b)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\quad d)\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)+\left(2-4\sqrt{5}\right)\left(2+4\sqrt{5}\right)$$

31.- Halla el resultado.

$$)\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}\qquad b)\sqrt[3]{5\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+1}$$

32.- Opera y simplifica.

$$)\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{18}+\sqrt{32}\quad b)\sqrt{24}+7\sqrt{6}-2\sqrt{486}\quad c)\sqrt[3]{128}-2\sqrt[3]{32}$$

$$d)\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{128}\quad e)\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{7}\quad f)\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}\quad g)\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$$

La **racionalización** consiste en transformar "fracciones" que tengan radicales en el denominador en otras equivalentes que no los tengan. Por ejemplo:

$$\frac{6}{\sqrt[7]{3^2}}=\frac{6\cdot\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2}\cdot\sqrt[7]{3^5}}=\frac{6\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^7}}=\frac{6\sqrt[7]{3^5}}{3}=2\sqrt[7]{3^5}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{4\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\frac{4\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{4\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-2}$$
$$=-2\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})$$

33.- Racionaliza y simplifica.

$$)\ \frac{6\sqrt{6}-6}{\sqrt{6}}\quad b)\frac{-5}{2\sqrt{5}}\quad c)\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\quad d)\ \frac{5\sqrt{3}-4}{\sqrt[5]{3^2}}\quad e)\ \frac{-6}{2\sqrt[4]{7}}$$

34.- Elimina las raíces del denominador.

$a)\ \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ $\quad d)\ \dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

$b)\ \dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{}{\sqrt{11}-3}$

$c)\ \dfrac{-5}{\sqrt{3}-2}$ $\quad f)\ \dfrac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

Para resolver operaciones entre fracciones con radicales lo que se suele hacer es:

1º Se racionaliza cada una de las fracciones con radicales en el denominador.

2º Se opera con las fracciones racionalizadas.

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1}-\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = racionalizamos\ cada\ fracción = \frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{1}$$

$$= \quad hora\ operamos\ y\ da\ como\ resultado = \frac{1-\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2}$$

35.- Realiza estas operaciones.

$$)\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad b)\ \frac{1}{\sqrt[9]{6}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$$

36.- Efectúa las operaciones.

$$)\frac{1}{\sqrt{5}+1}-\frac{1}{\sqrt[3]{5}} \qquad b)\frac{1}{\sqrt[9]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

## 4.- LOS LOGARITMOS.

Dados dos números reales positivos $a$ y $b$ ($b \neq 1$), el **logaritmo en base b de a** es el **exponente *x*** al que hay que elevar la base $b$ para que el resultado sea $a$.

$$\log_b a = x \rightarrow b^x = a$$

Ejemplos:

$$a)\ \log_3 27 = 3 \quad porque \quad 3^3 = 27$$
$$b)\ \log_7 7 = 1 \quad porque \quad 7^1 = 7$$
$$c)\ \log_2 32 = 5 \quad porque \quad 2^5 = 32$$
$$d)\ \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3 \quad porque \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

Cuando los logaritmos son en base 10 se llaman **logaritmos decimales**, y no se escribe la base.

$$\log\ 100 = 2 \rightarrow 10^2 = 100$$

Ejemplos:

$$a)\ \log 1000 = 3 \quad porque \quad 10^3 = 1000$$
$$b)\ \log 0{,}1 = -1 \quad porque \quad 10^{-1} = 0{,}1$$

La calculadora científica nos permite calcular logaritmos decimales con la tecla ***log***

Si la base es el número $e$ = *2,7182…*, se llaman **logaritmos neperianos** o logaritmos naturales, y se escribe

$$\ln\ a$$

Ejemplos:

$$a)\ \ln e^3 = 3$$
$$b)\ \ln 1 = 0$$

La calculadora científica nos permite obtener logaritmos naturales o neperianos usando la tecla ***ln***

Se puede considerar que el logaritmo es la operación inversa de la exponencial.

$$\log_b \quad = x \leftrightarrow b^x =$$

37.- Calcula, mediante la definición estos logaritmos.

$) \log_2 8 \quad b) \log_3 81 \quad c) \log 10000 \quad d) \log 0{,}001 \quad e) lne^{33} \quad f) lne^{-4} \quad g) \log_4 16 \quad h) \log_4 0{,}25$

38.- Halla, mediante la definición, los siguientes logaritmos.

$) \log_3 243 \quad b) \log_9 81 \quad c) \log 100000 \quad d) \log 0{,}00001 \quad e) lne^2 \quad f) lne^{-14} \quad g) \log_7 343 \quad h) \log_4 0{,}0625$

**Propiedades de los logaritmos**

- El logaritmo de 1 es siempre 0, y el logaritmo de la base es 1.
  $$\log_b 1 = 0 \quad \log_b b = 1$$
- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.
  $$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$
- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.
  $$\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$$
- El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia.
  $$\log_b a^c = c \log_b a$$
- Cambio de base en los logaritmos.
  $$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Esta última propiedad nos permite calcular cualquier logaritmo conociendo solo los logaritmos decimales o neperianos. Por ejemplo:

$$\log_3 81 = \frac{\log 81}{\log 3} = \frac{\ln 81}{\ln 3} = 4$$

39.- Sabiendo que $\log_3 2 = 0{,}63$; halla $\log_3 24$ mediante las propiedades de los logaritmos (no puedes hacer uso de la calculadora).

40.- Halla el resultado de estas expresiones, mediante las propiedades de los logaritmos.

$$a)\,2\log_4 16+\log_2 32-3\log_7 49=$$
$$b)\,\log_2 8+\log_3 27+\log_5 125=$$
$$c)\,\log_5 625-\log_9 81+\log_8 64=$$

41.- Determina, utilizando las propiedades y la calculadora.

$a)\,\log_5 36^2$

$b)\,\log_2 \sqrt{31}$

$c)\,\log_6 100$

$d)\,\log_4 31^5$

42.- Calcula el valor de *x*.

$$)\ \log_3 x=5\quad b)\ \log_5 x=3\quad c)\ \log_2 x=-1\quad d)\ \log_{\frac{2}{3}} x=4$$
$$e)\ \log_3(x-2)=5\quad f)\ \log_3(x+2)=3\quad g)\ \log_2(2-x)=-1\quad h)\ \log_3(x+3)=4$$

43.- Halla cuánto vale *x*.

$$)\,\log_x 3=-1\quad b)\,\log_x 5=2\quad c)\,\log_x 3=-2\quad d)\,\log_x 2=5$$

44.- Calcula el valor de *x*.

$$)\ \log_3 9^x=2\quad b)\ \log 2^x=\frac{3}{2}\quad c)\,\ln 3^x=-1\quad d)\ \log_2 4^{x+4}=-2$$
$$e)\,\log_3 9^{x+3}=3\quad f)\ \log 2^{\frac{x}{2}}=\frac{3}{2}\quad g)\ \ln 3^{x+6}=3\quad h)\ \log_3 27^{3x+4}=-2$$

45.- Determina el valor de *x*.

$$)\ 8^x=1024\quad b)\ 3^{x^2}=27\quad c)\ 3^{x^2-6}=27\quad d)\ 10^{x-1}=10^3$$
$$e)\ 8^{x-2}=1024\quad e)\ (3^x)^2=27\quad f)\ 3^{x^2}+18=27\quad g)\ 2^{x^2-2x+1}=1$$

## Soluciones

1.- $)\frac{1}{40}\quad b)\frac{-45}{18}\quad c)\ \frac{1}{5}\quad d)\frac{-2}{3}$

2.- $\frac{10}{13}\quad \frac{12}{5}\quad \frac{18}{7}$

3.- $)\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\frac{21}{35}\qquad b)\frac{-5}{2}=\frac{-20}{8}=\frac{10}{-4}=\frac{25}{-10}$

5.- $)\ \frac{-26}{45}\quad b)\frac{529}{60}\quad c)\frac{21}{25}\quad d)\frac{5401}{4}\quad e)\frac{-42}{63}\quad f)7\quad g)\frac{-9488}{147}$

6.- $\frac{-7}{3} < \frac{-6}{5} < \frac{7}{6} < \frac{5}{4}$

7.- $)\ 20\quad b)\frac{2486}{135}\quad c)\frac{225}{406}$

9.- $-5 < -\sqrt{2} < \frac{-1}{2} < 0 < \frac{3}{2} < \sqrt{5} < 3{,}1415\ldots < 4$

10.- $\frac{-3}{2} < \frac{1}{4} < 0{,}5 < \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{2} < 2$

17.- Todas son falsas

18.- $)\ 2\quad b)-2\quad c)\mathit{No\ existe\ ningun\ \ raíz\ real}\quad d)\ 3$

21.- a) Sí b) No c) Sí d) No

22.- $)\ \sqrt[3]{3} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{6} > \sqrt[5]{4}\quad b)\sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5}\quad c)\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{9} > \sqrt[5]{2}$

23.- $)2\sqrt{2}\quad b)\ 3\sqrt{2}\quad c)5\sqrt{2}\quad d)7\sqrt{2}\quad e)2\sqrt{3}\quad f)5\sqrt{3}\quad g)10\quad h)2\sqrt[3]{5}$

24.- $)2a\sqrt[3]{a^2}\quad b)2a\sqrt[4]{a^3}\quad c)2^3\ \ {}^2b^4\quad d)\ abc^2\sqrt[4]{a^2bc}\quad e)ab^2\sqrt[5]{a}$

25.- $)\ 3\sqrt{3}\quad b)\ 2\sqrt[3]{2}\quad c)3\sqrt[3]{2}\quad d)2\sqrt[4]{2}\quad e)5\sqrt{3}\quad f)\ 2\sqrt[5]{4}\quad g)\sqrt{3}\quad h)\ \sqrt{5}$

26.- $)\sqrt[3]{40}\quad b)\sqrt[4]{5120}\quad c)\sqrt[5]{3645}\quad d)\ \sqrt[4]{\frac{3}{8}}\quad e)\sqrt[3]{56}\quad f)\sqrt[3]{25}$

27.- $)\ \sqrt[10]{3^2\cdot 5}\quad b)\ \sqrt[12]{2}\quad c)\sqrt[8]{3}\quad d)\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\quad e)\sqrt[12]{2}\quad f)\ \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$

28.- $)-7\sqrt{5}\quad b)\frac{96\sqrt[3]{3}}{5}$

29.- $)180\sqrt{2}\quad b)\frac{1}{4}\quad c)\sqrt[6]{108}\quad d)\sqrt[12]{3^7}$

30.- $)-29\sqrt{2}+39\quad b)1\quad c)6+4\sqrt{3}\quad d)-72$

31.- $)\ 5\quad b)\sqrt[3]{74}$

32.- $)\ 4\sqrt{2}\quad b)-9\sqrt{6}\quad c)4\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{4}\quad d)\ 16\quad e)\sqrt[6]{7^5}\quad f)2\quad g)\sqrt[6]{3}$

33.- $)6-\sqrt{6}\quad b)\frac{-\sqrt{5}}{2}\quad c)\frac{\sqrt{2}-2}{2}\quad d)\frac{15\sqrt[10]{3}-4\sqrt[5]{-3^3}}{3}\quad e)\frac{-3\sqrt[4]{7^3}}{7}$

34.- $)\sqrt{2}-1\quad b)-3\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\ c)5\sqrt{3}+10\quad d)\frac{24+4\sqrt{10}}{13}\quad e)\ \frac{7\sqrt{11}+21}{2}\quad f)5\sqrt{6}-5\sqrt{7}$

35.- $)\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^5}}$ $b)\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[18]{6^{11}}}{\sqrt[9]{6\cdot 2^3}}$

36.- $)\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt{5}-5}{\sqrt[6]{5^5}+5\sqrt[3]{5}}$ $b)\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[9]{3}}{\sqrt[9]{3^7}}$

37.- $)3\ \ b)4\ \ c)3\ \ d)-4\ \ e)33\ \ f)-4\ \ g)2\ \ h)-1$

38.- $)5\ \ b)\ 2\ \ c)6\ \ d)-5\ \ e)\ 2\ \ f)-14\ \ g)\ 3\ \ h)-2$

39.- 2,89

40.- $)\ 3\ \ b)\ 9\ \ c)\ 4$

41.- $)4{,}4531\ \ b)\ 2{,}4771\ \ c)\ 2{,}5701\ \ d)\ 12{,}3855$

42.- $)\ 243\ \ b)\ 125\ \ c)\ 0{,}5\ \ d)\ \frac{16}{81}\ \ e)\ 245\ \ f)\ 123\ \ g)\ 1{,}5\ \ h)\ 279838$

43.- $)\frac{1}{3}\ \ b)\ \sqrt{5}\ \ c)\ \sqrt{\frac{1}{3}}\ \ d)\sqrt[5]{2}$

44.- $)\ 1\ \ b)\ 4{,}9829\ \ c)-0{,}9102\ \ d)-5\ \ e)-2\ \ f)\ 9{,}9658\ \ g)-3{,}2693\ \ h)\frac{-14}{9}$

45.- $)\ \frac{10}{3}\ \ b)\ \pm\sqrt{3}\ \ c)\ \pm 3\ \ d)\ 4\ \ e)\ \frac{16}{3}\ \ f)\ \frac{3}{2}\ \ g)\ \sqrt{2}\ \ h)\ 1$

## Teorema: Raíz de 2 es irracional – Demostración por Reducción al Absurdo

La demostración comienza suponiendo que raíz de 2 no es irracional y acabará en algo contradictorio. Si no es irracional debe ser obligatoriamente racional, es decir, debe ser igual a una fracción así:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

Podemos suponer sin ningún problema que el máximo común divisor de *p* y *q* es 1, es decir, que no tienen factores comunes y por tanto son primos relativos. Elevamos al cuadrado y operando queda:

$$2=\frac{p^2}{q^2}\Rightarrow 2q^2=p^2$$

Por tanto $p^2$ debe ser múltiplo de 2, lo que implica que *p* también es un múltiplo de 2. Es decir, $p = 2k$ para un cierto *k*. Sustituimos este valor de *p* en la expresión anterior y simplificamos un 2 de esa igualdad:

$$2q^2=(2k)^2\Rightarrow q^2=2k^2$$

Esa expresión nos asegura que $q^2$ es múltiplo de 2, y por tanto también lo es *q*. Y aquí está el absurdo: habíamos supuesto que *p* y *q* no tenían factores comunes (es decir, mcd(p,q) = 1) y hemos llegado a que los dos son múltiplos de 2, es decir, que tienen al 2 como factor común, y por tanto su mcd debe ser al menos 2. Esa es la contradicción que buscábamos.
Conclusión: **Raíz de 2 es irracional**.