

Nombre:

PUNTUACIÓN: 1 punto cada ejercicio

1. Opera y simplifica:

a) $\sqrt{75} - \sqrt{147} + \sqrt{675} - \sqrt{12}$

b) $\sqrt[6]{2^3 \sqrt{2 \sqrt{2}}}$

2. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$

b) $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{10}{3}$

3. Representa gráficamente la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -3 \\ -2x - 4 & -3 < x \leq 2 \\ \frac{3}{x-2} & x > 2 \end{cases}$$

Halla su dominio y su recorrido. ¿Es continua? ¿Por qué?

4. Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 65 \end{cases}$$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log_5 \frac{1}{125} = x$

b) $\log_2(x^3 - 7) = 0$

c) $\log_{36} x = \frac{1}{2}$

d) $\log_x 27 = -3$

6. La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles es $6\sqrt{5}$ metros. Calcula el área y el perímetro del triángulo.

7. Dados los puntos $A(-1,3)$, $B(1,1)$ y $C(-3,-2)$

a) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB .

b) Halla la ecuación de una recta que sea paralela a AB y pase por el punto C .

8. El hilo de una cometa mide 50 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de 37° , ¿a qué altura vuela la cometa?

9. Dibuja un ángulo α en el segundo cuadrante, sabiendo que $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Halla las restantes razones trigonométricas de α (Sin calculadora, usando las fórmulas trigonométricas y trabajando con fracciones, no con decimales)

10. Un estanque rectangular (6m x 4m), está rodeado por un camino uniforme de ancho x . Calcula x (el ancho del camino) sabiendo que la superficie del camino es igual que el área del estanque.

SOLUCIÓN

1. Opera y simplifica:

a) $\sqrt{75} - \sqrt{147} + \sqrt{675} - \sqrt{12} = 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$

b) $\sqrt[6]{2^3 \sqrt{2} \sqrt{2}} = \sqrt[6]{2^3 \sqrt{2^2} \cdot 2} = \sqrt[6]{2^6 \sqrt{2^3}} = \sqrt[12]{2^6 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^9} = \sqrt[4]{2^3}$

2. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0 \rightarrow z = x^2 \rightarrow z^2 - 24z + 144 = 0$

$(z - 12)^2 = 0 \Rightarrow z - 12 = 0 \Rightarrow z = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

b) $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{10}{3} \rightarrow \text{m.c.m.} = 3(x-4)(x+4)$

$\frac{3(x+4)^2}{3(x-4)(x+4)} + \frac{3(x-4)^2}{3(x-4)(x+4)} = \frac{10(x-4)(x+4)}{3(x-4)(x+4)}$

$3x^2 + 24x + 48 + 3x^2 - 24x + 48 = 10x^2 - 160 \rightarrow 4x^2 - 256 = 0$

$4x^2 = 256 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = \pm 8$

3. Representa gráficamente la función:

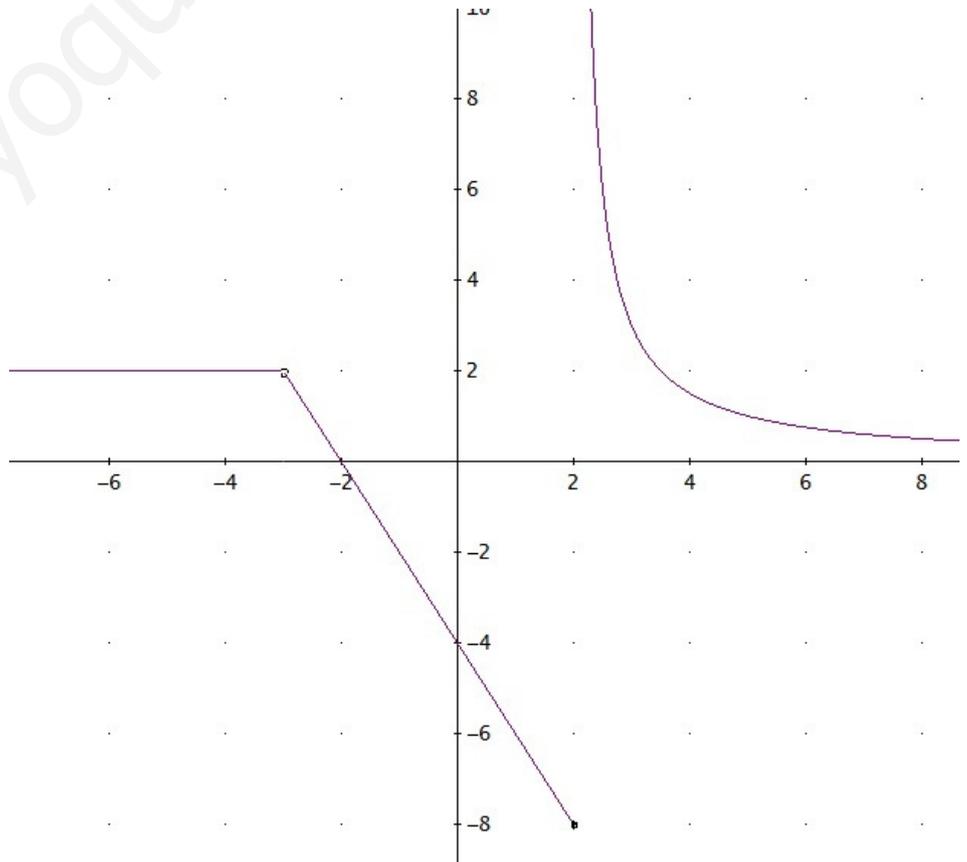
$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -3 \\ -2x - 4 & -3 < x \leq 2 \\ \frac{3}{x-2} & x > 2 \end{cases}$$

Halla su dominio y su recorrido. ¿Es continua? ¿Por qué?

$D = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

$D = [-8, +\infty)$

No es continua, tiene una discontinuidad evitable en -3 y otra de salto infinito en 2. En el resto si es continua.



4. Resuelve el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 65 \end{array} \right\} \rightarrow y = 3 - x \rightarrow x^2 + (3 - x)^2 = 65 \rightarrow x^2 + 9 - 6x + x^2 = 65$$

$$2x^2 - 6x - 56 = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 28 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{3 \pm 11}{2} = \begin{cases} 7 \\ -4 \end{cases}$$

$$\text{Para } x = 7 \rightarrow y = 3 - x = 3 - 7 = -4$$

$$\text{Para } x = -4 \rightarrow y = 3 - x = 3 + 4 = 7$$

Solución: la recta y la parábola son secantes, se cortan en los puntos $(7, -4)$ y $(-4, 7)$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \log_5 \frac{1}{125} = x \rightarrow 5^x = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3} \Rightarrow x = -3$$

$$\text{b) } \log_2(x^3 - 7) = 0 \rightarrow 2^0 = x^3 - 7 \rightarrow 1 = x^3 - 7 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{c) } \log_{36} x = \frac{1}{2} \rightarrow 36^{\frac{1}{2}} = x \rightarrow \sqrt{36} = x \Rightarrow x = 6$$

$$\text{d) } \log_x 27 = -3 \rightarrow x^{-3} = 27 = 3^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

6. La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles es $6\sqrt{5}$ metros. Calcula el área y el perímetro del triángulo.

Isósceles implica que los catetos son iguales, llamémosles x . Aplicamos el teorema de Pitágoras: $x^2 + x^2 = (6\sqrt{5})^2 \Rightarrow 2x^2 = 36 \cdot 5 \Rightarrow x^2 = 90 \rightarrow x = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ m

$$\text{Área: } A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{90}{2} = 45\text{m}^2$$

$$\text{Perímetro: } P = x + x + 6\sqrt{5} = 3\sqrt{10} + 3\sqrt{10} + 6\sqrt{5} = 6\sqrt{10} + 6\sqrt{5} \text{ metros}$$

7. Dados los puntos $A(-1,3)$, $B(1,1)$ y $C(-3,-2)$

a) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB .

Pasa por el punto medio M , perpendicular a AB

$$M = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (0,2), \overline{AB} = (2,-2) \rightarrow \text{perpendicular}(2,2) \rightarrow m = 1$$

Ecuación de la mediatriz: $y = 1(x - 0) + 2 \Rightarrow y = x + 2$

b) Halla la ecuación de una recta que sea paralela a AB y pase por el punto C.

Paralela implica misma pendiente, pendiente de AB $\rightarrow m = -1$

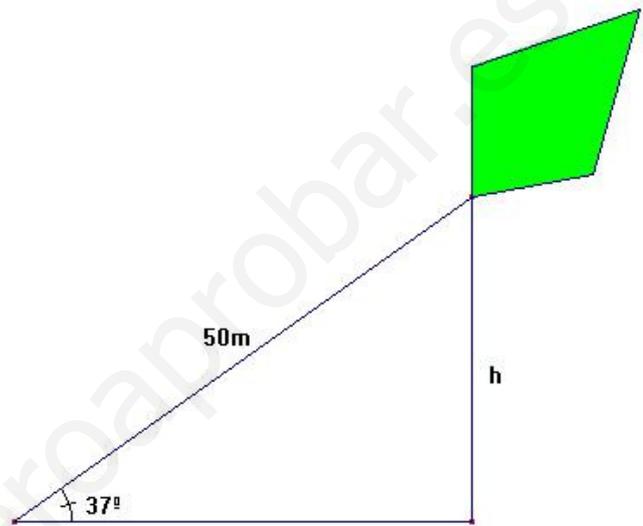
Ecuación pedida: $y = -1(x + 3) - 2 \Rightarrow y = -x - 5$

8. El hilo de una cometa mide 50 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de 37° , ¿a qué altura vuela la cometa?

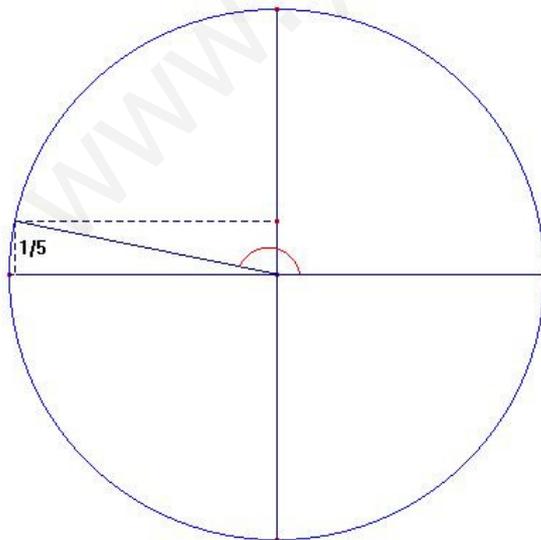
$$\text{sen } 37^\circ = \frac{h}{50}$$

$$50 \cdot \text{sen } 37^\circ = h$$

$$h = 30,09 \text{ m}$$



9. Dibuja un ángulo α en el segundo cuadrante, sabiendo que $\text{sen } \alpha = \frac{1}{5}$. Halla las restantes razones trigonométricas de α (Sin calculadora, usando las fórmulas trigonométricas y trabajando con fracciones, no con decimales)



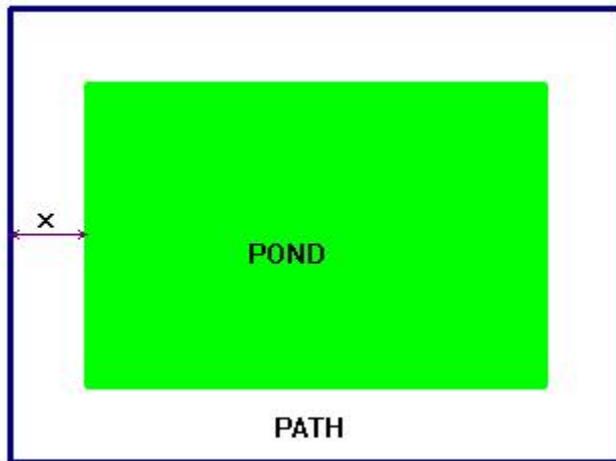
$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\text{cos}^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$$

$$\text{cos } \alpha = \pm \sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \text{ (2º cuadrante)}$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

10. Un estanque rectangular (6m x 4m), está rodeado por un camino uniforme de ancho x . Calcula x (el ancho del camino) sabiendo que la superficie del camino es igual que el área del estanque.



Área estanque:

$$A = 6 \times 4 = 24\text{m}^2$$

Luego el área del estanque más la del camino (rectángulo grande) será el doble, es decir 48m^2

Área rectángulo grande:

$$A = (6 + 2x) \times (4 + 2x) = 48$$

$$\text{Ecuación: } (6 + 2x) \times (4 + 2x) = 48 \rightarrow 24 + 8x + 12x + 4x^2 = 48$$

$$4x^2 + 20x - 24 = 0 \rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -6 \end{cases}$$

Solución: el camino es de 1 metro de ancho