EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1 **Arquímedes nació en el año 287 a. C. en Siracusa (Sicilia). ¿Cuántos años han transcurrido desde su nacimiento?**

$2008 - (-287) = 2295$ años

1.2 **¿De qué número es 6 la tercera parte? ¿Y la sexta?**

Si x es el número buscado, entonces $\frac{x}{3} = 6$, luego $x = 18$.

Y $\frac{x}{6} = 6$, luego $x = 36$

1.3 **Sergio recorre en bicicleta los $\frac{7}{9}$ del trayecto de una prueba deportiva. Si aún le faltan 18 kilómetros, ¿cuántos kilómetros tiene la carrera?**

Si ha recorrido $\frac{7}{9}$ del trayecto, le quedan por recorrer $\frac{2}{9}$, que corresponden a 18 km.

Por tanto, $\frac{1}{9}$ del trayecto es $\frac{18}{2}$ km $= 9$ km

Luego los $\frac{9}{9}$ equivalen a: $9 \cdot 9 = 81$ km.

Medida del trayecto: 81 km

1.4 **En un centro de acogida de animales se recogen perros y gatos callejeros. Los perros representan $\frac{7}{15}$ del total. Si el número de animales es de 120, ¿cuántos perros y gatos hay?**

Número de perros: $\frac{7}{15} \cdot 120 = 7 \cdot \frac{1}{15} \cdot 120 = 7 \cdot 8 = 56$

Número de gatos: $120 - 56 = 64$

1.5 **Una urbanización en la costa recicla 65 000 metros cúbicos de agua para el riego de sus calles y jardines. Si esta cantidad representa los $\frac{7}{10}$ del total, ¿cuántos metros cúbicos quedan sin reciclar?**

$\frac{1}{10}$ de las toneladas recicladas es: $65\,000 : 10 = 6500$.

Toneladas sin reciclar, $\frac{3}{10} : 3 \cdot 6500 = 19\,500$ m^3.

1.6 **El agua, al helarse, aumenta aproximadamente $\frac{1}{10}$ su volumen y, por eso, el hielo flota en el agua. Si se tiene un metro cúbico de agua, ¿cuánto aumenta su volumen?**

1 metro cúbico $= 1000$ dm^3

Volumen de un dm^3 de agua helada: $10 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$

Volumen de un m^3 de agua helada: $\frac{11}{10} \cdot 1000$ dm^3 $= 1100$ dm^3

Por tanto, aumenta 100 dm^3.

1.7 **Amplifica la fracción $\frac{7}{11}$ a una que tenga por numerador 77 y a otra con denominador 99.**

a) Se amplifica multiplicando por 11: $\frac{7}{11} = \frac{77}{121}$

b) Se amplifica multiplicando por 9: $\frac{7}{11} = \frac{63}{99}$

1.8 Comprueba si las siguientes fracciones son equivalentes.

a) $\frac{3}{5}$ **y** $\frac{12}{20}$ **b)** $\frac{4}{5}$ **y** $\frac{8}{10}$ **c)** $\frac{7}{20}$ **y** $\frac{40}{100}$ **d)** $\frac{6}{14}$ **y** $\frac{21}{49}$

a) $3 \cdot 20 \neq 5 \cdot 12 \Rightarrow$ No son equivalentes.

b) $4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 \Rightarrow$ Sí son equivalentes.

c) $7 \cdot 100 \neq 20 \cdot 40 \Rightarrow$ No son equivalentes.

d) $6 \cdot 49 = 14 \cdot 21 \Rightarrow$ Sí son equivalentes.

1.9 Halla la fracción irreducible de las siguientes fracciones.

a) $\frac{270}{990}$ **b)** $\frac{150}{225}$ **c)** $\frac{80}{240}$ **d)** $\frac{72}{360}$ **e)** $\frac{111}{393}$ **f)** $\frac{39}{195}$

a) m.c.d.(270, 990) $= 90 \Rightarrow \frac{270}{990} = \frac{3}{11}$

b) m.c.d.(150, 225) $= 75 \Rightarrow \frac{150}{225} = \frac{2}{3}$

c) m.c.d.(80, 240) $= 80 \Rightarrow \frac{80}{240} = \frac{1}{3}$

d) m.c.d.(72, 360) $= 72 \Rightarrow \frac{72}{360} = \frac{1}{5}$

e) m.c.d.(111, 393) $= 3 \Rightarrow \frac{111}{393} = \frac{37}{131}$

f) m.c.d.(39, 195) $= 39 \Rightarrow \frac{39}{195} = \frac{1}{5}$

1.10 Indica si son correctas las siguientes desigualdades.

a) $\frac{14}{12} < \frac{16}{10} < \frac{20}{14}$ **b)** $-\frac{15}{18} > -\frac{33}{39} > -\frac{45}{54}$

Se calcula el m.c.m. para conseguir que todas las fracciones tengan el mismo denominador y poder comparar los numeradores.

a) La desigualdad no es correcta porque m.c.m.(12, 10, 14) $= 420$.

$\frac{14}{12} = \frac{490}{420}$ $\frac{16}{10} = \frac{672}{420}$ $\frac{20}{14} = \frac{600}{420}$ $\Rightarrow \frac{14}{12} < \frac{20}{14} < \frac{16}{10}$

b) La desigualdad no es correcta porque m.c.m.(18, 39, 54) $= 702$.

$\frac{-15}{18} = \frac{-585}{702}$ $\frac{-33}{39} = \frac{-594}{702}$ $\frac{-45}{54} = \frac{-585}{702}$ $\Rightarrow \frac{-33}{39} < \frac{-15}{18} = \frac{-45}{54}$

1.11 Ordena de menor a mayor los siguientes números racionales: $\frac{4}{3}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{6}{10}, -\frac{2}{3}$

Para ordenar las fracciones se transforman a otras con igual denominador entre ellas.

$\frac{4}{3} = \frac{40}{30}$ $\frac{5}{2} = \frac{75}{30}$ $-\frac{3}{5} = \frac{-18}{30}$ $\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$ $-\frac{6}{10} = \frac{-18}{30}$ $-\frac{2}{3} = \frac{-20}{30}$

Ordenación: $-\frac{2}{3} < -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{4}{3} < \frac{5}{2}$

1.12 Escribe tres fracciones, si existen, comprendidas entre:

$$\frac{2}{5} \text{ y } \frac{3}{5}$$

¿Existen tantas fracciones como queramos? ¿Por qué?

Observa el proceso: $\frac{2}{5} = \frac{20}{50} < \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

Entre las fracciones centrales podemos escribir 9 fracciones de denominador 50. Fracciones intermedias:

$$\frac{2}{5} = \frac{20}{50} < \frac{21}{50} < \frac{22}{50} < \frac{23}{50} < \ldots < \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

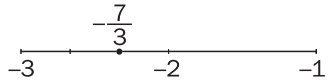
Hay infinitas fracciones.

1.13 Utiliza el teorema de Tales para representar en una recta estos números racionales.

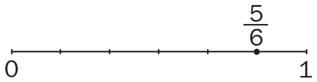
a) $\mathbf{\frac{5}{2}}$ **b)** $\mathbf{-\frac{7}{3}}$ **c)** $\mathbf{\frac{5}{6}}$ **d)** $\mathbf{-\frac{2}{5}}$

a) $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$

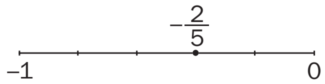
b) $-\frac{7}{3} = -2 - \frac{1}{2}$



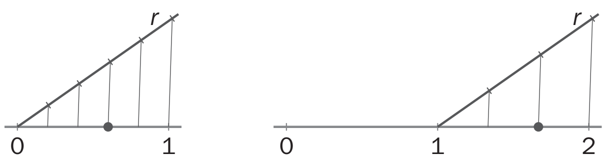
c) $\frac{5}{6}$



d) $-\frac{2}{5}$



1.14 Escribe el número representado en cada figura.



a) El número representado es $\frac{3}{5}$.

b) El número representado es $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

1.15 Calcula y simplifica el resultado:

a) $\mathbf{\frac{3}{5} : \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} : \frac{3}{7}}$ **b)** $\mathbf{\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)}$

a) $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} : \frac{3}{7} = \frac{9}{10} - \frac{16}{15} + \frac{1}{3} - \frac{21}{12} = \frac{54 - 64 + 20 - 105}{60} = \frac{-95}{60} = \frac{-19}{12}$

b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{16 - 84 - 20 - 6}{24}\right) : \left(\frac{-8 + 4 - 1}{6}\right) = \frac{82}{24} : \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{492}{-129} = -\frac{41}{10}$

1.16 Calcula y simplifica el resultado:

a) $\mathbf{\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{11} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right)}$ **b)** $\mathbf{\frac{5}{9} - \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)^2}$

a) $\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{11} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{10 - 3}{6} - \frac{4}{11} \cdot \frac{15 - 4}{20} = \frac{21}{48} - \frac{44}{220} = \frac{1155 - 528}{2640} = \frac{627}{2640} = \frac{209}{880}$

b) $\frac{5}{9} - \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{5}{9} + \frac{1}{4} + \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{5}{9} + \frac{1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{100 + 45 + 54}{180} = \frac{199}{180}$

1.17 Escribe cada número fraccionario en forma decimal. Indica qué tipo de número decimal es cada uno y, si existen, la parte entera, el anteperíodo y el período.

a) $\mathbf{\frac{10}{4}}$ **b)** $\mathbf{\frac{13}{27}}$ **c)** $\mathbf{\frac{16}{11}}$ **d)** $\mathbf{\frac{19}{6}}$

a) $\frac{10}{4} = 2{,}5$ tiene una expresión decimal exacta.

b) $\frac{13}{27} = 0{,}48\widehat{148}$ tiene una expresión decimal periódica mixta con período = 148 y anteperíodo = 48.

c) $\frac{16}{11} = 1{,}\widehat{45}$ tiene una expresión decimal periódica pura con parte entera = 1 y período = 45.

d) $\frac{19}{6} = 3{,}1\widehat{6}$ tiene una expresión decimal periódica mixta con período = 6 y anteperíodo = 1.

1.18 Indica, sin hacer la división, el tipo de expresión decimal de las siguientes fracciones.

a) $\frac{17}{6}$ **b)** $\frac{17}{21}$ **c)** $\frac{29}{14}$ **d)** $\frac{77}{50}$

a) Denominador: $6 = 2 \cdot 3$
Fracción mixta, ya que tiene los factores 2 y 3

b) Denominador: $21 = 3 \cdot 7$
Fracción periódica pura, ya que tiene los factores 3 y 7.

c) Denominador: $14 = 2 \cdot 7$
Fracción mixta, ya que tiene los factores 2 y 7.

d) Denominador: $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$
Fracción exacta, ya que tiene los factores 2 y 5.

1.19 Escribe en forma fraccionaria estos números.

a) 2,222… c) −7,1 e) 0,66 g) 0,155…

b) 10,555… d) 6,2525… f) 2,15 h) 0,3333…

a) $2{,}222\ldots = \frac{20}{9}$ c) $-7{,}1 = -\frac{71}{10}$ e) $0{,}66 = \frac{2}{3}$ g) $0{,}155\ldots = \frac{7}{45}$

b) $10{,}555\ldots = \frac{95}{9}$ d) $6{,}2525\ldots = \frac{619}{99}$ f) $2{,}15 = \frac{215}{100}$ h) $0{,}3333\ldots = \frac{1}{3}$

1.20 Suma los números decimales 0,3333… y 0,5555…, pasando previamente a fracciones. ¿Se obtiene el mismo resultado?

$0{,}3333\ldots + 0{,}5555\ldots = \frac{3}{9} + \frac{5}{9} = \frac{8}{9} = 0{,}8888\ldots$

Observa que es también la suma de los dos números decimales.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1.21 Carlos ha vuelto a ir de compras. Ahora ha gastado dos quintas partes de su dinero en fruta, los tres séptimos de lo que le quedó, en yogures, y 18 euros en leche, gastando todo su dinero. ¿Cuánto gastó en total?

Carlos gastó en leche cuatro séptimas partes de lo que tenía después de comprar fruta. Si esa cantidad fueron 18 euros, tras comprar fruta le quedaron $18 : \left(\frac{4}{7}\right) = 31{,}50$ euros. Como en fruta gastó dos quintos de su dinero, esa cantidad es igual a los tres quintos del dinero con el que salió de casa. Por tanto, Carlos gastó en total $31{,}50 : \left(\frac{3}{5}\right) = 52{,}50$ euros.

1.22 Los amigos de Carlos salieron a pasear. Después de una hora, la sexta parte del grupo decidió regresar, y los tres quintos de los que quedaban pararon para hacer un descanso. Los otros cuatro amigos siguieron andando hasta llegar a su destino. ¿Cuántos formaban el grupo?

Los cuatro amigos son las dos quintas partes de los que no dieron la vuelta. Por tanto, entre estos cuatro y los que pararon a descansar eran 10 personas. Como esa cantidad correspondía a las cinco sextas partes del grupo, inicialmente salieron a pasear 12 personas.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Números fraccionarios. Números racionales

1.23 Escribe la fracción que corresponde a estas expresiones:

a) Alba ha resuelto bien 4 de los 5 ejercicios del examen.

b) El 15% de los habitantes de una ciudad son inmigrantes.

c) La octava parte de los 96 participantes de un maratón no terminó la prueba.

d) En una empresa, 8 de cada 10 empleados llegan puntualmente al trabajo.

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{15}{100}$ c) $\frac{96}{8}$ d) $\frac{8}{10}$

1.24 **Calcula el valor de x para que sean equivalentes las siguientes fracciones:**

a) $\frac{x}{26}$ **y** $\frac{8}{13}$ **b)** $\frac{42}{54}$ **y** $\frac{7}{x}$ **c)** $\frac{x}{50}$ **y** $\frac{2}{x}$

a) $\frac{x}{26} = \frac{8}{13} \Leftrightarrow 13x = 8 \cdot 26 \Leftrightarrow x = 16$

b) $\frac{42}{54} = \frac{7}{x} \Leftrightarrow 42x = 7 \cdot 54 \Leftrightarrow x = 9$

c) $\frac{x}{50} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 = 2 \cdot 50 \Leftrightarrow x = 10$

1.25 **Halla, mediante amplificación, cuatro fracciones equivalentes a cada una de las dadas.**

a) $\frac{19}{8}$ **b)** $\frac{12}{30}$ **c)** $\frac{16}{11}$ **d)** $\frac{8}{15}$

a) $\frac{19}{8} = \frac{38}{16} = \frac{57}{24} = \frac{76}{32} = \frac{95}{40}$

b) $\frac{12}{30} = \frac{24}{60} = \frac{36}{90} = \frac{96}{120} = \frac{60}{150}$

c) $\frac{16}{11} = \frac{32}{22} = \frac{48}{33} = \frac{64}{44} = \frac{80}{55}$

d) $\frac{8}{15} = \frac{16}{30} = \frac{24}{45} = \frac{32}{60} = \frac{40}{75}$

1.26 **Simplifica las siguientes fracciones.**

a) $\frac{30}{45}$ **b)** $\frac{28}{35}$ **c)** $\frac{150}{200}$ **d)** $\frac{360}{300}$

a) $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{28}{35} = \frac{4}{5}$ c) $\frac{150}{200} = \frac{3}{4}$ d) $\frac{360}{300} = \frac{6}{5}$

1.27 **Escribe, para cada apartado, cinco fracciones que representen el mismo número racional dado.**

a) $\frac{17}{5}$ **b)** $\frac{25}{32}$ **c)** $\frac{60}{75}$ **d)** $\frac{24}{18}$

a) $\frac{17}{5} = \frac{34}{10} = \frac{51}{15} = \frac{68}{20} = \frac{85}{25} = \frac{102}{30}$

b) $\frac{25}{32} = \frac{50}{64} = \frac{75}{94} = \frac{100}{128} = \frac{125}{160} = \frac{150}{192}$

c) $\frac{60}{75} = \frac{120}{150} = \frac{180}{225} = \frac{240}{300} = \frac{300}{375} = \frac{360}{450}$

d) $\frac{24}{18} = \frac{48}{36} = \frac{72}{54} = \frac{96}{72} = \frac{120}{90} = \frac{144}{108}$

Fracciones y decimales

1.28 **Indica cuáles de los siguientes números decimales se pueden expresar en forma de fracción. Justifica tu respuesta.**

a) 3,14 **c) 82,7777…**

b) 8,010010001… **d) 4,08939393…**

Todos menos el del apartado b, porque no tiene período.

1.29 **Sin hallar su expresión decimal, indica si los siguientes números son exactos, periódicos puros o periódicos mixtos. Justifica tu respuesta.**

a) $\frac{13}{50}$ **b)** $\frac{35}{27}$ **c)** $\frac{8}{125}$ **d)** $\frac{97}{42}$

a) Exacto, porque el denominador sólo tiene los factores 2 y 5.
b) Periódico puro, porque el denominador no tiene los factores 2 y 5.
c) Exacto, porque el denominador sólo tiene el factor 2.
d) Periódico mixto, porque el denominador tiene los factores 2 y 3.

1.30 Halla la expresión decimal de las siguientes fracciones y di de qué tipo son (exactas, periódicas puras o periódicas mixtas).

a) $\frac{48}{19}$ **b)** $\frac{25}{36}$ **c)** $\frac{50}{64}$ **d)** $\frac{70}{9}$

a) $\frac{48}{19} = 2,\overline{526315789473684210}$. Periódica pura

b) $\frac{25}{36} = 0,59\widehat{4}$. Periódica mixta.

c) $\frac{50}{64} = 0,78125$. Exacta

d) $\frac{70}{9} = 7,\widehat{7}$. Periódica pura

1.31 Calcula la fracción irreducible equivalente a los siguientes números decimales.

a) $0,\widehat{36}$ **c)** 3,985 **e)** 18,45 **g)** $10,\widehat{5}$

b) $2,98\widehat{3}$ **d)** 1,2 **f)** $8,0\widehat{359}$ **h)** $5,3\widehat{4}$

a) $0,\widehat{36} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$

b) $2,98\widehat{3} = \frac{2983 - 298}{900} = \frac{2685}{900} = \frac{179}{60}$

c) $18,45 = \frac{1845}{100} = \frac{369}{20}$

d) $8,0\widehat{359} = \frac{80\,359 - 803}{9900} = \frac{79\,556}{9900} = \frac{19\,889}{2475}$

e) $18,45 = \frac{1845}{100}$

f) $8,0\widehat{359} = \frac{80\,359 - 803}{9900} = \frac{19\,889}{2475}$

g) $10,\widehat{5} = \frac{105 - 10}{9} = \frac{95}{9}$

h) $5,3\widehat{4} = \frac{534 - 53}{90} = \frac{481}{90}$

Ordenación, comparación y representación de números racionales

1.32 Estudia si son correctas las siguientes relaciones de orden.

a) $\frac{8}{5} > \frac{6}{5}$ **b)** $\frac{7}{16} < \frac{4}{9}$ **c)** $\frac{3}{11} > \frac{5}{11}$ **d)** $\frac{9}{20} > \frac{4}{6}$

a) Sí, porque a igual denominador es mayor la fracción con mayor numerador.

b) $\frac{7}{16} = \frac{63}{144}$ y $\frac{4}{9} = \frac{64}{144}$

$\frac{63}{144} < \frac{64}{144} \Rightarrow \frac{7}{16} < \frac{4}{9}$. Es correcta.

c) No es correcta porque a igual denominador, es menor la fracción de menor numerador.

d) $\frac{9}{20} = \frac{27}{60}$ y $\frac{4}{6} = \frac{40}{60}$

$\frac{27}{60} < \frac{40}{60} \Rightarrow \frac{9}{20} < \frac{4}{6}$. No es correcta.

1.33 Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones.

a) $\frac{19}{36}, \frac{32}{36}, \frac{8}{36}, \frac{24}{36}, \frac{7}{36}$ **b)** $\frac{43}{27}, \frac{43}{18}, \frac{43}{39}, \frac{43}{5}, \frac{43}{40}$ **c)** $\frac{15}{8}, \frac{2}{9}, \frac{1}{5}, \frac{4}{15}, \frac{6}{10}$

a) $\frac{7}{36} < \frac{8}{36} < \frac{19}{36} < \frac{24}{36} < \frac{32}{36}$

b) $\frac{43}{40} < \frac{43}{39} < \frac{43}{27} < \frac{43}{18} < \frac{43}{5}$

c) $\frac{15}{8} = \frac{675}{360}$; $\frac{2}{9} = \frac{80}{360}$; $\frac{1}{5} = \frac{72}{360}$; $\frac{4}{15} = \frac{96}{360}$; $\frac{6}{10} = \frac{216}{360}$

$\frac{72}{360} < \frac{80}{360} < \frac{96}{360} < \frac{216}{360} < \frac{675}{360} \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{2}{9} < \frac{4}{15} < \frac{6}{10} < \frac{15}{8}$

1.34 Compara estas fracciones:

a) $\mathbf{\frac{-9}{12}}$ **y** $\mathbf{\frac{4}{23}}$ **b)** $\mathbf{\frac{-6}{25}}$ **y** $\mathbf{\frac{-12}{15}}$ **c)** $\mathbf{\frac{-10}{28}}$ **y** $\mathbf{\frac{-10}{16}}$ **d)** $\mathbf{\frac{-5}{18}}$ **y** $\mathbf{\frac{-6}{32}}$

a) $\frac{-9}{12} < \frac{4}{23}$

b) $\frac{-6}{25} = -\frac{18}{75}$; $\frac{-12}{15} = -\frac{60}{75}$

$-\frac{18}{75} > -\frac{60}{75} \Rightarrow \frac{-6}{25} > \frac{-12}{15}$

c) $\frac{-10}{28} > \frac{-10}{16}$

d) $\frac{-5}{18} = \frac{-80}{288}$; $\frac{-6}{32} = \frac{-54}{288}$

$\frac{-80}{288} < \frac{-54}{288}$

$\frac{-5}{18} < \frac{-6}{32}$

1.35 Expresa los números decimales en forma de fracción y luego compara las fracciones.

a) 1,318 y $\mathbf{\frac{28}{25}}$ **b)** $\mathbf{\frac{17}{9}}$ **y** $\mathbf{2,\widehat{5}}$ **c)** $\mathbf{\frac{7}{18}}$ **y** $\mathbf{0,\widehat{16}}$ **d) 5,36 y** $\mathbf{\frac{111}{20}}$

a) $1,318 = \frac{1318}{1000} = \frac{659}{500}$; $\frac{28}{25} = \frac{560}{500}$

$\frac{659}{500} > \frac{28}{25} \Rightarrow 1,318$ y $\frac{28}{25}$

b) $2,\widehat{5} = \frac{25-2}{9} = \frac{23}{9}$

$\frac{17}{9} < \frac{23}{9} \Rightarrow \frac{17}{9} < 2,\widehat{5}$

c) $0,\widehat{16} = \frac{16}{99} = \frac{128}{792}$; $\frac{7}{18} = \frac{693}{792}$

$\frac{693}{792} > \frac{128}{792} \Rightarrow \frac{7}{18} > 0,\widehat{16}$

d) $5,36 = \frac{536}{100}$; $\frac{111}{20} = \frac{555}{100}$

$\frac{536}{100} < \frac{555}{100} \Rightarrow 5,36 < \frac{111}{20}$

1.36 Descompón las fracciones en suma de un entero más una fracción propia (el valor de una fracción propia es siempre menor que la unidad) e indica entre qué dos valores enteros quedarían representadas sobre la recta.

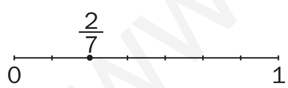
a) $\mathbf{\frac{29}{8}}$ **b)** $\mathbf{\frac{-13}{4}}$ **c)** $\mathbf{\frac{37}{5}}$ **d)** $\mathbf{-\frac{11}{3}}$

a) $\frac{29}{8} = 3 + \frac{5}{8}$ b) $\frac{-13}{4} - 3 - \frac{1}{4}$ c) $\frac{37}{5} = 7 + \frac{2}{5}$ d) $-\frac{11}{3} = -3 - \frac{2}{3}$

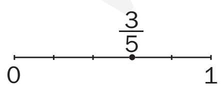
1.37 Representa en la recta numérica:

a) $\mathbf{\frac{2}{7}}$ **b)** $\mathbf{\frac{3}{5}}$ **c)** $\mathbf{-\frac{4}{9}}$ **d)** $\mathbf{-\frac{8}{3}}$ **e)** $\mathbf{\frac{11}{6}}$

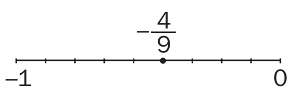
a)



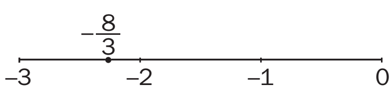
b)



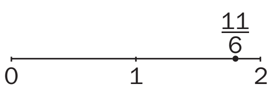
c)



d) $\frac{-8}{3} = -2 - \frac{2}{3}$



e) $\frac{11}{6} = 1 + \frac{5}{6}$



1.38 Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones.

a) $\frac{-10}{29}, \frac{8}{29}, -\frac{13}{29}, \frac{24}{29}, \frac{37}{-29}$

b) $\frac{19}{8}, \frac{-19}{12}, \frac{19}{-6}, -\frac{19}{5}, \frac{-19}{18}$

c) $\frac{-2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{8}{25}, \frac{9}{10}, \frac{-7}{6}$

d) $\frac{1}{-12}, \frac{-5}{8}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{4}, \frac{15}{-36}$

a) $\frac{24}{29} > \frac{8}{29} > \frac{-10}{29} > -\frac{13}{29} > \frac{37}{-29}$

b) $\frac{19}{8} > \frac{-19}{18} > \frac{-19}{12} > \frac{19}{-6} > -\frac{19}{5}$

c) $\frac{-2}{3} = \frac{-100}{150}; \frac{4}{15} = \frac{40}{150}; \frac{8}{25} = \frac{48}{150}; \frac{9}{10} = \frac{135}{150}; \frac{-7}{6} = \frac{-185}{150}$

$\frac{135}{150} > \frac{48}{150} > \frac{40}{150} > \frac{-100}{150} > \frac{-185}{150}$

$\frac{9}{10} > \frac{8}{25} > \frac{4}{15} > \frac{-2}{3} > \frac{-7}{6}$

d) $\frac{1}{-12} = -\frac{12}{144}; \frac{-5}{8} = -\frac{135}{144}; \frac{9}{16} = \frac{81}{144}; -\frac{1}{4} = -\frac{36}{144}; \frac{15}{-36} = -\frac{60}{144}$

$\frac{81}{144} > -\frac{12}{144} > -\frac{36}{144} > -\frac{60}{144} > -\frac{135}{144}$

$\frac{9}{16} > \frac{1}{-12} > -\frac{1}{4} > \frac{15}{-36} > \frac{-5}{8}$

Operaciones con números racionales

1.39 Realiza las siguientes sumas y restas.

a) $\frac{5}{4} + \frac{3}{8} - \frac{10}{6} - \frac{11}{2}$

b) $\frac{19}{16} - \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{9}\right) - \frac{8}{3}$

c) $\frac{7}{12} - \frac{1}{18} - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{9}\right)$

d) $\frac{7}{30} + \frac{2}{45} + \frac{8}{5} - 4$

e) $\frac{5}{24} - \left(2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{9}\right)$

f) $\left(\frac{10}{3} - \frac{8}{9}\right) - \frac{9}{6} + \frac{13}{4}$

a) $\frac{5}{4} + \frac{3}{8} - \frac{10}{6} - \frac{11}{2} = \frac{30}{24} + \frac{9}{24} - \frac{40}{24} - \frac{132}{24} = -\frac{123}{24}$

b) $\frac{19}{16} - \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{9}\right) - \frac{8}{3} = \frac{19}{16} - \left(\frac{3}{9} - \frac{4}{9}\right) - \frac{8}{3} = \frac{19}{16} + \frac{1}{9} - \frac{8}{3} = \frac{171}{144} + \frac{16}{144} - \frac{384}{144} = -\frac{197}{144}$

c) $\frac{73}{12} - \frac{1}{18} - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{9}\right) = \frac{7}{12} - \frac{1}{18} - \left(\frac{27}{36} - \frac{20}{36}\right) = \frac{7}{12} - \frac{1}{18} - \frac{7}{36} = \frac{21}{36} - \frac{2}{36} - \frac{7}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

d) $\frac{7}{30} + \frac{2}{45} + \frac{8}{5} - 4 = \frac{21}{90} + \frac{4}{90} + \frac{144}{90} - \frac{360}{90} = -\frac{191}{90}$

e) $\frac{5}{24} - \left(2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{9}\right) = \frac{5}{24} - \left(\frac{72}{36} - \frac{9}{36} + \frac{12}{36}\right) = \frac{5}{24} - \frac{75}{36} = \frac{15}{72} - \frac{150}{72} = -\frac{135}{72} = -\frac{15}{8}$

f) $\left(\frac{10}{3} - \frac{8}{9}\right) - \frac{9}{6} + \frac{13}{4} = \left(\frac{30}{9} - \frac{8}{9}\right) - \frac{9}{6} + \frac{13}{4} = \frac{22}{9} - \frac{9}{6} + \frac{13}{4} = \frac{88}{36} - \frac{54}{36} + \frac{117}{36} = \frac{151}{36}$

1.40 Halla el resultado de las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a) $\frac{9}{6} \cdot \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{-14}{35}\right)$

b) $\frac{-3}{8} \cdot \left(-\frac{2}{15}\right) \cdot \left(-\frac{10}{9}\right)$

c) $\frac{-6}{9} : \frac{4}{3} : \left(-\frac{8}{12}\right)$

d) $\frac{2}{7} : \left(-\frac{21}{6}\right) : \frac{4}{9}$

a) $\frac{9}{6} \cdot \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{-14}{35}\right) = -\frac{9 \cdot 5 \cdot 14}{6 \cdot 4 \cdot 35} = -\frac{3}{2}$

b) $\frac{-3}{8} \cdot \left(-\frac{2}{15}\right) \cdot \left(-\frac{10}{9}\right) \cdot -\frac{3 \cdot 2 \cdot 10}{8 \cdot 15 \cdot 9} = -\frac{1}{18}$

c) $\frac{-6}{9} : \frac{4}{3} : \left(-\frac{8}{12}\right) = \frac{-18}{36} : \left(-\frac{8}{12}\right) = \frac{216}{288} = \frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{7} : \left(-\frac{21}{6}\right) : \frac{4}{9} = \frac{-12}{147} : \frac{4}{9} = -\frac{108}{588} = -\frac{9}{49}$

1.41 Calcula las siguientes potencias.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$

b) $\left(\frac{7}{6}\right)^3$

c) $\left(\frac{-9}{5}\right)^0$

d) $\left(-\frac{8}{9}\right)^2$

e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$

f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^1$

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$

b) $\left(\frac{7}{6}\right)^3 = \frac{7^3}{6^3} = \frac{343}{216}$

c) $\left(\frac{-9}{5}\right)^0 = 1$

d) $\left(-\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{8^2}{9^2} = \frac{64}{81}$

e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{2^5}{3^5} = -\frac{32}{243}$

f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

1.42 Expresa los números decimales en forma fraccionaria y después realiza las operaciones indicadas.

a) $0{,}45 + 1{,}2 - \frac{6}{5}$

b) $18{,}4 - \frac{1}{4} + 2{,}5\widehat{8}$

c) $\frac{7}{9} - 0{,}\widehat{3} + 1{,}\widehat{29}$

d) $3{,}\widehat{18} - 1{,}1\widehat{5} - \frac{2}{9}$

a) $0{,}45 + 1{,}2 - \frac{6}{5} = \frac{45}{100} + \frac{12}{10} - \frac{6}{5} = \frac{45}{100} + \frac{120}{100} - \frac{120}{100} = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

b) $18{,}4 - \frac{1}{4} + 2{,}5\widehat{8} = \frac{184}{10} - \frac{1}{4} + \frac{258 - 25}{90} = \frac{184}{10} - \frac{1}{4} + \frac{233}{90} = \frac{3312}{180} - \frac{45}{180} + \frac{466}{180} = \frac{3733}{180}$

c) $\frac{7}{9} - 0{,}\widehat{3} + 1{,}\widehat{29} = \frac{7}{9} - \frac{3}{9} + \frac{129 - 1}{99} = \frac{7}{9} - \frac{3}{9} + \frac{128}{99} = \frac{77}{99} - \frac{33}{99} + \frac{128}{99} = \frac{172}{99}$

d) $3{,}\widehat{18} - 1{,}1\widehat{5} - \frac{2}{9} = \frac{318 - 3}{99} - \frac{115 - 11}{90} - \frac{2}{9} = \frac{315}{99} - \frac{104}{90} - \frac{2}{9} = \frac{3150}{990} - \frac{1144}{990} - \frac{220}{990} = \frac{893}{990}$

Operaciones combinadas

1.43 Halla el resultado de las siguientes operaciones con números racionales.

a) $\frac{4}{7} - \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{3} - \frac{5}{4} : \left(\frac{-3}{2}\right)$

b) $\frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} - \frac{8}{12} \cdot \frac{9}{3} : (-5)$

d) $2 - 3 : \frac{5}{6} + \frac{11}{4} \cdot \left(\frac{-7}{2}\right)^3$

a) $\frac{4}{7} - \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{3} - \frac{5}{4} : \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{7} - \frac{48}{21} + \frac{10}{12} = \frac{48}{84} - \frac{192}{84} + \frac{70}{84} = -\frac{137}{84}$

b) $\frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{16}{25} - \frac{3}{10} = \frac{1}{6} + \frac{32}{150} - \frac{3}{10} = \frac{25}{150} + \frac{32}{150} - \frac{45}{150} = \frac{12}{150} = \frac{2}{25}$

c) $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} - \frac{8}{12} \cdot \frac{9}{3} : (-5) = \frac{4}{3} - \frac{72}{36} : (-5) = \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{20}{15} + \frac{6}{15} = \frac{26}{15}$

d) $2 - 3 : \frac{5}{6} + \frac{11}{4} \cdot \left(\frac{-7}{2}\right)^3 = 2 - \frac{18}{5} + \frac{11}{4} \cdot \frac{343}{8} = 2 - \frac{18}{5} + \frac{3773}{32} = \frac{320}{160} - \frac{576}{160} + \frac{18865}{160} = -\frac{19121}{160}$

1.44 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\frac{7}{9} - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{4} : \frac{3}{7}\right)$

b) $\left(3 - \frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{11}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}\right)$

c) $4 + 2 \cdot \left(\frac{8}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) : \frac{7}{2}$

d) $\frac{4}{10} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5}\right)\right]$

e) $\left(8 - \frac{15}{2}\right)^2 : \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{9}{8} - 2\right) - \frac{7}{16}\right]$

a) $\frac{7}{9} - \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3} - \frac{6}{4} : \frac{3}{7}\right) = \frac{7}{9} - \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3} - \frac{42}{12}\right) = \frac{7}{9} - \frac{1}{9}\left(\frac{8}{12} - \frac{42}{12}\right) = \frac{7}{9} - \frac{1}{9}\left(-\frac{34}{12}\right) = \frac{7}{9} + \frac{34}{108} =$

$= \frac{84}{108} + \frac{34}{108} = \frac{118}{108} = \frac{59}{54}$

b) $\left(3 - \frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{11}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 : \left(\frac{11}{5} - \frac{3}{5}\right) = \frac{125}{8} : \frac{8}{5} = \frac{625}{16}$

c) $4 + 2 \cdot \left(\frac{8}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) : \frac{7}{2} = 4 + 2 \cdot \left(\frac{8}{9} - \frac{8}{15}\right) : \frac{7}{2} = 4 + 2 \cdot \left(\frac{40}{45} - \frac{24}{45}\right) : \frac{7}{2} = 4 + 2 \cdot \frac{16}{45} : \frac{7}{2} =$

$= 4 + \frac{32}{45} : \frac{7}{2} = 4 + \frac{64}{315} = \frac{1260}{315} + \frac{64}{315} = \frac{1324}{315}$

d) $\frac{4}{10} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5}\right)\right] = \frac{4}{10} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{18}{10}\right)\right] = \frac{4}{10} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{14}{10}\right)\right] = \frac{4}{10} \cdot \left[1 - \frac{42}{40}\right] =$

$= \frac{4}{10} \cdot \left(-\frac{2}{40}\right) = -\frac{8}{400} = -\frac{1}{50}$

e) $\left(8 - \frac{15}{2}\right)^2 : \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{9}{8} - 2\right) - \frac{7}{16}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left[\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) - \frac{7}{16}\right] = \frac{1}{8} : \left[-\frac{21}{32} - \frac{7}{16}\right] = \frac{1}{8} : \left[-\frac{21}{32} - \frac{14}{32}\right] =$

$= \frac{1}{8} : \left(-\frac{35}{32}\right) = -\frac{32}{140} = -\frac{8}{35}$

1.45 **Expresa los números decimales en forma de fracción y luego haz los cálculos.**

a) $0{,}42 \cdot 3{,}1 - 10{,}\widehat{8} + 1{,}\widehat{52}$

b) $7{,}16 - (1{,}1\widehat{7} + 3{,}8 \cdot 7{,}\widehat{2})$

c) $19{,}8\widehat{5} - 13{,}2 \cdot 4{,}5 + 8{,}\widehat{16}$

d) $2{,}84 \cdot 5{,}\widehat{1} - (0{,}\widehat{503} - 4{,}\widehat{96})$

a) $0{,}42 \cdot 3{,}1 - 10{,}\widehat{8} + 1{,}\widehat{52} = \dfrac{42}{100} \cdot \dfrac{31}{10} - \dfrac{108 - 10}{9} + \dfrac{152 - 1}{99} = \dfrac{1302}{1000} - \dfrac{98}{9} + \dfrac{151}{99} =$

$= \dfrac{128\,898}{99\,000} - \dfrac{1\,078\,000}{99\,000} + \dfrac{15\,100}{99\,000} = -\dfrac{934\,002}{99\,000} = -\dfrac{167\,001}{49\,500}$

b) $7{,}16 - (1{,}1\widehat{7} + 3{,}8 \cdot 7{,}\widehat{2}) = \dfrac{716}{100} - \left(\dfrac{17 - 1}{9} + \dfrac{38}{10} \cdot \dfrac{72 - 7}{9}\right) = \dfrac{716}{100} - \left(\dfrac{16}{9} + \dfrac{38}{10} \cdot \dfrac{65}{9}\right) = \dfrac{716}{100} - \left(\dfrac{16}{9} + \dfrac{2470}{10}\right) =$

$= \dfrac{716}{100} - \left(\dfrac{160}{90} + \dfrac{22\,230}{90}\right) = \dfrac{716}{100} - \dfrac{22\,390}{90} = \dfrac{6444}{900} - \dfrac{223\,900}{900} = -\dfrac{217\,456}{900} = -\dfrac{54\,364}{225}$

c) $19{,}8\widehat{5} - 13{,}2 \cdot 4{,}5 + 8{,}\widehat{16} = \dfrac{1985 - 198}{90} - \dfrac{132}{10} \cdot \dfrac{45}{10} + \dfrac{816 - 8}{99} = \dfrac{1787}{90} - \dfrac{5940}{100} + \dfrac{808}{99} =$

$= \dfrac{196\,570}{9900} - \dfrac{588\,060}{9900} + \dfrac{80\,800}{9900} = -\dfrac{310\,690}{9900} = -\dfrac{31\,069}{990}$

d) $2{,}84 \cdot 5{,}\widehat{1} - (0{,}\widehat{503} - 4{,}\widehat{96}) = \dfrac{284}{100} \cdot \dfrac{51 - 5}{9} - \left(\dfrac{503}{999} - \dfrac{496 - 4}{99}\right) = \dfrac{284}{100} \cdot \dfrac{46}{9} - \left(\dfrac{503}{999} - \dfrac{492}{99}\right) =$

$= \dfrac{13\,064}{900} - \left(\dfrac{5533}{10\,989} - \dfrac{54\,612}{10\,989}\right) = \dfrac{13\,064}{900} + \dfrac{49\,079}{10\,989} = \dfrac{1\,306\,415\,951\,144}{1\,098\,900} + \dfrac{4\,907\,900}{1\,098\,900} = \dfrac{20\,659\,044}{1\,098\,900} = \dfrac{5\,164\,761}{274\,725}$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

1.46 **Al representar en la recta dos fracciones equivalentes, ¿cuántos puntos se dibujan sobre ella?**

Como conclusión al resultado anterior, y teniendo en cuenta que un número racional es un conjunto de infinitas fracciones equivalentes entre sí, ¿cuántos puntos de la recta se necesitan para representar un número racional?

Al representar en la recta dos fracciones equivalentes, solo se dibuja un punto sobre ella.

Para representar un número racional, solo es necesario un punto de la recta.

1.47 **Para decir la hora que es cuando han pasado 15 minutos de la hora en punto se utiliza un valor fraccionario. Por ejemplo, se dice "las ocho y cuarto" en lugar de "las 8 y 15". Explica si es correcta la fracción utilizada.**

Sí, porque 15 minutos de una hora equivalen a la fracción $\dfrac{15}{60} = \dfrac{1}{4}$.

1.48 **Escribe:**

a) Un número racional que no sea entero.

b) Un número racional que sea entero.

c) Un número entero que no sea racional.

d) Un número decimal que no sea racional.

a) $\dfrac{8}{7}$

b) $\dfrac{36}{4}$

c) Es imposible: todos los números enteros son racionales.

d) 1,320332033320…

1.49 **Explica, utilizando ejemplos, si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones.**

a) Todas las fracciones representan cantidades inferiores a la unidad.

b) Un número racional es una fracción.

c) Cualquier número decimal se puede expresar en forma fraccionaria.

d) Los números enteros también son racionales.

a) Falso: $\dfrac{9}{5}$ representa una cantidad mayor que 1.

b) Falso: los números racionales también son enteros. Por ejemplo, $\frac{18}{9}$.

c) Falso: los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas no se pueden expresar en forma fraccionaria. Por ejemplo, 0,12349873412…

d) Verdadero.

1.50 ¿En qué son iguales los números 3,1414 y 3,1414…? ¿Qué los diferencia?

Son números racionales y, por tanto, se pueden expresar en forma de fracción.

El primero es exacto, tiene una cantidad finita de cifras decimales, y el segundo es periódico puro, $3,\overset{\frown}{14}$.

1.51 Al operar con números racionales, ¿se obtiene siempre otro número racional? En caso contrario, pon un ejemplo.

Sí, porque al operar con números racionales o se obtiene una fracción o un entero que son números racionales.

1.52 Utiliza ejemplos para estudiar si el resultado de la multiplicación o la división de dos fracciones es distinto si se realiza en la forma habitual o reduciendo previamente las fracciones a denominador común. ¿Qué conclusión obtienes?

$\frac{6}{9} \cdot \frac{8}{3} = \frac{48}{27} = \frac{16}{9}$. Es el resultado de la multiplicación sin reducirlas a denominador común.

$\frac{6}{9} \cdot \frac{8}{3} = \frac{6}{9} \cdot \frac{24}{9} = \frac{144}{81} = \frac{16}{9}$. Es el resultado reduciéndolas previamente a denominador común.

$\frac{7}{16} : \frac{1}{3} = \frac{21}{16}$. Es el resultado de la división sin reducirlas a denominador común.

$\frac{7}{16} : \frac{1}{3} = \frac{21}{48} : \frac{16}{48} = \frac{1008}{768} = \frac{63}{48} = \frac{21}{16}$. Es el resultado de la división reduciéndolas a denominador común.

El resultado es el mismo, pero al reducirlas a denominador común, el numerador y el denominador de las fracciones son números más grandes que hay que simplificar, y el ejercicio resulta más laborioso.

PROBLEMAS PARA APLICAR

1.53 En un grupo de 3.º de ESO de 28 alumnos hay 7 chicas. De entre los chicos, la octava parte no ha nacido en España. ¿Qué fracción del total representan?

Hay $28 - 7 = 21$ chicos.

$\frac{1}{8}$ de $\frac{21}{28} = \frac{3}{32}$ de los chicos no han nacido en España.

1.54 Javier ha cortado $\frac{1}{3}$ de una *baguette* para hacer un bocadillo y con los $\frac{3}{4}$ del resto ha preparado unas rebanadas. Ha sobrado un trozo de 4 centímetros. ¿Cuánto medía la *baguette*?

$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ de la barra quedan después de hacer el bocadillo.

$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ utiliza para las rebanadas.

Queda: $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{6}{6} - \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$, que equivale a 4 cm.

Por tanto, la medida de la *baguette* era de: $6 \cdot 4 = 24$ cm

1.55 **En un pueblo hay dos centros escolares de Secundaria, uno de ellos de reciente construcción.**

La elección de la asignatura de Matemáticas de los alumnos de 4.º de ESO en cada uno de ellos es la que se observa en el cuadro siguiente.

	Matemáticas A	Matemáticas B
Instituto antiguo	120	60
Instituto nuevo	90	30

¿En cuál de los centros, el número de alumnos que ha elegido la opción A respecto del total de alumnos matriculados en 4.º de ESO es mayor?

En el instituto antiguo: $\frac{120}{180} = \frac{12}{18} = \frac{4}{6}$ es la fracción de alumnos matriculados en la opción A.

En el instituto nuevo: $\frac{90}{120} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Hay que comparar las fracciones obtenidas.

$\frac{4}{6} = \frac{16}{24}$; $\frac{3}{4} = \frac{18}{24} \Rightarrow \frac{18}{24} > \frac{16}{24} \Rightarrow \frac{3}{4} > \frac{4}{6}$

Se han matriculado más alumnos en el instituto nuevo que en el antiguo.

1.56 **Se está probando un nuevo tratamiento para una determinada enfermedad en 320 personas y se ha comprobado que en 15 de ellas produce un intenso dolor de cabeza. Aunque los efectos secundarios deberían ser nulos, este tratamiento se aceptará como válido si el porcentaje de personas en el que se manifiestan es inferior a un 0,01%.**

Con los datos experimentales anteriores, ¿el tratamiento será aceptado o rechazado?

Produce dolor de cabeza en $\frac{15}{320}$, que equivale a un porcentaje del 0,0487%.

Como ese porcentaje es superior al válido para que sea aceptado, el tratamiento será rechazado.

1.57 **El consumo de un televisor encendido es de 45 vatios a la hora. Si se apaga con el mando a distancia, su consumo se reduce a 15.**

Si a lo largo de un día, el televisor está encendido durante cuatro horas y se apaga con el mando:

a) ¿Qué gasto total de energía se produce?

b) ¿Qué cantidad se podría ahorrar desconectando el aparato de la corriente?

c) ¿Qué fracción y qué porcentaje de ahorro se produciría en ese caso?

a) $4 \cdot 45 + 20 \cdot 15 = 400$ W se gastan en un día.

b) $20 \cdot 15 = 300$ W se podrían ahorrar.

c) La fracción: $\frac{300}{400} = \frac{3}{4}$

El porcentaje: 75%

1.58 **En un invernadero se han sembrado 500 plantas de tomates, 400 de pimientos y 350 de calabacines.**

Se sabe que se pierden por término medio 1 de cada 60 plantas de tomates, 2 de cada 25 de pimientos y 6 de cada 11 de calabacines.

a) ¿Cuál de las tres plantas es más resistente?

b) ¿Cuántas de cada clase se espera que crezcan?

c) Si en este invernadero se han conseguido 490 plantas de tomates, 320 de pimientos y 318 de calabacines, ¿en cuál de ellas se ha dado un aumento de producción superior a la media? ¿En qué porcentaje ha aumentado?

a) Hay que comparar las fracciones $\frac{1}{60}$, $\frac{2}{25}$ y $\frac{6}{11}$.

$\frac{1}{60} = \frac{55}{3300}$; $\frac{2}{25} = \frac{264}{3300}$; $\frac{6}{11} = \frac{1800}{3300}$ $\qquad \frac{55}{3300} < \frac{264}{3300} < \frac{1800}{3300} \Rightarrow \frac{1}{60} < \frac{2}{25} < \frac{6}{11}$

Se pierden menos plantas de tomates. Por tanto, son las más resistentes.

b) $\frac{59}{60} \cdot 500 = 491{,}67 \approx 491$ plantas de tomates

$\frac{23}{25} \cdot 400 = 368$ de pimientos

$\frac{5}{11} \cdot 350 = 159{,}09 \approx 159$ de calabacines

c) En los calabacines.

El número de plantas que ha aumentado la producción es: $359 - 159 = 200$.

Se ha producido un aumento del 100%.

1.59 De los habitantes de una población, la cuarta parte son personas mayores de 60 años; las $\frac{3}{5}$ partes del resto tienen entre 25 y 60 años, y de los que quedan, solo la sexta parte son niños menores de 8 años.

a) ¿Qué fracción de la población tiene entre 8 y 25 años?

b) ¿Qué porcentaje de la población representan los mayores de 60 años?

c) Si el total de habitantes es 8640, ¿cuántos pertenecen al mayor grupo poblacional?

a) $1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{9}{20} - \frac{1}{6} = \frac{60}{60} - \frac{15}{60} - \frac{27}{60} - \frac{10}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$ es la fracción de población que tiene entre 8 y 25 años.

b) $\frac{1}{4} \cdot 100 = 25\%$

c) $\frac{1}{4} \cdot 8640 = 2160$ son mayores de 60 años.

$\frac{3}{5} \cdot 8640 = 5184$ tienen entre 25 y 60 años.

$\frac{2}{15} \cdot 8640 = 3456$ tienen entre 8 y 25 años.

$\frac{1}{8} \cdot 8640 = 1080$ son niños menores de 8 años.

El mayor grupo poblacional es el de las personas entre 25 y 60 años.

REFUERZO

Números fraccionarios. Números racionales

1.60 Dadas las siguientes fracciones, ¿cuáles de ellas son equivalentes a $\frac{18}{24}$?

a) $\frac{90}{120}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{72}{98}$ d) $\frac{6}{9}$ e) $\frac{9}{12}$

a) $\frac{18}{24} = \frac{90}{120} \Leftrightarrow 18 \cdot 120 = 24 \cdot 90 \Leftrightarrow 2160 = 2160$. Es equivalente.

b) $\frac{18}{24} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 18 \cdot 4 = 24 \cdot 3 \Leftrightarrow 72 = 72$. Es equivalente.

c) $\frac{18}{24} = \frac{72}{98} \Leftrightarrow 18 \cdot 98 = 24 \cdot 72 \Leftrightarrow 1764 \neq 1728$. No es equivalente.

d) $\frac{18}{24} = \frac{6}{9} \Leftrightarrow 18 \cdot 9 = 24 \cdot 6 \Leftrightarrow 162 \neq 144$. No es equivalente.

e) $\frac{18}{24} = \frac{9}{12} \Leftrightarrow 18 \cdot 12 = 24 \cdot 9 \Leftrightarrow 216 = 216$. Es equivalente.

1.61 Halla tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes por amplificación.

a) $\mathbf{\dfrac{5}{12}}$ **b)** $\mathbf{\dfrac{13}{18}}$ **c)** $\mathbf{\dfrac{9}{4}}$

a) $\dfrac{5}{12} = \dfrac{10}{24} = \dfrac{15}{36} = \dfrac{20}{48}$ b) $\dfrac{13}{18} = \dfrac{26}{36} = \dfrac{39}{54} = \dfrac{52}{72}$ c) $\dfrac{9}{4} = \dfrac{18}{8} = \dfrac{27}{12} = \dfrac{36}{16}$

1.62 Calcula la fracción irreducible de:

a) $\mathbf{\dfrac{280}{490}}$ **b)** $\mathbf{\dfrac{63}{42}}$ **c)** $\mathbf{\dfrac{360}{135}}$

a) $\dfrac{280}{490} = \dfrac{28}{49} = \dfrac{4}{7}$ b) $\dfrac{63}{42} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{360}{136} = \dfrac{72}{27} = \dfrac{8}{3}$

1.63 Indica cuáles de los siguientes números son racionales.

a) 82,45364635… **b) -6** **c) 2,1919…**

Los números de los apartados b y c, porque el primero de ellos es entero y el segundo es decimal periódico puro, y los dos se pueden expresar en forma de fracción.

Fracciones y decimales

1.64 Calcula el valor decimal de las siguientes fracciones indicando, cuando existan, el período y el anteperíodo.

a) $\mathbf{\dfrac{25}{9}}$ **b)** $\mathbf{\dfrac{17}{8}}$ **c)** $\mathbf{\dfrac{28}{13}}$ **d)** $\mathbf{\dfrac{16}{25}}$

a) $\dfrac{25}{9} = 2,\widehat{7}$. Período: 7

c) $\dfrac{28}{13} = 2,\widehat{153846}$. Período: 153846

b) $\dfrac{17}{8} = 2,125$

d) $\dfrac{16}{25} = 0,64$

1.65 Sin realizar la división, indica el tipo de expresión decimal al que equivale cada fracción.

a) $\mathbf{\dfrac{37}{20}}$ **b)** $\mathbf{\dfrac{37}{35}}$ **c)** $\mathbf{\dfrac{12}{27}}$ **d)** $\mathbf{\dfrac{48}{64}}$

a) Exacto, porque los factores del denominador son 2 y 5.
b) Periódico mixto, porque los factores del denominador son 5 y 7.
c) Periódico puro, porque el denominador no tiene ni el factor 2 ni el 5.
d) Exacto, porque el denominador sólo tiene el factor 2.

1.66 Halla la fracción a la que equivalen las siguientes expresiones decimales.

a) $\mathbf{12,\widehat{160}}$ **b)** $\mathbf{8,4\widehat{9}}$ **c) 30,805** **d)** $\mathbf{17,\widehat{89}}$

a) $12,160 = \dfrac{12\,160 - 12}{999} = \dfrac{12\,148}{999}$

c) $30,805 = \dfrac{30\,805}{1000} = \dfrac{6161}{200}$

b) $8,4\overline{9} = \dfrac{849 - 84}{90} = \dfrac{765}{90} = \dfrac{153}{18} = \dfrac{17}{2}$

d) $17,\widehat{89} = \dfrac{1789 - 17}{99} = \dfrac{1772}{99}$

Comparación, ordenación y representación de números racionales

1.67 Compara los siguientes números racionales.

a) $\mathbf{\dfrac{9}{8}}$ **y** $\mathbf{\dfrac{9}{4}}$ **b)** $\mathbf{-\dfrac{3}{40}}$ **y** $\mathbf{\dfrac{1}{56}}$ **c)** $\mathbf{\dfrac{16}{27}}$ **y** $\mathbf{\dfrac{8}{27}}$ **d)** $\mathbf{\dfrac{13}{21}}$ **y** $\mathbf{\dfrac{16}{49}}$

a) $\dfrac{9}{8} < \dfrac{9}{4}$ b) $-\dfrac{3}{40} < \dfrac{1}{56}$ c) $\dfrac{16}{27} > \dfrac{8}{27}$ d) $\dfrac{13}{21} = \dfrac{91}{147}$ y $\dfrac{16}{49} = \dfrac{48}{147}$

$\dfrac{91}{147} > \dfrac{48}{147} \Rightarrow \dfrac{13}{21} > \dfrac{16}{49}$

1.68 Ordena de forma creciente los siguientes números racionales.

a) $\frac{29}{5}, \frac{29}{-36}, \frac{29}{15}, -\frac{29}{43}$ **b)** $\frac{18}{45}, \frac{-3}{45}, \frac{-12}{45}, \frac{7}{45}$ **c)** $\frac{9}{16}, \frac{7}{12}, \frac{-5}{8}, -\frac{11}{36}$

a) $\frac{29}{-36} < -\frac{29}{43} < \frac{29}{15} < \frac{29}{5}$

b) $\frac{-3}{45} < \frac{-12}{45} < \frac{7}{45} < \frac{18}{45}$

c) $\frac{9}{16} = \frac{81}{144}, \frac{7}{12} = \frac{84}{144}, \frac{-5}{8} = \frac{-90}{144}, -\frac{11}{36} = -\frac{44}{144} \Rightarrow -\frac{44}{144} < \frac{-90}{144} < \frac{81}{144} < \frac{84}{144}$

$-\frac{11}{36} < \frac{-5}{8} < \frac{9}{16} < \frac{7}{12}$

1.69 Representa en la recta numérica los números: $\frac{-2}{5}, \frac{9}{10}, -\frac{15}{8}, \frac{7}{3}$**.**

Operaciones con números racionales

1.70 Calcula las siguientes potencias.

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^2$ **b)** $\left(-\frac{5}{8}\right)^3$ **c)** $\left(\frac{-3}{4}\right)^4$ **d)** $\left(\frac{6}{7}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81}$ b) $\left(-\frac{5}{8}\right)^3 = -\frac{125}{544}$ c) $\left(\frac{-3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$ d) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}$

1.71 Opera y simplifica.

a) $-\frac{18}{5} - \left(1 - \frac{3}{4} + \frac{6}{25}\right)$ **c)** $\frac{7}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{3}$ **e)** $\frac{7}{2} - \left(\frac{4}{6} - \frac{1}{3} : \frac{5}{9}\right)$

b) $\frac{11}{10} - \left[\left(\frac{6}{15} - \frac{9}{5}\right) - \frac{1}{4}\right]$ **d)** $1 - \frac{5}{6} : \left(2 - \frac{7}{9}\right)$ **f)** $\frac{8}{3} - \frac{5}{3} : \left(\frac{-1}{4} - 1\right)$

a) $-\frac{18}{5} - \left(1 - \frac{3}{4} + \frac{6}{25}\right) = -\frac{18}{5} - \left(\frac{100}{100} - \frac{75}{100} + \frac{24}{100}\right) = -\frac{18}{5} - \frac{49}{100} = -\frac{360}{100} - \frac{49}{100} = -\frac{409}{100}$

b) $\frac{11}{10} - \left[\left(\frac{6}{15} - \frac{9}{5}\right) - \frac{1}{4}\right] = \frac{11}{10} - \left[\left(\frac{6}{15} - \frac{27}{15}\right) - \frac{1}{4}\right] = \frac{11}{10} - \left(-\frac{21}{15} - \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{10} - \left(-\frac{7}{5} - \frac{1}{4}\right) =$

$= \frac{11}{10} - \left(-\frac{28}{20} - \frac{5}{20}\right) = \frac{11}{10} + \frac{33}{20} = \frac{22}{20} + \frac{33}{20} = \frac{55}{20} = \frac{11}{4}$

c) $\frac{7}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{3} = \frac{7}{8} + \frac{3}{16} - \frac{5}{3} = \frac{42}{48} + \frac{9}{48} - \frac{80}{48} = -\frac{29}{48}$

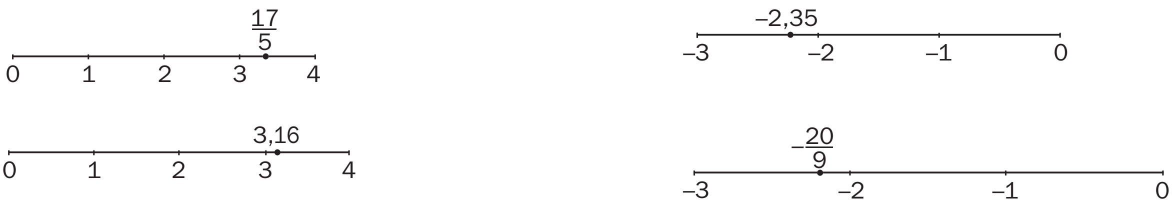
d) $1 - \frac{5}{6} : \left(2 - \frac{7}{9}\right) = 1 - \frac{5}{6} : \left(\frac{18}{9} - \frac{7}{9}\right) = 1 - \frac{5}{6} : \frac{11}{9} = 1 - \frac{45}{66} = \frac{66}{66} - \frac{45}{66} = \frac{21}{66} = \frac{7}{11}$

e) $\frac{7}{2} - \left(\frac{4}{6} - \frac{1}{3} : \frac{5}{9}\right) = \frac{7}{2} - \left(\frac{4}{6} - \frac{9}{15}\right) = \frac{7}{2} - \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) = \frac{7}{2} - \left(\frac{10}{15} - \frac{9}{15}\right) = \frac{7}{2} - \frac{1}{15} = \frac{105}{30} - \frac{2}{30} = \frac{103}{30}$

f) $\frac{8}{3} - \frac{5}{3} : \left(\frac{-1}{4} - 1\right) = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} : \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{8}{3} + \frac{20}{15} = \frac{60}{15} = 4$

1.72 **Representa en la recta real los siguientes números, expresando previamente los decimales en forma fraccionaria, y luego ordénalos de menor a mayor.**

$$\mathbf{\frac{17}{5},\ 3{,}1\widehat{6},\ -2{,}\widehat{35},\ -\frac{20}{9}}$$



1.73 **Expresa como una única potencia:**

a) $\left(\frac{7}{8}\right)^4 \cdot \left[\left(-\frac{7}{8}\right)^3\right]^2 : \frac{8}{7}$ **b)** $\left[\left(\frac{9}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)\right]^{-6} : \left(-\frac{4}{9}\right)^{-5}$ **c)** $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-4} : \left[\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]$

a) $\left(\frac{7}{8}\right)^4 \cdot \left[\left(-\frac{7}{8}\right)^3\right]^2 : \frac{8}{7} = \left(\frac{7}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^6 : \left(\frac{7}{8}\right)^{-1} = \left(\frac{7}{8}\right)^{11}$

b) $\left[\left(\frac{9}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)\right]^{-6} : \left(-\frac{4}{9}\right)^{-5} = \left[\left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{4}{9}\right]^{-6} : \left[-\left(\frac{4}{9}\right)^{-5}\right] = \left(\frac{4}{9}\right)^{-18} : \left[-\left(\frac{4}{9}\right)^{-5}\right] = -\left(\frac{4}{9}\right)^{-13}$

c) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-4} : \left[\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^4 : \left[\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^4 : \left(\frac{3}{2}\right)^7 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

1.74 **Realiza las siguientes operaciones con números racionales y simplifica el resultado.**

a) $\left(\frac{2}{3} - 1\right)^{-3} + \frac{8}{5} \cdot \frac{4}{6} - \frac{1}{6} : \left[\left(\frac{-7}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(2 - \frac{9}{5}\right)\right]$

b) $\left[\frac{5}{4} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{-2}\right] : \left[\left(\frac{3}{2} - 2\right)^3 - \frac{1}{12} \cdot \frac{9}{2}\right]$

c) $\left(\frac{11}{6} - \frac{3}{4} \cdot 2\right)^2 : \frac{1}{3} - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{12}\right)$

a) $\left(\frac{2}{3} - 1\right)^{-3} + \frac{8}{5} \cdot \frac{4}{6} - \frac{1}{6} : \left[\left(\frac{-7}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(2 - \frac{9}{5}\right)\right] = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} + \frac{32}{30} - \frac{1}{6} : \left(\frac{49}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}\right) =$

$= -\frac{1}{27} + \frac{32}{30} - \frac{1}{6} : \left(\frac{49}{4} + \frac{1}{20}\right) = -\frac{1}{27} + \frac{32}{30} - \frac{1}{6} : \frac{246}{20} = -\frac{1}{27} + \frac{16}{15} - \frac{5}{369} = -\frac{205}{5535} + \frac{5904}{5535} - \frac{75}{5535} =$

$= \frac{5624}{5535}$

b) $\left[\frac{5}{4} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{-2}\right] : \left[\left(\frac{3}{2} - 2\right)^3 - \frac{1}{12} \cdot \frac{9}{2}\right] = \left[\frac{5}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{36}\right] : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{9}{24}\right] = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{27}\right) : \left(-\frac{1}{8} - \frac{9}{24}\right) =$

$= \left(\frac{135 - 4}{108}\right) : \left(-\frac{3 + 9}{24}\right) = \frac{131}{108} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{131}{108}$

c) $\left(\frac{11}{6} - \frac{3}{4} \cdot 2\right)^2 : \frac{1}{3} - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{12}\right) = \left(\frac{11}{6} - \frac{3}{2}\right)^2 : \frac{1}{3} - \frac{36 - 5}{60} = \left(\frac{11 - 6}{6}\right)^2 : \frac{1}{3} - \frac{29}{60} = \frac{25}{36} : \frac{1}{3} - \frac{29}{60} =$

$= \frac{25}{36} : \frac{1}{3} - \frac{29}{60} = \frac{75}{36} - \frac{29}{60} = \frac{375}{180} - \frac{87}{180} = \frac{288}{180} = \frac{8}{5}$

1.75 **Las fracciones $\frac{9}{x}$, $\frac{x}{36}$ y $\frac{25}{y}$ representan el mismo número racional. Calcula x e y, y la fracción irreducible que lo representa.**

Han de ser equivalentes: $\frac{9}{x} = \frac{x}{36} \Leftrightarrow x^2 = 9 \cdot 36 \Leftrightarrow x = 12$

$$\frac{9}{12} = \frac{25}{y} \Leftrightarrow 9y = 12 \cdot 25 \Leftrightarrow y = \frac{100}{3}$$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

1.76 **El tiempo libre**

Eugenia quiere saber cuánto tiempo diario debe reservar para sus aficiones. Para ello, ha fijado los siguientes criterios y prioridades:

1.° La tercera parte del tiempo la quiere dedicar a escuchar música.

2.° Las dos quintas partes del tiempo libre que le quede desea emplearlas en entrenarse en natación.

3.° La mitad de lo que le falte piensa destinarla a navegar por internet.

4.° Por último, lo que le reste desea aprovecharlo en la lectura, que, por otra parte, piensa que debe ser exactamente una hora.

a) Calcula el tiempo total que debe dedicar a las actividades indicadas.

b) Halla el tiempo empleado en cada actividad.

c) ¿Qué parte del tiempo libre aprovechará para la lectura?

Se pueden representar las actividades en diferentes zonas de un rectángulo:

MÚSICA	NATACIÓN	
	INTERNET	LECTURA

Los tres últimos rectángulos pequeños se corresponden con una hora.

Por tanto, cada rectángulo representa 20 minutos.

a) $20 \cdot 15 = 300$ minutos $= 5$ horas

b) Música: 100 minutos
Natación: 80 minutos
Internet: 60 minutos

c) Dedica a la lectura: $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ de su tiempo libre.

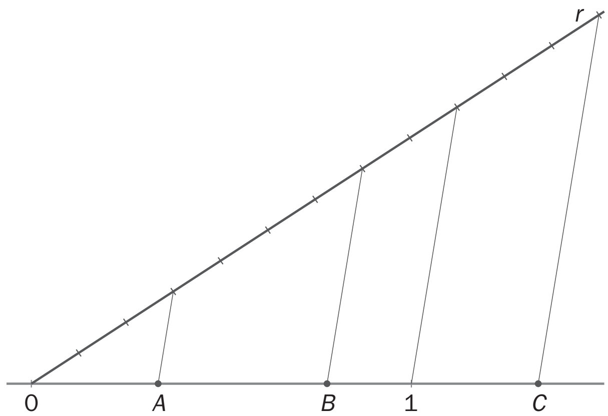
1.77 **Situación de números racionales**

a) Indica, mediante fracciones irreducibles, los valores de *A*, *B* y *C*.

b) Mediante una fracción irreducible, indica un número racional que esté entre *A* y *B*.

c) Indica el número racional que se encuentra exactamente a medio camino entre los números *A* y 1.

d) ¿Es *B* el valor correspondiente al punto intermedio entre *A* y *C*?



a) $A = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $\quad B = \frac{7}{9}$ $\quad C = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

b) Por ejemplo, $\frac{4}{9}$

c) $\frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$

d) $\frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{6} \neq \frac{7}{9}$

B no es el punto intermedio entre *A* y *C*.

1.A1 Para cada apartado, calcula cinco fracciones que representen el mismo número racional dado.

a) $\mathbf{\frac{75}{40}}$ **b)** $\mathbf{\frac{56}{64}}$ **c)** $\mathbf{\frac{150}{324}}$ **d)** $\mathbf{\frac{610}{425}}$

a) $\frac{75}{40} = \frac{15}{8} = \frac{30}{16} = \frac{45}{24} = \frac{60}{48} = \frac{150}{80}$

b) $\frac{56}{64} = \frac{28}{32} = \frac{14}{16} = \frac{7}{4} = \frac{21}{12} = \frac{35}{20}$

c) $\frac{150}{324} = \frac{75}{162} = \frac{25}{54} = \frac{50}{108} = \frac{100}{216} = \frac{300}{648}$

d) $\frac{610}{425} = \frac{122}{85} = \frac{244}{170} = \frac{366}{255} = \frac{488}{340} = \frac{1220}{850}$

1.A2 Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones.

a) $\mathbf{\frac{37}{15}, \frac{37}{-3}, \frac{-37}{16}, \frac{37}{8}}$

b) $\mathbf{-\frac{14}{23}, \frac{9}{23}, \frac{-13}{23}, \frac{16}{23}}$

c) $\mathbf{\frac{8}{20}, \frac{3}{16}, \frac{-5}{8}, \frac{-12}{10}}$

a) $\frac{37}{-3} < \frac{-37}{16} < \frac{37}{15} < \frac{37}{8}$

b) $-\frac{14}{23} < \frac{-13}{23} < \frac{9}{23} < \frac{16}{23}$

c) $\frac{8}{20} = \frac{32}{80}; \frac{3}{16} = \frac{6}{80}; \frac{-5}{8} = \frac{-50}{80}; \frac{-12}{10} = \frac{-86}{80}$

$\frac{-86}{80} < \frac{-50}{80} < \frac{6}{80} < \frac{32}{80} \Rightarrow \frac{-12}{10} < \frac{-5}{8} < \frac{3}{16} < \frac{8}{20}$

1.A3 Indica, sin hallarlo, el tipo de número decimal al que equivalen las siguientes fracciones.

a) $\mathbf{\frac{35}{24}}$ **b)** $\mathbf{\frac{1}{25}}$ **c)** $\mathbf{\frac{15}{27}}$ **d)** $\mathbf{\frac{7}{40}}$

a) Periódico mixto porque el denominador tiene el factor 3 además del 2.

b) Exacto porque el denominador sólo tiene el factor 5.

c) Periódico puro porque el denominador sólo tiene el factor 3.

d) Exacto porque el denominador tiene los factores 2 y 5.

1.A4 Halla la fracción irreducible a la que equivalen los números decimales siguientes.

a) $\mathbf{5{,}72}$ **b)** $\mathbf{8{,}\widehat{340}}$ **c)** $\mathbf{16{,}0\widehat{9}}$

a) $5{,}72 = \frac{572}{100} = \frac{143}{25}$

b) $8{,}\widehat{340} = \frac{8340 - 8}{999} = \frac{8332}{999}$

c) $16{,}0\widehat{9} = \frac{1609 - 160}{90} = \frac{1449}{90} = \frac{161}{10}$

1.A5 Halla el resultado de las siguientes potencias.

a) $\mathbf{\left(\frac{3}{4}\right)^5}$ **b)** $\mathbf{\left(\frac{-6}{7}\right)^2}$ **c)** $\mathbf{\left(-\frac{9}{8}\right)^3}$ **d)** $\mathbf{\left(\frac{4}{5}\right)^{-4}}$

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$

b) $\left(\frac{-6}{7}\right)^2 = \frac{36}{49}$

c) $\left(-\frac{9}{8}\right)^3 = -\frac{729}{512}$

d) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256}$

1.A6 **Opera y simplifica.**

a) $\frac{17}{49} - \frac{1}{49} \cdot \frac{5}{2} + 1$

b) $\frac{2}{15} - \left[1 - \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5} - \frac{2}{5}\right)\right]$

c) $\frac{13}{16} - \frac{1}{16} \cdot \left(1 + \frac{3}{2}\right)^2$

d) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)$

e) $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right)$

f) $\frac{5}{9} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{3} : \frac{2}{5}\right)$

g) $\frac{4}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{5}{6} \cdot \left(2 - \frac{3}{2} : \frac{1}{9}\right)$

a) $\frac{17}{49} - \frac{1}{49} \cdot \frac{5}{2} + 1 = \frac{17}{49} - \frac{5}{98} + 1 = \frac{34}{98} - \frac{5}{98} + \frac{98}{98} = \frac{127}{98}$

b) $\frac{2}{15} - \left[1 - \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5} - \frac{2}{5}\right)\right] = \frac{2}{15} - \left[1 - \left(\frac{21}{10} - \frac{2}{5}\right)\right] = \frac{2}{15} - \left[1 - \left(\frac{21}{10} - \frac{4}{10}\right)\right] = \frac{2}{15} - \left(1 - \frac{17}{10}\right) =$

$= \frac{2}{15} - \left(-\frac{7}{10}\right) = \frac{4}{30} + \frac{21}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

c) $\frac{13}{16} - \frac{1}{16} \cdot \left(1 + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{16} - \frac{1}{16} \cdot \frac{25}{4} = \frac{3}{16} - \frac{25}{64} = \frac{12}{64} - \frac{25}{64} = -\frac{13}{64}$

d) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{16}{25} : \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{25} : \frac{5}{24} = \frac{384}{125}$

e) $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{3} = \frac{1}{16} + \frac{7}{3} = \frac{115}{48}$

f) $\frac{5}{9} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{3} : \frac{2}{5}\right) = \frac{5}{9} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{6}\right) = \frac{5}{9} - \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{6} = \frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

g) $\frac{4}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{5}{6} \cdot \left(2 - \frac{3}{2} : \frac{1}{9}\right) = \frac{4}{3} + \frac{1}{9} - \frac{5}{6} \cdot \left(2 - \frac{27}{2}\right) = \frac{4}{3} + \frac{1}{9} - \frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{23}{2}\right) = \frac{4}{3} + \frac{1}{9} + \frac{115}{12} =$

$= \frac{48}{36} + \frac{4}{36} + \frac{345}{36} = \frac{397}{36}$

M A T E T I E M P O S

Acercarse a un número

Elige dos números de dos y tres cifras decimales respectivamente. Multiplica, en tu calculadora, el primero de ellos por un número, de tal forma, que el resultado se aproxime al segundo. Si no lo consigues, no borres el resultado y vuelve a intentarlo partiendo ahora de ese nuevo número.

Solución:

La actividad tiene por finalidad trabajar el concepto de multiplicación por números mayores y menores que uno. El primer obstáculo que se presenta es que quieren borrar el resultado porque se pasaron del número, y es difícil que comprendan que existe un número (menor que uno) que con la multiplicación se obtiene un valor menor. Otro concepto importante es que al multiplicar por 1,1, el número se incrementa un 10%, y si, por el contrario, se multiplica por 0,9, el número disminuye un 10%. Se puede ampliar la actividad acercándose a un número con la división.

EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1 **Clasifica los siguientes números.**

a) 0,112123123412345123456 1234567…

b) 45,4545554555455545554555…

c) 4,1010010001000010000010000001…

d) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

a) Número irracional

b) Número racional con período decimal 4555

c) Número irracional

d) Número irracional

2.2 **El ecuador de la Tierra es, aproximadamente, una circunferencia de 40 000 kilómetros de longitud. ¿Cuánto mide el radio de la Tierra? ¿Qué tipos de números aparecen en este problema?**

$L = 2\pi r = 40\,000$ kilómetros $\Rightarrow r = 6366{,}20$ km

2.3 **Clasifica los siguientes números.**

a) $\sqrt{3}$ **b) $\sqrt{9}$** **c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$** **d) $\pi\sqrt{4}$**

a) $\sqrt{3} = 1{,}732050808$ es un número irracional.

b) $\sqrt{9} = \pm 3$ es un número racional.

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ es un número racional.

d) $\pi\sqrt{4}$ es un número irracional.

2.4 **Un terreno cuadrado tiene 100 metros de lado, y se quiere ampliar a otro de la misma forma y área doble. ¿Por cuánto hay que multiplicar el lado? ¿Cuánto medirá el nuevo lado?**

Área del cuadrado dado: 10 000 m^2

Lado del nuevo cuadrado: 100k

Ecuación: $(100k)^2 = 20\,000$

Se opera: $10\,000k^2 = 20\,000$

Se simplifica: $k^2 = 2$

Valor de k:$k = \sqrt{2}$

Valor del nuevo lado: $100\sqrt{2} \approx 100 \cdot 1{,}4142\ldots = 141{,}421\ldots$

2.5 **Un aula de dibujo es rectangular; sus medidas son 10 metros de largo, 8 metros de ancho y 5 metros de altura. Una mosca revolotea dentro del aula. ¿Cuál es la máxima distancia que puede recorrer sin cambiar de dirección?**

¿Qué tipos de números aparecen en este problema?

La dirección máxima está dada por dos vértices opuestos (no de dos caras).

Distancia: $\sqrt{(10^2 + 8^2 + 5^2)} = \sqrt{189} \approx 13{,}75$ m

2.6 **Haz en tu cuaderno una tabla de aproximaciones por exceso y por defecto del número $\sqrt{2}$, hasta un orden de aproximación de la milésima.**

Dato: $\sqrt{2}$	**Aproximaciones de $\sqrt{2}$**			
↓ Precisión	**Por defecto**	**$\sqrt{2}$**	**Por exceso**	**Intervalos de $\sqrt{2}$**
1 unidad	1 <	$\sqrt{2}$	< 2	[1; 2]
1 décima	1,4 <	$\sqrt{2}$	< 1,5	[1,4; 1,5]
1 centésima	1,41 <	$\sqrt{2}$	< 1,42	[1,41; 1,42]
1 milésima	1,414 <	$\sqrt{2}$	< 1,415	[1,414; 1,415]
…	…	…	…	…

2.7 Expresa los tres primeros intervalos de la aproximación decimal del número real $\sqrt{7} = 2{,}645751311\ldots$

Los tres primeros intervalos encajados son: [2; 3], [2,6; 2,7], [2,64; 2,65]

2.8 Halla el error absoluto y el error relativo que se produce cuando se toma para $\frac{25}{3}$ el valor 8,3. ¿Cuál es el orden de la aproximación?

$\frac{25}{3} = 8{,}3333333\ldots$

El error absoluto es: $E_a = |A - V| \Rightarrow E_a = |8{,}3 - 8{,}3333333| = 0{,}0333333\ldots$

El error relativo es: $E_r \frac{E_a}{V} = \Rightarrow E_r = \frac{0{,}0333333}{8{,}3333333} = 0{,}004000000016$

El orden de aproximación son las décimas.

2.9 Utiliza la aproximación de Arquímedes y la de Metius para el número π, y calcula el área de una circunferencia de 20 metros de radio. ¿Crees que son aceptables los errores cometidos en ambos casos?

La aproximación de Arquímedes para el número π es $\frac{22}{7} = 3{,}142857143\ldots$ y la de Metius es $\frac{355}{113} = 3{,}141592920\ldots$

El área de una circunferencia es: $A = \pi \cdot r^2$

$A_A = \left(\frac{22}{7}\right) \cdot 20^2 = 1257{,}142857 \text{ m}^2$ $\qquad A_M = \frac{355}{113} \cdot 20^2 = 1256{,}637168 \text{ m}^2$

2.10 Sabiendo que $\sqrt{5} = 2{,}236067977\ldots$, escribe las cinco primeras aproximaciones por defecto, por exceso y por redondeo.

	Aproximaciones de $\sqrt{5}$		
↓ Precisión	Por defecto	Por exceso	Por redondeo
1 unidad	2	3	2
1 décima	2,2	2,3	2,2
1 centésima	2,23	2,24	2,24
1 milésima	2,236	2,237	2,236
1 diezmilésima	2,2360	2,2361	2,2361

2.11 Realiza las siguientes operaciones con un orden de aproximación de dos cifras decimales, por exceso y por defecto:

a) $2\sqrt{2} + \sqrt{10}$

	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$2\sqrt{2} + \sqrt{10}$	Error máximo
Por exceso	2,83	3,17	6,00	0,02
Por defecto	2,82	3,16	5,98	

b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$

	$\sqrt{7}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$	Error máximo
Por exceso	2,65	1,74	4,61	0,04
Por defecto	2,64	1,73	4,57	

2.12 Escribe en notación científica los números:

a) $\mathbf{75{,}9 \cdot 10^{15}}$ **b)** $\mathbf{0{,}0114 \cdot 10^{23}}$ **c)** $\mathbf{345{,}8 \cdot 10^{17}}$

a) $75{,}9 \cdot 10^{15} = 7{,}59 \cdot 10^{16}$ b) $0{,}0114 \cdot 10^{23} = 1{,}14 \cdot 10^{21}$ c) $345{,}8 \cdot 10^{17} = 3{,}458 \cdot 10^{19}$

2.13 Realiza la siguiente operación y expresa el resultado en notación científica.

$\mathbf{(3{,}45 \cdot 10^{12} + 40{,}12 \cdot 10^{10}) : (8 \cdot 10^{8})}$

$(3{,}45 \cdot 10^{12} + 40{,}12 \cdot 10^{10}) : (8 \cdot 10^{8}) = 4{,}8 \cdot 10^{3}$

2.14 La masa de la Tierra es, aproximadamente, de $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kilogramos, y la de la Luna, de $7{,}34 \cdot 10^{22}$ kilogramos.

¿Cuántas lunas se podrían formar con una masa equivalente a la masa de la Tierra?

Relación entre las masas: $(5{,}98 \cdot 10^{24}) : (7{,}34 \cdot 10^{22}) \approx 0{,}815 \cdot 10^{2} = 8{,}15 \cdot 10$

La masa de la Tierra es unas 81 veces la masa de la Luna.

Por tanto, con la masa de la Tierra se podrían formar casi 82 lunas.

2.15 Escribe tres potencias equivalentes de cada una de las siguientes.

a) $\mathbf{7^{\frac{1}{2}}}$ **c)** $\mathbf{9^{\frac{3}{2}}}$ **e)** $\mathbf{11^{\frac{1}{5}}}$

b) $\mathbf{7^{\frac{3}{2}}}$ **d)** $\mathbf{27^{\frac{1}{3}}}$ **f)** $\mathbf{2^{\frac{7}{9}}}$

a) $7^{\frac{2}{4}}, 7^{\frac{3}{6}}, 7^{\frac{4}{8}}$ c) $9^{\frac{6}{4}}, 9^{\frac{9}{6}}, 9^{\frac{12}{8}}$ e) $11^{\frac{2}{10}}, 11^{\frac{3}{15}}, 11^{\frac{4}{20}}$

b) $7^{\frac{6}{4}}, 7^{\frac{9}{6}}, 7^{\frac{12}{8}}$ d) $27^{\frac{2}{6}}, 27^{\frac{3}{9}}, 27^{\frac{4}{12}}$ f) $2^{\frac{14}{18}}, 2^{\frac{21}{27}}, 2^{\frac{28}{36}}$

2.16 Calcula las siguientes potencias en forma fraccionaria y luego pasándolas a forma radical. Comprueba que los resultados son iguales.

a) $\mathbf{4^{\frac{8}{2}}}$ **b)** $\mathbf{21^{\frac{10}{5}}}$ **c)** $\mathbf{17^{\frac{6}{3}}}$ **d)** $\mathbf{11^{\frac{12}{4}}}$

a) Forma fraccionaria: $4^{\frac{8}{2}} = 4^4 = 256$

Forma radical: $4^{-\frac{8}{2}} = \sqrt{4^8} = 4^4 = 256$

b) Forma fraccionaria: $21^{\frac{10}{5}} = 21^2 = 441$

Forma radical: $21^{\frac{10}{5}} = \sqrt[5]{21^{10}} = 21^{\frac{10}{5}} = 21^2 = 441$

c) Forma fraccionaria: $17^{\frac{6}{3}} = 17^2 = 289$

Forma radical: $17^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{17^6} = 17^2 = 289$

d) Forma fraccionaria: $11^{\frac{12}{4}} = 11^3 = 1331$

Forma radical: $11^{\frac{12}{4}} = \sqrt[4]{11^{12}} = 11^3 = 1331$

2.17 Introduce el factor en el radical.

a) $\mathbf{7\sqrt{2}}$ **b)** $\mathbf{3 \cdot \sqrt[3]{3}}$

a) $\sqrt{98}$ b) $\sqrt[3]{81}$

2.18 Extrae factores de los radicales.

a) $\mathbf{\sqrt{6125}}$ **b)** $\mathbf{\sqrt[3]{648}}$

a) $\sqrt{6125} = \sqrt{5^3 \cdot 7^2} = 35\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{648} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^4} = 6\sqrt[3]{3}$

2.19 Opera y simplifica.

a) $\mathbf{\sqrt{42} \cdot \sqrt{75} : \sqrt{105}}$ **c)** $\mathbf{\sqrt[3]{\frac{125}{512}} \cdot \sqrt{256}}$

b) $\mathbf{\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[5]{12}}$ **d)** $\mathbf{\sqrt[4]{\frac{16}{9}} : \sqrt[5]{81} \cdot \sqrt{\frac{18}{75}}}$

a) $\sqrt{42} \cdot \sqrt{75} : \sqrt{105} = \sqrt{30}$ c) 20

b) $\sqrt[30]{10^{29}}$ d) $\frac{6}{5}\sqrt[20]{\frac{2^{10}}{3^4}}$

2.20 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

a) $\dfrac{5\sqrt{7}}{49}$

b) $-5\sqrt{2}+5\sqrt{3}$

c) $2-\sqrt{3}$

d) $\dfrac{2\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}-\sqrt{15}}{3}$

2.21 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{8}}-\dfrac{3}{\sqrt{32}}+\dfrac{6}{\sqrt{50}}$

b) $-2\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{54}$

c) $10\sqrt[3]{40}-6\sqrt[3]{5000}$

d) $-3\sqrt{28}+5\sqrt{343}$

a) $\dfrac{59\sqrt{2}}{40}$

b) $4\sqrt[3]{2}$

c) $-40\sqrt[3]{5}$

d) $41\sqrt{7}$

2.22 Los lados de tres cuadrados miden, respectivamente, $\frac{51}{4}$, $\frac{51}{6}$ y $\frac{52}{3}$. Ordénalos de menor a mayor según el área.

Denominador común: 12

Potencias fraccionarias equivalentes: $5^{\frac{3}{12}}$, $5^{\frac{2}{12}}$ y $5^{\frac{8}{12}}$

Ordenación según el área, equivalente según el lado:

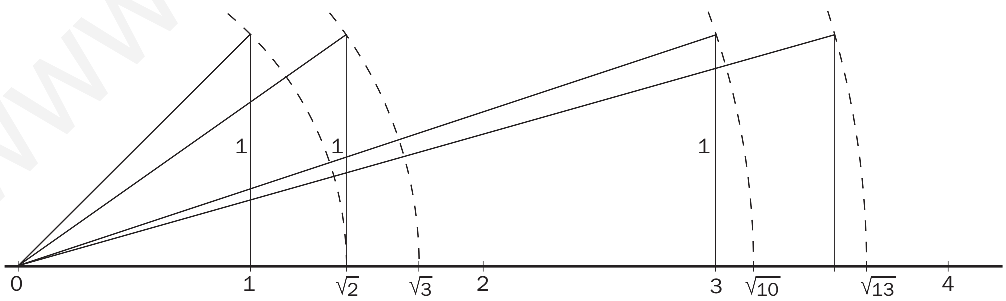
La menor es: $5^{\frac{2}{12}}=5^{\frac{1}{6}}$.

La mediana es: $5^{\frac{3}{12}}=5^{\frac{1}{4}}$.

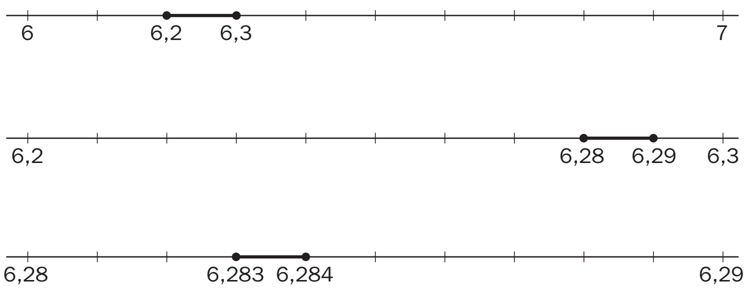
La mayor es: $5^{\frac{8}{12}}=5^{\frac{2}{3}}$.

2.23 Representa en la recta real los números:

a) $\sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{13}$ **c)** 2π **d)** $\dfrac{\pi}{4}$



$2\pi = 6{,}283$



2.24 **¿Qué distancia hay entre los siguientes pares de números reales?**

a) 1 y −1 **b) 2 y 3** **c) −3 y −7** **d) 1 y $-\frac{1}{2}$**

a) $d(1, -1) = 2$ b) $d(2, 3) = 1$ c) $d(-3, -7) = 4$ d) $d\left(1, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

2.25 **¿Cuál de estos dos números reales, $\frac{3\sqrt{3} - 1}{2}$ y $\frac{2\sqrt{3} + 1}{3}$, es mayor?**

Se comprueba haciendo que los dos números reales tengan el mismo denominador.

$$\frac{3\sqrt{3} - 1}{2} > \frac{2\sqrt{3} + 1}{3}$$

2.26 **Expresa de otras dos formas cada uno de estos intervalos y represéntalos gráficamente.**

a) $|x - 3| < 2$ **b) $(-8, 0)$** **c) $-2 < x < 9$**

a) $|x - 3| < 2$

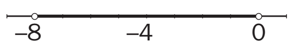
$1 < x < 5$

$(1, 5)$

b) $(-8, 0)$

$-8 < x < 0$

$|x + 4| < 4$



c) $-2 < x < 9$

$(-2, 9)$

2.27 **¿Qué intervalo, en el eje de abscisas, determina un círculo con centro el origen de coordenadas y 5 centímetros de radio?**

Sea AB el diámetro que determina en el eje de abscisas.

Se designa por O el centro del diámetro AB.

Se designa por r el valor del radio y por X un punto cualquiera del eje OX.

Intervalo: $AB = |d(OX)| \leq r$

R E S O L U C I Ó N D E P R O B L E M A S

2.28 **Laura quiere fabricar otro depósito con el doble de capacidad, es decir, 40 litros, y desea mantener la misma forma cúbica. ¿Cuánto medirá ahora la arista aproximando hasta los milímetros?**

Se trata de calcular la raíz cúbica de 40. Conviene hacer notar a los alumnos que la arista no será el doble de la anterior.

Aproximamos sucesivamente.

$3^3 = 27 < 40 < 4^3 = 64$ $\rightarrow$ 3…

$3{,}4^3 = 39{,}304 < 40 < 3{,}5^3 = 42{,}875$ $\rightarrow$ 3,4…

$3{,}41^3 = 39{,}651821 < 40 < 3{,}42^3 = 40{,}001688$ $\rightarrow$ La mejor aproximación es 3,42 dm.

2.29 **La profesora de Laura le pide ahora calcular las medidas de un cartón de leche de un litro, sabiendo que la base es cuadrada y la altura es el doble de la arista de la base, aproximando nuevamente las medidas hasta los milímetros.**

Queremos que $a^2 \cdot 2a = 2a^3$ sea igual a 1 dm^3, es decir, buscamos la raíz cúbica de 0,5.

Aproximamos sucesivamente.

$0{,}7^3 = 0{,}343 < 0{,}5 < 0{,}8^3 = 0{,}512$ $\rightarrow$ 0,7…

$0{,}79^3 = 0{,}493039 < 0{,}5 < 0{,}80^3 = 0{,}512$ $\rightarrow$ 0,79 dm es la mejor aproximación.

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

Números reales

2.30 Indica qué tipo de expresión decimal tienen los siguientes números.

a) $\frac{7}{20}$ **b)** $\frac{8}{11}$ **c)** $\frac{11}{18}$ **d)** $\frac{13}{35}$

a) $\frac{7}{20} = 0{,}35$. Decimal exacto

b) $\frac{8}{11} = 0{,}\widehat{72}$. Decimal periódico puro

c) $\frac{11}{18} = 0{,}6\widehat{1}$. Decimal periódico mixto

d) $\frac{13}{35} = 0{,}3\widehat{714285}$. Decimal periódico mixto

2.31 Copia y completa la tabla escribiendo estos números en todos los conjuntos numéricos a los que pertenecen.

$$\frac{3}{5};\ -\sqrt{2};\ 2;\ 1{,}2525\ldots;\ 2{,}010010001\ldots;\ -4;\ 0{,}1\widehat{6}$$

Naturales (N)	
Enteros (Z)	-4
Racionales (Q)	$-4;\ \frac{3}{5};\ 1{,}2525\ldots;\ 0{,}1\widehat{6}$
Reales (R)	Todos

2.32 ¿Qué diferencia existe entre la parte decimal de un número racional y la de un número irracional? Indica si los siguientes números son racionales o irracionales.

a) 5,372727272…

b) 0,127202002000…

c) 3,5454454445…

d) 8,66612671267…

a) Racional

b) Irracional

c) Irracional

d) Racional

2.33 ¿Qué tipo de número obtendrás al sumar dos números en cada uno de los siguientes casos? Pon ejemplos.

a) Dos racionales

b) Dos irracionales

c) Uno racional y otro irracional

a) Un número racional $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = 0{,}8\widehat{3}$

b) Un número irracional. $\pi + \sqrt{3} = 4{,}87364346116\ldots$

c) Un número irracional. $\sqrt{2} + 1 = 2{,}41421356237\ldots$

2.34 Una figura con forma de hexaedro (cubo) tiene 25 centímetros de arista, y queremos ampliarla a otro hexaedro cuyo volumen sea el doble. ¿Cuánto medirá la arista del nuevo hexaedro? ¿Qué relación existe con la arista del hexaedro inicial?

El volumen del hexaedro inicial será: $V = a^3 = (5^2)^3 = 5^6$ cm³. Si queremos que el volumen del hexaedro transformado sea el doble, se cumplirá:

$V' = 2V = 2 \cdot 5^6 = (a')^3 \Rightarrow a' = \sqrt[3]{2 \cdot 5^6} = 5^2\sqrt[3]{2}$ cm

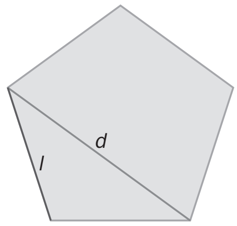
Y la relación existente con la arista inicial será: $a' = 5^2\sqrt[3]{2} = a\sqrt[3]{2}$. La nueva arista será $\sqrt[3]{2}$ veces más larga que la inicial.

Aproximaciones, representación y orden en R

2.35 **La relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado se llama número de oro o áureo, y se designa por ϕ. Su valor es $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618...$**

¿Es irracional? ¿Por qué?

Calcula una aproximación por defecto con un error menor que una centésima.



Sí es irracional, ya que al ser $\sqrt{5}$ irracional, entonces $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ también lo es.

$\phi = 1{,}61$

2.36 **¿Qué errores, absoluto y relativo, se cometen cuando se aproxima 4,1592 a 4,16?**

Error absoluto $= |4{,}1592 - 4{,}16| = 0{,}0008$

Error relativo $= \frac{0{,}0008}{4{,}16} = 0{,}0002$

2.37 **¿Cuántos números reales existen comprendidos entre 5,187246 y 5,187247? Escribe tres de ellos.**

Existen infinitos números reales entre ambos, por ejemplo: 5,187 2461; 5,187 2462; 5,187 2463.

2.38 **Calcula la sucesión de intervalos encajados necesaria para aproximar el número $\sqrt{6} - 1$ con un error inferior a una milésima.**

$2 < \sqrt{6} < 3$

$2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$

$2{,}44 < \sqrt{6} < 2{,}45$

$2{,}449 < \sqrt{6} < 2{,}450$

Ahora restamos una unidad a cada extremo de cada intervalo, y obtenemos:

$1 < \sqrt{6} - 1 < 2$

$1{,}4 < \sqrt{6} - 1 < 1{,}5$

$1{,}44 < \sqrt{6} - 1 < 1{,}45$

$1{,}449 < \sqrt{6} - 1 < 1{,}450$

Por tanto, la sucesión de intervalos buscada es:

$I_0 = (1; 2)$; $I_1 = (1{,}4; 1{,}5)$; $I_2 = (1{,}44; 1{,}45)$; $I_3 = (1{,}449 ; 1{,}450)$

2.39 **Copia en tu cuaderno y rellena los recuadros vacíos con < o > según sea necesario en cada caso.**

a) $\frac{1}{6} \square 0{,}166667$

b) $1{,}732051 \square \sqrt{3}$

c) $1{,}333334 \square \frac{4}{3}$

d) $\sqrt[3]{5} \square 1{,}709976$

a) $\frac{1}{6} < 1{,}66667$

b) $1{,}732051 > \sqrt{3}$

c) $1{,}333334 > \frac{4}{3}$

d) $\sqrt[3]{5} < 1{,}709976$

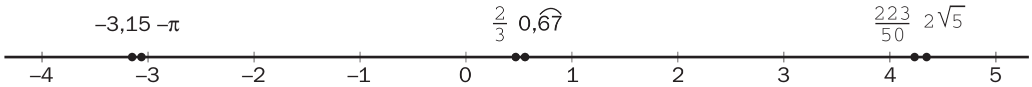
2.40 Ordena de menor a mayor y representa gráficamente los siguientes números reales.

$-\pi$; $2\sqrt{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{223}{50}$; $-3{,}15$; $0{,}\widehat{67}$

Necesitamos tener la aproximación decimal de cada uno de los números:

$$-\pi = -3{,}14159\ldots \quad 2\sqrt{5} = 4{,}4721\ldots \quad \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots \quad \frac{223}{50} = 4{,}46 \;\Rightarrow\; -3{,}15 < -\pi < \frac{2}{3} < 0{,}\widehat{67} < \frac{223}{50} + 2\sqrt{5}$$

Utilizando la aproximación decimal anterior, representamos gráficamente los números:



2.41 Calcula la distancia existente en la recta real entre los siguientes pares de números.

a) −2, 5

b) 5, $\frac{11}{2}$

c) −3, −4

d) −3, $\frac{4}{3}$

a) $d(-2, 5) = |5-(-2)| = |5 + 2| = 7$

b) $d\left(5, \frac{11}{2}\right) = \left|\frac{11}{2} - 5\right| = \left|\frac{11}{2} - \frac{10}{2}\right| = \frac{1}{2}$

c) $d(-3, 4) = |-4-(-3)| = |-4 + 3| = |-1| = 1$

d) $d\left(-3, \frac{4}{3}\right) = \left|\frac{4}{3}-(-3)\right| = \left|\frac{4}{3} + 3\right| = \left|\frac{4}{3} + \frac{9}{3}\right| = \frac{13}{3}$

Intervalos, semirrectas y entornos

2.42 Expresa, mediante desigualdades y gráficamente en la recta real, los siguientes intervalos y semirrectas.

a) $[-1, +\infty)$

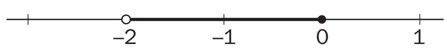
b) $(-2, 0]$

c) $(-\infty, 3)$

d) $[4, 8]$

a) $[-1, +\infty) \to x \geq -1 \to$

b) $[-2, 0) \to -2 < x \leq 0 \to$



c) $(-\infty, 3) \to x < 3 \to$

d) $[4, 8] \to 4 \leq x \leq 8 \to$

2.43 Señala si las siguientes igualdades son verdaderas o no.

a) $E[1, 2] = [-1, 3]$

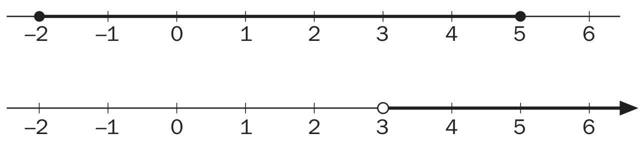
b) $E(0, 1) = [-1, 1]$

c) $E(-2, 3) = (-5, 0)$

d) $E(4, 2) = (3, 5]$

a) Verdadera   b) Verdadera   c) Falsa   d) Falsa

2.44 Representa en la recta real el intervalo $A = [-2, 5]$ y la semirrecta $B = (3, +\infty)$. ¿Existe algún intervalo de puntos común a ambos? En caso afirmativo, hállalo.



Sí existe intervalo común a ambos: (3, 5].

Notación científica

2.45 Escribe en notación científica los números:

a) 5182000000000

b) 0,000000000369

c) 835000000000000

d) 0,00000000000351

¿Cuál tiene el mayor orden de magnitud?

¿Y cuál el menor?

a) $5182000000000 = 5{,}182 \cdot 10^{12}$

b) $0{,}000000000369 = 3{,}69 \cdot 10^{-10}$

c) $835000000000000 = 8{,}35 \cdot 10^{14}$

d) $0{,}00000000000351 = 3{,}51 \cdot 10^{-12}$

Ya que el orden de magnitud nos lo indica el exponente de la potencia en base diez, el número de mayor orden es el c, y el de menor, el d.

2.46 Realiza las siguientes operaciones expresando el resultado en notación científica.

a) $2{,}85 \cdot 10^{10} + 3{,}16 \cdot 10^{8} - 4{,}28 \cdot 10^{9}$

b) $3{,}01 \cdot 10^{-5} \cdot 8{,}24 \cdot 10^{4} \cdot 71{,}5 \cdot 10^{7}$

c) $(10{,}25 \cdot 10^{5}) : (20{,}5 \cdot 10^{-7})$

d) $(7{,}35 \cdot 10^{6}) \cdot (1{,}49 \cdot 10^{3} + 40{,}2 \cdot 10^{4}) : (9{,}95 \cdot 10^{-3})$

a) $2{,}85 \cdot 10^{10} + 3{,}16 \cdot 10^{8} - 4{,}28 \cdot 10^{9} = 2{,}85 \cdot 10^{10} + 0{,}0316 \cdot 10^{10} - 0{,}428 \cdot 10^{10} = 2{,}4536 \cdot 10^{10}$

b) $3{,}01 \cdot 10^{-5} \cdot 8{,}24 \cdot 10^{4} \cdot 71{,}5 \cdot 10^{7} = 1773{,}3716 \cdot 10^{6} = 1{,}7733716 \cdot 10^{9}$

c) $(10{,}25 \cdot 10^{5}) : (20{,}5 \cdot 10^{-7}) = 0{,}5 \cdot 10^{12} = 5 \cdot 10^{11}$

d) $(7{,}35 \cdot 10^{6}) \cdot (1{,}49 \cdot 10^{3} + 40{,}2 \cdot 10^{4}) : (9{,}95 \cdot 10^{-3}) = 2{,}98055427136 \cdot 10^{14}$

Se realiza primero la suma, luego la multiplicación y finalmente la división. Se concluye expresando el resultado en notación científica.

2.47 En el año 2003, la distancia entre la Tierra y Marte era de 56 millones de kilómetros (la distancia más corta de los últimos 60 000 años). Calcula cuánto tiempo hubiera tardado en llegar a Marte una nave espacial que hubiese llevado una velocidad de $1{,}4 \cdot 10^4$ metros por segundo.

$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{56 \cdot 10^6 \text{ km}}{1{,}4 \cdot 10^4 \text{ m/s}} = 4 \cdot 10^6$ s tardará la nave en llegar a Marte.

Radicales. Potencias de exponente fraccionario

2.48 Ordena de mayor a menor estos radicales.

a) $3, \sqrt{10}, \sqrt[3]{26}$

b) $\sqrt{2}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{12}$

a) $\sqrt{10} > 3 > \sqrt[3]{26}$

b) $\sqrt[5]{12} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2}$

2.49 Calcula el valor de las siguientes potencias.

a) $25^{\frac{3}{2}}$ **b)** $343^{\frac{2}{3}}$ **c)** $16^{0,25}$ **d)** $27^{0,3333...}$

a) $25^{\frac{3}{2}} = 125$ b) $343^{\frac{2}{3}} = 49$ c) $16^{0,25} = 2$ d) $27^{0,3333} = 3$

2.50 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27}$

b) $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{392}$

d) $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108}$

e) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[6]{2}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}}$

h) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2$

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{6^3} = \sqrt{216}$

b) $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{2^6 : 5^2} = \sqrt[3]{\frac{2^6}{5^2}}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{392} = \sqrt[15]{2^{19} \cdot 7^6}$

d) $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108} = \sqrt[4]{\frac{3}{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$

e) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{2^{-5}}$

f) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}} = \sqrt[4]{2}$

h) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2 = 4$

Radicales semejantes. Racionalización

2.51 Introduce los factores en el radical y opera.

a) $2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{50}$ **b)** $3^2 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{12}$ **c)** $3 \cdot 5^3 \cdot \sqrt[5]{15}$ **d)** $5 \cdot \sqrt{10}$

a) $2 \cdot 5\sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5^3 \cdot 2 \cdot 5^2} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 5^5}$

b) $3^2 \cdot 2\sqrt[4]{12} = \sqrt[4]{3^8 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6 \cdot 3^9}$

c) $3 \cdot 5^3\sqrt[5]{15} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 5^{15} \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt[5]{3^6 \cdot 5^{10}}$

d) $5\sqrt{10} = \sqrt{5^2 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt{2 \cdot 5^3}$

2.52 Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales y opera.

a) $2 \cdot \sqrt[3]{2160}$ **b)** $3 \cdot 5 \cdot \sqrt{4320}$ **c)** $7 \cdot \sqrt[4]{9072}$ **d)** $2 \cdot 3 \cdot \sqrt{216}$

a) $2\sqrt[3]{2160} = 2\sqrt[3]{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3\sqrt[3]{2 \cdot 5} = 12\sqrt[3]{10}$

b) $3 \cdot 5\sqrt{4320} = 3 \cdot 5\sqrt{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = 180\sqrt{30}$

c) $7\sqrt[4]{9072} = 7\sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4 \cdot 7} = 2 \cdot 3 \cdot 7\sqrt[4]{7} = 42\sqrt[4]{7}$

d) $2 \cdot 3\sqrt{216} = 2 \cdot 3\sqrt{2^3 \cdot 3^3} = 2^2 \cdot 3^2\sqrt{2 \cdot 3} = 36\sqrt{6}$

2.53 Opera y simplifica.

a) $2\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - \sqrt{80}$

b) $4\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

c) $\frac{3}{\sqrt{27}} - \frac{5}{\sqrt{75}} + \frac{4}{\sqrt{12}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{24}} + \frac{1}{\sqrt{54}}$

a) $9\sqrt{5}$ b) $13\sqrt[3]{2}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{5\sqrt{6}}{36}$

2.54 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ i) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ j) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ g) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ k) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$ h) $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{7}}$ l) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

a) $2\sqrt{2}$ e) $-3-2\sqrt{2}$ i) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{5}$

b) $\sqrt[3]{9}$ f) $\sqrt{2}+1$ j) $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}$ g) $\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2}$ k) $-5-2\sqrt{6}$

d) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ h) $\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{14}}{6}$ l) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{5}$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

2.55 Di si son verdaderas o falsas estas afirmaciones.

a) La raíz de un número negativo no existe.

b) Todo número decimal es racional.

c) Todos los números irracionales son reales.

d) El número $\sqrt{\dfrac{12}{3}}$ pertenece a N, Z, Q y R.

a) Verdadera b) Verdadera c) Verdadera. d) Verdadera

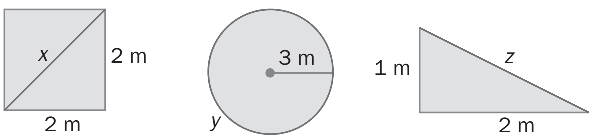
2.56 En la siguiente cadena de contenidos:

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Encuentra un número que pertenezca a cada conjunto, pero no a los anteriores.

$1 \in N$; $-1 \in Z$; $\dfrac{1}{2} \in Q$; $\sqrt{2} \in R$

2.57 Las longitudes *x*, *y*, *z*, ¿pueden escribirse como cocientes de dos enteros? ¿Por qué?



No, ya que $x = \sqrt{8}$, $y = 6\pi$ y $z = \sqrt{5}$ son números irracionales.

2.58 El salón rectangular de mi casa tiene 6 y 4 metros de dimensión. ¿Entre qué dos aproximaciones decimales se encuentra su diagonal?

Por el teorema de Pitágoras:

$d = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 7{,}21110\ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow 7{,}2 < d < 7{,}3$

2.59 ¿Qué intervalo se puede expresar mediante la desigualdad $|x - 3| \leq 2$?

El intervalo buscado es [1, 5].

2.60 ¿Qué números enteros están a la vez en las semirrectas $(-\infty, -2]$ y $(-6, +\infty)$?

-5, -4, -3 y -2

2.61 Di si son ciertas o no estas afirmaciones.

a) Toda raíz cuadrada no exacta es irracional.

b) La suma de un número racional y otro irracional es racional.

c) Los radicales $\sqrt[6]{25}$ y $\sqrt[3]{5}$ son equivalentes.

d) $\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8}$

d) En el intervalo $(-3, -4)$ no hay números enteros, pero sí racionales.

a) Falsa. Puede ser una raíz con resultado decimal periódico.

b) Falsa. Si fuese cierta: $\frac{a}{b} + x = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ sería racional, ya que tendría forma de fracción (donde $\frac{a}{b}$ es racional y x es irracional).

c) Verdadera. Ya que: $\sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[2\cdot 3]{5^{1\cdot 2}} = \sqrt[3]{5}$

d) Falsa. Ya que: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$. Si fuese cierta, $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25} \Rightarrow 4 + 3 \neq 5$.

e) Verdadera. En el intervalo citado no hay ninguna unidad entera negativa, pero sí fraccionaria.

2.62 Explica cómo expresiones tan distintas como $2^{0,5}$, $\sqrt{2}$ y $8^{\frac{1}{6}}$ son equivalentes.

$2^{0,5} = 2^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $8^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}$

PROBLEMAS PARA APLICAR

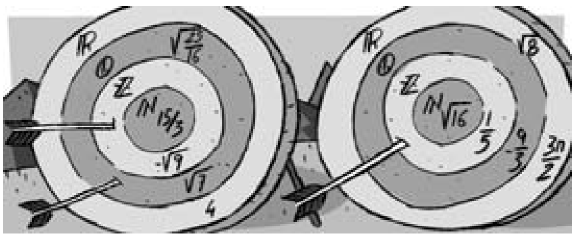
2.63 Para solar la entrada de una nueva sala de exposiciones se utilizan baldosas de 20 × 30 centímetros. Si la entrada es un recinto circular de 6 metros de radio, ¿cuántas baldosas se necesitan como mínimo, suponiendo que se puedan aprovechar todos los recortes?

$A_{\text{circulo}} = \pi r^2 = 36\pi \text{ m}^2 = 360000\pi \text{ m}^2$

$A_{\text{baldosa}} = 30 \cdot 20 = 600 \text{ cm}^2$

$360000\pi : 600 \approx 1884{,}9 \Rightarrow$ El n.º mínimo de baldosas son 1885.

2.64 En un club de matemáticos tienen una diana de números reales. A cada dardo se le asigna un número real, y se ha de clavar en la franja de la diana correspondiente. Si gana el jugador que realiza el mayor número de aciertos en las franjas adecuadas, ¿cuál de estos dos jugadores habrá ganado?



1.er jugador: 1 acierto $(-\sqrt{9} \in Z, \sqrt{7} \notin Q)$

2.º jugador: 0 aciertos $\left(\frac{1}{5} \notin Z\right)$

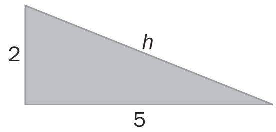
Gana el 1.er jugador.

2.65 La longitud aproximada de una circunferencia de 7 centímetros de radio es de 43,988 centímetros. ¿Cuál y de qué tipo es la aproximación de π que se ha utilizado?

$43{,}988 = 2\pi r \Rightarrow \pi = \frac{43{,}988}{14} = 3{,}142$. Luego se ha tomado una aproximación por exceso a la milésima.

2.66 ¿Qué aproximación está más cerca del valor de la hipotenusa del triángulo de la figura, 5,385 ó 5,386 centímetros?

¿Cuánto más cerca?



La aproximación 5,385 se encuentra más cerca del valor de la hipotenusa.

Está aproximadamente 7 milésimas más cerca que 5,386.

2.67 Un grupo de alumnos busca la raíz de un número natural y ha averiguado que se encuentra dentro de los siguientes intervalos encajados: [3; 4], [3,8; 3,9], [3,87; 3,88], [3,872; 3,873]. ¿De qué raíz se trata?

Elevamos al cuadrado los extremos de los intervalos, y obtenemos:

[9; 16], [14,44; 15,21], [14,9769; 15,0544]… Se observa que todos ellos contienen el 15. Por tanto, la solución es $\sqrt{15} = 3{,}872983\ldots$

2.68 En una fábrica de latas de refrescos han decidido aproximar el número π como $\frac{157}{50}$. ¿Cuánto se ahorran de área de aluminio y de volumen de líquido por lata si cada una es cilíndrica y tiene 3 centímetros de radio y 11 de altura?

$A_{\text{cilindro}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 18\pi + 66\pi = 84\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow A_{\text{aprox}} = 84 \cdot 3{,}14 = 263{,}76 \text{ cm}^2$

$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = 99\pi \text{ cm}^3 \Rightarrow V_{\text{aprox}} = 99 \cdot 3{,}14 = 310{,}86 \text{ cm}^3$

$A_{\text{ahorrada}} = 84\pi - 263{,}76 = 0{,}13 \text{ cm}^3$

$V_{\text{ahorrada}} = 99\pi - 310{,}86 = 0{,}16 \text{ cm}^3$

2.69 Un país invierte el 0,17% del PIB en ayuda al desarrollo del Tercer Mundo y las ONG piden cumplir la recomendación de la ONU para erradicar la pobreza, que consiste en dedicar el 0,7%. Si el PIB del país asciende a 2 billones de euros al año, ¿cuánto dinero deja de destinar el país a ayuda al desarrollo según las indicaciones de la ONU? (Realiza todas las operaciones en notación científica.)

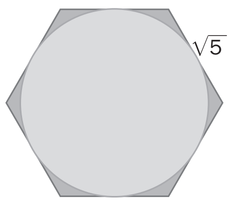
2 billones $= 2 \cdot 10^{12}$ €

Dinero invertido $= \frac{17}{10000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 34 \cdot 10^8 = 3{,}4 \cdot 10^9$ €

Dinero recomendado $= \frac{7}{1000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 14 \cdot 10^9 = 1{,}4 \cdot 10^{10}$ €

Dinero no destinado $= 1{,}4 \cdot 10^{10} - 3{,}4 \cdot 10^9 = 10{,}6 \cdot 10^9 = 1{,}06 \cdot 10^{10}$ €

2.70 Calcula el área de la circunferencia inscrita en un hexágono regular de $\sqrt{5}$ centímetros de lado. Simplifica el resultado.



Radio = apotema.

Por el teorema de Pitágoras:

$r^2 + \frac{5}{4} = 5 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{15}}{2}$ cm^2

2.71 Un profesor escribe en la pizarra la siguiente operación: $\sqrt[5]{8^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Después, pide a la mitad de la clase que la desarrolle en forma de radicales, y a la otra mitad, que lo haga en forma de potencia. ¿Qué resultado obtendrá cada una de las partes de la clase?

Desarrollando en forma de radicales se obtiene como resultado $\sqrt[30]{2}$

Desarrollando en forma de potencia se obtiene como resultado $2^{\frac{1}{30}}$.

2.72 Se realiza un sorteo en la clase de Matemáticas de un grupo de 4.º de ESO con una calculadora gráfica como premio. Ganará el alumno que extraiga el número irracional más alto. Los finalistas obtienen $\frac{7 - 3\sqrt{3}}{8}$ y $\frac{5 - 3\sqrt{3}}{7}$. ¿Quién ha ganado?

Proponemos que: $\frac{7 - 3\sqrt{3}}{8} < \frac{5 - 3\sqrt{3}}{7}$, y operamos:

$\frac{49 - 21\sqrt{3}}{56} < \frac{40 - 24\sqrt{3}}{56} \Rightarrow 49 - 21\sqrt{3} < 40 - 24\sqrt{3} \Rightarrow 49 - 21\sqrt{3} - 40 + 24\sqrt{3} < 0 \Rightarrow 9 + 3\sqrt{3} < 0$, que es falso. Por tanto, la hipótesis es la contraria, es decir: $\frac{7 - 3\sqrt{3}}{8} > \frac{5 - 3\sqrt{3}}{7}$. El ganador es el que obtuvo el número irracional $\frac{7 - 3\sqrt{3}}{8}$.

2.73 Con dos aparatos de medición distintos, se ajusta la longitud de la hipotenusa del triángulo de catetos 2 y 7. Con el aparato A se obtiene $\frac{36}{5}$, y con el B, $\frac{182}{25}$. ¿Qué aparato tiene mayor precisión y qué errores absolutos se han cometido en cada uno de ellos?

Por el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53} = 7{,}280109\ldots$

Aparato A $\Rightarrow \frac{36}{5} = 7{,}2$ Aparato B $\Rightarrow \frac{182}{25} = 7{,}8$

El aparato B es más preciso, ya que tiene orden 2 (n.º de cifras que coinciden con el número exacto).

$Ea_A = |7{,}2 - 7{,}280109\ldots| = 0{,}080109\ldots$

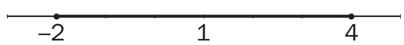
$Ea_B = |7{,}28 - 7{,}280109\ldots| = 0{,}000109\ldots$

2.74 Un alumno piensa en un número entero. El compañero A solicita como pista para adivinarlo si el número pensado está en el entorno (−14, 10), y el compañero B, si se encuentra en (−1, 9). El alumno les contesta que no está en ninguno de esos entornos y que, para encontrarlo, deberían buscar en un entorno que tuviera como centro el punto medio de los centros de los dos entornos citados, y como radio, la suma de los dos radios. ¿Qué entorno les está indicando? ¿Qué posibilidades existen para el número pensado?

$$\underset{(-14,\ 10)}{\textit{Compañero A}} \begin{cases} a(centro) = \dfrac{-14 + 10}{2} = -2 \\ r(radio) = \left|\dfrac{-14 - 10}{2}\right| = 12 \end{cases} \Rightarrow E(-2{,}12)$$

$$\underset{(-1,\ 9)}{\textit{Compañero B}} \begin{cases} a(centro) = \dfrac{-1 + 9}{2} = 4 \\ r(radio) = \left|\dfrac{-1 - 9}{2}\right| = 5 \end{cases} \Rightarrow E(4{,}5)$$

Centro:



Radio $= R_A + R_B = 12 + 5 = 17$

Por tanto: $E(1,\ 17) = (-16,\ 18)$

Si el número pertenece al intervalo (−16, 18) y no pertenece a los intervalos (−14, 10) y (−1, 9), entonces el número entero puede ser: −15, −14, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y 18.

Números reales y aproximaciones

2.75 Calcula los intervalos que se aproximan al número $\sqrt{2} + 1$, con un error menor que una décima, una centésima y una milésima.

Error menor que una décima: (2,4; 2,5)

Error menor que una centésima: (2,41; 2,42)

Error menor que una milésima: (2,414; 2,415)

2.76 El número irracional $\pi = 3{,}1415926...$ es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Halla las aproximaciones por defecto, exceso y redondeo de π hasta la milésima. Para el redondeo, calcula también los errores absoluto y relativo que se cometen.

Aproximación por defecto: $\pi \approx 3{,}141$

Aproximación por exceso: $\pi \approx 3{,}142$

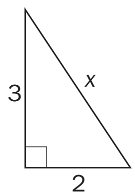
Aproximación por redondeo: $\pi \approx 3{,}142$

Error absoluto $= |3{,}142 - \pi| = 0{,}000407$

Error relativo $= \left|\dfrac{0{,}000407}{\pi}\right| = 0{,}000129$

2.77 Calcula las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo para que la hipotenusa sea un número irracional. Halla los intervalos encajados necesarios para aproximar la hipotenusa con un error inferior a la centésima.

Para que la hipotenusa sea un número irracional, debe ser una raíz cuadrada no exacta. Por ejemplo, si los catetos miden 2 y 3 cm, por el teorema de Pitágoras tenemos que:



$2^2 + 3 = x^2 \Rightarrow 4 + 9 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{13}$ cm

Finalmente, hallamos los intervalos encajados necesarios para aproximar $\sqrt{13}$ a la centésima:

$3 < \sqrt{13} < 4$
$3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}7 \quad \Rightarrow$ Los intervalos buscados son: $I_0 = (3; 4)$, $I_1 = (3{,}6; 3{,}7)$, $I_2 = (3{,}60; 3{,}61)$
$3{,}60 < \sqrt{13} < 3{,}61$

Notación científica

2.78 Teniendo en cuenta que la masa del electrón es de $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kilogramos y que la masa de un elefante africano es, aproximadamente, de 7500 kilogramos, ¿cuántas veces es más pesado el elefante que el electrón?

$\dfrac{m_{elefante}}{m_{electrón}} = \dfrac{7{,}5 \cdot 10^3}{9{,}11 \cdot 10^{-31}} = \dfrac{7{,}5}{9{,}11} \cdot 10^{34} \cong 8{,}2327113 \cdot 10^{33}$ es más pesado el elefante respecto del electrón.

2.79 Opera y expresa el resultado en notación científica:

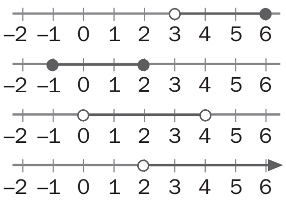
$4{,}75 \cdot 10^{-6} \cdot (3{,}56 \cdot 10^9 + 9{,}87 \cdot 10^7 - 20{,}46 \cdot 10^5)$

$4{,}75 \cdot 10^{-6} \cdot (3{,}56 \cdot 10^9 + 9{,}87 \cdot 10^7 - 20{,}46 \cdot 10^5) = 1{,}74 \cdot 10^4$

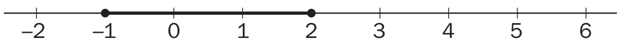
Representación en intervalos y semirrectas

2.80 **Relaciona mediante flechas las diferentes formas de representar los siguientes intervalos y semirrectas.**

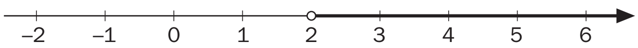
$[-1, 2]$	$x > 2$
$(2, +\infty)$	$0 < x < 4$
$(3, 6]$	$-1 \le x \le 2$
$(0, 4)$	$3 < x \le 6$



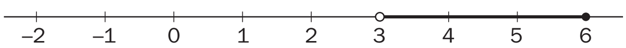
$[-1, 2] \to -1 \le x \le 2 \to$



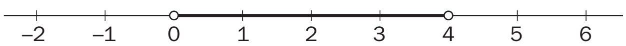
$(2, +\infty) \to x > 2 \to$



$(3, 6] \to 3 < x \le 6 \to$



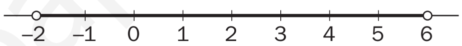
$(0, 4) \to 0 < x < 4 \to$



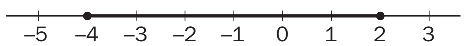
2.81 **Dibuja los siguientes entornos en la recta real e indica mediante desigualdades los intervalos que determinan, así como su centro y su radio.**

a) $\boldsymbol{E(2, 4)}$ **b)** $\boldsymbol{E[-1, 3]}$ **c)** $\boldsymbol{E(3, 1)}$

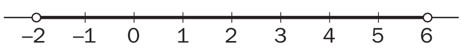
a) $E(2, 4)$: $-2 < x < 6$; centro $= 2$ y radio $= 4 \to$



b) $E[-1, 3]$: $-4 \le x \le 2$; centro $= -1$ y radio $= 3 \to$



c) $E(3, 1)$: $2 < x < 4$; centro $= 3$ y radio $= 1 \to$



Radicales y operaciones

2.82 **Realiza las siguientes operaciones con radicales.**

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[3]{9} : \sqrt{12}$

c) $\sqrt{3} + \sqrt[4]{3} : \left(\sqrt[3]{3}\right)^2$

d) $3\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - 4\sqrt{8} - \sqrt{200}$

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 3^2} = \sqrt[12]{1125}$

b) $\sqrt[3]{9} : \sqrt{12} = \sqrt[6]{3 \cdot 2^{-6}} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} : \left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = \sqrt[12]{3}$

d) $3\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - 4\sqrt{8} - \sqrt{200} = 9\sqrt{2}$

2.83 **Racionaliza las siguientes expresiones.**

a) $\dfrac{5}{\sqrt{15}}$ **b)** $\dfrac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{11}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$

a) $\dfrac{5}{\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{11}} = \sqrt{11} - \sqrt{7}$

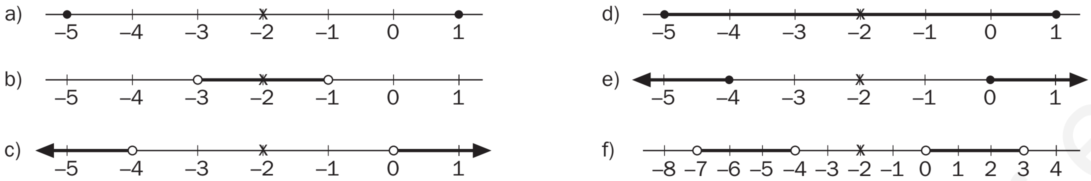
c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \dfrac{-2 + \sqrt{10}}{3}$

2.84 Redondeando π hasta la milésima, el volumen de una esfera es de 14,139 cm³. Averigua su radio.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = 1{,}5$, con $\pi = 3{,}142$

2.85 Marca en una recta numérica el conjunto de puntos cuya distancia al punto −2 sea:

a) Mayor que 2
b) Menor que 1
c) Igual a 3
d) No mayor que 3
e) No menor que 2
f) Mayor que 2 y menor que 5



2.86 Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $|a^2| = |a|^2$ **b)** $|a| = \frac{1}{a}$ **c)** $|2a - 1| < 3$

a) $a \in \Re$ b) $a = 1$ c) $-1 < a < 2$

2.87 Calcula *a*, *b*, *c* y *d* en esta igualdad: $\sqrt{10^4 \cdot 14^6 \cdot 81^{12}} = 2a \cdot 3b \cdot 5c \cdot 7d$

$\sqrt{2^{10} \cdot 3^{48} \cdot 5^4 \cdot 7^6} = 2^a + 3^b + 5^c + 7^d \Rightarrow a = 5;\ b = 24;\ c = 2;\ d = 3$

2.88 La sucesión $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ **se va acercando cada vez más al número irracional $e = 2{,}71828\ldots$ Con qué elemento de la sucesión consigues aproximar hasta la milésima dicho número?**

Con el elemento $a_6 = 2{,}718055\ldots$

2.89 Calcula la distancia entre $5^{\frac{2}{5}}$ y $17^{\frac{1}{3}}$, con un error menor que una milésima.

$d(5^{\frac{2}{5}}, 17^{\frac{1}{3}}) = |17^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{2}{5}}| = |\sqrt[3]{17} - \sqrt[5]{25}| = |2{,}5712815\ldots - 1{,}9036539\ldots| = 0{,}6676276\ldots \Rightarrow d(5^{\frac{2}{5}}, 17^{\frac{1}{3}}) = 0{,}667$

Ya que $E_a = |0{,}667 - 0{,}6676276\ldots| = 0{,}0006276\ldots < 0{,}001$

2.90 Opera y simplifica.

a) $2\sqrt{x} + 5\sqrt{25x} - 3\sqrt{36x} - 4\sqrt{9x}$ **b)** $\frac{2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{5}{6}}}$

a) $-3\sqrt{x}$ b) $\frac{2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{5}{6}}} = 2\sqrt[10]{2}$

2.91 Halla el valor de *a* y *b* para que se cumpla la siguiente igualdad.

$$\frac{(98\,700\,000\,000\,000\,000\,000)^4}{(0{,}000\,000\,000\,000\,023\,4)^{-5}} = a \cdot 10^b$$

Donde *a* es un número racional entre 1 y 10 redondeado hasta dos cifras decimales.

Pasamos a notación científica ambos números, y luego operamos:

$\frac{(9{,}87 \cdot 10^{19})^4}{(2{,}34 \cdot 10^{-14})^{-5}} = a \cdot 10^b \Leftrightarrow \frac{9490{,}05 \cdot 10^{76}}{0{,}01 \cdot 10^{70}} = 949005 \cdot 10^6 = 9{,}49005 \cdot 10^5 \cdot 10^6 = 9{,}49 \cdot 10^{11}$

$a = 9{,}49$ y $b = 11$

2.92 **Calcula a y b en la inecuación $|x - a| < b$ para que la totalidad de valores de x que la cumplen estén representados por el entorno $(-16, 2)$.**

$a \text{ (centro)} = \dfrac{-16 + 2}{2} = \dfrac{-14}{2} = -7$ $\qquad$ $b \text{ (radio)} = \left|\dfrac{-16 - 2}{2}\right| = \left|\dfrac{-18}{2}\right| = 9$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

2.93 **Medidas inexactas**

En el dibujo aparecen las dimensiones de una mesa de pimpón.

Para obtener las medidas anteriores, se ha utilizado una regla que solo aprecia hasta el milímetro.

a) Indica cuál de las siguientes expresiones puede servir para determinar la verdadera medida del largo a de la mesa.

b)

A	*B*	*C*
$a = 122{,}4$	$\lvert a - 122{,}4\rvert \le 0{,}1$	$a = 122{,}4 \pm 0{,}1$

c) Si b es el verdadero valor del ancho, escribe entre qué dos valores mínimo y máximo se encuentra el verdadero valor del área de la mesa.

a) La *B*

b) $\begin{cases} 122{,}4 - 0{,}1 \le a \le 122{,}4 + 0{,}1 \\ 66{,}8 - 0{,}1 \le b \le 66{,}8 + 0{,}1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 122{,}3 \le a \le 122{,}5 \\ 66{,}7 \le b \le 66{,}9 \end{cases} \Rightarrow 122{,}3 \cdot 66{,}7 \le a \cdot b \le 122{,}5 \cdot 66{,}9$

c) $8157{,}41 \le \text{Área} \le 8195{,}25$

2.94 **Las células robóticas**

Se va a construir un nuevo robot con forma cilíndrica capaz de realizar numerosas tareas industriales. Para ello se utilizan *células* con diferentes funciones, pero todas ellas con forma de esfera de $12 \cdot 10^{-2}$ milímetros de diámetro.

a) Estima cuántas *células* harían falta para que, colocadas en fila, se consiguiera alcanzar la altura del robot, que es de 165 centímetros.

b) Calcula cuántas *células* se necesitarían para completar la longitud de la circunferencia que determina la sección del cuerpo del robot, sabiendo que tiene un diámetro de 30 centímetros.

c) Evalúa el número de *células* necesarias para completar el área de la capa más externa de la superficie cilíndrica del robot.

d) El peso de cada *célula* es de 0,02 miligramos. Estima el peso en kilogramos de la capa más externa del robot.

Escribe los resultados en notación científica.

a) $\dfrac{165}{1{,}2 + 10^{-3}} = 137\,500 = 1{,}375 \cdot 10^5$ células

b) $2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 15 = 94{,}248$

$\dfrac{94{,}248}{1{,}2 \cdot 10^{-3}} = 78\,540 = 7{,}854 \cdot 10^4$ células

c) $1{,}375 \cdot 10^5 \cdot 7{,}854 \cdot 10^4 = 1{,}08 \cdot 10^{10}$ células

d) $1{,}08 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-8} = 216$ kg

2.A1 Sean los números $A = 1{,}7864...$ y $B = 2{,}3879...$
Calcula $A + B$ y $A - B$, con una aproximación hasta la milésima.

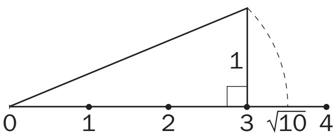
$A + B = 4{,}174$ $\qquad$ $A - B = -0{,}602$

2.A2 Representa en la recta real el número $\sqrt{10}$.

a) ¿Qué tipo de número es?

b) ¿Qué teorema has aplicado para la representación?

c) Halla la sucesión de intervalos encajados que lo aproximen hasta la milésima.



a) Es un número irracional, ya que es una raíz cuadrada no exacta.

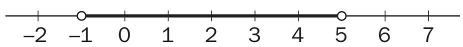
b) Teorema de Pitágoras: $3^2 + 1^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$
$3 < \sqrt{10} < 4$

c) $3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$ $\qquad$ $3{,}16 < \sqrt{10} < 3{,}17$
$3{,}162 < \sqrt{10} < 3{,}163$

Por tanto, los intervalos encajados buscados son:
$I_0 = (3; 4)$, $I_1 = (3{,}1; 3{,}2)$, $I_2 = (3{,}16; 3{,}17)$, $I_3 = (3{,}162; 3{,}163)$

2.A3 Un conjunto de números reales x cumple que $|x - 2| < 3$. Describe este conjunto utilizando intervalos y desigualdades, y gráficamente.

$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 5) \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow$



2.A4 Calcula el punto o puntos de la recta real que verifican la siguiente igualdad: $d(x, -3) = 2$.

$$d(x, -3) = 2 \Leftrightarrow |-3 - x| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x \Rightarrow x = -5 \\ x + 3 = 2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

2.A5 Realiza las siguientes operaciones expresando el resultado en notación científica.

a) $3{,}28 \cdot 10^5 + 2{,}35 \cdot 10^7$

b) $(0{,}26 \cdot 10^{-4}) \cdot (8{,}53 \cdot 10^9)^2$

c) $(2{,}5 \cdot 10^3) \cdot (6{,}2 \cdot 10^2 - 31{,}4 \cdot 10^4) \cdot (10{,}7 \cdot 10^2)$

a) $3{,}28 \cdot 10^5 + 2{,}35 \cdot 10^7 = 2{,}38 \cdot 10^7$

b) $(0{,}26 \cdot 10^{-4}) \cdot (8{,}53 \cdot 10^9)^2 = 1{,}89 \cdot 10^{15}$

c) $(2{,}5 \cdot 10^3) \cdot (6{,}2 \cdot 10^2 - 31{,}4 \cdot 10^4) \cdot (10{,}7 \cdot 10^2) = -8{,}3829 \cdot 10^{-4}$

2.A6 Realiza las siguientes operaciones.

a) $81^{1{,}25}$ $\qquad$ **b) $8^{\frac{2}{3}}$** $\qquad$ **c) $9^{1{,}5}$** $\qquad$ **d) $125^{\frac{4}{3}}$**

a) 243 $\qquad$ b) 4 $\qquad$ c) 27 $\qquad$ d) 625

2.A7 **Racionaliza estas expresiones.**

a) $\dfrac{4}{\sqrt{8}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt{12}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$

2.A8 **Realiza las siguientes operaciones con radicales.**

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{2}$

b) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3}$

c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^4$

d) $3\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{27}$

e) $3\sqrt{50} + \sqrt{200} - 8\sqrt{8}$

f) $\dfrac{3}{\sqrt{10}} - \dfrac{5}{\sqrt{40}} + \dfrac{2}{\sqrt{90}}$

a) $\sqrt{3} + \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{18}$

b) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{2^5\cdot 3^{-3}}$

c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^4 = \sqrt[3]{4}$

d) $3\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{27} = 20\sqrt{3}$

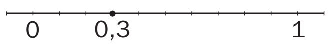
e) $3\sqrt{50} + \sqrt{200} - 8\sqrt{8} = 9\sqrt{2}$

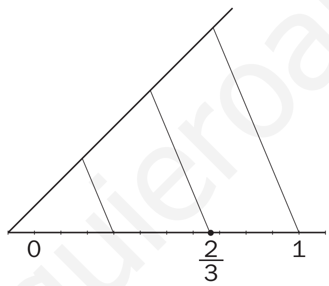
f) $\dfrac{3}{\sqrt{10}} - \dfrac{5}{\sqrt{40}} + \dfrac{2}{\sqrt{90}} = \dfrac{7\sqrt{10}}{60}$

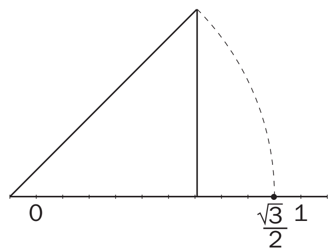
2.A9 **Ordena de mayor a menor y representa gráficamente los siguientes números reales.**

$0,\widehat{3}$; $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0,\widehat{3} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$







M A T E T I E M P O S

¿La calculadora se equivoca?

Fíjate en esta operación: 123 987 456^2 − (123 987 455 · 123 987 457).

Comprueba que si utilizas tu calculadora para resolverla directamente obtienes una solución, y si la simplificas previamente consigues otra distinta. ¿Por qué ocurre esto?

En una calculadora convencional no podremos introducir cifras tan grandes; por tanto, tendremos que redondear, o redondeará la propia calculadora según el modelo, y de este redondeo vendrán los errores.

Para resolverlo se tiene que tener en cuenta que si:

$123\,987\,456 = a$

$123\,987\,455 = a - 1$

$123\,987\,457 = a + 1$

Haciendo operaciones algebraicas:

$A = a^2 - (a-1)(a+1) = a^2 - (a^2 - 1) = a^2 - a^2 + 1 = 1$

Luego $A = 1$, independientemente del valor de a.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1 **Indica, sin realizar la división, el tipo de expresión decimal de estos números.**

a) $\frac{11}{6}$ **b)** $\frac{19}{33}$ **c)** $\frac{27}{14}$ **d)** $\frac{77}{50}$

a) $\frac{11}{6} \rightarrow$ Periódico mixto

b) $\frac{19}{33} \rightarrow$ Periódico puro

c) $\frac{27}{14} \rightarrow$ Periódico mixto

d) $\frac{77}{50} \rightarrow$ Decimal exacto

1.2 **Señala cuáles de los siguientes números decimales no son periódicos.**

a) 1,7 17 117 1117…

b) 3,012351235123…

c) $\sqrt{5} = 2{,}2360679774\ldots$

d) 8,163264128256…

a) No es periódico.

b) Sí es periódico.

c) No es periódico.

d) No es periódico.

1.3 **Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales.**

a) −0,1234567891011…

b) $\sqrt{6} = 2{,}4494897427\ldots$

c) 8,023023023…

d) $\sqrt[3]{8} = 2$

a) Irracional

b) Irracional

c) Racional

d) Racional

1.4 **El laboratorio de ciencias es una clase rectangular de 8 metros de largo por 7 de ancho. Indica alguna medida en la clase que no pueda expresarse mediante números racionales.**

La diagonal del rectángulo: $d = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{113}$ m

1.5 **Dado el número 53,2647, escribe:**

a) Las mejores aproximaciones por defecto y por exceso, y los redondeos con una, dos y tres cifras decimales.

b) Los errores absolutos y relativos asociados a los redondeos.

a) Con una cifra decimal: $\begin{cases} \text{Exceso} \rightarrow 53{,}3 \\ \text{Defecto} \rightarrow 53{,}2 \\ \text{Redondeo} \rightarrow 53{,}3 \end{cases}$

Con dos cifras decimales: $\begin{cases} \text{Exceso} \rightarrow 53{,}27 \\ \text{Defecto} \rightarrow 53{,}26 \\ \text{Redondeo} \rightarrow 53{,}26 \end{cases}$

Con tres cifras decimales: $\begin{cases} \text{Exceso} \rightarrow 53{,}265 \\ \text{Defecto} \rightarrow 53{,}264 \\ \text{Redondeo} \rightarrow 53{,}265 \end{cases}$

b) E. abs. asociado a 53,3: $|53,3 - 53,2647| = 0,0353$ — E. rel. asociado a 53,3: $\frac{0,0353}{53,2647} = 0,0007$

E. abs. asociado a 53,26: $|53,26 - 53,2647| = 0,0047$ — E. rel. asociado a 53,26: $\frac{0,0047}{53,2647} = 8,8238 \cdot 10^{-5}$

E. abs. asociado a 53,265: $|53,265 - 53,2647| = 0,0003$ — E. rel. asociado a 53,265: $\frac{0,0003}{53,2647} = 5,6322 \cdot 10^{-6}$

1.6 **Una buena aproximación al número π es la fracción $\frac{22}{7}$. Si una fuente circular mide 12 metros de radio, ¿qué errores absoluto y relativo cometemos al medir su circunferencia tomando esta aproximación de π?**

$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3,1415 \cdot 12 = 75,396$ m

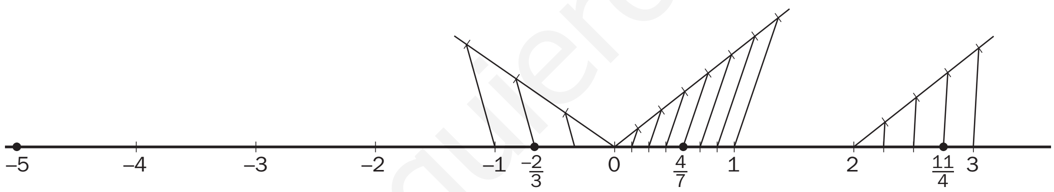
Si aproximamos π por $\frac{22}{7}$, tenemos que $L = 75,4272$ m.

Error absoluto: $|75,3960 - 75,4272| = 0,0312$ — Error relativo: $\frac{0,0312}{75,3960} = 0,0004138$

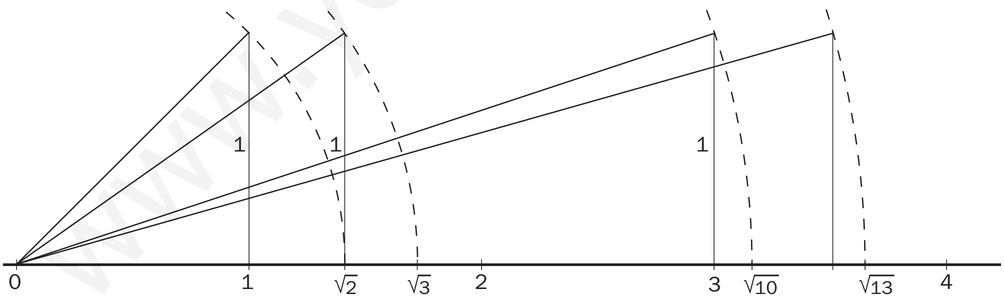
1.7 **Representa en la recta real estos números.**

a) $-5, -\frac{2}{3}, \frac{4}{7}$ **y** $\frac{11}{4}$ — **b)** $\sqrt{3}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$ **y** 2π

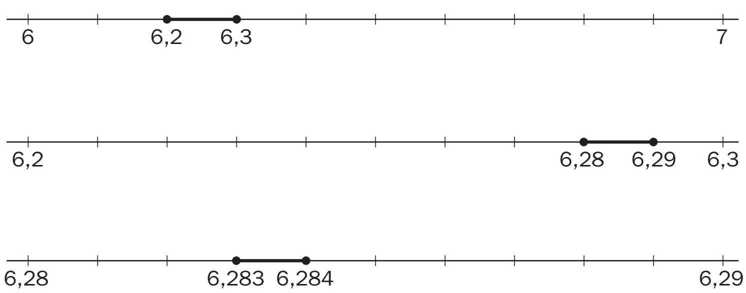
a)



b)



$2\pi = 6,283$



1.8 Realiza las siguientes operaciones en donde aparecen valores absolutos.

a) $||-4| + (-4)|$ **b)** $||-7| \cdot |2| - |-3||$

a) $||-4| + (-4)| = |4 - 4| = 0$

b) $||-7| \cdot |2| - |-3|| = |7 \cdot 2 - 3| = |14 - 3| = 11$

1.9 Expresa de otras dos formas estos intervalos, e identifica cuáles son entornos.

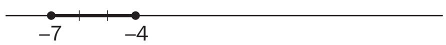
a) $(3, 9]$ **b)** $-2 < x < 9$ **c)** $[-7, -4]$

a) $(3, 9] \to 3 < x \leq 9 \to$ 

No es un entorno.

b) $-2 < x < 9 \to (-2, 9) \to$ 

Es un entorno abierto.

c) $[-7, -4] \to -7 \leq x \leq -4 \to$ 

Es un entorno cerrado.

1.10 Calcula el radio y el centro de estos entornos.

a) $(-5, 5)$ **c)** $|x - 1| < 6$

b) $[-1, 7]$ **d)** $|x + 1| \leq 3$

Sea a = centro y r = radio.

a) $(-5, 5)$: $a = \dfrac{-5 + 5}{2} = 0$ $r = \dfrac{5 - (-5)}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

b) $(-1, 7)$: $a = \dfrac{-1 + 7}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ $r = \dfrac{7 - (-1)}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

c) $|x - 1| < 6$: $a = 1$ $r = 6$

d) $|x + 1| \leq 3$: $a = -1$ $r = 3$

1.11 Realiza estas operaciones expresando el resultado como una única potencia.

a) $3^3 \cdot 3^{-2} \cdot 3$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$

c) $3^5 \cdot 3^{-3} : 3^{-2}$

d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^0 : \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$

e) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1} \cdot 2^{-2}$

f) $(4^2)^2 \cdot 4^{-1} : 4 \cdot 4^3$

a) $3^3 \cdot 3^{-2} \cdot 3 = 3^2$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} = \dfrac{3}{2}$

c) $3^5 \cdot 3^{-3} : 3^{-2} = 3^4$

d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^0 : \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^5$

e) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1} \cdot 2^{-2} = \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

f) $(4^2)^2 \cdot 4^{-1} : 4 \cdot 4^3 = 4^5$

1.12 Expresa en notación científica estas cantidades.

a) Longitud de un paramecio: 0,000 025 metros

b) Edad del universo: 15 000 millones de años

a) $2{,}5 \cdot 10^{-5}$

b) $1{,}5 \cdot 10^{10}$

1.13 Calcula:

a) $3{,}62 \cdot 10^{12} - 2{,}4 \cdot 10^{12}$

b) $2{,}45 \cdot 10^{8} + 6{,}12 \cdot 10^{7}$

c) $(4{,}35 \cdot 10^{8}) \cdot (2{,}1 \cdot 10^{7})$

d) $(4{,}6 \cdot 10^{17}) : (8 \cdot 10^{12})$

a) $3{,}62 \cdot 10^{12} - 2{,}4 \cdot 10^{12} = 1{,}22 \cdot 10^{12}$

b) $2{,}45 \cdot 10^{8} + 6{,}12 \cdot 10^{7} = 24{,}5 \cdot 10^{7} + 6{,}12 \cdot 10^{7} = 30{,}62 \cdot 10^{7}$

c) $(4{,}35 \cdot 10^{8}) \cdot (2{,}1 \cdot 10^{7}) = 9{,}135 \cdot 10^{15}$

d) $(4{,}6 \cdot 10^{17}) : (8 \cdot 10^{12}) = 0{,}575 \cdot 10^{5} = 5{,}75 \cdot 10^{4}$

1.14 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los siguientes radicales.

a) $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[10]{5}$

b) 3, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{3}$

a) $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[10]{5}$ → Reducimos a índice común los radicales: $\sqrt[10]{3^5}$, $\sqrt[10]{2^2}$, $\sqrt[10]{5}$

Ordenamos de menor a mayor: $\sqrt[10]{2^2} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[10]{3^5} \Rightarrow \sqrt[5]{2} < \sqrt[10]{5} < \sqrt{3}$

b) 3, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{3}$ → Reducimos a índice común los radicales: $\sqrt[6]{3^6}$, $\sqrt[6]{2^3}$, $\sqrt[6]{5^2}$, $\sqrt[6]{3}$

Ordenamos de menor a mayor: $\sqrt[6]{3} < \sqrt[6]{2^3} < \sqrt[6]{5^2} < \sqrt[6]{3^6} \Rightarrow \sqrt[6]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{5} < 3$

1.15 Indica cuántas raíces tienen los siguientes números y calcúlalas cuando sea posible.

a) $\sqrt{0{,}49}$

b) $\sqrt[3]{216}$

c) $\sqrt{-4}$

d) $\sqrt[3]{-125}$

a) $\sqrt{0{,}49}$ Tiene dos raíces reales: $+0{,}7$ y $-0{,}7$.

b) $\sqrt[3]{216}$ Tiene una raíz real: 6.

c) $\sqrt{-4}$ No tiene raíces reales.

d) $\sqrt[3]{-125}$ Tiene una raíz real: -5.

1.16 De los siguientes pares de potencias, ¿cuáles son equivalentes?

a) $21^{\frac{1}{5}}$, $21^{\frac{2}{10}}$

b) $13^{\frac{5}{8}}$, $13^{\frac{6}{7}}$

c) $7^{\frac{2}{4}}$, $7^{\frac{15}{30}}$

d) $10^{\frac{2}{3}}$, $10^{0,666...}$

a) $21^{\frac{1}{5}}$, $21^{\frac{2}{10}}$ → Sí son equivalentes.

b) $13^{\frac{5}{8}}$, $13^{\frac{6}{7}}$ → No son equivalentes.

c) $7^{\frac{2}{4}}$, $7^{\frac{15}{30}}$ → Sí son equivalentes.

d) $10^{\frac{2}{3}}$, $10^{0,666...}$ → Sí son equivalentes.

1.17 Expresa los siguientes radicales como potencias y, si es posible, simplifícalas.

a) $\sqrt[3]{64}$

b) $\sqrt{27}$

c) $\sqrt[4]{49}$

d) $\sqrt[6]{4096}$

a) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$

c) $\sqrt[4]{49} = \sqrt[4]{7^2} = 7^{\frac{2}{4}} = 7^{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[6]{4096} = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{6}} = 2^2$

1.18 Escribe tres potencias equivalentes a:

a) $3^{\frac{1}{2}}$

b) $7^{\frac{1}{5}}$

a) $3^{\frac{1}{2}} \rightarrow 3^{\frac{2}{4}}, 3^{\frac{3}{6}}, 3^{\frac{5}{10}}$

b) $7^{\frac{1}{5}} \rightarrow 7^{\frac{2}{10}}, 7^{\frac{3}{15}}, 49^{\frac{1}{10}}$

1.19 Expresa como radicales estas potencias.

a) $16^{\frac{2}{3}}$

b) $125^{\frac{2}{4}}$

c) $81^{\frac{3}{5}}$

d) $100^{\frac{5}{2}}$

a) $16^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16^2} = \sqrt[3]{2^8}$

b) $125^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{125^2} = \sqrt[4]{5^6}$

c) $81^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{81^3} = \sqrt[5]{3^{12}}$

d) $100^{\frac{5}{2}} = \sqrt{100^5}$

1.20 Los lados de tres cuadrados miden, respectivamente, $5^{\frac{1}{4}}$, $5^{\frac{1}{6}}$ y $5^{\frac{2}{3}}$ metros. Ordénalos de menor a mayor según sus correspondientes áreas.

Reduciendo los exponentes de las potencias a común denominador: $5^{\frac{3}{12}}, 5^{\frac{2}{12}}, 5^{\frac{8}{12}}$.

Entonces: $5^{\frac{2}{12}} < 5^{\frac{3}{12}} < 5^{\frac{8}{12}} \rightarrow 5^{\frac{1}{6}} < 5^{\frac{1}{4}} < 5^{\frac{2}{3}}$

1.21 Haz las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{2}$

d) $\sqrt[3]{10} : \sqrt{5}$

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{144} = 12$

b) $\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{3^5 \cdot 2^3} = \sqrt[15]{1944}$

d) $\sqrt[3]{10} : \sqrt{5} = \sqrt[6]{10^2 : 5^3} = \sqrt[6]{0{,}8}$

1.22 Realiza las operaciones siguientes.

a) $\sqrt[10]{4} \cdot \sqrt[5]{9} : \sqrt{3}$

b) $\left(\sqrt[3]{2^2}\right)^2$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$

d) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}}\right)^2$

a) $\sqrt[10]{4} \cdot \sqrt[5]{9} : \sqrt{3} = \sqrt[10]{4 \cdot 9^2 : 3^5} = \sqrt[10]{\dfrac{4}{3}}$

b) $\left(\sqrt[3]{2^2}\right)^2 = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$

d) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}}\right)^2 = \left(\sqrt[9]{3^3}\right)^2 = \sqrt[9]{3^6} = \sqrt[3]{3^2}$

1.23 Simplifica extrayendo factores.

a) $\sqrt{180}$

b) $\sqrt[4]{162}$

c) $\sqrt[3]{72}$

d) $\sqrt[3]{24\,000}$

a) $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

b) $\sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{2 \cdot 3^4} = 3\sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{3^2}$

d) $\sqrt[3]{24\,000} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3 \cdot 5^3} = 2^2 \cdot 5\sqrt[3]{3} = 20\sqrt[3]{3}$

1.24 Introduce los factores enteros en los radicales.

a) $2\sqrt{5}$

b) $11\sqrt{7}$

c) $10\sqrt[3]{2}$

d) $5\sqrt[4]{2}$

a) $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$

b) $11\sqrt{7} = \sqrt{11^2 \cdot 7} = \sqrt{847}$

c) $10\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2000}$

d) $5\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{1250}$

1.25 Opera y simplifica.

a) $\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{50}$

b) $\sqrt{20} - 6\sqrt{45} + \sqrt{80}$

c) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} + 3\sqrt[4]{48}$

a) $\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + 3\sqrt[3]{3^2 \cdot 2} - \sqrt[3]{5^2 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3^2 \cdot 2} - \sqrt[3]{5^2 \cdot 2}$

b) $\sqrt{20} - 6\sqrt{45} + \sqrt{80} = \sqrt{2^2 \cdot 5} - 6\sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} - 18\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = -12\sqrt{5}$

c) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} + 3\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{2^5} + \sqrt[4]{2 \cdot 3^4} + 3\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{2} + 3\sqrt[4]{2} + 6\sqrt[4]{3} = 5\sqrt[4]{2} + 6\sqrt[4]{3}$

1.26 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{72}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{12}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{200}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{12}} = \dfrac{\sqrt[3]{12^2}}{12} = \dfrac{\sqrt[3]{2^4 \, . \, 3^2}}{12} = \dfrac{\sqrt[3]{18}}{6}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{72}} = \dfrac{\sqrt[4]{72^3}}{72} = \dfrac{\sqrt[4]{2^9 \cdot 3^6}}{72} = \dfrac{4 \cdot 3\sqrt[4]{18}}{72} = \dfrac{\sqrt[4]{18}}{6}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{200}} = \dfrac{\sqrt[4]{200^3}}{200} = \dfrac{\sqrt[4]{2^9 \cdot 5^6}}{200} = \dfrac{4 \cdot 5\sqrt[4]{50}}{200} = \dfrac{\sqrt[4]{50}}{10}$

1.27 Racionaliza y simplifica.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ **c)** $\dfrac{1}{1 - \sqrt{2}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{9} + \sqrt{15}}{3 - 5} = \dfrac{3 + \sqrt{15}}{-2}$

c) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{2}} = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{1 - 2} = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{-1} = -1 - \sqrt{2}$

1.28 Calcula los siguientes logaritmos.

a) En base 2 de 4, 16, 64, 256, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$

b) En base 3 de 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$

a) $\log_2 4 = 2$ $\log_2 \dfrac{1}{2} = -1$

$\log_2 16 = 4$ $\log_2 \dfrac{1}{4} = -2$

$\log_2 64 = 6$

$\log_2 256 = 8$

b) $\log_3 27 = 3$ $\log_3 \dfrac{1}{3} = -1$

$\log_3 9 = 2$ $\log_3 \dfrac{1}{9} = -2$

$\log_3 3 = 1$

$\log_3 1 = 0$

1.29 Usando la definición de logaritmo, halla *x*.

a) $\log_x 36 = 2$ **b)** $-2 = \log_x \frac{1}{25}$ **c)** $-\frac{1}{3} = \log_{27} x$

a) $\log_x 36 = 2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 6^2 \Rightarrow x = 6$

b) $-2 = \log_x \frac{1}{25} \Rightarrow x^{-2} = \frac{1}{25} \Rightarrow x^{-2} = 5^{-2} \Rightarrow x = 5$

c) $-\frac{1}{3} = \log_{27} x \Rightarrow 27^{-\frac{1}{3}} = x \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

1.30 Sin calculadora, halla la primera cifra de los logaritmos decimales de 5100; 823; 50; 0,32; 12 315; −3; 0,0023; 7 y 0,000 03.

$\log 5100 = 3,...$

$\log 823 = 2,...$

$\log 50 = 1,...$

$\log 0,32 = -0,4,...$

$\log 12\,315 = 4,...$

$\log -3$ no existe.

$\log 0,0023 = -2,...$

$\log 7 = 0,8,...$

$\log 0,000\,03 = -4,....$

1.31 Sabiendo que log 5 = 0,7, calcula:

a) $\log 0,125$

b) $\log 2$

c) $\log 500$

d) $\log \sqrt[3]{25}$

a) $\log 0,125 = \log \frac{125}{1000} = \log \frac{5^3}{1000} = 3 \log 5 - \log 1000 = 3 \cdot 0,7 - 3 = 2,1 - 3 = -0,9$

b) $\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - 0,7 = 0,3$

c) $\log 500 = \log (5 \cdot 100) = \log 5 + \log 100 = 0,7 + 2 = 2,7$

d) $\log \sqrt[3]{25} = \log 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log 5 = \frac{2}{3} \cdot 0,7 = \frac{1,4}{3} = 0,4\widehat{6}$

1.32 Mediante un cambio de base y la calculadora, halla:

a) $\log_3 20$

b) $\log_5 15$

c) $\log_{0,5} 10$

d) $\log_{0,1} 2$

e) $\log_4 11$

f) $\log_7 60$

a) $\log_3 20 = \frac{\log 20}{\log 3} = 2,7268$

b) $\log_5 15 = \frac{\log 15}{\log 5} = 1,6826$

c) $\log_{0,5} 10 = \frac{\log 10}{\log 0,5} = -3,3219$

d) $\log_{0,1} 2 = \frac{\log 2}{\log 0,1} = -0,3010$

e) $\log_4 11 = \frac{\log 11}{\log 4} = 1,7297$

f) $\log_7 60 = \frac{\log 60}{\log 7} = 2,1041$

1.33 Toma logaritmos en estas expresiones.

a) $A = \dfrac{100bc^3}{\sqrt{d}}$

b) $B = \dfrac{x^2 y}{10\sqrt[3]{z}}$

a) $A = \dfrac{100bc^3}{\sqrt{d}} \Rightarrow \log A = \log 100bc^3 - \log\sqrt{d} = \log 100 + \log b + 3\log c - \dfrac{1}{2}\log d$

b) $B = \dfrac{x^2 y}{10\sqrt[3]{z}} \Rightarrow \log B = \log x^2 y - \log 10\sqrt[3]{z} = 2\log x + \log y - \log 10 - \dfrac{1}{3}\log z$

1.34 Toma antilogaritmos en estas expresiones.

a) $\log A = 3\log b + \log c - 2$

b) $\log B = 4\log x - \log y - \dfrac{\log z}{3}$

Tomando antilogaritmos se tiene que:

a) $A = \dfrac{b^3 \cdot c}{100}$

b) $B = \dfrac{x^4}{y \cdot \sqrt[3]{z}}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1.35 Demuestra la igualdad siguiente, siendo *n* cualquier número natural.

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Para $n = 1$ es cierta.

Veamos que si se cumple para un valor n, también se cumple para el siguiente, $n + 1$.

Deberíamos obtener $2^{n+2} - 1$.

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = \underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n)}_{2^{n+1}-1} + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1,$$

como queríamos demostrar.

1.36 Demuestra la igualdad siguiente, siendo *n* cualquier número natural.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)\,n} = \frac{n-1}{n}$$

Para $n = 2$ es cierta.

Suponemos que es cierta para $n + 1$ y comprobamos que lo es para $n + 2$. Deberíamos obtener $\frac{n+1}{n+2}$.

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n\,(n+1)}}_{\frac{n}{n+1}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n\,(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}\,(n+2)} =$$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

Por tanto, la igualdad es cierta.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Números reales y aproximaciones

1.37 Indica qué tipo de expresión decimal tienen los siguientes números.

a) $\frac{7}{20}$

b) $\frac{8}{11}$

c) $\frac{11}{18}$

d) $\frac{13}{35}$

a) $\frac{7}{20} = 0{,}35 \rightarrow$ Decimal exacto

b) $\frac{8}{11} = 0{,}\overset{\frown}{72} \rightarrow$ Decimal periódico puro

c) $\frac{11}{18} = 0{,}6\overset{\frown}{1} \rightarrow$ Decimal periódico mixto

d) $\frac{13}{35} = 0{,}3\overset{\frown}{714285} \rightarrow$ Decimal periódico mixto

1.38 Copia y completa la tabla escribiendo estos números en todos los conjuntos numéricos a los que puedan pertenecer.

$\frac{3}{5}$; $-\sqrt{2}$; 1,2525…; 2,010 010 001…; -4; $0,1\widehat{6}$

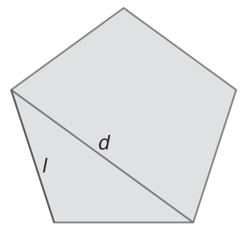
Naturales (N)	
Enteros (Z)	
Racionales (Q)	
Reales (R)	

Naturales (**N**)	
Enteros (**Z**)	-4
Racionales (**Q**)	-4; $\frac{3}{5}$; 1,2525…; $0,1\widehat{6}$
Reales (**R**)	Todos

1.39 La relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado se llama número de oro o áureo, y se designa por ϕ. Su valor es $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$

¿Es irracional? ¿Por qué?

Calcula una aproximación por defecto con un error menor que una centésima.



Sí es irracional, ya que al ser $\sqrt{5}$ irracional, entonces $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ también lo es.

$\phi = 1,61$

1.40 ¿Qué errores absoluto y relativo se cometen cuando se aproxima 4,1592 por 4,16?

Error absoluto $= |4,1592 - 4,16| = 0,0008$

Error relativo $= \frac{0,0008}{4,16} = 0,0002$

1.41 ¿Cuántos números reales existen comprendidos entre 5,187 246 y 5,187 247? Escribe tres de ellos.

Existen infinitos números reales entre ambos, por ejemplo: 5,187 246 1; 5,187 246 2; 5,187 246 3.

1.42 Indica si los siguientes números son racionales o irracionales.

a) 5,372 727 272…

b) 0,127 202 002 000…

c) 3,545 445 444 5…

d) 8,666 126 712 67…

a) Racional

b) Irracional

c) Irracional

d) Racional

1.43 Rellena los recuadros vacíos con $<$ o $>$ según sea necesario en cada caso.

a) $\frac{1}{6} \square 0{,}166\,667$

b) $1{,}732\,051 \square \sqrt{3}$

c) $1{,}333\,334 \square \frac{4}{3}$

d) $\sqrt[3]{5} \square 1{,}709\,976$

a) $\frac{1}{6} < 0{,}166\,667$

b) $1{,}732\,051 > \sqrt{3}$

c) $1{,}333\,334 > \frac{4}{3}$

d) $\sqrt[3]{5} < 1{,}709\,976$

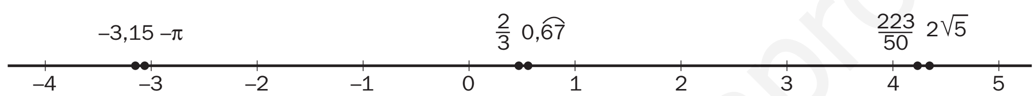
1.44 Ordena de menor a mayor y representa gráficamente los siguientes números reales.

$$-\pi;\ 2\sqrt{5};\ \frac{2}{3};\ \frac{223}{50};\ -3{,}15;\ 0{,}\widehat{67}$$

Necesitamos tener la aproximación decimal de cada uno de los números:

$$-\pi = -3{,}14159\ldots\quad 2\sqrt{5} = 4{,}4721\ldots\quad \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots\quad \frac{223}{50} = 4{,}46 \Rightarrow -3{,}15 < -\pi < \frac{2}{3} < 0{,}\widehat{67} < \frac{223}{50} < 2\sqrt{5}$$

Utilizando la aproximación decimal anterior, representamos gráficamente los números:



1.45 Realiza las siguientes operaciones.

a) $|-7 + 2|$

b) $||-5| - |-8||$

c) $||-9| + |2|\,|-5||$

d) $|-9||5 - 3| - |-4| : |-2|$

a) $|-7 + 2| = 5$

b) $||-5| - |-8|| = 3$

c) $||-9| + |2|\,|-5|| = 19$

d) $|-9||5 - 3| - |-4| : |-2| = 16$

Intervalos, semirrectas y entornos

1.46 Expresa mediante desigualdades y también gráficamente en la recta real los siguientes intervalos y semirrectas.

a) $[-1, +\infty)$

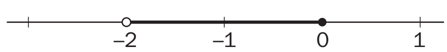
b) $(-2, 0]$

c) $(-\infty, 3)$

d) $[4, 8]$

a) $[-1, +\infty) \rightarrow x \geq -1 \rightarrow$

b) $(-2, 0] \rightarrow -2 < x \leq 0 \rightarrow$



c) $(-\infty, 3) \rightarrow x < 3 \rightarrow$

d) $[4, 8] \rightarrow 4 \leq x \leq 8 \rightarrow$

1.47 **Señala si las siguientes igualdades son verdaderas o no.**

a) $E[1, 2] = [-1, 3]$

b) $E(0, 1) = [-1, 1]$

c) $E(-2, 3) = (-5, 0)$

d) $E(4, 2) = (3, 5]$

a) Verdadera

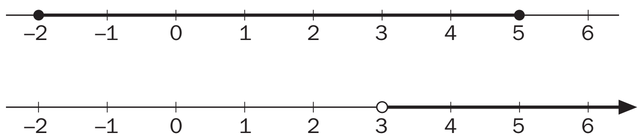
b) Falsa

c) Falsa

d) Falsa

1.48 **Representa en la recta real el intervalo $A = [-2, 5]$ y la semirrecta $B = (3, +\infty)$.**

¿Existe algún intervalo de puntos común a ambos? En caso afirmativo, hállalo.



Sí existe intervalo común a ambos: (3, 5].

Potencias de exponente entero. Notación científica

1.49 **Escribe los siguientes números como potencias cuya base sea un número primo.**

a) **8, 125, 243, 1024, 2401**

b) $\frac{1}{625}, \frac{1}{343}, \frac{1}{256}, \frac{1}{81}, \frac{1}{32}$

a) $8 = 2^3$; $125 = 5^3$; $243 = 3^5$; $1024 = 2^{10}$; $2401 = 7^4$

b) $\frac{1}{625} = 5^{-4}$; $\frac{1}{343} = 7^{-3}$; $\frac{1}{256} = 2^{-8}$; $\frac{1}{81} = 3^{-4}$; $\frac{1}{32} = 2^{-5}$

1.50 **Haz estas operaciones con potencias.**

a) $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2$

c) $5^{-3}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^2$

a) $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1} = 1$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 = 3$

c) $5^{-3}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^2 = 5$

1.51 **Escribe en notación científica los números:**

a) **5 182 000 000 000**

b) **0,000 000 000 369**

c) **835 000 000 000 000**

d) **0,000 000 000 003 51**

¿Cuál tiene un orden de magnitud superior?

a) $5{,}182 \cdot 10^{12}$

b) $3{,}69 \cdot 10^{-10}$

c) $8{,}35 \cdot 10^{14}$

d) $3{,}51 \cdot 10^{-12}$

Tiene mayor orden de magnitud el c.

Radicales. Potencias de exponente fraccionario

1.52 **Ordena de mayor a menor estos radicales.**

a) $3, \sqrt{10}, \sqrt[3]{26}$

b) $\sqrt{2}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{12}$

a) $\sqrt{10} > 3 > \sqrt[3]{26}$

b) $\sqrt[5]{12} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2}$

1.53 **Calcula el valor de las siguientes potencias.**

a) $25^{\frac{3}{2}}$

b) $343^{\frac{2}{3}}$

c) $16^{0,25}$

d) $27^{0,3333...}$

a) $25^{\frac{3}{2}} = 125$

b) $343^{\frac{2}{3}} = 49$

c) $16^{0,25} = 2$

d) $27^{0,3333...} = 3$

1.54 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27}$

b) $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{392}$

d) $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108}$

e) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[6]{2}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}}$

h) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2$

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{6^3} = \sqrt{216}$

b) $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{2^6 : 5^2} = \sqrt[3]{\frac{2^6}{5^2}}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{392} = \sqrt[15]{2^{19} \cdot 7^6}$

d) $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108} = \sqrt[4]{\frac{3}{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$

e) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{2^{-5}}$

f) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}} = \sqrt[4]{2}$

h) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2 = 4$

Radicales semejantes. Racionalización

1.55 **Opera y simplifica.**

a) $2\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - \sqrt{80}$

b) $4\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

c) $\sqrt{27} - 2\sqrt{32} + \sqrt{180}$

d) $3\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} - 5\sqrt[3]{375}$

a) $9\sqrt{5}$

b) $13\sqrt[3]{2}$

c) $3\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 6\sqrt{5}$

d) $-14\sqrt[3]{3}$

1.56 **Racionaliza las siguientes expresiones.**

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}$ **e)** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$ **d)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

a) $2\sqrt{2}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$ e) $-3-2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{9}$ d) $\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$ f) $-2-\sqrt{6}$

Logaritmo de un número. Propiedades

1.57 **Calcula los siguientes logaritmos.**

a) $\log_2 32$ $\log_3 729$ $\log_{10} 1\,000\,000$

b) $\log_2 \dfrac{1}{16}$ $\log_3 \dfrac{1}{81}$ $\log_{10} \dfrac{1}{1000}$

c) $\log_2 \sqrt{8}$ $\log_3 \sqrt[3]{243}$ $\log_{10} \sqrt[5]{100}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 32$ $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27}$ $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100\,000}$

a) $\log_2 32 = 5$ $\log_3 729 = 6$ $\log_{10} 1\,000\,000 = 6$

b) $\log_2 \dfrac{1}{16} = -4$ $\log_3 \dfrac{1}{81} = -4$ $\log_{10} \dfrac{1}{1000} = -3$

c) $\log_2 \sqrt{8} = \dfrac{3}{2}$ $\log_3 \sqrt[3]{243} = \dfrac{5}{3}$ $\log_{10} \sqrt[5]{100} = \dfrac{2}{5}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$ $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27} = 3$ $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100\,000} = \dfrac{-5}{3}$

1.58 **Encuentra el valor de *x*.**

a) $\log_x 125 = 3$ **c)** $\log_x \dfrac{1}{16} = -8$

b) $-3 = \log_x 2$ **d)** $-\dfrac{1}{3} = \log_{27} x$

a) $x = 5$ c) $x = \sqrt{2}$

b) $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ d) $x = \dfrac{1}{3}$

1.59 Si log 8 = 0,9031, halla:

a) log 800 **c) log 0,64** **e) log 5**

b) log 2 **d) log 40** **f) $\log \sqrt[5]{8}$**

a) $\log 800 = \log 8 + \log 100 = 0{,}9031 + 2 = 2{,}9031$

b) $\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 \Rightarrow \log 2 = \frac{1}{3}\log 8 = 0{,}301$

c) $\log 0{,}64 = \log \frac{64}{100} = \log 64 - \log 100 = 2\log 8 - 2 = -0{,}1938$

d) $\log 40 = \log (10 \cdot 4) = \log 10 + \log 4 = 1 + 2\log 2 = 1{,}602$

e) $\log 40 = \log (8 \cdot 5) = \log 8 + \log 5 \Rightarrow \log 5 = \log 40 - \log 8 = 0{,}6989$

f) $\log \sqrt[5]{8} = \frac{1}{5}\log 8 = 0{,}1806$

1.60 Utilizando las propiedades de los logaritmos y siendo log x = 0,70 y log y = 1,18, calcula:

a) $\log (x^2 y)$ **b) $\log \left(\frac{x^3}{y^2}\right)$** **c) $\log\left(\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}\right)$**

a) $\log (x^2 \cdot y) = 2\log x + \log y = 2{,}58$

b) $\log \left(\frac{x^3}{y^2}\right) = 3\log x - 2\log y = -0{,}26$

c) $\log (\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}) = \frac{1}{2}\log x + \frac{2}{3}\log y = 1{,}137$

1.61 Aplicando un cambio de base y usando la calculadora, halla los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 14$ **c) $\log_{\frac{1}{2}} 12$**

b) $\log_3 32$ **d) $\log_5 10$**

a) $\log_2 14 = \frac{\log 14}{\log 2} = 3{,}8073$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 12 = \frac{\log 12}{\log \frac{1}{2}} = -3{,}5850$

b) $\log_3 32 = \frac{\log 32}{\log 3} = 3{,}1546$

d) $\log_5 10 = \frac{\log 10}{\log 5} = 1{,}4307$

1.62 Transforma estas expresiones algebraicas en logarítmicas.

a) $A = \frac{x^2y^3z^5}{t^4}$ **c) $C = \frac{\sqrt{x}\,yz^2}{10t^3}$**

b) $B = \frac{100x^3y}{t^2}$ **d) $D = \frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}\,z^{\frac{3}{4}}}{t^{\frac{2}{5}}}$**

a) $\log A = 2\log x + 3\log y + 5\log z - 4\log t$

c) $\log C = \frac{1}{2}\log x + \log y + 2\log z - 3\log t - 1$

b) $\log B = 2 + 3\log x + \log y - 2\log t$

d) $\log D = \frac{1}{2}\log x + \frac{2}{3}\log y + \frac{3}{4}\log z - \frac{2}{5}\log t$

1.63 **Tomando antilogaritmos, convierte en algebraicas las siguientes expresiones.**

a) $\log A = 3 \log x + 2 \log y - 5 \log z$

b) $\log B = \frac{3}{2} \log x + \log y - \frac{2}{3} \log z - 2$

a) $A = \frac{x^3 y^2}{z^5}$

b) $B = \frac{\sqrt{x^3} \cdot y}{\sqrt[3]{z^2} \cdot 100}$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

1.64 **Di si son verdaderas o falsas estas afirmaciones.**

a) La raíz de un número negativo no existe.

b) Todo número decimal es racional.

c) Una fracción irreducible de denominador 63 es periódica mixta.

d) El número $\sqrt{\frac{12}{3}}$ **pertenece a N, Z, Q y R.**

e) -1 **pertenece al intervalo** $\left(-\sqrt{25}, -\sqrt[3]{8}\right)$.

f) $\frac{a}{b} = 3{,}414\,114\,111...$

a) Verdadera
b) Verdadera
c) Falsa
d) Verdadera
e) Falsa
f) Verdadera

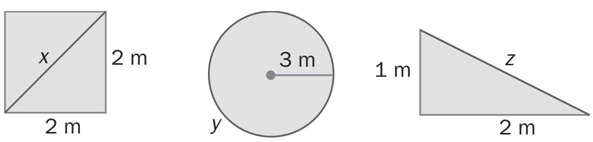
1.65 **En la siguiente cadena de contenidos:**

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

Encuentra un número que pertenezca a cada conjunto, pero no a los anteriores.

$1 \in \mathbf{N}$; $-1 \in \mathbf{Z}$; $\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$; $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$

1.66 **Las longitudes *x*, *y*, *z*, ¿pueden ponerse como cociente de dos enteros? ¿Por qué?**



No, ya que $x = \sqrt{8}$, $y = 6\pi$ y $z = \sqrt{5}$ son números irracionales.

1.67 **El salón de mi casa mide 4,86 metros de largo. Redondea este valor a metros y a decímetros.**

4,86 m $\rightarrow$ Redondeo a metros $=$ 5 m
4,86 m $\rightarrow$ Redondeo a decímetros $=$ 49 dm

1.68 **¿Qué intervalo se puede expresar mediante la desigualdad** $|x - 3| \leq 2$**?**

El intervalo buscado es [1,5].

1.69 ¿Qué números enteros están a la vez en las semirrectas $(-\infty, -2]$ y $(-6, +\infty)$?

$-5, -4, -3$ y -2

1.70 Copia en tu cuaderno y completa los huecos utilizando la definición de logaritmo mentalmente.

a) $\log_2 8 = \square$ **b)** $\log_3 \square = 4$ **c)** $\log_{\square} 125 = 3$

a) 3 b) 81 c) 5

1.71 Di si son ciertas o no estas afirmaciones.

a) Entre dos números reales siempre hay otro.

b) El logaritmo de un número nunca es negativo.

c) El logaritmo de un número negativo no existe.

d) En el intervalo $(-4, -3)$ no hay números enteros, pero sí racionales.

e) $|x| = -x$ para ciertos valores de x.

a) Verdadera b) Falsa c) Verdadera d) Verdadera e) Verdadera

1.72 Explica cómo expresiones tan aparentemente distintas como $2^{0.5}$, $\sqrt{2}$ y $8^{\frac{1}{6}}$ son equivalentes.

$8^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{0,5} = \sqrt{2}$

PROBLEMAS PARA APLICAR

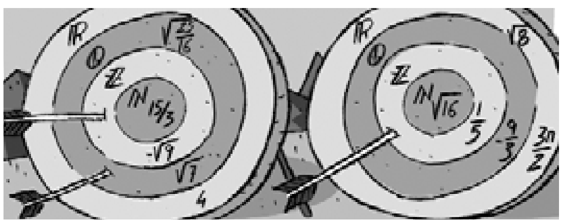
1.73 Para solar la entrada de una nueva sala de exposiciones se utilizan baldosas de 20 × 30 centímetros. Si la entrada es un recinto circular de 6 metros de radio, ¿cuántas baldosas se necesitan, como mínimo, suponiendo que se puedan aprovechar todos los recortes?

$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = 36\pi \text{ m}^2 = 360\,000\pi \text{ cm}^2$

$A_{\text{baldosa}} = 30 \cdot 20 = 600 \text{ cm}^2$

$360\,000\pi : 600 \approx 1884,9 \Rightarrow$ El n.º mínimo de baldosas son 1885.

1.74 En un club matemático tienen una diana de números reales. A cada dardo se le asigna un número real y se ha de clavar en la franja de la diana correspondiente.



Si gana el jugador que realiza el mayor número de aciertos en las franjas adecuadas, ¿cuál de estos dos jugadores habrá ganado?

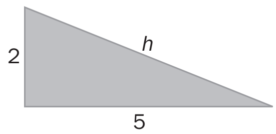
1.er jugador: 1 acierto ($-\sqrt{9} \in \mathbf{Z}$, $\sqrt{7} \notin \mathbf{Q}$); 2.º jugador: 0 aciertos $\left(\frac{1}{5} \notin \mathbf{Z}\right) \Rightarrow$ Gana el 1.er jugador.

1.75 La longitud aproximada de una circunferencia de radio 7 centímetros es de 43,988 centímetros.

¿Cuál y de qué tipo es la aproximación de π que se ha utilizado?

$43{,}988 = 2\pi r \Rightarrow \pi = \dfrac{43{,}988}{14} = 3{,}142$ Luego se ha tomado una aproximación por exceso a la milésima.

1.76 ¿Qué aproximación está más cerca del valor de la hipotenusa del triángulo de la figura, 5,385 ó 5,386 centímetros? ¿Cuánto más cerca?



La aproximación 5,385 se encuentra más cerca del valor de la hipotenusa.

Está aproximadamente 7 milésimas más cerca que 5,386.

1.77 Si entre cada dos números reales existen otros, encuentra entre $\dfrac{66}{25}$ y $\dfrac{53}{20}$ tres números irracionales del tipo $\{a\pi,\ a \in \mathbf{Q}\}$.

$$\left.\begin{cases} \dfrac{66}{25} = 2{,}64 \\[2ex] \dfrac{53}{20} = 2{,}65 \end{cases}\right. \Rightarrow x = \frac{841}{1000}\pi;\ y = \frac{421}{500}\pi;\ z = \frac{843}{1000}\pi$$

1.78 En una fábrica de latas de refrescos han decidido aproximar el número π como $\dfrac{157}{50}$. ¿Cuánto se ahorran de área de aluminio y de volumen de líquido por lata si son cilíndricas de 3 centímetros de radio y 11 de altura?

$\dfrac{157}{50} = 3{,}14$

$A_{\text{cilindro}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 18\pi + 66\pi = 84\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow A_{\text{aprox}} = 84 \cdot 3{,}14 = 263{,}76 \text{ cm}^2$

$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = 99\pi \text{ cm}^3 \Rightarrow V_{\text{aprox}} = 99 \cdot 3{,}14 = 310{,}86 \text{ cm}^3$

$A_{\text{ahorrada}} = 84\pi - 263{,}76 = 0{,}13 \text{ cm}^3$

$V_{\text{ahorrado}} = 99\pi - 310{,}86 = 0{,}16 \text{ cm}^3$

1.79 Un país invierte el 0,17% del PIB en ayuda al desarrollo del Tercer Mundo y las ONG piden cumplir la recomendación de la ONU para erradicar la pobreza, que consiste en dedicar el 0,7%.

Si el PIB del país es de 2 billones de euros al año, ¿cuánto dinero deja de destinar el país a ayuda al desarrollo según las indicaciones de la ONU? (Realiza las operaciones en notación científica.)

2 billones $= 2 \cdot 10^{12}$ €

Dinero invertido $= \dfrac{17}{10\,000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 34 \cdot 10^{8}$ € $= 3{,}4 \cdot 10^{9}$ €

Dinero recomendado $= \dfrac{7}{1000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 14 \cdot 10^{9}$ € $= 1{,}4 \cdot 10^{10}$ €

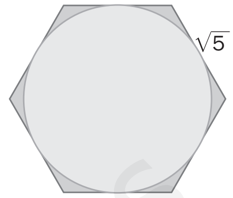
Dinero no destinado $= 1{,}4 \cdot 10^{10} - 3{,}4 \cdot 10^{9} = 10{,}6 \cdot 10^{9}$ € $= 1{,}06 \cdot 10^{10}$ €

1.80 Un profesor escribe en la pizarra la siguiente operación: $\sqrt[5]{8^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Y pide a la mitad de la clase que la desarrollen en forma de radicales, y a la otra mitad, que lo hagan en forma de potencia. ¿Qué resultado obtendrá cada una de las partes de la clase?

Desarrollando en forma de radicales se obtiene como resultado $\sqrt[30]{2}$

Desarrollando en forma de potencia se obtiene como resultado $2^{\frac{1}{30}}$

1.81 Calcula el área de la circunferencia inscrita en un hexágono regular de $\sqrt{5}$ centímetros de lado.



Radio = Apotema. Por el Teorema de Pitágoras: $r^2 + \frac{5}{4} = 5 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{15}}{2}$ cm^2

1.82 Una cafetería incrementa cada año el precio de un café en un 4% (sea cual sea el IPC). Si actualmente cuesta 1,10 euros, ¿podrías encontrar la fórmula que relaciona el precio del café con los años transcurridos? ¿Cuánto costará el café dentro de 5 años?

Sea x el precio del café. Subir cada año un 4% su precio se traduce en: $x + x \cdot \frac{4}{100} = x\left(1 + \frac{4}{100}\right) = x \cdot 1{,}04$

Así, la fórmula pedida será $1{,}1 \cdot 1{,}04^n$ donde n = número de años transcurridos.

Aplicando dicha fórmula, dentro de 5 años el precio del café será $1{,}1 \cdot 1{,}04^5 = 1{,}34$

1.83 En un terremoto aparecen dos tipos de ondas sísmicas: las *P*, longitudinales y de velocidad de propagación rápida, y las ondas *S*, transversales y de velocidad menor. En la escala de Richter, la magnitud de un terremoto se calcula como:

$$M = \log A + 3 \log (8t) - 2{,}92$$

Donde *A* es la amplitud en milímetros de las ondas *S* (medidas en el sismógrafo), y *t*, el tiempo transcurrido, en segundos, entre la aparición de las ondas *P* y las *S*.

a) Copia y completa la tabla, calculando las características para tres sismos diferentes.

	t (*s*)	*A* (mm)	*M*
1	8	15	
2	15		4
3		45	7

b) Calcula la relación entre las amplitudes de dos terremotos de magnitudes 6 y 9. (Suponemos el mismo valor para *t*.)

a)

	t (*s*)	*A* (mm)	*M*
1	8	15	3,67
2	15	4,81	4
3	71,2	45	7

b) $\log A = 9 - 3 \log (8t) + 2{,}92$

$\log A' = 6 - 3 \log (8t) + 2{,}92$

Restando esas dos expresiones se obtiene:

$\log A - \log A' = 3 \Rightarrow \log \frac{A}{A'} = 3 \Rightarrow \frac{A}{A'} = 10^3$

Números reales y aproximaciones

1.84 Calcula los intervalos que aproximan al número $\sqrt{2} + 1$ con un error menor que una décima, una centésima y una milésima.

Error menor que una décima: (2,4;2,5)

Error menor que una centésima: (2,41;2,42)

Error menor que una milésima: (2,414;2,415)

1.85 El número irracional π = 3,141 592 6… es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Halla las aproximaciones por defecto, exceso y redondeo de π a la milésima. Para el redondeo, calcula también los errores absoluto y relativo que se cometen.

Aproximación por defecto: $\pi \approx 3{,}141$

Aproximación por exceso: $\pi \approx 3{,}142$

Aproximación por redondeo: $\pi \approx 3{,}142$

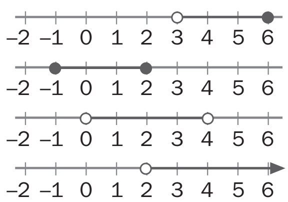
Error Absoluto $= |3{,}142 - \pi| = 0{,}000\,407...$

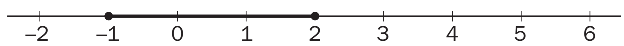
Error Relativo $= \left|\dfrac{0{,}000\,407}{\pi}\right| = 0{,}000\,129...$

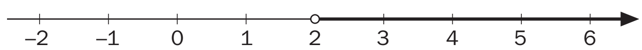
Representación en intervalos y semirrectas

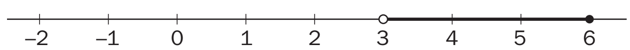
1.86 Relaciona en tu cuaderno las diferentes formas de representar los siguientes intervalos y semirrectas.

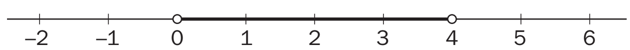
[–1, 2]	$x > 2$	
(2, +∞)	$0 < x < 4$	
(3, 6]	$-1 \le x \le 2$	
(0, 4)	$3 < x \le 6$	



[–1, 2] → $-1 \le x \le 2$ →


(2, + ∞) → $x > 2$ →


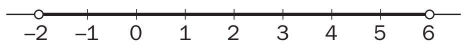
(3, 6] → $3 < x \le 6$ →


(0, 4) → $0 < x < 4$ →


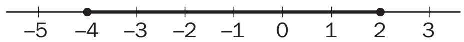
1.87 Dibuja los siguientes entornos en la recta real e indica mediante desigualdades los intervalos que determinan, así como su centro y su radio.

a) E(2, 4) **b) E[−1, 3]** **c) E(3, 1)**

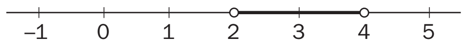
a) E(2, 4): $-2 < x < 6$; Centro $= 2$ y Radio $= 4 \rightarrow$



b) E[−1, 3]: $-4 \leq x \leq 2$; Centro $= -1$ y Radio $= 3 \rightarrow$



c) E(3, 1): $2 < x < 4$; Centro $= 3$ y Radio $= 1 \rightarrow$



Radicales y operaciones

1.88 Realiza las siguientes operaciones con radicales.

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[3]{9} : \sqrt{12}$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} : (\sqrt[3]{3})^2$

d) $3\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - 4\sqrt{8} - \sqrt{200}$

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 3^2} = \sqrt[12]{1125}$

b) $\sqrt[3]{9} : \sqrt{12} = \sqrt[6]{3 \cdot 2^{-6}} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} : (\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[12]{3}$

d) $3\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - 4\sqrt{8} - \sqrt{200} = 9\sqrt{2}$

1.89 Calcula el valor de *k* en cada caso.

a) $\sqrt[3]{k} = \frac{1}{2}$

b) $\sqrt[5]{k} = -2$

c) $\sqrt[k]{-343} = -7$

d) $\sqrt[k]{625} = -5$

a) $k = \frac{1}{8}$

b) $k = -32$

c) $k = 3$

d) $k = 4$

Operaciones con logaritmos

1.90 Halla el valor de *x* en cada caso.

a) $\log_x 16 = -4$

b) $\log_{\frac{1}{7}} x = -3$

c) $\log_{11} 1331 = x$

d) $\log_x 25 = 4$

a) $x = \frac{1}{2}$

b) $x = 343$

c) $x = 3$

d) $x = \sqrt{5}$

1.91 Transforma las siguientes expresiones en un único logaritmo.

a) $\log 16 - \log 3 + \log 12$

b) $\log 18 - \log 27 - \log 2$

c) $(\log 25 + \log 4) - (\log 8 - \log 9)$

a) $\log 16 - \log 3 + \log 12 = \log \frac{16 \cdot 12}{3} = \log \frac{2^4 \cdot 2^2 \cdot 3}{3} = \log 2^6$

b) $\log 18 - \log 27 - \log 2 = \log \frac{18}{27 \cdot 2} = \log \frac{2 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2} = \log \frac{1}{3} = -\log 3$

c) $(\log 25 + \log 4) - (\log 8 - \log 9) = \log \frac{25 \cdot 4 \cdot 9}{8} = \log \frac{5^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{2^3} = \log \frac{5^2 \cdot 3^2}{2}$

AMPLIACIÓN

1.92 Redondeando π a la milésima, el volumen de una esfera es de 14,139 centímetros cúbicos. Averigua su radio.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = 1{,}5 \text{ , con } \pi = 3{,}142$$

1.93 Marca en una recta numérica el conjunto de puntos cuyas distancias al punto -2 sean:

a) Igual a 3

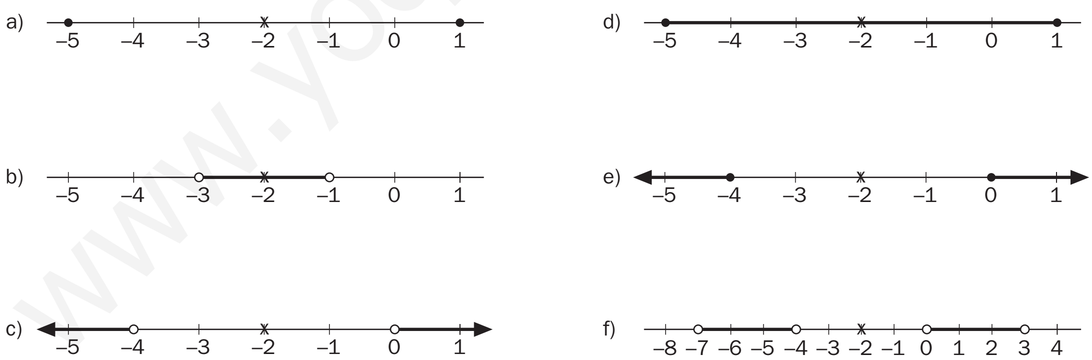
b) Menor que 1

c) Mayor que 2

d) No mayor que 3

e) No menor que 2

f) Mayor que 2 y menor que 5



1.94 Determina el conjunto de valores que verifica cada condición.

a) $|x^2| = |x|^2$

b) $|x| = \frac{1}{x}$

c) $|2x - 1| < 3$

a) $x \in \mathbf{R}$

b) $x = 1$

c) $-1 < x < 2$

1.95 **Calcula *a*, *b*, *c* y *d* en esta igualdad.**

$\sqrt{10^4 \cdot 14^6 \cdot 81^{12}} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$

$\sqrt{2^{10} \cdot 3^{48} \cdot 5^4 \cdot 7^6} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \Rightarrow a = 5;\ b = 24;\ c = 2;\ d = 3$

1.96 **La sucesión $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ se va acercando cada vez más al número $e = 2{,}718\,28\ldots$ ¿Con qué elemento de la sucesión consigues aproximar hasta la milésima dicho número?**

Con el elemento $a_6 = 2{,}718\,055\ldots$

1.97 **Ordena los siguientes logaritmos aplicando su definición y sus propiedades.**

$\log \sqrt[3]{10}$, $\log_2 \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$, $\ln \sqrt{\frac{1}{e}}$, $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{3}$

$\ln \sqrt{\frac{1}{e}} < \log \sqrt[3]{10} < \log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{3} < \log_2 \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

1.98 **Opera y simplifica:**

a) $2\sqrt{x} + 5\sqrt{25x} - 3\sqrt{36x} - 4\sqrt{9x}$

b) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{\sqrt{3}}\ \sqrt[5]{\sqrt{3} : \sqrt[3]{9}}$

a) $-3\sqrt{x}$

b) $x = -\frac{13}{60}$

1.99 **El decibelio es la unidad que se usa para medir la sonoridad, $\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, esto es, el volumen con que percibimos un sonido determinado, donde I es la intensidad sonora, e $I_0 = 10^{-12}$ vatios por metro cuadrado (W/m²), la intensidad umbral que el oído humano puede percibir.**

a) Calcula β para sonidos con intensidades de 10^{-6} y 10^{-9} W/m², respectivamente.

b) Si el umbral del dolor para el ser humano está en 120 decibelios, determina qué intensidad debe tener un sonido para alcanzar dicho umbral.

a) $I = 10^{-9} \Rightarrow \beta = 10 \log\left(\frac{10^{-9}}{10^{-12}}\right) = 30$ decibelios

$I = 10^{-6} \Rightarrow \beta = 10 \log\left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}}\right) = 60$ decibelios

b) $120 = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Rightarrow 0 = \log I \Rightarrow I = 1$ W/m²

1.100 Gasto familiar

La siguiente tabla muestra el consumo semanal de tres alimentos que realizan las familias Martínez, Aguiar y Guindo.

	Pan (N.º de barras)	Carne (kg)	Leche (L)
Martínez	8	2,5	8
Aguiar	10	1,75	9
Guindo	6	2,25	7

Los precios en euros de la barra de pan, el kilogramo de carne y el litro de leche han variado durante las cuatro últimas semanas y están recogidos en esta tabla.

	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª
Pan	0,45	0,40	0,40	0,45
Carne	12	11,5	12,5	13
Leche	0,9	0,9	0,95	0,95

a) Calcula el gasto total correspondiente a cada una de las familias en la primera semana.

b) Halla el porcentaje de variación del precio de la carne en las semanas segunda, tercera y cuarta en relación con el precio de la primera.

c) Determina el porcentaje de variación del gasto total de la familia Guindo en la cuarta semana en relación con la segunda.

a) Martínez: $8 \cdot 0{,}45 + 2{,}5 \cdot 12 + 8 \cdot 0{,}9 = 40{,}80$ €

Aguiar: $10 \cdot 0{,}45 + 1{,}75 \cdot 12 + 9 \cdot 0{,}9 = 33{,}60$ €

Guindo: $6 \cdot 0{,}45 + 2{,}25 \cdot 12 + 7 \cdot 0{,}9 = 36$ €

b) De la primera semana a la segunda: $\frac{11{,}5}{12} = 0{,}958 \quad 1 - 0{,}958 = 0{,}042 \Rightarrow$ Ha bajado un 4,2%.

De la primera semana a la tercera: $\frac{12{,}5}{12} = 1{,}042 \Rightarrow$ Ha subido un 4,2%.

De la primera semana a la cuarta: $\frac{13}{12} = 1{,}083 \Rightarrow$ Ha subido un 8,3%.

c) $\frac{6 \cdot 0{,}45 + 2{,}25 \cdot 13 + 7 \cdot 0{,}95}{6 \cdot 0{,}40 + 2{,}25 \cdot 11{,}5 + 7 \cdot 0{,}9} = \frac{38{,}6}{34{,}575} = 1{,}116 \Rightarrow$ Ha subido un 11,6%.

1.101 La piscina circular

En el dibujo aparece representada una piscina circular que se ha construido de forma que su contorno es el de la circunferencia inscrita a un cuadrado.

Se quiere plantar con césped el área de la corona circular limitada por la piscina y la circunferencia circunscrita al cuadrado mencionado. ¿Cuánto medirá esa área?

Datos:

Profundidad de la piscina: 2 metros

Tiempo que se ha empleado en llenar la piscina con un grifo que arroja 37,23 litros por minuto: 45 horas.

Volumen de la piscina: $37{,}23 \cdot 45 \cdot 60 = 100\,521 \text{ L} = 100\,521 \text{ dm}^3 = 100{,}521 \text{ m}^3$

Radio de la piscina: $r = \sqrt{\dfrac{100{,}521}{2\pi}} = 4 \text{ m}$

Superficie de la zona con césped: $\pi(R^2 - r^2) = \pi(32 - 16) = 16\pi = 50{,}27 \text{ m}^2$

AUTOEVALUACIÓN

1.A1 Sean los números $A = 1{,}7864...$ y $B = 2{,}3879...$

Calcula $A + B$ y $A - B$ con una aproximación a la milésima.

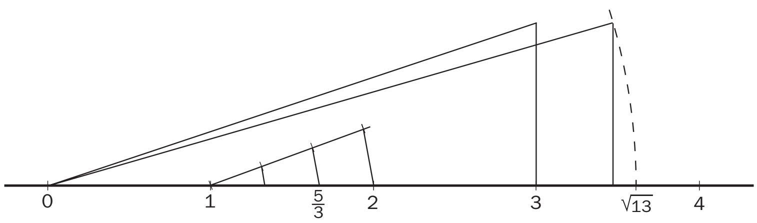
$A + B = 4{,}174$ $\quad$ $A - B = -0{,}602$

1.A2 Representa en la recta real estos números.

a) $\dfrac{5}{3}$ $\qquad$ **b) $\sqrt{13}$**

Cuál de ellos es racional y cuál es irracional?

¿Qué teoremas has aplicado en cada caso?

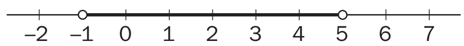


$\dfrac{5}{3} = 1 + \dfrac{2}{3} \rightarrow$ Racional y para representarlo se aplica el Teorema de Tales.

$\sqrt{13} \rightarrow$ Irracional y para representarlo se aplica el Teorema de Pitágoras.

1.A3 **Un conjunto de números reales x cumplen que $|x - 2| < 3$. Describe este conjunto utilizando intervalos y desigualdades, y gráficamente.**

$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow x \in (-1{,}5) \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow$



1.A4 **Realiza la siguiente operación dando el resultado en notación científica.**

$(0{,}26 \cdot 10^{-4}) \cdot (8{,}53 \cdot 10^{9})^2 + 7{,}2 \cdot 10^{13}$

$1{,}9638 \cdot 10^{15}$

1.A5 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $81^{1{,}25}$

b) $8^{\frac{2}{3}}$

c) $9^{1{,}5}$

d) $125^{\frac{4}{3}}$

a) 243

b) 4

c) 27

d) 625

1.A6 **Racionaliza estas expresiones.**

a) $\dfrac{4}{\sqrt{8}}$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{12}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

a) $\sqrt{2}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{18}}{6}$ c) $\dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{4}$

1.A7 **Realiza las siguientes operaciones con radicales.**

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2}$

b) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3}$

c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^4$

d) $3\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{27}$

a) $\sqrt[4]{18}$

b) $\sqrt[15]{2^5 \,.\, 3^{-3}}$

c) $\sqrt[3]{4}$

d) $20\sqrt{3}$

1.A8 **Sabiendo que $\log 2 = 0{,}301\ldots$, calcula:**

a) $\log 5$

b) $\log 20$

c) $\log 16$

d) $\log_5 2$

a) $\log 5 = 0{,}699$

b) $\log 20 = 1{,}301$

c) $\log 16 = 1{,}204$

d) $\log_5 2 = 0{,}43$

1.A9 **Transforma esta expresión en logarítmica.**

$$A = \frac{x^3 \cdot \sqrt[7]{y^2} \cdot z^{\frac{3}{4}}}{t^2}$$

$$\log A = 3\log x + \frac{2}{7}\log y + \frac{3}{4}\log z - 2\log t$$

1.A10 **Escribe la expresión en forma algebraica.**

$$\log A = \frac{1}{5}\log x + \frac{2}{9}\log y - 8\log z$$

$$A = \frac{\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[9]{y^2}}{z^8}$$

MURAL DE MATEMÁTICAS

MATETIEMPOS

La nómina de los números

En un país de números, cada habitante h recibe una nómina mensual en miles de euros igual a $\sqrt[h]{h}$. Así, el habitante 1 percibe $\sqrt[1]{1} = 1$; el 2 cobra $\sqrt[2]{2} = 1{,}41$, etc. ¿Cuántos individuos tiene el país? ¿Cuál de ellos es el que recibe la nómina más alta? ¿Y cuál la más baja?

a) Existen infinitos individuos, ya que h puede ser cualquier número real positivo.

b) Si consideramos h como número natural, el mayor salario será $\sqrt[3]{3} = 1{,}442$, o sea 1 442 €.

El menor $\sqrt[1]{1} = 1$, o sea 1 000 €.

Si analizamos el mayor valor de h (consideraremos un valor muy grande, por ejemplo 1 000 000) tendremos:

$\sqrt[1\,000\,000]{1\,000\,000} \approx 1$, o sea 1 000 €

El problema puede ampliarse para valores entre 0 y 1, así: $\sqrt[0{,}000\,001]{0{,}000\,001} \approx 0$. Luego si nos acercamos a cero, no se tendrá sueldo.

El problema podría retomarse una vez se haya acabado con las aplicaciones de la derivada en bachillerato: L'Hopital y puntos críticos, así podríamos verificar que:

$$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

y que el valor máximo de la función $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ se da cuando $x = e$, luego el mayor salario es: $\sqrt[e]{e} = 1{,}4446$, o sea: 1 444,6 €.

EJERCICIOS PROPUESTOS

4.1 Expresa estos enunciados en forma de ecuación.
a) La suma de dos números consecutivos es 17.
b) Un número más su tercera parte es 16.
c) Tres números pares consecutivos suman 42.

a) $x + (x + 1) = 17$

b) $x + \frac{1}{3}x = 16$

c) $2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 42$

4.2 Explica razonadamente cuáles de las siguientes ecuaciones son equivalentes.
a) $2x - 6 = 0$
b) $(x - 3) \cdot (x + 3) = 0$
c) $2x^2 = 18$
d) $3x = 9$

Las ecuaciones a y d son equivalentes de primer grado porque tienen igual solución: $x = 3$.
Las ecuaciones b y c son de segundo grado y equivalentes entre sí. Su solución es $x = \pm 3$.

4.3 Aplica las reglas de la suma y el producto para resolver las siguientes ecuaciones.
a) $6x - 5 = -17 + 3x$
b) $4x - 7x + 7 = -8x + 22$

a) $6x - 3x = -17 + 5 \Rightarrow 3x = -12 \Rightarrow x = -4$
b) $4x - 7x + 8x = +22 - 7 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$

4.4 Calcula cuánto ha costado el abrigo nuevo de Nerea si la cuarta parte del dinero que ha pagado por él más la sexta parte de su precio son 20 euros.

Se designa por x la cantidad de euros que ha costado el abrigo de Nerea.

Ecuación: $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 20$

Se multiplica la ecuación por 12: $3x + 2x = 240$.

Se suman términos semejantes: $5x = 240$.

Se divide por 5: $x = 48$ euros.

4.5 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{2x + 3}{3} + \frac{7x - 5}{4} = 7$

b) $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4} - 1\right) - \frac{x - 1}{2} = 2x$

c) $1 - \frac{2(x - 1)}{5} = \frac{3(2 - x)}{2}$

a) Múltiplo común de los denominadores: m.c.m.(3, 4) $= 12$

Se multiplica por 12 la ecuación: $8x + 12 + 21x - 15 = 84 \Rightarrow 29x = 87 \Rightarrow x = 3$.

b) $\frac{2x}{12} - \frac{2}{3} - \frac{x - 1}{2} = 2x \Rightarrow 2x - 8 - 6x + 6 = 2x \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

c) $1 - \frac{2x - 2}{5} = \frac{6 - 2x}{2} \Rightarrow 10x - 4x + 4 = 30 - 15x \Rightarrow x = \frac{16}{11}$

4.6 Clasifica y resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 10x + 24 = 3$

b) $-x^2 + 2x = 0$

c) $x(2x - 5) = 6 - x$

d) $x^2 - 9 = -2x^2$

a) Completa. $x = \dfrac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1} = \dfrac{10 \pm \sqrt{52}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \pm \sqrt{13} \\ x = -5 \pm \sqrt{13} \end{cases}$

b) Incompleta. $x(-x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

c) Completa. $2x^2 - 5x = 6 - x \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{4 \pm 8}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

d) Incompleta. $3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$

4.7 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $5x^2 - 9x + 4 = 0$

b) $2x - 6 = 2x(x + 2)$

a) $x = \dfrac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5} = \dfrac{9 \pm 1}{10} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

b) $2x - 6 = 2x^2 + 4x \Rightarrow x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \dfrac{9 \pm \sqrt{-11}}{2} \Rightarrow x$ no es número real

4.8 Un número natural y su cuadrado suman 30. Escribe la ecuación correspondiente y averigua de qué número se trata.

Ecuación: $x + x^2 = 30$

Se resuelve: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 \pm 11}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -6 \end{cases}$

(-6) no es un número natural, el número buscado es 5.

4.9 Clasifica y resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $2x^4 - 16x = 0$

c) $x^4 - 26x^2 = -25$

d) $x^6 - 64x^3 = 0$

e) $x^4 - 4x^2 = 0$

f) $3x^3 - 12x^2 + 12x = 0$

a) $x^2 = z;\ x^4 = z^2 \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

b) $2x(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ (raíz triple)

c) $x^2 = z \Rightarrow x^4 = z^2;\ z^2 - 26z + 25 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \dfrac{26 \pm 24}{2} = \begin{cases} 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5 \\ 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

d) $x^3(x^3 - 64) = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ (raíz triple) y $x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$ (raíz triple)

e) $x^2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (raíz doble) y $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

f) $3x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm 0}{2} = 2 \Rightarrow$ Raíz doble

4.10 Halla las soluciones de estas ecuaciones de tercer grado.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

c) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array} \right.$$

Soluciones: $x = 1$, $x = -1$ y $x = -2$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 3 & 10 \\ -1 & & -1 & 7 & -10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x + 1)(x^2 - 7x + 10)$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 5 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Soluciones: $x = -1$, $x = 2$ y $x = 5$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x + 1)(x^2 + x - 2)$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array} \right.$$

Soluciones: $x = -2$, $x = -1$ y $x = 1$

4.11 Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones radicales.

a) $x + \sqrt{x} = 2$

b) $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x} = 5$

a) $\sqrt{x} = 2 - x \Rightarrow x = (2 - x)^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \end{array} \right.$

b) $\sqrt{x + 5} = 5 - \sqrt{x} \Rightarrow 5 = 25 - 10\sqrt{x} \Rightarrow x = 4$

4.12 Resuelve estas ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = x + 2$

b) $\sqrt{40 - x^2} + 4 = x$

c) $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 4} = 6$

d) $\sqrt{6 + x} + 2x = -2$

a) $\left(\sqrt{x^2 + 5x + 1}\right)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 + 5x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x = 3$

Comprobación: $\sqrt{3^2 + 5 \cdot 3 + 1} = 3 + 2$

b) $\left(\sqrt{40 - x^2}\right)^2 = (x - 4)^2 \Rightarrow 40 - x^2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 24 = 0$

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} x = 6 \\ x = -2 \end{array} \right.$$

Comprobación: $x = 6 \Rightarrow \sqrt{40 - 6^2} + 4 = 6 \Rightarrow$ Sí es correcto.

$x = -2 \Rightarrow \sqrt{40 - (-2)^2} + 4 \neq -2 \Rightarrow$ No es correcto.

c) $\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = \left(6 - \sqrt{x+4}\right)^2 \Rightarrow 2x - 1 = 36 - 12\sqrt{x+4} + x + 4 \Rightarrow \left(12\sqrt{x+4}\right)^2 = (41 - x)^2$

$144(x + 4) = 1681 - 82x + x^2 \Rightarrow 144x + 576 = 1681 - 82x + x^2 \Rightarrow x^2 - 226x + 1105 = 0$

$$x = \frac{226 \pm \sqrt{(-226)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1105}}{2 \cdot 1} = \frac{226 \pm 216}{2} = \begin{cases} x = 221 \\ x = 5 \end{cases}$$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 5 - 1} + \sqrt{5 + 4} = 6 \Rightarrow$ Sí es correcto.

$x = 221 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 221 - 1} + \sqrt{221 + 4} = 21 + 15 \neq 6 \Rightarrow$ No es correcto.

d) $\left(\sqrt{6+x}\right)^2 = (-2 - 2x)^2 \Rightarrow 6 + x = 4 + 8x + 4x^2 \Rightarrow 4x^2 + 7x - 2 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} = \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = -2 \end{cases}$$

Comprobación: $x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{6 + \frac{1}{4}} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow$ No es correcto.

$x = -2 \Rightarrow \sqrt{6 - 2} + 2(-2) = 2 - 4 = -2 \Rightarrow$ No es correcto.

4.13 Escribe las siguientes informaciones utilizando desigualdades.
a) He sacado, por lo menos, un 7 en el examen.
b) Estoy en la oficina de ocho de la mañana a seis de la tarde.

a) $x \geqslant 7$ b) $8 \leqslant x \leqslant 18$

4.14 Construye una tabla que te permita encontrar los valores de *x* que satisfacen cada una de estas inecuaciones.

a) $2x + 4 > 3$ **b) $x - 5 < 6 - x$** **c) $8x - 5 \leqslant 6x + 9$** **d) $5x - 3 \geqslant 4x + 6$**

a)

x	-4	-2	-1	$-0{,}5$	2	5	10
1.er miembro: $2x + 4$	-4	0	2	3	8	14	24
2.º miembro: 3	3			3	3		
	$2x + 4 < 3$			$x + 4 = 3$	$x + 4 > 3$		

b)

x	-1	0	2	5,5	6	7	10
1.er miembro: $x - 5$	-6	-5	-3	0,5	1	2	5
2.º miembro: $6 - x$	7	6	4	0,5	0	-1	-4
	$x - 5 < 6 - x$			$x - 5 = 6 - x$	$x - 5 > 6 - x$		

c)

x	-1	3	5	7	8	9	10
1.er miembro: $8x - 5$	-13	19	35	51	59	67	75
2.º miembro: $6x + 9$	3	27	39	51	57	63	69
	$8x - 5 < 6x + 9$			$8x - 5 = 6x + 9$	$8x - 5 > 6x + 9$		

d)

x	3	5	8	9	10	11	12
1.er miembro: $5x - 3$	12	22	37	42	47	52	57
2.º miembro: $4x + 6$	18	26	38	42	46	50	54
	$5x - 3 < 4x + 6$			$5x - 3 = 4x + 6$	$5x - 3 > 4x + 6$		

4.15 Escribe las desigualdades que resultan al operar los dos miembros de $12 > 2$ en cada apartado.

a) Sumando 3
b) Multiplicando por -2
c) Restando 2
d) Dividiendo entre 3
e) Multiplicando por 3
f) Dividiendo entre -2

a) $12 + 3 > 2 + 3 \Rightarrow 15 > 5$

b) $(-2) \cdot 12 < (-2) \cdot 2 \Rightarrow -24 < -4$

c) $12 - 2 > 2 - 2 \Rightarrow 10 > 0$

d) $\frac{12}{3} > \frac{2}{3} \Rightarrow 4 > \frac{2}{3}$

e) $3 \cdot 12 > 3 \cdot 2 \Rightarrow 36 > 6$

f) $\frac{12}{-2} < \frac{2}{-2} \Rightarrow -6 < -1$

4.16 Resuelve las siguientes inecuaciones aplicando las reglas de la suma y del producto.

a) $x - 2 > 3$ **c)** $\dfrac{5x - 7}{3} < x + 5$ **e)** $4 - x \geqslant x - 6$

b) $3x - 5 > 4x$ **d)** $3x + 6 \leqslant 2x + 10$ **f)** $x + \dfrac{1 - x}{6} < 2 - \dfrac{2 + x}{2}$

a) Se suma 2: $x > 5$ o $x \in (5, +\infty]$.

b) Se opera y se divide todo por -1, con lo que cambia el sentido de la desigualdad: $x < -5$ o $x \in (-\infty, -5)$.

c) Se multiplica por 3, se suma 7 y se resta $3x$: $5x - 7 < 3x + 15 \Rightarrow 5x < 3x + 22 \Rightarrow 2x < 22$.

Se divide por 2: $x < 11$ o $(-\infty, +11]$.

d) Se resta $2x$ y se resta 6: $x \leqslant 4$ o $(-\infty, +4]$.

e) Se resta x y se resta 4: $-2x \geqslant -10 \Rightarrow x \leqslant 5$ o $(-\infty, +5]$.

f) Se multiplica por 6 y se opera: $6x + (1 - x) < 12 - 3(2 + x)$.

Se divide entre 8: $x < \dfrac{5}{8}$ o $x \in \left(-\infty, +\dfrac{5}{8}\right)$.

4.17 La edad actual de un padre es el triple que la de su hija. Hace 7 años, la suma de las edades era igual a la edad actual del padre. ¿Cuántos años tienen?

Se designa por x la edad actual de la hija $\Rightarrow 3x$ es la edad del padre.

Hace 7 años $(3x - 7) + x = 3x \Rightarrow x = 14$

La hija tiene 14 años, y el padre, 42.

4.18 Si a uno de los lados de un cuadrado se le aumenta su longitud en 5 centímetros y a su lado contiguo en 3 centímetros, el área de la figura aumenta en 71 centímetros cuadrados. Calcula el lado del cuadrado.

Se designa por x el lado del cuadrado: $(x + 5) \cdot (x + 3) = x^2 + 71 \Rightarrow x^2 + 8x + 15 = x^2 + 71 \Rightarrow 8x = 56 \Rightarrow x = 7$ cm

El lado mide 7 cm.

4.19 Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida, en centímetros, tres números enteros consecutivos. Halla dichos lados.

A los lados del triángulo se los llama x, $x + 1$ y $x + 2$. Aplicando el teorema de Pitágoras: $(x + 2) = x^2 + (x + 1)^2$

Se opera y queda: $x^2 - 2x - 3 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $+3$ y -1.

Por ser números enteros lo pedido, $x = -1$ no es solución válida.

Los lados del triángulo miden 3, 4 y 5 centímetros, respectivamente.

4.20 La habitación de Gonzalo es rectangular, tiene 6 metros de ancho y la longitud de su perímetro es menor que 30 metros. ¿Cuánto puede medir dicha longitud?

Se designa por x la longitud del rectángulo $\Rightarrow 2x + 12 < 30 \Rightarrow x < 9 \Rightarrow$ La longitud es menor de 9 metros.

4.21 En una tienda de comercio justo hay dos tipos de café: uno procedente de Ecuador, en el que cada paquete cuesta 1,30 euros, y otro de Colombia, a 1,65 euros el paquete.

Averigua cuántos paquetes de cada tipo se pueden adquirir con 25 euros si se quiere comprar el doble de paquetes de Colombia que de Ecuador.

Se designa por x el número de paquetes de café de Ecuador $\Rightarrow 2 \cdot 1{,}65x + 1{,}30x \leqslant 25 \Rightarrow 4{,}6x \leqslant 25 \Rightarrow x \leqslant 5{,}4$

Como máximo se pueden adquirir 5 paquetes procedentes de Ecuador y 10 de Colombia.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.22 ¿Cuáles son los números cuyo triple excede a su duplo en más de 5 unidades?

Se llama x a los números buscados: $3x - 5 > 2x \Rightarrow x > 5$ es la condición que cumplen dichos números.

4.23 ¿Cuánto debe valer un número para que su mitad más 8 sea mayor que sus cinco terceras partes menos 2?

Se designa como x el número buscado: $\frac{x}{2} + 8 > \frac{5}{3}x - 2 \Rightarrow -7x > -60 \Rightarrow$ La solución es $x < \frac{60}{7}$.

4.24 El profesor de Pedro calcula la nota final valorando en un 70% la de los exámenes y en un 30% otras notas (ejercicios de clase, trabajos, etc.). Pedro tiene un 9 de nota de clase. ¿Qué puntuación debe sacar en el examen para que su nota final sea de al menos 6,2 puntos?

Se llama x a la nota del examen, de modo que $0{,}7x + 0{,}3 \cdot 9 > 6{,}2 \Rightarrow 0{,}7x > 3{,}5 \Rightarrow x > 5$.
La puntuación del examen debe ser superior a 5 puntos.

A C T I V I D A D E S

E J E R C I C I O S P A R A E N T R E N A R S E

Identidades y ecuaciones

4.25 Señala cuál de las siguientes ecuaciones es una identidad.

a) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ **b)** $x^2 = -9$ **c)** $(x - 1)(x - 2)^5 = 0$ **d)** $4x - 8 = 0$

La identidad es a, ya que: $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow 0 = 0$.

4.26 Clasifica las ecuaciones del ejercicio anterior según el número de soluciones de cada una.

a) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow 0 = 0$
Es una identidad, y, por tanto, tiene infinitas soluciones.

b) $x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9} \notin R \Rightarrow$ No tiene solución.

c) $(x - 1) \cdot (x - 2)^5 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ (x - 2)^5 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ (solución quíntuple)} \end{array} \right.$

La ecuación tiene 6 soluciones.

d) $4x - 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{4} = 2$. La ecuación tiene una solución.

4.27 Explica razonadamente cuál de las siguientes ecuaciones no es equivalente al resto.

a) $5x - 7 = 2x + 5$ **b)** $\frac{7x - 3}{5} = 5$ **c)** $6x + 3 = 8x + 5$ **d)** $9x - 6 = 12$

a) $5x - 7 = 2x + 5 \Rightarrow 5x - 2x = 7 + 5 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$

b) $\frac{7x - 3}{5} = 5 \Rightarrow 7x - 3 = 25 \Rightarrow 7x = 25 + 3 \Rightarrow 7x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{7} = 4$

c) $6x + 3 = 8x - 5 \Rightarrow 6x - 8x = -3 - 5 \Rightarrow -2x = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{-2} = 4$

d) $9x - 6 = 12 \Rightarrow 9x = 18 + 6 \Rightarrow 9x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$

La que no es equivalente a las otras es la d, ya que su solución es distinta a las de las otras ecuaciones.

4.28 Escribe estos enunciados en lenguaje algebraico utilizando una sola incógnita.

a) La suma de los cuadrados de tres números impares consecutivos es 42.

b) Un tercio del cuadrado de la edad que tenía hace tres años es 26.

a) $(2x + 1)^2 + (2x + 3) + (2x + 5)^2 = 42$

b) $\frac{(x - 3)^2}{3} = 26$

Ecuaciones de primero y segundo grado

4.29 Halla la solución de estas ecuaciones lineales.

a) $-4x + 3 = 7x - 19$

b) $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26$

c) $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7$

d) $\frac{x+3}{6} + \frac{2x-1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x-5}{12} - \frac{2}{3}$

a) $-4x + 3 = 7x - 19 \Rightarrow -11x = -22 \Rightarrow x = 2$

b) $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26 \Rightarrow -3x + 2 = -20x + 104 \Rightarrow 17x = 102 \Rightarrow x = 6$

c) $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7 \Rightarrow -10x + 5 + 3x - 2 = -6x + 4 + 7 \Rightarrow x = -8$

d) $\frac{x+3}{6} + \frac{2x-1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x-5}{12} - \frac{2}{3} \Rightarrow 2x + 6 + 8x - 4 + 3 = x - 5 - 8 \Rightarrow 9x = -18 \Rightarrow x = -2$

4.30 Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.

a) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3)$

b) $\frac{3(x+3)}{2} - 2(2 - 3x) = 8x - 1 - 2(x + 3)$

c) $\frac{3(x-2)}{5} + 2(-3x + 1) - \frac{2}{5} = \frac{-4x+3}{15} + \frac{16}{3}$

a) Se aplica el m.c.m. $= 2 \Rightarrow 12x - 30 + 16x - 12 = x - 10x - 6 \Rightarrow 37x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{37}$

b) Se aplica el m.c.m. $= 2 \Rightarrow 3x + 9 - 8 + 12x = 16x - 2 - 4x - 12 \Rightarrow x = +5$

c) Se aplica el m.c.m. $= 15 \Rightarrow 9(x - 2) + 30(-3x + 1) - 6 = -4x + 3 + 80 \Rightarrow x = -1$

4.31 Clasifica en tu cuaderno las siguientes ecuaciones de segundo grado según tengan 0, 1 ó 2 soluciones distintas.

a) $5x^2 + 6x + 2 = 0$

b) $-3x^2 + 4x + 5 = 0$

c) $x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $x^2 - 5 = 0$

a) No tiene solución por salir una raíz negativa.

b) Tiene dos soluciones.

c) Tiene dos soluciones.

d) Tiene dos soluciones.

4.32 Calcula la solución de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $6x^2 - 11x + 3 = 0$

b) $x^2 - 6x - 7 = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $-2x^2 + 2x + 24 = 0$

e) $3x^2 + x + 5 = 0$

f) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

a) $x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{11 \pm 7}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

b) $x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -1 \end{cases}$

c) $x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3 \Rightarrow$ Raíz doble

d) $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$

e) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-59}}{6} \Rightarrow$ No tiene solución.

f) $x = \frac{-4 \pm 0}{8} = \frac{-1}{2} \Rightarrow$ Raíz doble

4.33 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando un procedimiento diferente de la fórmula general.

a) $3x^2 - 27 = 0$ **b) $x^2 + 2x + 1 = 0$** **c) $-7x^2 + \frac{5}{2}x = 0$** **d) $(x - 2)^2 - 25 = 0$**

a) $3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$ Raíz doble

c) $x\left(-7x + \frac{5}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{5}{14}$

d) $(x - 2)^2 = 25 \Rightarrow x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7$

$x - 2 = -5 \Rightarrow x = -3$

Resolución de otro tipo de ecuaciones

4.34 Halla la solución de estas ecuaciones bicuadradas con el cambio de variable $z = x^2$.

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ **b) $3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$** **c) $x^4 - 20x + 64 = 0$** **d) $x^4 - 26x + 25 = 0$**

a) Si $z = x^2 \Rightarrow z^2 - 10z + 9 = 0$

$z = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2}$

$z_1 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

$z_2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

b) Si $z = x^2 \Rightarrow 3z^2 - 15z + 12 = 0$

$z = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{6}$

$z_1 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

$z_2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

c) Si $z = x^2 \Rightarrow z^2 - 20z + 64 = 0$

$z = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 256}}{2}$

$z_1 = 16 \rightarrow x = \pm 4$

$z_2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

d) Si $z = x^2 \Rightarrow z^2 - 26z + 25 = 0$

$z = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{2}$

$z_1 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

$z_2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

4.35 Encuentra la solución de estas ecuaciones por factorización.

a) $-2x^3 + 4x^2 + 18x - 36 = 0$

b) $4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 0$

c) $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$

d) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

a) $-2x^3 + 4x^2 + 18x - 36 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & 4 & 18 & -36 \\ 2 & & -4 & 0 & 36 \\ \hline & -2 & 0 & 18 & 0 \end{array}$$

$(x - 2)(-2x^2 + 18) = 0$

$\Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Soluciones: $x = 2$, $x = -3$ y $x = 3$

b) $4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -24 & 48 & -32 \\ 2 & & 8 & -32 & 32 \\ \hline & 4 & -16 & 16 & 0 \end{array}$$

$(x - 2)(4x^2 - 16x + 16) = 0$

$\Rightarrow 4(x - 2)(x^2 - 4x + 4) = 4(x - 2)(x - 2)^2 = 4(x - 2)^3 = 0$

Solución: $x = 2$, raíz triple

c) $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -13 & 10 \\ 1 & & 1 & 3 & -10 \\ \hline & 1 & 3 & -10 & 0 \end{array}$$

$(x - 1)(x^2 + 3x - 10) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2)(x + 5) = 0$

Soluciones: $x = -5$, $x = 1$ y $x = 2$

d) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 2 & & 2 & 10 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$(x - 2)(x^2 + 5x + 6) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2)(x + 3)$

Soluciones: $x = -3$, $x = -2$ y $x = 2$

4.36 Utiliza las igualdades notables y la factorización para encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0$

b) $25x^4 - 9 = 0$

c) $x^5 - 16x^3 = 0$

d) $5(x + 3)(x - 6)(x + 1) = 0$

a) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow (2x + 1)^3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ (solución triple).

b) $25x^4 - 9 = 0 \Rightarrow (5x^2 + 3)(5x - 3) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-3}{5}}$ (no tiene solución real).

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

c) $x^5 - 16x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x^2 - 16) = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ (solución triple).

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$$

d) $5(x + 3)(x - 6)(x + 1) = 0 \Rightarrow$ Soluciones: $x = -3$, $x = -1$ y $x = 6$

4.37 Halla la solución de estas ecuaciones radicales.

a) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$ **c)** $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$ **e)** $x + \sqrt{x - 1} - 3 = 0$ **g)** $\sqrt{5x + 1} - 2 = \sqrt{x + 1}$

b) $\sqrt{8 - x} = 2 - x$ **d)** $2\sqrt{x - 1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x - 1}}$ **f)** $\sqrt{7x + 1} = 2\sqrt{x + 4}$

a) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$

$(x - 6)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2$

$x^2 - 12x + 36 = x$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = 4 \end{cases}$$

Comprobación: $x = 9 \Rightarrow 9 - 3 - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Es correcto.

$x = 4 \Rightarrow 4 - 2 - 6 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ No es correcto.

c) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$x - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x$

$x^2 - 5x + 4 = 0\leq$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

Comprobación: $x = 4 \Rightarrow \sqrt{4} - \frac{2}{\sqrt{4}} = 1 \Rightarrow$ Es correcto.

$x = 1 \Rightarrow \sqrt{1} - \frac{2}{\sqrt{1}} \neq 1 \Rightarrow$ No es correcto.

b) $\sqrt{8 - x} = 2 - x$

$8 - x = 4 - 4x + x^2$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

Comprobación: $x = 4 \Rightarrow \sqrt{8 - 4} \neq 2 - 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ No es correcto.

$x = -1 \Rightarrow \sqrt{8 + 1} = 2 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Es correcto.

d) $2\sqrt{x - 1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x - 1}}$

$$\frac{2\sqrt{x - 1}\,\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1}} - \frac{5\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1}} = \frac{3}{\sqrt{x - 1}}$$

$2x - 2 - 5\sqrt{x - 1} = 3$

$25(x - 1) = 4x^2 - 20x + 25$

$$x = \frac{45 \pm \sqrt{(-45)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 50}}{2 \cdot 4} = \frac{45 \pm 35}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Comprobación: $x = 10 \Rightarrow$ Es correcto.

$x = \frac{5}{4} \Rightarrow$ No es correcto.

e) $x + \sqrt{x - 1} - 3 = 0$

$\sqrt{x - 1} = 3 - x$

$x - 1 = 9 - 6x + x^2$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 5 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow 5 + \sqrt{5 - 1} - 3 = 0 \Rightarrow$ No es correcto.

$x = 2 \Rightarrow 2 + \sqrt{2 - 1} - 3 = 0 \Rightarrow$ Es correcto.

f) $\sqrt{7x + 1} = 2\sqrt{x + 4}$

$7x + 1 = 4(x + 4)$

$7x + 1 = 4x + 16$

$x = 5$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow$ No es correcto.

g) $\sqrt{5x + 1} - 2 = \sqrt{x + 1} \Rightarrow 5x + 1 - 4\sqrt{5x + 1} + 4 = x + 1 \Rightarrow 4x + 4 = 4\sqrt{5x + 1} \Rightarrow x + 1 = \sqrt{5x + 1}$

$x^2 + 2x + 1 = 5x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 3$

Comprobación: $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0 + 1} - 2 = \sqrt{1} \Rightarrow$ No es correcto; $x = 3 \Rightarrow \sqrt{5 \cdot 3 + 1} - 2 = \sqrt{3 + 1} \Rightarrow$ No es correcto.

Desigualdades e inecuaciones. Reglas de equivalencia

4.38 Distingue cuáles de las siguientes expresiones son desigualdades y cuáles inecuaciones. Si son desigualdades, indica si son verdaderas o falsas, y si son inecuaciones, escribe su solución en forma de intervalo.

a) $-4 \geqslant 0$

b) $6 \leqslant 6$

c) $2 \geqslant -3$

d) $-x \leqslant 1$

e) $x > 3$

f) $-3 < -5$

g) $x + 3 \leqslant 2x + 1$

h) $x - 1 \leqslant x + 8$

i) $y - 3 > 2$

a) Desigualdad. Falsa

b) Desigualdad. Verdadera

c) Desigualdad. Verdadera

d) Inecuación. $[-1, +\infty)$

e) Inecuación. $(3, +\infty)$

f) Desigualdad. Falsa

g) Inecuación. $[2, +\infty)$

h) Inecuación. R

i) Inecuación. $(5, +\infty)$

4.39 Escribe las siguientes afirmaciones en forma de desigualdad.

a) Elena necesita correr por debajo de 16 segundos para clasificarse en una prueba.

b) En algunas atracciones del parque temático exigen una altura superior a 1,20 metros.

c) He pasado el kilómetro 125 de la A-42, pero aún no he llegado al 145.

a) $x < 16$

b) $x > 1{,}20$

c) $125 < x < 145$

4.40 Resuelve la inecuación 2x + 3 ⩽ x + 7, dando valores a la incógnita y completando la tabla.

x	-2	0	2	4	5	7	10
$2x + 3$	-1	3	7	11	13	17	23
$x + 7$	5	7	9	11	12	14	17
	$2x + 3 < x + 7$			**$2x + 3 = x + 7$**	**$2x + 3 > x + 7$**		

Solución: $(\infty-, 4]$

4.41 Indica si estas inecuaciones son equivalentes.

a) $-2x \leqslant 14$ y $x \leqslant 7$

b) $\frac{x}{2} > -5$ y $x < 10$

a) No son equivalentes.

b) No son equivalentes.

4.42 Soluciona las siguientes inecuaciones utilizando las reglas de equivalencia.

a) $7x - 2(1 - 3x) \leqslant 2x + 3$

b) $\dfrac{2(5x + 1)}{3} \leqslant -4(x - 3) + \dfrac{5}{2}$

c) $5x - \dfrac{2}{3} < 4(3x - 6) - 2x$

d) $\dfrac{x}{3} \geqslant \dfrac{5}{6} - x$

e) $5 > \dfrac{3x + 1}{2}$

f) $\dfrac{4x - 3}{2} \geqslant x + 1$

a) $7x - 2 + 6x \leqslant 2x + 3 \Rightarrow 11x \leqslant 5 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{5}{11}$

b) $20x + 4 \leqslant -24x + 72 + 15 \Rightarrow 44x \leqslant 83 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{83}{44}$

c) $15x - 2 < 36x - 72 - 6x \Rightarrow -15x < -70 \Rightarrow x > \dfrac{14}{3}$

d) $2x - 3x - 3 \geqslant 5 - 6x \Rightarrow 5x \geqslant 8 \Rightarrow x \geqslant \dfrac{8}{5}$

e) $10 > 3x + 1 \Rightarrow 9 > 3x \Rightarrow x < 3$

f) $4x - 3 \geqslant 2x + 2 \Rightarrow 2x \geqslant 5 \Rightarrow x \geqslant \dfrac{5}{2}$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

4.43 Sea la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con a, b y c distintos de 0. Explica qué sucede en los siguientes casos:

a) Si $b^2 > 4ac$ **b) Si $b^2 < 4ac$** **c) Si $b^2 = 4ac$**

¿Cuántas soluciones tiene en cada caso la ecuación?

a) $b^2 > 4ac \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ El discriminante es positivo y, por tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

b) $b^2 < 4ac \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ El discriminante es negativo y, por tanto, la ecuación no tiene soluciones reales.

c) $b^2 = 4ac \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ El discriminante es igual a cero y, por tanto, la ecuación tiene una solución doble.

4.44 Sea la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con a, b y c distintos de 0.

a) ¿Cabe la posibilidad de que sus soluciones sean $x = 1$, $x = 3$, $x = -2$ y $x = 5$? ¿Por qué?

b) ¿Qué condición deben cumplir los coeficientes para que la ecuación anterior no tenga solución?

a) No, ya que la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ solo puede tener "pares" de soluciones que sean opuestas una de la otra; esto es debido a que al resolverla aplicamos el cambio de variable $x^2 = z$.

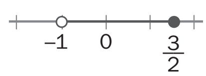
b) Apliquemos el cambio de variable anteriormente reseñado:

$$x^2 = z \Rightarrow az^2 + bz + c = 0 \Rightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Por tanto, tenemos dos posibilidades para que la ecuación bicuadrada no tenga solución:

$b^2 - 4ac < 0$ o $z < 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{z}$ No tiene solución real.

4.45 Relaciona en tu cuaderno los elementos equivalentes de las tres columnas.

Desigualdad	Intervalo	Segmento o semirrecta
$x \leqslant 5$	$(7, +\infty)$	
$-1 < x \leqslant 1,5$	$(-\infty, 5]$	
$x > 7$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right]$	

4.46 **¿Es cierto que $12 \leqslant 12$?**

Sí, ya que se cumple la igualdad.

4.47 **Explica razonadamente si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.**

a) $17 < -12$ es una desigualdad incorrecta.

b) Una inecuación o no tiene solución, o tiene una, o tiene infinitas soluciones.

c) La solución de $x + 5 \leqslant 3$ es una semirrecta.

a) Verdadera

b) Falsa

c) Verdadera

4.48 **Indica si son ciertas las siguientes igualdades entre intervalos.**

a) $(-\infty, 5] \cap (2, +\infty) = [2, 5]$

b) $(-\infty, 4] \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 4]$

a) Falsa, ya que 2 no está incluido.

b) Verdadera.

4.49 **Señala qué operación de equivalencia transforma la desigualdad $13 \leqslant -2$ en $8 \leqslant -7$.**

Restar 5: $13 - 5 \leqslant -2 - 5$.

4.50 **¿Qué puedes decir de estas inecuaciones?**

a) $3x - 4 \leqslant 2$

b) $7x - 2 \leqslant 12$

Tienen la misma solución.

4.51 **Relaciona cada inecuación con su intervalo solución.**

$5x - 1 \leqslant 2x + 8$	$[-1, +\infty)$
$-5x + 1 \leqslant 2x + 8$	$(-\infty, 3]$
$5x - 1 \leqslant -2x - 8$	$[3, +\infty)$
$-5x + 1 \leqslant -2x - 8$	$(-\infty, -1]$

$5x - 1 \leqslant 2x + 8 \Rightarrow 5x - 2x \leqslant 1 + 8 \Rightarrow 3x \leqslant 9 \Rightarrow x \leqslant 3 \Rightarrow x \in (-\infty, 3]$

$-5x + 1 \leqslant 2x + 8 \Rightarrow -5x - 2x \leqslant 8 - 1 \Rightarrow -7x \leqslant 7 \Rightarrow x \geqslant -1 \Rightarrow x \in [-1, \infty)$

$5x - 1 \leqslant 2x - 8 \Rightarrow 5x + 2x \leqslant 1 - 8 \Rightarrow 7x \leqslant -7 \Rightarrow x \leqslant -1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1]$

$-5x + 1 \leqslant -2x - 8 \Rightarrow -5x + 2x \leqslant -8 - 1 \Rightarrow -3x \leqslant -9 \Rightarrow x \geqslant 3 \Rightarrow x \in [3, \infty)$

PROBLEMAS PARA APLICAR

4.52 **El aforo de un estadio de fútbol es tal, que cuando se llenan las $\frac{3}{5}$ partes acuden 1000 espectadores menos que cuando venden $\frac{2}{3}$ de las entradas. ¿Cuántas localidades tiene el estadio?**

Se llama x al aforo del estadio.

$$\frac{3}{5}x = \frac{2}{3}x - 1000$$

$$9x = 10x - 15\,000$$

$$x = 15\,000$$

El estadio de fútbol tiene 15 000 localidades.

4.53 José ha ganado un premio. Si lo reparte entre sus nietos, cada uno recibirá 3000 euros, pero si lo distribuye entre sus hijos, que son dos menos, cada uno tocaría a 1000 euros más.

¿Cuántos nietos tiene José? ¿Cuánto dinero ha ganado en el premio?

x = número de nietos; $x - 2$ = número de hijos

Se iguala el premio cuando lo reparte entre hijos o nietos,

$3000x = 4000(x - 2) \Rightarrow 3000x = 4000x - 8000 \Rightarrow x = 8$

José tiene 8 nietos, y la cuantía del premio son 24 000 €.

4.54 Varios compañeros de trabajo aciertan una porra y cada uno gana 15 euros. Si hubieran tenido que compartir el premio con 4 personas más, hubieran tocado a 3 euros menos cada uno. ¿Cuántos compañeros jugaban la porra?

x = número de compañeros que jugaban la porra.

$12(x + 4) = 15x \Rightarrow 12x + 48 = 15x \Rightarrow x = 16 \Rightarrow$ Jugaban la porra 16 compañeros.

4.55 Un padre tiene 50 años, y su hijo, 20. ¿Cuántos años hace que la edad del hijo fue la tercera parte de la del padre?

x = número de años que han pasado.

$\frac{50 - x}{3} = 20 - x \Rightarrow 50 - x = 60 - 3x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$ Hace 5 años.

4.56 ¿Cuál es el número cuya cuarta parte es igual a la mitad del número inmediatamente inferior?

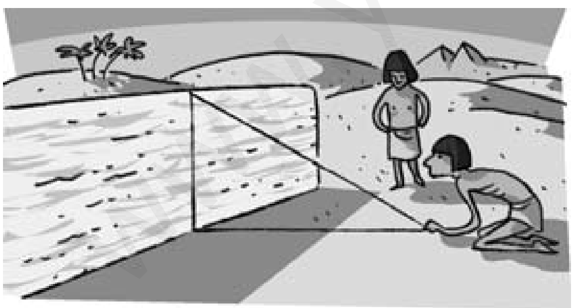
x = número buscado.

$\frac{x}{4} = \frac{x - 1}{2} \Rightarrow 2x = 4x - 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ El número buscado es el 2.

4.57 En la civilización egipcia, debido a las periódicas inundaciones del Nilo, se borraban los lindes de separación de la tierra y, para la reconstrucción de las fincas, necesitaban saber construir ángulos rectos.

En un viejo papiro se puede leer lo siguiente: “La altura del muro, la distancia al pie del mismo y la línea que une ambos extremos son tres números consecutivos”.

Halla dichos números.



Tres números consecutivos: x, $x + 1$, $x + 2$

$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

Los números serán: 3, 4 y 5.

4.58 Arancha quiere encargar a un cristalero un espejo circular, aunque no tiene claro qué tamaño le conviene. Lo que sabe es que el radio puede variar entre 20 y 25 centímetros.

¿Entre qué valores enteros oscilaría el área del cristal? ¿Y su perímetro?

Para obtener los valores enteros aproxima π a 3,14.

$A = \pi r^2 \Rightarrow 3{,}14 \cdot 20^2 \leqslant A \leqslant 3{,}14 \cdot 25^2$

Los valores enteros entre los que oscilará el área serán: $1256 \text{ cm}^2 \leqslant A \leqslant 1963 \text{ cm}^2$

$L = 2\pi r^2 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 \leqslant L \leqslant 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25$

Los valores enteros entre los que oscilará la longitud serán: $125 \text{ cm} \leqslant L \leqslant 157 \text{ cm}$.

4.59 La tirada de una revista mensual tiene unos costes de edición de 30 000 euros, a los que hay que sumar 1,50 euros de gastos de distribución por cada revista publicada.

Si cada ejemplar se vende a 3,50 euros y se obtienen unos ingresos de 12 000 euros por publicidad, ¿cuántas revistas se deben vender para empezar a conseguir beneficios?

x = n.º de revistas vendidas Gastos: $30\,000 + 1{,}5x$ Beneficios: $3{,}5x + 12\,000$

$$30\,000 + 1{,}5x < 3{,}5x + 12\,000 \Rightarrow 30\,000 - 12\,000 < 3{,}5x - 1{,}5x \Rightarrow 9000 < x$$

A partir de 9000 ejemplares vendidos se empezarán a obtener beneficios.

4.60 Dos compañías telefónicas proponen estas ofertas.

a) ¿Cuántos minutos debe el cliente llamar a móviles en un mes para que le resulte más económica la compañía *B*?

b) ¿Cuál es el importe de la factura en este caso?

a) $40 + 0{,}3x > 60 + 0{,}2x \Rightarrow 0{,}1x > 20 \Rightarrow x > 200$ minutos

b) Factura $> 60 + 0{,}2 \cdot 200 \Rightarrow$ Factura > 100 €

4.61 Si el precio de un artículo aumenta en un 20%, resulta 36 euros más caro que si su precio se disminuye un 4%. ¿Cuánto cuesta ese artículo?

x = precio del artículo $x + \frac{20}{100}x = x - \frac{4}{100}x + 36 \Rightarrow 100x + 20x = 100x - 4x + 3600 \Rightarrow x = 150$

El artículo cuesta 150 €.

4.62 Marcos ha comprado un reproductor MP4 en las rebajas con un 15% de descuento. Una semana más tarde ha visto que podía haberse ahorrado 4 euros, porque la misma tienda lo vendía con un 20% de descuento. ¿Cuánto costaba el MP4 antes de las rebajas?

x = precio del MP4 $x - \frac{15}{100}x = x - \frac{20}{100}x + 4 \Rightarrow 100x - 15x = 100x - 20x + 400 \Rightarrow x = 80$

Antes de las rebajas, el MP4 costaba 80 €.

4.63 Si se suman dos múltiplos de 5 consecutivos y al resultado se le resta 5, se obtiene un número 20 veces menor que si se multiplican ambos números. Averigua de qué números se trata.

Los múltiplos de 5 consecutivos son $(5x)$ y $(5x + 5)$.

$$20 = [(5x) + (5x + 5) - 5] = 5x(5x + 5) \Rightarrow 20 \cdot 10x = 25x^2 + 25 \Rightarrow 8x = x^2 + x \Rightarrow x^2 - 7x = 0$$

Las posibles soluciones son 0 y 7, con lo cual $5x = 0$ no es un múltiplo de 5. La única solución válida corresponde a $x = 7$.

Los números buscados son 35 y 40.

4.64 Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Una de ellas advirtió que los apretones de mano fueron 66. ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?

En la reunión hay x personas. Cada persona da la mano a $x - 1$ personas.

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66 \Rightarrow x(x - 1) = 132 \Rightarrow x^2 - x - 132 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-132)}}{2} = \frac{1 \pm 23}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -11 \end{cases}$$

Concurrieron 12 personas.

Ecuaciones de primero y segundo grado

4.65 Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando las estrategias estudiadas según el tipo de ecuación.

a) $-2(5x - 1) + \dfrac{3x - 2}{3} - \dfrac{55}{3} = 4(x - 1)$ **c)** $5x^2 - 7x = 0$

b) $20x^2 + 11x - 3 = 0$ **d)** $4(-6x + 1) - 5(3x - 2) = -7(3x - 5)$

a) $-30x + 6 + 3x - 2 - 55 = 12x - 12 \Rightarrow x = -1$

b) $x = \dfrac{-11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot (-60)}}{40} = \dfrac{-11 \pm 19}{40} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{5} \\ x = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

c) $5x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x \cdot (5x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x - 7 = 0 \rightarrow x = \dfrac{7}{5} \end{cases}$

d) $-24x + 4 - 15x + 10 = -21x + 35 \Rightarrow x = -\dfrac{7}{6}$

4.66 Escribe las siguientes ecuaciones de segundo grado en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y resuélvelas.

a) $\dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{4x - 1}{4} = \dfrac{2x(x - 3)}{6} + \dfrac{17}{12}$ **c)** $6x^2 - 1 + \dfrac{2x(-x + 3)}{3} = \dfrac{5x^2 - 2}{6} - 4x^2 + \dfrac{59}{6}$

b) $3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \dfrac{3x(x - 2)}{2} + 14$

a) $18x^2 - 12x + 3 = 4x^2 - 12x + 17 \Rightarrow 14x^2 = 14 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

b) $3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \dfrac{3x(x - 2)}{2} + 14 \Rightarrow 6x^2 - 8x + 10x^2 - 20 = 3x^2 - 6x + 28 \Rightarrow 13x^2 - 2x - 48 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{2 \cdot 13} = \dfrac{2 \pm 50}{26} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{-24}{13} \end{cases}$

c) $36x^2 - 6 - 4x^2 + 12x = 5x^2 - 2 - 24x^2 + 59 \Rightarrow 51x^2 + 12x - 63 = 0 \Rightarrow 17x^2 + 4x - 21 = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 17 \cdot (-21)}}{2 \cdot 17} = \dfrac{-4 \pm 38}{34} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{-21}{17} \end{cases}$

Otras ecuaciones

4.67 Calcula la solución de estas ecuaciones utilizando las estrategias estudiadas según el tipo de ecuación.

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ **b)** $4x^3 - 4x^2 - 14x + 6 = 0$ **c)** $\sqrt{12 - x} = x + 8$

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

Cambio: $u = x^2 \Rightarrow u^2 - 5u - 36 = 0$

$u = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ u = -4 \text{ no es correcta} \end{cases}$

c) $\sqrt{12 - x} = x + 8 \Rightarrow x^2 + 17x + 52 = 0$

$x = \dfrac{-17 \pm \sqrt{289 - 208}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -13 \end{cases}$

b) $4x^3 - 4x^2 - 14x + 6 = 0$

$2x^3 - 2x^2 - 7x + 7 = 0$

	2	−2	−7	7
1		2	0	−7
	2	0	−7	0

$(x - 1)(2x^2 - 7) = 0$

$2x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

Desigualdades e inecuaciones

4.68 Transforma la desigualdad $-12 \leqslant 3$ aplicando en ambos miembros las operaciones que se indican en cada caso.

a) Suma -2. **b) Resta 5.** **c) Multiplica por -1.** **d) Divide entre -3.**

a) $-12 - 2 \leqslant 3 - 2 \Rightarrow -14 \leqslant 1$

b) $-12 - 5 \leqslant 3 - 5 \Rightarrow -17 \leqslant -2$

c) $(-12) \cdot (-1) \geqslant 3 \cdot (-1) \Rightarrow 12 \geqslant -3$

d) $(-12) : (-3) \geqslant 3 : (-3) \Rightarrow 4 \geqslant -1$

4.69 Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $3x - 3 \geqslant 6 - (2 - 4x)$

b) $\dfrac{5x - 7}{3} < x + 5$

c) $x + \dfrac{1 - x}{6} < 2 - \dfrac{2 + x}{2}$

d) $1 - 2(x + 5) \geqslant -3$

e) $3x - \dfrac{1 - 2x}{2} \leqslant 4 + x$

a) $3x - 3 \geqslant 6 - 2 + 4x \Rightarrow -x \geqslant 7 \Rightarrow x \leqslant -7$

b) $5x - 7 < 3x + 15 \Rightarrow x < 11 \Rightarrow x \in (-\infty, 11)$

c) $6x + 1 - x < 12 - 3(2 + x) \Rightarrow x < \dfrac{5}{8} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \dfrac{5}{8}\right)$

d) $1 - 2x - 10 \geqslant -3 \Rightarrow x \leqslant -3 \Rightarrow x \in (-\infty, -3)$

e) $6x - 1 + 2x \leqslant 8 + 2x \Rightarrow x \leqslant \dfrac{3}{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$

4.70 Escribe una inecuación cuya solución se corresponda con la dada en cada caso.

a) $[-3, +\infty)$ **b) $\varnothing$** **c) $(-\infty, 2)$** **d) $\{3\}$**

a) $x + 2 \geqslant -1$ b) $x^2 < -5$ c) $2x + 7 < x + 5$ d) $(x - 3)^2 \leqslant 0$

AMPLIACIÓN

4.71 Resuelve estas ecuaciones aplicando el cambio de variable que consideres oportuno. Explica razonadamente los pasos que realizas.

a) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ **b) $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$** **c) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$** **d) $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$**

a) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Cambio: $u = x^3$; $u^2 = x^6$

$\Rightarrow u^2 - 7u - 8 = 0$

$$u = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 8 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \\ u = -1 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

b) $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$

Cambio: $u = x^3$; $u^2 = x^6$

$\Rightarrow u^2 - 2u + 1 = 0$

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

c) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

Cambio: $u = x^4$; $u^2 = x^8$

$\Rightarrow u^2 - 17u + 16 = 0$

$$u = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 15}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 16 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2 \\ u = -1 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

d) $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$

Cambio: $u = x^5$; $u^2 = x^{10}$

$\Rightarrow u^2 - 31u - 32 = 0$

$$u = \frac{31 \pm \sqrt{(-31)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)}}{2 \cdot 1} = \frac{31 \pm 33}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 32 \Rightarrow x^5 = 32 \Rightarrow x = 2 \\ u = -1 \Rightarrow x^5 = -1 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

4.72 Dos amigos viven a 15 kilómetros de distancia. Todas las tardes salen a la misma hora de sus casas para reunirse en un punto del camino. Uno hace el recorrido en bicicleta a una velocidad de 30 kilómetros por hora, y el otro lo realiza corriendo a 14 kilómetros por hora. ¿Qué distancia ha recorrido cada uno en el punto donde se encuentran?

$$\frac{x}{30} = \frac{15 - x}{14} \Rightarrow 14x = 450x - 30x \Rightarrow x = 10{,}23$$

El amigo que lleva una velocidad de 30 km por hora recorre 10,23 km, y el que va a 14 km por hora recorre $15 - x = 4{,}77$ km.

4.73 Comprueba que si conocemos las soluciones de una ecuación de segundo grado (m y n, respectivamente), entonces podemos escribir la ecuación de la que provienen: $x^2 - Sx + P = 0$, donde $S = m + n$ y $P = m \cdot n$.

La ecuación inicial es $x^2 + bx + c = 0$, cuyas soluciones vienen dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \\ n = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \end{cases} \quad \text{Por tanto:}$$

$$m + n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{-2b}{2} = -b = S$$

$$m \cdot n = \left(-b + \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4c)}{4} = \frac{4c}{4} = c = P$$

4.74 Utiliza el resultado de la actividad anterior para:

a) Averiguar cuáles son las raíces de la ecuación: $x^2 + x - 20 = 0$

b) Construir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean -3 y 7.

a) $\begin{cases} S = c + d \\ P = c \cdot d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = c + d \to c = -1 - d \\ -20 = c \cdot d \to -20 = (-1 - d) \cdot d \to -20 = -d - d^2 \to d^2 + d - 20 = 0 \end{cases}$

$$\to d = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 4 \to c_1 = -5 \\ d_2 = -5 \to c_2 = 4 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son -5 y 4.

b) $\begin{cases} S = c + d \\ P = c \cdot d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = -3 + 7 = 4 \\ P = (-3) \cdot 7 = 4 = -21 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$ es la ecuación buscada.

4.75 Calcula los valores de m para que:

a) $m^2x^2 - mx + 1 = 0$ tenga solución.

b) $2mx^2 + (4m + 1)x + 2m - 3 = 0$ tenga una única solución.

a) $m^2x^2 - mx + 1 = 0$. Para que tenga solución se ha de verificar que el discriminante de la ecuación sea positivo, es decir, $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow m^2 - 4m^2 > 0 \Rightarrow -3m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < 0 \Rightarrow$ Para ningún valor de m perteneciente a los números reales se verifica la desigualdad anterior. Por tanto, la ecuación no tiene solución para ningún valor de m.

b) $2mx^2 + (4m + 1)x + 2m - 3 = 0$. Para que tenga una única solución se ha de verificar que el discriminante de la ecuación sea igual a cero, es decir,

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (4m + 1)^2 - 4 \cdot 2m \cdot (2m - 3) = 0 \Rightarrow 16m^2 + 1 + 8m - 16m^2 + 24m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1}{32}$$

4.76 **Una inecuación en la que aparece un valor absoluto da lugar en realidad a dos inecuaciones: $|x - a| \leqslant r \Rightarrow -r \leqslant x - a \leqslant r$.**

Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|3x - 1| \leqslant 5$ **b) $|4x + 3| > 2$**

a) $-5 \leqslant 3x - 1 \leqslant 5 \Rightarrow -4 \leqslant 3x \leqslant 6$

$\frac{-4}{3} \leqslant x \leqslant 2$

Solución: $\left[\frac{-4}{3}, 2\right]$

b) $4x + 3 > 2 \Rightarrow 4x > -1 \Rightarrow x > \frac{-1}{4}$

$4x + 3 < -2 \Rightarrow 4x < -5 \Rightarrow x < \frac{-5}{4}$

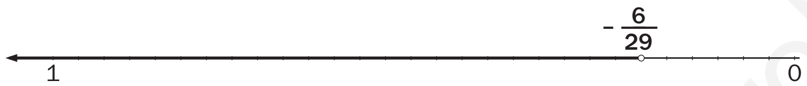
Solución: $\left(-\infty, \frac{-5}{4}\right) \cup \left(\frac{-1}{4}, +\infty\right)$

4.77 **Halla el intervalo de valores que son solución a la vez de las dos inecuaciones siguientes.**

a) $\frac{3x - 1}{4} + 2x \leqslant 2(-5x + 6) + 1$ **b) $-2(4x + 3) - \frac{x + 4}{2} \geqslant 6x - 5$**

a) $3x - 1 + 8x \leqslant 8 \cdot (-5x + 6) + 4 \Rightarrow 3x + 8x + 40x \leqslant 1 + 48 + 4 \Rightarrow x \leqslant \frac{53}{51} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{53}{51}\right] = I_1$

b) $-4 \cdot (4x + 3) - x - 4 \geqslant 12x - 10 \Rightarrow -16x - x - 12x \geqslant 12 + 4 - 10 \Rightarrow x \leqslant \frac{-6}{29} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{6}{29}\right] = I_2$



$I_1 \cap I_2 = \left(-\infty, \frac{-6}{29}\right]$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

4.78 **La conducción del gas**

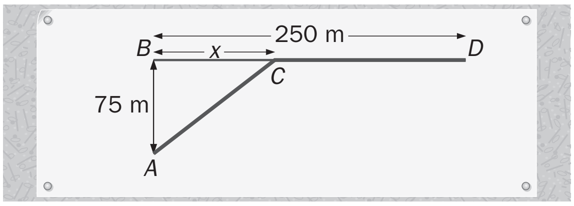
El croquis muestra dos puntos, *A* y *D*, entre los que se va a construir un canal para conducir el gas. Como se quiere aprovechar un trozo de un antiguo canal que unía los puntos *B* y *D*, hay que ubicar el punto C donde se unirán el tramo nuevo y el reformado.

El coste del tramo nuevo *AC* es de 10 euros el metro, y el de reparar cada metro del tramo antiguo *CD* es de 2 euros.

a) La tabla muestra las tres opciones que se consideran para ubicar el punto *C*.

Opción	I	II	III
Distancia *BC*	30 m	50 m	100 m

Indica cuál es la más económica.



b) Calcula la distancia *x* que debería tener *BC* para que el coste total fuera de 1270 euros.

Longitud del tramo nuevo: $\sqrt{75^2 + x^2}$

Longitud del tramo conservado: $250 - x$

Coste del tramo nuevo: $10 \cdot \sqrt{75^2 + x^2}$

Coste del tramo conservado: $2 \cdot (250 - x)$

Coste total: $10\sqrt{5625 + x^2} - 2x + 500$

a) Opción *A*: Coste $= 10 \cdot \sqrt{5625 + 30^2} - 60 + 500 = 1248$ unidades monetarias

Opción *B*: Coste $= 10 \cdot \sqrt{5625 + 50^2} - 100 + 500 = 1301$ unidades monetarias

Opción *C*: Coste $= 10 \cdot \sqrt{5625 + 100^2} - 200 + 500 = 1550$ unidades monetarias

La mejor es la primera opción.

b) $10\sqrt{5625 + x^2} - 2x + 500 = 1270 \Rightarrow 10\sqrt{5625 + x^2} = 770 + 2x \Rightarrow 100(5625 + x^2) = 592\,900 + 4x^2 + 3080x$

$96x^2 - 3980x - 30\,400 = 0 \Rightarrow x = \frac{3080 + 4600}{192} = 40$ metros

4.79 Las kilocalorías

La tabla muestra la capacidad energética media (en kilocalorías por gramo) de algunos nutrientes fundamentales.

Glúcidos	Proteínas	Grasas

Un alimento tiene las siguientes características en su composición.

- **Posee el doble de gramos de grasas que de glúcidos.**
- **La masa de las proteínas es veinte veces la masa de los glúcidos.**
- **En 100 gramos de ese alimento hay, en total, 20,7 gramos de glúcidos, proteínas y grasas.**

a) Escribe una expresión que determine el número de kilocalorías que poseen x gramos de dicho alimento.

b) Si se han consumido entre 150 y 250 gramos del mencionado alimento, ¿entre qué valores está comprendido el número de kilocalorías consumidas?

En 100 gramos de ese alimento hay c gramos de hidratos, $20c$ de proteínas y $2c$ de grasa. Por tanto:

$$x + 20c + 2c = 23c = 20{,}7 \Rightarrow c = \frac{20{,}7}{23} = 0{,}9$$

En 100 gramos de ese alimento hay 0,9 gramos de hidratos, 18 de proteínas y 1,8 de grasa.

En 1 gramo de ese alimento hay 0,009 gramos de hidratos, 0,18 de proteínas y 0,018 de grasa.

En x gramos de ese alimento hay $0{,}009x$ gramos de hidratos, $0{,}18x$ de proteínas y $0{,}018x$ de grasa.

a) Los x gramos de ese alimento aportan $0{,}009 \cdot 4x + 0{,}18 \cdot 4x + 0{,}018 \cdot 9x = 0{,}918x$ kilocalorías.

b) Si $150 \leqslant x \leqslant 250 \Rightarrow 150 \cdot 0{,}918 \leqslant 0{,}918x \leqslant 250 \cdot 0{,}918 \Rightarrow$

$150 \cdot 0{,}918 \leqslant 0{,}918x \leqslant 250 \cdot 0{,}918 \Rightarrow 137 \leqslant$ kilocalorías $\leqslant 229{,}5$

AUTOEVALUACIÓN

4.A1 Encuentra la solución de la siguiente ecuación de primer grado:

$$\frac{3(-2x+1)}{2} - 5(x-3) = \frac{3x-1}{4} + \frac{1}{2}$$

$6(-2x+1) - 20(x-3) = 3x - 1 + 2 \Rightarrow -12x - 20x - 3x = -1 + 2 - 6 - 60 \Rightarrow -35x = -65 \Rightarrow x = \frac{13}{7}$

4.A2 Resuelve esta ecuación de segundo grado:

$$(4x+5)(2x+3) = 3$$

$8x^2 + 22x + 12 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 11x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 96}}{8} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$ y $x = -2$

4.A3 Halla la solución de esta ecuación con radicales:

$$\sqrt{4x+13} + 2 = \sqrt{-2x+3}$$

$4x + 13 + 4\sqrt{4x+13} + 4 = -2x + 3 \Rightarrow 2\sqrt{4x+13} = -3x - 7 \Rightarrow 9x^2 + 26x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-26 \pm \sqrt{676 + 108}}{18} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$ y $x = -3$. En la comprobación de resultados, la única solución válida es $x = -3$.

4.A4 Resuelve esta ecuación de grado 4:

$$6x^4 + 7x^3 - 52x^2 - 63x - 18 = 0$$

Ruffini: $P(x) = (x-3)(6x^3 + 25x^2 + 23x + 6) = (x-3)(x+3)(6x^2 + 7x + 2) = (x-2)(x+3)\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Soluciones: $x = 3$, $x = -3$, $x = -\frac{2}{3}$ y $x = -\frac{1}{2}$

4.A5 Indica cuál de los siguientes intervalos es la solución de la inecuación $-3x + 1 \leqslant -2$.

a) $[1, +\infty)$ b) $(-1, +\infty)$ c) $(-\infty, 1]$ d) $(-\infty, -1]$

Solución: $[1, +\infty)$

4.A6 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2x^2 - 16 = 0$ **b)** $(x - 4)^2 = 49$ **c)** $9x^2 - 12x + 4 = 0$ **d)** $7x^2 + 5x = 0$

a) $2x^2 - 16 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

b) $(x - 4)^2 = 49 \Rightarrow x - 4 = \pm 7 \Rightarrow x = 11$ y $x = -3$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0 \Rightarrow (3x - 2)^2 = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ (solución doble)

d) $7x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(7x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = \frac{-5}{7}$

4.A7 En cada caso, construye una ecuación que tenga las soluciones que se indican.

a) -2 y 7 **b)** -4, 6 y -1 **c)** 6 y -6 **d)** $\frac{3}{4}$

a) $(x + 2)(x - 7) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 = 0$

b) $(x + 4)(x - 6)(x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 26x - 24 = 0$

c) $(x + 6)(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 36 = 0$

d) $x - \frac{3}{4} = 0$

4.A8 Considera estas inecuaciones:

a) $x - 7 \leqslant 5$ **b)** $x + 1 \leqslant 7$ **c)** $2 - x \geqslant -10$ **d)** $3x - 6 \leqslant -30$

Señala cuáles son equivalentes a $x - 2 \leqslant 10$ y, en los casos afirmativos, indica la transformación que permite pasar de una a otra inecuación.

Las inecuaciones equivalentes a la dada son a y c.

Las transformaciones son $x - 7 + 5 \leqslant 5 + 5$ para a y $(2 - x)(-1) \leqslant (-10)(-1)$ para c.

4.A9 Reparte 130 euros entre tres personas de modo que la primera reciba 5 euros más que la segunda, y la tercera tenga tantos como las otras dos juntas.

$x + 5 =$ dinero 1.ª persona $x =$ dinero 2.ª persona $2x + 5 =$ dinero 3.ª persona

$$(x + 5) + x + (2x + 5) = 130 \Rightarrow x + x + 2x = 130 - 5 - 5 \Rightarrow 4x = 120 \Rightarrow x = 30$$

La primera persona recibe 35 €; la segunda, 30, y la tercera, 65.

MATETIEMPOS

La edad de mi abuela

Mi abuela dio a luz a mi padre con menos de 20 años, y yo nací cuando mi padre tenía más de 25 años. Si mi padre tiene ahora menos de 45 años y yo curso 4.º de ESO, ¿cuántos años podría tener mi padre cuando yo nací? ¿Qué edad puede tener ahora mi abuela?

Si está en 4.º de ESO, puede tener entre 15 y 18 años. Vamos a ver qué edad puede tener el padre, consideramos todas las opciones:

	Padre							
Edad del hijo	Al nacer el hijo	Edad actual	Al nacer el hijo	Edad actual	Al nacer el hijo	Edad actual	Al nacer el hijo	Edad actual
15	26	41	27	42	28	43	29	44
16	26	42	27	43	28	44		
17	26	43	27	44				
18	26	44						

Luego cuando nació, su padre tendría entre 26 y 29 años.

Su abuela pudo dar a luz a su padre entre los 15 y los 19 años. Presentaremos la información en una tabla:

Edad de la abuela al dar a luz	Padre		Abuela
	Edad actual	Al nacer el hijo	
Mínima: 15	26 + 15 = 41	26	15 + 41 = 56
Máxima: 19	29 + 15 = 44	29	19 + 44 = 63

Por tanto, la edad de la abuela puede estar comprendida entre 56 y 63 años.

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1 Escribe estos enunciados en forma de una ecuación con dos incógnitas.

a) Un número más el doble de otro es 12.

b) La diferencia de dos números es 25.

c) Un número excede a otro en 40.

d) La mitad de la suma de dos números es 15.

a) $x + 2y = 12$

b) $x - y = 25$

c) $x - y = 40$

d) $\frac{x + y}{2} = 15$

5.2 El triple de la suma de dos números es 18. Escribe la ecuación correspondiente y calcula al menos tres posibles soluciones.

La ecuación del problema es: $(3x + y) = 18$.

Si $x = 1 \Rightarrow 3(1 + y) = 18 \Rightarrow 1 + y = 6 \Rightarrow y = 5$

Si $x = 2 \Rightarrow 3(2 + y) = 18 \Rightarrow 2 + y = 6 \Rightarrow y = 4$

Si $x = 3 \Rightarrow 3(3 + y) = 18 \Rightarrow 3 + y = 6 \Rightarrow y = 3$

5.3 La diferencia de dos números naturales es 5 y ambos son menores que 12. ¿Qué números pueden ser? Escribe las posibles soluciones en una tabla.

x e y son dos números naturales y las condiciones son: $x - y = 5$ y $x < 12$.

Las soluciones son:

x	11	10	9	8	7	6
y	6	5	4	3	2	1

5.4 La suma de las edades de dos hermanos es 12 y el doble de la edad de uno menos la del otro es 3. Plantea el sistema de ecuaciones y comprueba si alguna de estas parejas es solución del sistema.

$$x = 6,\ y = 6;\ x = 5,\ y = 9;\ x = 5,\ y = 7$$

$\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\}$ La solución correcta es $x = 5,\ y = 7$.

5.5 Indica de qué tipo son estos sistemas según el número de soluciones que tienen.

a) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3x + 9 = 6y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

Se comparan los coeficientes de las variables y los términos independientes.

a) $\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{-3}{-9} \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado porque tiene infinitas soluciones.

b) $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow$ El sistema es compatible determinado porque tiene una única solución.

5.6 Explica las transformaciones que se han hecho en las siguientes ecuaciones para pasar de un sistema a otro. ¿Son sistemas equivalentes?

$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 26 \\ 9x - 6y = 0 \end{cases}$

Utiliza la regla de la suma para resolver el sistema.

La primera ecuación se multiplica por 2, y la segunda, por 3.

Estas ecuaciones son equivalentes a las anteriores, puesto que si multiplicamos toda la ecuación por un mismo número, resulta una ecuación equivalente a la dada.

Resolución del sistema:

Se suma $2y$ a la segunda ecuación: $3x - 2y + 2y = 2y \Rightarrow x = \frac{2}{3}y$

Se sustituye en la primera ecuación: $2 \cdot \frac{2}{3}y + 3y = 13 \Rightarrow y = 3$

Se sustituye el valor calculado en la segunda ecuación: $3x - 2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow x = 2$

5.7 Resuelve los siguientes sistemas sumando o restando ecuaciones.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$

a) Se suman las dos ecuaciones: $2x = 8 \Rightarrow x = 4$.
Si se sustituye en la primera ecuación: $y = -2$.

b) Se restan las dos ecuaciones: $-2x = 6 \Rightarrow x = -3$.
Si se sustituye en la primera ecuación: $y = -\frac{19}{3}$.

5.8 Escribe un sistema equivalente al siguiente:

$\begin{cases} 3x - 2y = 25 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$

Se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda por 2.

$\begin{cases} 15x - 10y = 125 \\ 2x + 10y = 20 \end{cases}$

5.9 Resuelve los siguientes sistemas lineales por los tres métodos algebraicos estudiados.

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{2y}{3} = 5 \\ \dfrac{x}{2} + y = 5 \end{cases}$

a) Método de reducción: $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 3y = 6 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \atop \overline{13x = 13} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}$

Método de igualación: $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2 + y}{4} \\ x = 7 - 3y \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2 + y}{4} = 7 - 3y \Rightarrow 2 + y = 28 - 12y \Rightarrow \begin{matrix} y = 2 \\ x = 1 \end{matrix}$

Método de sustitución: $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (4x - 2) \\ x + 3(4x - 2) = 7 \end{cases} \Rightarrow 13x = 13 \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}$

b) Método de reducción: $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -20x + 5y = +40 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \atop \overline{-19x = 19} \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = 4 \end{matrix}$

Método de igualación: $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-8 + y}{4} \\ x = -21 + 5y \end{cases} \Rightarrow \dfrac{-8 + y}{4} = -21 + 5y \Rightarrow \begin{matrix} y = 4 \\ x = -1 \end{matrix}$

Método de sustitución: $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x + 8 \\ x - 5(4x + 8) = -21 \end{cases} \Rightarrow -19x = 19 \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = 4 \end{matrix}$

c) Método de reducción: $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 15 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \atop \overline{10x = 20} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = -1 \end{matrix}$

Método de igualación: $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 + y}{2} \\ x = \dfrac{5 - 3y}{4} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{5 + y}{2} = \dfrac{5 - 3y}{4} \Rightarrow \begin{matrix} y = -1 \\ x = 2 \end{matrix}$

Método de sustitución: $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 4x + 3(2x - 5) = 5 \end{cases} \Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = -1 \end{matrix}$

d) Método de reducción: $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{2y}{3} = 5 \\ \dfrac{x}{2} + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 8y = 60 \\ -4x - 8y = -40 \end{cases} \atop \overline{5x = 20} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ y = 3 \end{matrix}$

Método de igualación: $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{2y}{3} = 5 \\ \dfrac{x}{2} + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{60 - 8y}{9} \\ x = 10 - 2y \end{cases} \Rightarrow \dfrac{60 - 8y}{9} = 10 - 2y \Rightarrow \begin{matrix} y = 3 \\ x = 4 \end{matrix}$

Método de sustitución: $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{2y}{3} = 5 \\ \dfrac{x}{2} + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{60 - 9x}{8} \\ x + 2\left(\dfrac{60 - 9x}{8}\right) = 10 \end{cases} \Rightarrow -5x = -20 \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ y = 3 \end{matrix}$

5.10 Escribe las ecuaciones de los siguientes sistemas de modo que puedas aplicar el método que consideres más conveniente para resolverlos.

a) $\begin{cases} 2(2x - 1) + 9 = 8 - 3y \\ 6x - y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2(x - 3) + 4(-3y + 1) = 14 \\ 4(-2x + 1) - (y + 4) = 16 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} 4x - 2 + 9 = 8 - 3y \\ 6x - y = 7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4x + 3y = 1 \\ 18x - 3y = 21 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 22x = 22 \Rightarrow x = 1 \\ -y = 7 - 6 \Rightarrow y = -1 \end{matrix}$

b) $\begin{cases} -2(x - 3) + 4(-3y + 1) = 14 \\ 4(-2x + 1) - (y + 4) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 12y = 4 \\ -8x - y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8x - 48y = 16 \\ \quad -8x - y = 16 \end{cases} \atop \overline{\quad -47x = 0 \quad} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

5.11 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y después comprueba la solución.

a) $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$

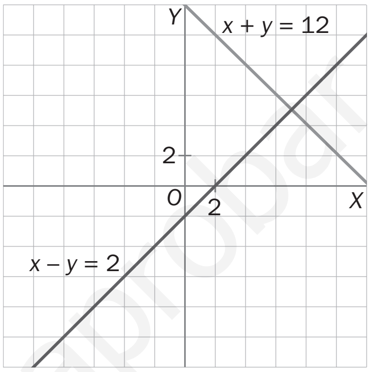
Se hace una tabla de valores para cada ecuación y se representan en un eje de coordenadas.

a) $y = 12 - x$

x	y
12	0
0	12
6	6
7	5

$y = x - 2$

x	y
0	−2
2	0
6	4
7	5

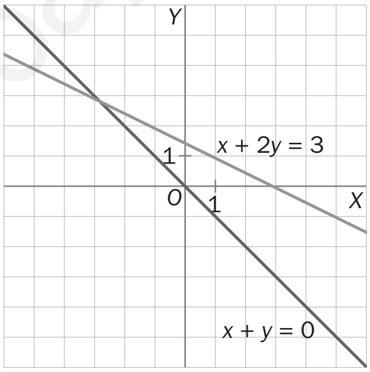


b) $y = \dfrac{x - 3}{2}$

x	y
3	0
−3	3
1	1

$y = -x$

x	y
3	−3
−3	3
−1	1

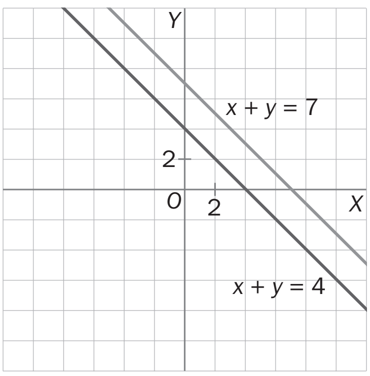


5.12 Indica, sin resolverlos, si estos sistemas son compatibles o incompatibles, y compruébalo después representando gráficamente cada uno.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - y = 0 \end{cases}$

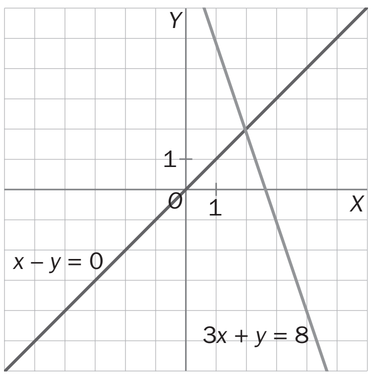
a) Es un sistema incompatible,

ya que $\dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{4}{7}$.



b) Es un sistema compatible determinado,

ya que $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{8}{0}$.



5.13 Señala de qué tipo son las ecuaciones que forman los siguientes sistemas y resuélvelos.

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 8x = y^2 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x - y)^2 - xy = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

a) La primera ecuación es de segundo grado y la segunda es de primer grado.

$$\left.\begin{matrix} x^2 - xy = 6 \\ x + 2y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - xy = 6 \\ x = -2y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 4y^2 + 2y^2 = 6 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2, \quad y = -1 \\ x = -2, \; y = 1 \end{matrix}$$

b) La primera ecuación es de segundo grado y la segunda es de primer grado.

$$\begin{cases} (x - y)^2 - xy = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-x + 1)^2 - 2x^2 + x = 6 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x = -5 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = -1$$

Si $x = 0 \Rightarrow y = -1$, y si $x = -1 \Rightarrow y = -3$

c) La primera ecuación es de segundo grado y la segunda es de primer grado.

$$\left.\begin{matrix} (x - y)^2 - xy = 6 \\ 2x - y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (x - 2x + 1)^2 - x(2x - 1) = 6 \\ y = 2x - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} (-x + 1)^2 - 2x^2 + x = 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + x = 6 \end{matrix}$$

$$x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2}$$

No tiene solución.

d) La primera ecuación es de segundo grado y la segunda es de primer grado.

$$\begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x(1 - 3x) = 5 \\ y = 1 - 3x \end{cases} \Rightarrow 4x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ y } x = -4$$

Si $x = 5 \Rightarrow y = -14$, y si $x = -4 \Rightarrow y = 13$

5.14 Señala de qué tipo son las dos ecuaciones que forman el siguiente sistema.

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = -1 \\ \quad x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Resuelve el sistema por reducción y comprueba la validez de las soluciones obtenidas.

Las dos ecuaciones que forman el sistema son de segundo grado.

$$\left.\begin{matrix} 3x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 4x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \end{matrix}$$

5.15 Marta y Anka leyeron el año pasado 20 libros entre las dos. Si Anka leyó el triple de obras que Marta, ¿cuántos libros leyó cada una?

Libros leídos por Marta: x

Libros leídos por Anka: y

$$\left.\begin{matrix} x + y = 20 \\ 3x = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5.$$ Por tanto, Marta leyó 5 libros, y Anka, 15.

5.16 La suma de las superficies de dos salas cuadradas del Museo de Cera es de 1300 m², y su diferencia es de 500 m². ¿Cuáles son sus dimensiones?

Dimensiones de las salas: x, y

Sistema de ecuaciones: $x^2 + y^2 = 1300$

$x^2 - y^2 = 500$

Se suman las ecuaciones: $2x^2 = 1800 \Rightarrow$ Área de una sala: $x^2 = 900 \Rightarrow$ Medida del lado: $x = 30$ m

Se restan las ecuaciones: $2y^2 = 800 \Rightarrow$ Área de la otra sala: $y^2 = 400 \Rightarrow$ Medida del lado: $y = 20$ m

5.17 Un hotel tiene habitaciones sencillas y dobles. En total tiene 100 habitaciones y 174 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

Se designan por d las habitaciones dobles y por s las habitaciones sencillas.

Sistema de ecuaciones: $d + s = 100 \Rightarrow 2d + s = 174$

Solución del sistema: 26 habitaciones simples y 74 habitaciones dobles

5.18 En el centro de la plaza de un pueblo han formado con baldosas un rombo de 42 m² de superficie. Calcula la medida de sus diagonales si sabemos que suman 20 metros.

Se llama D a la diagonal mayor y d a la diagonal menor.

Para calcular el área de un rombo se halla la mitad del producto de las dos diagonales.

$$\begin{cases} 42 = \dfrac{D \cdot d}{2} \\ D + d = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 84 = D \cdot d \\ D = 20 - d \end{cases} \Rightarrow 84 = (20 - d) \cdot d \Rightarrow d = 14 \text{ y } d = 6$$

El valor de la diagonal menor es $d = 6$, y $D = 14$.

El valor $d = 14$ no es válido.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5.19 Los grupos de 4.º A y 4.º B van a ir de excursión en dos autobuses diferentes. Si en el del A suben 3 alumnos del B, los dos autocares llevarán el mismo número de estudiantes. En cambio, si seis alumnos de 4.º A suben al autocar de 4.º B, este tendrá el doble de estudiantes que el otro. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo?

Se designa con x al número de alumnos de 4.º A e y al número de alumnos de 4.º B.

$$\begin{cases} x + 3 = y - 3 \\ 2(x - 6) = y + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ 2x - 12 = y + 6 \end{cases} \Rightarrow 2x - 12 = x + 6 + 6 \Rightarrow x = 24 \text{ e } y = 30$$

En el grupo de 4.º A hay 24 alumnos, y en el de 4.º B, 30.

5.20 Laura ha ido al quiosco y, para pagar, solo lleva monedas de uno y cinco céntimos.

a) El periódico cuesta 1 euro, y ella ha reunido el importe exacto con 32 monedas. ¿Cuántas ha entregado de cada tipo?

Se llama x al número de monedas de 1 céntimo e y al número de monedas de 5 céntimos.

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 5 \cdot y = 100 \\ x + y = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32 - y + 5y = 100 \\ x = 32 - y \end{cases} \Rightarrow y = 17 \text{ y } x = 15$$

Laura ha entregado 17 monedas de 5 céntimos y 15 monedas de 1 céntimo.

b) ¿Podría pagar también una revista que cuesta 1,20 euros con 32 monedas?

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 5 \cdot y = 120 \\ x + y = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32 - y + 5y = 120 \\ x = 32 - y \end{cases} \Rightarrow y = 22 \text{ y } x = 10$$

Sí podría pagarla, con 22 monedas de 5 céntimos y 10 monedas de 1 céntimo.

A C T I V I D A D E S

E J E R C I C I O S P A R A E N T R E N A R S E

Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

5.21 Señala cuáles de los siguientes valores son soluciones de la ecuación $2x - 3y = 8$.

a) (2, 3) **c) (−2, 6)** **e) (3, 7)**

b) (−1, −2) **d) (−4, −7)** **f) (5, −3)**

a) $2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 8 \rightarrow 4 - 9 \neq 8$. No es solución.

b) $2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) = 8 \rightarrow -2 + 6 \neq 8$. No es solución.

c) $2 \cdot (-2) - 3 \cdot 6 = 8 \rightarrow -4 - 18 \neq 8$. No es solución.

d) $2 \cdot (-4) - 3 \cdot (-7) = 8 \rightarrow -8 + 21 \neq 8$. No es solución.

e) $2 \cdot 3 - 3 \cdot 7 = 8 \rightarrow 6 - 21 \neq 8$. No es solución.

f) $2 \cdot 5 - 3 \cdot (-3) = 8 \rightarrow 10 + 9 \neq 8$. No es solución.

5.22 Comprueba si $x = -3$, $y = 2$ es solución de alguna de las siguientes ecuaciones:

a) $5x + 2y = -11$ **b) $3x + y = -7$** **c) $6x - 4y = 2$** **d) $-2x + 7y = 20$**

a) $5 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 11 \rightarrow -15 + 4 \neq 11$. No es solución.

b) $3 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = -7 \rightarrow -9 + 2 = -7$. Sí es solución.

c) $6 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 = 2 \rightarrow -18 - 8 \neq 2$. No es solución.

d) $-2 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = 20 \rightarrow 6 + 14 \neq 20$. No es solución.

5.23 Escribe cada uno de estos enunciados en forma de una ecuación con dos incógnitas y señala a qué hace referencia cada una de las incógnitas.

a) El perímetro de un rectángulo mide 54 centímetros.

b) El número de camas de un hospital de habitaciones dobles y triples es 256.

c) El número de ruedas que hay entre las bicicletas y los triciclos de una tienda es 84.

d) En un centro de Secundaria hay 678 personas entre estudiantes y profesores.

a) Sea x la longitud de la base e y la longitud de la altura $\Rightarrow 2x + 2y = 54$.

b) Sea x el número de habitaciones dobles e y el número de habitaciones triples $\Rightarrow 2x + 3y = 256$.

c) Sea x el número de bicicletas e y el número de triciclos $\Rightarrow 2x + 3y = 84$.

d) Sea x el número de estudiantes e y el número de profesores $\Rightarrow x + y = 678$.

5.24 Escribe una ecuación con dos incógnitas asociada a la siguiente tabla de valores:

x	−1	2	3	0	−2	5	4
y	5	−1	−3	3	7	−7	−5

Se pide hallar la ecuación de la recta, $y = mx + n$, por la cual pasan todos los puntos anteriores. Se cogen dos cualesquiera de ellos y los obligamos a que verifiquen la ecuación anterior:

$$\begin{array}{l} (-1, 5) \rightarrow 5 = -m + n \\ (2, -1) \rightarrow -1 = 2m + n \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} m = -2 \\ n = 3 \end{array} \Rightarrow y = -2x + 3$$

5.25 Señala cuáles de las siguientes ecuaciones son equivalentes:

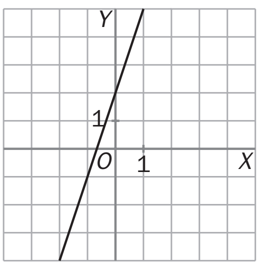
a) $4x - 2y = 6$ **b) $y = \dfrac{4x - 6}{2}$** **c) $2x = y + 3$** **d) $14y - 28x + 42 = 0$**

a y c son equivalentes, ya que si multiplicamos c por 2 obtenemos a.

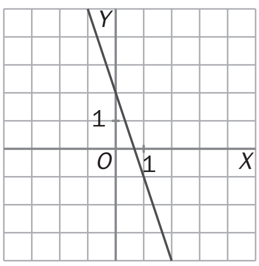
b y d son equivalentes, ya que si multiplicamos b por 7 obtenemos d.

5.26 Explica razonadamente cuál de estas gráficas representa a la ecuación $y = -3x + 2$:

a)



b)



La b, ya que la siguiente tabla de valores verifica la ecuación de la recta $y = -3x + 2$:

x	y
0	2
$\frac{2}{3}$	0

5.27 Dadas las siguientes ecuaciones:

a) $4x - 5y = -13$ **b) $-3x + 2y = 8$**

Forma la tabla de valores asociada a cada una y encuentra alguna solución común a ambas ecuaciones.

La tabla asociada a la ecuación $4x - 5y = -13$ es:

x	y
-2	1
3	5

La tabla asociada a la ecuación $-3x + 2y = 8$ es:

x	y
-2	1
0	4

La solución del sistema es: $x = -2$; $y = 1$.

Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales

5.28 Indica, sin resolverlos, el número de soluciones de los siguientes sistemas y clasifícalos.

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 2 \\ -3x + 7y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 5y = -4 \\ -3x + 15y = 12 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -6x + 2y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \frac{5}{6}x - y = 7 \\ \frac{-5}{3}x + 2y = -2 \end{cases}$

a) $\frac{5}{-3} \neq \frac{-4}{7} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado

b) $\frac{1}{-3} = \frac{-5}{15} = \frac{-4}{12} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

c) $\frac{-6}{3} = \frac{2}{-1} \neq \frac{5}{4} \Rightarrow$ Sistema incompatible

d) $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{-5}{3}} = \frac{-1}{2} \neq \frac{7}{-2} \Rightarrow$ Sistema incompatible

5.29 Halla la solución de los siguientes sistemas lineales por el método de sustitución despejando la incógnita cuyo coeficiente es 1.

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(7 - 3x) - y = 2 \\ x = 7 - 3y \end{cases}$

$28 - 12y - y = 2$

Solución: $y = 2$

$x = 1$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 4x + 3(2x - 5) = 5 \end{cases}$

$4x + 6x - 15 = 5$

Solución: $x = 2$

$y = -1$

5.30 Resuelve los siguientes sistemas mediante el método de igualación.

a) $\begin{cases} x - 5y = -8 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 5y = -8 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 + 5y \\ x = -3y \end{cases}$

$\Rightarrow -8 + 5y = -3y$

$\Rightarrow y = 1$ y $x = -3$

b) $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 + 4y}{3} \\ x = \frac{9 + 2y}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{-5 + 4y}{3} = \frac{9 + 2y}{5} \Rightarrow -25 + 20y = 27 + 6$

$\Rightarrow y = -2$ y $x = 1$

5.31 Resuelve estos sistemas de ecuaciones utilizando el método de reducción.

a) $\begin{cases} 3x - 7y = -1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - 7y = -1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow -9y = -6$

$\Rightarrow y = \dfrac{2}{3}$ y $x = \dfrac{11}{9}$

b) $\begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 10x + 6y = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow 18x = -36$

$\Rightarrow y = -2$ y $x = 3$

5.32 Escribe las ecuaciones de los siguientes sistemas en la forma $ax + by = c$ y resuélvelos por el método que consideres más conveniente en cada caso.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{2y}{3} = 6 \\ \dfrac{-x}{10} + \dfrac{5y}{6} = -6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{4}y = 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 0 \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{2y}{3} = 6 \\ \dfrac{-x}{10} + \dfrac{5y}{6} = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 10y = 90 \\ -3x + 25y = -180 \end{cases}$

$+15y = -90$

$\Rightarrow y = -6$

$x = 10$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{4}y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 8x + 15y = 100 \end{cases}$

$\Rightarrow 8(y + 1) + 15y = 100 \Rightarrow 23y = 92$

$y = 4$ y $x = 5$

c) $\begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 4y = -2 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} -12x - 8y = -4 \\ 12x - 18y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = -1 \\ x = 1 \end{matrix}$

$-26y = 26$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 0 \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 24 \end{cases}$

$4x = 24$

$x = 6$ e $y = 4$

5.33 Resuelve los siguientes sistemas y señala cuáles son equivalentes.

a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 7x + y = 5 \\ -x + 5y = -11 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -x + 3y = -7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 4y = 9 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 10 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$

$10x = 10 \Rightarrow x = 1$ e $y = -2$

b) $\begin{cases} 7x + y = 5 \\ -x + 5y = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + y = 5 \\ -7x + 35y = -77 \end{cases}$

$36y = -72 \Rightarrow y = -2$ y $x = 1$

c) $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -x + 3y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -5x + 15y = -35 \end{cases}$

$17y = -34 \Rightarrow y = -2$ y $x = 1$

d) $\begin{cases} x + 4y = 9 \\ -3x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 12y = 27 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$

$13y = 26 \Rightarrow y = 2$ y $x = 1$

a, b y c son equivalentes por tener la misma solución.

Resolución gráfica de sistemas

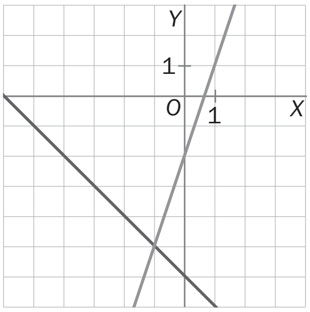
5.34 **Cada una de estas tablas está asociada a una ecuación.**

x	1	2
y	1	4

x	-3	-4
y	-3	-2

a) Representa los valores de ambas en los mismos ejes de coordenadas para obtener las rectas correspondientes a cada una.

b) Averigua la solución del sistema a partir de la representación gráfica.

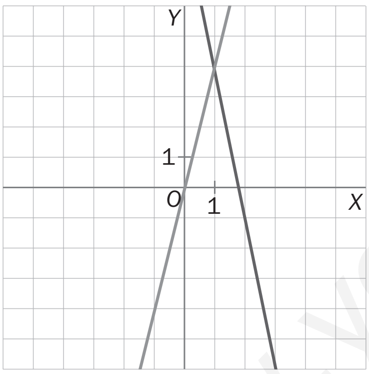
a) 

b) La solución es el punto donde se intersecan las dos rectas, es decir: $x = -1$, $y = -5$.

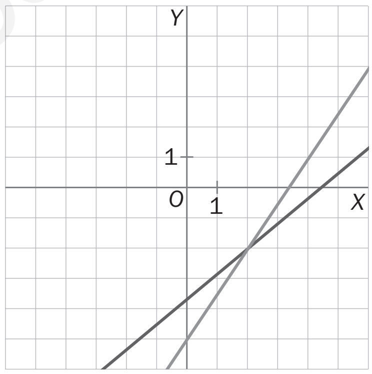
5.35 **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 4x - y = 0 \\ 5x + y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + 2y = -10 \\ 5x - 6y = 22 \end{cases}$

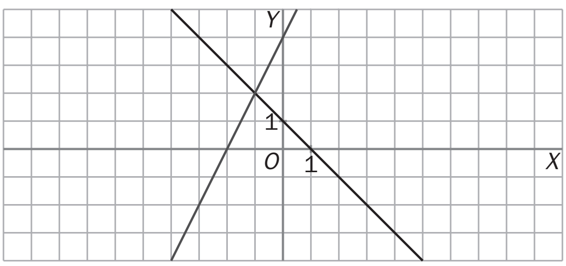


La solución es: $x = 1$, $y = 4$.



La solución es: $x = 2$, $y = -2$.

5.36 **Escribe el sistema de ecuaciones correspondiente a la siguiente representación gráfica e indica su solución.**



La ecuación explícita de una recta es: $y = mx + n$.

La primera recta pasa por los puntos:

$$\begin{array}{l} (1, 0) \rightarrow 0 = m + n \\ (0, 1) \rightarrow 1 = n \end{array} \Rightarrow m = -n = -1 \Rightarrow y = -x + 1$$

La segunda recta pasa por los puntos:

$$\begin{array}{l} (-2, 0) \rightarrow 0 = -2m + n \\ (0, 4) \rightarrow 4 = n \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -2m = -n = -4 \Rightarrow \\ \Rightarrow m = 2 \Rightarrow y = 2x + 4 \end{array}$$

Por tanto, el sistema buscado es:

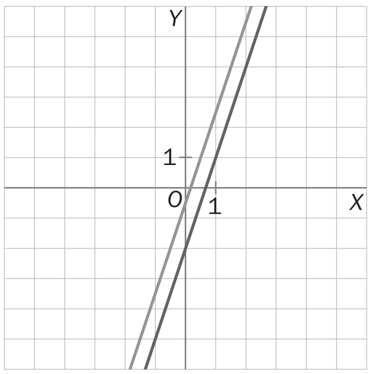
$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

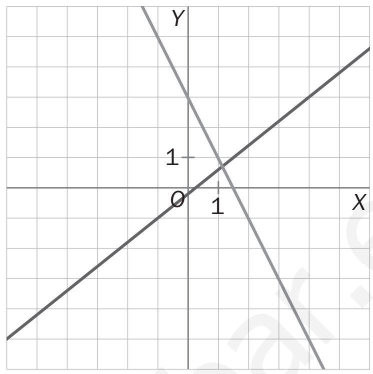
5.37 Indica, sin resolverlos, si estos sistemas son compatibles o incompatibles, y compruébalo después representando gráficamente cada uno.

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

Para ello hemos de buscar si existe proporcionalidad entre los coeficientes y los términos independientes de las ecuaciones de los sistemas:

a) $\frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow$ Sistema incompatible b) $\frac{4}{2} \neq \frac{-5}{1} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado





Sistemas de ecuaciones de segundo grado

5.38 Señala de qué tipo es cada una de las ecuaciones de los siguientes sistemas y resuélvelos por sustitución.

a) $\begin{cases} 3x^2 + 4xy = 11 \\ 5x + y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$

a) La primera ecuación es de 2.º grado, y la segunda es lineal o de 1.er grado.

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy = 11 \\ 5x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4xy = 11 \\ y = 7 - 5x \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 4x(7 - 5x) = 11 \Rightarrow -17x^2 + 28x - 11 = 0$$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado y sus dos soluciones son: $x_1 = \frac{11}{17}$ $x_2 = 1$

$y_1 = \frac{64}{17}$ $y_2 = 2$

b) La primera ecuación es de 2.º grado, y la segunda es lineal o de 1.er grado:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ y = 5 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 - x(5 - x) + (5 - x)^2 = 7 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado y sus dos soluciones son: $x_1 = 3$ $x_2 = 2$

$y_1 = 2$ $y_2 = 3$

5.39 Resuelve los siguientes sistemas de primero y segundo grado por sustitución.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x - 7y = 500 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 52 \\ x + y = 8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x - 7y = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = 500 + 7y \end{cases} \Rightarrow (500 + 7y)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 - 140y + 4998 = 0$

$\Rightarrow$ No tiene solución real.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 52 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 52 \\ y = 8 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 + (8 - x)^2 + x(8 - x) = 52 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado y sus dos soluciones son: $x_1 = 6$ $x_2 = 2$

$y_1 = 2$ $y_2 = 6$

5.40 Escribe el sistema de ecuaciones asociado a cada una de las siguientes situaciones.

a) La suma de dos números es 14 y la suma de los cuadrados de esos números es 100.

b) Dos números cuyo producto es 12 y la suma de sus cuadrados es 25.

c) Dos números cuya suma es 18, y la de sus inversos, $\frac{9}{40}$.

a) $\begin{cases} x + y = 14 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 18 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{40} \end{cases}$

5.41 Resuelve los sistemas de ecuaciones planteados en la actividad anterior y comprueba que las soluciones cumplen las condiciones del enunciado.

a) $\begin{cases} x + y = 14 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - x \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (14 - x)^2 = 100 \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado y sus dos soluciones son: $x_1 = 8 \quad x_2 = 6$

$y_1 = 6 \quad y_2 = 8$

Se comprueba: $6 + 8 = 14$, y $6^2 + 8^2 = 100$.

b) $\begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{12}{x} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(\dfrac{12}{x}\right)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + \dfrac{144}{x^2} = 25 \Rightarrow x^4 + 25x^2 + 144 = 0$

Se hace el cambio de variable $x^2 = t \Rightarrow t^2 + 25t + 144 = 0 \Rightarrow t_1 = 16$, y $t_2 = 9$

Se deshace el cambio de variable $t_1 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

$t_2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Se sustituye en $y = \dfrac{12}{x}$. Las soluciones son: $x_1 = 4 \quad x_2 = -4 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = -3$

$y_1 = 3 \quad y_2 = -3 \quad y_3 = 4 \quad y_4 = -4$

Se comprueba: $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$.

c) $\begin{cases} x + y = 18 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{40} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 - x \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{40} \end{cases} \Rightarrow 40(18 - x) + 40x = 9x(18 - x) \Rightarrow x^2 - 18x + 80 = 0$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado y sus dos soluciones son: $x_1 = 8 \quad x_2 = 10$

$y_1 = 10 \quad y_2 = 8$

Se comprueba: $8 + 10 = 18$, y $\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{5 + 4}{40} = \dfrac{9}{40}$.

5.42 **Indica si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.**

a) $-3x + y = 5$ **es equivalente a** $6x - 2y = -10$.

b) El sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$ **tiene infinitas soluciones.**

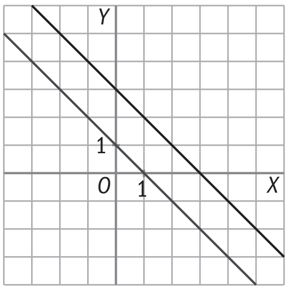
c) En la representación gráfica del sistema $\begin{cases} -x + 5y = -4 \\ 3x - 15y = 12 \end{cases}$ **tan solo aparece una recta.**

a) Verdadera, ya que si multiplicamos por -2 la ecuación $-3x + y = 5$, obtenemos la ecuación $6x - 2y = -10$.

b) Falsa, ya que $\frac{2}{5} = \frac{5}{5} \neq \frac{1}{2}$ implica que el sistema es incompatible y, por tanto, no tiene solución.

c) Verdadera, ya que la 2.ª ecuación del sistema se obtiene multiplicando por -3 la 1.ª ecuación, y, por tanto, ambas ecuaciones son equivalentes.

5.43 **Observa las dos rectas correspondientes a un sistema de ecuaciones. ¿Cómo han de ser los coeficientes de las incógnitas en ambas ecuaciones?**



Si las ecuaciones de ambas rectas son $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, se ha de verificar que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ para que las rectas sean paralelas como en el dibujo.

5.44 **Dado el sistema:** $\begin{cases} ax + 4y = 7 \\ x + ay = 5 \end{cases}$

Calcula un valor de *a* para que el sistema:

a) No tenga solución.

b) Disponga de infinitas soluciones.

c) Tenga una solución.

a) $\frac{a}{1} = \frac{4}{a} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$. Si $a = -2$ y $a = 2$, el sistema es incompatible y, por tanto, no tiene solución.

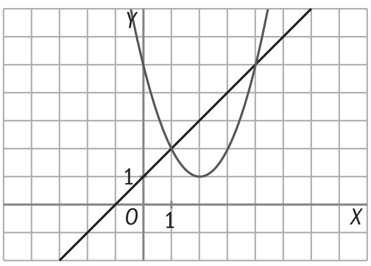
b) $\frac{a}{1} = \frac{4}{a} = \frac{7}{5}$. Por el apartado a es imposible que se verifique la igualdad anterior, y, por tanto, no existe valor de *a* para el cual el sistema tenga infinitas soluciones.

c) $\frac{a}{1} \neq \frac{4}{a} \Rightarrow a^2 \neq 4 \Rightarrow a \neq \pm 2$. Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$, entonces el sistema tiene una única solución.

5.45 **Las dos gráficas siguientes representan las ecuaciones de un sistema.**

a) ¿Es un sistema de primero o de segundo grado? Razona tu respuesta.

b) ¿Cuáles son las soluciones del sistema?



a) Es un sistema de segundo grado, ya que en la gráfica aparece representada una parábola.

b) Las soluciones del sistema son los puntos en los que se cruzan las dos funciones representadas: $P_1 = (1, 2)$, y $P_2 = (4, 5)$.

5.46 Pedro y María van todos los miércoles de compras al mercadillo. Los dos han comprado en el mismo puesto. María ha adquirido 2 camisetas y un pantalón por un total de 22 euros, y Pedro ha pagado 39 euros por 3 camisetas y 2 pantalones. ¿Cuál es el precio de cada camiseta y de cada pantalón?

$x \equiv$ precio de una camiseta

$y \equiv$ precio de un pantalón

$$\begin{cases} 2x + y = 22 \\ 3x + 2y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -44 \\ 3x + 2y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = -5 \rightarrow x = 5 \\ 3x + 2y = 39 \rightarrow 3 \cdot 5 + 2y = 39 \rightarrow 2y = 24 \rightarrow y = \dfrac{24}{2} = 12 \end{cases}$$

El precio de cada camiseta es de 5 €, y el de cada pantalón, de 12 €.

5.47 Un examen final consta de 20 preguntas de elección múltiple. Cada respuesta correcta es puntuada con 3 puntos, y se resta un punto por cada una incorrecta.

Un alumno ha respondido a todas las preguntas y ha obtenido 36 puntos. ¿Cuántas preguntas respondió de manera correcta y cuántas de forma errónea?

$x \equiv$ n.º de respuestas correctas

$y \equiv$ n.º de respuestas incorrectas

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x - y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \rightarrow 14 + y = 20 \rightarrow y = 20 - 14 = 6 \\ 4x = 56 \rightarrow x = \dfrac{56}{4} = 14 \end{cases}$$

Respondió 14 preguntas de manera correcta y 6 de manera incorrecta.

5.48 Laura se ha fijado en las señales de tráfico que hay en el camino que va desde su casa hasta el polideportivo. Ha comprobado que todas tienen forma de triángulo o cuadrilátero. Si en total hay 9 señales y entre todas reúnen 32 ángulos, ¿cuántas hay de cada tipo?

$x \equiv$ n.º de triángulos

$y \equiv$ n.º de cuadriláteros

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 3x + 4y = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -27 \\ 3x + 4y = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ 3x + 4y = 32 \rightarrow 3x + 20 = 32 \rightarrow x = \dfrac{12}{3} = 4 \end{cases}$$

Hay 4 triángulos y 5 cuadriláteros.

5.49

$x =$ número de euros de la chica

$y =$ número de euros del chico

$$\begin{cases} 3(x - 5) = y + 5 \\ x + 6 = y - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 20 \\ x - y = -12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 20 \rightarrow 48 - y = 20 \rightarrow y = 28 \\ 2x = 32 \rightarrow x = 16 \end{cases}$$

La chica tiene 16 euros, y el chico, 28.

5.50 Una empresa de reciclado de papel mezcla pasta de papel de baja calidad, que compra por 0,25 euros el kilogramo, con pasta de mayor calidad, de 0,40 euros el kilogramo, para conseguir 50 kilogramos de pasta de 0,31 euros el kilogramo.

¿Cuántos kilogramos utiliza de cada tipo de pasta?

$x \equiv$ n.º de kg de papel de baja calidad

$y \equiv$ n.º de kg de papel de mayor calidad

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 0{,}31 \cdot 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ 25x + 40y = 1550 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25x - 25y = -1250 \\ 25x + 40y = 1550 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15y = 300 \rightarrow y = \dfrac{300}{15} = 20 \\ 25x + 40y = 1550 \rightarrow 25x + 800 = 1550 \rightarrow 25x = 750 \rightarrow x = 30 \end{cases}$$

Utiliza 30 kg de papel de baja calidad y 20 kg del de mayor calidad.

5.51 Utilizando la regla de la división, averigua el dividendo y el divisor de la misma sabiendo que el cociente es 2; el resto, 7, y que el producto de ambos es igual a 490.

$$\left.\begin{matrix} D = 2d + 7 \\ D \cdot d = 490 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} (2d + 7)d = 490 \Rightarrow 2d^2 + 7d - 490 = 0 \\ d = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 2 \cdot 490}}{4} = \begin{cases} 14 \\ -17{,}5 \end{cases} \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} d = 14 \\ D = 35 \end{matrix}\right\}$$

El resultado $d = -17{,}5$ no es entero, por eso no lo consideramos.

5.52 Si el largo de un rectángulo fuese 4 centímetros más corto, y el ancho, 3 centímetros más largo, la figura obtenida sería un cuadrado cuya área sería igual que la del rectángulo inicial. ¿Qué área tendría el cuadrado?

$x \equiv$ longitud del largo del rectángulo

$y \equiv$ longitud del ancho del rectángulo

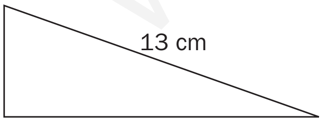
$$\begin{cases} x - 4 = y + 3 \\ xy = (x - 4)(y + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 7 \\ xy = xy + 3x - 4y - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 7 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = -21 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = -9 \rightarrow y = 9 \\ 3x - 4y = 12 \rightarrow 3x - 36 = 12 \rightarrow 3x = 48 \rightarrow x = 16 \end{cases}$$

El área del cuadrado es: $(x - 4)(y + 3) = 12 \cdot 12 = 144$ cm^2.

5.53 La profesora de Tecnología quiere partir un listón de madera de 24 centímetros de longitud en tres trozos para construir una escuadra, de manera que el trozo de mayor longitud mida 13 centímetros.

¿Cuál es la longitud de los otros trozos?



Por el teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = 169$

$$\begin{cases} x + y + 13 = 24 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11 - x \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (11 - x)^2 = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 121 + x^2 - 22x = 169 \Rightarrow x^2 - 11x - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{11 + 5}{2} = 8 \rightarrow y_1 = 11 - 8 = 3 \\ x_2 = \dfrac{11 - 5}{2} = 3 \rightarrow y_2 = 11 - 3 = 8 \end{cases}$$

Las longitudes de los trozos han de ser 3 y 8 cm.

5.54 

x = edad actual del nieto

y = edad del nieto hace tres años

$$\begin{cases} x + 3 = y^2 \\ x - 3 = y \end{cases} \Rightarrow x + 3 = (x - 3)^2 \Rightarrow x + 3 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

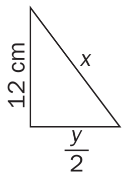
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

$x_1 = 6$, y $x_2 = 1$ (no válida)

La edad actual del nieto es de 6 años.

5.55 **De un triángulo isósceles sabemos que su perímetro es 36 centímetros y que la altura asociada al lado desigual mide 12 centímetros. Halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo.**

x = longitud de los lados iguales, e y = longitud del lado desigual



Por el teorema de Pitágoras: $12^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 = 576$

$$\begin{cases} 2x + y = 36 \\ 4x^2 - y^2 = 576 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 36 - 2x \\ 4x^2 - y^2 = 576 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 - 1296 - 4x^2 + 144x = 576$$

$144x = 1872 \Rightarrow x = 13$ e $y = 36 - 2 \cdot 13 = 10$

Los dos lados iguales miden 13 cm, y el lado desigual, 10 cm.

5.56 **Una agricultora quiere comprobar cuál es el número de hectáreas de superficie que posee su terreno rectangular de cultivo. Sabe que la distancia máxima existente entre dos puntos del mismo es de 25 decámetros, y que la proporción entre el largo y el ancho es 4:3.**

Si una hectárea equivale a 100 decámetros cuadrados, ¿cuántas hectáreas tiene la superficie?

La distancia máxima entre dos puntos del rectángulo corresponderá a la diagonal de este.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25^2 \\ 3x = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 625 \\ x = \frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 625 \Rightarrow y^2 = 225 \Rightarrow y = 15 \text{ dam}$$

$$x = \frac{4}{3} \cdot 15 = 20 \text{ dam}$$

Solo consideramos las soluciones positivas.

Área $= 15 \cdot 20 = 300$ dam^2 $= 3$ hectáreas

5.57 **Con la ayuda de los alumnos de varios centros escolares se están rehabilitando las casas de un pueblo abandonado. Ahora se ocupan de la remodelación de un depósito de 1000 m^3 que abastece de agua potable al pueblo. Tiene forma de prisma cuadrangular tal que la altura es el cuadrado del lado de la base menos 6 metros.**

Calcula la longitud del lado de la base y la altura del depósito.

$$\left.\begin{aligned} x^2 \cdot h &= 1000 \\ h &= x^2 - 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (h + 15) \cdot h &= 1000 \\ x^2 &= h + 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h^2 + 15h - 1000 = 0 \Rightarrow h_1 = 25 \text{ y } h_2 = -40 \text{ (solución no válida)}$$

La base mide $2\sqrt{10}$ m, y la altura, 25 m.

$x^2 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$ m

REFUERZO

Ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas

5.58 **Traduce a ecuaciones los siguientes enunciados.**

a) La suma de dos números es 10.

b) La diferencia de dos números es 10.

c) El producto de dos números es 24.

a) $x + y = 10$ b) $x - y = 10$ c) $x \cdot y = 24$

5.59 **Relaciona cada ecuación con una de sus soluciones.**

Ecuación	Solución
$4x - 5y = -13$	$(1, 6)$
$2x - y = 2$	$(-2, 1)$
$x - 7y = 22$	$(3, 4)$
$8x - y = 2$	$(1, -3)$

Sistemas de ecuaciones lineales

5.60 **Dada la ecuación $3x - 4y = 5$, resuelve los sistemas que forma con cada una de las siguientes:**

a) $\mathbf{3x + 4y = 7}$ **b)** $\mathbf{-3x - 4y = 3}$

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$

Se resuelve por reducción: $-8y = -2 \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}$

$x = 2$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ -3x - 4y = 3 \end{cases}$

Se resuelve por reducción: $-8y = 8 \Rightarrow y = -1$

$x = \dfrac{1}{3}$

5.61 **Resuelve los siguientes sistemas explicando en cada caso el método que utilizas.**

a) $\begin{cases} \mathbf{4x - y = -8} \\ \mathbf{x - 5y = -21} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{-3t + 5m = 19} \\ \mathbf{2t + 4m = 2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20x - 5y = -40 \\ \quad x - 5y = -21 \end{cases}$ $\overline{\quad 19x = -19 \quad}$ $\Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = 4 \end{matrix}$ Método de reducción

b) $\begin{cases} -3t + 5m = 19 \\ 2t + 4m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6t + 10m = 38 \\ \quad 6t + 12m = 6 \end{cases}$ $\overline{\quad 22m = 44 \quad}$ $\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ t = -3 \end{cases}$ Método de reducción

5.62 **Escribe las ecuaciones de los siguientes sistemas en la forma $ax + by = c$ y señala, sin resolverlos, el número de soluciones de cada uno.**

a) $\begin{cases} \mathbf{3(x - 1) = 6y} \\ \mathbf{-x = 2(2 - y)} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{3x - 5y = 2(1 - 2x)} \\ \mathbf{2x = 3(2 - y)} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \mathbf{x - 6y = 2} \\ \mathbf{\dfrac{-x}{2} + 3y = -1} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3(x - 1) = 6y \\ -x = 2(2 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 6y \\ -x = 4 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3}{-1} = \dfrac{-6}{2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$ No tiene solución.

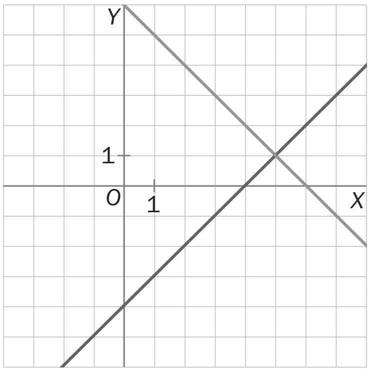
b) $\begin{cases} 3x - 5y = 2(1 - 2x) \\ 2x = 3(2 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 2 - 4x \\ 2x = 6 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 5y = 2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{7}{2} \neq \dfrac{-5}{3} \Rightarrow$ Tiene solución única.

c) $\begin{cases} x - 6y = 2 \\ \dfrac{-x}{2} + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6y = 2 \\ -x + 6y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{-1} = \dfrac{-6}{6} = \dfrac{2}{-2} \Rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

5.63 Indica, sin resolverlos, si estos sistemas son compatibles o incompatibles, y compruébalo después representando gráficamente cada uno.

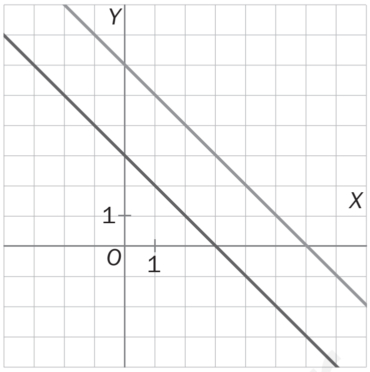
a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$

$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado



b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{6}{6} \Rightarrow$ Sistema incompatible



Sistemas de ecuaciones de segundo grado

5.64 Resuelve por sustitución el siguiente sistema de primero y segundo grado, y comprueba que la solución obtenida es correcta.

$\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = 90 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 + y \\ xy = 90 \end{cases} \Rightarrow (9 + y) \cdot y = 90 \Rightarrow 9y + y^2 = 90 \Rightarrow y^2 + 9y - 90 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 360}}{2} = \frac{-9 \pm 21}{2} = \begin{cases} y_1 = \dfrac{-9 + 21}{2} = 6 \rightarrow x_1 = 9 + 6 = 15 \\ y_2 = \dfrac{-9 - 21}{2} = -15 \rightarrow x_2 = 9 - 15 = -6 \end{cases}$$

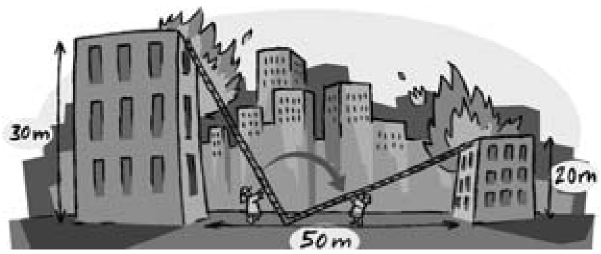
Solución 1: $x_1 = 15 \ y_1 = 6$ *Solución* 2: $x_2 = -6 \ y_2 = -15$

AMPLIACIÓN

5.65 De un rombo se sabe que su área es 120 cm², y que la proporción existente entre la diagonal mayor y la diagonal menor es 10:3.
Calcula la medida de las diagonales.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Dd}{2} = 120 \\ 3D = 10d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} D\dfrac{3D}{10} = 240 \\ d = \dfrac{3D}{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} D^2 = 800 \Rightarrow D = 20\sqrt{2} \text{ cm} \\ d = \dfrac{3 \cdot 20\sqrt{2}}{10} \Rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ cm} \end{array}$$

5.66 La siguiente figura muestra la posición que debe ocupar una escalera de bomberos sobre dos edificios. Calcula la longitud de la escalera y la posición sobre la que debe posarse en la acera.



$$\begin{cases} y^2 = 30^2 + x^2 \\ y^2 = 20^2 + (50 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow 900 + x^2 = 400 + 2500 - 100x + x^2 \Rightarrow 100x = 2000 \Rightarrow x = 20 \text{ m}$$

$y^2 = 900 + 400 = 1300 \Rightarrow y = 36{,}06$ m

La escalera debe medir 36,06 metros y estar situada a 20 metros de la primera casa.

5.67 Resuelve los siguientes sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando los mismos métodos que con dos ecuaciones.

a) $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ x - 3y + 4z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ 2x + 10y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -5y + 3z = 19 \\ -12y - 4z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -60y + 36z = 228 \\ -60y - 20z = 60 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -60y + 36z = 228 \\ 56z = 168 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ x - 3y + 4z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ 5x - 15y + 20z = 25 \\ 5x - 5y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +17y - 21z = -29 \\ +7y - 6z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +119y - 147z = -203 \\ +119y - 102z = -68 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +119y - 147z = -203 \\ -45z = -135 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

5.68 Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su diagonal mide 15 centímetros, y su área, 108 cm².

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 15^2 \\ xy = 108 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \left(\dfrac{108}{y}\right)^2 + y^2 = 15^2 \\ x = \dfrac{108}{y} \end{array}\right\} \Rightarrow 108^2 + y^4 = 225y^2 \Rightarrow y^4 - 225y^2 + 11\,664 = 0$$

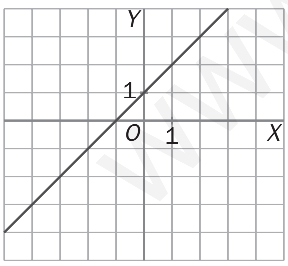
Cambio: $u = y^2$, $u^2 = y^4$

$$u^2 - 225u + 11\,664 = 0 \Rightarrow u = \frac{225 \pm \sqrt{225^2 - 4 \cdot 11\,664}}{2} = \frac{225 \pm 63}{2} \begin{cases} u = 144 \Rightarrow y = 12;\ x = 9 \\ u = 81 \Rightarrow y = 9;\ x = 12 \end{cases}$$

Las soluciones negativas no las consideramos porque las dimensiones de un rectángulo tienen que ser positivas.

El rectángulo tendrá por dimensiones 9×12 centímetros.

5.69 La gráfica muestra una de las ecuaciones de un sistema incompatible.
Halla la expresión de las dos ecuaciones del sistema sabiendo que la otra recta pasa por el punto (0, −2).



La recta pasa por los puntos de la siguiente tabla:

x	*y*
0	1
−1	0

Hallemos la ecuación de dicha recta, cuya ecuación explícita es: $y = mx + n$. Por tanto, al sustituir los valores de la anterior tabla en la ecuación obtenemos:

$$n = 1 \text{ y } 0 = -1m + n \rightarrow -m = -1 \rightarrow m = 1.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación explícita anterior, obtenemos: $y = x + 1 \Rightarrow -x + y = 1$.

Si el sistema debe ser incompatible, es debido a que las rectas que representan a sus ecuaciones son paralelas (no tienen puntos en común), y, por tanto, sus pendientes, es decir, m, han de ser iguales.

Además, la otra recta ha de pasar por el punto (0, −2). Por tanto:

$$y = mx + n \text{ con } m = 1 \Rightarrow y = 1x + n \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \rightarrow -2 = n$$

La segunda ecuación del sistema es: $y = x - 2 \Leftrightarrow -x + y = -2$.

Finalmente, el sistema buscado es: $\begin{cases} -x + y = 1 \\ -x + y = -2 \end{cases}$

5.70 **De un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas sabemos que las dos ecuaciones tienen asociadas las siguientes tablas de valores:**

x	y
-3	1
1	-1

x	y
-2	-7
3	3

a) Halla las dos ecuaciones que forman dicho sistema.

b) Resuelve el sistema de manera analítica aplicando alguno de los métodos.

c) Resuélvelo gráficamente.

a) Cada una de las ecuaciones que forman el sistema son de la forma: $y = mx + n$.

De la primera tabla obtenemos, al sustituir en la ecuación:

$$\begin{cases} -7 = -2m + n \\ 3 = 3m + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = -2m + n \rightarrow -7 = -2 \cdot 2 + n \rightarrow n = -3 \\ -10 = -5m \rightarrow m = \dfrac{-10}{-5} = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x - y = 3$$

De la segunda tabla obtenemos, al sustituir en la ecuación:

$$\begin{cases} 1 = -3m + n \\ -1 = m + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -3m \rightarrow 1 = -3 \cdot \left(\dfrac{-1}{2}\right) + n \rightarrow n = -\dfrac{1}{2} \\ 2 = -4m \rightarrow m = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x + 2y = -1$$

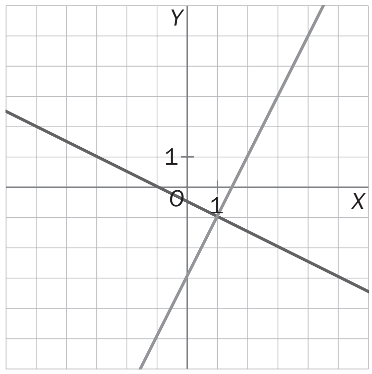
El sistema buscado es: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

b) Método de reducción:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \rightarrow 4 \cdot 1 - 2y = 6 \rightarrow -2y = 2 \rightarrow y = -1 \\ 5x = 5 \rightarrow x = \dfrac{5}{5} = 1 \end{cases}$$

c)



Para interpretar y resolver

5.71 **Cinco animales**

Cecilia quiere estudiar la evolución de las características físicas de cinco especies animales. Por eso ha observado de forma especial a un ejemplar de cada una de ellas.

Una de las variables que interesan para el estudio es la masa corporal de cada una a los 18 meses de vida, pero, inexplicablemente, en su libreta solo tiene estos datos.

Animales	Masa conjunta (kg)	Animales	Masa conjunta (kg)
Perro y gato	30	Gato y cerdo	93
Perro y pato	27	Gato y cabra	72
Perro y cerdo	107	Pato y cerdo	90
Perro y cabra	86	Pato y cabra	69
Gato y pato	13	Cerdo y cabra	149

Calcula la masa que tenía el cerdo en esa época.

Si se suman todos los valores ofrecidos por la tabla, se obtiene cuatro veces la masa de los cinco animales juntos.

Así: $\text{Perro} + \text{Gato} + \text{Pato} + \text{Cerdo} + \text{Cabra} = \dfrac{30 + 27 + \ldots + 149}{2} = \dfrac{736}{4} = 184$

Por tanto: $\text{Cerdo} = 184 - (\text{Perro} + \text{Gato}) - (\text{Pato} + \text{Cabra}) = 184 - 30 - 69 = 85$ kg

5.72 Fábrica de electrodomésticos

En una fábrica de electrodomésticos se montan lavadoras y lavavajillas. En ella hay 12 mecánicos que trabajan 7 horas diarias y que están capacitados para componer indistintamente lavadoras o lavavajillas.

Observa el tiempo que se tarda en ensamblar cada electrodoméstico.

Lavadora	**2 horas**
Lavavajillas	**3 horas**

a) Escribe el polinomio que determina el tiempo necesario para montar *x* lavadoras e *y* lavavajillas.

b) Escribe la ecuación que determina el número de lavadoras y de lavavajillas que se pueden armar en un día.

c) Los estudios de mercado muestran que se venden el doble de lavadoras que de lavavajillas. Calcula, en estas condiciones, cuántos electrodomésticos de cada clase se compondrán en un día.

a) $T = 2x + 3y$

b) $2x + 3y = 12 \cdot 7 = 84$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 84 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow 4y + 3y = 84 \Rightarrow y = 12$ y $x = 24$. Se deberán montar 24 lavadoras y 12 lavavajillas.

AUTOEVALUACIÓN

5.A1 Halla dos números cuya suma sea 14, y su diferencia, 8.

Sean x e y los dos números $\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 14 \to 11 + y = 14 \to y = 3 \\ 2x = 22 \to x = \dfrac{22}{2} = 11 \end{cases}$

Los números son 3 y 11.

5.A2 Encuentra la solución del sistema por sustitución.

$$\begin{cases} \mathbf{5x + y = -9} \\ \mathbf{-3x + 4y = 10} \end{cases}$$

$\begin{cases} y = -9 - 5x \\ -3x + 4y = 10 \end{cases} \Rightarrow -3x + 4(-9 - 5x) = 10 \Rightarrow -3x - 36 - 20x = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow -23x = 46 \Rightarrow x = \dfrac{46}{-23} = -2$

$y = -9 + 10 = 1$

5.A3 Resuelve este sistema por igualación.

$$\begin{cases} \mathbf{6x + 2y = -6} \\ \mathbf{7x - 2y = -20} \end{cases}$$

$\begin{cases} y = \dfrac{-6 - 6x}{2} \\ y = \dfrac{-20 - 7x}{-2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{-6 - 6x}{2} = \dfrac{-20 - 7x}{-2} \Rightarrow -2(-6 - 6x) = 2(-20 - 7x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 + 12x = -40 - 14x \Rightarrow 26x = -52 \Rightarrow x = \dfrac{-52}{26} = -2$

$y = \dfrac{-6 + 12}{2} = 3$

5.A4 Halla la solución de este sistema por reducción.

$$\begin{cases} \mathbf{5x - 3y = 2} \\ \mathbf{2x + 6y = 8} \end{cases}$$

$\begin{cases} 10x - 6y = 4 \\ 2x + 6y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x = 12 \to x = \dfrac{12}{12} = 1 \\ 2x + 6y = 8 \to 2 + 6y = 6 \to y = 1 \end{cases}$

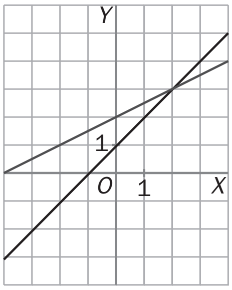
5.A5 **Halla el valor de los coeficientes de la ecuación $ax + by = 3$ para que $x = 1$, $y = 2$ y $x = -1$, $y = -8$ sean dos de sus soluciones.**

$$\left.\begin{array}{r} x = 1;\ y = 2 \\ x = -1;\ y = -8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 3 \\ -a - 8b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 3 \rightarrow a - 2 = 3 \rightarrow a = 5 \\ -6b = 6 \rightarrow b = \dfrac{6}{-6} = -1 \end{cases}$$

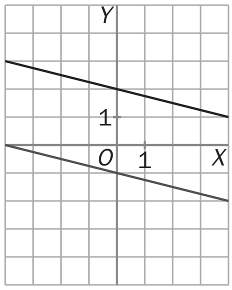
Los coeficientes son: $a = 5$ y $b = -1$.

5.A6 **Observa las siguientes representaciones gráficas y señala la solución de cada uno de los sistemas.**

a)



b)



a) $x = 2$ e $y = 3$

b) El sistema es incompatible; no tiene solución.

5.A7 **Resuelve el siguiente sistema de segundo grado por reducción.**

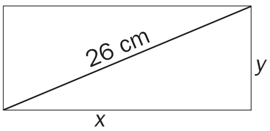
$$\begin{cases} \mathbf{3x^2 + 2y^2 = 29} \\ \mathbf{x^2 - 4y = 5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ -3x^2 + 12y = -15 \end{cases} \Rightarrow 2y^2 + 12y = 14 \Rightarrow 2y^2 + 12y - 14 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 \text{ e } y_2 = -7$$

Si $y_1 = 1 \Rightarrow x = \pm 3$

Si $y_2 = -7 \Rightarrow x = \sqrt{-23}$ (no es real).

5.A8 **La diagonal de un rectángulo mide 26 centímetros, y el perímetro, 68 centímetros. Halla los lados del rectángulo.**



Por el teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = 676$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 676 \\ 2x + 2y = 68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 676 \\ y = 34 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 34x + 240 = 0$$

La solución es: $x_1 = 24$ $\quad x_2 = 10$

$y_1 = 20$ $\quad y_2 = 24$

La base mide 24 cm, y la altura, 10 cm (la otra solución válida del sistema corresponde al mismo rectángulo girado 90°).

MATETIEMPOS

Oro y plata

Se sabe que el oro y la plata pierden 5,1 % y 9,5 % de su peso al introducirlos en el agua. Nos dicen que una joya de 12 gramos es de oro puro, pero al introducirla en el agua pierde 0,7 grs. ¿Nos han engañado?

Sea x la cantidad existente de oro e y la cantidad de plata.

El peso de la joya será: $x + y = 12$, y la pérdida de peso al introducirla en el agua: $0{,}051x + 0{,}095y = 0{,}7$.

Si resolvemos el sistema planteado por sustitución, tenemos: $y = 12 - x$.

Luego: $0{,}051x + 0{,}095\,(12 - x) = 0{,}7 \Rightarrow 0{,}051x + 1{,}4 - 0{,}095x = 0{,}7$

$-0{,}044x = -0{,}44 \Rightarrow x = 10$

Luego la joya tiene 10 gramos de oro y 2 de plata, lo que indica que no es pura.

EJERCICIOS PROPUESTOS

6.1 Completa la siguiente tabla para que las magnitudes *A* y *B* sean directamente proporcionales.

La razón de proporcionalidad es: $\frac{10}{8} = 1{,}25$

A	3	**10**	23,44	**42**
B	2,4	**8**	**18,75**	33,6

6.2 Cinco amigas han comprado entradas para un concierto por 75 euros. ¿Cuánto tendrían que haber pagado si hubieran comprado 16 entradas?

El "coste de las entradas" es proporcional al "número x de amigas que asisten" Es decir, son directamente proporcionales.

$\frac{75}{5} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = 240$ Coste de las 16 entradas: $x = 240$ euros

6.3 Dos amigos han obtenido la misma calificación en dos exámenes de matemáticas diferentes.
Todos los ejercicios tenían la misma puntuación y Sergio resolvió correctamente 24 de las 30 preguntas que tenía su examen.
¿Cuántos aciertos tuvo Jorge si su prueba constaba de 20 preguntas?

Se trata de hallar la eficacia de cada uno.

Sergio: $\frac{24}{30} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 80$ Jorge: $\frac{x}{20} = \frac{80}{100} \Rightarrow x = 16$ Jorge obtuvo 16 aciertos.

6.4 Expresa en forma de porcentaje las siguientes fracciones.

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{23}{25}$ **c)** $\frac{12}{64}$

a) $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$ b) $\frac{23}{25} = \frac{92}{100} = 92\%$ c) $\frac{12}{64} = 18{,}75\%$

6.5 Calcula los porcentajes siguientes y explica si el proceso modifica el resultado:
a) el 10% del 50% de 350 **b) el 50% del 10% de 350.**

a) $350 \cdot (1 - 0{,}50) \cdot (1 - 0{,}10) = 350 \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}90 = 157{,}50$ euros
b) $350 \cdot (1 - 0{,}10) \cdot (1 - 0{,}50) = 350 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}50 = 157{,}50$ euros
El resultado es el mismo intercambiando el proceso. No sería así si se calculase la suma de los porcentajes, es decir, el 60% de 350.

6.6 Con la llegada del calor, la venta de aparatos de aire acondicionado se ha disparado. El precio de lanzamiento de uno de estos productos es de 280 euros, y se ha incrementado la primera vez en un 10%, y una segunda, en un 20%. ¿Esta doble subida es equivalente a un aumento del 30%?
Calcula, en cada caso, el importe del aparato.

a) El primer incremento del precio será: $280 + 280 \cdot 0{,}10 = 308$ euros.
El segundo incremento será sobre el precio anterior: $308 + 308 \cdot 0{,}20 = 369{,}60$ euros
b) $280 + 280 \cdot 0{,}30 = 364$ €. Si se calcula el incremento del 30%, se comprueba que la subida es menor.

6.7 Teo lleva a clase una bolsa de caramelos para celebrar su cumpleaños. A la hora del recreo reparte el 80%. Si aún le quedan 16 caramelos en la bolsa, ¿cuántos ha llevado al colegio esa mañana?

$x - \frac{80}{100} \cdot x = 16 \Rightarrow x = 80 \Rightarrow$ Teo ha llevado a clase 80 caramelos.

6.8 Una nevera cuesta 450 euros más el 16% de IVA, pero con la rebaja aplicada en la tienda se queda en 417,60 euros. ¿Cuál es el descuento aplicado?

El precio de la nevera con el IVA aplicado es de $450 + 450 \cdot \frac{16}{100} = 522$ €.

$522 - 522 \cdot \frac{x}{100} = 417{,}60 \Rightarrow x = 20$. El descuento aplicado es del 20%.

6.9 En una tienda de música, Carlota ha comprado 2 CD; Marcos, 3, y Samuel, 5.

¿Cuánto pagará cada uno si todos los discos valen lo mismo y el total abonado ha sido de 110 euros?

Precio de un disco: $110 : 10 = 11$ euros

Carlota paga: $2 \cdot 11 = 22$ euros.

Marcos paga: $3 \cdot 11 = 33$ euros.

Samuel paga: $5 \cdot 11 = 60$ euros.

6.10 En la biblioteca de un barrio hay 1200 libros de ciencia ficción, de género policiaco y de viajes. ¿Cuántos habrá de cada clase si su número es proporcional a 1, 2 y 3, respectivamente?

Se tiene la proporcionalidad: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{1200}{6} = 200$, siendo x, y, z los libros que corresponden a cada grupo.

Libros de ciencia ficción: $200 \cdot 1 = 200$

Libros policíacos: $200 \cdot 2 = 400$

Libros de viajes: $200 \cdot 3 = 600$

6.11 En un banco se depositan 5000 euros al 8% de interés simple anual.

¿Cuánto pagará el banco al cabo de 6 años? ¿Y de 9 meses? ¿Y de 108 días?

a) Interés anual: $5000 \cdot 0,08 = 400$ euros

b) Interés en 6 años: $400 \cdot 6 = 2400$ euros

c) Interés en 9 meses: $400 \cdot \frac{9}{12} = 300$ euros

d) Interés en 108 días: $400 \cdot \frac{108}{360} = 120$ euros

6.12 Un capital de 600 euros ha producido unos intereses de 240 euros al 5% anual. ¿Cuánto tiempo ha estado el capital depositado en el banco si el interés es simple?

$600 \cdot \frac{5}{100} \cdot t = 240 \Rightarrow t = 8$ años

6.13 Elena acaba de nacer. Sus abuelos depositan 1000 euros en una cuenta a un interés compuesto del 8%. ¿Qué cantidad habrá en la cuenta cuando Elena cumpla 18 años? ¿Por cuánto se habrá multiplicado la cantidad inicial?

Capital acumulado: $C = 1000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{18} = 1000 \cdot 1,08^{18} = 3996,02$ euros ≈ 4000 euros

Como vemos, el dinero se ha multiplicado aproximadamente por 4, es decir, se ha cuadruplicado.

6.14 Una ciudad tiene una población de 5 423 384 habitantes. Si crece cada año un 1,5%, ¿cuántos tendrá dentro de 10 años?

El crecimiento de habitantes seguirá la situación del interés compuesto.

Número de habitantes $= 5\,423\,384 \cdot (1 + 0,015)^{10} = 6\,294\,058,54$

6.15 Calcula el capital final que generarán 4500 euros a un interés compuesto del 4% durante 3 años si:

a) Los intereses se pagan anualmente.

b) Los intereses se pagan semestralmente.

c) Los intereses se pagan trimestralmente.

d) Los intereses se pagan mensualmente.

e) Los intereses se pagan diariamente.

a) Si el pago es anual: $C = 4500 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{3} = 5061,89$ euros

b) Si el pago es semestral: $C = 4500 \cdot \left(1 + \frac{4}{2 \cdot 100}\right)^{6} = 5067,73$ euros

c) Si el pago es trimestral: $C = 4500 \cdot \left(1 + \frac{4}{12 \cdot 100}\right)^{12} = 5070,71$ euros

d) Si el pago es mensual: $C = 4500 \cdot \left(1 + \frac{4}{12 \cdot 100}\right)^{36} = 5072,72$ euros

e) Si el pago es diario: $C = 4500 \cdot \left(1 + \frac{4}{360 \cdot 100}\right)^{1080} = 5073,70$ euros

6.16 Un empresario pide un préstamo al 12% de interés compuesto durante 6 años. Si el capital final a devolver asciende a 850 000 euros, ¿cuál habrá sido el capital prestado?

El capital inicial se calcula aplicando la fórmula del interés compuesto:

$850\,000 = C_o \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right)^6 \Rightarrow C_o = 758\,928{,}57$ euros

6.17 Una empresa deposita 300 000 euros en una entidad bancaria al 10% de interés compuesto anual. Al cabo de cierto tiempo, *t*, retira el capital y los intereses acumulados, que son 63 000 euros. Calcula el tiempo que ha estado el dinero en el banco.

$300\,000 \cdot \frac{10}{100} \cdot t = 63\,000 \Rightarrow 300\,000 \cdot t = 630\,000 \Rightarrow t = \frac{21}{10} \Rightarrow$ 1 año y 11 meses

6.18 ¿Es lo mismo un interés compuesto mensual del 1% que uno trimestral del 4%? Razónalo sobre un capital inicial de 6000 euros.

$C = 6000 \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot 100}\right)^{12} = 6060{,}28$ euros

b) $C = 6000 \cdot \left(1 + \frac{1}{4 \cdot 100}\right)^3 = 6045{,}11$ euros

El capital acumulado es mayor si los intereses se abonan de forma mensual.

6.19 Completa la siguiente tabla en tu cuaderno sabiendo que las magnitudes son inversamente proporcionales. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

A	**50**	**100**	**80**	200	**160**	16
B	8	**4**	5	**2**	2,5	**25**

La constante de proporcionalidad k es $100 \cdot 4 = 400$.

6.20 Un motorista que circula a 80 km/h de velocidad media emplea 3 horas en viajar de Madrid a Burgos. ¿Cuánto tardará un automóvil si su velocidad media es de 120 km/h? ¿Cómo son las magnitudes tiempo y velocidad? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

Las magnitudes tiempo y velocidad son inversamente proporcionales.

La constante de proporcionalidad es: $80 \cdot 3 = 240$, que coincide con la distancia en km de Madrid a Burgos.

El motorista tardará: $240 : 120 = 2$ horas.

6.21 Jon tiene 120 vacas, a las que puede alimentar durante 45 días. ¿Cuántas vacas debería vender para que las demás tengan alimento para 60 días? ¿Cómo son las magnitudes *número de vacas* y *días de comida*? ¿Qué valor toma la constante *k*?

Las magnitudes vacas y días de comida son inversamente proporcionales.

La constante de proporcionalidad es el número de raciones vaca/día.

Se designa por x el número de vacas que puede mantener.

Raciones vaca/día: $120 \cdot 45 = 5400$

Raciones vaca/día: $x \cdot 60 = 5400$

Por tanto, $x = 90$

Si solo puede mantener 90, debe vender 30 vacas.

6.22 En una carrera ciclista se reparte un premio de 12 600 euros entre los tres primeros corredores que llegan a la meta de forma inversamente proporcional al tiempo empleado en concluir la carrera (3, 5 y 6 horas, respectivamente). ¿Cómo queda establecido el reparto del premio?

Se calcula la constante de proporcionalidad.

$\frac{1}{3} \cdot k + \frac{1}{5} \cdot k + \frac{1}{6} \cdot k = 12\,600 \Rightarrow k = 18\,000$

Por tanto, cada ciclista recibirá:

Primero: $\frac{1}{3} \cdot 18\,000 = 6000$ euros

Segundo: $\frac{1}{5} \cdot 18\,000 = 3600$ euros

Tercero: $\frac{1}{6} \cdot 18\,000 = 3000$ euros

6.23 A José le ha tocado la Lotería de Navidad. El premio es de 63 000 euros, y quiere repartirlo entre sus hijos de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 20, 25, 30 y 34 años. ¿Qué cantidad recibirá cada uno?

Se calcula la constante de proporcionalidad.

$$\frac{1}{20} \cdot k + \frac{1}{25} \cdot k + \frac{1}{30} \cdot k + \frac{1}{34} \cdot k = 63\,000 \Rightarrow k = 412\,451{,}86$$

Por tanto, cada hijo recibirá:

Hijo de 20 años: $\frac{1}{20} \cdot 424\,719{,}10 = 21\,235{,}96$ euros

Hijo de 25 años: $\frac{1}{25} \cdot 424\,719{,}10 = 16\,988{,}76$ euros

Hijo de 30 años: $\frac{1}{30} \cdot 424\,719{,}10 = 14\,157{,}30$ euros

Hijo de 34 años: $\frac{1}{34} \cdot 424\,719{,}10 = 12\,491{,}74$ euros

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

6.24 Un ganadero sabe que para alimentar a sus 20 animales durante 30 días necesita 2 toneladas de pienso. ¿Cuántos días le durará la comida si compra 10 animales más y otros 1500 kilogramos de pienso?

Se utiliza la regla de tres compuesta:

20 animales —— 2000 kg —— 30 días

30 animales —— 2000 kg —— x días $\Rightarrow x = \frac{20 \cdot 30}{30} = 20$ días

30 animales —— 3500 kg —— y días $\Rightarrow y = \frac{20 \cdot 3500}{2000} = 35$ días

6.25 Tres alumnos tardan 4 días en preparar seis casetas para la fiesta anual del colegio. Necesitan montar otras 5 casetas y solo disponen de 2 días más. ¿Cuántos compañeros más tendrán que ayudarles?

Respecto al problema anterior, solo varía el número de animales. Es un problema de proporcionalidad inversa.

30 animales —— 35 días

42 animales —— $x = \frac{30 \cdot 35}{42} = 25$ días

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Magnitudes directamente proporcionales

6.26 Explica cuáles de las siguientes parejas de magnitudes son directamente proporcionales.
a) El número de lados de un polígono regular de 15 centímetros de lado y su perímetro.
b) El número de prendas de ropa compradas en una tienda y el precio total de la compra.
c) La longitud de una palabra y el número de vocales que tiene.
d) El radio de una circunferencia y su longitud.
e) La edad de una persona y su peso.
f) El número de horas trabajadas durante un mes y el sueldo al final del mismo.

Son directamente proporcionales las magnitudes de los apartados a y d, siendo $\frac{1}{15}$ y $\frac{1}{2\pi}$ las constantes de proporcionalidad respectivas, porque es el único caso en que al multiplicar (o dividir) una de ellas por una cantidad, la otra también queda multiplicada (o dividida) por la misma cantidad.

6.27 Completa las tablas siguientes sabiendo que son magnitudes directamente proporcionales y calcula su razón de proporcionalidad.

a)

A	**1**	**3**	**4**	6
B	**16**	48	64	**96**

$r = \frac{1}{16}$

b)

C	**27**	**54**	81	**216**
D	1	**2**	**3**	8

$r = 27$

6.28 **En todas las excursiones que realiza un determinado centro escolar, por cada alumno se pagan 1,75 euros de seguro de accidentes. Si en la última excursión el importe total fue de 99,75 euros, ¿cuántos alumnos fueron?**

Como son magnitudes directamente proporcionales: $x = \dfrac{99{,}75}{1{,}75} = 57$ alumnos fueron.

Repartos directamente proporcionales

6.29 **Reparte 60 000 de forma directamente proporcional a los siguientes números.**

a) 10, 12 y 8 **b) 3, 5 y 12** **c) 2, 6 y 7** **d) 5, 4 y 3**

a) $\dfrac{x}{10} = \dfrac{y}{12} = \dfrac{z}{8} = \dfrac{60\,000}{30} \Rightarrow x = 20\,000;\ y = 24\,000;\ z = 16\,000$

b) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{12} = \dfrac{60\,000}{20} \Rightarrow x = 9000;\ y = 15\,000;\ z = 36\,000$

c) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{7} = \dfrac{60\,000}{15} \Rightarrow x = 8000;\ y = 24\,000;\ z = 28\,000$

d) $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{3} = \dfrac{60\,000}{12} \Rightarrow x = 25\,000;\ y = 20\,000;\ z = 15\,000$

6.30 **Tres amigos han compuesto las 12 canciones de un CD. Uno de ellos es el autor de 2 canciones; otro, de 4, y el tercero, de las restantes. Por cada CD vendido obtendrán un beneficio de 6 euros.**
¿Qué cantidad se llevará cada uno si reparten las ganancias de forma directamente proporcional al número de canciones que han compuesto?

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{6} = \dfrac{6}{12} \Rightarrow x = 1$ €; $y = 2$ €; $z = 3$ €

6.31 **Los abuelos paternos de Ada quieren repartir 180 euros entre ella y su hermano de forma proporcional a sus edades, 8 y 12 años.**
Por otra parte, sus abuelos maternos distribuirán 216 euros entre sus tres nietos, también de forma proporcional a sus edades, 4, 8 y 12 años.
Si Ada es la nieta de 12 años, ¿con qué reparto obtendrá más dinero? ¿Y su hermano, que es el nieto de 8 años?

$\dfrac{x}{8} = \dfrac{y}{12} = \dfrac{180}{20} \Rightarrow x = 72$ € al de 8 años; $y = 108$ € al de 12

$\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z}{12} = \dfrac{216}{24} \Rightarrow x = 36$ € al de 4 años; $y = 72$ € al de 8 años; $z = 108$ € al de 12 años.

En los dos casos, Ada y su hermano reciben la misma cantidad.

Porcentajes

6.32 **Expresa en tantos por ciento los siguientes casos.**
a) Dos de cada cinco personas dejaron de fumar en los 6 primeros meses de 2007.
b) Ocho de cada nueve encuestados duermen menos de 8 horas diarias.
c) Uno de cada doce residentes españoles colabora con una ONG.

a) $\dfrac{2}{5} = \dfrac{40}{100} \Rightarrow$ El 40% b) $\dfrac{8}{9} = \dfrac{88{,}89}{100} \Rightarrow$ El 88,89% c) $\dfrac{1}{12} = \dfrac{8{,}33}{100} = \Rightarrow$ El 8,33%

6.33 **Calcula los siguientes porcentajes.**

a) 18% de 30 **c) 35% de 90**
b) 7% de 12 **d) 86% de 210**

a) $0{,}18 \cdot 30 = 5{,}4$ c) $0{,}35 \cdot 90 = 29{,}5$
b) $0{,}07 \cdot 12 = 0{,}84$ d) $0{,}86 \cdot 210 = 180{,}6$

6.34 **Halla, en cada caso, el valor de la variable x.**

a) El 24% de x es 348. **b) El x% de 250 es 40.** **c) El 95% de 3200 es x.**

a) $\frac{24}{100} \cdot x = 348 \quad \Rightarrow \quad x = 1450$ b) $\frac{x}{100} \cdot 250 = 40 \quad \Rightarrow \quad x = 16\%$ c) $x = 0{,}95 \cdot 3200 = 3040$

6.35 **Calcula el descuento que se ha aplicado a un artículo de liquidación que costaba 2850 euros si en la primera oferta se rebajó un 30%, y en la segunda, un 20% sobre el precio ya rebajado. ¿El descuento total fue del 50%?**

$0{,}20 \cdot 0{,}30 \cdot 2850 = 171$ € fue el descuento.

Si la rebaja hubiera sido del 50%, se habría descontado la mitad. Por tanto, no ha sido ese el descuento total.

6.36 **Halla el aumento porcentual de los latidos del corazón de una persona que pasa de 68 a 115 pulsaciones por minuto.**

$115 - 68 = 47$ latidos por minuto es lo que ha aumentado.

$\frac{x}{100} \cdot 68 = 47 \quad \Rightarrow \quad x = 69{,}12\%$ es el porcentaje que han aumentado.

Cálculo de intereses

6.37 **Calcula el capital acumulado por un depósito de 1200 euros a un interés simple del 3,2% después de 1, 5 y 10 años.**

¿La cantidad acumulada entre los 5 y 10 años es el doble que la correspondiente a los 5 primeros?

$C = 1200 \cdot (1 + 1 \cdot 0{,}032) = 1238{,}40$ €

$C = 1200 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}032) = 1392$ €

$C = 1200 \cdot (1 + 10 \cdot 0{,}032) = 1584$ €

$1584 - 1392 = 192$ € entre los años 5 y 10

$1392 - 1238{,}40 = 154{,}60$ € en los 5 primeros años.

Por tanto, la cantidad acumulada entre los años 5 y 10 no es el doble de la que acumula en los 5 primeros años.

6.38 **Halla en qué cantidad se incrementarían 3000 euros depositados en una cuenta corriente durante 4 años a un interés simple anual y a un interés compuesto anual del 6%. Compara el resultado y coméntalo.**

Interés simple: $i = 3000 \cdot 4 \cdot 0{,}06 = 720$ €

Interés compuesto: $C = 3000\ (1 + 0{,}06)^4 = 3787{,}43 \Rightarrow i = 3787{,}43 - 3000 = 787{,}43$ €

El interés acumulado en el caso compuesto es de 57,43 € más que en el simple.

6.39 **Calcula el interés simple al que se han depositado 1800 euros en un banco durante un año si el capital al cabo de ese tiempo ha sido de 1872 euros.**

$$1872 = 1800 \cdot \left(1 + 1 \cdot \frac{r}{100}\right) \Rightarrow r = 100 \cdot \left(\frac{1872}{1800} - 1\right) = 4\%$$

6.40 **Estudia, de entre las siguientes, cuál es la opción más rentable al ingresar 600 euros en una cuenta durante 2 años a un interés simple.**

a) Mensual del 0,6% **b) Semestral del 1,7%** **c) Anual del 2,5%**

a) $C = 600 \cdot (1 + 24 \cdot 0{,}006) = 600{,}144$ €

b) $C = 600 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}017) = 640{,}80$ €

c) $C = 600 \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}025) = 630$ €

La opción más rentable es la segunda.

6.41 Halla el tiempo que han estado ingresados 2500 euros en una cuenta si han producido unos intereses de 250 euros al 3,5% anual, en los casos de que sea un interés simple o compuesto.

Interés simple: $250 = 2500 \cdot t \cdot 0{,}035 \Rightarrow t = 2{,}86$. Han estado aproximadamente 3 años.

Interés compuesto: $2750 = 2500 \cdot (1 + 0{,}035)^t \Rightarrow 1{,}035^t = 1{,}1 \Rightarrow t = 2{,}77$ años. Por tanto, aproximadamente el mismo tiempo.

Magnitudes inversamente proporcionales

6.42 Completa las tablas siguientes sabiendo que son magnitudes inversamente proporcionales y calcula su constante de proporcionalidad.

a)

A	**1**	**2**	**3**	5
B	**330**	165	110	**66**

$k = 330$

b)

C	1	**2**	**6**	7
D	**84**	**42**	14	**12**

k = 84

6.43 Escribe tres ejemplos de dos magnitudes inversamente proporcionales y explica razonadamente por qué lo son.

La velocidad y el tiempo que tarda un coche en recorrer un espacio determinado.

El número de obreros y el tiempo que tardan en realizar una tarea.

El número de camiones utilizados en transportar una determinada mercancía y el número de viajes que han de dar para ello.

6.44 Estudia si las magnitudes de las siguientes tablas son inversamente proporcionales.

a)

A	**1**	**2**	**3**	**4**
B	**450**	**225**	**150**	**100**

b)

C	**120**	**60**	**30**	**15**
D	**2**	**4**	**8**	**16**

a) $1 \cdot 450 = 2 \cdot 225 = 3 \cdot 150 \neq 4 \cdot 100$.
No son inversamente proporcionales.

b) $120 \cdot 2 = 60 \cdot 4 = 30 \cdot 8 = 15 \cdot 16$
Son inversamente proporcionales.

6.45 La constante de proporcionalidad de dos magnitudes inversamente proporcionales, *A* y *B*, es 8. Calcula:

a) El valor de *A* cuando *B* es 2.

b) El valor de *B* cuando *A* es 16.

a) $A \cdot 2 = 8 \Rightarrow A = 4$

b) $16 \cdot B = 8 \Rightarrow B = 0{,}5$

Repartos inversamente proporcionales

6.46 Reparte 12 000 de forma inversamente proporcional a los siguientes números.

a) 2 y 6

b) 4 y 5

c) 2, 3 y 4

d) 2, 4 y 8

a) $\frac{1}{2} \cdot k + \frac{1}{6} \cdot k = 12\,000 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{6} k = 12\,000 \quad \Rightarrow \quad k = 18\,000$

$\frac{1}{2} \cdot 18\,000 = 9000$

$\frac{1}{6} \cdot 18\,000 = 3000$

b) $\frac{1}{4} \cdot k + \frac{1}{5} \cdot k = 12\,000 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{20} k = 12\,000 \quad \Rightarrow \quad k = 26\,666{,}67$

$\frac{1}{4} \cdot 26\,666{,}67 = 6666{,}67$

$\frac{1}{5} \cdot 26\,666{,}67 = 5333{,}33$

c) $\frac{1}{2} \cdot k + \frac{1}{3} \cdot k + \frac{1}{4} \cdot k = 12\,000 \Rightarrow \frac{13}{12} k = 12\,000 \Rightarrow k = 11\,076{,}92$

$\frac{1}{2} \cdot 11\,076{,}92 = 5538{,}46$

$\frac{1}{3} \cdot 11\,076{,}92 = 3692{,}31$

$\frac{1}{4} \cdot 11\ 076{,}92 = 2769{,}23$

d) $\frac{1}{2} \cdot k + \frac{1}{4} \cdot k + \frac{1}{8} \cdot k\ \ k = 12\,000 \Rightarrow \frac{7}{8} k = 12\,000 \Rightarrow k = 13\,714{,}29$

$\frac{1}{2} \cdot 13\,714{,}29 = 6857{,}15$

$\frac{1}{4} \cdot 13\,714{,}29 = 3428{,}58$

$\frac{1}{8} \cdot 13\,714{,}29 = 1714{,}29$

6.47 **En un concurso de pintura rápida se va a repartir la cantidad de 6000 euros entre los tres primeros clasificados de manera inversamente proporcional a su lugar en la clasificación.**

Calcula la cantidad que se llevará cada uno de ellos.

$k + \frac{1}{2} \cdot k + \frac{1}{3} \cdot k = 6000 \quad \Rightarrow \quad \frac{11}{6} \cdot k = 6000 \quad \Rightarrow \quad k = 3272{,}73$

El primer clasificado se lleva 3272,73 €.

El segundo: $\frac{1}{2} \cdot 3272{,}73 = 1636{,}37$ €.

El tercero: $\frac{1}{3} \cdot 3272{,}73 = 1090{,}91$ €.

6.48 **En una carrera popular participan 20 trabajadores de una misma compañía. La dirección de la empresa ha ofrecido un premio especial de 600 euros para repartir entre los cuatro primeros empleados que crucen la línea de meta. El primero lo repartirán de manera inversamente proporcional al orden de llegada.**

¿Cuánto dinero obtendrá cada uno de ellos?

$k + \frac{1}{2} \cdot k + \frac{1}{3} k + \frac{1}{4} k = 600 \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{12} k = 600 \quad \Rightarrow \quad k = 288$

El primer clasificado se lleva 288 €.

El segundo: $\frac{1}{2} \cdot 288 = 144$ €.

El tercero: $\frac{1}{3} \cdot 288 = 96$ €.

El cuarto: $\frac{1}{4} \cdot 288 = 72$ €.

CUESTIONES PARA ACLARARSE

6.49 **Explica si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes.**
a) La razón de proporcionalidad es un número mayor que 1.
b) Un porcentaje equivale a una razón de denominador 100.
c) Entre magnitudes inversamente proporcionales no existe razón de proporcionalidad.
d) En un reparto proporcional a las edades de tres personas, a la mayor le corresponde la cantidad más pequeña.

a) Falso.
b) Verdadero.
c) Verdadero, existe constante.
d) Falso, le corresponde la mayor cantidad.

6.50 **¿Son directamente proporcionales los kilómetros recorridos en un trayecto en autobús y el precio del billete? Razona tu respuesta.**

No, porque al aumentar el número de kilómetros recorridos, el precio no aumenta de forma proporcional, esto es, al duplicarse el número de kilómetros, el precio del billete no se duplica.

6.51 Completa las siguientes frases.

a) Si A y B son directamente proporcionales, al triplicarse un valor de A, su valor correspondiente de B se **triplica**.

b) Si A y B son inversamente proporcionales, al dividirse entre dos un valor de B, el correspondiente valor de A se **duplica**.

6.52 Se hallan, consecutivamente, el 28% y el 43% de una determinada cantidad. ¿Qué único porcentaje se podría aplicar a dicha cantidad para obtener el mismo resultado?

$0{,}28 \cdot 0{,}43 = 0{,}1204$

6.53 Dadas dos magnitudes, al aumentar los valores de una de ellas, los correspondientes de la otra disminuyen.

¿Puede afirmarse que ambas magnitudes son inversamente proporcionales?

Razona tu respuesta y pon un ejemplo que la confirme.

No, si no lo hacen de forma que al multiplicarse una de ellas por un número, la otra se divida por el mismo número.

Por ejemplo, el tiempo empleado en recorrer una distancia y la velocidad si esta no es constante.

6.54 Un arquitecto dibuja el plano de una casa a escala 1:45.

¿En qué porcentaje se han reducido las medidas reales de la casa para trazar el plano?

$\frac{1}{45} = \frac{2{,}22}{100} \Rightarrow$ En el 2,22%

6.55 Supón que una determinada cantidad de dinero se deposita en un banco al mismo interés compuesto durante un año.

¿Qué resultará más beneficioso, un interés diario, mensual, trimestral, semestral o anual?

Mensual: $C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^{12}$

Trimestral: $C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{400}\right)^{4}$

Semestral: $C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{200}\right)^{2}$

Comparando las bases mensuales y trimestrales: $\frac{r}{1200} < \frac{r}{400} \Rightarrow$ Dividiendo entre r, que es positivo:

$\frac{1}{1200} < \frac{1}{400} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{1200}\right)^{12} > \left(1 + \frac{1}{400}\right)^{4} \Rightarrow 1{,}010045 > 1{,}010037$. Por tanto, es mejor mensual.

Comparando las bases mensuales y semestrales: $\frac{r}{400} < \frac{r}{200} \Rightarrow$ Dividiendo entre r, que es positivo:

$\frac{1}{400} < \frac{1}{200} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{400}\right)^{4} > \left(1 + \frac{1}{200}\right)^{2} \Rightarrow 1{,}010037 > 1{,}010025$.

Por tanto, la opción más beneficiosa es la mensual.

PROBLEMAS PARA APLICAR

6.56 Alicia ha estado enferma y ha necesitado cuidados durante 5 meses. Ha decidido repartir 4000 euros que tenía ahorrados entre las tres personas que la atendieron durante su convalecencia de forma directamente proporcional al tiempo que estuvieron con ella.

La primera persona la acompañó durante un mes y medio; la segunda, durante dos meses y medio, y el resto del tiempo estuvo con ella la tercera.

¿Cuánto le dará a cada una de ellas?

$\frac{x}{1{,}5} = \frac{y}{2{,}5} = \frac{z}{1} = \frac{4000}{5} \Rightarrow x = 1200$ €; $y = 2000$ €; $z = 800$ €

6.57 Al solicitar un préstamo de 12 000 euros para comprar un coche, Lucía ha estudiado estas tres opciones.

a) El banco le ofrece un interés simple anual del 3,2%.

b) El concesionario le presenta un interés compuesto semestral del 1,5%.

c) Una empresa de dinero fácil le garantiza un interés compuesto del 2,6% anual.

Si en los tres casos saldara su deuda en 4 años, ¿qué opción sería más conveniente para Lucía?

a) $C = 12\,000 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}032) = 13\,536$

b) $C = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{1{,}5}{200}\right)^8 = 12\,739{,}19$

c) $C = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{2{,}6}{100}\right)^4 = 13\,297{,}52$

La más conveniente es la opción a.

6.58 En un videoclub se han alquilado 65 películas durante el primer fin de semana de julio, de las cuales 27 fueron comedias.

En el primer fin de semana de agosto se alquilaron 18 comedias de un total de 52 películas.

¿En cuál de los dos fines de semana fue mayor el porcentaje de comedias alquiladas?

$\frac{27}{65} = 41{,}54\%$ $\qquad \frac{18}{52} = 34{,}62\%$ $\qquad$ En el primer fin de semana de julio, el porcentaje de comedias alquiladas fue mayor.

6.59 Una empresa ha pedido presupuesto de una mercancía a un proveedor habitual. El precio real de la misma es de 2350 euros, pero el proveedor le aplicará un 20% de margen y un 3% por su transporte. ¿Cuál será el presupuesto total?

Si finalmente la empresa acepta la oferta y lo paga al contado, el proveedor le hará un descuento del 5%. ¿Cuánto pagaría finalmente la empresa por la mercancía? ¿Cuál sería el porcentaje final aplicado al precio inicial?

$0{,}2 \cdot 0{,}03 \cdot 2350 = 14{,}1 \quad \Rightarrow \quad 2350 + 14{,}1 = 2364{,}10$ € será el presupuesto total.

$0{,}95 \cdot 2364{,}1 = 2245{,}90$ € pagaría por la mercancía.

$2350 - 2245{,}90 = 104{,}10 \quad \Rightarrow \quad \frac{104{,}10 \cdot 100}{2350} = 4{,}43\%$ de descuento fue el porcentaje final aplicado.

6.60 Miranda, Juan, Gabriel y María van a viajar de Madrid a París. Conducirán todos, de modo que el número de kilómetros que haga cada uno sea directamente proporcional al tiempo que hace que obtuvieron el permiso de conducir.

Miranda lo consiguió hace 7 años; Juan, 6; Gabriel, 9, y María, que es la más novata, hace 8 meses.

Si en total recorrerán 1200 kilómetros, ¿cuántos kilómetros conducirá cada uno?

$\frac{x}{84} = \frac{y}{72} = \frac{z}{108} = \frac{t}{8} = \frac{1200}{272} \quad \Rightarrow \quad x = 370{,}59$ km conducirá Miranda; $y = 317{,}64$ km conducirá Juan;
$z = 476{,}47$ km conducirá Gabriel; $t = 35{,}29$ km conducirá María.

6.61 En el año 2000, la población mundial era de 6000 millones de personas, aproximadamente.

La tasa de natalidad ese año fue del 24‰, y la tasa de mortalidad, del 9,10‰.

Atendiendo a estos datos, ¿cuál fue el número de habitantes en el año 2001?

$6000 \cdot 0{,}24 = 1440$ millones de personas aumentó la población.

$6000 \cdot 0{,}091 = 546$ millones de personas disminuyó la población.

En total, $6000 + 1440 - 546 = 6894$ millones de habitantes hubo en 2001.

6.62 Una de las recomendaciones para ahorrar agua es no utilizar el inodoro como cubo de basura, porque cada vez que se vacía la cisterna se consumen entre 6 y 12 litros de agua.

Javier contó el número de veces que se vacía la cisterna en su casa cada día durante una semana y obtuvo una media de 15 veces diarias, de las cuales 6 eran innecesarias.

¿Qué porcentaje de agua al día se gasta innecesariamente como media en casa de Javier?

¿Cuántos litros de agua corresponden a esa media?

$x = \frac{6 \cdot 100}{15} = 40\%$ de agua al día se gasta innecesariamente.

40% de 6 = 2,4 $\qquad$ 40% de 12 = 4,8 $\qquad$ Equivale a un gasto innecesario de agua de entre 2,4 y 4,8 litros diarios.

6.63 **En una entidad bancaria, Jaime y Lola han pedido un préstamo de 25 000 euros que quieren pagar en 4 años. Según el interés compuesto que les ofrece el banco, al final habrán pagado 30 853,36 euros.**

En otro banco les garantizan el préstamo a un interés medio punto menor en el mismo tiempo.

Calcula el interés que les cobra cada una de las entidades.

$30\,853{,}36 = 25\,000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^4 \Rightarrow \left(1 + \frac{r}{100}\right)^4 = \frac{30\,853{,}36}{25\,000} = 1{,}234 \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[4]{1{,}234} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 100 \cdot (\sqrt[4]{1{,}234} - 1) = 5{,}4\%.$ El otro banco le ofrece medio punto menos, el 4,9%.

R E F U E R Z O

Magnitudes y repartos directamente proporcionales

6.64 **Completa las siguientes tablas y calcula la razón de proporcionalidad en cada caso.**

a)

Peso de las almendras (gramos)	100	300	400	800
Precio (€)	12,5	**37,5**	50	**100**

$r = \frac{100}{12{,}5}$

b)

Gasolina consumida (l)	40	20	12	1
Distancia recorrida (km)	600	**300**	180	**15**

$r = \frac{1}{15}$

6.65 **Reparte 22 000 de forma directamente proporcional a los siguientes números.**

a) 4 y 6 **b) 12 y 18** **c) 2, 3 y 4** **d) 5, 10 y 20**

a) $\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{22\,000}{10} \Rightarrow x = 8800;\ y = 13\,200$

b) $\frac{x}{12} = \frac{y}{18} = \frac{22\,000}{30} \Rightarrow x = 8800;\ y = 13\,200$

c) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{22\,000}{9} \Rightarrow x = 4888{,}89;\ y = 7333{,}33;\ z = 9777{,}78$

d) $\frac{x}{5} = \frac{y}{10} = \frac{z}{20} = \frac{22\,000}{35} \Rightarrow x = 3142{,}86;\ y = 6285{,}71;\ z = 12\,571{,}43$

Porcentajes

6.66 **Realiza los siguientes cálculos:**

a) El 36% de 1045.

b) El tanto por ciento que hay que aplicar a 84 para que se incremente en 16,8 unidades.

c) La cantidad cuyo 95% es 513.

a) $x = 0{,}36 \cdot 1045 = 376{,}2$ b) $x = \frac{16{,}8 \cdot 100}{84} = 20\%$ c) $x = \frac{513 \cdot 100}{95} = 540$

6.67 **Calcula el 60% del 35% de 218 000.**

¿Se consigue el mismo resultado que si se calcula el porcentaje que se obtiene al sumar los dos anteriores? ¿Y el que resulta de multiplicarlos?

$0{,}6 \cdot 0{,}35 \cdot 218\,000 = 45\,780$

$60 + 35 = 95 \Rightarrow 0{,}95 \cdot 21\,800 = 20\,710$. No se obtiene el mismo resultado.

$0{,}6 \cdot 0{,}35 = 0{,}21$. En este caso sí se obtiene el mismo resultado.

6.68 **El presupuesto de una cocina es de 7200 euros. En la factura hay que añadir el 16% de IVA. Del importe final, los clientes deben pagar un 40% antes de empezar a fabricarla, y el resto, una vez terminada.**

¿Qué cantidad han de pagar al finalizar el trabajo?

$7200 \cdot 1{,}16 = 8352$ € será el precio de la factura.

Como hay que pagar el 40% antes de empezar el trabajo, al terminar se pagará el 60%.

$0{,}6 \cdot 8352 = 5011{,}2$ € habrá que pagar entonces.

Cálculo de intereses

6.69 Calcula el interés que producen 2150 euros depositados en un banco que ofrece un 1,8% de interés simple anual en los siguientes casos.

a) Después de 3 años.

b) Después de 4 meses.

c) Al cabo de 500 días.

a) $i = 2150 \cdot 3 \cdot 0{,}018 = 116{,}10$ €

b) $i = 2150 \cdot 4 \cdot \dfrac{0{,}018}{12} = 12{,}90$ €

c) $i = 2150 \cdot 500 \cdot \dfrac{0{,}018}{365} = 53{,}01$ €

6.70 Repite los cálculos del ejercicio anterior para el caso en que el interés sea compuesto.

a) $C = 2150 \cdot \left(1 + \dfrac{1{,}8}{100}\right)^3 = 2268{,}20 \Rightarrow i = 118{,}2$

b) $C = 2150 \cdot \left(1 + \dfrac{1{,}8}{1200}\right)^4 = 2162{,}93 \Rightarrow i = 12{,}93$

c) $C = 2150 \cdot \left(1 + \dfrac{1{,}8}{3600}\right)^{500} = 2760{,}48 \Rightarrow i = 610{,}48$

6.71 Halla el interés simple anual que una entidad bancaria cobra por un préstamo de 3000 euros en los casos siguientes:

a) En 2 años, los intereses son de 270 euros.

b) En 5 meses, los intereses son de 23,75 euros.

a) $270 = 3000 \cdot 2 \cdot \dfrac{r}{100} \Rightarrow i = 4{,}5\%$

b) $23{,}75 = 3000 \cdot 5 \cdot \dfrac{r}{1200} \Rightarrow i = 1{,}9\%$

6.72 Calcula el capital final que tendrá una persona después de 12 años al depositar 500 euros a un interés compuesto del 2,5% anual.

$C = 500 \cdot \left(1 + \dfrac{2{,}5}{100}\right)^{12} = 672{,}44$ euros

Magnitudes y repartos inversamente proporcionales

6.73 Estudia si son inversamente proporcionales las magnitudes *A* y *B* dadas en las siguientes tablas.

a)

A	**1**	**2**	**4**	**8**
B	**84**	**42**	**21**	**10,5**

b)

A	**1**	**3**	**6**	**9**
B	**180**	**60**	**30**	**20**

a) $1 \cdot 84 = 2 \cdot 42 = 4 \cdot 21 = 8 \cdot 10{,}5$. Son inversamente proporcionales.

b) $1 \cdot 180 = 3 \cdot 60 = 6 \cdot 30 = 9 \cdot 20$. Son inversamente proporcionales.

6.74 Reparte 8500 de forma inversamente proporcional a los siguientes números.

a) 1 y 2

b) 3 y 6

c) 1, 4 y 8

d) 2, 4 y 6

a) $k + \frac{1}{2}k = 8500 \Rightarrow \frac{3}{2}k = 8500$

$k = 5666{,}67$

$\frac{1}{2} \cdot 5666{,}67 = 2833{,}33$

b) $\frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k = 8500 \Rightarrow \frac{3}{6}k = 8500$

$k = 17000$

$\frac{1}{3} \cdot 17000 = 5666{,}67$

$\frac{1}{6} \cdot 17\,000 = 2833{,}33$

c) $k + \frac{1}{4}k + \frac{1}{8}k = 8500 \Rightarrow \frac{11}{8}k = 8500$

$k = 6181{,}82$

$\frac{1}{4} \cdot 6181{,}82 = 1545{,}46$

$\frac{1}{8}\ 6181{,}82 = 772{,}73$

d) $\frac{1}{2}k + \frac{1}{4}k + \frac{1}{6}k = 8500 \Rightarrow \frac{11}{12}k = 8500$

$k = 9272{,}73$

$\frac{1}{2} \cdot 9272{,}73 = 4636{,}37$

$\frac{1}{4} \cdot 9272{,}73 = 2318{,}18$

$\frac{1}{6} \cdot 9272{,}73 = 1545{,}46$

AMPLIACIÓN

6.75 Completa las tablas conociendo la razón de proporcionalidad de las magnitudes relacionadas.

a) $r = 0{,}375$

x	**3**	$\frac{x}{18} = 0{,}375 \Rightarrow x = 6{,}75$
y	$\frac{3}{y} = 0{,}375 \Rightarrow y = 8$	**18**

b) $r = 2{,}5$

x	$\frac{x}{6} = 2{,}5 \Rightarrow x = 15$	**25**
y	**6**	$\frac{25}{y} = 2{,}5 \Rightarrow y = 10$

6.76 El 40% del 70% de *x* es 600,6. Halla *x*.

$0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot x = 600{,}6 \Rightarrow x = 2145$

6.77 ¿Qué porcentaje hay que aplicar al 65% de 3140 para obtener 551,07?

$0{,}65 \cdot 3140 = 2041$

$\frac{x}{100} \cdot 2041 = 551{,}07 \Rightarrow x = 27\%$

6.78 Calcula el tiempo por el que se ha contratado una oferta bancaria si por depositar 5000 euros se han obtenido unos intereses de 624,32 euros al 4% de interés compuesto.

$5000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^t - 5000 = 624{,}32 \Rightarrow \left(1 + \frac{4}{100}\right)^t = \frac{624{,}32 + 5000}{5000} \Rightarrow \left(1 + \frac{4}{100}\right)^t = 1{,}125 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}04^t = 1{,}125 \Rightarrow t = 3$ años

6.79 Después de 450 días a un interés compuesto del 6,2% anual, la cantidad que figura en una cartilla de ahorros es de 2698,57 euros.

a) ¿Cuál ha sido el capital inicial?

b) ¿Qué interés hubiera sido necesario, durante el mismo tiempo, para que al final hubiera 3000 euros?

c) Si se quisiera duplicar los 2698,57 euros en la mitad de tiempo a partir de ahora, ¿qué interés debería ofrecer el banco?

a) $2698{,}57 = C_0 \cdot \left(1 + \dfrac{6{,}2}{36\,000}\right)^{450} \Rightarrow C_0 = \dfrac{2698{,}57}{1{,}081} = 2496{,}36$ €

b) $3000 = 2496{,}36 \cdot \left(1 + \dfrac{i}{36\,000}\right)^{450} \Rightarrow \left(1 + \dfrac{i}{36\,000}\right)^{450} = 1{,}201749 \Rightarrow 1 + \dfrac{i}{36\,000} = 1{,}00040848$

$\Rightarrow \dfrac{i}{36\,000} = 0{,}00040848 \Rightarrow i = 14{,}71\%$

c) $5397{,}14 = 2698{,}57 \cdot \left(1 + \dfrac{i}{36\,000}\right)^{225} \Rightarrow \left(1 + \dfrac{i}{36\,000}\right)^{225} = 2 \Rightarrow 1 + \dfrac{i}{36\,000} = 1{,}003085404$

$\Rightarrow \dfrac{i}{36\,000} = 0{,}003085404 \Rightarrow i = 111{,}07\%$

6.80 Con el fin de obtener dinero para el viaje de fin de curso, 5 amigos deben montar unas cajas de regalos. Han tardado 4 horas en hacer 50 cajas.

Como deben montar 300 cajas y solo disponen de dos horas más, ¿cuántos compañeros más deben participar para conseguir el objetivo?

5 amigos ———— 4 h ———— 50 cajas

x amigos ———— 6 h ———— 300 cajas

$\dfrac{x}{5} = \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{300}{50} \Rightarrow x = 20$ amigos deben participar en total. Por tanto, 15 compañeros más.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

6.81 Subida de precios

El gobierno de cierto país publica la siguiente tabla de índices con la que expresa la subida de precios de los productos de sus mercados.

2005	2006	2007	2008	2009
100	104	108	112	115

Al observar la tabla, se desprende que un artículo que en 2005 precisó 100 unidades monetarias para su compra, en 2006 necesitó 104 unidades, y en 2009, 115 unidades monetarias.

a) En el año 2005, una vivienda costó 150 000 unidades monetarias. Calcula su precio en los años 2006, 2007, 2008 y 2009.

b) En 2007, un ordenador costaba 650 unidades monetarias. ¿Cuánto costará un ordenador del mismo tipo en 2009?

c) Considerando el período de 2006 a 2009, ¿en qué año de este intervalo subieron más los precios con respecto a los del año anterior?

d) ¿Consideras que en 2005 subieron mucho o poco los precios?

a)

2005	2006	2007	2008	2009
150 000	156 000	162 000	168 000	172 500

b) $650 \cdot \dfrac{115}{108} \approx 692$ unidades monetarias

c) Observando los cocientes:

$\dfrac{104}{100} = 1{,}04$; $\dfrac{108}{104} = 1{,}038$; $\dfrac{112}{108} = 1{,}037$; $\dfrac{115}{112} = 1{,}027$

Se aprecia que el año que sufrió una mayor alza en los precios fue 2006.

d) No se puede saber, ya que no se conocen los datos del año anterior.

6.82 Reparto justo

En una carrera se ofrece un premio de 680 euros para repartir entre los tres primeros clasificados.

El comité organizativo ha aprobado los siguientes criterios:

- **El primer clasificado debe recibir más dinero que el segundo, y el segundo, más que el tercero.**
- **Cuantas más horas de entrenamiento certificadas por el inspector de la carrera, mayor premio se debe recibir.**

La tabla siguiente muestra el resultado de la prueba:

Corredor	Puesto	Entrenamiento
A	**2.°**	**4**
B	**1.°**	**2**
C	**3.°**	**5**

Finalmente, se decide que la cantidad a recibir sea directamente proporcional al cociente entre las horas de entrenamiento y el puesto conseguido.

Calcula cuánto dinero obtendrá cada corredor y comprueba si se han cumplido los criterios aprobados por el comité.

Se trata de un reparto proporcional *a* $\frac{4}{2} = 2,\ \frac{2}{1} = 2,\ \text{y}\ \frac{5}{3}$

Los corredores *A* y *B* reciben cada uno $\dfrac{680}{2 + 2 + \frac{5}{3}} \cdot 2 = 240$ euros.

El *C* recibe $\dfrac{680}{2 + 2 + \frac{5}{3}} \cdot \dfrac{5}{3} =$ euros.

Si se hubieran seguido los criterios iniciales, hubiera habido un conflicto de intereses ya que, según el primer criterio, el corredor *B* debería haber recibido una cantidad mayor, mientras que según el segundo criterio el mayor premio debería haber sido para el corredor *C*.

AUTOEVALUACIÓN

6.A1 Calcula la constante de proporcionalidad y completa la tabla correspondiente a dos magnitudes directamente proporcionales.

$k = \frac{5}{60}$

A	**1**	**2**	**5**	6
B	12	24	**60**	**72**

6.A2 Indica si las siguientes magnitudes son directa o inversamente proporcionales y calcula la constante de proporcionalidad.

a)

A	63	42	21
B	18	12	6

b)

C	160	40	20
D	16	64	128

a) Son directamente proporcionales porque: $\frac{63}{18} = \frac{42}{12} = \frac{21}{6} \Rightarrow k = 3{,}5$.

b) Son inversamente proporcionales porque: $160 \cdot 16 = 40 \cdot 64 = 20 \cdot 128 \Rightarrow k = 2560$.

6.A3 Calcula *x* en los siguientes casos:

a) *x* es el 8% del 17% de 3300. **b) El 64% de *x* es 140,80.** **c) El *x*% de 1600 es 576.**

a) $x = 0{,}08 \cdot 0{,}17 \cdot 3300 = 44{,}88$

b) $x = \frac{140{,}80 \cdot 100}{64} = 220$

c) $x = \frac{576 \cdot 100}{1600} = 36\%$

6.A4 Halla el importe del alquiler mensual de una vivienda por la que se pagaban 640 euros sabiendo que ha subido un 12%.

$640 \cdot 1{,}12 = 716{,}80$ € se paga actualmente.

6.A5 ¿Cuánto costará una lavadora de 425 euros que, por ser la de exposición, se encuentra rebajada un 18%?

$425 \cdot 0{,}82 = 348{,}50$ € costará después del descuento.

6.A6 Con 2 litros de leche, César puede alimentar a sus cachorros durante 6 días. ¿Para cuántos días tendrá comida si compra una caja de 5 litros de leche?

2 l de leche ———— 6 días

5 l de leche ———— x días

$$x = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15 \text{ días}$$

6.A7 Un empresario decide repartir unos beneficios de 4800 euros entre sus tres empleados de forma directamente proporcional al tiempo que llevan trabajando en la empresa: 2, 6 y 12 años. ¿Qué cantidad le corresponderá a cada uno?

$\frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{12} = \frac{4800}{20} \Rightarrow x = 480$ € para el que lleva 2 años en la empresa.

$y = 1440$ € para el que lleva 6 años.

$z = 2880$ € para el más antiguo.

6.A8 En un concurso de poesía se van a repartir 3300 euros entre los tres participantes con mejor puntuación. El reparto será de manera inversamente proporcional al lugar que ocupen en la clasificación. Calcula la cantidad que recibirá cada uno de ellos.

$k + \frac{1}{2}k + \frac{1}{3}k = 3300 \Rightarrow \frac{11}{6}k = 3300 \Rightarrow k = 1800$ euros

El primer clasificado se lleva 1800 €.

El segundo: $\frac{1}{2} \cdot 1800 = 900$ €.

El tercero: $\frac{1}{3} \cdot 1800 = 600$ €.

6.A9 Leo ha prestado 15 000 euros a un amigo, el cual se los devolverá en 16 meses con un interés simple del 0,3% anual. Halla la cantidad total que recibirá Leo.

$C = 15\,000 \cdot \left(1 + 16 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{0{,}3}{100}\right) = 15\,060$ € recibirá Leo.

6.A10 Calcula el interés que producen 2800 euros a un interés compuesto del 1,6% durante 5 años.

$C = 2800 \cdot \left(1 + \frac{1{,}6}{100}\right)^5 = 3031{,}28$ €

$i = 3031{,}28 - 2800 = 231{,}28$ € de interés

MATETIEMPOS

DIN A5

Al fotocopiar un folio A4 con una reducción del 71% pasa a ser un A5 (cuartilla). ¿Cuánto miden ahora su largo y su ancho? ¿En qué proporción se ha reducido su área?

Un folio A4 mide 21 centímetros de ancho y 29,7 centímetros de alto. Si reducimos un 71% estas dimensiones, se transformarán en:

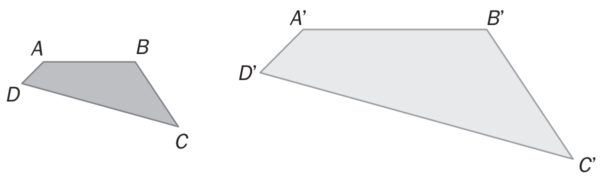
Ancho: $21 \times 0{,}71 = 14{,}9$ centímetros.

Alto: $29{,}7 \times 0{,}71 = 21$ centímetros.

El área de un folio A4 $= 21 \times 29{,}7 = 624$ cm^2, y el de una cuartilla A5 $= 14{,}9 \times 21 = 312$ cm^2. Esto quiere decir que A5 es la mitad de A4.

EJERCICIOS PROPUESTOS

7.1 Estos dos cuadriláteros son semejantes, con razón de semejanza 3. Calcula la razón de proporcionalidad que hay entre sus perímetros.



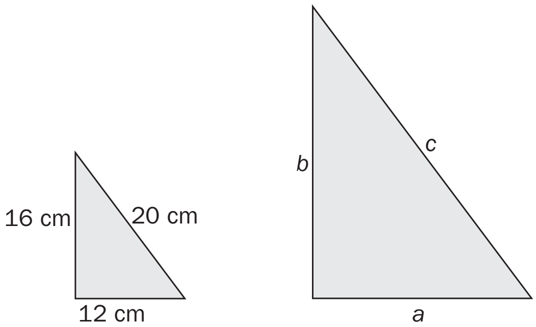
Se utiliza el teorema de Tales.

Si $A'B' = 3\ AB$; $B'C' = BC$;

$C'D' = 3\ CD$; $D'A' = 3\ DA$

$$\frac{P'}{P} = \frac{A'B' + B'C' + C'D' + D'A'}{AB + BC + CD + DA} = 3$$

7.2 Los lados de un triángulo miden 12, 16 y 20 centímetros.
Dibuja otro triángulo semejante a él sabiendo que su escala debe ser de 1:2.



Escala 1:2 $\rightarrow$ Razón de semejanza: 2

Por el teorema de Tales, los lados del triángulo dado y su semejante son proporcionales.

Los lados del triángulo buscado son:

$a = 24$ cm

$b = 32$ cm

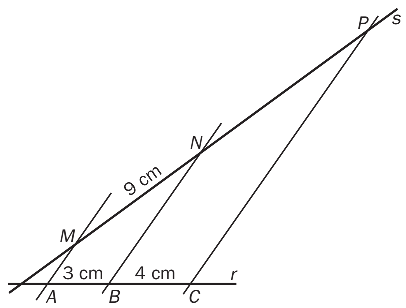
$c = 40$ cm

7.3 En una recta *r* hay tres puntos, *A*, *B* y *C*, que distan sucesivamente 3 y 4 centímetros. Por esos puntos se trazan rectas paralelas que cortan a la recta *s* en *M*, *N* y *P*. Si *MN* mide 9 centímetros, ¿cuánto mide el segmento *NP*?

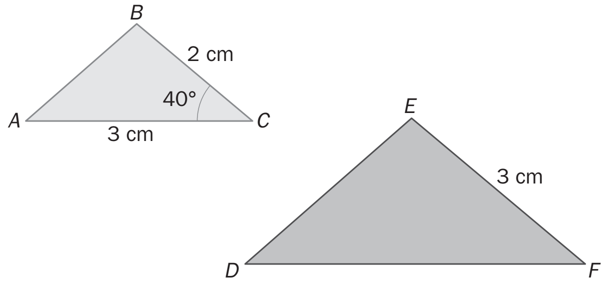
Se utiliza el teorema de Tales.

Razón de semejanza: $\frac{3}{9} = \frac{4}{NP}$

Por tanto, $NP = 12$ cm



7.4 Considera los triángulos *ABC* y *DEF*.
Halla la longitud del lado *DF* y la medida del ángulo $\widehat{F}$ de manera que ambos triángulos sean semejantes.
¿Qué criterio de semejanza has utilizado?



La razón de semejanza para lados homólogos ha de ser:

$$\frac{EF}{BC} = 1{,}5 \Rightarrow \frac{DF}{AC} = 1{,}5 \Rightarrow DF = 4{,}5 \text{ cm.}$$

Utilizando el tercer criterio de semejanza de triángulos, si *ABC* y *DEF* son semejantes:

$$\widehat{F} = \widehat{C} = 40°$$

7.5 Utiliza los criterios de semejanza para explicar si las siguientes frases son verdaderas o falsas.

a) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

b) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

c) Si dos triángulos isósceles tienen el mismo ángulo desigual, entonces son semejantes.

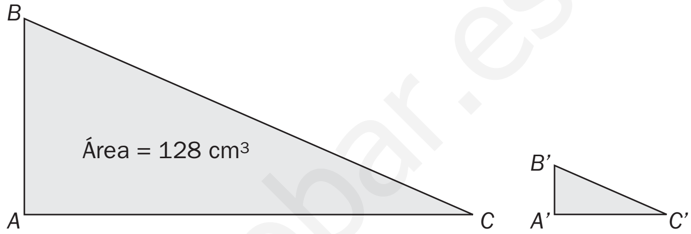
a) Verdadera. Los triángulos equiláteros tienen los tres lados iguales y, por tanto, los tres ángulos. Cumple el primer criterio de semejanza de triángulos.

b) Falsa. Por ser triángulos rectángulos, solo sabemos que tienen un ángulo igual. No cumplen ningún criterio de semejanza.

c) Verdadera. Un triángulo, por ser isósceles, tiene dos lados iguales y, por ello, dos ángulos también iguales.

Si dos triángulos isósceles tienen un ángulo igual, los otros dos también tienen que ser iguales. Cumplirían el primer criterio de semejanza.

7.6 El área de un triángulo *ABC* mide 128 m². ¿Cuál será el área de un triángulo semejante *A′B′C′* cuyos lados midan la mitad?



Los triángulos *ABC* y *A′B′C′* son semejantes.

Razón de semejanza del menor al mayor: $\dfrac{1}{2}$

Razón de áreas: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

Área del nuevo triángulo: $128 : 4 = 32$ cm²

7.7 De dos triángulos semejantes se sabe que en el primero, uno de sus ángulos mide 35°, y en el segundo, otro mide 55°. ¿Qué clase de triángulos son?

Si los triángulos son semejantes, tenemos 2 ángulos iguales, uno de 35° y otro de 55°. Si sumamos estos dos ángulos, el tercero valdrá 90°, por lo cual se tratará de triángulos rectángulos.

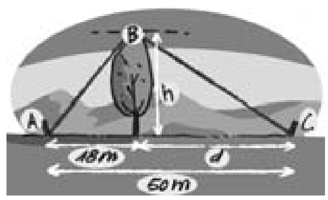
7.8 El árbol de la figura está sujeto con dos cuerdas, de manera que el triángulo *ABC* es rectángulo. Halla la altura del árbol y su distancia al punto *C*.

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$(BC)^2 = d^2 + h^2$, siendo $d = (50 - 18) = 32$ m

Si aplicamos el teorema de la altura:

$h^2 = 18 \cdot d = 18 \cdot 32 = 576 \Rightarrow h = 24$ m

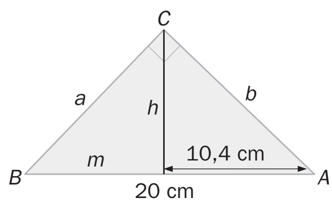


7.9 Halla el área y el perímetro del triángulo de la figura.

Puesto que el valor de la base es de 20 cm, se puede calcular $m = 9{,}6$ cm.

Aplicando el teorema de la altura, $h^2 = m \cdot n = 9{,}6 \cdot 10{,}4 \Rightarrow h = 9{,}99$ cm

El área pedida es: $A = \dfrac{20 \cdot 9{,}99}{2} = 99{,}92$ cm²



Se aplica Pitágoras para calcular los valores de a y b.

$$a = \sqrt{h^2 + m^2} = 13{,}85 \text{ cm} \qquad b = \sqrt{h^2 + n^2} = 14{,}42 \text{ cm}$$

Por tanto, el perímetro $P = 48{,}27$ cm

7.10 Expresa en grados los siguientes ángulos.

a) $\frac{\pi}{5}$ **rad** **c)** $\frac{\pi}{3}$ **rad**

b) 0,8 rad **d) 6 rad**

Equivalencia: 2π rad son 360°.

A partir de la relación fundamental se obtiene la siguiente equivalencia.

a) $\frac{\pi}{5}$ rad $= \frac{180°}{5} = 36°$ c) $\frac{\pi}{3}$ rad $= \frac{180°}{3} = 60°$

b) 0,8 rad = 46° d) 6 rad = 344°

7.11 Indica en radianes la medida de los siguientes ángulos.

a) 37° b) 142° c) 335° d) 225°

Se utiliza la equivalencia en radianes: $360° = 2\pi$.

a) 37° = 1,3 rad c) 335° = 5,8 rad

b) 142° = 2,5 rad d) 225° = 3,9 rad

7.12 Los lados de un triángulo *ABC* miden 5, 12 y 13 centímetros. Comprueba si es un triángulo rectángulo y halla las razones trigonométricas del ángulo de menor amplitud.

Si es un triángulo rectángulo, cumplirá el teorema de Pitágoras:

$12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$

Por tanto, se trata de un triángulo rectángulo.

El ángulo pequeño se opone al lado pequeño, que es el cateto que mide 5 cm.

Las razones trigonométricas de $\widehat{B}$ son:

$\cos \widehat{B} = \frac{12}{13}$ $\quad$ $\text{sen } \widehat{B} = \frac{5}{13}$ $\quad$ $\text{tg } \widehat{B} = \frac{5}{12}$

7.13 Utilizando la calculadora, halla el valor de *x* en los siguientes casos.

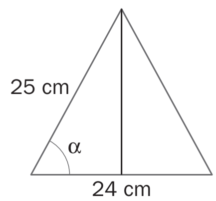
a) sen 40° = *x* **c) tg *x* = 1**

b) cos *x* = 0 **d) tg 225° = *x***

a) $x = 0,64$ c) $x = 45°$; $x = 225°$

b) $x = 90°$; $x = 270°$ d) $x = 1$

7.14 Calcula las razones trigonométricas del ángulo α.



$\cos \alpha = \frac{12}{25} = 0,48$

Se aplica la primera relación fundamental de la trigonometría para calcular el sen α:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 0,88$

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = 1,83$

7.15 Si el coseno de un ángulo agudo α es $\frac{\sqrt{2}}{3}$, calcula: a) sen α, b) tg α.

Se aplica la primera relación fundamental de la trigonometría:

$\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = 0,88$ $\quad$ $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = 1,87$

7.16 Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo α si su tangente es igual a $\sqrt{5}$.

Se usa la primera relación de la trigonometría para llegar a la siguiente expresión:

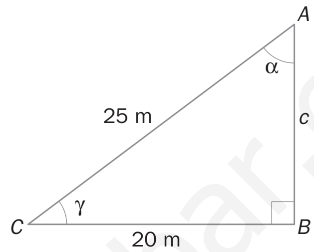
$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2 \alpha + 1}} = 0{,}41$$

Se utiliza la segunda relación fundamental, de manera que: $\text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha \cdot \cos \alpha = \sqrt{5} \cdot 0{,}41 = 0{,}91$.

7.17 Resuelve el triángulo de la figura.

Se usa el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15m$$



Se aplican las razones trigonométricas:

$$\text{sen } \alpha = \frac{20}{25} = 0{,}8 \Rightarrow \alpha = 53{,}13°$$

$$\cos \gamma = \frac{20}{25} = 0{,}8 \Rightarrow \gamma = 36{,}87°$$

7.18 De un triángulo rectángulo *ABC* se conoce la hipotenusa, que mide 15 centímetros, y uno de sus ángulos, β, que mide 20°. Resuelve el triángulo.

Puesto que es un triángulo rectángulo, habrá un ángulo de 90° y se puede calcular el que falta:

$$\alpha = 180° - (90° + 20°) \Rightarrow \alpha = 70°$$

Si se considera *a* el cateto opuesto al ángulo α, y *b* el cateto opuesto al ángulo β:

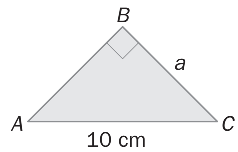
$$\text{sen } \alpha \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} \Rightarrow \alpha = 15 \cdot \text{sen } 20° \Rightarrow \alpha = 5{,}13 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow b = 15 \cdot \text{sen } 70° \Rightarrow b = 14{,}09 \text{ cm}$$

7.19 Halla los lados y ángulos que son incógnitas en este triángulo isósceles.

Por ser un triángulo rectángulo e isósceles, tiene un ángulo recto y los otros dos ángulos con el mismo valor.

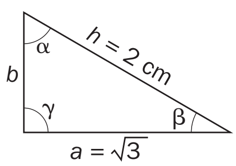
$$\widehat{A} = 45° \quad \widehat{B} = 90° \quad \widehat{C} = 45°$$



Los lados *a* y *c* miden lo mismo por ser triángulo isósceles, y por ser rectángulo se puede aplicar el teorema de Pitágoras.

$$10^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow 100 = 2a^2 \Rightarrow a = 7{,}07 \text{ cm} \Rightarrow c = 7{,}07 \text{ cm}$$

7.20 Dibuja un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 2 centímetros, y uno de sus catetos, $\sqrt{3}$. Halla la medida del resto de elementos que faltan para resolver el triángulo.



El cateto que falta se calcula con la aplicación del teorema de Pitágoras.

$$h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 1 \text{ cm}$$

Para calcular los ángulos, $\gamma = 90°$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60°; \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = 30°$$

7.21 Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo miden 18 y 32 metros. Resuelve el triángulo.

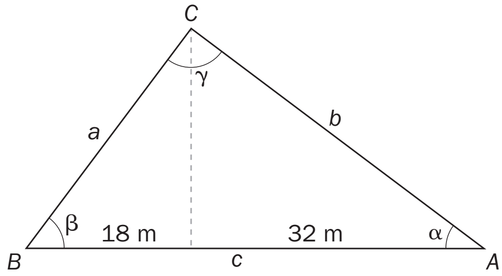
Se aplica el teorema de la altura para calcular h.

$$h^2 = 18 \cdot 32 \Rightarrow h = 24 \text{ m}$$

Sabido el valor de h, se aplica el teorema de Pitágoras para calcular a y b:

$$a = \sqrt{18^2 + 24^2} \Rightarrow a = 30 \text{ m}$$

$$b = \sqrt{32^2 + 24^2} \Rightarrow b = 40 \text{ m}$$

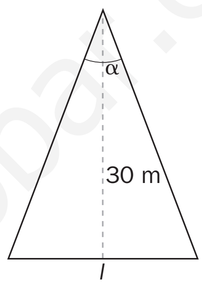


$\gamma = 90°$ sen $\alpha = \dfrac{24}{40} \Rightarrow \alpha = 36{,}9°$ sen $\beta = \dfrac{24}{30} \Rightarrow \beta = 53{,}1°$

7.22 Un arquitecto quiere construir en una fachada de una plaza un rosetón con forma de polígono regular de 20 lados. Sabiendo que su radio medirá 30 metros, ¿cuánto medirá el lado del rosetón?

Puesto que un ángulo completo son 360°, $\alpha = 180 : 20 = 9°$.

$$\frac{\alpha}{2} = 4{,}5° \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{x}{2}}{r} \Rightarrow l = 4{,}7 \text{ m}$$

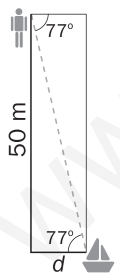


7.23 Los brazos de un compás miden 12 centímetros. ¿Qué ángulo forman cuando se traza un arco de 7 centímetros de radio?

Se forma un triángulo, siendo α el ángulo que forman los brazos del compás.

Se aplica la ley de la trigonometría, $\text{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\frac{7}{2}}{12} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 16{,}96 \Rightarrow \alpha = 33{,}92°$

7.24 Desde el borde de un acantilado de 50 metros de altura, Mario observa, bajo un ángulo de 77°, un velero fondeado cerca de la playa. ¿A qué distancia del acantilado se encuentra la embarcación?



Se aplica la ley de la trigonometría,

$$\text{tg } 77° = \frac{50}{d} \Rightarrow d = 11{,}54 \text{ m}$$

7.25 Se quiere calcular la altura de un castillo medieval. Utilizando un teodolito, el ángulo de elevación observado es de 55°.

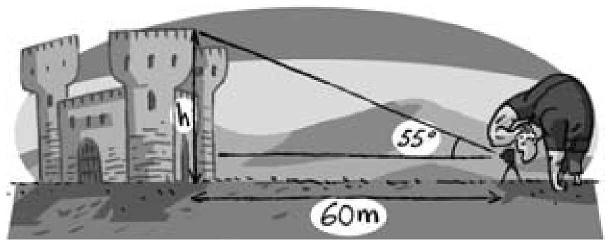
Sabiendo que el visor del teodolito está a 1,20 metros del suelo, calcula la altura del castillo.

La altura del castillo desde el visor del trípode es x.

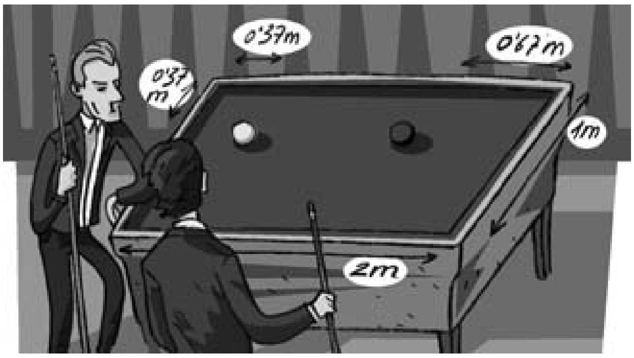
Por definición de tangente se tiene: $\text{tg } 55° = \dfrac{x}{60}$

Se opera: $x = 60 \cdot \tan 55° = 85{,}69$ m

Altura del castillo: $85{,}69 + 1{,}20 = 86{,}89$ m



7.26 Si el jugador quiere golpear primero la banda derecha, ¿a qué distancia de la banda inferior debe apuntar?



La proporción entre los lados de los triángulos semejantes es:

$$\frac{4}{15} = \frac{x}{5} \rightarrow x = \frac{4}{3}.$$

Hay que apuntar a unos $2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}66$ metros de la banda inferior.

7.27 Ahora quiere golpear primero en la banda superior. ¿Cuál debe ser el movimiento de la bola blanca?

Se observa el dibujo del ejercicio anterior.

La proporción entre los lados de los triángulos semejantes es:

$$\frac{7}{6} = \frac{x}{1} \rightarrow x = \frac{7}{6}.$$

Hay que apuntar a unos $1 + \frac{7}{6} = \frac{13}{6} \approx 2{,}16$ metros de la banda inferior.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Figuras semejantes. Teorema de Tales

7.28 Calcula el valor de *a* y *b* para que los siguientes pares de triángulos sean semejantes.

a) 3, *a*, 5 y 1,5; 2; *b*

b) 3, *a*, 8 y $\frac{6}{5}$, $\frac{14}{5}$, *b*

c) 45°, 75°, 60° y 75°, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$

a) $\frac{3}{1{,}5} = \frac{a}{2} = \frac{5}{b} \Rightarrow a = \frac{3 \cdot 2}{1{,}5} = 4 \quad \Rightarrow b = \frac{5 \cdot 1{,}5}{3} = 2{,}5$

b) $\frac{3}{\frac{6}{5}} = \frac{a}{\frac{14}{5}} = \frac{8}{b} \Rightarrow a = \frac{3 \cdot \frac{14}{5}}{\frac{6}{5}} = 7 \Rightarrow b = \frac{8 \cdot \frac{6}{5}}{3} = 16$

c) $\widehat{A} = 45°$ y $\widehat{B} = 60°$

7.29 El perímetro de un cuadrado mide 32 centímetros.

a) Halla las medidas de los lados de un cuadrilátero semejante a él si la razón de semejanza es $k = \frac{1}{2}$.

b) ¿Cuál es la razón de sus áreas?

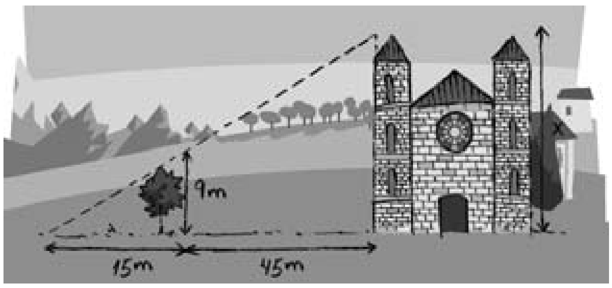
a) El lado del cuadrado es $32 : 4 = 8$ cm, y el del semejante, $8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ cm

b) $k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

7.30 La arista de un cubo mide 8 metros. Halla la medida de la arista de otro cubo semejante a él si la razón de sus volúmenes es $\frac{1}{27}$.

La razón de los volúmenes es $k^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$.

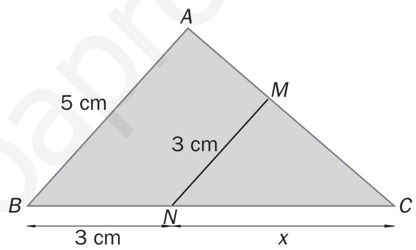
7.31 Calcula la altura de la torre de la iglesia.



$$\frac{9}{15} = \frac{h}{60}$$

$h = \frac{9 \cdot 60}{15} = 36$ m mide la torre.

7.32 Si los segmentos *AB* y *MN* son paralelos, halla la medida del lado *BC*.



$$\frac{3}{x} = \frac{5}{3 + x}$$

$9 + 3x = 5x \Rightarrow 9 = 2x$

$x = 4,5$ cm

Semejanza de triángulos

7.33 Los triángulos *ABC* y *A′B′C′* son semejantes. Calcula el valor que se pide en cada caso.
a) *b* y *c′*, si *a* mide 9 centímetros, *c* mide 12; *a′*, 4,5, y *b′*, 3,5 centímetros.
b) $\widehat{A}$, $\widehat{C}$, $\widehat{B}'$ y $\widehat{C}'$, si $\widehat{B} = 38°$ y $\widehat{A}' = 92°$.
c) *a* y $\widehat{B}'$, si *c* mide 18 centímetros; *a′*, 30; *c′*, 6, y $\widehat{B} = 105°$.

a) $\frac{9}{4,5} = \frac{b}{3,5} = \frac{12}{c'} \Rightarrow b = \frac{9 \cdot 3,5}{4,5} = 7 \text{ cm} \Rightarrow b = \frac{12 \cdot 4,5}{9} = 6 \text{ cm}$

b) $\widehat{A} = \widehat{A}' = 92°$; $\widehat{B} = \widehat{B}' = 38°$; $\widehat{C} = \widehat{C}' = 180° - (92° + 38°) = 50°$

c) $\frac{a}{30} = \frac{18}{6} \Rightarrow c = \frac{30 \cdot 18}{6} = 90 \text{ cm}$

$\widehat{B}' = \widehat{B} = 105°$

7.34 En un triángulo rectángulo, los catetos miden 3 y 4 decímetros, y en otro, un cateto mide 6 decímetros, y la hipotenusa, 10. ¿Son semejantes?

La hipotenusa del triángulo de catetos 3 y 4: $a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm.

Si son semejantes, la razón de semejanza es $k = 10 : 5 = 2$.

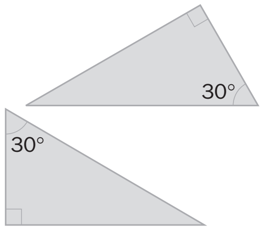
El cateto desconocido del triángulo semejante es: $c = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ dm.

Los lados del segundo triángulo miden el doble que los lados del primero.

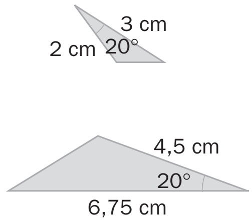
Por tanto, sí son semejantes.

7.35 Determina si los siguientes pares de triángulos son semejantes indicando, en caso afirmativo, el criterio de semejanza utilizado.

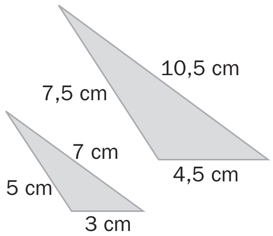
a)



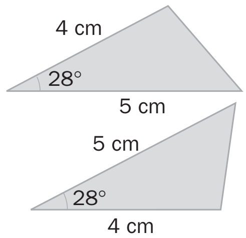
c)



b)



d)



a) Son semejantes porque los ángulos son iguales.

b) Son semejantes porque los lados son proporcionales.

c) Son semejantes porque tienen dos lados proporcionales, y el ángulo comprendido entre ellos, igual.

d) Son iguales porque tienen dos lados iguales y el ángulo que forman también igual. Por tanto, son semejantes de razón de semejanza igual a 1.

Medida de ángulos

7.36 Expresa en radianes la medida de estos ángulos.

a) 30° **b) 240°** **c) 90°** **d) 270°** **e) 135°** **f) 300°**

a) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{30°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 30}{360} = \dfrac{\pi}{6}$ rad

b) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{240°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 240}{360} = \dfrac{4\pi}{3}$ rad

c) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{90°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 90}{360} = \dfrac{\pi}{2}$ rad

d) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{270°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 270}{360} = \dfrac{3\pi}{2}$ rad

e) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{135°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 135}{360} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad

f) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{300°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 300}{360} = \dfrac{5\pi}{3}$ rad

7.37 Indica la medida en el sistema sexagesimal de los siguientes ángulos expresados en radianes.

a) $\boldsymbol{\pi}$ **b)** $\boldsymbol{\dfrac{5\pi}{6}}$ **c)** $\boldsymbol{\dfrac{7\pi}{4}}$ **d)** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{8}}$ **e)** $\boldsymbol{\dfrac{4\pi}{3}}$ **f)** $\boldsymbol{\dfrac{7\pi}{11}}$

a) $\dfrac{360°}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\pi\text{rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot \pi}{2\pi} = 180°$

b) $\dfrac{360°}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{5\pi}{6}\text{ rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 5\pi}{12\pi} = 150°$

c) $\dfrac{360°}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{7\pi}{4}\text{ rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 7\pi}{8\pi} = 215°$

d) $\dfrac{360°}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{\pi}{8}\text{ rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot \pi}{16\pi} = 22{,}5° = 22°30'$

e) $\dfrac{360°}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{4\pi}{3}\text{ rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 4\pi}{6\pi} = 240°$

f) $\dfrac{360°}{2\pi\text{rad}} = \dfrac{x}{\dfrac{7\pi}{11}\text{ rad}} \Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 7\pi}{2\pi \cdot 11} = 114°$

7.38 Calcula en grados, minutos y segundos sexagesimales la medida de los siguientes ángulos expresados en radianes.

a) $\frac{2\pi}{13}$ **b)** $\frac{9\pi}{17}$ **c)** $\frac{5\pi}{7}$

a) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{2\pi}{13}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 2\pi}{2\pi \cdot 13} = 27°\ 41'\ 32.31''$

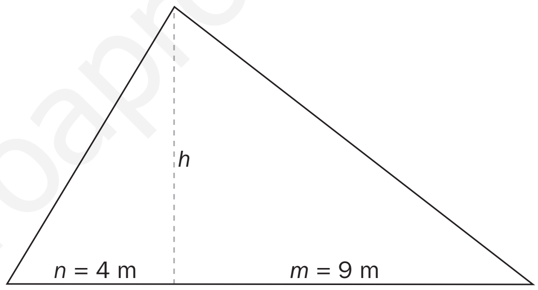
b) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{9\pi}{17}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 9\pi}{2\pi \cdot 17} = 95°\ 17'\ 38.82''$

c) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{5\pi}{7}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 5\pi}{2\pi \cdot 7} = 128°\ 34'\ 17.1''$

Relaciones métricas en triángulos rectángulos

7.39 Calcula la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que las proyecciones de los catetos sobre ella miden 4 y 9 metros.

$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h^2 = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow h = 6$ m



7.40 Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 6,4 y 3,6 centímetros. Halla la longitud de los lados.

$c = 6{,}4 + 3{,}6 = 10$ cm mide la hipotenusa

$a^2 = m \cdot c \Rightarrow a^2 = 6{,}4 \cdot 10 = 64 \Rightarrow a = 8$ cm

$b^2 = n \cdot c \Rightarrow b^2 = 3{,}6 \cdot 10 = 36 \Rightarrow b = 6$ cm

7.41 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 centímetros, y la proyección de uno de los catetos sobre ella, 4. Calcula la medida de los catetos.

$c = m + n \Rightarrow n = 20 - 4 = 16$ cm

$a^2 = m \cdot c \Rightarrow a^2 = 4 \cdot 20 = 80 \Rightarrow a = 8{,}94$ cm

$b^2 = n \cdot c \Rightarrow b^2 = 16 \cdot 20 = 320 \Rightarrow b = 17{,}89$ cm

7.42 Calcula los lados de un triángulo rectángulo cuyas proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 32 y 8 centímetros.

Hipotenusa: $c = 32 + 8 = 40$ cm

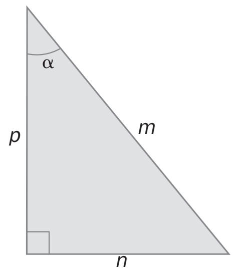
$a^2 = m \cdot c \Rightarrow a^2 = 32 \cdot 40 = 1280 \Rightarrow a = 35{,}78$ cm

$b^2 = n \cdot c \Rightarrow b^2 = 8 \cdot 40 = 320 \Rightarrow b = 17{,}89$ cm

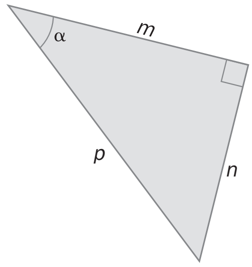
Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

7.43 Escribe, en función de *m*, *n* y *p*, el seno, el coseno y la tangente del ángulo α en estos triángulos.

a)



b)



a) $\text{sen } \alpha = \dfrac{n}{m}$; $\cos \alpha = \dfrac{p}{m}$; $\text{tg } \alpha = \dfrac{n}{p}$

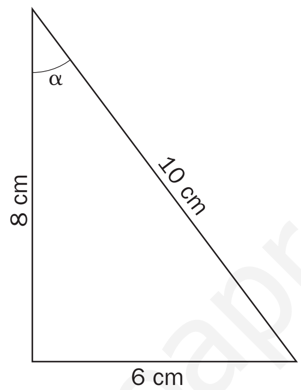
b) $\text{sen } \alpha = \dfrac{n}{p}$; $\cos \alpha = \dfrac{m}{p}$; $\text{tg } \alpha = \dfrac{n}{m}$

7.44 La hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo miden 10, 8 y 6 decímetros. ¿Cuáles son las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud del triángulo?

$$\text{sen } \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$



7.45 Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo α si $\text{sen } \alpha = 0{,}6$.

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 0{,}6^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0{,}36 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$$

7.46 Halla el seno y la tangente de un ángulo agudo α cuyo coseno es $\dfrac{4}{5}$.

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \text{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

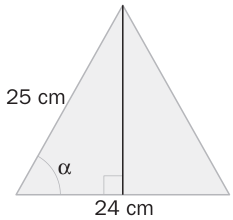
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

7.47 Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo α si su tangente es igual a $\sqrt{5}$.

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \sqrt{5}^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\sqrt{5} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha}{\frac{\sqrt{6}}{6}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

7.48 Calcula las razones trigonométricas del ángulo α.



$h = \sqrt{25^2 - 12^2} = 21,93$ cm

$\text{sen } \alpha = \dfrac{21,93}{25} = 0,8772$

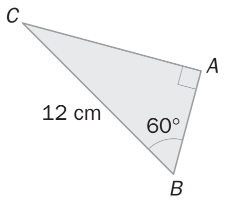
$\cos \alpha = \dfrac{12}{25} = 0,48$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{21,93}{12} = 1,8295$

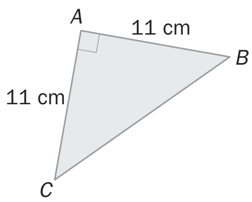
Resolución de triángulos rectángulos

7.49 Calcula la medida de los lados y los ángulos que faltan en los siguientes triángulos rectángulos.

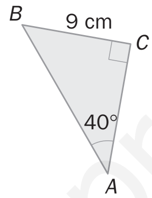
a)



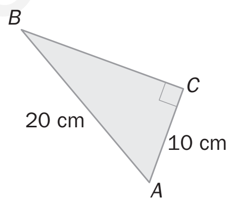
b)



c)



d)



a) $\text{sen } 60\ \alpha = \dfrac{b}{12} \Rightarrow b = 12 \cdot \text{sen } 60° = 12 \cdot \dfrac{1}{2} = 6$ cm

$\widehat{A} = 90° - 30° = 60°$

$\cos 60° = \dfrac{a}{12} \Rightarrow a = 12 \cdot \cos 60° = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10,39$ cm

b) $\text{sen } 40° = \dfrac{9}{c} \Rightarrow c = \dfrac{9}{\text{sen } 40°} = 14$ cm

$\widehat{A} = 90° - 40° = 50°$

$\cos 40° = \dfrac{a}{14} \Rightarrow a = 12 \cdot \cos 40° = 9,19$ cm

c) $\text{tg } \widehat{A} = \dfrac{11}{11} = 1 \Rightarrow \widehat{A} = 45° = \widehat{B}$

$c^2 = 11^2 + 11^2 \Rightarrow c = \sqrt{242} = 15,56$ cm

d) $\cos \widehat{A} = \dfrac{10}{20} \Rightarrow \widehat{A} = 60°$

$\widehat{B} = 90° - 60° = 30°$

$b^2 = 20^2 - 10^2 \Rightarrow c = \sqrt{300} = 17,32$ cm

7.50 Resuelve estos triángulos sabiendo que $\widehat{C} = 90°$.

a) $\widehat{A} = 55°$, $a = 18$ cm
b) $c = 10$ cm, $b = 6$ cm
c) $a = 18$ cm, $b = 15$ cm

a) $\text{sen } 55° = \dfrac{18}{c} \Rightarrow c = \dfrac{18}{\text{sen } 55°} = 21{,}97$ cm

$\widehat{A} = 90° - 55° = 35°$

$\text{tg } 55° = \dfrac{18}{b} \Rightarrow b = \dfrac{18}{\text{tg } 55°} = 12{,}60$ cm

b) $\cos \widehat{A} = \dfrac{6}{10} \Rightarrow \widehat{A} = 53{,}13° \Rightarrow \widehat{B} = 90° - 53{,}13° = 36{,}87°$

$a^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow a = \sqrt{64} = 8$ cm

c) $\text{tg } \widehat{A} = \dfrac{18}{15} \Rightarrow \widehat{A} = 50{,}19° \Rightarrow \widehat{B} = 90° - 50{,}19° = 39{,}81°$

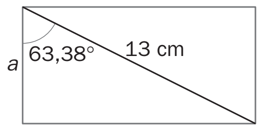
$c^2 = 18^2 + 15^2 \Rightarrow c = \sqrt{549} = 23{,}43$ cm

7.51 Halla la longitud de la altura de un triángulo equilátero de 12 centímetros de lado.

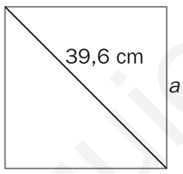
$h^2 = 12^2 - 6^2 \Rightarrow h = \sqrt{108} = 10{,}39$ cm

7.52 Calcula el valor del lado *a*.

a)



b)



a) $a = 13 \cdot \cos 63{,}38° = 5{,}82$ cm

b) $a = 39{,}6 \cdot \cos 45° = 28$ cm

7.53 La diagonal mayor de un rombo mide 8 centímetros y forma con cada lado contiguo un ángulo de 26,4°. ¿Cuánto mide el lado del rombo?

$$\cos 26{,}54° = \frac{4}{c} \Rightarrow c = \frac{4}{\cos 26{,}54°} = 4{,}47 \text{ cm mide el lado.}$$

C U E S T I O N E S   P A R A   A C L A R A R S E

7.54 Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Todos los cuadrados son semejantes.
b) Los ángulos de dos triángulos semejantes son proporcionales.
c) Todas las circunferencias son semejantes.
d) Los polígonos iguales son semejantes y su razón de semejanza es 1.

a) Verdadera.

b) Falsa. Los ángulos son iguales.

c) Verdadera. Siempre están en la misma proporción el radio y el perímetro. El área guarda esa proporción al cuadrado.

d) Verdadera, ya que si son polígonos iguales, tienen lados y ángulos respectivamente iguales.

7.55 **Dos triángulos son semejantes y la razón de semejanza es 3. Uno de ellos tiene un área de 6 unidades cuadradas. ¿Cuántas corresponden al área del otro? Elige la respuesta correcta.**

a) 40

b) 54

c) 200

Si la razón de semejanza es 3, la razón de las áreas es $3^2 = 9$. Por tanto, el área del otro triángulo es $6 \cdot 9 = 54$ unidades cuadradas.

7.56 **Comprueba si existe un ángulo α tal que sen $\alpha = \frac{1}{4}$ y cos $\alpha = \frac{3}{4}$.**

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1+9}{16} \neq 1$$

No puede existir.

7.57 **Si las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo tienen la misma medida, ¿cómo es el triángulo? ¿Cuánto miden sus ángulos agudos?**

Las hipotenusas correspondientes a los dos triángulos rectángulos que se forman son iguales, por lo que será un triángulo isósceles. Sus ángulos agudos miden 45°.

7.58 **Los lados de un triángulo miden 45, 27 y 36 centímetros. Demuestra que el seno de uno de sus ángulos es $\frac{3}{5}$. ¿Cuáles son las otras dos razones trigonométricas de ese ángulo?**

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{27}{45} = \frac{3}{5}$$

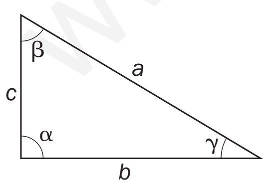
$$\cos\alpha = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

7.59 **¿Se puede resolver un triángulo conociendo solo sus ángulos? Razona tu respuesta.**

No, porque los triángulos semejantes tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales, y si no se conoce uno de los lados, es imposible determinar de cuál de todos los semejantes se trata.

7.60 **¿Qué relación existe entre las tangentes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?**



$\text{tg}\,B = \frac{b}{c}$; $\text{tg}\,C = \frac{c}{b}$

Son inversas.

7.61 **Explica si es posible resolver un triángulo rectángulo conociendo la altura sobre la hipotenusa y la proyección de uno de los catetos sobre ella.**

Con esos datos se puede calcular la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa, y esta, al sumar las dos proyecciones.

Luego se calculan los catetos con el teorema del cateto y con los tres lados se pueden hallar los ángulos del triángulo.

Por tanto, sí es posible resolverlo.

7.62 El logotipo de una empresa tiene la forma de un hexágono cuyos lados miden 3, 4, 5, 7, 8 y 9 centímetros.

En los carteles publicitarios se quiere dibujar un hexágono semejante de 117 centímetros de perímetro. ¿Cuánto miden los lados homólogos?

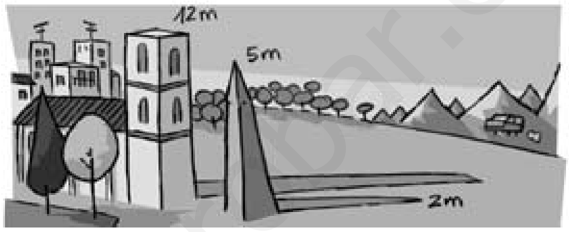
Perímetro del hexágono: $3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36$ cm

La razón de semejanza es $\frac{117}{36} = 3{,}25$.

Los lados del hexágono en los carteles publicitarios medirán:

$3 \cdot 3{,}25 = 9{,}75$ cm; $4 \cdot 3{,}25 = 13$ cm; $5 \cdot 3,\ 25 = 16{,}25$ cm; $6 \cdot 3{,}25 = 19{,}5$ cm; $7 \cdot 3{,}25 = 22{,}75$ cm; $9 \cdot 3{,}25 = 29{,}25$ cm.

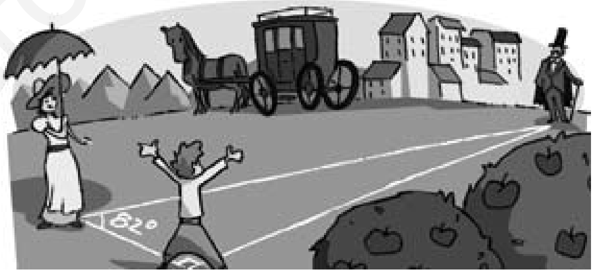
7.63 A la misma hora del día se miden las sombras que proyectan la torre del reloj y el obelisco de una plaza. Halla la altura de la torre.



$$\frac{12}{x} = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{12 \cdot 2}{5} = 4{,}8 \text{ m mide el obelisco.}$$

7.64 Para medir la distancia entre dos puntos muy alejados *A* y *B*, se han situado dos personas sobre ellos. Una tercera persona, una mujer, está en un punto *C*, a 50 metros de distancia de *A*. Calcula la distancia que separa los puntos *A* y *B*.



Si a es la distancia que separa los puntos A y B:

$$\text{tg } 82° = \frac{a}{50} \Rightarrow a = 50 \cdot \text{tg } 82° = 355{,}77 \text{ m}$$

7.65 El tronco de una palmera mide 3,5 metros y crece de forma inclinada debido al peso de la parte superior. La perpendicular desde su parte más alta hasta la tierra mide 2 metros. Calcula el ángulo de inclinación del tronco respecto a la vertical.

$$\cos a = \frac{20}{35} \Rightarrow a = 55{,}15°$$

7.66 Cuando se hace una fotografía con una cámara compacta, se produce un paralaje: la imagen que captura el visor no coincide con la del objetivo porque no están situados a la misma distancia. Calcula el ángulo α que mide este error.

$$\text{sen } \alpha = \frac{17{,}5}{2000} = 0{,}00875 \Rightarrow a = 30'\ 4{,}84''$$

7.67 Se invierten 6 segundos en la observación de un avión que sobrevuela un punto de la Tierra. En ese intervalo de tiempo, la aeronave ha cambiado ligeramente de posición.

Si el avión se observa perpendicularmente a una altura de 1350 metros y lleva una velocidad de 600 kilómetros por hora, ¿qué ángulo diferencia las dos visuales del observador?

La distancia entre las dos posiciones del avión es: $s = 600 \text{ km/h} \cdot 6 \text{ seg} = \dfrac{600\,000}{3600} \text{ m/s} \cdot 6 \text{ s} = 1000 \text{ m}$

El ángulo que diferencia las visuales es α: $\text{tg } \alpha = \dfrac{1}{1350} \Rightarrow \alpha = 2'\ 32{,}79''$

7.68 En el momento del día en que los rayos del sol forman un ángulo de 60° con la horizontal, la sombra que proyecta un árbol en el suelo es de 2,6 metros. ¿Cuánto mide el árbol?

Si h es la altura del árbol, $\text{tg } 60° = \dfrac{h}{2{,}6} \Rightarrow h = 2{,}6 \cdot \text{tg } 60° = 4{,}5 \text{ m}$

7.69 Unas cigüeñas han construido su nido sobre el tejado de un edificio a 25 metros del suelo. Un chico lo observa desde un punto situado a 50 metros del edificio. Calcula el ángulo de observación.

$$\text{tg } \alpha = \frac{25}{50} \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$$

7.70 Para realizar prácticas de óptica, un estudiante que mide 1,70 metros, situado a 12 metros de un edificio, coloca frente a sus ojos una regla vertical de 25 centímetros con la que oculta exactamente la altura del mismo.

Si la distancia del ojo a la regla es de 40 centímetros, calcula la altura del edificio.

$$\frac{x}{12} = \frac{0{,}25}{0{,}4} \Rightarrow x = 7{,}5 \text{ m es la altura del edificio.}$$

7.71 Alba va a poner una bombilla de bajo consumo en una lámpara que está situada a 2 metros del suelo.

Alba mide 1,53 metros, y cada lado de la escalera, 70 centímetros. Averigua si alcanza con ella para poner la bombilla.

Al abrir la escalera, sus lados forman con el suelo un triángulo isósceles. La altura del triángulo es la misma a la que estará el último peldaño una vez abierta.

$$\text{sen } 50° = \frac{h}{70} \Rightarrow h = 70 \cdot \text{sen } 50° = 53{,}62 \text{ cm.}$$

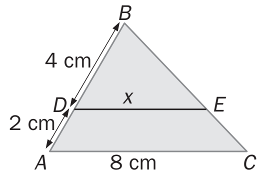
La altura a la que llegará la cabeza de Alba es:

$$53{,}62 + 153 = 206{,}62 \text{ cm}$$

Por tanto, llegará para cambiar la bombilla sin esfuerzo.

Figuras semejantes. Teorema de Tales. Semejanza de triángulos

7.72 Halla el valor de x sabiendo que los lados *AB* y *DE* son paralelos.



$$\frac{4}{x} = \frac{6}{8}$$

$$x = \frac{8 \cdot 4}{6} = 5{,}33 \text{ cm}$$

7.73 La razón de las áreas de dos hexágonos regulares es $\frac{49}{36}$. Si el lado de uno de ellos mide 18 centímetros, ¿cuál es el perímetro del otro?

$$\frac{49}{36} = \frac{x}{18} \Rightarrow x = 24{,}5 \text{ cm mide el lado del otro.}$$

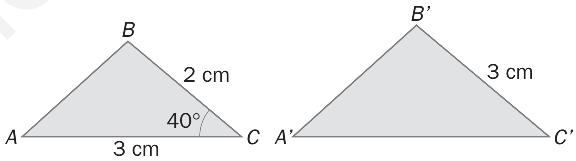
El perímetro: $P = 6 \cdot 24{,}5 = 27$ cm

7.74 Los perímetros de dos triángulos isósceles son de 15 y 5 centímetros, respectivamente. ¿Cuál es la razón de semejanza?

La razón de semejanza y la razón de los perímetros es la misma: $k = \frac{15}{5} = 3$.

7.75 Considera los triángulos *ABC* y *A′B′C′*.
¿Cuánto deben medir el lado *A′C′* y el ángulo *C′* para que sean dos triángulos semejantes? ¿Qué criterio de semejanza utilizas?

La razón de semejanza es 3 : 2 = 1,5.



$A'C' = 3 \cdot 1{,}5 = 4{,}4$ cm

$\widehat{C}' = \widehat{C} = 40°$

Medida de ángulos

7.76 Calcula la medida en radianes de estos ángulos.

a) 36° b) 20° c) 216° d) 160° e) 324° f) 290°

a) $\frac{2\pi \text{rad}}{360°} = \frac{x}{36°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 36}{360} = \frac{\pi}{5}$ rad

b) $\frac{2\pi \text{rad}}{360°} = \frac{x}{20°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 20}{360} = \frac{\pi}{9}$ rad

c) $\frac{2\pi \text{rad}}{360°} = \frac{x}{216°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 216}{360} = \frac{6\pi}{5}$ rad

d) $\frac{2\pi \text{rad}}{360°} = \frac{x}{160°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 160}{360} = \frac{8\pi}{9}$ rad

e) $\frac{2\pi \text{rad}}{360°} = \frac{x}{324°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 324}{360} = \frac{9\pi}{5}$ rad

f) $\frac{2\pi \text{rad}}{360°} = \frac{x}{290°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 290}{360} = \frac{29\pi}{18}$ rad

7.77 **Expresa en grados:**

a) 4π **rad**

b) $\frac{9\pi}{4}$ **rad**

c) $\frac{7\pi}{9}$ **rad**

d) $\frac{13\pi}{6}$ **rad**

e) $\frac{5\pi}{12}$ **rad**

f) $\frac{11\pi}{5}$ **rad**

a) $\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{4\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 4\pi}{2\pi} = 720°$

b) $\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{9\pi}{4} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 9\pi}{8\pi} = 405°$

c) $\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{7\pi}{9} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 7\pi}{18\pi} = 140°$

d) $\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{13\pi}{6} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 13\pi}{12\pi} = 390°$

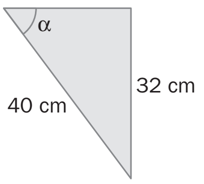
e) $\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{5\pi}{12} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 5\pi}{24\pi} = 75°$

f) $\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{11\pi}{5} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 11\pi}{10\pi} = 396°$

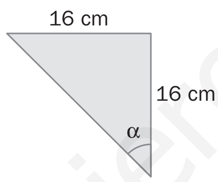
Razones métricas y trigonométricas en triángulos rectángulos

7.78 **Halla las razones trigonométricas del ángulo α en los siguientes triángulos rectángulos.**

a)



b)



a) Si b es el cateto que falta: $b = \sqrt{40^2 - 32^2} = 24$

$\text{sen } \alpha = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$; $\cos \alpha = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$; $\text{tg } \alpha = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$

b) Si a es la hipotenusa: $a = \sqrt{16^2 + 16^2} = \sqrt{2 \cdot 16^2} = 16\sqrt{2}$

$\text{sen } \alpha = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \alpha = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg } \alpha = \frac{16}{16} = 1$

7.79 **Calcula la tangente del ángulo agudo α en cada caso.**

a) si $\cos \alpha = 0{,}2$

b) si $\text{sen } \alpha = \frac{5}{8}$

a) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 0{,}2^2 + \text{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - 0{,}04 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{0{,}96} = 0{,}98$

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0{,}98}{0{,}2} = 4{,}9$

b) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{64} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{\sqrt{39}}{8}} = \frac{5\sqrt{39}}{39}$

7.80 Halla el área y el perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 20 centímetros, y la proyección de uno de los catetos sobre ella, 9,6 centímetros.

El cateto cuya proyección es 9,6, b: $b^2 = 9{,}6 \cdot 20 \Rightarrow b = 13{,}86$.

La proyección del otro cateto sobre la hipotenusa, m: $m = 20 - 9{,}6 = 10{,}4$.

El cateto, c: $c^2 = 10{,}4 \cdot 20 \Rightarrow c = 14{,}42$.

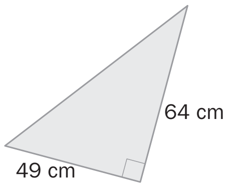
$$P = 14{,}42 + 13{,}86 + 20 = 48{,}28 \text{ cm}$$

$$A = \frac{13{,}86 \cdot 14{,}42}{2} = 99{,}93 \text{ cm}^2$$

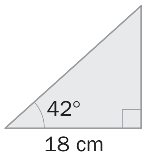
Resolución de triángulos rectángulos

7.81 Calcula las medidas de los ángulos y de los lados desconocidos de estos triángulos.

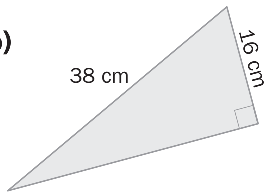
a)



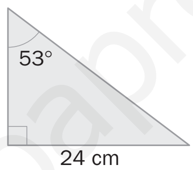
c)



b)



d)



a) $c = \sqrt{49^2 + 64^2} = 80{,}60$ cm

$\operatorname{tg} \widehat{A} = \dfrac{64}{49} \Rightarrow \widehat{A} = 52{,}56°$

$\widehat{B} = 90° - 52{,}56° = 37{,}44°$

b) $\widehat{B} = 90° - 42° = 48°$

$\operatorname{tg} 42° = \dfrac{x}{18} \Rightarrow x = 16{,}21$ cm

$c = \sqrt{18^2 + 16{,}21^2} = 24{,}22$ cm

c) $a = \sqrt{38^2 - 16^2} = 34{,}47$ cm

$\operatorname{sen} \widehat{A} = \dfrac{16}{38} \Rightarrow \widehat{A} = 24{,}90°$

$\widehat{B} = 90° - 24{,}90° = 65{,}1°$

d) $\widehat{B} = 90° - 53° = 37°$

$\operatorname{tg} 53° = \dfrac{24}{x} \Rightarrow x = 18{,}09$ cm

$c = \sqrt{24^2 + 18{,}09^2} = 30{,}05$ cm

7.82 Resuelve el triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 26 centímetros, y uno de los ángulos agudos, 74°.

$\operatorname{sen} 74° = \dfrac{x}{26} \Rightarrow x = 26 \cdot \operatorname{sen} 74° = 25$ cm

$\cos 74° = \dfrac{y}{26} \Rightarrow y = 26 \cdot \cos 74° = 7{,}17$ cm

Los ángulos miden: $\widehat{A} = 90°$ $\widehat{B} = 74°$ $\widehat{C} = 26°$

7.83 La diagonal de una pista deportiva rectangular mide 13 metros y la razón de sus lados es 2,4. Existe otra pista semejante con perímetro de 102 metros. ¿Cuánto mide su diagonal?

Si x e y son las medidas de los lados de la pista, la diagonal será: $13^2 = x^2 + y^2$.

Su perímetro es 102 : 2,4 = 42,5, puesto que la razón del perímetro coincide con la razón de los lados. El perímetro de la pista inicial es: $2x + 2y = 42{,}5$.

Planteando un sistema de ecuaciones y despejando y de esta última: $y = 21{,}25 - x$.

$13^2 = x^2 + (21{,}25 - x)^2$

$169 = x^2 + 451{,}56 + x^2 - 42{,}5x$

$2x^2 - 42{,}5x - 282{,}56 = 0$

$$x = \frac{42{,}5 \pm \sqrt{42{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-282{,}56)}}{2} = \frac{42{,}5 \pm 37{,}59}{2} = \begin{cases} 40{,}05 \\ 2{,}46 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} -18{,}8 \\ 28{,}79 \end{cases}$$

Los lados de la pista inicial miden 2,46 y 18,79 cm. Su diagonal: $d = \sqrt{2{,}46^2 + 18{,}79^2} = 18{,}95$ cm.

La diagonal de la pista semejante a ella: $d' = 2{,}4 \cdot 18{,}95 = 45{,}48$ cm.

7.84 Un alumno de 4.° de ESO necesita para la realización de un trabajo una copia reducida de un dibujo rectangular de 35 centímetros de alto y 15 de ancho. ¿Qué porcentaje de reducción tiene que aplicar para incluirlo en un hueco de 20 centímetros de alto?

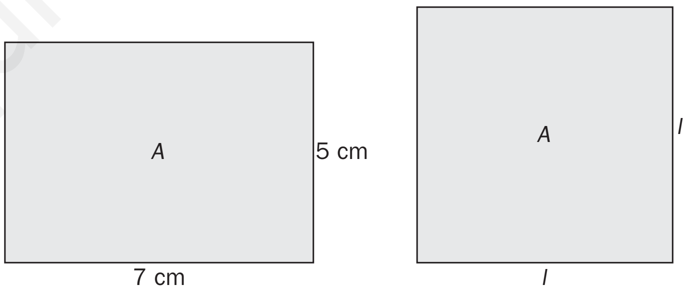
Se reducen $35 - 20 = 15$ cm

$$\text{Porcentaje de reducción} = \frac{15 \cdot 100}{35} = 42{,}86\%$$

7.85 Dibuja un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo cuyos lados miden 5 y 7 centímetros. Utiliza el teorema de la altura.

$A = 5 \cdot 7 = 35$ cm^2

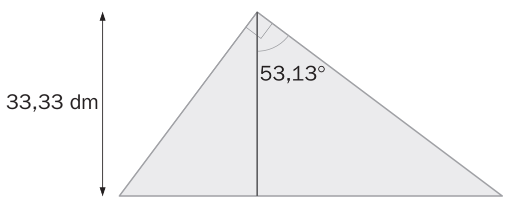
$l^2 = 35 \Rightarrow l = \sqrt{35} = 5{,}92$ cm



7.86 Resuelve este triángulo.

Hipotenusa del triángulo de la derecha, que es el cateto mayor del triángulo a resolver:

$$\cos 53{,}13° = \frac{33{,}33}{a} \Rightarrow a = \frac{33{,}33}{\cos 53{,}13°} = 55{,}55 \text{ dm}$$



El ángulo superior del triángulo rectángulo de la izquierda:

$$90° - 53{,}13° = 36{,}87°.$$

La hipotenusa de ese triángulo que coincide con el cateto menor del triángulo a resolver:

$$\cos 36{,}87° = \frac{33{,}33}{b} \Rightarrow b = \frac{33{,}33}{\cos 36{,}87°} = 41{,}66 \text{ dm.}$$

La hipotenusa del triángulo:

$$c = \sqrt{41{,}66^2 + 55{,}55^2} = 69{,}44 \text{ dm.}$$

7.87 Un ángulo mayor de 360° es la suma de varios ángulos de 360° más uno menor de ese valor y, por tanto, equivale a este último.

Calcula el ángulo menor de 360° al que equivale, y las razones trigonométricas de 450°, 1125° y 2190°.

$\text{sen } 450° = \text{sen } (360° \cdot 1 + 90°) = \text{sen } 90° = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 1 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = 0$

$\text{sen } 1125° = \text{sen } (360° \cdot 3 + 45°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \dfrac{2}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = 1$

$\text{sen } 2190° = \text{sen}(360° \cdot 6 + 30°) = \text{sen } 30° = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{tg } a = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

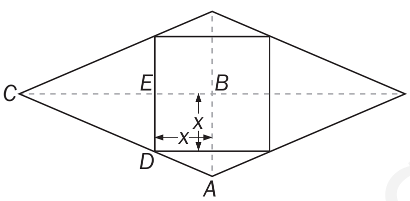
PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

7.88 Losetas de dos colores

Se quieren fabricar losetas como las de la figura que estén formadas por un rombo de 18,10 centímetros de diagonal mayor y 8,36 centímetros de diagonal menor, y un cuadrado inscrito en él.

Calcula el área de la zona gris y la suma de las áreas de las zonas naranjas.

La zona gris corresponde al cuadrado interior, y las zonas naranjas son las superficies restantes del rombo.



Los triángulos *ABC* y *DEC* son semejantes.

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EC} \Rightarrow \dfrac{4,18}{9,05} = \dfrac{x}{9,05} - x \Rightarrow 37,829 - 4,18x = 9,05x$

$\Rightarrow x = \dfrac{37,829}{13,23} = 2,86$

Área gris: $(2 \cdot 2,86)^2 = 32,7 \text{ cm}^2$

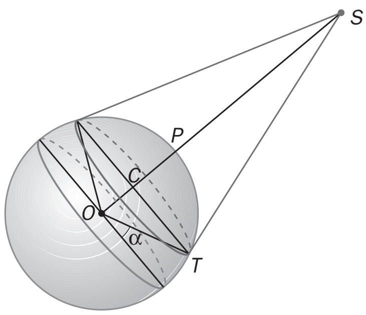
Área naranja: $\dfrac{18,10 \cdot 8,36}{2} - 32,7 = 42,9 \text{ cm}^2$

7.89 Altura del satélite de *GPS*

En el planeta imaginario *AXT22* se quiere colocar un satélite, S, a una altura desde la que el mayor paralelo que se pueda divisar sea el de latitud α = 20°. Si el radio del planeta es de 4000 kilómetros, calcula:

a) El radio, *CT*, del paralelo.

b) Las distancias *SO*, del satélite al centro del planeta, y *SP*, del satélite a la superficie del planeta.



a) En el triángulo rectángulo *OCT*:

$CT = 4000 \cdot \cos \alpha = 4000 \cdot \cos 20 = 3759$

b) El ángulo $\widehat{OCT} = 20°$ y, por tanto:

$SO = \dfrac{4000}{\text{sen } 20} = 11\,695 \text{ km}$

$\Rightarrow SP = 11\,695 - 4000 = 7695 \text{ km}$

7.A1 Indica cuáles de los siguientes pares de triángulos son semejantes y, en ese caso, calcula la razón de semejanza de sus lados.

a) 3, 4, 5 y 4,5; 6; 7,5 cm

b) 2, 5, 6 y 4, 10, 11 cm

c) 5, 12, 13 y 12,5; 30; 32,5 cm

d) 4, 7, 10 y 2,4; 4,2; 6 cm

a) Sí $\Rightarrow k = \frac{3}{2}$

b) No

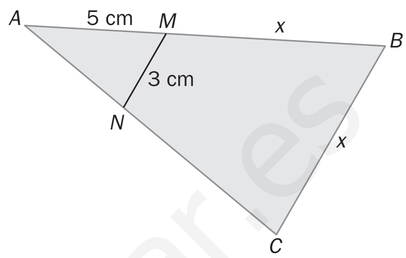
c) Sí. $k = \frac{5}{2}$

d) Sí $\Rightarrow k = \frac{3}{5}$

7.A2 Considera los triángulos de la figura.

a) ¿Cómo deben ser los lados *MN* y *BC* para que los triángulos *AMN* y *ABC* sean semejantes?

b) Halla el valor de *x*.



a) Paralelos, para que verifiquen el teorema de Tales.

b) $\frac{x}{3} = \frac{x}{x+5} \Rightarrow x^2 + 5x = 3x \Rightarrow x^2 + 5x - 3x = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$

Como 0 no puede ser la solución, puesto que en ese caso no existiría triángulo, la solución es $x = 2$.

7.A3 En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos que miden 2 y 18 centímetros, respectivamente.

Calcula el área de un triángulo rectángulo semejante con razón de semejanza $k = \frac{3}{2}$.

Por el teorema de la altura: $h^2 = 18 \cdot 2 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36} = 6$ cm

$b' = b \cdot k = 20 \cdot \frac{3}{2} = 30$ cm $\qquad h' = h \cdot k = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9$ cm

$A = \frac{b' \cdot h'}{2} = \frac{30 \cdot 9}{2} = 135 \text{ cm}^2$

7.A4 Expresa en grados la medida de estos ángulos.

a) $\frac{3\pi}{5}$ rad b) $\frac{15\pi}{4}$ rad c) 9π rad

a) $\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{3\pi}{5} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 3\pi}{10\pi} = 108°$

b) $\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{15\pi}{4} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 15\pi}{8\pi} = 675°$

c) $\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{9\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 9\pi}{2\pi} = 1620°$

7.A5 Expresa en radianes las medidas de los siguientes ángulos.

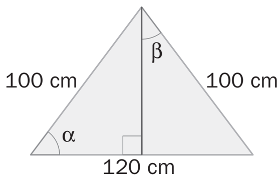
a) 36° b) 100° c) 310°

a) $\frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{x}{36°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 36}{360} = \frac{\pi}{5}$ rad

b) $\frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{x}{100°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 100}{360} = \frac{5\pi}{9}$ rad

c) $\frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{x}{310°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 310}{360} = \frac{31\pi}{18}$ rad

7.A6 Halla las razones trigonométricas de los ángulos α y β del siguiente triángulo.



$$h = \sqrt{100^2 - 60^2} = 80 \text{ cm}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{80}{100} = 0{,}8; \ \cos \alpha = \frac{60}{100} = 0{,}6; \ \text{tg } \alpha = \frac{80}{60} = 1{,}33$$

7.A7 Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 5 y 8 centímetros.
a) Calcula la altura sobre la hipotenusa.
b) Resuelve el triángulo.

a) $h^2 = 5 \cdot 8 = 40 \Rightarrow h = 6{,}32$ cm

b) $c = m + n = 5 + 8 = 13$

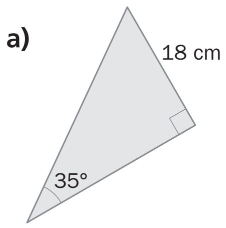
$a^2 = m \cdot c \Rightarrow a^2 = 5 \cdot 13 = 65 \Rightarrow a = 8{,}06$ cm

$b^2 = n \cdot c \Rightarrow b^2 = 8 \cdot 13 = 104 \Rightarrow b = 10{,}20$ cm

$$\text{tg } \widehat{A} = \frac{10{,}20}{8{,}06} \Rightarrow \widehat{A} = 51{,}67° \Rightarrow \widehat{B} = 90° - 51{,}67° = 38{,}33°$$

7.A8 Calcula la medida de los lados y de los ángulos desconocidos.

a)

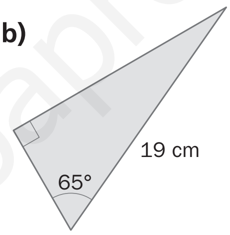


$\widehat{B} = 90° - 35° = 55°$

$c = \dfrac{18}{\text{sen } 35°} = 31{,}38$ cm

$b = 31{,}38 \cdot \text{sen } 55° = 25{,}70$ cm

b)

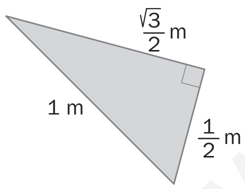


$b = 19 \cdot \text{sen } 65° = 17{,}22$ cm

$\widehat{C} = 90° - 65° = 25°$

$c = 19 \cdot \text{sen } 25° = 8{,}03$ cm

7.A9 Calcula la medida de los ángulos agudos del siguiente triángulo.

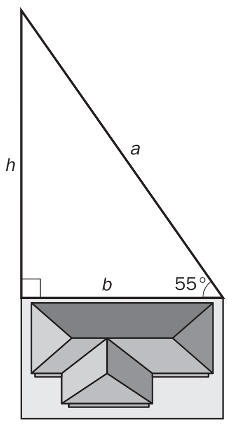


$$\text{sen } \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow \beta = 90° - 60° = 30°$$

MATETIEMPOS

La parcela de mi abuelo

Mi padre ha heredado una parcela triangular de 400 metros cuadrados. Uno de sus lados está limitado por la casa de un vecino, y los otros dos forman con ella ángulos de 55° y 90° de amplitud, respectivamente. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?”



El terreno forma un triángulo rectángulo. Si llamo b a uno de los catetos y h al otro, me queda el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b \cdot h}{2} = 400 \\ \text{tg } 55 = \dfrac{h}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h = \dfrac{800}{b} \\ \text{tg } 55 = \dfrac{\frac{800}{b}}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{tg } 55 = \frac{800}{b^2} \Rightarrow b^2 = \frac{800}{\text{tg } 55} \Rightarrow b^2 = 560{,}17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} b = 23{,}67 \text{ m} \\ h = 33{,}8 \text{ m} \end{array}$$

$$a = \sqrt{23{,}67^2 + 33{,}8^2} = 41{,}26 \text{ m}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

8.1 Las dimensiones de las hojas de un libro de texto de 80 páginas son 20 × 30 centímetros. Si se extendieran, sin solaparse, todas las hojas del libro sobre el suelo, ¿qué superficie ocuparían?

Número de hojas del libro: 160

Superficie de una hoja: $20 \cdot 30 = 600$ cm^2

Superficie que ocuparían: $160 \cdot 600 = 96\,000$ cm^2 $= 9{,}60$ m^2

8.2 El volumen de un cubo es numéricamente igual a su área total. Tomando como unidad el centímetro, calcula cuánto miden su arista, su superficie y su volumen.

Sea x la medida de la arista. $x^3 = 6x^2 \Rightarrow x^2(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 6$

Solución válida: $x = 6$

a) Medida de la arista: 6 cm

b) Medida del área: $6x^2 = 216$ cm^2

c) Medida del volumen: $x^3 = 216$ cm^3

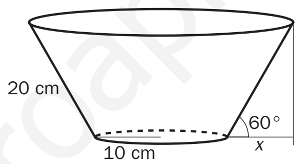
8.3 Calcula el área de un trapecio circular cuyos radios mayor y menor miden 10 y 5 centímetros, respectivamente, y que abarca un ángulo de 60°.

$x = 10 \cdot \cos 60° = 5$ cm $\Rightarrow R = 10 + 5 = 15$ cm

$A_{\text{lateral}} = \pi(15 + 10) \cdot 20 = 500\pi$ cm^2

$A_{\text{base}} = \pi 10^2 = 100\pi$ cm^2

$A_{\text{trapecio}} = 500\pi + 100\pi = 600\pi$ cm^2



8.4 Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son tres múltiplos consecutivos de 3. Halla las dimensiones de sus lados y el área del triángulo.

Medida de los tres lados consecutivos: $x - 3, x, x + 3$

Teorema de Pitágoras: $(x - 3)^2 + x^2 = (x + 3)^2$

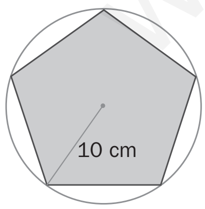
Se opera: $x^2 - 6x + 9 + x^2 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(x - 12) = 0$.

Soluciones de la ecuación: $x = 0, x = 12$. La primera solución no es válida.

Medidas de los lados: catetos: 9, 12; hipotenusa: 15

$A_{\text{triángulo}}: \dfrac{9 \cdot 12}{2} = 54$

8.5 Halla el área del pentágono que aparece en la figura.



El radio de la circunferencia inscrita se corresponde con la apotema: r.

El radio de la circunferencia circunscrita se corresponde con el radio del octógono: R.

Ángulo central $= 360° : 5 = 72°$ $\quad 2\alpha = 180° - 72° = 108°$ $\quad \alpha = 54°$

$\dfrac{10}{\text{sen } 54°} = \dfrac{x}{\text{sen } 72°} \Rightarrow x = 11{,}76$ cm

$ap^2 = 10^2 - 5{,}88^2 = 65{,}43 \Rightarrow ap = 8{,}09$ cm

$A = \dfrac{11{,}76 \cdot 5 \cdot 8{,}09}{2} = 237{,}85$ cm^2

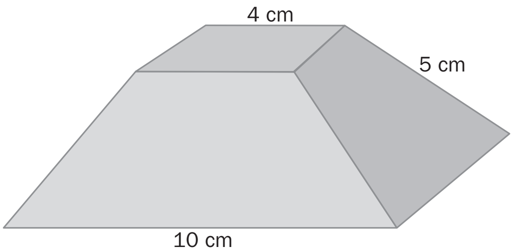
8.6 Halla el área de las bases y el área total de un cilindro de 5 centímetros de radio y 12 de altura.

a) Área de las bases: $2\pi r^2 = 2 \cdot 25\pi = 50\pi$ cm^2 $= 157{,}01$ cm^2

b) Área lateral: $2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi$ cm^2 $= 377$ cm^2

c) Área total: $157{,}01 + 377 = 534{,}01$ cm^2

8.7 Calcula el área lateral y el área total del tronco de pirámide de la figura.



Para calcular la apotema que corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo señalado en la figura:

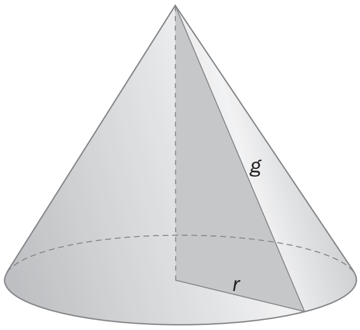
$25 = h^2 + 9 \Rightarrow h = 4$ cm

Se calcula el área lateral: $A_L = \dfrac{(P + p) \cdot A}{2}$

$A_L = \dfrac{(40 + 16) \cdot 4}{2} = 112$ cm^2

$A_T = A_B + A_b + A_L = 16 + 100 + 112 = 228$ cm^2

8.8 La generatriz de un cono mide 10 decímetros, y su altura, 80 centímetros. Calcula su área lateral y su área total.

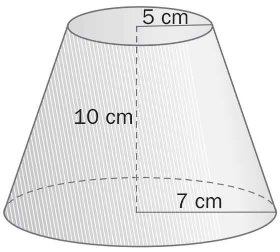


Se aplica Pitágoras para calcular el radio r: $r = \sqrt{g^2 - h^2} = 60$ cm

$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 60 \cdot 100 = 18\,840$ cm

$A_T = A_L + A_B = A_L + \pi r^2 = 18\,840 + 11\,304 = 30\,144$ cm

8.9 La figura representa un tronco de cono de radios *R* y *r*. Calcula el área lateral y el área total.



Se resta el área de la base superior del radio de la base superior para obtener 2 cm, que es la distancia horizontal que las separa.

Según el triángulo rectángulo que vemos dibujado dentro de la figura calculamos la generatriz.

$g = \sqrt{100 + 2^2} = 10{,}20$ cm

$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 12 \cdot 10{,}20 = 384{,}34$ cm

$A_T = A_L + A_B + A_b = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$

$A_T = 153{,}86 + 78{,}5 + 384{,}34 = 616{,}70$ cm

8.10 Calcula el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones sean 50 × 80 × 100 milímetros.

El volumen de un ortoedro es: $V = A_B \cdot h = 50 \cdot 80 \cdot 100 = 400\,000$ mm $= 400$ m.

8.11 El volumen de un cubo es de 25 cm^3. ¿Cuánto aumentará su volumen si se duplica la longitud de sus aristas?

Ecuación: $x^3 = 25$ litros

Volumen: $(2x)^3 = 8x^3 = 8 \cdot 25 = 200$ litros

Incremento: $200 - 25 = 175$ litros

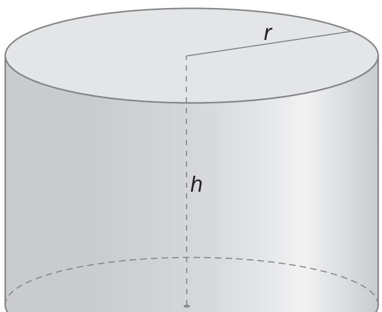
8.12 Dibuja un cilindro recto de 5 centímetros de radio y 12 centímetros de altura. Calcula su volumen.

a) La base del cilindro es un círculo de radio $r = 5$ cm.
Área de la base $= \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ cm^2

b) El área lateral del cilindro es el área de un rectángulo.
Base del rectángulo: $2\pi r$
Altura del rectángulo = altura del cilindro
Área lateral: $2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi$ cm^2

c) Área de todo el cilindro: $120\pi + 25\pi = 145\pi$ cm^2

d) Volumen del cilindro: $25\pi \cdot 12 = 300\pi$ cm^3



8.13 Las aristas de dos cubos difieren en 2 centímetros, y sus volúmenes, en 56 cm³. Halla el valor de la longitud de las aristas de ambos cubos.

Medidas de las aristas: $x,\ x + 2$

Ecuación resultante: $(x + 2)^3 - x^3 = 56 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 = 56 \Rightarrow 6x^2 + 12x - 48 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

Soluciones: $x = -4,\ x = 2$

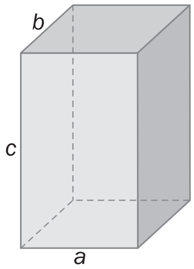
Medida de las aristas: $x = 2$ cm, 4 cm

8.14 Del prisma de la figura conocemos el área de sus caras. Sin resolver ningún sistema, calcula su volumen sabiendo que:

$\boldsymbol{a \cdot b = 270}$ **cm²**

$\boldsymbol{b \cdot c = 450}$ **cm²**

$\boldsymbol{a \cdot c = 540}$ **cm²**



$ab \cdot bc \cdot ac = a^2b^2c^2 = (abc)^2 = V^2$

$V^2 = ab \cdot bc \cdot ac = 270 \cdot 450 \cdot 540 = 6\,561\,000$

El volumen del ortoedro es de 8100 cm³.

8.15 Sabiendo que el volumen de un cono mide 300 cm³, y su altura, 30 centímetros, calcula su generatriz.

$V = 300$ cm³ $\qquad V = \frac{1}{2} \cdot A_B \cdot h \Rightarrow A_B = \frac{2V}{h} = 20$ cm²

$h = 30$ cm $\qquad A_B = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A_B}{\pi}} = 2{,}52$ cm

La generatriz de un cono es $g = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{30^2 + 2{,}52^2} = 30{,}11$ cm

8.16 El radio medio de la Tierra, suponiendo una esfera perfecta, es aproximadamente de 6370 kilómetros. A partir de este dato, calcula:

a) La longitud del ecuador terrestre.

b) El área de la superficie terrestre.

a) Longitud del ecuador: $2\pi r = 2\pi \cdot 6370 \approx 40\ 000$ km

b) Área de la superficie terrestre: $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 6370^2 \approx 510$ millones de km²

8.17 La anchura y la profundidad de una sala de música de forma rectangular suman 54 metros. Si su superficie es de 720 m², ¿cuáles son las dimensiones de la sala?

Medidas de las dimensiones: $x,\ 54 - x$

Ecuación de áreas: $x(54 - x) = 720$

Se opera: $54x - x^2 = 720$

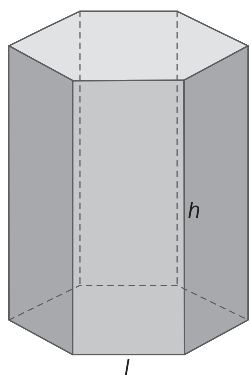
Ecuación de segundo grado: $x^2 - 54x + 720 = 0$

Soluciones de la ecuación: $x = 30,\ x = 24$

Dimensiones de la sala: 30 m de largo, 24 m de ancho

8.18 Se quieren pintar las paredes y el techo de una sala de exposiciones que tiene forma de prisma hexagonal regular. La arista de la base mide 9 metros y la altura de la sala es de 12 metros.

Halla la superficie total que va a ser pintada.



La base hexagonal se descompone en 6 triángulos equiláteros de lado 9 cm.

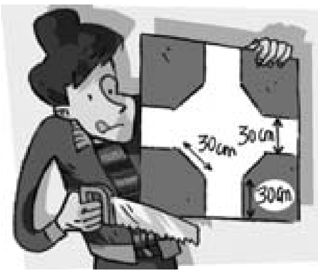
Área de la base $= 6 \cdot 9^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = 420{,}89$ cm²

Área lateral: $6 \cdot a_b \cdot h = 6 \cdot 9 \cdot 12 = 648$ m²

Superficie que va a ser pintada: $648 + 420{,}89 = 1068{,}89$ m²

8.19 En clase de Tecnología, los alumnos van a construir el tablero de un juego de mesa como el de la figura.

¿Qué cantidad de madera (expresada en metros cuadrados) será necesaria, como mínimo, si son 20 alumnos en el aula?



$$\text{Apotema} = \text{tg}\,\frac{\frac{360}{8}}{2} \cdot \frac{l}{2} = 0{,}41 \cdot 15 = 6{,}15 \text{ cm}$$

$$A_{\text{octoedro}} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \text{apotema} \cdot 30 = 738 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 4 \cdot 30^2 + 738 = 4338 \text{ cm}^2$$

La cantidad de madera necesaria será: $20 \cdot 4338 = 86\,760 \text{ cm}^2 = 8{,}68 \text{ m}^2$

8.20 Un aula tiene 12 metros de largo, 10 de ancho y 4 de alto. Si se llenase con bloques cúbicos de porexpán de 2 metros de arista, ¿podrías decir cuántos se necesitarían?

Si la clase tiene 20 alumnos y cada uno transporta el mismo número de bloques, ¿cuántos tendrá que mover cada alumno para rellenar completamente la clase?

$V_{\text{aula}} = 12 \cdot 10 \cdot 4 = 480 \text{ m}^3$

$V_{\text{bloque}} = 2^3 = 8 \text{ m}^3$

Para llenar el aula hacen falta $\frac{480}{8} = 60$ bloques cúbicos.

Cada alumno moverá 3 bloques.

8.21 Se quiere levantar un monumento en forma de pirámide. Su base será cuadrada, y la altura prevista, de 30 metros.

Si se necesitan 811,2 m³ de piedra, ¿cuál es la medida de la arista de la base?

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot a_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow a_{\text{base}} = \frac{3V_{\text{pirámide}}}{h} \Rightarrow a_{\text{base}} = \frac{3 \cdot 811{,}2}{30} = 81{,}12 \text{ m}$$

$$a_{\text{base}} = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{81{,}12} = 9{,}01 \text{ m}$$

8.22 El almacén de una empresa gráfica tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son proporcionales a los números 3, 4 y 5.

Halla las longitudes de las aristas y el volumen total sabiendo que el área total es de 752 m².

Dimensiones de los lados: $3x$, $4x$ y $5x$, ya que son proporcionales a los números 3, 4 y 5.

Área total: $2(3x \cdot 4x) + 2(3x \cdot 5x) + 2(4x \cdot 5x) = 752 \text{ m}^2$

Se opera: $94x = 752$

Valor de x: $x = 8$

Dimensiones del almacén: 24 m, 32 m y 40 m

Volumen del ortoedro: $V = 24 \cdot 32 \cdot 40 = 30\,720 \text{ m}^3$

8.23 En cada esquina de una plancha de hojalata de forma cuadrada se recorta un cuadrado de 5 centímetros de lado. Después, doblando los rectángulos hacia arriba y pegando las caras laterales, se forma una caja de 281,25 cm³.

Halla el lado inicial de la plancha.

Sea x el lado de la plancha.

Se utiliza la fórmula del volumen de ortoedro:

$1280 = 5(x - 10)(x - 10) \Rightarrow 256 = x^2 - 20x + 100 \Rightarrow x^2 - 20x - 156 = 0 \Rightarrow x = 26,\ x = -6$

El lado de la plancha de cartón mide 26 cm.

El valor $x = -6$ no es válido, ya que el lado debe ser positivo.

8.24 Un arquitecto quiere quitar la rampa y construir una nueva, de forma que, para subir, sólo haya que dar tres vueltas. ¿Cuánto medirá esa rampa?

Ahora el cateto vertical medirá 8 m. La hipotenusa del triángulo será:

$h = \sqrt{31{,}4^2 + 8^2} \rightarrow h = 32{,}4$ m

La rampa medirá en total $3 \cdot 32{,}4 = 97{,}2$ metros.

8.25 Y si hiciéramos que la rampa diera cinco vueltas completas, ¿qué longitud tendría que recorrer Luis?

Ahora el cateto vertical medirá 4,8 m. La hipotenusa del triángulo será:

$h = \sqrt{31{,}4^2 + 4{,}8^2} \rightarrow h = 31{,}76$ m

La rampa medirá en total $5 \cdot 31{,}76 = 158{,}8$ metros.

Una vez hecho el ejercicio, se puede explicar por qué la rampa más corta no es la mejor, calculando la pendiente de cada una usando la trigonometría (tema anterior) e incluso construyendo rampas a escala.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Perímetro, área y volumen

8.26 Asocia en tu cuaderno cada magnitud con la unidad que le corresponde.

a) Cantidad de cartón de un *tetra brik*
b) Suelo cubierto con parqué
c) Espacio que ocupa una caja
d) Longitud del cordón de una deportiva
e) Cantidad de agua de un pantano

I. cm^3
II. hm^3
III. cm^2
IV. cm
V. m^2

8.27 Escribe una magnitud que se exprese en las siguientes unidades.

a) m **b) m^3** **c) cm^2** **d) mm**

a) Longitud de una mesa.
b) Agua consumida en una casa durante tres meses.
c) Superficie que ocupa una hoja de papel.
d) Longitud de un tornillo.

8.28 Indica las unidades que corresponden a las siguientes magnitudes, y di si se trata de un perímetro, un área o un volumen.

a) Zona ocupada por 10 CD extendidos sobre una mesa.

b) Espacio que ocupan 10 CD colocados unos sobre otros.

c) Medida del borde de un CD.

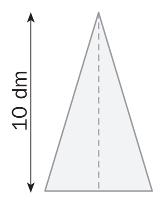
a) Área. Se mide en m^2. b) Volumen. Se mide en m^3. c) Perímetro. Se mide en m.

Área de figuras planas

8.29 Calcula el perímetro de un cuadrado de 576 cm^2 de superficie.

$l = \sqrt{576} = 24$ cm de lado. $P = 4 \cdot 24 = 96$ cm

8.30 Calcula los lados de este triángulo sabiendo que su área es de 30 dm^2.



$30 = \dfrac{b \cdot 10}{2} \Rightarrow b = 6$ dm mide la base.

$c = \sqrt{6^2 + 10^2} = 11{,}66$ dm mide cada uno de los lados iguales.

8.31 Halla el área del triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 13 centímetros, y uno de sus catetos, 5.

$c = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm

$A = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30$ cm^2

8.32 La diagonal de un rectángulo mide 39,36 decímetros, y su base, 18. Halla su perímetro y su área.

El otro lado del rectángulo, a: $a = \sqrt{39{,}36^2 - 18^2} = 35$ dm

$P = 2 \cdot 18 + 2 \cdot 35 = 106$ dm

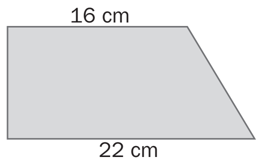
$A = 18 \cdot 35 = 630$ dm^2

8.33 El lado de un hexágono regular mide 20 centímetros. Calcula la medida de la apotema y el área del hexágono.

$a = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}32$ cm

$A = \dfrac{20 \cdot 6 \cdot 17{,}32}{2} = 1401$ cm^2

8.34 Halla la altura del trapecio de la figura sabiendo que su área es de 190 cm^2.



$190 = \dfrac{(22 + 16) \cdot h}{2}$

$h = \dfrac{190 \cdot 2}{37} = 10{,}27$ cm

8.35 Halla el área de la corona circular formada por dos circunferencias de 3 y 8 centímetros de radio.
¿Cuál es el área del trapecio circular de 90°?
¿Y del trapecio de 40°?

$A = \pi \cdot (8^2 - 3^2) = 235{,}5$ cm^2 es el área de la corona circular.

Área del trapecio de 90° $= \dfrac{A}{4} = \dfrac{235{,}5}{2} = 117{,}75$ cm^2

Área del trapecio de 40° $= \dfrac{\pi \cdot 40°(8^2 - 3^2)}{360°} = 20{,}58$ c,m^2

8.36 Calcula la longitud de las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrado de 8 centímetros de lado.

El radio de la circunferencia inscrita es la mitad del lado del cuadrado, $r = 4$ cm. $L = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 25{,}12$ cm.

El radio de la circunferencia circunscrita es la mitad de la diagonal del cuadrado.

$$r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{8^2 + 8^2}}{2} = 5{,}66 \text{ cm} \Rightarrow L = 2 \cdot \pi \cdot 5{,}66 = 35{,}54 \text{ cm}$$

8.37 El área de un sector circular dibujado en un círculo de 9 decímetros de diámetro es de 8,84 dm^2.
Calcula el número de grados que abarca.

$8{,}84 = \dfrac{\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot n}{360°} \Rightarrow n = \dfrac{8{,}84 \cdot 360°}{\pi \cdot 4{,}5^2} = 50{,}05°$

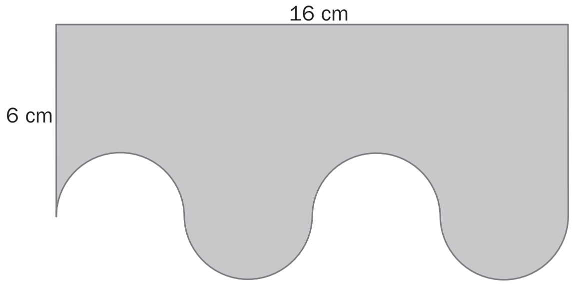
8.38 Con centro en el de una circunferencia de 106,81 centímetros de longitud, se ha trazado otra cuyo radio es 4 centímetros menor que el de aquella.
Calcula el área de la corona circular que determinan.

$106{,}81 = 2 \cdot \pi \cdot R \Rightarrow R = 17$ cm mide el radio de la circunferencia mayor.

$r = 13$ cm mide el radio de la menor.

$A = \pi \cdot (17^2 - 13^2) = 376{,}8$ cm^2 es el área de la corona circular.

8.39 **Halla el perímetro y el área de la siguiente figura.**



Dibuja un polígono que tenga la misma área.

¿Tiene también el mismo perímetro?

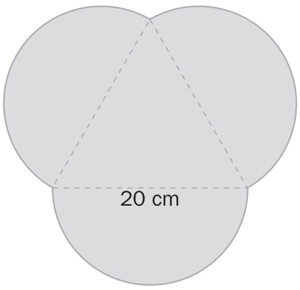
$P = 6 \cdot 2 + 16 + 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 = 219{,}06 \text{ cm}^2$

$A = 6 \cdot 16 + \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 2^2 = 6 \cdot 16 = 96 \text{ cm}^2$

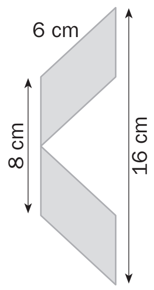
El polígono de igual área es un rectángulo de lados 16 y 6 cm, y perímetro: $6 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = 12 + 32 = 44$ cm, que es distinto del de la figura del ejercicio.

8.40 **Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras planas, cuyas medidas vienen dadas en centímetros.**

a)



b)



a) Altura del triángulo: $\sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}32 \text{ cm} \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = \dfrac{20 \cdot 17{,}32}{2} = 137{,}2 \text{ cm}^2$

$A_{\text{semicírculo}} = \pi \cdot 10^2 = 314{,}16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = 137{,}2 + 3 \cdot 314{,}16 = 1076{,}68 \text{ cm}^2$

$P = 3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10 = 188{,}4 \text{ cm}$

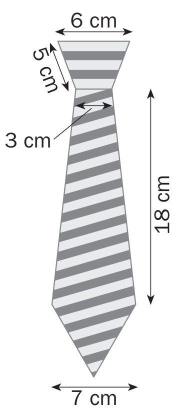
b) $P = 8 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 40 \text{ cm}$

La altura de los paralelogramos, si la base es de 4 cm, es la del triángulo isósceles de base 8 cm y lados iguales a 6 cm:

$h = \sqrt{6^2 - 4^2} = 4{,}47$ cm.

$A = 2 \cdot 4 \cdot 4{,}47 = 35{,}76 \text{ cm}^2$

8.41 **Calcula el perímetro y el área de la figura siguiente.**



La figura está formada por 2 trapecios isósceles y un triángulo equilátero.

Trapecio superior: $h = \sqrt{5^2 - (6 - 3)^2} = 4 \text{ cm} \Rightarrow A = \dfrac{(6 + 3) \cdot 4}{2} = 18 \text{ cm}^2$

Trapecio inferior: $A = \dfrac{(3 + 7) \cdot 18}{2} = 90 \text{ cm}^2$

Lados iguales: $l = \sqrt{18^2 + (7 - 3)^2} = 18{,}44 \text{ cm}$

Triángulo equilátero: $h = \sqrt{7^2 - 3{,}5^2} = 6{,}06 \Rightarrow A = \dfrac{7 \cdot 6{,}06}{2} = 21{,}21 \text{ cm}^2$

Área de la figura: $A = 18 + 90 + 21{,}21 = 129{,}21 \text{ cm}^2$

$P = 7 \cdot 2 + 18{,}44 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 = 66{,}88 \text{ cm}$

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

8.42 Halla el área total y el volumen de las siguientes figuras.

a) Un cilindro de 19 centímetros de diámetro y 10 de altura.

b) Un ortoedro de 20 decímetros de largo, 8 de ancho y 9 de alto.

c) Una esfera de 32 centímetros de diámetro.

a) $A = 2 \cdot \pi \cdot 9{,}5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 9{,}5 \cdot 10 = 1163{,}96 \text{ cm}^2$

$V = \pi \cdot 9{,}5^2 \cdot 10 = 2835{,}29 \text{ cm}^3$

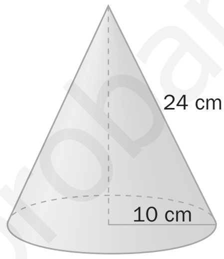
b) $A = 2 \cdot 20 \cdot 8 + 2 \cdot 20 \cdot 9 + 2 \cdot 8 \cdot 9 = 824 \text{ cm}^2$

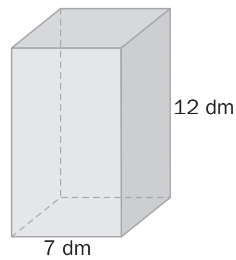
$V = 20 \cdot 8 \cdot 9 = 1440 \text{ cm}^3$

c) $A = 4 \cdot \pi \cdot 16^2 = 3217 \text{ cm}^2$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 16^3 = 17\,157{,}28 \text{ cm}^3$

8.43 Halla el área lateral de estos cuerpos geométricos.



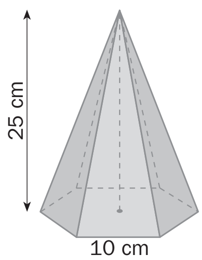


a) $A_L = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 24 = 1507{,}97 \text{ cm}^2$

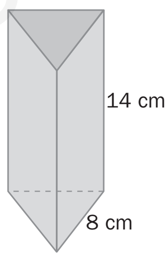
b) $A_L = 4 \cdot 7 \cdot 12 = 336 \text{ cm}^2$

8.44 Calcula el volumen de las siguientes figuras geométricas.

a)



b)



a) Apotema de la base: $a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}66 \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} \cdot 25 = 6495 \text{ cm}^3$

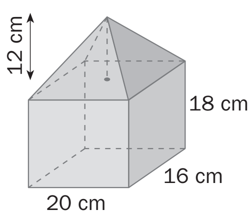
b) Altura del triángulo de la base: $h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6{,}93 \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 14 = 388{,}08 \text{ cm}^3$

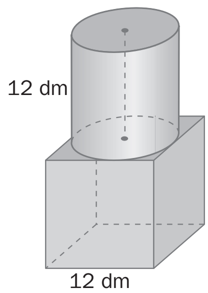
8.45 El área de un cubo es de 864 cm². Calcula su volumen.

$864 = 6 \cdot l^2 \Rightarrow l = \sqrt{\frac{864}{4}} = 12$ cm mide el lado del cubo.

$V = 12^3 = 1728 \text{ cm}^3$

8.46 Calcula el volumen de los siguientes objetos.





a) $V = 20 \cdot 16 \cdot 18 + \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 16 \cdot 12$

$V = 7040 \text{ cm}^3$

b) $V = 12^3 + \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 3085{,}17 \text{ dm}^3$

8.47 Halla el área total de las figuras del ejercicio anterior.

a) Altura de las caras laterales de la pirámide cuyas bases son 20 cm: $h = \sqrt{12^2 - 10^2} = 15{,}62$ cm

Altura de las caras laterales de la pirámide cuyas bases son 16 cm: $h = \sqrt{12^2 + 8^2} = 14{,}42$ cm

$A = 20 \cdot 16 + 4 \cdot 16 \cdot 18 + 2 \cdot \dfrac{20 \cdot 15{,}62}{2} + 2 \cdot \dfrac{16 \cdot 14{,}42}{2} = 2015{,}12\ \text{cm}^2$

b) Área del cubo sin la cara superior: $A = 5 \cdot 12^2 = 1440\ \text{dm}^2$

Área lateral del cilindro y de la base superior: $A' = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 12 + \pi \cdot 6^2 = 150{,}80\ \text{dm}^2$

Área de la cara superior del cubo quitando la base del cilindro: $A'' = 12^2 - \pi \cdot 6^2 = 30{,}90\ \text{dm}^2$

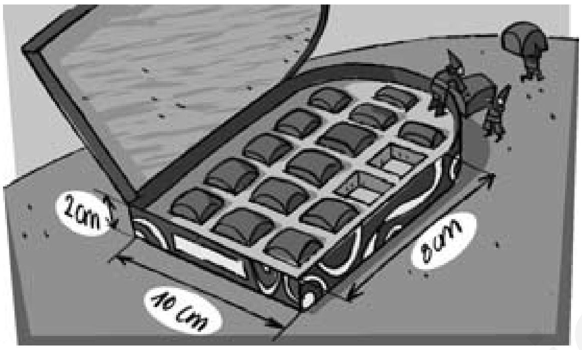
Área total de la figura: $A = 1440 + 150{,}80 + 30{,}90 = 1621{,}70\ \text{dm}^2$

8.48 Calcula el volumen comprendido entre una esfera de 8 centímetros de radio y un cilindro dentro de ella de 3 centímetros de diámetro y 10 de altura.

Haz un dibujo de la composición.

$V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8^3 + \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 10 = 2215{,}35\ \text{cm}^3$

8.49 Calcula el área y el volumen de la caja de la figura, suponiéndola cerrada.



$A = 2 \cdot 8 \cdot 10 + 2 \cdot 8 \cdot 2 + 2 \cdot 10 + \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 2$

$A = 321{,}95\ \text{cm}^2$

$V = 8 \cdot 10 \cdot 2 + \dfrac{\pi \cdot 5^2}{2} \cdot 2 = 238{,}54\ \text{cm}^3$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

8.50 Señala en tu cuaderno si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) El volumen de un cuadrado se obtiene elevando al cubo la medida de su lado.

b) La medida de la superficie habitable de un apartamento es de 50 metros.

c) El volumen de un cuerpo geométrico se puede relacionar con su capacidad.

d) El perímetro de un triángulo es el triple de su lado.

a) Falsa. El cuadrado no tiene volumen.

b) Falsa. La superficie se mide en unidades cuadradas.

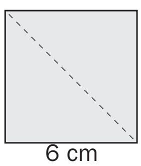
c) Verdadera. 1 dm^3 = 1 l.

d) Falsa. Es la suma de sus lados y solo es igual al triple cuando el triángulo es equilátero.

8.51 Con dos triángulos rectángulos isósceles cuyos catetos miden 6 centímetros se pueden formar dos figuras de igual área: un cuadrado de 6 centímetros de lado, y un triángulo isósceles de 12 centímetros de base y 6 de altura.

Dibuja las dos figuras y demuestra que tienen la misma área.

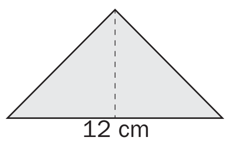
¿Tienen también el mismo perímetro?



Área del cuadrado: $6^2 = 36\ \text{cm}^2$

Perímetro: $4 \cdot 6 = 24$ cm

No tienen el mismo perímetro.



Área del triángulo: $\dfrac{12 \cdot 6}{2} = 36\ \text{cm}^2$

Lados iguales: $\sqrt{6^2 + 6^2} = 8{,}49$ cm

Perímetro: $12 + 2 \cdot 8{,}49 = 28{,}98$ cm

8.52 **Considera un prisma y una pirámide que tienen la misma base y altura.**
¿Cuántas pirámides se necesitan para obtener el mismo volumen del prisma?

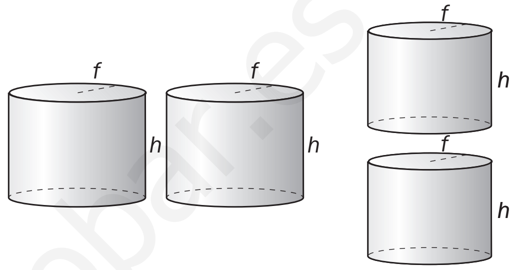
Se necesitan 3 pirámides.

8.53 **Si se divide un cuadrado en dos rectángulos al unir los puntos medios de dos lados opuestos, y en dos triángulos, al trazar una diagonal, ¿el área del rectángulo y el triángulo formados es la misma?**

Sí, ya que en los dos casos el área es $\frac{a^2}{2}$.

8.54 **¿De qué manera habrá que unir dos cilindros iguales para que su área sea exactamente el doble que la de uno de ellos? Dibújalo.**
¿Cómo habrá que colocarlos para que no se cumpla lo anterior, aun estando unidos?

En el primer caso se deben colocar unidos por la generatriz.
En el segundo, unidos por una de sus bases.

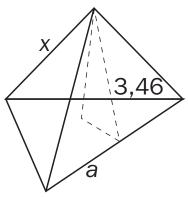


8.55 **¿Qué relación tienen el área de un tetraedro y la de un cubo con la misma arista? Ayúdate de un ejemplo para responder a la pregunta.**

Si tienen de arista 4 cm, por ejemplo, $V_{\text{cubo}} = 4^3 = 64$ cm^3.

Para hallar el área de la base del tetraedro hay que calcular primero la altura de un triángulo equilátero de 4 cm de lado: $h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3{,}46$ cm.

Área del triángulo de la base: $\frac{4 \cdot 3{,}46}{2} = 6{,}92$ cm^2



Para calcular la altura del tetraedro, en el triángulo rectángulo del dibujo, *a* es la tercera parte de la altura del triángulo de la base porque en un triángulo equilátero la altura coincide con la mediana:

$a = 3{,}46 : 3 = 1{,}15$ cm

Por tanto, $x = \sqrt{3{,}46^2 - 1{,}15^2} = 3{,}26$ cm

$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} \cdot 6{,}92 \cdot 3{,}26 = 7{,}53$ cm^3

$64 : 7{,}53 = 8{,}5$

El volumen del cubo es 8,5 veces el del tetraedro.

PROBLEMAS PARA APLICAR

8.56 **En el abanico del dibujo, calcula el área de la zona coloreada.**

$A = \frac{\pi \cdot (40^2 - 30^2) \cdot 75°}{360°} = 1010{,}95$ cm^2

8.57 En la fiesta de cumpleaños de Nerea se han preparado unos sándwiches con unas rebanadas de pan con forma de prisma cuadrangular de 10 centímetros de lado de la base y 15 milímetros de altura. Contesta a las siguientes preguntas.

a) En el centro de la rebanada superior de cada sándwich se ha recortado un trozo circular de 2 centímetros de radio para decorarlo. ¿Qué cantidad de pan queda en la rebanada superior?

b) Nerea quiere tirar el pan del círculo recortado, y su madre, no, porque dice que con él se podría alimentar a muchas personas.

Si se han preparado 50 sándwiches, ¿cuánto pan se perdería con todos los recortes? ¿Cuántas rebanadas como las utilizadas se podrían hacer con él?

a) $V_{\text{rebanada}} = 10^2 \cdot 0{,}1 = 1000\ \text{cm}^3$

$V_{\text{recorte}} = \pi \cdot 2^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}26\ \text{cm}^3$

$V_{\text{queda}} = 1000 - 1{,}26 = 998{,}74\ \text{cm}^3$

b) $50 \cdot 1{,}26\ \text{cm}^3 = 63\ \text{cm}^3$

No se podría hacer ni una sola rebanada de pan.

8.58 En una fábrica de golosinas se han preparado 600 kilogramos de caramelo de fresa para hacer piruletas y caramelos como los de la figura.

a) Si solo se hacen piruletas, ¿cuántas se pueden preparar?

b) ¿Y cuántos caramelos, si solo se elaboran de este tipo?

c) Si cada piruleta se vende a 0,75 euros y cada caramelo a 0,90, estudia la opción más rentable: hacer solo piruletas, solo caramelos o la mitad de cada uno de ellos.

a) $V = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 1 = 38{,}48\ \text{cm}^3 = 0{,}03848\ \text{kg} \Rightarrow 600 : 0{,}03848 = 15\,592{,}52$ piruletas $\approx 15\,592$ piruletas

b) $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}5^3 = 65{,}45\ \text{cm}^3 = 0{,}06545\ \text{kg} \Rightarrow 600 : 0{,}06545 = 9176{,}30$ caramelos ≈ 9176 caramelos

c) Solo piruletas: $15\,592 \cdot 0{,}75 = 11\,694$ €

Solo caramelos: $9176 \cdot 0{,}90 = 8258{,}40$ €

Mitad de piruletas y mitad de caramelos: $7796 \cdot 0{,}75 + 4588 \cdot 0{,}90 = 9976{,}20$ €

Lo más rentable es hacer solo piruletas.

8.59 En unos recipientes cilíndricos de 6 metros de diámetro y 6 de altura se ha preparado cera para elaborar velas. Unas tienen forma de prisma cuadrangular de 7 centímetros de lado de la base y 10 de altura, y otras, forma cilíndrica de 9 centímetros de diámetro de la base y 10 de altura.

Para hacer un pedido de 2000 velas con forma de prisma y 300 con forma de cilindro, ¿es suficiente con uno de los recipientes de cera?

$V_{\text{recipiente}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 169{,}65\ \text{m}^3$ de cera se hace en el recipiente.

$V_{\text{prisma}} = 7^2 \cdot 10 = 490\ \text{cm}^3$

$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 282{,}74\ \text{cm}^3$

En total se gastan: $2000 \cdot 490 + 300 \cdot 282{,}74 = 1\,064\,822\ \text{cm}^3 = 1{,}06\ \text{m}^3$ se utilizan en las velas. Por tanto, hay suficiente.

8.60 En una ciudad se han colocado 60 farolas formadas por cuatro trapecios isósceles de cristal de 20 milímetros de grosor, adornado con un borde de forja, como los de la figura.

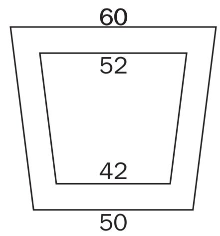
a) ¿Cuánto cristal ha sido necesario en la construcción de todas las farolas?

b) Suponiendo que el adorno de hierro tiene un grosor tan fino que se puede considerar una figura plana, ¿qué cantidad de este metal se ha empleado en total?

a) $V = \dfrac{(60 + 40) \cdot 50}{2} \cdot 0{,}2 = 500\ \text{cm}^3$ de cristal se han empleado en la construcción de cada farola.

$60 \cdot 500 = 30\,000\ \text{cm}^3$ de cristal se han utilizado entre todas ellas.

b) La cantidad de hierro es el área comprendida entre los dos trapecios de la figura:



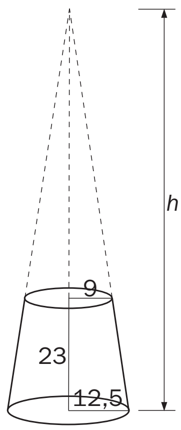
$A = A_{\text{trapecio mayor}} - A_{\text{trapecio menor}} = \dfrac{(60 + 50) \cdot 40}{2} - \dfrac{(52 + 42) \cdot 32}{2} =$

$= 2200 - 736 = 1474$ cm^2 de hierro se han utilizado.

8.61 **Paula ha comprado 5 kilogramos de tierra para plantas. Va a utilizar 3 macetas con forma de ortoedro de 45 centímetros de largo, 20 de ancho y 15 de alto, y otras 4 macetas con forma troncocónica de 25 centímetros de diámetro superior, 18 de diámetro de la base y 23 de altura.**

Sabiendo que la densidad de la tierra es de 300 kilogramos por metro cúbico, ¿tendrá suficiente tierra para llenar todas las macetas?

$V_{\text{ortoedro}} = 45 \cdot 20 \cdot 15 = 13\,500$ cm^3 $\Rightarrow 3 \cdot 13\,500 = 40\,500$ cm^3 de tierra se utiliza en las macetas con forma de ortoedro.



Para hallar el volumen de las macetas troncocónicas, hallamos primero la altura del cono si estuviera completo.

Por Tales: $\dfrac{9}{h - 23} = \dfrac{12,5}{h} \Rightarrow 9h = 12,5h - 287,5 \Rightarrow h = \dfrac{287,5}{3,5} = 82,14$ cm

$V_{\text{troncocónicas}} = \dfrac{1}{3}(\pi \cdot 12,5^2 \cdot 82,14 - 9^2 \cdot 59,14) = 2681,35 \text{ cm}^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot 2681,35 = 10\,725,4$ cm^3

En total se han utilizado: $40\,500 + 10\,725,4 = 51\,225,4$ cm^3 $= 51,23$ dm^3 $= 51,23$ kg.

Por tanto, no tiene suficiente tierra.

R E F U E R Z O

Áreas de figuras planas

8.62 **Calcula el perímetro y el área de estas figuras.**

a) Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 38 centímetros, y uno de sus catetos, 16.

b) Un cuadrado cuya diagonal mide 50 centímetros.

c) Un rombo de diagonales 16 y 12 centímetros.

a) El otro cateto: $b = \sqrt{38^2 - 16^2} = 34,47$ cm

$P = 38 + 16 + 34,47 = 88,47$ cm

$A = \dfrac{1}{2} \cdot 16 \cdot 34,47 = 274,76$ cm^2

b) $l = \sqrt{\dfrac{50^2}{2}} = 35,36$ cm mide el lado.

$P = 4 \cdot 35,36 = 141,44$ cm

$A = 35,36^2 = 1250,33$ cm^2

c) $l = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm

$P = 4 \cdot 10 = 40$ cm

$A = \dfrac{16 \cdot 12}{2} = 96$ cm^2

8.63 **Calcula el área de las siguientes figuras.**

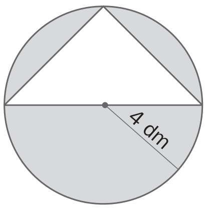
a) Un sector circular de 8 centímetros de radio y un ángulo de 36°.

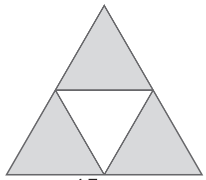
b) La corona circular comprendida entre dos circunferencias de 19 y 34 centímetros de diámetro cada una de ellas.

a) $A = \dfrac{\pi \cdot 8^2 \cdot 36°}{360°} = 20,11$ cm^2

b) $A = \pi \cdot (17^2 - 9,5^2) = 624,39$ cm^2

8.64 Calcula el área de la parte coloreada de las figuras compuestas presentadas a continuación.





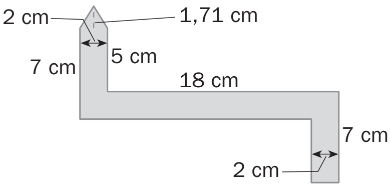
a) $A = \pi \cdot 4^2 - \dfrac{8 \cdot 4}{2} = 34,27 \text{ cm}^2$

b) Son 3 triángulos equiláteros de 7,5 cm de lado.

La altura: $h = \sqrt{7,5^2 - 3,75^2} = 6,5 \text{ cm}$

$A = 3 \cdot \dfrac{7,5 \cdot 6,5}{2} = 73,13 \text{ cm}^2$

8.65 Calcula el perímetro y el área de esta figura.



Para hallar el perímetro es necesario calcular la medida de los lados iguales del triángulo:

$l = \sqrt{1,71^2 + 1^2}$ $\qquad l = 1,98 \text{ cm}$

$P = 2 + 7 + (20 - 2) + 5 + 2 \cdot 1,98 + 7 + (20 - 2)$

$P = 60,96 \text{ cm}$

$A = 2 \cdot 7 + (20 - 7) \cdot 2 + 5 \cdot 2 + \dfrac{2 \cdot 1,71}{2} = 61,71 \text{ cm}^2$

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

8.66 Calcula el área total y el volumen de las figuras indicadas a continuación.

a) Un prisma pentagonal regular de 30 centímetros de perímetro en su base, 11 de altura y 3,44 de apotema.

b) Un cono de 17 decímetros de diámetro en su base y 25 de altura.

a) El lado de la base es 30 : 5 = 6 cm.

$A = 2 \cdot \dfrac{30 \cdot 3,44}{2} + 5 \cdot 6 \cdot 11 = 433,2$

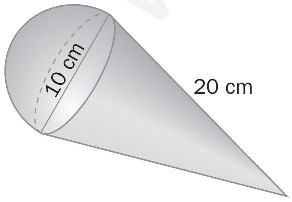
$V = \dfrac{30 \cdot 3,44}{2} \cdot 11 = 567,6 \text{ cm}^3$

b) La generatriz del cono: $g = \sqrt{25^2 + 8,5^2} = 26,41 \text{ cm}$

$A = \pi \cdot 8,5^2 + 2\pi \cdot 8,5 \cdot 26,41 = 1637,46 \text{ dm}^2$

$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 8,5^2 \cdot 25 = 1891,5 \text{ dm}^3$

8.67 Halla el volumen de la figura geométrica representada a la izquierda.



La altura del cono: $h = \sqrt{20^2 - 5^2} = 19,36 \text{ cm}$

$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 19,36 + 4 \cdot \pi \cdot 5^2 = 821 \text{ cm}^3$

8.68 ¿Qué cantidad de chapa se necesita para hacer una esfera hueca de 5 metros de diámetro? ¿Cuánta agua cabe en su interior?

$461,81 = \pi \cdot 0,175^2 \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{461,81}{0,175^2 \cdot \pi} = 4,8 \text{ cm}$

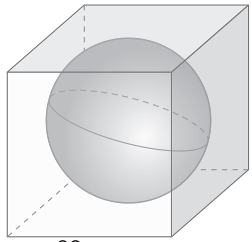
$A = 2 \cdot \pi \cdot 0,175^2 + 2\pi \cdot 0,175 \cdot 4,8 = 5,47 \text{ cm}^2$

8.69 Halla la altura y el área total de un cilindro de 461,81 cm³ de volumen si el radio de la base mide 35 milímetros.

$A_b = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 179{,}60 \text{ cm}^2 \Rightarrow h = \frac{V}{A_b} = 2{,}57 \text{ cm}$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_{\text{lateral}} = 2 \cdot 179{,}60 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 415{,}74 \text{ cm}^2$

8.70 En el interior de este cubo se ha colocado una esfera tangente a sus caras. Calcula el volumen que queda entre ambas figuras.



$V = 22^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 11^3 = 5072{,}72 \text{ cm}^3$

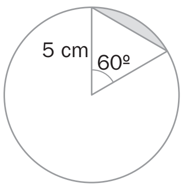
AMPLIACIÓN

8.71 El volumen de un cilindro es de 24 033,18 dm³ y su altura mide 340 centímetros. ¿Cuál es su radio?

$24\,033{,}18 = \pi \cdot r^2 \cdot 34$

$r = \sqrt{\frac{24\,033{,}18}{34\pi}} = 15 \text{ dm}$

8.72 Calcula el área de la parte coloreada de la figura representada.



$A_{\text{segmento circular}} = A_{\text{sector circular}} - A_{\text{triángulo}}$

$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 60°}{360°} = 13{,}09 \text{ cm}^2$

Para hallar el área del triángulo, hay que calcular su base y su altura. En principio es isósceles, puesto que dos de sus lados son iguales al radio de la circunferencia y, por tanto, los ángulos que forman estos con el segmento que delimita la zona a calcular son iguales: $\frac{180° - 60°}{2} = 60°$ mide cada uno de ellos.

Se trata, entonces, de un triángulo equilátero y el lado desconocido mide también 5 cm.

$h = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33 \text{ cm} \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 10{,}83 \text{ cm}^2$

$A_{\text{segmento circular}} = 13{,}09 - 10{,}83 = 2{,}26 \text{ cm}^2$

8.73 En el interior de una esfera de 13 decímetros de diámetro hay una pirámide triangular de 8 decímetros de lado y 6 de altura. ¿Qué volumen queda entre los dos cuerpos geométricos?

$V = V_{\text{esfera}} - V_{\text{tetraedro}}$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 6{,}5^2 = 178{,}07 \text{ dm}^3$

Para hallar el área de la base de la pirámide hay que calcular primero la altura de un triángulo equilátero de 8 dm de lado:

$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6{,}93 \text{ dm}$

Área del triángulo de la base: $\frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ dm}^2$

$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot 27{,}72 \cdot 6 = 55{,}44 \text{ dm}^3$

$V = 178{,}07 - 55{,}44 = 122{,}63 \text{ dm}^3$ es el volumen entre los dos cuerpos.

8.74 La diagonal de un cubo es de $7\sqrt{3}$ centímetros. Calcula su área y su volumen. ¿Cuál es el radio de una esfera circunscrita al cubo?

Si l es el lado del cuadrado, la diagonal de una cara es: $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}l$.

La diagonal del cubo: $D = \sqrt{(\sqrt{2}l)^2 + l^2} = \sqrt{2l^2 + l^2} = \sqrt{3}l \Rightarrow 7\sqrt{3} = \sqrt{3}l \Rightarrow l = 7$ cm

$A = 6 \cdot 7^2 = 294$ cm^2

$V = 7^3 = 343$ cm^3

$R - \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$

8.75 Estudia cómo varía el volumen de un cilindro de radio *r* y altura *h* en cada uno de los siguientes casos.

a) Su altura aumenta el doble.

b) Su radio disminuye a la mitad.

c) Su altura aumenta el doble y su radio también.

El volumen del cilindro es: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

a) $V = \pi \cdot r^2 \cdot 2h = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 2V$

El volumen también aumenta el doble.

b) $V = \pi \cdot \left(\dfrac{r}{2}\right)^2 \cdot h = \dfrac{1}{4}\pi \cdot r^2 \cdot h = \dfrac{1}{4} \cdot V$

El volumen disminuye a la cuarta parte.

c) $V = \pi \cdot (2r)^2 \cdot 2h = 8 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 8 \cdot V$

El volumen se multiplica por 8.

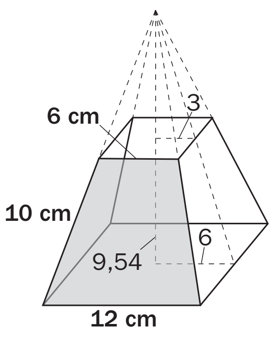
8.76 Halla el área total y el volumen del tronco de pirámide representado a la derecha.

Para hallar el área de una cara lateral es necesario calcular su altura:

$h = \sqrt{10^2 - \left(\dfrac{12 - 6}{2}\right)^2} = 9,54$ cm

$A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \dfrac{(12 + 6) \cdot 9,54}{2} = 343,44$ cm^2

$A_{\text{total}} = 12^2 + 6^2 + 343,44 = 523,44$ cm^2



Para obtener el volumen, hay que conocer la altura de la pirámide de la que se obtuvo este tronco:

$\dfrac{6}{h} = \dfrac{3}{h - 9,54} \Rightarrow 6h - 57,24 = 3h \Rightarrow h = 19,08$ cm

$V = \dfrac{1}{3}12^2 \cdot 19,08 - \dfrac{1}{3}6^2 \cdot (19,08 - 9,54) = 801,36$ cm^3

8.77 Unos módulos para guardar ropa debajo de la cama tienen la base con forma de sector circular de 60 centímetros de radio y ángulo de 80°. La altura de los mismos es de 20 centímetros.

¿Qué capacidad tienen?

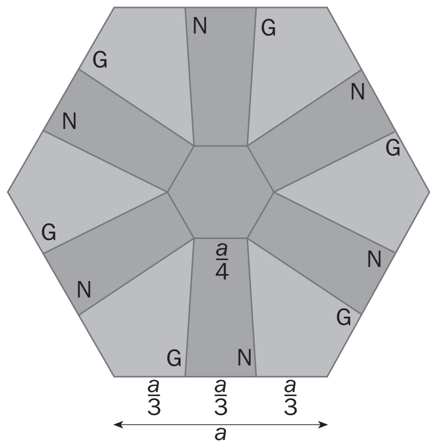
Si la base fuera un círculo completo, la figura sería un cilindro, de modo que es una parte de él.

$A_{\text{sector}} = \dfrac{\pi \cdot 60^2 \cdot 80°}{360°} = 2513,27$ cm^2

$V = 2513,17 \cdot 20 = 50\,263,40$ cm^3

Logotipo

8.78 **A continuación se muestra el logotipo de una marca de coches. Su contorno exterior es un hexágono regular, y en el interior incluye otro hexágono, también regular. En el diseño hay únicamente zonas de color gris y zonas de color naranja, tal y como muestra la figura.**



a) Calcula en qué proporción está el área de color gris respecto del área de color naranja.

b) Halla dichas áreas si el lado del hexágono interior es de un centímetro.

Apotema del hexágono exterior: $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Apotema del hexágono interior: $\frac{\sqrt{3}}{8}a$

Altura de los trapecios isósceles: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)a = \frac{3\sqrt{3}}{8}a$

Área de un trapecio: $\dfrac{\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{4}\right)\frac{3\sqrt{3}}{8}a}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{64}a^2$

Área naranja: $6 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{64}a^2 + \dfrac{\frac{3}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}a}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ Área gris: $\dfrac{6a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

a) $\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2} = 1$

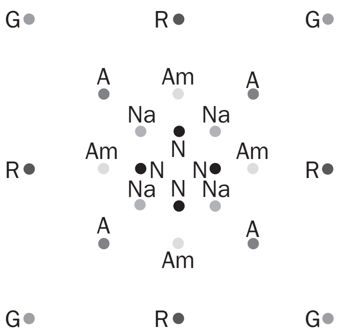
b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ cm^2

Bolas de colores

8.79 **En la siguiente disposición se verifica que:**

- **En cualquier caso, las cuatro bolas de un mismo color son los vértices de un cuadrado.**
- **Cualquier bola roja es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas grises.**
- **Cualquier bola azul es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas rojas.**
- **Cualquier bola amarilla es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas azules.**
- **Cualquier bola naranja es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas amarillas.**
- **Cualquier bola de color negro es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas naranjas.**

Si la distancia entre dos bolas grises es de 10 centímetros, calcula las áreas de los cuadrados determinados por las bolas del mismo color y halla la distancia entre dos bolas negras consecutivas.



Áreas de los cuadrados de extremos:

Grises: 100	Rojos: 50	Azules: 25
Amarillos: 12,5	Verdes: 6,25	Negros: 3,125

Distancia entre dos bolas negras: $\sqrt{3{,}125} = 1{,}768$ cm

8.A1 Calcula el perímetro y el área de:

a) Un cuadrado de 18 centímetros de diagonal.

b) Un octógono regular de 7 centímetros de lado y 5,3 de apotema.

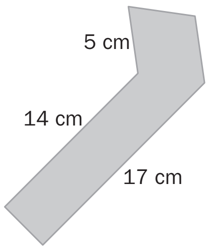
a) $18^2 = 2 \Rightarrow l^2 \Rightarrow l = 12{,}73$ cm; por tanto, $P = 50{,}91$ cm y $A = 162$ cm^2

b) $P = 8 \cdot 7 = 56$ cm^2

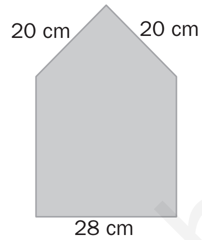
$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{56 \cdot 5{,}3}{2} = 148{,}40 \text{ cm}^2$$

8.A2 Halla el área de las figuras siguientes.

a)



b)



a) $$h_{\text{trapecio}} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{17 - 14}{2}\right)^2} = 4{,}77 \text{ cm}$$

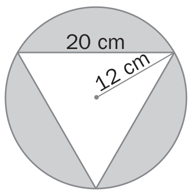
$$A = \frac{(17 + 14) \cdot 4{,}77}{2} = 73{,}94 \text{ cm}^2$$

b) $$h_{\text{triángulo}} = \sqrt{20^2 - 14^2} = 14{,}28 \text{ cm}$$

$$A = 28^2 + \frac{28 \cdot 14{,}28}{2} = 983{,}92 \text{ cm}^2$$

8.A3 Calcula el área de la zona coloreada.

a)



a) $A = A_{\text{círculo}} - A_{\text{triángulo}}$

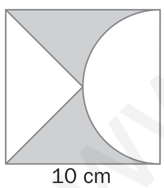
$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot 12^2 = 452{,}39$ cm^2

La altura del triángulo: $h = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}32$ cm

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{20 \cdot 17{,}32}{2} = 173{,}2 \text{ cm}^2$$

$A = 452{,}39 - 173{,}2 = 279{,}18$ cm^2

b)



b) $A = A_{\text{cuadrado}} - A_{\text{semicírculo}} - A_{\text{triángulo}}$

$A_{\text{cuadrado}} = 10^2 = 100$ cm^2

$$A_{\text{semicírculo}} = \frac{1}{2}\pi \cdot 5^2 = 39{,}27 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25 \text{ cm}^2$$

$A = 100 - 39{,}27 - 25 = 35{,}73$ cm^2

8.A4 Calcula el área total de las siguientes figuras.

a) Un prisma pentagonal de 6 centímetros de lado, 3,8 de apotema y 18 de altura.

b) Un cono de 24 centímetros de generatriz y 6 de radio de base.

c) Una pirámide con 2 lados verticales de 15 cm de altura cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de 8 cm de hipotenusa.

a) $$A = 2 \cdot A_b + A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \frac{P \cdot a}{2} + P \cdot h = 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 3{,}8}{2} + 5 \cdot 6 \cdot 18 = 654 \text{ cm}^2$$

b) $A = \pi \cdot 6^2 + 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 24 = 1017{,}88$ cm^2

c) Los catetos de la base miden: $c = \sqrt{\dfrac{8^2}{2}} = 5{,}66 \text{ cm}^2$.

Para calcular la altura del triángulo lateral cuya base es la hipotenusa del triángulo de la base, consideramos el triángulo rectángulo de catetos la altura de la pirámide, 15 cm, y la tercera parte de la mediana (que coincide con la altura sobre la hipotenusa) del triángulo de la base.

Altura sobre la hipotenusa: $a = \sqrt{5{,}66^2 - 4^2} = 4 \text{ cm}$

Altura del triángulo lateral: $b = \sqrt{4^2 + 15^2} = 15{,}52 \text{ cm}$

$$A = \frac{5{,}66^2}{2} + 2 \cdot \frac{5{,}66 \cdot 15}{2} + \frac{8 \cdot 15{,}52}{2} = 163 \text{ cm}^2$$

8.A5 **Halla la altura de un cilindro de 5852,79 dm³ de volumen y 23 decímetros de diámetro.**

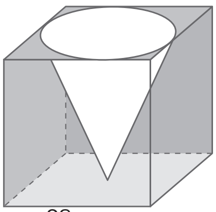
$$5852{,}79 = \pi \cdot 11{,}5^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{5852{,}79}{11{,}5^2\pi} = 14{,}09 \text{ dm}$$

8.A6 **Calcula el radio de una esfera de 0,18 m³ de volumen.**

$$0{,}18 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{0{,}18 \cdot 3}{4\pi}} = 0{,}35 \text{ m}$$

8.A7 **Halla el volumen de la zona sombreada:**

a)



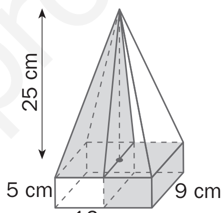
$V = V_{cubo} - V_{cono}$

$V_{cubo} = 28^3 = 21\,952 \text{ cm}^3$

$V_{cono} = \pi \cdot 12^2 \cdot 12 = 5428{,}67 \text{ cm}^3$

$V = 21\,952 - 5428{,}67 = 16\,523{,}33 \text{ cm}^3$

b)



$V = V_{ortoedro} + V_{pirámide}$

$V_{ortoedro} = 16 \cdot 9 \cdot 5$

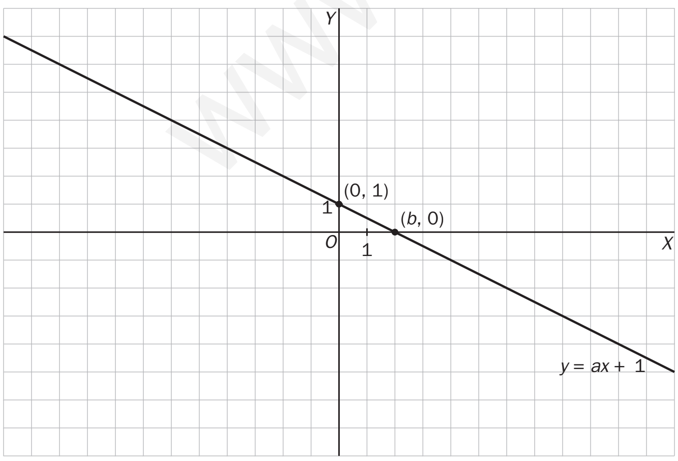
$V_{pirámide} = \dfrac{1}{3} \cdot 16 \cdot 9 \cdot 25$

$V = 1920 \text{ cm}^3$

M A T E T I E M P O S

El área mínima de un triángulo

Todas las rectas de ecuación $y = ax + 1$ forman triángulos con los ejes de coordenadas para diferentes valores de $a (a \neq 0)$. Calcula el valor de a para que el triángulo sea isósceles. ¿Qué valor debe tener para que el área del triángulo sea mínima?



El valor de a podrá ser positivo si la recta es creciente o negativo si es decreciente, y siempre la recta pasará por el punto (0, 1). Analicemos la recta decreciente (la recta creciente será simétrica al eje $x = 0$ y tendrá los mismos resultados). El área será:

$$A = \frac{b \times 1}{2} = \frac{b}{2}$$

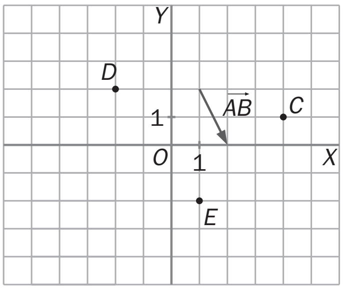
El área del triángulo será mínima cuando b se acerque a cero, luego el área tenderá a cero.

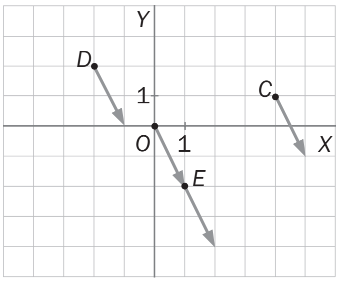
El triángulo será isósceles cuando $b = 1$ y la recta pase por el punto (1, 0). Entonces, $a = -1$.

También será isósceles si $b = -1$ y la recta pasa por el punto (−1, 0). Entonces, $a = 1$.

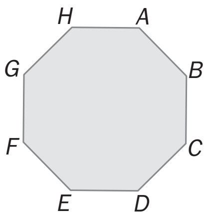
EJERCICIOS PROPUESTOS

9.1 Dibuja cuatro vectores equipolentes al vector $\overrightarrow{AB}$ de la figura que tengan sus orígenes en los puntos *O*, *C*, *D* y *E*.





9.2 En la figura siguiente, identifica todos los vectores que sean equipolentes entre sí.



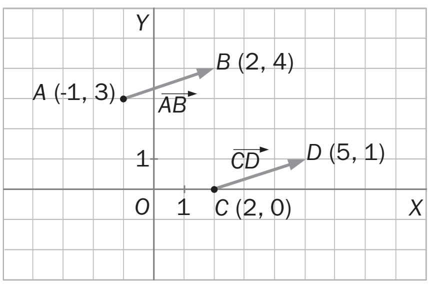
Son equipolentes: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{FG}$ y $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{GH}$ y $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HA}$ y $\overrightarrow{ED}$.

9.3 Dados los puntos $A(-1, 3)$; $B(2, 4)$; $C(2, 0)$, y $D(5, 1)$:

a) Representa los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

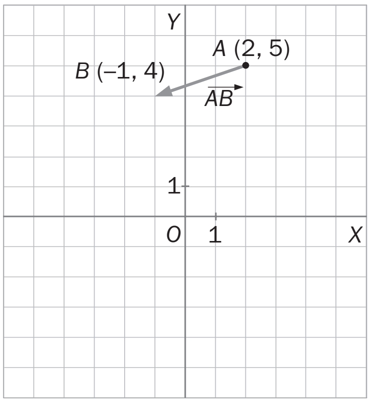
b) ¿Son equipolentes $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$?

a)



b) Sí que son equipolentes porque tienen igual longitud, dirección y sentido.

9.4 Representa el vector $\overrightarrow{AB}$ siendo $A(2, 5)$ y $B(-1, 4)$, y halla sus coordenadas y su módulo.



Coordenadas: $(-1, -4) - (2, 5) = (-3, -9)$

Módulo: $|\overrightarrow{AB}| = +\sqrt{(-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{90} = 9{,}49$ unidades

9.5 Calcula el módulo y el argumento de los vectores $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 1)$ y $\vec{w} = (-1, -2)$.

$|\vec{u}| = +\sqrt{2^2 + (-3)^2} = +\sqrt{13}$ unidades

Argumento de $\vec{u}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{-3}{2} = -1{,}5 \Rightarrow \alpha = 123°\ 69'$

$|\vec{v}| = +\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = +\sqrt{2}$ unidades

Argumento de $\vec{v}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \alpha = 315°$

$|\vec{w}| = +\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = +\sqrt{5}$ unidades

Argumento de $\vec{w}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{-2}{-1} = 2 \Rightarrow \alpha = 63°\ 26'\ 6''$

9.6 Dados $\vec{u} = (-1, 2)$ y $\vec{v} = (3, 1)$, calcula:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $-2\vec{u}$

c) $4\vec{v}$

d) $-2\vec{u} + 4\vec{v}$

a) $\vec{u} + \vec{v} = (-1, 2) + (3, 1) = (2, 3)$

b) $-2\vec{u} = -2 \cdot (-1, 2) = (-2, -4)$

c) $4\vec{v} = 4 \cdot (3, 1) = (12, 4)$

d) $-2\vec{u} + 4\vec{v} = (-2, -4) + (12, 4) = (10, 0)$

9.7 Halla el módulo y el argumento de los vectores $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$, siendo $\vec{a} = (-1, 4)$ y $\vec{b} = (2, 0)$.

$\vec{a} + \vec{b} = (-1, 4) + (2, 0) = (1, 4)$

$|\vec{a} + \vec{b}| = +\sqrt{1^2 + 4^2} = +\sqrt{17}$ unidades. Argumento de $\vec{a} + \vec{b}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{4}{1} = 4 \Rightarrow \alpha = 75°\ 57'\ 50''$

$\vec{a} - \vec{b} = (-1, 4) - (2, 0) = (-3, 4)$

$|\vec{a} - \vec{b}| = +\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ unidades. Argumento de $\vec{a} - \vec{b}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{-4}{3} = -1{,}\widehat{3} \Rightarrow \alpha = -53°\ 7'\ 48''$

9.8 Los vértices de un cuadrilátero son $A(3, 7)$; $B(7, 2)$; $C(5, -4)$, y $D(-4, 5)$.

Calcula la medida de los lados.

Halla el punto medio de cada lado.

a) $\overrightarrow{AB} = (7, 2) - (3, 7) = (4, -5) \Rightarrow d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$ unidades

$\overrightarrow{BC} = (5, -4) - (7, 2) = (-2, -6) \Rightarrow d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ unidades

$\overrightarrow{CD} = (5, -4) - (-4, 5) = (9, -9) \Rightarrow d(C, D) = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9^2 + (-9)^2} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$ unidades

$\overrightarrow{DA} = (-4, 5) - (3, 7) = (-7, -2) \Rightarrow d(D, A) = |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$ unidades

b) $M_{AB} = \left(\frac{7 + 3}{2}, \frac{2 + 7}{2}\right) = \left(5, \frac{9}{2}\right)$

$N_{BC} = \left(\frac{5 + 7}{2}, \frac{-4 + 2}{2}\right) = (6, -1)$

$P_{CD} = \left(\frac{5 - 4}{2}, \frac{-4 + 5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$Q_{DA} = \left(\frac{-4 + 3}{2}, \frac{5 + 7}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, 6\right)$

9.9 Determina los puntos medios de cada lado en el triángulo de vértices $A(2, 0)$; $B(3, 3)$ y $C(1, 2)$, y calcula la distancia de cada punto medio al vértice opuesto del triángulo.

$M_{AB} = \left(\frac{2 + 3}{2}, \frac{0 + 3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$N_{BC} = \left(\frac{3 + 1}{2}, \frac{3 + 2}{2}\right) = \left(2, \frac{5}{2}\right)$

$P_{CA} = \left(\frac{1 + 2}{2}, \frac{2 + 0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$

$\overrightarrow{M_{AB}C} = (1, 2) - \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow d(M_{AB}, C) = |\overrightarrow{M_{AB}C}| = \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ unidades

$\overrightarrow{N_{BC}A} = (2, 0) - \left(2, \frac{5}{2}\right) = \left(0, \frac{-5}{2}\right) \Rightarrow d(N_{BC}, A) = |\overrightarrow{N_{BC}A}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ unidades

$\overrightarrow{P_{CA}C} = (1, 2) - \left(\frac{3}{2}, 1\right) = \left(\frac{-1}{2}, 1\right) \Rightarrow d(P_{CA}, C) = |\overrightarrow{P_{CA}C}| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1^1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ unidades

9.10 Calcula las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas:

a) Paralela a $\vec{u} = (-1, -2)$ y que pasa por $A(3, 0)$.

b) Paralela a $\vec{u} = (2, -5)$ y que pasa por $A(-2, 4)$.

a) La recta pasa por el punto $A(3, 0)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u} = (-1, -2)$. Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$, resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (3, 0) + t(-1, -2)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (3, 0) + (-t, -2t) = (3 - t, -2t) \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 - t \\ y = -2t \end{matrix} \quad \text{con } t \in \mathbf{R}$$

b) La recta pasa por el punto $A(-2, 4)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u} = (2, -5)$. Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$, resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (-2, 4) + t(2, -5)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (-2, 4) + (2t, -5t) = (-2 + 2t,\ 4 - 5t) \Rightarrow \begin{matrix} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 5t \end{matrix} \quad \text{con } t \in \mathbf{R}$$

9.11 **Halla dos puntos y un vector director de la recta de ecuaciones paramétricas son:** $\begin{matrix} \boldsymbol{x = -3t} \\ \boldsymbol{y = 2 + t} \end{matrix}$

Puntos:

- Para $t = 0 \Rightarrow A(0, 2)$
- Para $t = 1 \Rightarrow B(-1, 3)$

Vector director: $\vec{u} = (-3, 1)$

9.12 **Halla la ecuación de las siguientes rectas en forma paramétrica, continua y general.**

a) Recta que pasa por el punto $A(-1, 2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (-3, 7)$.

b) Recta que pasa por $A(3, -3)$ y tiene por vector director $\vec{u} = (-1, 1)$.

a) Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$, resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (-1, 2) + t(-3, 7)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (-1, 2) + (-3t, 7t) = (-1 - 3t,\ 2 + 7t) \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 - 3t \\ y = 2 + 7t \end{matrix} \quad \text{con } t \in \mathbf{R}$$

Despejando t en cada ecuación e igualando, se llega a la ecuación continua:

$$\left. \begin{matrix} t = \dfrac{-1 - x}{3} \\ t = \dfrac{y - 2}{7} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{-1 - x}{3} = \frac{y - 2}{7}$$

Por último, operando en la ecuación continua se obtiene la ecuación general:

$$-7 - 7x = 3y - 6 \Rightarrow 7x + 3y + 1 = 0$$

b) Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$, resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (3, -3) + t(-1, 1)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (3, -3) + (-t, t) = (3 - t,\ -3 + t) \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 - t \\ y = -3 + t \end{matrix} \quad \text{con } t \in \mathbf{R}$$

Despejando t en cada ecuación e igualando, se llega a la ecuación continua:

$$\left. \begin{matrix} t = -x + 3 \\ t = y + 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -x + 3 = y + 3$$

Por último, despejando en la ecuación continua se obtiene la ecuación general:

$$x + y = 0$$

9.13 Calcula las ecuaciones paramétricas, continua y general de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 0)$ y $B(3, 1)$.

Primero se determina un vector director, $\vec{u}$, a partir de las coordenadas de A y de B.

$$\vec{u} = (3, 1) - (-2, 0) = (5, 1)$$

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$, resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (3, 1) + t(5, 1)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (3, 1) + (5t, t) = (3 + 5t, 1 + t) \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 + 5t \\ y = 1 + t \end{matrix} \text{ con } t \in \mathbf{R}$$

Despejando t en cada ecuación e igualando, se llega a la ecuación continua:

$$\left.\begin{matrix} t = \dfrac{x - 3}{5} \\ t = y - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x - 3}{5} = y - 1$$

Por último, despejando en la ecuación continua se obtiene la ecuación general:

$$x - 3 = 5y - 5 \Rightarrow x - 5y + 2 = 0$$

9.14 Determina, en sus formas paramétricas, continua y general, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(2, 1)$.

Primero se determina un vector director, $\vec{u}$, a partir de las coordenadas de A y de B.

$$\vec{u} = (2, 1) - (2, -1) = (0, 2)$$

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta, al sustituir en la expresión $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$, resulta la ecuación vectorial buscada:

$$(x, y) = (2, 1) + t(0, 2)$$

Operando e igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y) = (2, 1) + (0, 2t) = (2, 1 + 2t) \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 + 2t \end{matrix} \text{ con } t \in \mathbf{R}$$

Como $x = 2$, la recta es paralela al eje OY. La ecuación continua no se puede hallar y la general es $x - 2 = 0$.

9.15 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-4, 2)$ y tiene pendiente $m = 3$.

A partir de la ecuación punto-pendiente de la recta, $y - 2 = 3 \cdot (x + 4)$, se obtiene la ecuación explícita: $y = 3x + 14$.

9.16 Estudia la posición relativa de las rectas:

a) $r \equiv 3x + 2y - 7 = 0 \quad s \equiv 2x - y = 0$

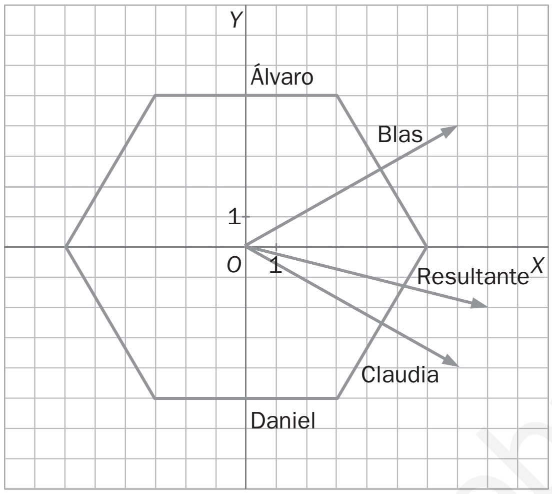
b) $r' \equiv x - 2y - 3 = 0 \quad s' \equiv 3x - 6y + 4 = 0$

a) Se comparan las ecuaciones generales de las dos rectas: $\dfrac{2}{2} \neq \dfrac{-1}{2} \Rightarrow$ las rectas son secantes.

b) Se comparan las ecuaciones generales de las dos rectas: $\dfrac{1}{3} = \dfrac{-2}{-6} \neq \dfrac{-3}{4} \Rightarrow$ las rectas son paralelas.

9.17 Ahora, los cuatro se colocan alrededor de una mesa con forma de hexágono regular, ocupando los cuatro lados consecutivos. ¿Dónde acabará la caja?

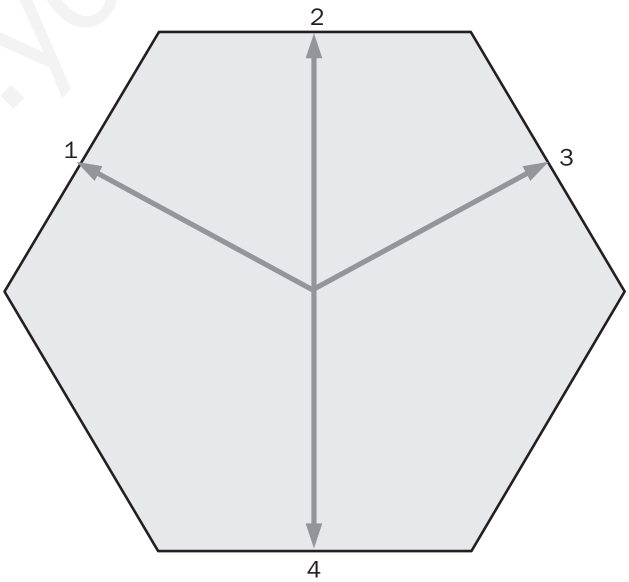
La figura ilustra la situación.



Las fuerzas de Álvaro y Daniel se compensan. Como Blas tira con menos fuerza, la caja acabará en el lado de Claudia.

9.18 En la misma mesa hexagonal se colocan cuatro personas con la misma fuerza, tres en lados consecutivos y otro que deja uno libre a cada lado. ¿Hacia dónde irá la caja?

La figura ilustra la situación.



Las fuerzas de la segunda y de la cuarta persona se compensan.

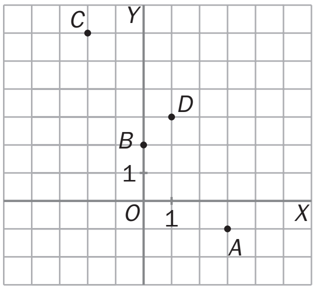
La resultante es la suma de los vectores correspondientes a las otras dos, que coincide con el vector que va hacia la segunda.

Por tanto, la caja irá hacia la segunda persona.

EJERCICIOS PARA ENTRETENERSE

Vectores en el plano

9.19 Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$. ¿Qué relación existe entre ellos?

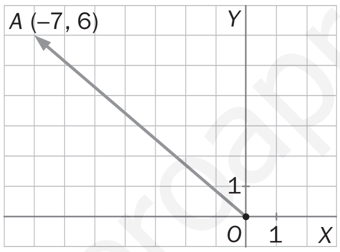


$\overrightarrow{AB} = (0, 2) - (3, -1) = (-3, 3)$

$\overrightarrow{CD} = (1, 3) - (-2, 6) = (3, -3)$

Por tanto, son vectores opuestos.

9.20 Representa el vector de posición del punto $A(-7, 6)$. ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?



Las coordenadas de $\overrightarrow{OA}$ son las mismas que las de $A(-7, 6)$.

9.21 Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son (5, 3). Siendo $B(-1, 4)$, calcula las coordenadas del punto A.

Sea $A(a_1, a_2)$. Entonces:

$\overrightarrow{AB} = (5, 3) = (-1, 4) - (a_1, a_2) \Rightarrow (a_1, a_2) = (-1, 4) - (5, 3) = (-6, 1)$

Por tanto, $A(-6, 1)$

9.22 Calcula el módulo y el argumento de los vectores:

a) $\vec{u} = (4, 4)$ b) $\vec{v} = \left(-1, \sqrt{3}\right)$ c) $\vec{w} = (-2, 2)$

a) $|\vec{u}| = +\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ unidades

Argumento de $\vec{u}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{4}{4} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

b) $|\vec{v}| = +\sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = +\sqrt{4} = 2$

Argumento de $\vec{v}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = -60°$

c) $|\vec{w}| = +\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ unidades

Argumento de $\vec{w}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \alpha = -45°$

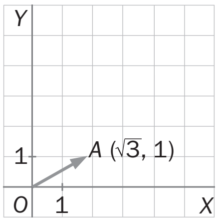
9.23 Para cada caso, dibuja un vector:

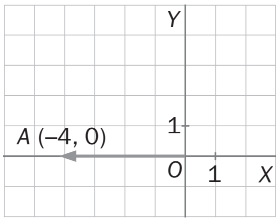
a) De módulo 2 y argumento 30°

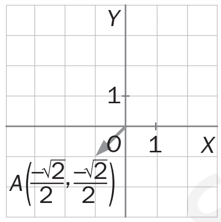
b) De módulo 4 y argumento 180°

c) De módulo 1 y argumento 225°

a) $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ b) $\vec{v} = (-4, 0)$ c) $\vec{w} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$







9.24 Calcula las coordenadas de un vector cuyo módulo sea igual a 1 y que tenga la misma dirección que $\vec{u} = (5, 12)$.

El módulo del vector $\vec{v}$ buscado es 1.

Operaciones con vectores

9.25 Opera:

a) (2, −1) − (4, 3)

b) 6(−3, 1) + (10, −2)

c) 2(−4, 0) − 3(−1, 2)

d) 4(1, −1) + 2(3, 0)

e) (3, −1) − 5(1, −2)

f) (9, 6) − 2(4, 1)

a) $(2, -1) - (4, 3) = (-2, -4)$

b) $6(-3, 1) + (10, -2) = (-8, -4)$

c) $2(-4, 0) - 3(-1, 2) = (-5, -6)$

d) $4(1, -1) + 2(3, 0) = (10, -4)$

e) $(3, -1) - 5(1, -2) = (-2, 8)$

f) $(9, 6) - 2 \cdot (4, 1) = (1, 4)$

9.26 Dados los vectores $\vec{u} = (5, -3)$; $\vec{v} = (-1, 4)$, y $\vec{w} = (2, 2)$, calcula:

a) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w})$

b) $3\vec{u} - 2(\vec{w} - \vec{v})$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u})$

d) $5\vec{w} - 3\vec{v} + \vec{u}$

e) $2(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u}$

f) $\frac{3}{4}\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

a) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = (5, -3) - [(-1, 4) + (2, 2)] = (5, -3) - (1, 6) = (4, -9)$

b) $3\vec{u} - 2(\vec{w} - \vec{v}) = 3 \cdot (5, -3) - 2 \cdot [(2, 2) - (-1, 4)] = (15, -9) - 2 \cdot (3, 6) = (9, -21)$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{2} \cdot [(-1, 4) - (5, -3)] = \left(-3, \frac{7}{2}\right)$

d) $5\vec{w} - 3\vec{v} + \vec{u} = 5 \cdot (2, 2) - 3 \cdot (-1, 4) + (5, -3) = (10, 10) - (-3, 12) + (5, -3) = (18, -5)$

e) $2(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u} = 2 \cdot [(2, 2) + (-1, 4)] - (5, -3) = 2 \cdot (1, 6) - (5, -3) = (-3, 15)$

f) $\frac{3}{4}\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} = \frac{3}{4} \cdot (5, -3) - 2 \cdot (-1, 4) + (2, 2) = \left(\frac{15}{4}, \frac{-9}{4}\right) - (-2, 8) + (2, 2) = \left(\frac{15}{4}, \frac{-9}{4}\right) - (-4, -6) =$

$= \left(\frac{-1}{4}, \frac{15}{4}\right)$

9.27 **Calcula el valor de x e y en estas igualdades:**

a) $(5, -9) = 3(x, y) - 2(x, 0)$

b) $(x, -4) = 2(y, 5) + (3, x)$

c) $(2y, 0) = (x, y) - 2(x, 5)$

d) $(3x, -y) = 2(1, -x) + (y, 9)$

a) $(5, -9) = 3(x, y) - 2(x, 0) \Rightarrow \begin{cases} 5 = 3x - 2x \\ -9 = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$

b) $(x, -4) = 2(y, 5) + (3, x) \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ -4 = 10 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-17}{2} \\ x = -14 \end{cases}$

c) $(2y, 0) = (x, y) - 2(x, 5) \Rightarrow \begin{cases} 2y = x - 2x \\ 0 = y - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -20 \\ y = 10 \end{cases}$

d) $(3x, -y) = 2(1, -x) + (y, 9) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2 + y \\ -y = -2x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = -23 \end{cases}$

9.28 **Dibuja los vectores $\vec{u}(2, 5)$ y $\vec{v}(4, -1)$ y, a partir de ellos, calcula gráficamente:**

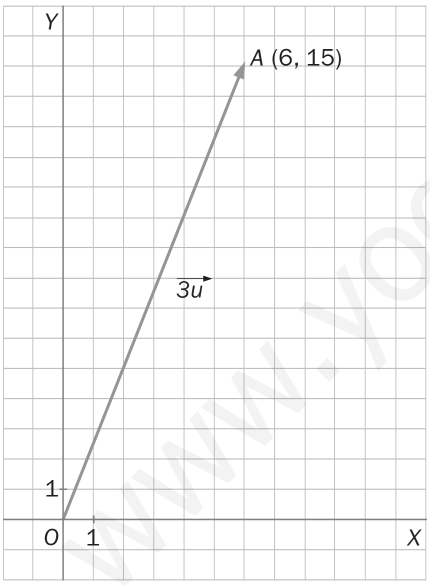
a) $3\vec{u}$

b) $-2\vec{v}$

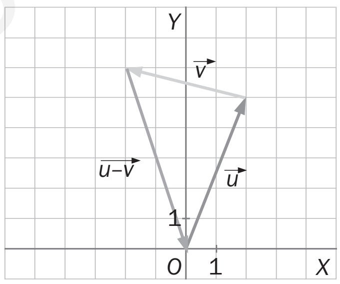
c) $\vec{u} - \vec{v}$

d) $3\vec{u} + \vec{v}$

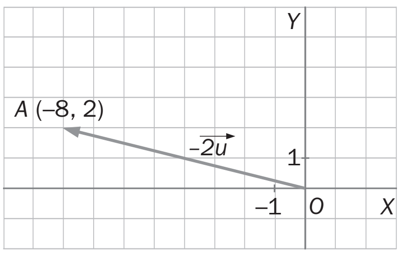
a)



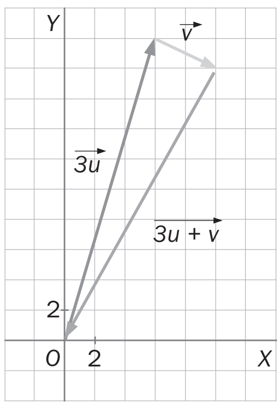
c)



b)



d)



Distancia entre dos puntos. Punto medio

9.29 Calcula la distancia entre los puntos:

a) $A(3, 1)$ y $B(2, 6)$

b) $A(-2, 9)$ y $B(-1, 7)$

c) $A(-4, -2)$ y $B(-1, -5)$

d) $A(0, 7)$ y $B(-4, 0)$

a) $d(A, B) = \sqrt{(2-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$ unidades

b) $d(A, B) = \sqrt{(-1+2)^2 + (7-9)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ unidades

c) $d(A, B) = \sqrt{(-1+4)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ unidades

d) $d(A, B) = \sqrt{(-4-0)^2 + (0-7)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$ unidades

9.30 Clasifica, en función de las longitudes de sus lados, el triángulo de vértices *ABC*.

a) $A(1, 1)$; $B(4, 6)$, y $C(7, 1)$

b) $A(-8, 0)$; $B(-1, -5)$, y $C(-1, 3)$

a) $d(A, B) = \sqrt{(6-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ unidades

$d(A, C) = \sqrt{(7-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{36+0} = 6$ unidades

$d(B, C) = \sqrt{(4-1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ unidades

Es un triángulo isósceles porque $d(A, B) = d(A, C) \neq d(B, C)$.

b) $d(A, B) = \sqrt{(-1+8)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$ unidades

$d(A, C) = \sqrt{(-1+8)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$ unidades

$d(B, C) = \sqrt{(-1+1)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{0+64} = 8$ unidades

Es un triángulo escaleno porque $d(A, B) \neq d(A, C) \neq d(B, C)$.

9.31 Calcula las longitudes de las tres medianas del triángulo de vértices $A(-2, 2)$; $B(2, -1)$, y $C(2, 4)$.

$$M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot [(-2, 2) + (2, -1)] = \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow d(C, M_{AB}) = \sqrt{(0-2)^2 + \left(\frac{1}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ unidades}$$

$$N_{AC} = \frac{1}{2} \cdot [(2, 4) + (-2, 2)] = (0, 3) \Rightarrow d(B, N_{AC}) = \sqrt{(0+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ unidades}$$

$$P_{BC} = \frac{1}{2} \cdot [(2, -1) + (2, 4)] = \left(2, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow d(A, P_{BC}) = \sqrt{(2+2)^2 + \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ unidades}$$

Ecuaciones de la recta

9.32 Determina un punto por el que pase y un vector director de cada una de las rectas.

a) $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+4}{5}$ b) $4x - y = 0$ c) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$ d) $(x, y) = (4, 0) + t(2, -6)$

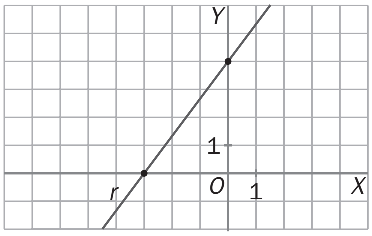
a) $A(3, -4)$ $\vec{v} = (-2, 5)$

b) $A(1, 4)$ $\vec{v} = (1, 4)$

c) $A(2, 5)$ $\vec{v} = (-1, 3)$

d) $A(4, 0)$ $\vec{v} = (2, -6)$

9.33 Halla todas las formas de la ecuación de la recta de la figura.



Un vector director es $\overrightarrow{AB} = (-3, -4)$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 4) + t(-3, -4)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{array}{l} x = -3t \\ y = 4 - 4t \end{array}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y - 4}{-4}$

Ecuación general: $4x - 3y + 12 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{4}{3}x + 3$

Ecuación punto-pendiente: $y = 4 - \dfrac{4}{3}x$

9.34 Halla la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

Se despeja la incógnita y:

$y = \dfrac{-3}{2}x + 3$

Luego $m = \dfrac{-3}{2}$

9.35 Escribe la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(5, 0)$ y $B(0, 2)$.

Primero se determina un vector director, $\vec{u}$, a partir de las coordenadas de A y de B.

$$\vec{u} = (0, 2) - (5, 0) = (-5, 2)$$

La ecuación continua de la recta es:

$$\frac{x - 5}{-5} = \frac{y}{2}$$

Se despeja en la ecuación continua y se obtiene la ecuación general:

$$-2x + 10 = 5y \Rightarrow 2x + 5y + 10 = 0$$

9.36 Calcula la ecuación de la recta en la forma más conveniente para cada uno de los siguientes casos.

a) Recta r que pasa por el punto $(0, -3)$ y tiene pendiente 4.

b) Recta s que tiene la dirección del vector $(5, 2)$ y pasa por el punto $(6, 0)$.

a) La ecuación punto-pendiente: $y + 3 = 4x$.

b) La ecuación continua: $\dfrac{x - 6}{5} = \dfrac{y}{2}$.

9.37 Escribe la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(-2, -1)$ y su vector director es equipolente al de la recta $(x, y) = (1, 3) + t(4, 7)$.

Un vector director de la recta es $(4, 7)$. La ecuación continua de la recta es $\dfrac{x + 2}{4} = \dfrac{y + 1}{7}$.

9.38 Expresa en forma continua y paramétrica la ecuación de la recta $y = 2x + 1$.

Un punto de la recta es $A(0, 1)$, y un vector director es $\vec{u} = (1, 2)$.

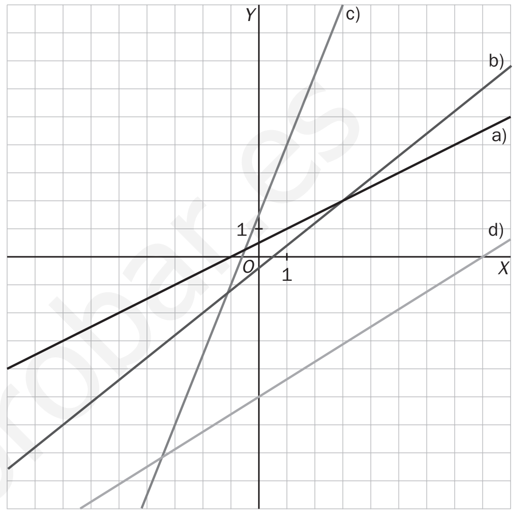
La ecuación continua de la recta es $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 1}{2}$.

La ecuación paramétrica de la recta es $\begin{matrix} x = t \\ y = 1 + 2t \end{matrix} \quad t \in \mathbf{R}$

9.39 Halla la pendiente y un punto por el que pasa cada una de las siguientes rectas. Represéntalas gráficamente.

a) $\dfrac{x + 1}{2} = y$ **c)** $5x - 2y + 3 = 0$

b) $\dfrac{x - 3}{5} = \dfrac{y - 2}{-4}$ **d)** $\dfrac{x}{8} - \dfrac{y}{5} = 1$



a) $A(-1, 0)$ $\quad \vec{v} = (2, 1)$ $\quad m = \dfrac{1}{2}$

b) $A(3, 2)$ $\quad \vec{v} = (5, -4)$ $\quad m = \dfrac{-4}{5}$

c) $x = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(1, 4)$

$\vec{v} = (2, 5)$ $\quad m = \dfrac{5}{2}$

d) $A(0, -5)$ $\quad \vec{v} = (8, 5)$ $\quad m = \dfrac{5}{8}$

9.40 Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $A(1, 3)$ y tiene la misma pendiente que la recta $y = 4x + 9$.

La pendiente de la recta es 4, y pasa por el punto $A(1, 3)$.

La ecuación punto-pendiente es $y - 3 = 4(x - 1)$.

9.41 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas y, en caso de ser secantes, halla su punto de corte.

a) $r \equiv 2x - 5y + 7 = 0 \quad s \equiv x - 2y - 2 = 0$ **c)** $r \equiv x - 5y + 3 = 0 \quad s \equiv 3x - 15y + 8 = 0$

b) $r \equiv 6x + 4y - 12 = 0 \quad s \equiv 3x + 2y - 6 = 0$ **d)** $r \equiv x + y - 5 = 0 \quad s \equiv 3x - 2y = 0$

a) $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-5}{-2} \Rightarrow$ Son secantes.

$$\left.\begin{matrix} 2x - 5y + 7 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 2x - 5y + 7 = 0 \\ -2x + 4y + 4 = 0 \\ \hline -y + 11 = 0 \end{array} \Rightarrow y = 11$$

$$x = 2 \cdot 11 + 2 = 24$$

$\Rightarrow$ Punto de corte $(24, 11)$

b) $\dfrac{6}{3} = \dfrac{4}{2} = \dfrac{-12}{-6} \Rightarrow$ Son coincidentes.

c) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{-5}{-15} \neq \dfrac{3}{8} \Rightarrow$ Son paralelas.

d) $\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{-2} \cdot \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{-2} \Rightarrow$ Son secantes.

$$\left.\begin{matrix} x + y - 5 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 2x + 2y - 10 = 0 \\ 3x - 2y \quad\quad = 0 \\ \hline 5x - 10 = 0 \end{array} \Rightarrow x = 2$$

$$y = 5 - 2 = 3$$

$\Rightarrow$ Punto de corte $(2, 3)$

9.42 Halla el punto de corte de las rectas *r* y *s*, y, a partir del resultado obtenido, indica la posición relativa de ambas rectas.

a) $r \equiv 2x - 3y + 2 = 0$
$s \equiv x - y + 1 = 0$

b) $r \equiv y = x - 3$
$s \equiv 2x - 2y - 6 = 0$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow 2(y - 1) - 3y + 2 = 0 \Rightarrow 2y - 2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -1$

El punto de corte es $(-1, 0)$. Son rectas secantes.

b) $\left.\begin{array}{r} y = x - 3 \\ 2x - 2y - 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x - 2(x - 3) - 6 = 0 \Rightarrow 2x - 2x + 6 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Las rectas tienen todos sus puntos comunes. Son rectas coincidentes.

9.43 Determina la posición relativa de las rectas $r \equiv y = x - 3$ y *s*, determinada por los puntos $A(7, 5)$ y $B(-4, 1)$.

La recta *s* pasa por el punto $A(7, 5)$, y un vector director es $\vec{u} = (-4, 1) - (7, 5) = (-11, -4)$. La ecuación en forma continua de la recta *s* es: $\frac{x - 7}{-11} = \frac{y - 5}{-4}$. Se opera y despeja: $4x - 11y + 27 = 0$.

La ecuación *s* es: $-x + y + 3 = 0$.

Como $\frac{-1}{4} \neq \frac{1}{-11}$, son rectas secantes.

9.44 Estudia la posición relativa de las rectas *r* y *s* sabiendo que *r* pasa por el punto $(3, -6)$ y tiene por vector director $\vec{u}(-2, -4)$, y *s* pasa por el punto $(6, 0)$ y su pendiente es 2.

La ecuación continua de la recta *r* es: $\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 6}{-4}$. Se opera y se despeja: $2x - y - 12 = 0$.

La ecuación punto-pendiente de la recta *s* es: $y = 2 \cdot (x - 6)$. Se opera y se despeja: $2x - y - 6 = 0$.

Como $\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-12}{-6}$, las rectas son paralelas.

9.45 Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$ y es paralela a la que tiene por ecuación $7x - 14y + 3 = 0$.

Despejando en la recta $7x - 14y + 3 = 0$ se obtiene $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{14}$. La pendiente de esta recta es $\frac{1}{2}$.

Como la recta buscada es paralela a la recta $7x - 14y + 3 = 0$, tendrá pendiente $\frac{1}{2}$. Por tanto, la ecuación punto-pendiente de la nueva recta es $y - 4 = \frac{1}{2}(x + 2)$.

9.46 Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(3, 1)$ y por el punto medio del segmento *CD*, siendo $C(-2, -4)$ y $D(-1, 6)$.

El punto medio del segmento *CD* es $M_{CD} = \frac{1}{2} \cdot [(-2 - 1), (-4 + 6)] = \left(\frac{-3}{2}, 1\right)$.

Un vector director de la recta que pasa por *A* y por M_{CD} es $\vec{u} = \left(\frac{-3}{2}, 1\right) - (3, 1) = \left(\frac{-9}{2}, 0\right)$. Como vector de la recta buscada, tomamos uno proporcional a $\left(\frac{-9}{2}, 0\right)$. Tomamos como vector director $(9, 0)$.

Por tanto, la recta buscada es una recta con vector director $\vec{u} = (9, 0)$ y que pasa por el punto $A(3, 1)$.

La ecuación paramétrica de la recta es $\begin{array}{l} x = 3 + 9t \\ y = 1 \end{array}$

9.47 Dada la recta r: $4x + y - 1 = 0$, escribe la ecuación de otra recta s:

a) Paralela a r. **b) Secante con r.**

a) Por ser paralela a la recta r, su vector director será proporcional al vector director de r. Un vector director de la recta r es $\vec{u} = (-1, 4)$. Por tanto, la recta que pasa por un punto cualquiera, por ejemplo, (0, 0), y tiene vector director $\vec{u}$ es paralela a la recta r: $4x + y = 0$.

b) La recta r pasa por el punto $A(0, 1)$. Por tanto, cualquier recta que pase por este punto es secante a r. Por ejemplo, la recta $x + y - 1 = 0$.

9.48 Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de r: $8x - 5y + 2 = 0$ y s: $2x + y - 4 = 0$, y por el punto $A(0, 3)$.

$$\left.\begin{array}{r} 8x - 5y + 2 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x - 5y + 2 = 0 \\ 8x + 4y - 16 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1.$$ El punto de corte es $B(1, 2)$.

Buscamos la ecuación de la recta que pasa por $A(0, 3)$ y $B(1, 2)$.

Primero se determina un vector director, $\vec{u}$, a partir de las coordenadas de A y de B.

$$\vec{u} = (1, 2) - (0, 3) = (1, -1)$$

La ecuación continua de la recta es $\frac{x}{1} = \frac{y - 3}{-1}$. Operando se obtiene la ecuación general: $x + y - 3 = 0$.

9.49 Estudia si las rectas

r: $3x + y - 5 = 0$

s: $2x - y = 0$

t: $x + 4y - 9 = 0$

se cortan en un mismo punto y, en caso afirmativo, calcula sus coordenadas.

Se halla primero el punto de corte de dos de ellas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y - 5 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}$$

El punto de corte de r y s es (1, 2).

Ahora se comprueba si ese punto pertenece a t: $1 + 4 \cdot 2 - 9 = 0$.

Por tanto, las tres rectas se cortan en el mismo punto: (1, 2).

CUESTIONES PARA ACLARARSE

9.50 Siendo $A(1, 4)$ y $B(0, 6)$, ¿será el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector libre $\vec{u} = (-1, 2)$?

$\overrightarrow{AB} = (0, 6) - (1, 4) = (-1, 2)$. Sí lo es, porque tienen las mismas coordenadas.

9.51 ¿Son equipolentes dos vectores opuestos? Razona tu respuesta.

No, porque tienen distinto sentido.

9.52 La dirección de una recta es la del vector $\vec{u} = (4, 2)$. ¿Puede ser $\vec{v}(-2, -1)$ un vector director de esa recta?

Sí, porque son vectores proporcionales.

9.53 a) Razona si se puede determinar la ecuación de una recta sabiendo que pasa por el punto $A(0, 6)$ y que su ordenada en el origen es 6.

b) ¿Y la de una recta que pasa por el punto A y por el origen de coordenadas?

a) No, porque la ordenada en el origen sea 6 quiere decir que pasa por el punto de primera coordenada 0 y de segunda coordenada 6, que es el punto A, y, por tanto, solo se sabe un punto de la recta, y para que quede determinada se necesita, al menos, otro punto.

b) En este caso sí es posible determinarla porque se conocen dos puntos por los que pasa.

9.54 **La recta r pasa por $(5, -1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (6, 2)$. La ecuación de la recta s es $\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-4}$. ¿Cuál es la posición relativa de r y s?**

La ecuación continua de la recta r es $\frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{2}$. Operando se obtiene la ecuación general $2x - 6y - 16 = 0$.

Operando en la ecuación continua de la recta s se obtiene la ecuación general de la recta s $4x + 3y - 17 = 0$.

Como $\frac{2}{4} \neq \frac{-6}{3}$, las rectas son secantes.

9.55 **Explica cuál puede ser la posición relativa de dos rectas que tienen la misma pendiente.**

Si tienen la misma pendiente, pueden ser paralelas (si no tienen ningún punto común) o coincidentes (si tienen todos los puntos comunes).

9.56 **Sin realizar cálculos, indica cuáles de los siguientes vectores tienen su argumento comprendido entre 90° y 180°.**

a) $\vec{u} = (3, -4)$ **b)** $\vec{v} = (-1, 9)$ **c)** $\vec{w} = (-2, -2)$

Para que su argumento esté comprendido entre 90° y 180°, la primera coordenada del vector ha de ser negativa, y la segunda, positiva, ya que su representación gráfica debe quedar en el segundo cuadrante.

El único vector es el del apartado b.

9.57 **Relaciona en tu cuaderno las rectas dadas por las siguientes ecuaciones con los elementos que les corresponden.**

$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-4}$	$n = \frac{5}{8}$
$y + 1 = 3x$	$A(7, -2)$
$3x + 8y - 5 = 0$	$\vec{u} = (1, 5)$
$y = 5x + 4$	$m = 3$

$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-4}$ con $A(7, -2)$, $y + 1 = 3x$ con $m = 3$, $3x + 8y - 5 = 0$ con $n = \frac{5}{8}$ e $y = 5x + 4$ con $\vec{u} = (1, 5)$

9.58 **¿Cuál es la posición relativa de dos rectas**

a) que tienen la misma dirección y un punto común?

b) con distinta dirección?

c) que en su ecuación punto-pendiente tienen la misma pendiente y el punto distinto?

a) Tienen todos sus puntos comunes. Son coincidentes.

b) Secantes.

c) Si no tienen un punto común y su dirección es la misma, son paralelas.

9.59 **Si M es el punto medio del segmento de extremos A y B, ¿cuáles de los siguientes pares de vectores son equipolentes?**

a) $\overrightarrow{AB}$ **y** $\overrightarrow{MB}$ **c)** $\overrightarrow{AM}$ **y** $\overrightarrow{BM}$

b) $\overrightarrow{AM}$ **y** $\overrightarrow{MB}$ **d)** $\overrightarrow{BM}$ **y** $\overrightarrow{MA}$

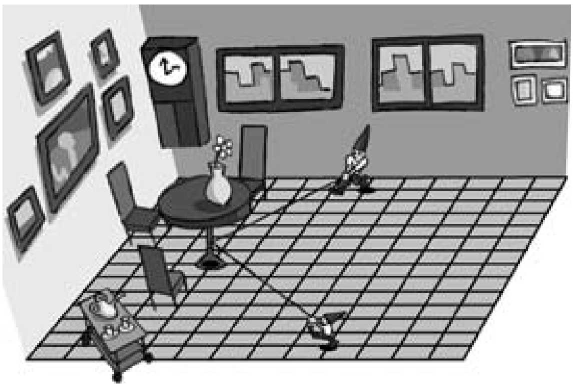
a) No son equipolentes porque no tienen el mismo módulo.

b) Sí son equipolentes: tienen igual dirección, sentido y módulo.

c) No son equipolentes porque tienen distinto sentido.

d) Sí son equipolentes: tienen igual módulo, dirección y sentido.

9.60 Para arrastrar una mesa muy pesada de tablero circular y con una pata en el centro, se atan dos cuerdas y se tira de ellas como muestra la figura.



Si se utilizase una única cuerda para obtener el mismo resultado que con las dos anteriores, ¿qué fuerza debería aplicarse?

La fuerza que se ejerce sobre cada una de las cuerdas tiene el mismo módulo, dirección y sentido que los vectores $\vec{a} = (3, 6)$ y $\vec{b} = (5, -6)$.

La cuerda se obtendría como resultado de sumar las otras dos.
$\vec{a} + \vec{b} = (3, 6) + (5, -6) = (8, 0)$.

9.61 Una maqueta de un barco de vela es empujada por la corriente del agua de un estanque que ejerce una fuerza $f_a = (10, 8)(N)$. A su vez, el viento sopla con una fuerza $f_v = (-3, -1)(N)$.

¿De qué dirección y sentido es la fuerza resultante? ¿Cuál es su módulo?

El barco se desplaza según el resultado de sumar a la fuerza de la corriente la del viento:

$(10, 8) + (-3, -1) = (7, 7)$

El barco se desplaza en el mismo sentido que la fuerza de la corriente.

Su módulo es: $\sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

9.62 En un radar se observa el vuelo de dos aviones. Uno de ellos se encuentra en el punto de coordenadas (5, 3) y se desplaza siguiendo la dirección del vector $\vec{u} = (-4, 7)$. La trayectoria del segundo queda determinada por la recta de ecuación $7x + 4y + 83 = 0$.

Si continuaran su vuelo de forma indefinida, ¿chocarían en algún momento?

Trayectoria del primer avión: $\frac{x - 5}{-4} = \frac{y - 3}{7} \Rightarrow 7x + 4y - 47 = 0$

Trayectoria del segundo avión: $7x + 4y + 83 = 0$

La posición relativa de los dos es: $\frac{7}{7} = \frac{4}{4} \neq \frac{-47}{83}$.

Las trayectorias son paralelas. Por tanto, no chocarían en ningún momento.

9.63 Una cigüeña tiene su nido situado sobre una torre a 50 metros de altura. Ella está sobre el suelo a 100 metros de distancia de la torre.

a) Si subiera hasta el nido en línea recta, ¿cuál sería la ecuación de la trayectoria seguida? ¿Y cuál la pendiente de la misma?

b) ¿A qué distancia del nido se encuentra la cigüeña?

a) La posición del nido respecto a esos ejes es (0, 50), y la de la cigüeña sobre el suelo, (100, 0).

Ecuación de la trayectoria: $\frac{x}{100} = \frac{y - 50}{-50} \Rightarrow m = \frac{-50}{100} = -\frac{1}{2}$

b) Distancia entre el nido y la cigüeña: $\sqrt{100^2 + 50^2} = \sqrt{12\,500} = 50\sqrt{5}$ metros

9.64 Al dibujar una mesa de billar a escala, los vértices de la misma han quedado situados en los puntos de coordenadas $O(0, 0)$; $A(0, 6)$, y $C(12, 0)$.

a) Halla las coordenadas del cuarto vértice, B.

b) Si una bola se sitúa en la mitad del lado AB y se pretende que llegue a la mitad del lado BC, ¿qué distancia recorrerá?

c) ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria?

a) Como la mesa es rectangular, al situar los puntos en el plano se observa que $C(12, 6)$.

b) El punto medio del lado AB es $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot [(12, 0) + (0, 6)] = (6, 3)$.

El punto medio del lado BC es $N_{BC} = \frac{1}{2} \cdot [(12, 6) + (0, 6)] = (6, 6)$.

$d(M_{AB}, N_{BC}) = \sqrt{(6 - 6)^2 + (6 - 3)^2} = 3$ unidades recorrerá.

c) El vector director es $\vec{v} = \overrightarrow{M_{AB}N_{BC}} = (6, 6) - (6, 3) = (0, 3)$. Como es un vector horizontal, la ecuación de la trayectoria es la recta horizontal $y = 3$.

9.65 Para regar los árboles de un jardín se van a colocar unas tuberías que comuniquen unos con otros.

Si dos de esos árboles están situados en puntos de coordenadas $A(4, 6)$ y $B(9, 8)$ y otro de ellos en el punto $C(0, 6)$, ¿sería posible conseguir que una tubería recta pase por los tres a la vez?

Recta que une los puntos A y B: $\frac{x - 4}{9 - 4} = \frac{y - 6}{8 - 6} \Rightarrow \frac{x - 4}{5} = \frac{y - 6}{2}$.

Se comprueba si el punto C pertenece a esa recta: $\frac{0 - 4}{5} = \frac{6 - 6}{2} \Rightarrow \frac{0 - 4}{5} \neq \frac{6 - 6}{2}$.

No se podría colocar una tubería recta que pasara por los tres árboles a la vez.

9.66 Un barco lanza un mensaje de socorro. Su posición viene dada por el punto $A(1460, 765)$. Dos barcos situados en $B(3525, 2490)$ y $C(585, 3500)$ acuden en su ayuda.

Si los dos navegan a la misma velocidad y en línea recta hacia A, ¿cuál llegará primero?

Llegará primero el que esté más cerca de A.

$d(A, B) = \sqrt{(3525 - 1460)^2 + (2490 - 765)^2} = \sqrt{7\,239\,850} = 2690{,}70$ unidades

$d(A, C) = \sqrt{(585 - 1460)^2 + (3500 - 756)^2} = \sqrt{8\,245\,850} = 2871{,}56$ unidades

Llegará antes el barco que está en la posición B.

9.67 Para hacer un túnel, se ha iniciado la excavación desde dos puntos distintos.

Dibujada sobre un papel cuadriculado, una de las máquinas parte del punto $A(130, 245)$ y sigue la trayectoria determinada por el vector $(2, -6)$. La otra ha partido del punto $B(-70, 1445)$ y ha continuado siguiendo la dirección de una recta de pendiente -3.

¿Han seguido las dos máquinas la misma dirección? ¿Se juntarán en algún punto intermedio? Determina las coordenadas del punto.

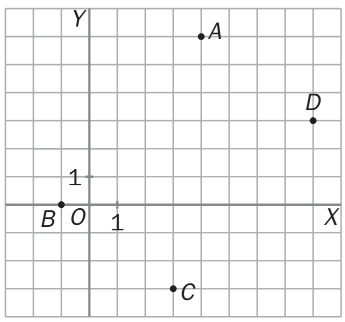
La trayectoria de la primera máquina: $\frac{x - 130}{2} = \frac{y - 245}{-6} \Rightarrow 3x + y - 635 = 0$

La trayectoria de la segunda máquina: $y - 1445 = -3 \cdot (x + 70) \Rightarrow 3x + y - 1235 = 0$

La dirección es la misma puesto que las dos tienen la misma pendiente, -3. No se juntarán puesto que son paralelas.

REFUERZO

Vectores en el plano. Operaciones y aplicaciones



9.68 Dados los puntos A, B, C y D de la figura, calcula los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

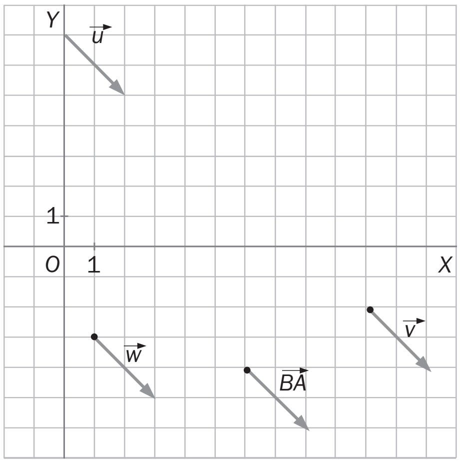
¿Cuáles de ellos son equipolentes?

$A = (4, 5)$;	$B = (-1, -1)$;	$C = (1, -3)$;	$D = (6, 3)$
$\overrightarrow{BA} = (5, 6)$	$\overrightarrow{BC} = (2, -2)$	$\overrightarrow{CD} = (5, 6)$	$\overrightarrow{AD} = (2, -2)$

Son equipolentes $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CD}$, y también $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

9.69 **Dibuja el vector $\overrightarrow{BA}$, con $A(6, -4)$. Dibuja después tres vectores equipolentes a él que tengan su origen en los puntos $C(0, 7)$; $D(1, -3)$, y $E(8, -2)$.**

¿Cuáles son las coordenadas de estos nuevos vectores?



AMPLIACIÓN

9.70 **Halla el módulo y el argumento de:**

a) $\vec{u} = (-9, 6)$ **b) $\vec{v} = (-2, 8)$** **c) $\vec{w} = (-7, -1)$**

a) $|\vec{u}| = +\sqrt{(-9)^2 + 6^2} = +\sqrt{117}$ unidades

Argumento de $\vec{u}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{6}{-9} = -1{,}5 \Rightarrow \alpha = 146°\ 18'\ 36''$

b) $|\vec{v}| = +\sqrt{2^2 + 8^2} = +\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ unidades

Argumento de $\vec{v}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{8}{-2} = -4 \Rightarrow \alpha = 104°\ 2'\ 11''$

c) $|\vec{w}| = +\sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = +\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ unidades

Argumento de $\vec{w}$: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{-1}{-7} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \alpha = 188°\ 7'\ 48''$

9.71 **Halla la distancia entre los puntos $A(4, 9)$ y $B(-2, 1)$.**

$d(A, B) = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (1 - 9)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ unidades

9.72 **Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A(2, -5)$ y $B(4, 1)$.**

$M_{AB} = \dfrac{1}{2} \cdot [(2, -5) + (4, 1)] = (3, -2)$

9.73 **Calcula:**

a) $(5, 9) + 2(-4, 8) - (6, 0)$
b) $3(-4, 7) - (2, 6) + 5(1, -3)$
c) $(7, 11) - [(4, 9) + (-3, 1)]$
d) $(-6, 8) + 3[(5, -2) + (4, 7)]$

a) $(5, 9) + 2(-4, 8) - (6, 0) = (5, 9) + (-8, 16) - (6, 0) = (-9, 25)$

b) $3(-4, 7) - (2, 6) + 5(1, -3) = (-12, 21) - (2, 6) + (5, -15) = (-9, 0)$

c) $(7, 11) - [(4, 9) + (-3, 1)] = (7, 11) - (1, 10) = (6, 1)$

d) $(-6, 8) + 3[(5, -2) + (4, 7)] = (-6, 8) + 3 \cdot (9, 5) = (-6, 8) + (27, 15) = (21, 23)$

9.74 **Calcula $5\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u}$, siendo $\vec{u}(8, 3)$; $\vec{v}(-1, -2)$, y $\vec{w}(0, 4)$.**

$5\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u} = 5(-1, -2) - \frac{1}{2}(0, 4) + (8, 3) = (3, -9)$

Recta. Posiciones relativas

9.75 **Obtén un punto, un vector director y la pendiente de la recta de ecuaciones paramétricas: $\begin{matrix} x = -1 + 2t \\ y = 5t \end{matrix}$.**

$A(-1, 0)$; $\vec{v} = (2, 5)$; $m = \frac{5}{2}$

9.76 **Escribe, en todas las formas posibles, la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (5, 2)$.**

Vectorial: $(x, y) = (3, 1) + t(5, 2)$

Paramétrica: $\begin{matrix} x = 3 + 5t \\ y = 1 + 2t \end{matrix}$

Continua: $\frac{x - 3}{5} = \frac{y - 1}{2}$

General: $2x - 5y - 1 = 0$

Punto-pendiente: $y - 1 = \frac{2}{5} \cdot (x - 3)$

Explícita: $y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$

9.77 **Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 6)$ y $B(4, 1)$.**

La ecuación continua de la recta es $\frac{x + 3}{4 + 3} = \frac{y - 6}{1 - 6}$. Operando y despejando, se obtiene la ecuación general de la recta $5x + 7y - 27 = 0$.

9.78 **Comprueba si el punto $B(4, -6)$ pertenece a alguna de estas rectas.**

a) $y = 9 - 3x$ **b)** $5x + 3y - 2 = 0$

a) $-6 = 9 - 3 \cdot 4 \Rightarrow -6 = -3$. No pertenece.

b) $5 \cdot 4 + 3 \cdot (-6) - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Sí pertenece.

9.79 **¿Son secantes las rectas r: $4x - 5y - 2 = 0$ y s: $y = 2x - 4$? En caso afirmativo, calcula su punto de corte.**

Se escribe la recta s en forma general: $2x - y - 4 = 0$.

$\frac{4}{2} \neq \frac{-5}{2}$. Por tanto, son secantes.

$\left.\begin{matrix} 4x - 5y - 2 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x - 5 \cdot (2x - 4) - 2 = 0 \Rightarrow 4x - 10x + 18 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2$

Se cortan en el punto $(3, 2)$.

9.80 **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.**

a) r: $4x - 6y + 10 = 0$
s: $2x - 3y + 4 = 0$

b) r: $2x + 3y + 6 = 0$
s: $6x + 9y + 18 = 0$

a) $\frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} \neq \frac{10}{4} \Rightarrow$ Son paralelas.

b) $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18} \Rightarrow$ Son coincidentes.

9.81 Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $P(0, 2)$ y tiene la misma pendiente que $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3}$.

¿Cuál es la posición relativa de las dos rectas?

La pendiente de la recta es $m = \frac{3}{-1} = -3$. Por tanto, la ecuación de la recta buscada es $y - 2 = -3x$.

Como las rectas tienen igual dirección y carecen de puntos comunes, son paralelas.

AMPLIACIÓN

9.82 Halla x en el vector $\vec{u} = (x, 8)$ sabiendo que su módulo es 10.

$10 = \sqrt{x^2 + 8} \Rightarrow x^2 = 100 - 64 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$

Entonces, $\vec{u} = (6, 8)$ o $\vec{u} = (-6, 8)$

9.83 Determina, mediante vectores, si el triángulo de vértices $A(-4, -2)$; $B(0, 1)$, y $C(3, 2)$ es rectángulo.

Primero se calculan los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$ de los lados y sus argumentos:

$\overrightarrow{AB} = (4, 3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC} = (3, 1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (7, 4)$

Calculamos los argumentos de los vectores:

Argumento de $\overrightarrow{AB}$: $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = 36^\circ\ 52'\ 12''$

Argumento de $\overrightarrow{BC}$: $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18^\circ\ 26'\ 6''$

Argumento de $\overrightarrow{AC}$: $\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{7} \Rightarrow \alpha = 29^\circ\ 44'\ 42''$

El ángulo en el vértice A es la diferencia entre el argumento del vector $\overrightarrow{AB}$ y el de $\overrightarrow{AC}$:

$\widehat{A} = 36^\circ\ 52'\ 12'' - 29^\circ\ 44'\ 42'' = 7^\circ\ 7'\ 30''$

El ángulo en el vértice B es el suplementario de la diferencia entre el argumento del vector AB y el del vector BC:

$\widehat{B} = 180^\circ - 36^\circ\ 52'\ 12'' - 18^\circ\ 26'\ 6'' = 124^\circ\ 41'\ 42''$

Para hallar el ángulo en el vértice C, solo hay que restar a 180° los otros dos ángulos:

$\widehat{C} = 180^\circ - 7^\circ\ 7'\ 30'' - 124^\circ\ 41'\ 42'' = 48^\circ\ 10'\ 48''$

Como no hay ningún ángulo recto, el triángulo no es rectángulo.

9.84 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(5, -4)$ y forma un ángulo de 30° con el eje de abscisas.

La pendiente es $m = \text{tg}\,30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Por tanto, la ecuación punto-pendiente es $y + 4 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 5)$.

Operando se obtiene la ecuación general $\sqrt{3}x - 3y - (12 + 5\sqrt{3}) = 0$.

9.85 Calcula la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto en el que $6x + 9y - 12 = 0$ corta al eje de abscisas y es paralela a $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

Para calcular el punto de corte con el eje de abscisas se tiene que $y = 0$. Entonces, si $y = 0$, $6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.

La recta pedida pasa por el punto (2, 0).

La pendiente debe ser igual que la de $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} \Rightarrow m = \frac{-3}{4}$. La recta es $y = \frac{-3}{4} \cdot (x - 2)$.

9.86 Los lados de un triángulo vienen dados por las rectas de ecuaciones $3x - y - 6 = 0$, $y = 0$ y $3x + y - 18 = 0$.

a) Halla sus vértices.

b) Clasifica el triángulo en función de sus lados.

c) Halla las ecuaciones de las rectas determinadas por sus medianas.

a) Para calcular sus vértices se resuelven los sistemas formados por las rectas dos a dos:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 6 = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 6 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x - y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 6 \\ y = 0 \end{array}$$

Los vértices son $A(4, 6)$, $B(2, 0)$ y $C(6, 0)$.

b) $d(A, B) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{40}$ $\qquad d(A, C) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{40}$

$d(C, B) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{16} = 4$

Es un triángulo isósceles porque tiene dos lados iguales y uno desigual.

c) $M_{AB} = \left(\dfrac{4 + 2}{2}, \dfrac{6 + 0}{2}\right) = (3, 3)$ $\qquad M_{BC} = \left(\dfrac{2 + 6}{2}, \dfrac{0 + 0}{2}\right) = (4, 0)$

$M_{CA} = \left(\dfrac{6 + 4}{2}, \dfrac{0 + 6}{2}\right) = (5, 3)$

$\dfrac{x - 3}{6 - 3} = \dfrac{y - 3}{0 - 3} \Rightarrow \dfrac{x - 3}{3} = \dfrac{y - 3}{-3} \Rightarrow x + y - 6 = 0$ $\qquad \dfrac{x - 4}{4 - 4} = \dfrac{y}{6 - 0} \Rightarrow 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$

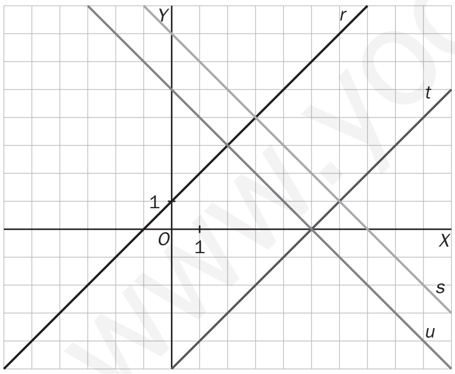
$\dfrac{x - 2}{5 - 2} = \dfrac{y}{3} \Rightarrow \dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y}{3} \Rightarrow x - y - 2 = 0$

9.87 Sabiendo que las rectas r: $x - y + 1 = 0$, s: $x + y - 7 = 0$, t: $x - y - 5 = 0$ y u: $x + y - 5 = 0$ forman un cuadrilátero.

a) Calcula la medida de sus lados.

b) Comprueba si las diagonales se cortan en su punto medio.

a) Al dibujar las rectas se observa cuáles son los puntos de corte de cada dos de ellas que hay que obtener para calcular los vértices pedidos.



Hay que resolver los sistemas formados por las rectas r y s, obteniéndose el punto $A(3, 4)$; s y t, calculando el punto $B(6, 1)$; t y u, obteniendo el punto $C(5, 0)$, y r y u, con el punto $D(2, 3)$.

$d(A, B) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$d(B, C) = \sqrt{(5 - 6)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{2}$

$d(C, D) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$d(A, D) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{2}$

b) Ecuación de la diagonal AC: $\dfrac{x - 3}{5 - 3} = \dfrac{y - 4}{0 - 4} \Rightarrow 2x + y - 10 = 0$

Ecuación de la diagonal BD: $\dfrac{x - 6}{2 - 6} = \dfrac{y - 1}{3 - 1} \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$

Punto de corte de las dos diagonales: $\left.\begin{array}{r} 2x + y - 10 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 2 \cdot (10 - 2x) - 8 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4$

Las diagonales se cortan en el punto $P(6, -2)$.

El punto medio de la diagonal $\overrightarrow{AC}$ es $M_{AC} = \dfrac{1}{2} \cdot [(3, 4) + (5, 0)] = (4, 2)$.

El punto medio de la diagonal $\overrightarrow{BD}$ es $N_{BD} = \dfrac{1}{2} \cdot [(6, 1) + (2, 3)] = (4, 2)$.

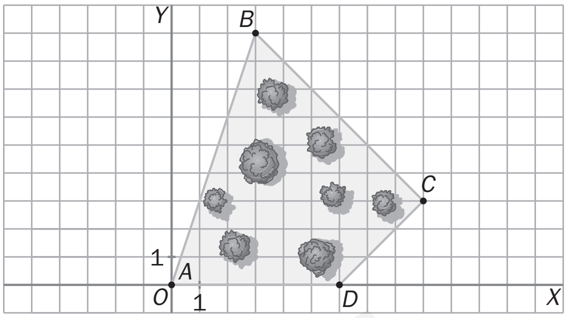
Por tanto, las diagonales se cortan en su punto medio.

9.88 **Se quieren plantar una serie de árboles en los límites de una finca. Para ello se ha realizado un esquema y se ha adoptado un sistema de referencia, tal y como aparece en la figura.**

Los vértices de la finca son los puntos:

***A*(0, 0), *B*(3, 9), *C*(9, 3), *D*(6, 0)**

- **En los vértices se colocarán cuatro pinos.**
- **Entre los vértices *A* y *B* deben plantarse dos abetos.**
- **Entre los vértices *B* y *C* deben plantarse dos nogales.**
- **Entre los vértices *C* y *D* y entre los *D* y *A* se instalarán dos y cinco setos, respectivamente.**



Con la ayuda de la referencia que se ha tomado, indica las posiciones exactas de los abetos, nogales y setos que se quieren plantar.

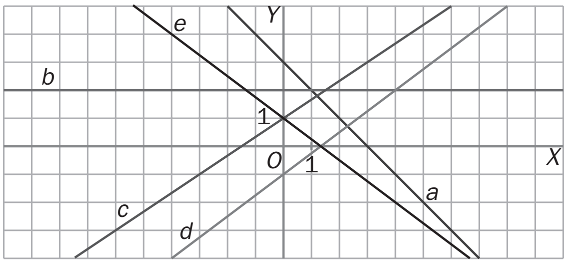
- Abetos: $\overrightarrow{AB} = (3, 9) \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (1, 3)$. Se debe colocar un abeto en el punto $(0, 0) + (1, 3) = (1, 3)$, y otro en el punto $(1, 3) + (1, 3) = (2, 6)$.
- Nogales: $\overrightarrow{BC} = (6, 6) \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = (2, -2)$. Se debe colocar un nogal en el punto $(3, 9) + (2, -2) = (5, 7)$ y otro en el punto $(5, 7) + (2, -2) = (7, 5)$.
- Setos:
  – $\overrightarrow{CD} = (-3, -3) \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = (-1, -1)$. Se debe colocar un seto en el punto $(9, 3) + (-1, -1) = (8, 2)$ y otro en el punto $(8, 2) + (-1, -1) = (7, 1)$.
  – $\overrightarrow{DA} = (6, 0) \Rightarrow \frac{1}{6}\overrightarrow{DA} = (1, 0)$. Se deben colocar cinco setos en los puntos (1, 0), (2, 0), (3,0), (4, 0) y (5, 0).

9.89 **Puzzle desordenado**

En el siguiente gráfico aparecen cinco rectas. La tabla indica las características de estas cinco rectas, pero las casillas están desordenadas.

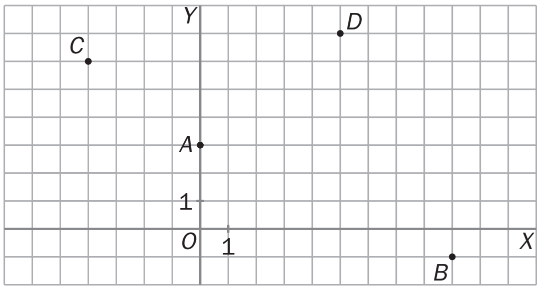
Reordena el puzzle de forma que cada recta se corresponda con sus características.

Recta	Ecuación	Pendiente	Ordenada en el origen
a	$y = 2$	**0**	**3**
b	$y = \frac{2}{3}x + 1$	**−1**	**1**
c	$y = \frac{3}{4}x - 1$	$\frac{2}{3}$	**−1**
d	$y = \frac{-3}{4}x + 1$	$\frac{-3}{4}$	**1**
e	$y = -x + 3$	$\frac{3}{4}$	**2**



Recta	Ecuación	Pendiente	Ordenada en el origen
a	$y = 2$	0	2
b	$y = \frac{2}{3}x + 1$	$\frac{2}{3}$	1
c	$y = \frac{3}{4}x - 1$	$\frac{3}{4}$	−1
d	$y = \frac{-3}{4}x + 1$	$\frac{-3}{4}$	1
e	$y = -x + 3$	−1	3

9.A1 Calcula las coordenadas y el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.



a) $\overrightarrow{AB} = (9, -4) - (0, 3) = (9, -7)$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9^2 + (-7)^2} = \sqrt{81 + 49} = \sqrt{130}$

b) $\overrightarrow{CD} = (5, 7) - (-4, 6) = (9, 1)$. $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9^2 + 1^2} = \sqrt{81 + 1} = \sqrt{82}$

9.A2 Calcula:

a) $3(6, 2) + (5, -4) - 6(2, 1)$

b) $5[(7, -2) + (-8, 1)]$

c) $(2, 3) - [(6, 1) - 4(-3, -2)]$

a) $3(6, 2) + (5, -4) - 6(2, 1) = (18, 6) + (5, -4) - (12, 6) = (11, -4)$

b) $5[(7, -2) + (-8, 1)] = 5 \cdot (-1, -1) = (-5, -5)$

c) $(2, 3) - [(6, 1) - 4(-3, -2)] = (2, 3) - [(6, 1) - (-12, -8)] = (2, 3) - (18, 9) = (-16, -6)$

9.A3 Obtén el módulo y el argumento de los vectores:

a) $\vec{u} = (7, 2)$

b) $\vec{v} = (0, 4)$

c) $\vec{w} = (-9, -6)$

d) $\vec{x} = (-8, 0)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$

Argumento de $\vec{u}$: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{2}{7} = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = 15°\ 56'\ 43''$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$

Argumento de $\vec{v}$: $\alpha = 90°$

c) $|\vec{w}| = \sqrt{(-9)^2 + (-6)^2} = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117}$

Argumento de $\vec{w}$: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{-6}{-9} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 213°\ 41'\ 25''$

d) $|\vec{x}| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$

Argumento de $\vec{x}$: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{0}{-8} = 0 \Rightarrow \alpha = 180°$

9.A4 Halla la distancia entre los puntos $A(5, -9)$ y $B(7, 2)$.

$d(A, B) = \sqrt{(7 - 5)^2 + (2 + 9)^2} = \sqrt{4 + 121} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

9.A5 Calcula las coordenadas del punto medio del segmento AB siendo $A(4, 0)$ y $B(-2, 6)$.

El punto medio del segmento AB es $M_{AB} = \dfrac{1}{2} \cdot [(-2, 6) + (4, 0)] = (1, 3)$.

9.A6 **Escribe todas las formas posibles de la ecuación de la recta:**

a) Que pasa por el punto $P(4, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (-2, 5)$.

b) Que pasa por los puntos $A(9, 4)$ y $B(8, 1)$.

a) Vectorial: $(x, y) = (4, 1) + t(-2, 5)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$

Continua: $\dfrac{x - 4}{-2} = \dfrac{y - 1}{5}$

General: $5x + 2y - 22 = 0$

Punto-pendiente: $y - 1 = \dfrac{-5}{2} \cdot (x - 4)$

Explícita: $y = \dfrac{-5}{2}x + 11$

b) Vector dirección $\overrightarrow{AB} = (-1, -3)$

Vectorial: $(x, y) = (9, 4) + t(-1, -3)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 9 - t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

Continua: $\dfrac{x - 9}{-1} = \dfrac{y - 4}{-3}$

General: $3x - y - 23 = 0$

Punto-pendiente: $y - 4 = 3 \cdot (x - 9)$

Explícita: $y = 3x - 23$

9.A7 **Comprueba si la recta $6x + 4y = 0$ pasa por el punto $(3, -3)$.**

$6 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \neq 0 \Rightarrow 18 - 12 \neq 0 \Rightarrow$ No pasa por el punto.

9.A8 **Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene el mismo vector que r: $\begin{matrix} x = -1 + t \\ y = 3 + 5t \end{matrix}$**

Un vector director de la recta es $\vec{u}(1, 5)$. La ecuación general de la recta es $y = 5x$.

9.A9 **Estudia la posición relativa de las rectas:**

a) $r \equiv 3x - y + 6 = 0$
$s \equiv 3x - 4y + 2 = 0$

b) $r \equiv 4x + 6y + 12 = 0$
$s \equiv 2x + 3y + 9 = 0$

a) Como $\dfrac{3}{3} \neq \dfrac{-1}{-4}$, las rectas son secantes.

b) Como $\dfrac{4}{2} = \dfrac{6}{3} \neq \dfrac{12}{9}$, las rectas son paralelas.

MATETIEMPOS

Sumas y más sumas

Fíjate en las siguientes sumas.

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} = 2{,}5$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}67$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}71$$

Calcula las tres sumas que continúan la serie.

¿Cuál crees que es el resultado si se suman infinitos términos?

Los siguientes términos serán:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}71$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}71$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}7$$

Construiremos la siguiente tabla:

Término	1	2	3	4	5	6	….	n
Σ	1	2	2.5	2.666			…	e

Es la definición del número e.

EJERCICIOS PROPUESTOS

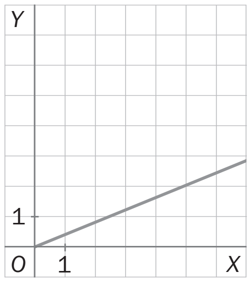
10.1 Para pasar de centímetros a pulgadas se multiplica por 2 y se divide por 5.
a) ¿Es una función?
b) Escribe su expresión algebraica.
c) Confecciona una tabla y representa la gráfica de la función.

a) En efecto, ya que a cada medida en centímetros le corresponde otra en pulgadas.

b) Si representamos por x la medida en centímetros y por y la medida en pulgadas, tenemos: $y = \frac{2}{5}x$.

c)

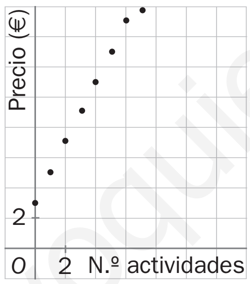
x cm	y pulgadas
1	0,4
5	2
10	4
12	4,8



10.2 Nastia y Yago han ido al museo de ciencias de su ciudad. La entrada general les ha costado 3 euros y, por cada actividad adicional, han pagado 2 euros más. Crea una tabla de valores para la función, representa la gráfica y escribe su expresión algebraica.

Si representamos por x el número de actividades y por y el precio final:

x	y euros
0	3
1	5
2	7
3	9



La expresión algebraica es $y = 3 + 2x$.

10.3 Dadas las siguientes funciones, calcula el dominio y el recorrido de cada una de ellas.
a) $y = -x + 2$ **b) $y = x^2 - 2$**

a) $Dom\ (f) = \mathbf{R}$; $Rec\ (f) = \mathbf{R}$

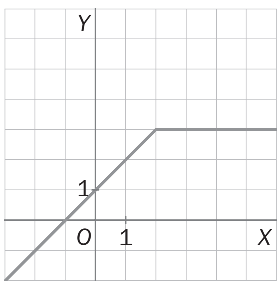
b) $Dom\ (f) = \mathbf{R}$; $Rec\ (f) = [-2, +\infty)$

10.4 Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:
a) $y = -3$ **b) $y = x^2 - 4$**

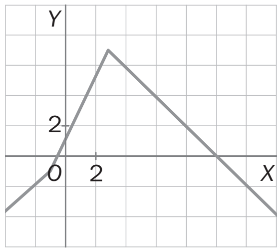
a) $Dom\ (f) = \mathbf{R}$; $Rec\ (f) = \mathbf{R}$

b) $Dom\ (f) = \mathbf{R}$; $Rec\ (f) = [-4, +\infty)$

10.5 Representa la siguiente función lineal definida a trozos $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}$



10.6 Representa la siguiente función lineal definida a trozos $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2x + 1, & \text{si} \quad -1 < x \leq 3 \\ -x + 10 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$



10.7 Halla los puntos de corte con los ejes y el signo de la siguiente función: $y = 3x - 6$.

Corte con el eje x: $\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 3x - 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 0)$

Corte con el eje y: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -x^2 - 6x - 8 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -8 \Rightarrow C(0, -8)$

Signo de la función: la función es negativa en el intervalo $(-\infty, 2)$ y positiva en $(2, +\infty)$.

10.8 Estudia el signo y encuentra los puntos de corte con los ejes de esta función: $y = -x^2 - 6x - 8$.

Corte con el eje X: $\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -x^2 - 6x - 8 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = -4 \Rightarrow A(-4, 0 \\ x = -2 \Rightarrow B(-2, 0) \end{array} \right.$$

Corte con el eje Y: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -x^2 - 6x - 8 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -8 \Rightarrow C(0, -8)$

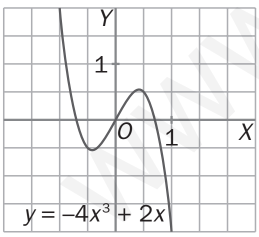
Signo de la función: $f(x) = -(x + 2)(x + 4)$

	$-\infty$ — -4	-4 — -2	-2 — $+\infty$
$x + 4$	$-$	$+$	$+$
$x + 2$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

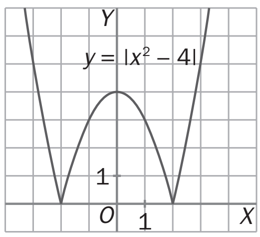
Por lo que la función es negativa en el intervalo $(-\infty, -4)$, y positiva en $(-4, +\infty)$.

10.9 Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a)



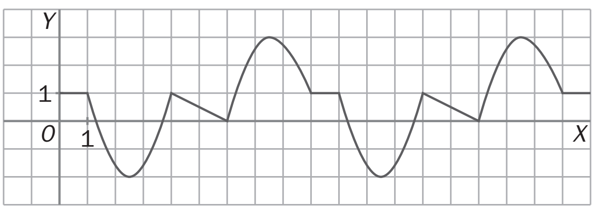
b)



a) Es función impar.

b) Es función par.

10.10 Indica si es periódica la siguiente función y, en caso afirmativo, determina cuál es su período.



Se trata de una función periódica. El período es el tramo que va desde el origen hasta la quinta vez que corta al eje OX (incluido el origen).

10.11 Dada la función $f(x) = -x^2 + 1$, calcula su tasa de variación en los intervalos:

a) [1; 1,3] **b) [2; 2,4]**

a) $TV[1;\ 1{,}3] = f(1{,}3) - f(1) = -0{,}69 - 0 = -0{,}69$ b) $TV[2;\ 2{,}4] = f(2{,}4) - f(2) = -4{,}76 - (-3) = -1{,}76$

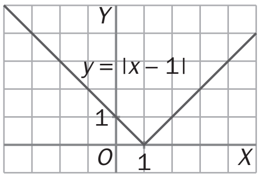
10.12 Calcula las tasas de variación media en los intervalos [0,5; 1] y [2; 3,5] de la función $f(x) = 2x^2 + 2$. ¿En qué intervalo varía más rápidamente?

$TVM[0{,}5;\ 1] = \dfrac{f(1) - f(0{,}5)}{1 - 0{,}5} = \dfrac{4 - 2{,}5}{0{,}5} = 3$ $TVM[2;\ 3{,}5] = \dfrac{f(3{,}5) - f(2)}{3{,}5 - 2} = \dfrac{26{,}5 - 10}{1{,}5} = 11$

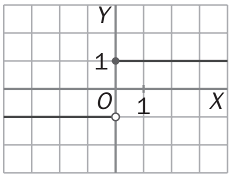
Por consiguiente, la función $f(x)$ tiene una variación mucho más rápida en el intervalo [2; 3,5] que en el [0,5; 1].

10.13 Estudia si son continuas o discontinuas las siguientes funciones dadas por sus gráficas.

a)



b)

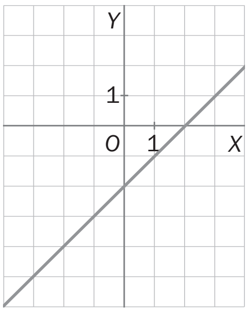


a) Es continua. b) No es continua en $x = 0$.

10.14 Representa las siguientes funciones dadas por su expresión algebraica, y estudia si son continuas o discontinuas.

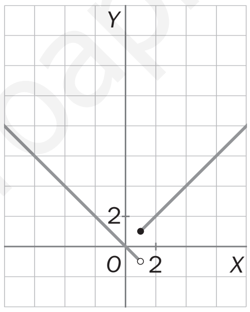
a) $y = x - 2$ **b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 1 \\ -x & \text{si } x < 1 \end{cases}$**

a)



Es continua.

b)



Es discontinua en $x = 1$.

10.15 Estudia el crecimiento o decrecimiento de las siguientes funciones en el intervalo $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$:

a) $f(x) = -2$ **b) $g(x) = -3x + 4$**

a) $TV\left(0, \dfrac{1}{2}\right) = -2 - (-2) = 0 \Rightarrow f(x)$ es constante. b) $TV\left(0, \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{2} + 4 - 4 = -\dfrac{3}{2} < 0 \Rightarrow f(x)$ decreciente.

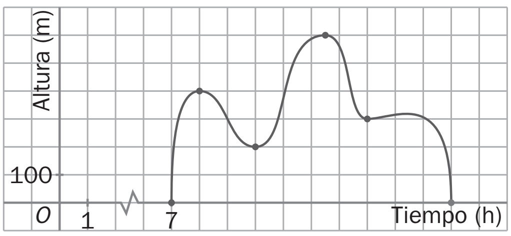
10.16 Explica cómo es el crecimiento o decrecimiento de estas funciones en el intervalo [−2, 0].

a) $f(x) = -x^2 + 1$ **b) $g(x) = x^3$**

a) $TV[-2, 0] = f(0) - f(-2) = 1 - (-3) = +4 \Rightarrow f(x)$ creciente.

b) $TV[-2, 0] = g(0) - g(-2) = 8 \Rightarrow g(x)$ creciente.

10.17 Un globo aerostático ascendió a las 7.00 y tomó tierra a las 17.00. Observa la gráfica de la función e indica los máximos y mínimos de la función.



La gráfica tiene un máximo relativo en el punto (8, 400), un mínimo absoluto en el punto (10, 200), un máximo absoluto en el punto (12,5; 600) y un mínimo relativo en el punto (14, 300).

10.18 **Dibuja una función continua que tenga las siguientes características.**

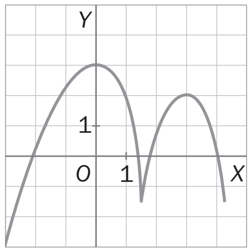
a) Presenta un mínimo en $x = 1{,}5$.

b) Tiene un máximo en $x = 3$.

c) Posee un máximo absoluto en $x = 0$.

d) No presenta ningún mínimo absoluto.

e) Corta al eje *OX* en cuatro puntos.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

10.19 **La compañía de Isabel le ofrece una conexión algo mejor que la que tiene al siguiente precio: 12 euros fijos más 0,4 euros por cada hora de conexión, con un máximo de 40 euros al mes. Compara esta oferta con la que tiene ahora.**

Recordamos la expresión de la función anterior:

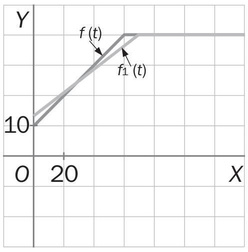
$$(t) = \begin{cases} 10 + 0{,}5t & \text{si} \quad t \leqslant 60 \\ 40 & \text{si} \quad t > 60 \end{cases}$$

La nueva oferta se expresa mediante esta función:

$$f_1(t) = \begin{cases} 12 + 0{,}4t & \text{si} \quad t < 70 \\ 40 & \text{si} \quad t \geqslant 70 \end{cases}$$

(Obtenemos el 70 resolviendo la ecuación $12 + 0{,}4t = 40$.)

Representamos ambas gráficas:



Por 20 horas se paga lo mismo. Si está conectada menos de 20 horas, le conviene la que ya tiene, y si está conectada entre 20 y 70 horas, le conviene la nueva oferta. Si está conectada más de 70 horas, ambas ofertas cobran lo mismo.

10.20 **La empresa de Julia también le propone un cambio, con un fijo mensual de sólo 6 euros y un precio por hora de 50 céntimos, manteniendo el gasto máximo de 40 euros. Compáralo con su contrato actual.**

La función anterior era:

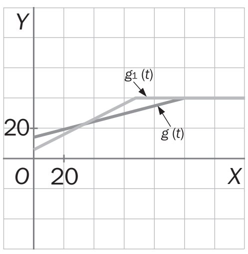
$$g(t) = \begin{cases} 15 + 0{,}25t & \text{si} \quad t < 100 \\ 40 & \text{si} \quad t \geqslant 100 \end{cases}$$

La nueva será:

$$g_1(t) = \begin{cases} 6 + 0{,}5t & \text{si} \quad t < 68 \\ 40 & \text{si} \quad t \geqslant 68 \end{cases}$$

(Obtenemos el 68 resolviendo la ecuación $6 + 0{,}5t = 40$.)

Representamos ambas gráficas:



Por 36 horas se paga lo mismo con las dos ofertas. Si está conectada menos de 36 horas, le conviene la nueva oferta, y si está conectada entre 36 y 100 horas, le conviene la que ya tiene. Si está conectada más de 100 horas, ambas ofertas cobran lo mismo.

EJERCICIOS PARA ENTRETENERSE

Formas de expresar una función

10.21 Construye una tabla de seis valores para las funciones:

a) $y = 5x + 3$ **b)** $y = x^2 + 2x$ **c)** $y = \dfrac{2x + 4}{x}$ **d)** $y = \sqrt{x - 1}$

a)

x	−2	−1	0	1	2	3
y	−7	−2	3	8	13	18

b)

x	−2	−1	0	1	2	3
y	0	−1	0	3	8	15

c)

x	−4	−2	−1	1	2	4
y	1	0	−2	6	4	3

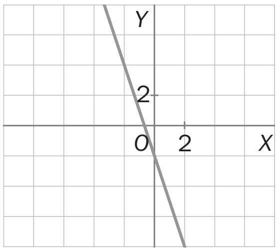
d)

x	1	2	3	4	5	6
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$

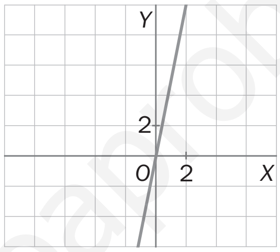
10.22 Representa gráficamente las funciones:

a) $f(x) = 1 - 3x$ **b)** $g(x) = 5x$

a)



b)



10.23 Observa la siguiente tabla de valores de una función.

x	−2	−1	1	2
y	7	5	5	7

¿Cuál de las siguientes es su expresión algebraica?

a) $y = x^2 + 4$ **b)** $y = |2x| + 3$ **c)** $y = |1 + 4x|$

La función del apartado b.

10.24 Un aficionado al ciclismo realiza un trayecto en línea recta a una velocidad constante de 25 km/h.

a) Construye una tabla de valores que indique el espacio que ha recorrido a los 15 minutos, 30 minutos, 45 minutos y 1 hora.

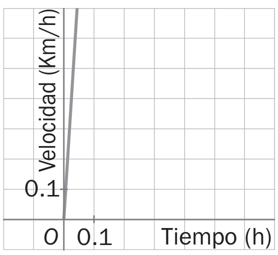
b) Representa gráficamente los datos del apartado anterior.

c) Escribe la fórmula para hallar el espacio que recorre el aficionado a lo largo del tiempo.

a)

x (h)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y (km)	6,25	12,5	18,75	25

b)



c) Si representamos por x el tiempo empleado y por y la distancia recorrida, tenemos: $y = 25x$.

10.25 Por liquidación, todos los artículos de una tienda de regalos se venden con un 30% de descuento.

a) ¿Es una función? ¿Cuáles son las variables?

b) Calcula el precio al que se venderá un producto de 42,50 euros con el descuento.

c) ¿Cuál es el precio original de un artículo que se vende por 19,32 euros?

d) Escribe la fórmula que permite calcular el nuevo precio de venta después del descuento a partir del anterior.

e) Halla la expresión para calcular el precio de los regalos antes del descuento sabiendo el precio de venta final.

a) Sí. La variable independiente es el precio del artículo antes del descuento, y la dependiente, el precio después del descuento.

b) $0{,}7 \cdot 42{,}5 = 29{,}75$ €

c) $\dfrac{19{,}32 \cdot 100}{70} = 27{,}60$ €

d) $y = 0{,}7x$

e) $y = \dfrac{x}{0{,}7}$

Dominio y recorrido

10.26 Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $y = 3x + 9$

b) $y = -x^2$

c) $y = \dfrac{1}{2}x^2$

d) $y = x^3$

a) *Dom* $y = \mathbf{R}$ *Rec* $f(x) = \mathbf{R}$

b) *Dom* $y = \mathbf{R}$ *Rec* $f(x) = \mathbf{R}^+$

c) *Dom* $y = \mathbf{R}$ *Rec* $f(x) = \mathbf{R}^-$

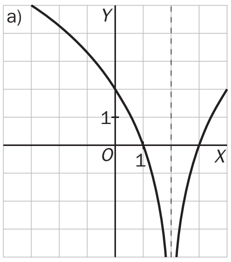
d) *Dom* $y = \mathbf{R}$ *Rec* $f(x) = \mathbf{R}$

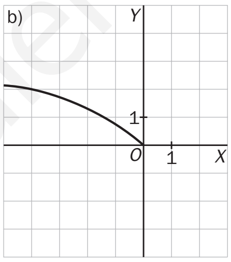
10.27 Dibuja una función que cumpla estas condiciones.

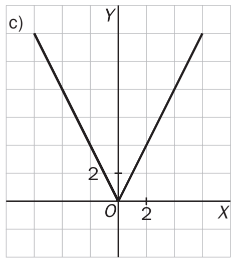
a) Que su dominio sea R − {2}, y su recorrido, R.

b) Que su dominio sea (−∞, 0].

c) Que su dominio sea [−6, 6], y su recorrido, [0, 12].







10.28 Halla el dominio de:

a) $y = 3x^4 + 2x - 1$

b) $y = \dfrac{x}{2 - 4x}$

c) $y = \dfrac{1}{6 + x^2}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{5x + 10}$

a) *Dom* $y = \mathbf{R}$

b) *Dom* $y = \mathbf{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

c) *Dom* $y = \mathbf{R}$

d) *Dom* $y = \mathbf{R} - \{-2\}$

10.29 Escribe la expresión algebraica de una función:

a) Cuyo dominio sea R⁺.

b) Cuyo dominio sea R − {0}.

c) Cuyo recorrido sea {5}.

a) $y = \sqrt{x}$

b) $y = \dfrac{1}{x}$

c) $y = 5$

10.30 Calcula el dominio de:

a) $y = \dfrac{-2}{x}$

b) $y = \sqrt{x - 5}$

c) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

d) $y = \sqrt{x^2 + 4}$

a) *Dom* $y = \mathbf{R} - \{0\}$

b) *Dom* $y = [5, +\infty)$

c) *Dom* $y = \mathbf{R}$

d) *Dom* $y = \mathbf{R}$

Funciones definidas a trozos

10.31 Considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{x}{3} & \text{si } x \leqslant -1 \\ 3x + 9 & \text{si } x > -1 \end{cases}$**, y calcula** $f(3)$, $f(10)$, $f(0)$, $f(-1)$ **y** $f\left(\frac{3}{4}\right)$.

$f(3) = 3 \cdot 3 + 9 = 18$

$f(10) = 3 \cdot 10 + 9 = 39$

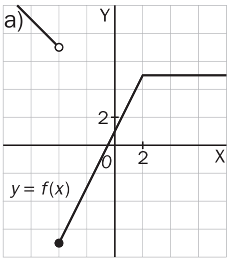
$f(0) = 3 \cdot 0 + 9 = 9$

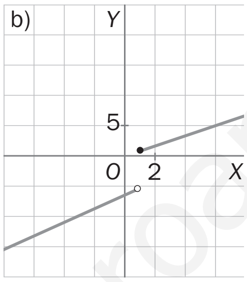
$f(-1) = \frac{2}{3} + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

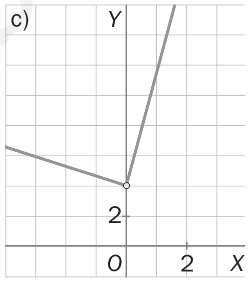
$f\left(\frac{3}{4}\right) = 3 \cdot \frac{3}{4} + 9 = \frac{45}{4}$

10.32 Dibuja las siguientes funciones definidas a trozos.

a) $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -4 \\ 2x + 1 & \text{si } -4 \leqslant x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} x - 6 & \text{si } x < 1 \\ \frac{3x}{4} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} \frac{8 - x}{2} & \text{si } x < 0 \\ 4 + 7x & \text{si } x > 0 \end{cases}$







10.33 Calcula la imagen de $x = 2$ **en cada una de las funciones siguientes.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si } x < 2 \\ 4 - 3x & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 6x + 3 & \text{si } x < 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \\ 2x^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} 8x^3 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2 + 7x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

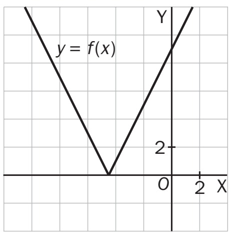
a) $f(2) = -2$ b) $f(2) = 0$ c) $f(2)$ no se puede calcular.

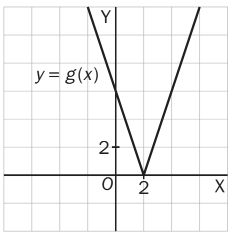
10.34 Dibuja $f(x) = |2x + 9|$ **y** $g(x) = |6 - 3x|$**. Para ambas:**

a) ¿Qué valores de x **tienen por imagen 1?**

b) ¿Cuáles tienen por imagen 0?

c) ¿Y cuáles son los que tienen por imagen −2?





a) $x = -4$ y $x = -5$ en $f(x)$; $x = \frac{5}{3}$ y $x = \frac{7}{3}$ en $g(x)$.

b) $x = \frac{-9}{2}$ en $f(x)$, y $x = 2$ en $g(x)$.

c) Ningún valor de x puede tener como imagen -2 porque el valor absoluto de un número nunca es negativo.

Signo y puntos de corte con los ejes. Simetría y periodicidad

10.35 Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones.

a) $y = x^2 - 4x + 4$

b) $y = x^2 + x + 1$

c) $y = x^3 + 2x$

d) $y = \dfrac{x + 2}{x}$

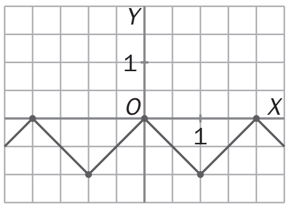
a) Con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0, 4)$. Con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2, 0)$.

b) Con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow C(0, 1)$. Con el eje OX: $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución. No corta el eje OX.

c) Con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow D(0, 0)$. Con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x^3 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow E(0, 0)$.

d) Con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow$ No está definida para $x = 0$. Con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow F(-2, 0)$.

10.36 Observa la gráfica siguiente:



a) Si es una función periódica, indica su período.

b) ¿Qué valor toma la función cuando x es par? ¿Y cuándo x es impar?

a) Es periódica de período $T = 2$.

b) Cuando x es par, $f(x) = 0$, y cuando x es impar, $f(x)$ es -1.

10.37 Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

c) $f(x) = 2x^3 + 4x$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

a) $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$. Por tanto, es par.

b) $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 = f(x)$. Por tanto, es par.

c) $f(-x) = 2 \cdot (-x)^3 + 4 \cdot (-x) = -2x^3 - 4x = -f(x)$. Es impar.

d) $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\dfrac{x}{x^2 + 1} = -f(x)$. Es impar.

Tasa de variación media, continuidad y crecimiento

10.38 Calcula la tasa de variación media de las funciones $f(x) = 2x + 8$ y $g(x) = x^2 - 3$ en los intervalos [0, 3] y [1,8; 2].

$f(x)$: $TVM[0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{14 - 8}{3} = 2;$

$TVM[1{,}8; 2] = \dfrac{f(2) - f(1{,}8)}{2 - 1{,}8} = \dfrac{12 - 11{,}6}{0{,}2} = -2$

$g(x)$: $TVM[0, 3] = \dfrac{g(3) - g(0)}{3 - 0} = \dfrac{6 + 3}{3} = 3;$

$TVM[1{,}8; 2] = \dfrac{g(2) - g(1{,}8)}{2 - 1{,}8} = \dfrac{1 - 0{,}24}{0{,}2} = 3{,}8$

10.39 Halla la tasa de variación media de la función $y = x^2 + 2x$ en los intervalos [3; 3,5] y [6,5; 7]. ¿En cuál de ellos varía más rápidamente?

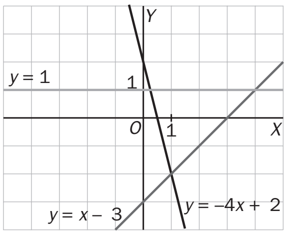
$TVM[3; 3{,}5] = \dfrac{f(3{,}5) - f(3)}{3{,}5 - 3} = \dfrac{19{,}25 - 15}{0{,}5} = 8{,}5$ $\qquad TVM[6{,}5; 7] = \dfrac{f(7) - f(6{,}5)}{7 - 6{,}5} = \dfrac{63 - 55{,}25}{0{,}5} = 15{,}5$

Como $TVM[6{,}5; 7] > TVM[3; 3{,}5]$, varía más rápidamente en el intervalo [6,5; 7].

10.40 Dibuja las siguientes funciones:

$$f(x) = x - 3 \qquad g(x) = 2 - 4x \qquad h(x) = 1$$

¿Qué tipo de crecimiento presentan?



$f(x)$ es creciente; $g(x)$, decreciente, y $h(x)$, constante.

10.41 Estudia si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes en el intervalo [−4, −3].

a) $f(x) = 2x + 9$

b) $g(x) = 3x^2 + 6x$

c) $h(x) = 1 - x^2$

d) $j(x) = 4 - 5x$

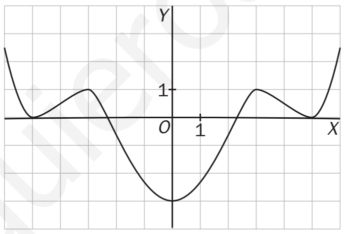
a) $TV[-4, -3] = f(-3) - f(-4) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow$ Es creciente.

b) $TV[-4, -3] = g(-3) - g(-4) = 9 - 24 = -15 \Rightarrow$ Es decreciente.

c) $TV[-4, -3] = h(-3) - h(-4) = -8 - (-15) = 7 \Rightarrow$ Es creciente.

d) $TV[-4, -3] = j(-3) - j(-4) = 19 - 24 = -5 \Rightarrow$ Es decreciente.

10.42 Dibuja una función que tenga un mínimo relativo en (−5, 0), un máximo relativo en (0, 4) y que sea par.

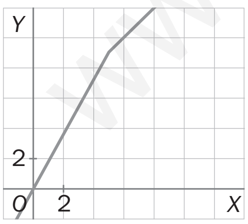


10.43 Representa las siguientes funciones y di si son continuas. En caso contrario, indica sus puntos de discontinuidad.

a) $y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 5 \\ x + 4 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

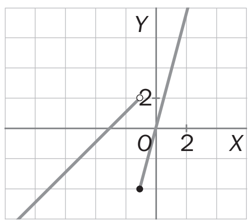
b) $y = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 4x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

a)



Es continua.

b)

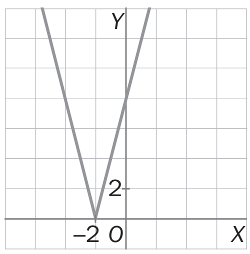


No es continua en $x = -1$.

10.44 Define y estudia la continuidad de la función $f(x) = |4x + 8|$.

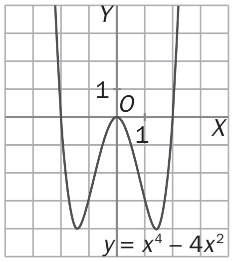
$$f(x) = |4x + 8| = \begin{cases} 4x + 8 & \text{si } x \geq -2 \\ -4x - 8 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Es una función continua.



10.45 **Para la función representada a continuación, estudia:**
a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) Los máximos y mínimos relativos y absolutos.
c) La simetría.
d) Los puntos de corte con los ejes.

a) Creciente en $(-1{,}5;\ 0) \cup (1{,}5;\ +\infty)$ y decreciente en $(-\infty;\ -1{,}5) \cup (0;\ 1{,}5)$.
b) Máximo relativo en (0,0).
Mínimos (relativos y absolutos) en $(-1{,}5;\ -4)$ y en $(1{,}5;\ -4)$.
c) Es función par.
d) Corta los ejes en $(-2,\ 0)$, $(0,\ 0)$ y $(2,\ 0)$.



CUESTIONES PARA ACLARARSE

10.46 **Si una función es periódica de período 4, ¿es suficiente conocer su gráfica en el intervalo $[-2,\ 2]$ para poder representarla en toda la recta real?**

Sí, ya que la amplitud del intervalo es 4 y, si es periódica, basta conocer su gráfica en un intervalo de amplitud igual al período para dibujarla en **R**.

10.47 **Una función continua está definida en R, es creciente en $(-\infty,\ -3)$ y en $(4,\ +\infty)$, y decreciente en $(-3,\ 4)$. ¿Tiene máximos y/o mínimos relativos?**

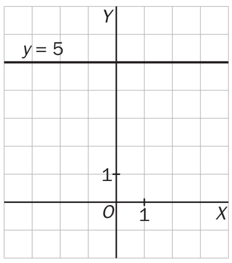
Sí. Tiene un máximo relativo en $x = -3$ y un mínimo relativo en $x = 4$.

10.48 **Razona si son ciertas las siguientes afirmaciones. En caso contrario, pon un ejemplo que lo demuestre.**
a) Si el dominio de una función es R, su recorrido también es R.
b) Todas las funciones definidas a trozos son discontinuas.
c) Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen sustituyendo *x* por 0.
d) El crecimiento o decrecimiento de una función depende del signo de la tasa de variación.

a) Falso. $y = x^2$.
b) Falso. $f(x) = |x|$
c) Falso. Se obtiene cuando $y = 0$
d) Verdadero.

10.49 **Dibuja una función cuyo recorrido esté acotado por un número real.**

Cualquier función constante. Por ejemplo, $y = 5$.



10.50 **Sabemos que la función $f(x) =$ pasa por el punto (3, 5).**
a) Si fuese par, ¿por qué otro punto pasaría?
b) ¿Y si fuese impar?

a) Por el punto $(-3,\ 5)$
b) Por el punto $(-3,\ -5)$

10.51 **Contesta a las siguientes cuestiones.**
a) Una función par tiene un máximo en el punto $(-2,\ 1)$. ¿Qué podemos decir del punto $(2,\ 1)$?
b) Una función impar posee un máximo en el punto $(4,\ -2)$. ¿Qué tipo de punto es $(-4,\ 2)$?

a) Es otro máximo de la función.
b) Un mínimo de la función.

10.52 La función $f(x) = |x|$, ¿es creciente en todo su dominio? ¿Y continua?

Es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Es continua.

10.53 ¿Se puede afirmar que si la tasa de variación media de una función es positiva, la función es creciente?

Sí, puesto que es más precisa que la tasa de variación cuando se quiere estudiar la rapidez con la que crece o decrece una función en un intervalo, y, por tanto, también informa sobre el tipo de crecimiento de la función.

10.54 Si una función es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$, ¿se puede afirmar que tiene un máximo en $x = 0$?

No, porque puede ser que no esté definida en $x = 0$.

PROBLEMAS PARA APLICAR

10.55 Julia ha abierto una tienda de ropa. A cada prenda que compra le aumenta un 70% su precio inicial, obteniendo así el precio de venta.

Como en el último mes no vendía mucho, decidió aplicar a todas las prendas un descuento del 18%.

a) Construye una tabla de valores que indique el importe actual de cada prenda en función del precio inicial, teniendo en cuenta que la más cara le costó 235 euros.

b) Realiza una gráfica con los datos obtenidos.

c) Escribe la expresión algebraica que representa el precio de venta actual de cada prenda en función del importe al que la compró.

d) Halla el dominio y el recorrido de la función.

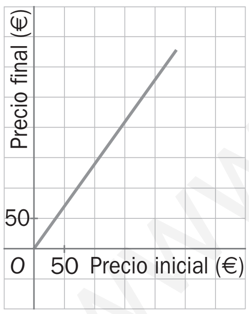
e) ¿La función corta el eje de coordenadas?

f) ¿Es una función continua?

a)

Precio inicial (x)	10	100	200	235
Precio final (y)	13,94	139,4	278,8	327,59

b)



c) $y = 1{,}7 \cdot 0{,}82x = 1{,}394x$

d) $Dom\ y = (0, 235]$; $Rec\ y = (0; 327{,}59]$

e) No corta ninguno de los ejes.

f) Sí es continua.

10.56 Calcula la expresión algebraica que permite obtener el diámetro que debe tener una lata de 500 mililitros, de forma cilíndrica, en función de su altura.

Si la altura de la lata puede oscilar entre 12 y 16 centímetros, ¿cuáles son el dominio y el rrecorrido de esa función?

Si d es el diámetro, r el radio y h la altura, entonces $d = 2 \cdot r = 2 \cdot \sqrt{\frac{500}{\pi h}}$.

$Dom\ y = [12, 16]$; $Rec = [6{,}31; 7{,}28]$

10.57 Juan está estudiando dos ofertas de trabajo como comercial de electrodomésticos que sólo se diferencian en el sueldo.

Oferta *A*: 1050 euros mensuales y 10 euros por cada aparato vendido, hasta un máximo de 20 al mes.
Oferta *B*: 600 euros al mes y 20 euros por cada electrodoméstico vendido.

a) Escribe, para cada caso, la expresión algebraica que representa el sueldo mensual de Juan en función del número de electrodomésticos vendidos.

b) Calcula el dominio y el recorrido de cada una de las funciones.

c) ¿Son funciones crecientes o decrecientes?

d) ¿Tienen algún máximo o mínimo?

a) Oferta A: $f(x) = 1050 + 10x$
Oferta B: $g(x) = 600 + 20x$

b) $Dom\ f(x) = [0, 20]$; $Rec\ f(x) = [1050, 1250]$
$Dom\ g(x) = [0, +\infty)$; $Rec\ g(x) = [600, +\infty]$

c) $a < b \Rightarrow TV[a, b] = f(b) - f(a) = 10b - 10a > 0 \Rightarrow$ Es creciente.
$a < b \Rightarrow TV[a, b] = g(b) - g(a) = 20b - 20a > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

d) La función $f(x)$ tiene un mínimo absoluto en (0, 1050) y un máximo absoluto en (20, 1250).
La función $g(x)$ solo tiene un mínimo absoluto en (0, 600).

10.58 Un aljibe tiene una fisura y pierde 2 litros de agua cada hora. A la vez, recibe agua a razón de 6 litros por hora. Por la mañana tenía 750 litros y durante toda la jornada no han conseguido arreglarlo.

a) Estudia el crecimiento de la función que expresa los litros del aljibe en función de las horas del día.

b) Escribe sus máximos y mínimos.

a) Si llamamos x al número de horas e y al número de litros del aljibe, $y = 750 + 4x$.
$a < b \Rightarrow TV[a, b] = f(b) - f(a) = 4b - 4a > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

b) Mínimo en (0, 750) y máximo en (24, 846)

10.59 El coste de producción de un número x de DVD viene dado por la siguiente expresión.

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 25x - 15$$

El precio de venta de cada uno de ellos es $P(x) = 75 - \frac{x}{2}$.

¿Cuál es la función que expresa el beneficio obtenido con la venta de x DVD?

$$B(x) = C(x) - x \cdot P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 25x - 15 - 75x + \frac{x^2}{2} = x^2 - 50x - 15$$

10.60 Expresa, mediante una función definida a trozos, la distancia al lugar de partida a la que se encuentra un grupo de amigos que realiza la siguiente excursión.

a) Durante la primera hora y media caminan a una velocidad constante de 3 km/h.

b) Descansan durante la media hora siguiente.

c) Regresan a una velocidad constante de 4,5 km/h.

Sea x el tiempo transcurrido desde la salida.

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x \leq 1{,}5 \\ 4{,}5 & \text{si } 1{,}5 \leq x < 2 \\ 13{,}5 - 4{,}5x & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

10.61 En la función del problema anterior, calcula su dominio y su recorrido, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, e indica sus máximos y mínimos, si los tiene.

$Dom\ f(x) = [0; 3]$ y $\mathbf{R}(f) = [0; 4,5]$

Crece en (0; 1,5), decrece en (2, 3) y es constante en (1,5; 2).

Máximos son todos los puntos del segmento de extremos $A(1,5; 4,5)$ y $B(2; 2,5)$.

10.62 **Laura quiere vallar un terreno de forma cuadrada y de área desconocida en el que ha plantado unas flores. Encuentra la expresión algebraica que permite obtener el lado del cuadrado en función del área.**

a) Si el área oscilase entre 120 y 180 m², ¿cuáles serían el dominio y el recorrido de la función?

b) La función, ¿es creciente o decreciente?

c) ¿Tiene máximos o mínimos?

Sea l el lado del cuadrado y A su área, entonces: $l = \sqrt{A}$.

a) $Dom\ f(x) = [120, 180]$; $\mathbf{R}(f) = \left[2\sqrt{30}, 6\sqrt{5}\right]$

b) $a < b \Rightarrow TV[a, b] = f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

c) Mínimo $\left(120, 2\sqrt{30}\right)$ y máximo $\left(180, 6\sqrt{5}\right)$

R E F U E R Z O

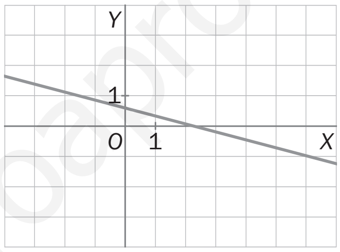
Formas de expresar una función. Dominio y recorrido

10.63 **Para cada una de las siguientes funciones, construye una tabla de valores y represéntala gráficamente.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}$ **b)** $g(x) = \dfrac{5x}{6}$

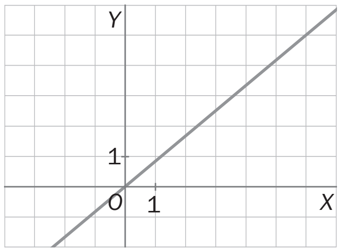
a)

x	-2	-1	0	1	2
y	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0



b)

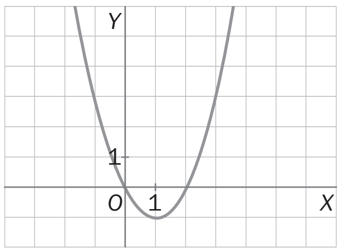
x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{6}$	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{3}$



10.64 **Escribe la expresión algebraica de la función que asocia a cada número real su cuadrado menos su doble. Construye una tabla de valores y representa gráficamente la función.**

$f(x) = x^2 - 2x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{6}$	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{3}$



10.65 **Halla el dominio de las siguientes funciones.**

a) $y = -x^2 - 4$ **c)** $y = \dfrac{5}{x + 1}$ **e)** $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

b) $y = 3x - \dfrac{7}{8}$ **d)** $y = \dfrac{x}{4 - x}$ **f)** $y = \dfrac{2x + 1}{3x - 12}$

a) $Dom\ y = \mathbf{R}$ c) $Dom\ y = \mathbf{R} - \{-1\}$ e) $Dom\ y = \mathbf{R}$

b) $Dom\ y = \mathbf{R}$ d) $Dom\ y = \mathbf{R} - \{-4\}$ f) $Dom\ y = \mathbf{R} - \{4\}$

Funciones definidas a trozos

10.66 Calcula $f(-3)$, $f(0)$ y $f(4)$ en la función $f(x) = \begin{cases} 9x - x^2 & \text{si} \quad x < 4 \\ 3x & \text{si} \quad x \geqslant 4 \end{cases}$

$f(-3) = 9 \cdot (-3) - (-3)^2 = -36$

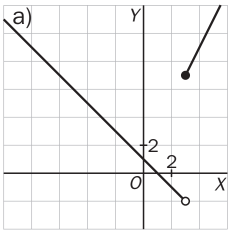
$f(0) = 0$

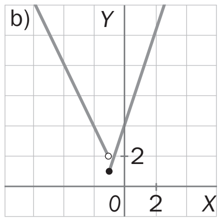
$f(4) = 3 \cdot 4 = 12$

10.67 Dibuja las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad x < 3 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x \geqslant 3 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < -1 \\ 3x + 4 & \text{si} \quad x \geqslant -1 \end{cases}$



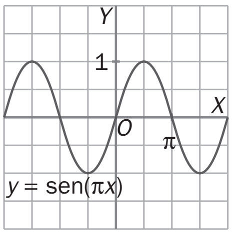


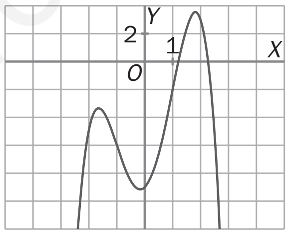
Características de las funciones

10.68 De las siguientes funciones, indica cuáles son periódicas y los puntos de corte con los ejes.

a) $f(x) = \text{sen}\ (\pi x)$

b) $g(x) = -x^4 + 6x^2 + 2x - 9$





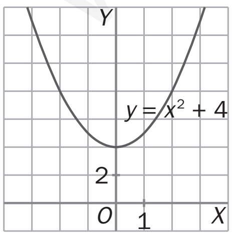
a) Es periódica de período $T = 2$.
Cortes con OX: $(x, 0)$, con $x \in \mathbf{Z}$
Cortes con OY: $(0, 0)$

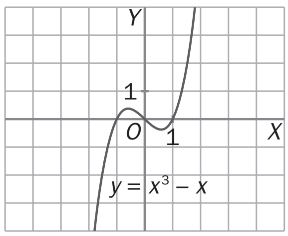
b) No es periódica.
Cortes con OX: (1,19; 0), (2,1; 0)
Cortes con OY: $(0, -9)$

10.69 Indica si las siguientes funciones son simétricas y el tipo de simetría que presentan.

a) $f(x) = x^2 + 4$

b) $g(x) = x^3 - x$





a) Es simétrica respecto del eje OY, o sea, par.

b) Es simétrica respecto del origen, o sea, impar.

10.70 Calcula la tasa de variación media de la función $h(x) = 8 - 4x$ en el intervalo $[-3, -1]$.

$$TVM[-3, -1] = \frac{h(-1) - h(-3)}{-1 - (-3)} = \frac{12 - 20}{2} = -4$$

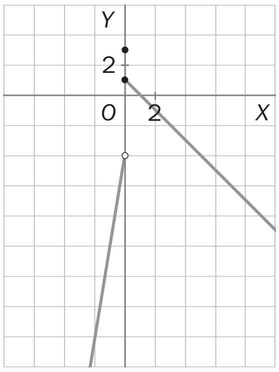
10.71 **Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función $f(x) = 4x + x^2$ en los intervalos $[-2,2;\ -2]$ y $[-2;\ -1,8]$.**

$TV[-2,2;\ -2] = f(-2) - f(-2,\ 2) = -4 + 3,96 < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

$TV[-2;\ -1,8] = f(-1,8) - f(-2) = -3,96 + 4 > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

10.72 **Estudia la continuidad de:**

$$f(x) = \begin{cases} 6x - 4 & \text{si} \quad x < 0 \\ 3 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 - x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$



No es continua en $x = 0$.

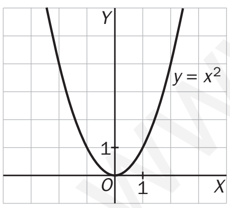
AMPLIACIÓN

10.73 **Teniendo en cuenta su gráfica, estudia la función $f(x) = x^2$ en los intervalos $[-0,5;\ 0]$ y $[0;\ 0,5]$. ¿Es creciente o decreciente? ¿Qué se puede afirmar del punto (0, 0)?**

$TV[0;\ 0,5] = f(0,5) - f(0) = 0,25 - 0 = 0,25 > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

$TV[-0,5;\ 0] = f(0) - f(-0,5) = 0 - 0,25 = -0,25 < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

El punto (0, 0) es un mínimo de la función.



10.74 **Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 2}{x - 4}$. Halla su dominio, calcula sus puntos de corte con los ejes, y estudia si es creciente o decreciente en los intervalos $[0;\ 0,5]$ y $[3;\ 3,2]$.**

$Dom\ f(x) = \mathbf{R} - \{4\}$

Cortes con OX: $2x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \Rightarrow P\left(\dfrac{-1 - \sqrt{17}}{4},\ 0\right)$ y $Q\left(\dfrac{-1 + \sqrt{17}}{4},\ 0\right)$

Cortes con OY: $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

$TV[0;\ 0,5] = f(0,5) - f(0) = 0,286 - 0,5 = -0,214 < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

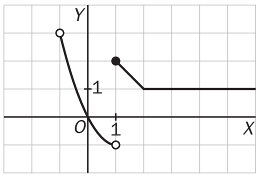
$TV[3;\ 3,2] = f(3,2) - f(3) = -27,1 - (-19) = -8,1 < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

10.75 Realiza la representación gráfica de las siguientes funciones e indica si son continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 6x - 15 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$

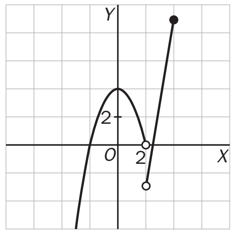
b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 3 - x & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$

a)



No es continua en $x = 2$.

b)



No es continua en $x = -1$ ni en $x = 1$.

10.76 Halla el dominio de las siguientes funciones y sus puntos de corte con los ejes.

a) $y = x^3 - 4x$

b) $y = \dfrac{x^2 - 1}{5x + 9}$

c) $y = x^4 - 6x^2 + 8$

d) $y = \dfrac{7 + x^4}{x^2 - 3x + 2}$

a) *Dom* $y = \mathbf{R}$

Cortes con OX: $x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow A(0, 0), B(2, 0)$ y $C(-2, 0)$

Cortes con OY: $(0, 0)$

b) *Dom* $y = \mathbf{R} - \left\{-\dfrac{9}{5}\right\}$

Cortes con OX: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$

Cortes con OY: $\left(0, -\dfrac{1}{9}\right)$

c) *Dom* $y = \mathbf{R}$

Cortes con OX: $x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow A(2, 0), B(-2, 0), C(\sqrt{2}, 0)$ y $D(-\sqrt{2}, 0)$

Cortes con OY: $(0, 8)$

d) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow$ *Dom* $y = \mathbf{R} - \{1, 2\}$

Cortes con OX: no lo corta, pues $7 + x^4 = 0$.

Cortes con OY: $\left(0, \dfrac{7}{2}\right)$

10.77 Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función $f(x) = 4x^3 - x$ en los intervalos

$$[-2, -1], \quad \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \quad \text{y} \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right].$$

$TV[-2, -1] = f(-1) - f(-2) = -3 + 30 = 27 > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

$TV\left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right] = f\left(\dfrac{1}{4}\right) - f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{8} < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

$TV\left[\dfrac{3}{2}, 2\right] = f(2) - f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 30 - 12 = 28 > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

10.78 Define $y = \left| \dfrac{x}{2} - 1 \right|$ como una función a trozos y represéntala gráficamente. Realiza un estudio completo de la función: continuidad, puntos de corte con los ejes, crecimiento en los intervalos [0, 1] y [3, 4], máximos y mínimos.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} - 1 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \\ -\dfrac{x}{2} + 1 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

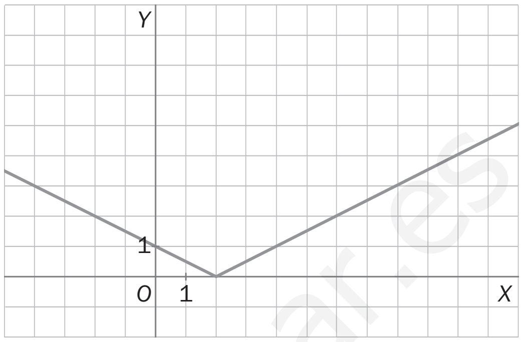
Es continua.

Cortes con OX: (2, 0)

Cortes con OY: (0, 1)

En $(2, +\infty)$ es creciente, y en $(-\infty, 2)$, decreciente.

Tiene un mínimo relativo y absoluto, (2, 0).

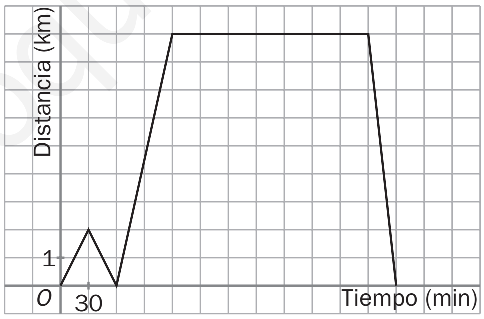


PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

10.79 La excursión

Beatriz quiso hacer una excursión para visitar un lago de un parque natural cerca de su casa. En principio pensó hacerla a pie, pero, cuando ya había comenzado, decidió volver a su casa para coger la bicicleta.

La siguiente gráfica representa la distancia a la que se encontraba de su casa en cada momento, desde que salió de ella por primera vez hasta que llegó después de haber terminado la excursión.



a) ¿Cuántos kilómetros recorrió andando? ¿Cuánto tardó? ¿Y en bicicleta?

b) ¿Cuánto tiempo estuvo parada visitando el paraje?

c) ¿A qué hora recogió la bicicleta en su casa?

d) ¿El viaje de ida en bicicleta le llevó más o menos tiempo que el de vuelta? Halla la velocidad media de la vuelta en km/h. ¿Qué indica el signo negativo de esta velocidad?

a) Anduvo dos kilómetros de ida y otros dos de vuelta. Tardó en total 60 minutos.
En bicicleta recorrió 10 kilómetros de ida y otros 10 de vuelta. Tardó 60 minutos en la ida y 30 en la vuelta.

b) Hora y media.

c) Una hora después de haber salido de casa por primera vez.

d) Le llevó más tiempo el de ida:

$$TVM[210, 240] = \frac{0 - 10}{240 - 210} = -\frac{10}{30} = -\frac{1}{3} \text{ km/min} = -\frac{1}{3} : \frac{1}{60} = -20 \text{ km/h}.$$

El signo negativo indica que se está acercando a casa.

10.80 Pantalla del ordenador

Un programa informático permite realizar dibujos geométricos. La pantalla del ordenador tiene una resolución de 32 × 20 puntos.

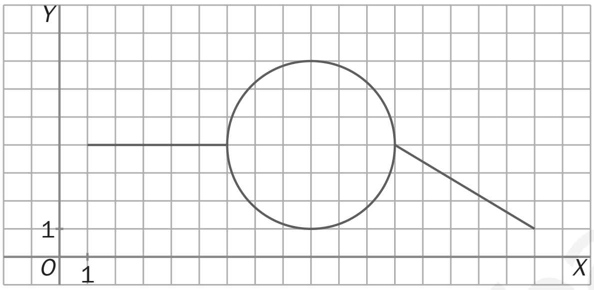
Los dibujos se hacen mediante las siguientes instrucciones:

- **SEG [(*a*, *b*); (*c*, *d*)], que dibuja un segmento de extremos los puntos (*a*, *b*) y (*c*, *d*).**
- **CIRC [(*a*, *b*); *r*], que dibuja una circunferencia de centro (*a*, *b*) y radio *r*.**

Al acabar cada instrucción se debe colocar un punto y coma.

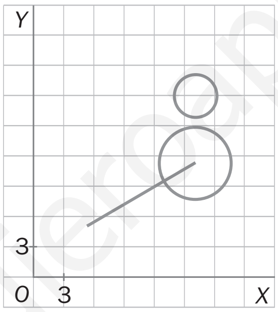
Así, por ejemplo, el dibujo de la figura se ha realizado mediante las instrucciones:

SEG [(1, 4); (6, 4)]; CIRC [(9, 4); 3]; SEG [(12, 4); (17, 1)];



Realiza el dibujo correspondiente a las siguientes instrucciones:

SEG [(5, 5); (11, 16)]; CIRC [(15, 16); 4]; CIRC [(19, 16); 2]



AUTOEVALUACIÓN

10.A1 Una colección consta de 60 libros de 9,95 euros cada uno.

a) Escribe la expresión algebraica que relaciona el dinero invertido en función del número de libros.

b) Construye una tabla de valores para la función y represéntala gráficamente.

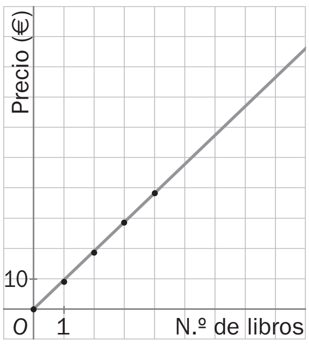
c) Calcula su dominio y su recorrido.

d) ¿Cuántos libros se han comprado si el gasto es de 159,20 euros?

a) Si llamamos x al número de libros e y al dinero invertido: $y = 9{,}95x$.

b)

x	0	1	2	3	4
y	0	9,95	19,90	29,85	39,80



c) $Dom\ y = \{x \in N \ / \ x \in (0, 60]\}$; $R(f) = \{9{,}95k \ / \ k = 1, 2, 3\ldots\ 60\}$

d) Si $y = 159{,}20 \Rightarrow x = 159{,}20 : 9{,}95 = 16$ libros

10.A2 **Calcula el dominio de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^3 + 2x - 3$

b) $g(x) = \dfrac{9}{2x + 6}$

a) Dom $f(x) = \mathbf{R}$

b) Dom $g(x) = \mathbf{R} - \{-3\}$

10.A3 **Halla los puntos de corte con los ejes en las siguientes funciones.**

a) $y = 7x - 1$

b) $y = \dfrac{8}{3}x$

c) $y = x^2 + 9x + 20$

a) Con el eje OX: $7x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{7} \Rightarrow A\left(\dfrac{1}{7}, 0\right)$.

Con el eje OY: $(0, -1)$

b) Con el eje OX: $A(0, 0)$.

Con el eje OY: $B(0, 0)$

c) Con el eje OX: $x^2 + 9x + 20 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-9 \pm 1}{2} = \begin{cases} -4 \\ -5 \end{cases} \Rightarrow A(-4, 0)$ y $B(-5, 0)$.

Con el eje OY: $(0, 20)$

10.A4 **Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las funciones en los intervalos que se indican.**

a) $f(x) = x + x^2$ **en** $[-1{,}5; -1]$ **y en** $[0{,}2; 1]$

b) $g(x) = 2x - 9$ **en** $[-2; -1{,}8]$

a) $TV[-1{,}5; -1] = f(-1) - f(-1{,}5) = 0 - 0{,}75 = -0{,}75 < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

$TV[0{,}2; 1] = f(1) - f(0{,}2) = 2 - 0{,}24 = 1{,}76 > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

b) $TV[-2; -1{,}8] = f(-1{,}8) - f(-2) = -12{,}6 - (-13) = 0{,}4 > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

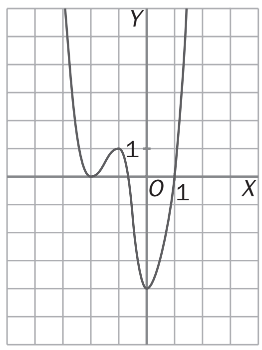
10.A5 **Observa la gráfica de la siguiente función.**

a) Encuentra el dominio y el recorrido.

b) Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Halla sus máximos y mínimos e indica de qué tipo son.

d) ¿Es simétrica? ¿Y continua?



a) *Dom* $f(x) = \mathbf{R}$; *Rec* $f(x) = [-4, +\infty)$

b) Decrece en $(-\infty, -2)$ y en $(-1, 0)$.

Crece en $(-2, -1)$ y en $(0, +\infty)$.

c) $(-2, 0)$ es mínimo relativo, y $(0, -4)$, mínimo absoluto. Máximo relativo en $(-2{,}5; 0{,}5)$.

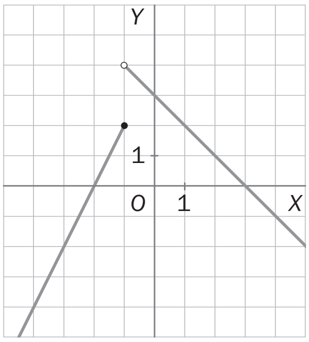
d) No es simétrica. Sí es continua.

10.A6 **Representa gráficamente las siguientes funciones y estudia su continuidad.**

a) $f(x) = \begin{cases} 4 + 2x & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 3 - x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

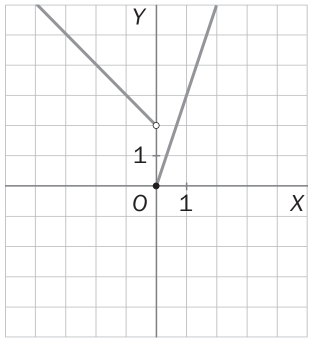
b) $g(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ 6 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a)



Discontinua en $x = -1$

b)



Discontinua en $x = 0$

MATETIEMPOS

Nombres y apellidos

El apellido representa la familia a la que perteneces y el nombre te identifica entre sus componentes. Juan Pérez, Jordi Castellet, Carmen Martínez, Pavel Iovanescu y Amal Kasar son algunos alumnos de una clase de 4.º de ESO. Si relacionamos el nombre de cada uno con su apellido, ¿esta relación es una función? Si cada alumno tuviera dos nombres, ¿la relación seguiría siendo una función? ¿Y si utilizasen los dos apellidos?

Si relacionamos el nombre de cada persona con su apellido, tendremos una relación biunívoca en la que a todo nombre (elemento del primer conjunto) le corresponda un apellido (imagen del segundo conjunto), y solo uno. Luego la relación es una función.

Si se tienen dos nombres, también será una función, ya que cada nombre tiene una imagen, y una sola.

Si se utilizan los dos apellidos, dejará de ser función, ya que a cada nombre le corresponderán dos apellidos (imágenes).

EJERCICIOS PROPUESTOS

11.1 Estudia y representa la siguiente función cuadrática: $f(x) = 2x^2 - x + 2$.

Es una parábola con las ramas hacia arriba, pues $a > 0$.

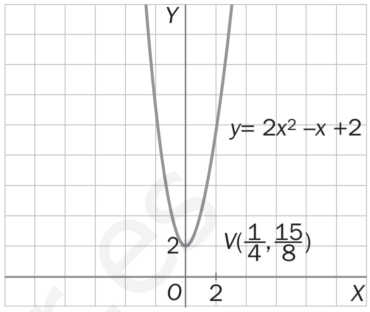
El vértice es el punto $V\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{8}\right)$.

El eje de la parábola es la recta $x = \frac{1}{4}$.

Corte con el eje OY: $A(0, 2)$.

Corte con el eje OX: $2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{4}$. No tiene solución.

Luego la parábola no corta el eje OX.



11.2 Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = 2x^2 + x - 6$.

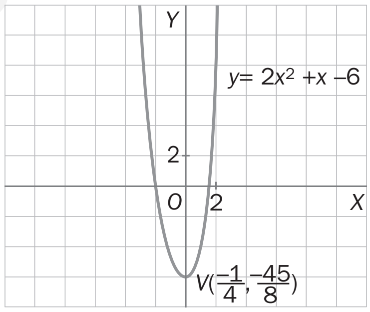
Es una parábola con las ramas hacia arriba, pues $a > 0$.

El vértice es el punto $V\left(\frac{-1}{4}, \frac{-45}{8}\right)$.

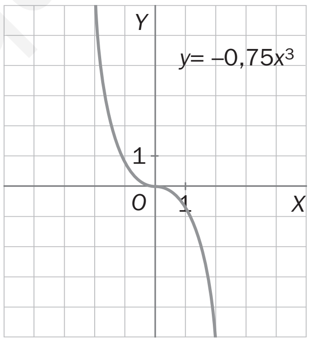
El eje de la parábola es la recta $x = \frac{-1}{4}$.

Corte con el eje OY: $A(0, -6)$

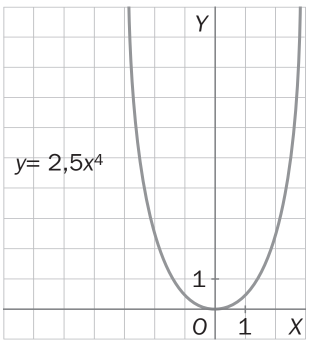
Corte con el eje OX: $x = \frac{-1 \pm 7}{4} \Rightarrow A(-2, 0)$ y $B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$



11.3 Representa gráficamente la siguiente función potencial: $y = -0{,}75x^3$.

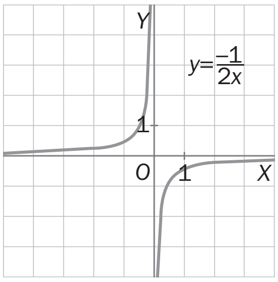


11.4 Representa gráficamente la siguiente función y explica las diferencias existentes con la función del ejercicio anterior: $y = 2{,}5x^4$.



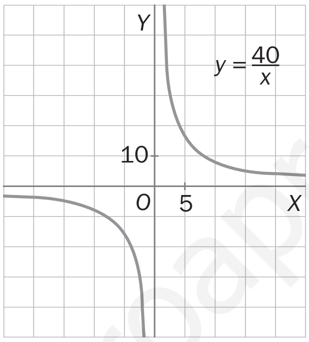
	$y = -0{,}75x^3$	$y = 2{,}5x^4$
Dominio	**R**	**R**
Recorrido	**R**	$\mathbf{R}^+$
Simetría	Respecto de (0, 0)	Respecto al eje OY
Continuidad	En todo el dominio	En todo el dominio
Crecimiento	Creciente para $x > 0$ Decreciente para $x < 0$	Creciente en todo el dominio
Pasa por los puntos	(1; −0,75); (0, 0); (−1; −0,75)	(1; 2,5); (0, 0); (−1; 2,5)

11.5 Representa gráficamente la siguiente función de proporcionalidad inversa: $f(x) = \dfrac{-1}{2x}$.



11.6 Un estanque tarda en llenarse 5 horas con los 8 grifos que tiene. ¿Cuál es la función que expresa la relación entre el número de grifos, *x*, con el tiempo, *y*, que emplea el estanque en llenarse? Represéntala gráficamente.

La función es $y = \dfrac{40}{x}$.

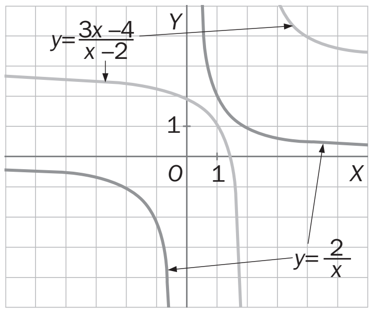


11.7 Halla el dominio de la siguiente función y represéntala gráficamente a partir de la traslación de funciones.

Su dominio es $\mathbf{R} - \{2\}$.

Operando: $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x - 2} = \dfrac{x - 2 + x - 2 + x - 2 + 2}{x - 2} = 3 + \dfrac{2}{x - 2}$.

Se trata de una traslación vertical de 3 unidades hacia arriba y una traslación horizontal de 2 unidades hacia la derecha de la función: $f(x) = \dfrac{2}{x}$.



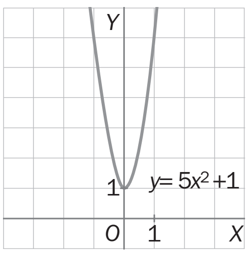
11.8 De las siguientes funciones, di cuáles son racionales, halla el dominio de cada una y represéntalas gráficamente.

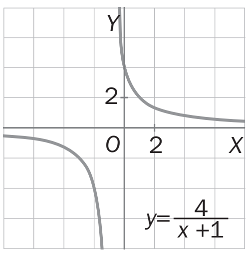
a) $y = 5x^2 + 1$ **b)** $y = \dfrac{4}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

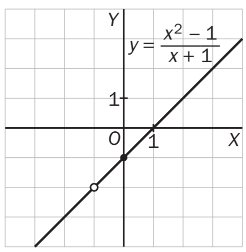
a) Dom $y = \mathbf{R}$

b) Dom $y = \mathbf{R} - \{-1\}$

c) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \Rightarrow$ Dom $y = \mathbf{R} - \{+1\}$







11.9 Con 1000 metros de alambre, deseamos construir un cercado de forma rectangular que tenga la máxima área posible. ¿Cuáles serán sus dimensiones?

Sea b la base del rectángulo y h su altura, tenemos $1000 = 2b + 2h$. Simplificando, $500 = b + h$. Despejando una de las variables se obtiene: $b = 500 - h$.

El área del rectángulo que se quiere maximizar es: $S = b \cdot h$.

Sustituyendo el valor de b en esta última expresión: $S = h \cdot (500 - h) = -h^2 + 500h$.

Se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, pues $a < 0$. Si se calculan las coordenadas del vértice, se obtiene el valor de h que hace su superficie máxima.

$h_{máx} = \dfrac{-500}{-2} = 250$ m; $\qquad S_{máx} = -250^2 + 500 \cdot 250 = 62\,500$ m^2

Sustituyendo h en la expresión de b, resulta $b_{máx} = 500 - 250 = 250$ m.

Por tanto, para obtener un cercado rectangular de superficie máxima con 1000 m de alambre, la base y la altura deben medir 250 m cada una.

11.10 Una empresa que fabrica hornos microondas obtiene unos beneficios por su venta dados por la siguiente función:

$$f(x) = 350x - 0{,}1x^2 - 20\,000$$

¿Cuántos hornos deben fabricarse para que el beneficio sea máximo?

Se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, pues $a = -0{,}1 < 0$. Si se calculan las coordenadas del vértice, se obtiene el valor de x que hace los beneficios máximos.

$x_{máx} = \dfrac{-350}{-0{,}2} = 1750$ hornos. Por tanto, deben fabricarse 1750 hornos para que el beneficio sea máximo.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11.11 Supongamos que un defensa que mide 1,80 metros hubiera intentado detener el lanzamiento. Si no tuviera tiempo de saltar, ¿a qué distancia del lanzador debería haber estado para interceptarlo? Para hacer los cálculos, supón que el balón pasa si va con una altura de 1,80 metros más o menos.

Hay que calcular los valores de x para los que la altura es de 1,80 metros.

$$1{,}8 = \frac{-1}{160}x^2 + \frac{11}{40}x \Rightarrow \frac{-1}{160}x^2 + \frac{11}{40}x - 1{,}8 = 0 \Rightarrow x^2 - 44x + 288 = 0$$

$$x = \frac{-44 \pm \sqrt{1936 - 1152}}{2} = \frac{-44 \pm 28}{2} = \begin{cases} 8 \\ 36 \end{cases}$$

El defensa debía estar a menos de 8 metros del delantero o a menos de 4 metros de la portería.

11.12 Un lanzador de jabalina participa en un campeonato. En el lanzamiento, la jabalina sale desde una altura de 1,80 metros. Alcanza una altura de 3,20 metros a los 10 metros de distancia y de 5 metros a los 40 metros de distancia del lanzador. ¿Cuánto medirá el lanzamiento?

En este caso, los puntos a utilizar son (0; 1,8), (10; 3,2) y (40, 5). Hay que hallar la distancia recorrida, buscando el punto en el que la altura sea 0. La ecuación de la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Sustituyendo los puntos se obtiene:

$$1{,}8 = 0 \cdot a + 0 \cdot b + c \Rightarrow c = 1{,}8$$
$$3{,}2 = 100a + 10b + 1{,}8 \Rightarrow 100a + 10b = 1{,}4$$
$$5 = 1600a + 40b + 1{,}8 \Rightarrow 1600a + 40b = 3{,}2$$

La solución del sistema es: $a = \dfrac{-1}{500} = -0{,}002$, $b = \dfrac{4}{25} = 0{,}16$; $c = 1{,}8$.

La ecuación de la parábola es: $y = -0{,}002x^2 + 0{,}16x + 1{,}8$.

Se buscan los valores de $x > 0$, para los que $y = 0$.

$$-0{,}002x^2 + 0{,}16x + 1{,}8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -10 \\ 90 \end{cases}$$

La distancia recorrida es de 90 metros.

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

Funciones cuadráticas

11.13 Indica cuáles de las siguientes funciones son cuadráticas.

a) $y = 3x + 5$ **b)** $y = x^2 - 4x$ **c)** $y = 6 + x^2$ **d)** $y = 2x + 5x^2 - x^3$

Son cuadráticas las funciones de los apartados b y c.

11.14 Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes parábolas.

a) $y = x^2 - 3x + 2$ **b)** $y = 5x^2 + 10$ **c)** $y = 9 - 6x + x^2$ **d)** $y = 2x^2 - 8$

a) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow A(1, 0)$ y $B(2, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow C(0, 2)$

b) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow$ No lo corta.

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow (0, 10)$

c) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3 \Rightarrow A(3, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow B(0, 9)$

d) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = -8 \Rightarrow C(0, -8)$

11.15 Indica, sin dibujarlas, cuáles de las siguientes parábolas son abiertas hacia arriba y cuáles hacia abajo.

a) $y = -3x^2 + 9x + 2$ **b)** $y = 5 - x + x^2$ **c)** $y = 2x^2 - x + 1$ **d)** $y = 8 - 4x^2$

Hacia arriba, la gráfica de b y de c. Hacia abajo, la gráfica de a y de d.

11.16 Calcula el vértice de las siguientes parábolas y luego represéntalas gráficamente.

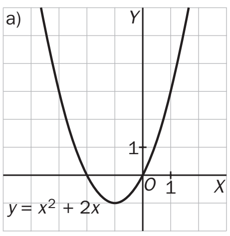
a) $y = x^2 + 2x$ **b)** $y = 1 - x^2$ **c)** $y = x^2 - x - 12$ **d)** $y = -2x^2 + 6x + 20$

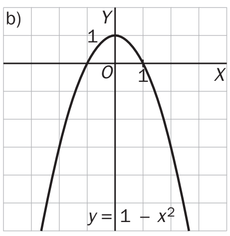
a) $x = -\dfrac{2}{2 \cdot 1} = -1$; $y = -1 \Rightarrow V(-1, -1)$

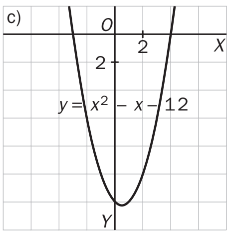
b) $x = -\dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$; $y = 1 \Rightarrow V(0, 1)$

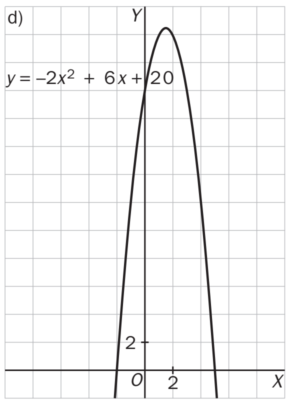
c) $x = -\dfrac{-1}{2 \cdot 1} = \dfrac{1}{2}$; $y = -\dfrac{49}{4} \Rightarrow V\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{49}{4}\right)$

d) $x = -\dfrac{6}{2 \cdot (-2)} = \dfrac{3}{2}$; $y = \dfrac{49}{2} \Rightarrow V\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{49}{2}\right)$









11.17 **De las siguientes parábolas, ¿cuáles tienen su vértice sobre el eje de ordenadas? ¿Cuál es, en ese caso, su eje de simetría?**

a) $y = x^2 - 2x$ **b)** $y = -7x^2$ **c)** $y = \frac{1}{4}x^2 - 6x$ **d)** $y = 3x^2 + 5$

a) $x = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1$; $y = -1 \Rightarrow V(1, -1)$ c) $x = 6 : \frac{2}{4} = \frac{24}{2} = 12$; $y = \frac{1}{4}12^2 - 6 \cdot 12 = -36 \Rightarrow V(12, -36)$

b) $x = -\frac{0}{2 \cdot (-7)} = 0$; $y = 0 \Rightarrow V(0, 0)$ d) $x = 0$; $y = 5 \Rightarrow V(0, 5)$

Tienen su vértice en el eje de ordenadas las parábolas de los apartados b y d. En estos casos, su eje de simetría es el eje de ordenadas.

11.18 **Halla el vértice y el eje de simetría de las siguientes funciones.**

a) $y = x^2 + 8x + 1$ **c)** $y = -x^2 + 2x + 2$ **e)** $y = -x^2 + 1$

b) $y = 2x^2 - 4x - 3$ **d)** $y = x^2 + 6x$ **f)** $y = 3x^2 - 5$

a) $x = \frac{-8}{2 \cdot 1} = -4$; $y = -15 \Rightarrow V(-4, -15)$. Eje: $x = -4$

b) $x = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1$; $y = -5 \Rightarrow V(1, -5)$. Eje: $x = 1$

c) $x = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1$; $y = 3 \Rightarrow V(1, 3)$. Eje: $x = 1$

d) $x = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3$; $y = -9 \Rightarrow V(-3, -9)$. Eje: $x = -3$

e) $x = -\frac{0}{2 \cdot (-1)} = -1$; $y = -1 \Rightarrow V(0, -1)$. Eje: $x = 0$

f) $x = -\frac{0}{2 \cdot 3} = 0$; $y = -5 \Rightarrow V(0, -5)$. Eje: $x = 0$

11.19 **Para cada una de las siguientes parábolas, indica si su vértice es un máximo o un mínimo.**

a) $y = 6 - 3x + 2x^2$ **c)** $y = \frac{1}{6}x^2 - x + 1$ **e)** $y = 7x^2 - 9x + 3$

b) $y = 4x + 5x^2$ **d)** $y = \frac{5}{4} + x - 8x^2$ **f)** $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{5}$

Será un máximo en aquellas parábolas en las que $a < 0$. Es decir, en las de los apartados d y f.

Será un mínimo en aquellas parábolas en las que $a > 0$. Es decir, en las de los apartados a, b, c y e.

11.20 **La gráfica de una función cuadrática corta el eje *OX* en los puntos (−4, 0) y (1, 0). Calcula la abscisa del vértice de esa parábola.**

La ecuación de la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Esta parábola pasa por los puntos $(-4, 0)$ y $(1, 0)$.

Sustituyendo los puntos se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r} 0 = 16a - 4b + c \Rightarrow c = -16a + 4b \\ 0 = a + b + c \end{array}\right\} b = 3a \text{ y } c = -4a$$

La ecuación de la parábola queda así: $y = ax^2 + 3ax - 4a$. Y, por tanto, la abscisa del vértice es: $x = \frac{-3a}{2a} = \frac{-3}{2}$.

11.21 **Para cada apartado, escribe la expresión algebraica de una función cuadrática que cumpla las condiciones descritas.**

a) Pasa por el origen de coordenadas. **c) Corta el eje de abscisas en (2, 0) y (6, 0).**

b) Tiene las ramas abiertas hacia abajo. **d) No corta el eje de abscisas.**

a) $y = x^2 + x$ c) $y = (x - 2)(x - 6) = x^2 - 8x + 12$

b) $y = -x^2 + 5x + 1$ d) $y = x^2 + 3$

Funciones potenciales

11.22 **Identifica cuáles de las siguientes funciones son potenciales.**

a) $y = 2x$ **b)** $y = \frac{3}{8}x^5$ **c)** $y = -7 \cdot 5^x$ **d)** $y = -2x^{12}$ **e)** $y = \frac{6}{x^3}$ **f)** $y = 4x^6$

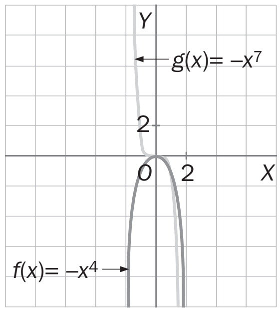
Las funciones de los apartados b, d, e y f.

11.23 A partir de la gráfica de las funciones potenciales que conoces, representa $f(x) = -x^4$ y $g(x) = -x^7$.

a) ¿Qué relación tienen sus gráficas con las de las funciones potenciales conocidas?

b) Calcula su dominio y recorrido.

c) ¿Qué tipo de simetría presentan?



a) Son opuestas a $y = x^4$ y a $y = x^7$, respectivamente.

b) Dom $f(x)$ = Dom $g(x)$ = **R**

Rec $f(x)$ = $\mathbf{R}^-$. Rec $g(x)$ = **R**

c) $f(x)$ es par, y $g(x)$ es impar.

11.24 Para las funciones $f(x) = 8x^3$ y $g(x) = 0{,}5x^3$:

a) Construye una tabla de valores.

b) Represéntalas gráficamente.

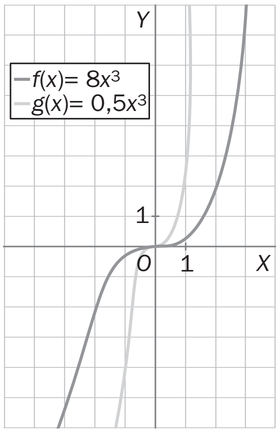
c) Realiza un estudio completo indicando dominio y recorrido, simetría, continuidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, y puntos de corte con los ejes.

a)

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−64	−8	0	8	64

x	−2	−1	0	1	2
$g(x)$	−4	−0,5	0	0,5	4

b)



c) Dom $f(x)$ = Dom $g(x)$ = Rec $f(x)$ = Rec $g(x)$ = **R**.

Son continuas y simétricas respecto del origen.

Ambas son crecientes en todo su dominio.

No tienen máximos ni mínimos porque es creciente en todo su dominio.

Corta los ejes en (0, 0).

11.25 Para cada caso, escribe la fórmula de una función potencial que:

a) Sea simétrica respecto del origen.

b) Pase por los puntos (1, 4) y (−1, 4).

c) Pase por los puntos $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

d) Sea creciente para $x < 0$ y decreciente para $x > 0$.

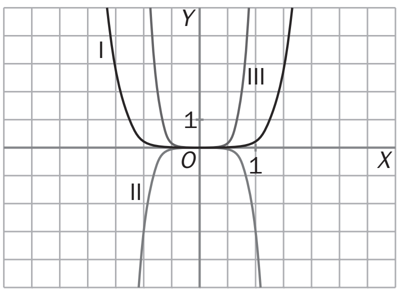
a) $y = x^9$ b) $y = 4x^2$ c) $y = \frac{1}{2}x^3$ d) $y = -x^6$

11.26 Asocia cada función con la gráfica que le corresponde.

a) $f(x) = -3x^6$

b) $g(x) = 10x^6$

c) $h(x) = \frac{1}{4}x^6$



II con a; III con b; I con c.

11.27 Representa gráficamente las siguientes funciones por traslación de $y = x^4$.

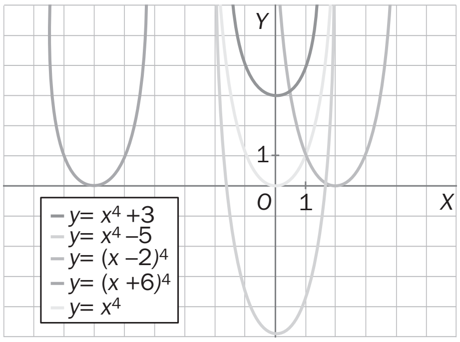
a) $y = x^4 + 3$ **b)** $y = x^4 - 5$ **c)** $y = (x - 2)^4$ **d)** $y = (x + 6)^4$

a) Trasladar $y = x^4$ tres unidades hacia arriba.

b) Trasladar $y = x^4$ cinco unidades hacia abajo.

c) Trasladar $y = x^4$ dos unidades hacia la derecha.

d) Trasladar $y = x^4$ seis unidades hacia la izquierda.



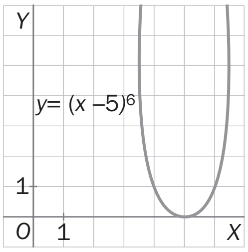
11.28 Dibuja la función $f(x) = (x - 5)^6$.

a) Calcula su dominio y su recorrido.

b) ¿Es simétrica? ¿Y continua?

c) ¿Cuáles son sus puntos de corte con los ejes?

d) Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Tiene máximos y/o mínimos?



a) Su dominio es $\mathbf{R}$, y su recorrido, $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$.

b) No es simétrica. Sí es continua.

c) Corta el eje OX en (5, 0) y el eje OY en (0, 15625).

d) Es decreciente en $(-\infty, 5)$ y creciente en $(5, +\infty)$.
Tiene un mínimo en (5, 0).

Funciones de proporcionalidad inversa

11.29 Identifica de entre las siguientes funciones las que sean de proporcionalidad inversa.

a) $f(x) = \dfrac{-5}{x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{4x}{x + 1}$ **c)** $h(x) = \dfrac{7}{2x}$

Son funciones de proporcionalidad inversa las de los apartados a y c.

11.30 Escribe la expresión algebraica de dos funciones de proporcionalidad inversa, una creciente y otra decreciente.

Decreciente: $y = \dfrac{-2}{x}$ Creciente $y = \dfrac{3}{x}$

11.31 Completa la siguiente tabla de valores y realiza los ejercicios propuestos.

x	1	2	3	4	6
y	36		12		6

a) ¿Qué tipo de relación existe entre las variables?

b) Escribe la expresión algebraica que indica cómo se obtiene y a partir de x.

c) Construye, para esa función, una tabla de valores negativos de x.

d) Representa gráficamente dicha función.

Tabla: 18 (en la segunda columna) y 9 (en la cuarta columna)

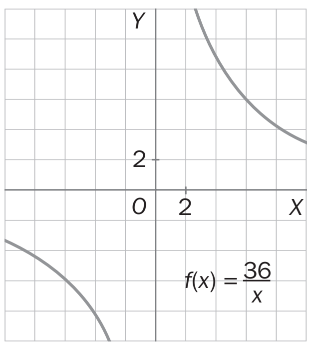
a) Existe una relación de proporcionalidad inversa.

b) $y = \dfrac{36}{x}$

c)

x	−1	−2	−3	−4	−6
y	−36	−18	−12	−9	−6

d)



11.32 **Observa la función $f(x) = \frac{6}{11x}$**

a) ¿Es una función de proporcionalidad inversa?

b) Halla su dominio.

c) ¿Es creciente o decreciente?

d) ¿Existe algún valor de x en el que no sea continua?

a) Sí, $k = \frac{6}{11}$ b) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{0\}$ c) Es creciente. d) Sí, $x = 0$

11.33 **A partir de su expresión algebraica, indica si las siguientes funciones de proporcionalidad inversa son crecientes o decrecientes.**

a) $y = \frac{-8}{x}$ **b)** $y = \frac{7}{2x}$ **c)** $y = \frac{1}{3x}$ **d)** $y = \frac{-2}{5x}$

Son crecientes las funciones de los apartados b y c, y decrecientes las de los apartados a y d.

Funciones racionales

11.34 **Halla el dominio de las funciones siguientes.**

a) $y = \frac{2x + 4}{3x - 6}$ **b)** $y = \frac{x^2 + 2}{1 - x^2}$ **c)** $y = \frac{1}{x^2 - 8x + 16}$ **d)** $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

a) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{2\}$.

b) $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

c) $x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4 \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{4\}$

d) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{0\}$

11.35 **¿Cuáles de las siguientes funciones son racionales?**

a) $y = \frac{3x^2 - 5x + 1}{6}$ **b)** $y = \frac{4x - 2}{2x + 6}$ **c)** $y = \frac{x}{x^3 + 9}$

Son racionales las funciones de los apartados b y c.

11.36 **Escribe, para cada caso, la expresión algebraica de una función racional que se obtenga:**

a) A partir de una traslación horizontal de la función $f(x) = \frac{4}{x}$.

b) A partir de una traslación vertical de la función $g(x) = \frac{1}{5x}$.

c) A partir de una traslación horizontal y vertical de la función $h(x) = -\frac{2}{9x}$.

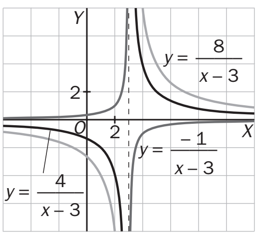
a) $y = \frac{4}{x - 1}$ b) $y = \frac{1}{5x} + 1$ c) $y = -\frac{2}{9x + 1} - 4$

11.37 **Dibuja, en los mismos ejes, la gráfica de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \frac{4}{x - 3}$

b) $g(x) = \frac{-1}{x - 3}$

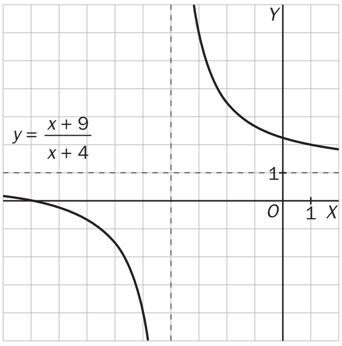
c) $h(x) = \frac{8}{x - 3}$

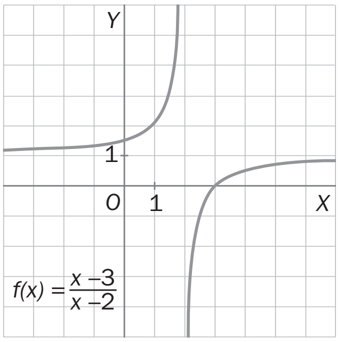


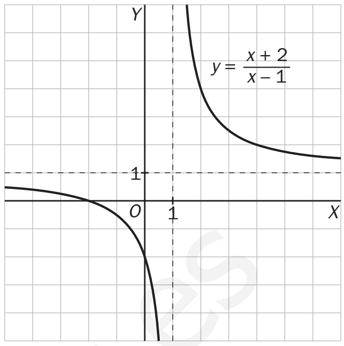
11.38 Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa mediante traslaciones horizontales y verticales.

a) $f(x) = \dfrac{x + 9}{x + 4}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x - 3}{x - 2}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

a) $f(x) = \dfrac{x + 4 + 5}{x + 4} = 1 + \dfrac{5}{x + 4}$ b) $g(x) = \dfrac{x - 2 - 1}{x - 2} = 1 + \dfrac{-1}{x - 2}$ c) $h(x) = \dfrac{x - 1 + 3}{x - 1} = 1 + \dfrac{3}{x - 1}$







CUESTIONES PARA ACLARARSE

11.39 Si el vértice de una parábola es el punto (−6, 10), ¿cuál es su eje de simetría?

Su eje de simetría es la recta $x = -6$.

11.40 Escribe la expresión algebraica de una función potencial simétrica respecto al eje de ordenadas y que no pase por el origen.

Por ejemplo, $y = x^4 + 1$

11.41 La función $f(x) = \dfrac{k}{x}$:

a) ¿En qué puntos corta los ejes de coordenadas? **b) ¿Tiene máximos y/o mínimos?**

a) No corta los ejes. b) No tiene máximos ni mínimos.

11.42 Estudia el crecimiento de la función $f(x) = ax^n$, con n impar:

a) Para $a > 0$ **b) Para $a < 0$**

a) Creciente b) Decreciente

11.43 Explica si puede haber alguna función racional cuyo dominio sean todos los números reales. En caso afirmativo, escribe un ejemplo.

Sí. Por ejemplo, $y = \dfrac{2x + 4}{x^2 + 1}$

11.44 Una función potencial impar pasa por el origen y por el punto (1, 6).

a) ¿Por qué otro punto pasa? **b) ¿Cuál es su expresión algebraica?**

a) Por el punto (−1, −6) b) $y = 6x^n$, siendo n cualquier número impar.

11.45 Dos parábolas cortan el eje de abscisas en los puntos (5, 0) y (8, 0). Razona si son iguales o pueden ser distintas.

La ecuación de la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Esta parábola debe pasar por los puntos (5, 0) y (8, 0).

Sustituyendo los puntos se obtiene: $\begin{cases} 0 = 25a + 5b + c \\ 0 = 64a + 8b + c \end{cases}$

Restando ambas ecuaciones, despejando y simplificando se obtiene: $b = -13a$, y, por tanto, $c = 40a$. La ecuación es: $y = ax^2 - 13ax + 40a$ (a es un número real). Cualquier parábola de esta forma pasará por los puntos (5, 0) y (8, 0).

11.46 Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = ax^n$, con $a < 0$ y n par. ¿Es $x = 0$ un máximo o un mínimo? En caso afirmativo, indica si es absoluto o relativo.

Es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$. El punto $(0, 0)$ es un máximo absoluto.

PROBLEMAS PARA APLICAR

11.47 Una pelota, tras ser golpeada por un tenista, sigue una trayectoria dada por la expresión $f(t) = 8t - t^2$, siendo t el tiempo (en segundos) transcurrido desde el golpe, y $f(t)$, la altura (en metros) a la que se encuentra la pelota.

a) ¿A qué tipo de gráfica corresponde esta trayectoria?

b) ¿Cuándo alcanza la pelota su máxima altura?

c) ¿Cuál es esa altura máxima conseguida?

d) ¿En qué momento cae la pelota a la pista?

a) Se corresponde con una parábola.

b) Como se trata de una parábola con las ramas hacia abajo, pues $a = -1 < 0$, alcanza su máximo en el vértice.

Vértice: $t = -\dfrac{8}{2 \cdot (-1)} = 4$. La pelota alcanza su altura máxima a los 4 segundos.

c) $f(4) = 32 - 16 = 16$. La altura máxima conseguida es de 16 metros.

d) La pelota cae a la pista en el segundo t, para el cual $f(t) = 0$.

$8t - t^2 = 0 \Rightarrow t(8 - t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 8$. Vuelve al suelo a los 8 segundos de ser lanzada.

11.48 Un invernadero visto de frente presenta la forma de la gráfica de la función $f(x) = 2x - \dfrac{1}{4}x^2$.

a) ¿A qué tipo de gráfica corresponde esa forma?

b) Calcula la altura máxima del invernadero.

a) La gráfica se corresponde con una parábola.

b) Como se trata de una parábola con las ramas hacia abajo, pues $a = -\dfrac{1}{4} < 0$, alcanza su máximo en el vértice.

$x = 4$. La máxima altura es de 4 metros.

11.49 Para transportar una mercancía, se han elaborado cajas con forma de cubo.

a) Expresa la capacidad de cada caja en función de su lado. ¿Qué tipo de función es?

b) ¿Existe alguna medida del lado que haga máximo el volumen?

a) Si llamamos x al lado del cubo, se tiene que $V = x^3$. Se trata de una función potencial.

b) Como se trata de una función continua y creciente en todo su dominio, no tiene máximos ni mínimos, por lo que no existe ninguna medida que haga máximo el volumen.

11.50 Teniendo en cuenta que los móviles funcionan en la banda de frecuencias UHF (de muy alta frecuencia) entre los 800 y los 2000 MHz (1 MHz = 10^6 kHz), y que la relación entre la frecuencia y la longitud de onda viene dada por la siguiente tabla:

Frecuencia (kHz)	10^5	$2 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$
Longitud de onda (m)	3000	1500	1000

a) ¿Qué tipo de relación existe entre ambas variables?

b) ¿Qué expresión algebraica permite obtener la longitud de onda, conocida la frecuencia?

c) ¿Entre qué valores de la longitud de onda se encuentra el alcance de un móvil?

a) Ambas variables son inversamente proporcionales.

b) $10^5 \cdot 3000 = 300\,000\,000 \Rightarrow f(x) = \dfrac{300\,000\,000}{x}$

c) 800 MHz = 800 000 kHz, y 2000 MHz = 2 000 000 kHz.

$f(800\,000) = \dfrac{300\,000\,000}{800\,000} = 375$ metros $\qquad f(2\,000\,000) = \dfrac{300\,000\,000}{2\,000\,000} = 150$ metros

La longitud de onda se encuentra entre 150 y 375 metros.

11.51 **Si aprietas un balón entre tus manos, comprobarás que, al disminuir su volumen, *V*, te cuesta cada vez más apretarlo. Esto es porque aumenta la presión, *P*, del aire en su interior.**

La presión del aire en el balón se incrementa de forma inversamente proporcional al volumen, es decir, se cumple que $P \cdot V = k$, donde k es una constante positiva.

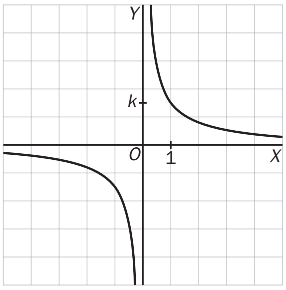
a) ¿De qué tipo es la función $P(V)$?

b) Represéntala gráficamente.

c) ¿Corta la gráfica a los ejes de coordenadas?

a) Se trata de una función de proporcionalidad inversa.

b)



c) No corta a los ejes.

11.52 **Durante el tiempo en que ha estado en marcha una empresa, los beneficios obtenidos (expresados en miles de euros) a lo largo del tiempo t (indicado en años) vienen dados por la fórmula:**

$$B(t) = -t^2 + 12t$$

a) ¿Cuántos años ha estado la empresa en funcionamiento?

b) ¿Cuándo obtuvo el máximo beneficio?

c) Representa gráficamente la función $B(t)$.

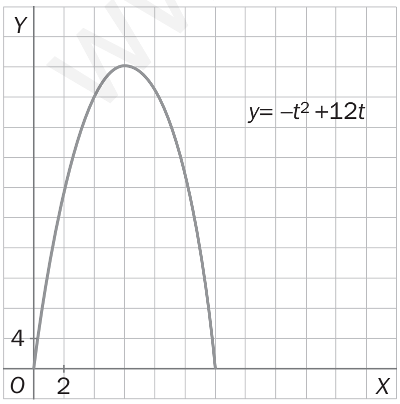
d) Indica cómo han cambiado los beneficios a lo largo del tiempo.

a) Dom $f(x) = (0, +\infty)$

b) Como la función que indica los beneficios a lo largo del tiempo es cuadrática con las ramas hacia abajo, pues $a = -1 < 0$, alcanza su máximo en el vértice: $x = -\dfrac{12}{2 \cdot (-1)} = 6$.

Su máximo beneficio se alcanzó en el sexto año.

c)



d) Los beneficios crecieron, desde que se puso la empresa en marcha, hasta el sexto año. En este año se alcanzaron los máximos beneficios de la empresa. A partir del sexto año, los beneficios fueron decreciendo hasta el duodécimo año. En ese año, los beneficios fueron nulos. A partir del duodécimo año, la empresa tuvo pérdidas. Por lo que se supone que la empresa cerró.

11.53 **Los alumnos de 4.º ESO van a vallar una zona del patio del centro escolar para habilitarla como mercadillo de libros. Para uno de los lados del recinto se aprovechará una de las paredes del centro.**

Se dispone de 12 metros de cercado. ¿Cuánto deben medir los lados del rectángulo para que ocupe la máxima superficie?

Sean b y h las dimensiones del rectángulo. Se tiene que $12 = b + 2h$.

Despejando una de las variables, se obtiene: $b = 12 - 2h$.

El área del rectángulo que se quiere maximizar es: $S = b \cdot h$.

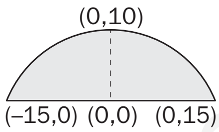
Sustituyendo el valor de b en esta última expresión, se obtiene: $S = h \cdot (12 - 2h) = 12h - 2h^2$.

Como se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, pues $a = -2 < 0$, alcanza su máximo en el vértice: $h_{\text{máx}} = \dfrac{-12}{-4} = 3$ metros.

Sustituyendo h en la expresión de b, resulta $b_{\text{máx}} = 12 - 6 = 6$ m. Por tanto, para obtener el cercado rectangular de superficie máxima con 12 m de valla, y aprovechando la pared, el lado paralelo a la pared debe medir 6 metros, y los otros lados, 3 metros cada uno.

11.54 **Noelia y Miguel están observando la maqueta de un puente que tiene forma de parábola y pretenden calcular su expresión algebraica.**

Para ello miden la distancia entre los puntos de las bases y la altura máxima, obteniendo el siguiente dibujo:



¿Cuál es la función cuya gráfica se corresponde con la forma del puente?

Se trata de una función cuadrática. La ecuación de la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Esta parábola debe pasar por los puntos (15, 0), (−15, 0) y (0, 10). Sustituyendo los puntos se obtiene:

$$0 = 225a + 25b + c$$
$$0 = 225a - 25b + c$$
$$10 = 0a + 0b + c$$

De la tercera ecuación, $c = 10$. Sustituimos este valor en las otras dos ecuaciones y las restamos.

Al restarlas se obtiene que $50b = 0 \Rightarrow b = 0$. De la primera ecuación, $a = \dfrac{-25b - 10}{225} = \dfrac{-10}{225} = \dfrac{-2}{45}$.

La ecuación de la parábola es: $y = \dfrac{-2}{45}x^2 + 10$.

R E F U E R Z O

Funciones cuadráticas

11.55 **Calcula los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las funciones siguientes.**

a) $y = x^2 + 6x$ **b)** $y = 2x^2 - 18$ **c)** $y = x^2 + 8x + 16$ **d)** $y = 3 - 2x - x^2$

a) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x \cdot (x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = -6 \Rightarrow A(0, 0)$ y $B(-6, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C(0, 0)$

b) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow A(-3, 0)$ y $B(3, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = -18 \Rightarrow C(0, -18)$

c) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = -4 \Rightarrow A(-4, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 16 \Rightarrow B(0, 16)$

d) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow 3 - 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow A(-3, 0)$ y $B(1, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow C(0, 3)$

11.56 Sin dibujar su gráfica, indica cuáles de las siguientes funciones cuadráticas están abiertas hacia arriba y cuáles hacia abajo.

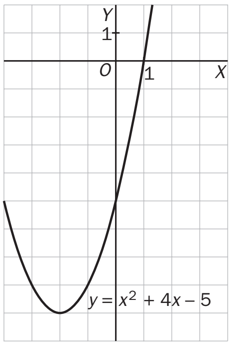
a) $y = 9x + 3x^2$ **b)** $y = 8 - 2x - 4x^2$ **c)** $y = 2x^2 - 1$ **d)** $y = -x^2 + x + 1$

Son abiertas hacia arriba las gráficas de las funciones de los apartados a y c. Y son abiertas hacia abajo las de los apartados b y d.

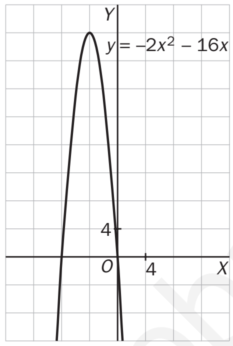
11.57 Calcula el vértice de las siguientes parábolas y dibújalas a continuación.

a) $y = x^2 + 4x - 5$ **b)** $y = x^2 - 9$ **c)** $y = -2x^2 - 16x$ **d)** $y = x^2 + 4x + 2$

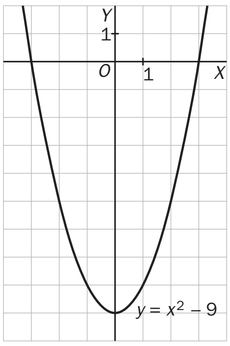
a) $x = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2;\ y = -9 \Rightarrow V(-2, -9)$



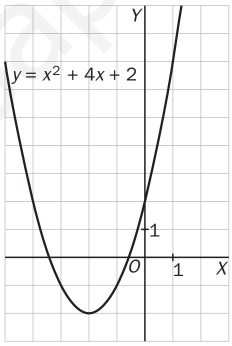
c) $x = \dfrac{16}{2 \cdot (-2)} = -4;\ y = 32 \Rightarrow V(-4, 32)$



b) $x = -\dfrac{0}{2 \cdot 2} = 0;\ y = -9 \Rightarrow V(0, -9)$



d) $x = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2;\ y = -2 \Rightarrow V(-2, -2)$



11.58 Halla el eje de simetría de las siguientes parábolas.

a) $y = \dfrac{5}{4}x^2$ **b)** $y = 2x^2 + 8x$ **c)** $y = x^2 + 9$ **d)** $y = x^2 - 2x - 3$

a) $x = 0;\ y = 0 \Rightarrow V(0, 0)$

Eje de simetría: $x = 0$

b) $x = -\dfrac{8}{2 \cdot 2} = -2;\ y = -8 \Rightarrow V(-2, -8)$

Eje de simetría: $x = -2$

c) $x = -\dfrac{0}{2 \cdot 1} = 0;\ y = 9 \Rightarrow V(0, 9)$

Eje de simetría: $x = 0$

d) $x = \dfrac{2}{2 \cdot 1} = 1;\ y = -4 \Rightarrow V(1, -4)$

Eje de simetría: $x = 1$

Funciones potenciales

11.59 Sin dibujarlas, indica cuáles de las siguientes funciones potenciales tienen simetría respecto al eje *OY* y cuáles respecto del origen.

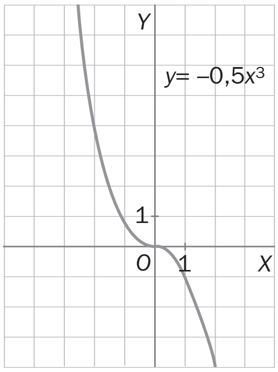
a) $f(x) = 3x^6$ **b)** $f(x) = -2x^5$ **c)** $h(x) = 4x^9$

Son simétricas respecto al eje *OY* las gráficas de las funciones de los apartados a y b. Y respecto al origen, las gráficas de la función del apartado c.

11.60 Representa gráficamente las siguientes funciones e indica cuáles son sus máximos y/o mínimos, si los tuvieran.

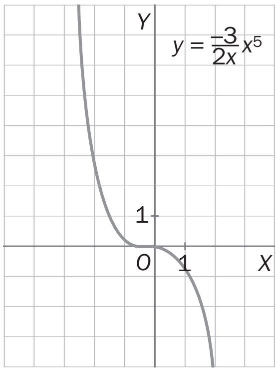
a) $y = -0{,}5x^3$ **b)** $y = 1{,}75x^4$ **c)** $y = -\frac{3}{2}x^5$ **d)** $y = \frac{1}{2}x^6$

a)



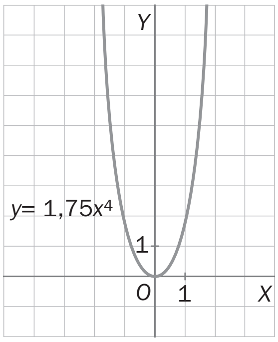
No tiene máximos ni míminos

c)



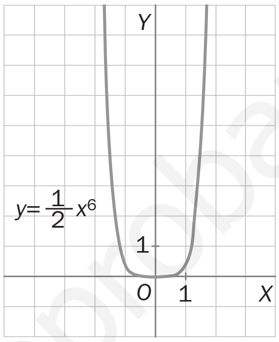
No tiene máximos ni míminos

b)



Tiene un mínimo absoluto en (0, 0)

d)



Tiene un máximo absoluto en (0, 0)

Funciones de proporcionalidad inversa

11.61 Completa la siguiente tabla de valores sabiendo que x y $f(x)$ son inversamente proporcionales.

¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona ambas variables?

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
y		**80**			**40**

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
y	120	**80**	60	48	**40**

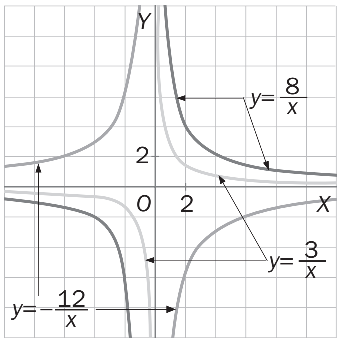
La expresión es $y = \frac{240}{x}$.

11.62 Representa en los mismos ejes las funciones:

a) $f(x) = \frac{8}{x}$

b) $g(x) = -\frac{12}{x}$

c) $h(x) = \frac{3}{x}$



11.63 Observa las gráficas del ejercicio anterior e indica cómo es el crecimiento de cada una de las funciones.

Las funciones a y c son decrecientes, y la b es creciente.

Funciones racionales

11.64 Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = \frac{2x + 5}{x - 3}$ **b)** $y = \frac{4x^2}{16 - 8x}$ **c)** $y = \frac{x}{x^2 - x - 12}$ **d)** $y = \frac{1 - x^2}{x^2 + 9x}$

a) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{3\}$

c) $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{-3, 4\}$

b) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{2\}$

d) $x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x + 9) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -9 \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{0, -9\}$

11.65 Escribe, para cada caso, la expresión algebraica de una función racional que cumpla con las características solicitadas.

a) El grado del numerador es menor que el grado del denominador.

b) El numerador y el denominador tienen el mismo grado.

c) El grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

a) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 5x}$ b) $y = \dfrac{x^3 + 2x + 6}{x^3 - 5}$ c) $y = \dfrac{x^4 + x^2}{x^3 - 3x + 9}$

AMPLIACIÓN

11.66 Calcula el valor que debe tener *a* para que la función $f(x) = ax^2 - 4x + 3$ tenga un máximo en el punto de abscisa $x = -1$.

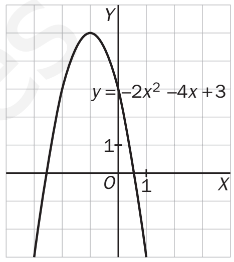
Para el valor de a obtenido, halla el vértice de la función y represéntala gráficamente.

El vértice de una parábola es un máximo o un mínimo, según sea la orientación de la misma. Para que el vértice sea un máximo, la parábola debe tener las ramas hacia abajo. Luego a $<$ 0. La primera coordenada del vértice es:

$x = \dfrac{4}{2a} = \dfrac{2}{a}$. Luego $-1 = \dfrac{2}{a}$. Por lo que a $= -2$.

La segunda coordenada del vértice es $y = -2 + 4 + 3 = 5$.

El vértice es $V(-1,5)$.



11.67 Calcula la expresión algebraica de la función potencial de grado 4 que pasa por el punto (−2, 11).

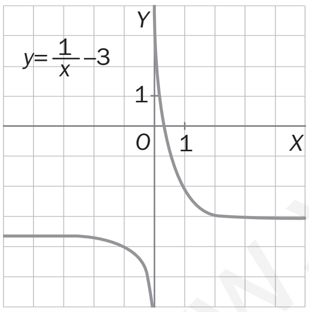
La expresión algebraica de una función potencial de grado 4 es $y = ax^4$. Sustituyendo el punto $(-2, 11)$:

$11 = a \cdot (-2)^4 \Rightarrow a = \dfrac{11}{16}$. La expresión es $y = \dfrac{11}{16}x^4$.

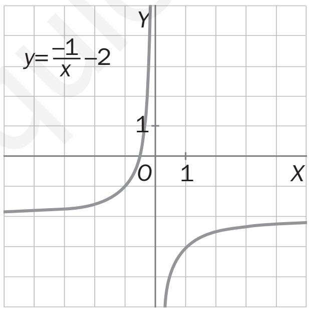
11.68 Representa gráficamente las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{1}{x} - 3$ **b)** $y = -\dfrac{1}{x} - 2$ **c)** $y = -\dfrac{1}{x} + 6$

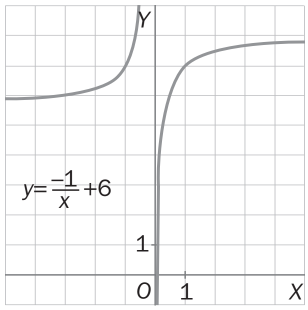
a)



b)



c)



11.69 Dibuja las funciones $f(x) = x^2 + 2x$ y $g(x) = 1 - x^2$ hallando sus vértices y los puntos de corte con los ejes. ¿En qué puntos se cortan sus gráficas?

- $f(x) = x^2 + 2x$

  Vértice: $x = -\dfrac{2}{2 \cdot 1}$; $y = -1 \Rightarrow V(-1, -1)$

  Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow A(0, 0)$ y $B(-2, 0)$

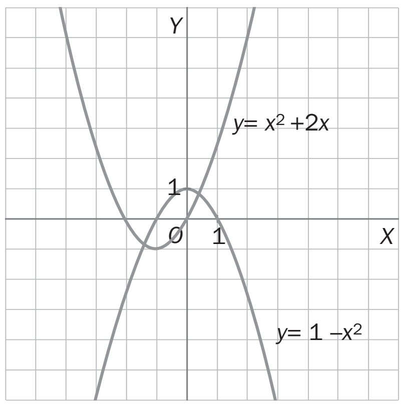
  Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C(0, 0)$

- $g(x) = 1 - x^2$

  Vértice: $x = \dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$; $y = 1 \Rightarrow V(0, 1)$

  Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$

  Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow C(0, -1)$



Para hallar los puntos de corte de las parábolas se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = 1 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4} = \frac{-2 \pm 3{,}46}{2} = \begin{cases} 0{,}73 \\ -2{,}73 \end{cases}$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones: $y(0{,}73) = 0{,}47$; $y(-2{,}73) = -6{,}45$. Los puntos de corte son $P(0{,}73;\ 0{,}47)$ y $Q(-2{,}73;\ -6{,}45)$.

11.70 Halla el dominio de las funciones siguientes:

a) $y = \dfrac{x^3}{x^3 - 8}$ **b)** $y = \dfrac{3x^3 + 12}{x^3 - 5x}$ **c)** $y = \dfrac{x + 5}{x^3 - x}$

a) $x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbf{R} - \{2\}$

b) $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 5 \Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbf{R} - \{0, 5\}$

c) $x^3 - x = 0 \Rightarrow x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 1$. $\text{Dom } f(x) = \mathbf{R} - \{0, 1\}$

11.71 Dibuja las siguientes funciones indicando las traslaciones horizontales y verticales que hay que aplicar a la función de proporcionalidad inversa correspondiente.

a) $y = \dfrac{x - 3}{x - 4}$

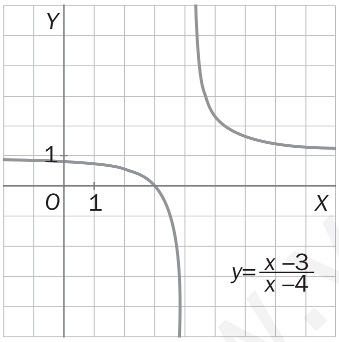
b) $y = \dfrac{2x + 3}{x + 2}$

c) $y = \dfrac{3x + 7}{x + 2}$

d) $y = \dfrac{x - 4}{x - 5}$

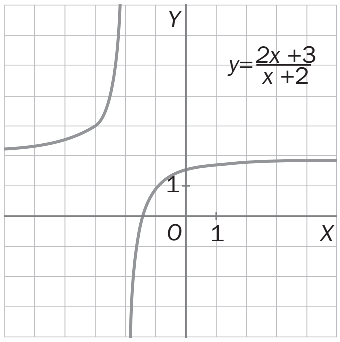
a) $y = \dfrac{x - 3}{x - 4} = \dfrac{x - 3 - 1 + 1}{x - 4} = 1 + \dfrac{1}{x - 4}$

La función $\dfrac{1}{x}$ se traslada horizontalmente 4 unidades a la derecha, y verticalmente 1 unidad hacia arriba.



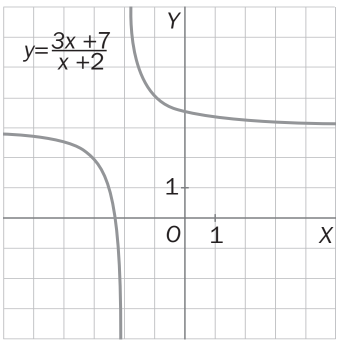
b) $y = \dfrac{2x + 3}{x + 2} = \dfrac{x + x + 3 + 2 + 2 - 4}{x + 2} = 2 - \dfrac{1}{x + 2}$

La función $-\dfrac{1}{x}$ se traslada horizontalmente 2 unidades a la izquierda y verticalmente 2 unidades hacia arriba.



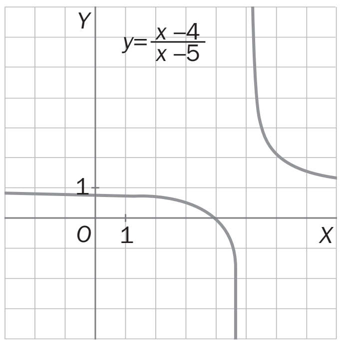
c) $y = \dfrac{3x + 7}{x + 2} = \dfrac{3x + 6 + 1}{x + 2} = 3 + \dfrac{1}{x + 2}$

La función $\dfrac{1}{x}$ se traslada horizontalmente 2 unidades a la izquierda y verticalmente 3 unidades hacia arriba.



d) $y = \dfrac{x - 4}{x - 5} = \dfrac{x - 4 - 1 + 1}{x - 5} = 1 + \dfrac{1}{x - 5}$

La función $\dfrac{1}{x}$ se traslada horizontalmente 5 unidades a la derecha y verticalmente 1 unidad hacia arriba.



11.72 Halla la expresión algebraica de una parábola cuyo vértice es el punto (1, −9) y que corta el eje de abscisas en los puntos (−2, 0) y (4, 0).

La ecuación de la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Esta parábola debe pasar por los puntos (1, −9), (−2, 0) y (4, 0). Sustituyendo los puntos se obtiene un sistema de ecuaciones:

$-9 = a + b + c$

$0 = 4a - 2b + c \Rightarrow c = -a - b - 9 \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b - 9 - a - b = 0 \\ 16a + 4b - 9 - a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 9 \\ 15a + 3b = 9 \end{cases}$

$0 = 16a + 4b + c$

Sumando ambas ecuaciones: $18a = 18$, de donde $a = 1$. Luego $b = -2$ y $c = -8$.

La ecuación de la parábola es: $y = x^2 - 2x - 8$.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

11.73 La señal de prohibido.

En un país están revisando el código de circulación. Una de las señales de tráfico que quieren modificar es la de dirección prohibida.

La apariencia de la citada señal debe ser: un rectángulo incluido y centrado en una circunferencia de radio 25 cm. El perímetro del rectángulo debe ser de 80 cm.

a) Escribe la función que determina el área del rectángulo interior en función de su altura.

b) Si la altura del rectángulo debe medir un tercio de su anchura, ¿cuál es el área de dicho rectángulo?

c) ¿Coincide esta área con la que tendría un rectángulo de área máxima en el que no impusiéramos la condición del apartado anterior? ¿Qué figura geométrica obtendríamos?

d) Escribe la función que determina el área de la zona pintada de rojo en función de la altura del rectángulo. Si quisiéramos que el área de esta zona fuera mínima, ¿qué altura debería tener el rectángulo?

a) Sea b la base del rectángulo y h su altura, tenemos: $80 = 2b + 2h$. Simplificando, $40 = b + h$. Despejando una de las variables se obtiene: $b = 40 - h$. El área del rectángulo que se quiere maximizar es: $S = b \cdot h$.

Sustituyendo el valor de b en esta última expresión: $S = h \cdot (40 - h) = -h^2 + 40h$.

b) Si la altura mide un tercio de la anchura: $b = 3h$. Sustituyendo en la fórmula del perímetro: $40 = h + 3h$. Luego $h = 10$ centímetros. Sustituyendo en la expresión del área: $S = -100 + 400 = 300$ cm^2.

c) La expresión $S = -h^2 + 40h$ es una función cuadrática con las ramas hacia abajo, pues $a = -1 < 0$. Por tanto, alcanza su máximo en el vértice: $h_{\text{máx}} = \dfrac{-40}{-2} = 20$ centímetros. Y $b_{\text{máx}} = 20$ centímetros.

Para obtener un rectángulo de superficie máxima con 80 cm de perímetro, cada uno de los lados debe medir 20 centímetros. La figura geométrica que se forma es un cuadrado.

d) La superficie de la zona pintada es $S = \pi r^2 - b \cdot h = 625\pi - (-h^2 + 40h) = h^2 - 40h + 625\pi$. Esta expresión corresponde a una función cuadrática con las ramas hacia arriba, luego alcanza su mínimo en el vértice.

$h = \dfrac{40}{2} = 20$ cm $\Rightarrow b = 20$ cm. Los valores obtenidos son los mismos que los del apartado anterior.

11.74 Limpieza de parques y jardines

El ayuntamiento de una localidad organizó un día dedicado a la limpieza de las zonas verdes de su municipio.

Los voluntarios que quisieron participar se organizaron en grupos. A cada grupo le fue adjudicada una zona, todas de igual superficie. El tiempo que cada grupo tardó en limpiar su zona dependió del número de personas que lo componían, de acuerdo a los datos de la siguiente tabla.

Equipo	N.º de personas	Tiempo (minutos)
1.º	4	180
2.º	5	145
3.º	6	118
4.º	8	70
5.º	12	60

a) Comprueba que todos los equipos, excepto uno, han trabajado con una intensidad parecida. Indica cuál es el equipo que se separa de la media y, con los datos del resto, intenta ajustar una función racional que relacione, de forma aproximada, las dos magnitudes expresadas en la tabla.

b) ¿Cuánto tiempo se puede esperar que tarde un grupo de 10 personas?

a) Fijándose, por ejemplo, en el primer equipo, si cuatro personas han invertido 180 minutos en realizar la limpieza, una sola habría tardado $180 \cdot 4 = 720$ minutos.

Los valores para el resto de equipos son 725, 708, 560 y 720. El 4.º equipo ha trabajado con mayor intensidad. Para el resto de valores, si x es el n.º de personas del equipo e y el tiempo que tardan en realizar el trabajo, la función aproximada que relaciona las dos magnitudes podría ser $y = \frac{720}{x}$.

b) Para un equipo de 10 personas, se esperaría que tardara aproximadamente 72 minutos en limpiar su zona.

AUTOEVALUACIÓN

11.A1 Di de qué tipo es cada una de estas funciones.

a) $y = 5 + x + 2x^2$ **b)** $y = \dfrac{3x^3 + x - 4}{x - 5}$ **c)** $y = \dfrac{2}{x}$ **d)** $y = 9x^{10}$

a) Cuadrática b) Racional c) De proporcionalidad inversa d) Potencial

11.A2 Halla los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones.

a) $y = 3x^2 + 2$ **b)** $y = 4x - 8x^2$ **c)** $y = -5x^2 + 10$ **d)** $y = -x^2 + 7x - 10$

a) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow$ No lo corta.

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0, 2)$

b) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x(4 - 8x) = 0 \Rightarrow A(0, 0)$ y $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C(0, 0)$

c) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow A(-\sqrt{2}, 0)$ y $B(\sqrt{2}, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow C(0, 10)$

d) Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{-2} = \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases} \Rightarrow A(2, 0)$ y $B(5, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow C(0, -10)$

11.A3 Calcula el vértice de las funciones siguientes y represéntalas gráficamente.

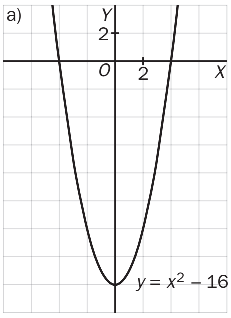
a) $y = x^2 - 16$

b) $y = 4x^2 + 4x$

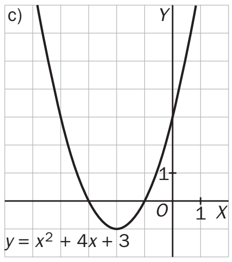
c) $y = x^2 + 4x + 3$

d) $y = x^2 + x - 12$

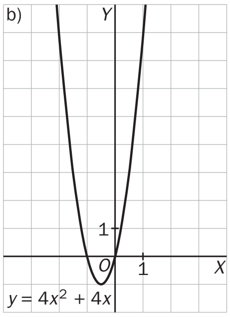
a) $x = -\dfrac{0}{2 \cdot 1} = 0;\ y = -16 \Rightarrow V(0, -16)$



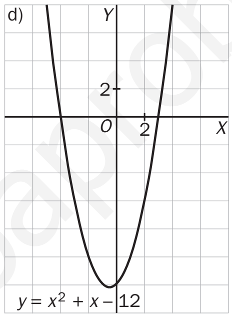
c) $x = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2;\ y = -1 \Rightarrow V(-2, -1)$



b) $x = -\dfrac{4}{2 \cdot 4} = -\dfrac{1}{2};\ y = -1 \Rightarrow V\left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$



d) $x = -\dfrac{1}{2 \cdot 1} = -\dfrac{1}{2};\ y = -\dfrac{49}{4} \Rightarrow V\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{49}{4}\right)$

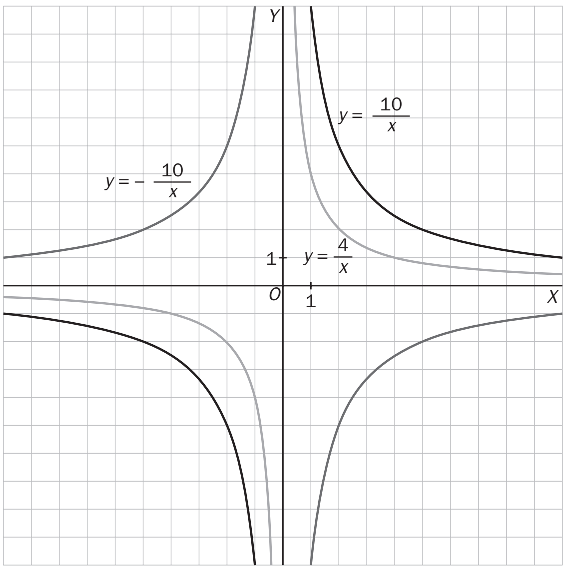


11.A4 Representa en los mismos ejes las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{10}{x}$

b) $g(x) = -\dfrac{10}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{4}{x}$



11.A5 **Indica el tipo de simetría de las funciones:**

a) $y = -x^8$ **b)** $y = \frac{1}{9}x^{12}$ **c)** $y = \frac{5}{4}x^7$ **d)** $y = 3{,}75x^{11}$

Son simétricas respecto al eje OY las gráficas de las funciones de los apartados a y b, y son simétricas respecto de (0, 0) las de los apartados c y d.

11.A6 **Halla el dominio de las funciones siguientes.**

a) $y = \frac{3x}{2x - 12}$ **b)** $y = \frac{x^2 + 4}{5x}$ **c)** $y = \frac{1}{x^2 + x}$ **d)** $y = \frac{x + 3}{x^2 - 4x - 5}$

a) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{6\}$

b) Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{0\}$

c) $x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1 \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{-1, 0\}$

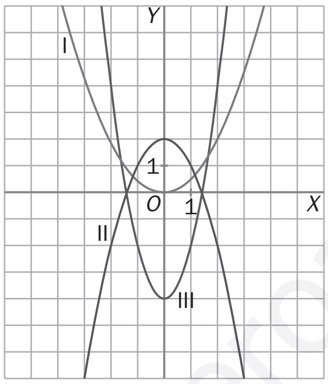
d) $x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbf{R} - \{-1, 5\}$

11.A7 **Identifica cada gráfica con la expresión que le corresponde.**

a) $f(x) = 2x^2 - 4$

b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

c) $h(x) = 2 - x^2$



La gráfica III con $f(x)$

La gráfica I con $g(x)$

La gráfica II con $h(x)$

11.A8 **En cada apartado, identifica de qué tipo es la función, y estudia su crecimiento y decrecimiento.**

a) $f(x) = -7x^3$ **b)** $g(x) = \frac{4}{x}$ **c)** $h(x) = 6x^5$

a) Potencial. Decreciente en **R**.

b) De proporcionalidad inversa. Decreciente en **R**.

c) Potencial. Creciente en **R**.

MATETIEMPOS

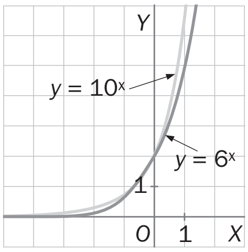
El aterrizaje de un avión

Construye un gráfico que represente la altura de un avión desde que empieza la operación de aterrizaje hasta que se posa en la pista. ¿A qué valor tiende la función que representa este gráfico?

Este es el concepto de límite, el avión se acercará cada vez más a la pista, se posará en ella, pero no formará parte de la misma. El valor al que tiende es cero.

EJERCICIOS PROPUESTOS

12.1 Representa las siguientes funciones.
a) $y = 6^x$ b) $y = 10^x$
¿Tienen algún punto en común?
¿Cuál crece más rápidamente?



El (0, 1) es el único punto que tienen en común.

Crece más rápidamente $y = 10^x$.

12.2 Una planta se reproduce por bipartición cada dos días. Si el ritmo de reproducción se mantuviera indefinidamente, ¿cuántas plantas habría dentro de 40 días? ¿Cuál sería la función exponencial que se ajusta a este fenómeno?

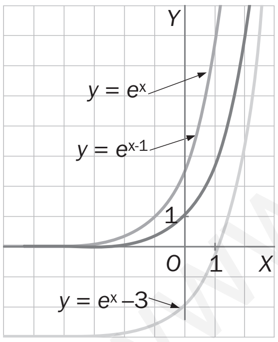
Si llamamos x a los días transcurridos e y al número de plantas, se tiene la siguiente tabla de valores:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

Por lo que al cabo de 40 días habrá 2^{40} plantas.

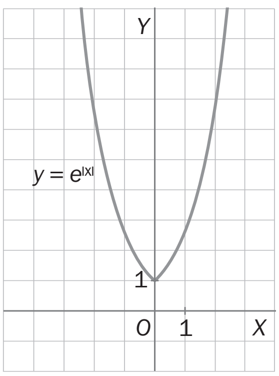
La función exponencial que se ajusta a este fenómeno es $y = 2^x$.

12.3 Representa gráficamente las funciones $y = e^{x+1}$ e $y = e^x - 3$ a partir de la función $y = e^x$. Explica el procedimiento que has seguido.



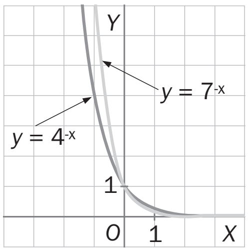
- $y = e^{x+1}$. Trasladamos la función $y = e^x$ horizontalmente a la izquierda una unidad.
- $y = e^x - 3$. Trasladamos la función $y = e^x$ tres unidades hacia abajo.

12.4 Representa gráficamente $y = e^{|x|}$ a partir de $y = e^x$.



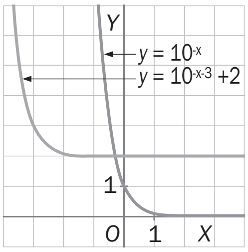
$$y = e^{|x|} = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ e^{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

12.5 **Representa las funciones $y = 4^{-x}$ e $y = 7^{-x}$ en los mismos ejes. ¿Tienen algún punto en común?**



El punto (0, 1) es el único punto en común.

12.6 **A partir de la gráfica de $y = 10^{-x}$ representa la gráfica de la función $y = 10^{-x-3} + 2$.**

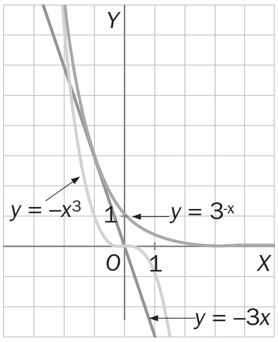


Trasladamos la gráfica $y = 10^{-x}$ tres unidades horizontalmente hacia la izquierda y dos unidades verticalmente hacia la izquierda.

12.7 **Representa gráficamente estas funciones.**

$y = -3x$; $y = -x^3$; $y = 3^{-x}$

Compara el decrecimiento de las tres funciones para valores suficientemente grandes de la variable x.



Para x suficientemente grandes, la función exponencial tiende a cero, al tener el exponente negativo, por lo que la función de mayor decrecimiento es la potencial.

12.8 **Un arrecife tarda 20 años, aproximadamente, en duplicar la cantidad de coral que contiene.**

Escribe la expresión algebraica que expresa la cantidad de coral que hay en el arrecife al cabo de t años.

Si llamamos x a la cantidad de coral que hay inicialmente en el arrecife, la expresión que permite calcular la cantidad de arrecife al cabo de t años es $y(t) = x \cdot 2^{\frac{t}{20}}$.

12.9 **La población de una ciudad está formada por cuatro millones de habitantes y su tasa de crecimiento es del 1,5%. Si permanece del mismo modo durante los 10 años siguientes, ¿cuántos habitantes se espera que tenga la ciudad para entonces?**

La ecuación exponencial que proporciona el crecimiento de la población es $P(t) = 4\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}015)^t$.

Donde $P(t)$ indica los habitantes que tendrá al cabo de t años.

Para $t = 10$, se tiene $P(10) = 4\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}015)^{10} = 4\,642\,163$ habitantes.

12.10 **Un cubito de hielo de 2 cm^3 se introduce en un vaso de agua. Cada minuto que pasa, el 10% de su volumen se transforma en agua líquida. ¿Qué cantidad de hielo quedará al cabo de 10 minutos?**

La ecuación exponencial que proporciona la cantidad de hielo que queda en el vaso es $H(t) = 2 \cdot (1 - 0{,}010)^t$.

Donde $H(t)$ indica el hielo que quedará al cabo de t minutos.

Para $t = 10$, se tiene: $H(10) = 2 \cdot (1 - 0{,}010)^{10} = 0{,}697$ cm^3.

12.11 En 2007, la población del continente africano era de $9{,}624 \cdot 10^8$ habitantes, aproximadamente, con una tasa de crecimiento anual del 2,86%. Si se mantiene este ritmo de crecimiento, ¿cuánto tiempo ha de pasar para que llegue a los mil millones de habitantes?

La ecuación exponencial que proporciona el crecimiento de la población es $P(t) = 9{,}624 \cdot 10^8 \cdot (1 + 0{,}0286)^t$.
Donde $P(t)$ indica los habitantes que tendrá al cabo de t años.
Para $P(t) = 10^9$, se tiene: $10^9 = 9{,}624 \cdot 10^8 \cdot (1 + 0{,}0286)^t$.
Para resolver esta ecuación exponencial se construye una tabla de valores:

Tiempo (años)	N.º de habitantes	La solución debe ser
1	9 899 246 400	Mayor
2	10 182 364 850	Menor

Deben pasar casi 2 años.

12.12 Una bacteria se divide en dos cada quince minutos. Partiendo de un cultivo con 12 bacterias, hemos conseguido más de un billón. ¿Cuánto tiempo ha sido necesario?

La ecuación exponencial que proporciona el número de bacterias que hay en el cultivo es $B(t) = 12 \cdot 2^{\frac{t}{15}}$.
Donde $B(t)$ indica el número de bacterias que habrá al cabo de t minutos. Para $B(t) = 10^{12}$, se tiene: $10^{12} = 12 \cdot 2^{\frac{t}{15}}$.
Para resolver esta ecuación exponencial se construye una tabla de valores:

Tiempo (minutos)	N.º de bacterias	Solución
500	129 871 672 900	Mayor
600	13 194 139 530 000	Menor
550	1 309 024 436 000	Menor

Tiempo (minutos)	N.º de bacterias	Solución
540	824 633 720 800	Mayor
545	1 038 973 383 000	Menor
544	992 055 011 800	Mayor

Deben transcurrir entre 544 y 545 minutos. Es decir, entre 9 horas y 4 minutos y 9 horas y 5 minutos.

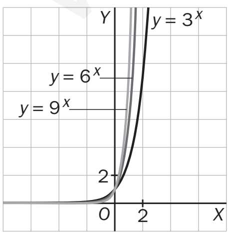
ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRETENERSE

Funciones exponenciales

12.13 Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes funciones:

$f(x) = 3^x$ $\qquad g(x) = 6^x$ $\qquad h(x) = 9^x$



12.14 Identifica, de entre las siguientes funciones, las que sean exponenciales:

a) $y = 5^{2x}$ **b)** $y = 4^{-x}$ **c)** $y = x^9$ **d)** $y = 3x$ **e)** $y = x^6$ **f)** $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$

Son exponenciales las funciones de los apartados a, b y f.

12.15 **Construye una tabla de valores para las funciones $f(x) = 5^x$ y $g(x) = 10^x$, y represéntalas gráficamente en los mismos ejes de coordenadas.**

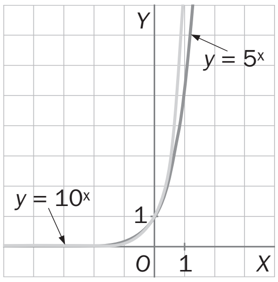
a) ¿Son crecientes o decrecientes?

b) ¿Cuál de las dos crece más rápidamente?

c) ¿Se cortan en algún punto?

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	0,04	0,2	1	5	25

x	−2	−1	0	1	2
$g(x)$	0,01	0,1	1	10	100



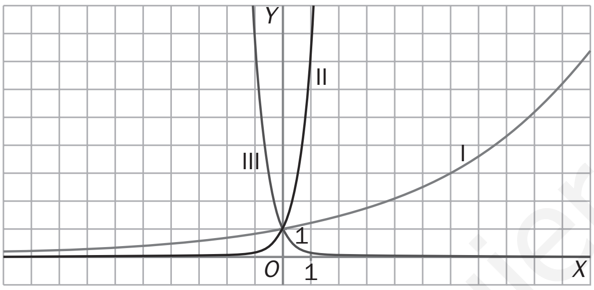
a) Las dos funciones son crecientes.

b) Crece más rápidamente $g(x)$.

c) Sí, en (0, 1).

12.16 **Relaciona cada gráfica con la fórmula que le corresponde:**

$$f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x \qquad g(x) = 1{,}2^x \qquad h(x) = 7{,}5^x$$



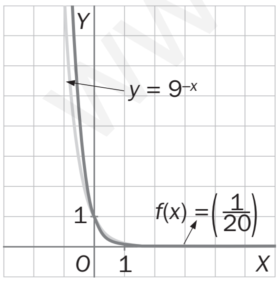
I con *b*; II con *a*; III con *c*

12.17 **Dibuja la gráfica de las funciones $f(x) = \left(\frac{1}{20}\right)^x$ y $g(x) = 9^{-x}$, y contesta a las siguientes cuestiones.**

a) Calcula el recorrido de cada una de ellas.

b) ¿Son crecientes o decrecientes?

c) ¿En cuál de las dos se produce una variación más rápida en su crecimiento?



a) $Rec\ f(x) = Rec\ g(x) = \mathbf{R}$

b) Las dos funciones son decrecientes.

c) Varía más rápidamente su crecimiento $f(x)$.

12.18 **Para cada uno de los casos siguientes, escribe la expresión algebraica de una función exponencial.**

a) La función es decreciente.

b) La función es creciente.

c) Crece más rápidamente que $y = 4{,}3^x$.

d) Decrece más rápidamente que $y = 0{,}5^x$.

a) $y = 5^{-x}$.

b) $y = 25^x$

c) $y = 10^x$

d) $y = 0{,}05^x$

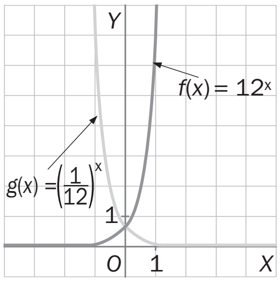
12.19 **Indica, sin dibujarlas, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.**

a) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ **b)** $y = 7^x$ **c)** $y = 5^{-x}$ **d)** $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

a) Decreciente b) Creciente c) Decreciente d) Creciente

12.20 **Dibuja la gráfica de las funciones $f(x) = 12^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{12}\right)^x$, y responde a las siguientes preguntas.**

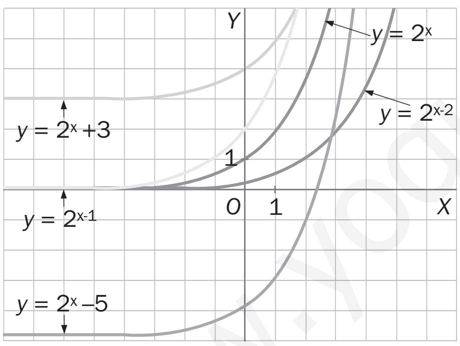
a) ¿Tienen el mismo dominio y recorrido?
b) ¿Cómo es su crecimiento?
c) ¿Tienen los mismos puntos de corte con los ejes?
d) Observando la gráfica, ¿qué se puede decir de la simetría de estas funciones?



a) *Dom* $f(x)$ = *Dom* $g(x) = \mathbf{R}$
Rec $f(x)$ = *Rec* $g(x) = \mathbf{R}^+$
b) $f(x)$ es creciente y $g(x)$ es decreciente.
c) Sí, el punto (0, 1)
d) Son simétricas respecto al eje de ordenadas.

12.21 **A partir de la gráfica de la función $y = 2^x$ representa, mediante traslaciones, las funciones:**

a) $y = 2^x + 3$ **b)** $y = 2^x - 5$ **c)** $y = 2^{x+1}$ **d)** $y = 2^{x-2}$

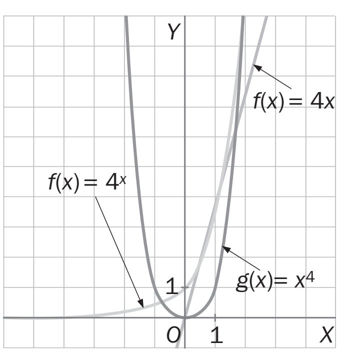


a) Se traslada la función $y = 2^x$ tres unidades hacia arriba.
b) Se traslada $y = 2^x$ cinco unidades hacia abajo.
c) Se traslada $y = 2^x$ una unidad a la izquierda.
d) Se traslada $y = 2^x$ dos unidades a la derecha.

Crecimiento exponencial

12.22 **Representa las siguientes funciones en los mismos ejes de coordenadas y compara su crecimiento para valores suficientemente grandes de la variable x.**

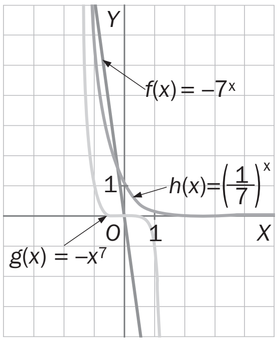
$$f(x) = 4x \qquad g(x) = x^4 \qquad h(x) = 4^x$$



Crece más rápidamente la función $y = 4^x$.

12.23 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y compara su decrecimiento para valores suficientemente grandes de la variable *x*.

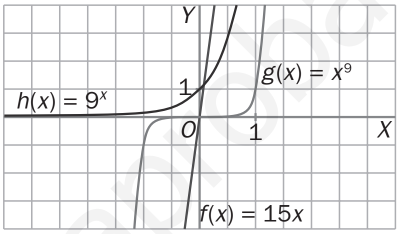
$$f(x) = -7x \qquad g(x) = -x^7 \qquad h(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x$$



Decrece más rápidamente $h(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x$.

12.24 Observa la gráfica de las funciones siguientes ¿Cuál de ellas presenta un crecimiento exponencial?

La función $h(x) = 9^x$.



12.25 Teniendo en cuenta la expresión algebraica de las siguientes funciones, indica cuál o cuáles de ellas tienen un crecimiento exponencial.

$$f(x) = 5.9^x \qquad g(x) = x^{10} \qquad h(x) = 4^{-x}$$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ presentan un crecimiento exponencial. La función $h(x)$ tiene un decrecimiento exponencial.

12.26 Dadas las funciones $f(x) = 3{,}6^x$ y $g(x) = -8{,}5^x$, contesta a las cuestiones siguientes.

a) ¿Son crecientes o decrecientes?

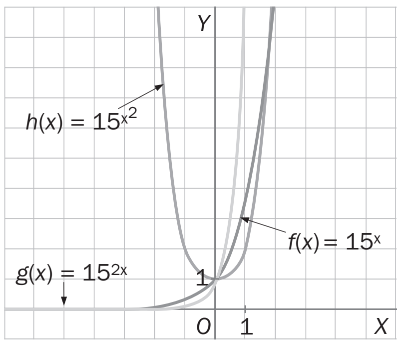
b) ¿Cuál de las dos presenta una variación más rápida en el crecimiento?

a) $f(x)$ es creciente y $g(x)$ es decreciente.

b) La función $g(x)$ presenta una variación más rápida en el crecimiento.

12.27 Compara el crecimiento exponencial de las funciones $f(x) = 15^x$, $g(x) = 15^{2x}$ y $h(x) = 15^{x^2}$ elaborando una tabla de valores y realizando sus representaciones gráficas.

x	0	1	10	100
f(x)	1	15	$5{,}76 \cdot 10^{11}$	$7{,}89 \cdot 10^{69}$
g(x)	1	225	$3{,}33 \cdot 10^{23}$	$1{,}65 \cdot 10^{235}$
h(x)	1	15	$7{,}89 \cdot 10^{69}$	$8{,}18 \cdot 10^{11\,760}$



El crecimiento es menos rápido en $f(x) = 15^x$.

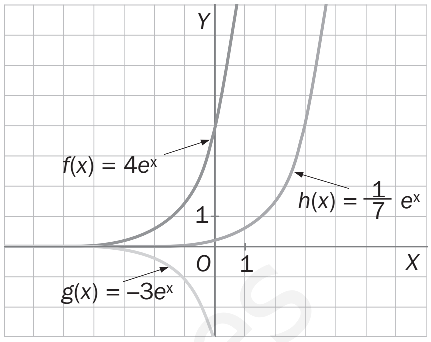
El crecimiento es más rápido en $h(x) = 15^{x^2}$.

El número *e*

12.28 Construye una tabla de valores para las siguientes funciones y represéntalas gráficamente en los mismos ejes de coordenadas.

$$f(x) = 4e^x \qquad g(x) = -3e^x \qquad h(x) = \frac{1}{5}e^x$$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0,54	1,47	4	10,87	29,56
$g(x)$	$-0{,}41$	$-1{,}1$	-3	$-8{,}15$	$-22{,}17$
$h(x)$	0,027	0,073	0,2	0,54	1,48



12.29 Observa las gráficas de las funciones del ejercicio anterior y calcula su dominio y su recorrido. ¿Se cortan en algún punto?

Dom $f(x)$ = *Dom* $g(x)$ = *Dom* $h(x) = \mathbf{R}$

Rec $f(x)$ = *Rec* $h(x) = \mathbf{R}^+$. *Rec* $g(x) = \mathbf{R}^-$

Las gráficas no se cortan en ningún punto.

12.30 Indica cuál o cuáles de las siguientes funciones son crecientes y cuáles decrecientes.

a) $y = e^{9x}$

b) $y = -e^{\frac{x}{2}}$

c) $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

d) $y = e^{-8x}$

La función del apartado a es creciente, y las funciones de los apartados b, c y d son decrecientes.

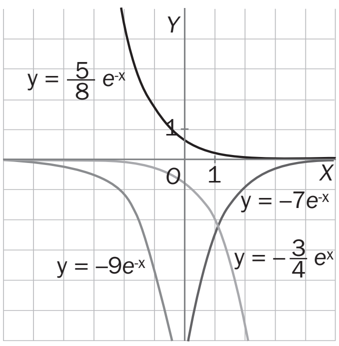
12.31 Indica, de entre las siguientes funciones, cuál tiene un crecimiento más rápido.

a) $f(x) = 11^x$ **b)** $g(x) = 2^x$ **c)** $h(x) = e^x$

$f(x)$ tiene un crecimiento mayor, porque la base es mayor.

12.32 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = \frac{5}{8}e^{-x}$ **b)** $y = -7e^{-x}$ **c)** $y = -9e^x$ **d)** $y = -\frac{3}{4}e^x$



12.33 Calcula los puntos de corte con el eje de ordenadas de las funciones siguientes.

a) $y = e^{x+3}$ **b)** $y = -2e^{x-1}$ **c)** $y = 4e^{-x}$ **d)** $y = e^{\frac{2x+3}{4}}$

a) $x = 0 \Rightarrow y = e^3 \Rightarrow A(0, e^3)$

b) $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{e} \Rightarrow A\left(0, -\frac{2}{e}\right)$

c) $x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0, 4)$

d) $x = \Rightarrow y = e^{\frac{3}{4}} \Rightarrow A\left(0, e^{\frac{3}{4}}\right)$

12.34 Aplicando las traslaciones adecuadas a la función $y = e^x$, realiza la representación gráfica de las siguientes funciones.

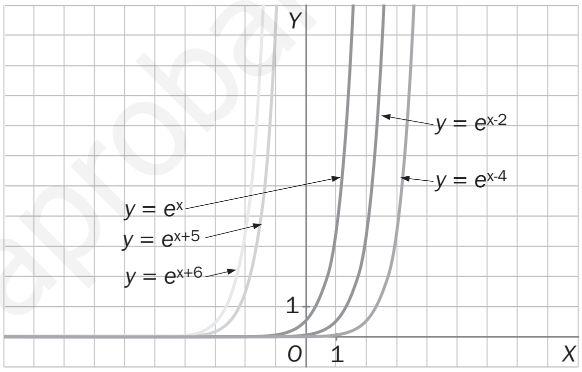
a) $y = e^{x+5}$ **b)** $y = e^{x-4}$ **c)** $y = e^{x+6}$ **d)** $y = e^{x-2}$

a) Trasladar la función $y = e^x$ cinco unidades a la izquierda.

b) Trasladar la función $y = e^x$ cuatro unidades a la derecha.

c) Trasladar la función $y = e^x$ seis unidades a la izquierda.

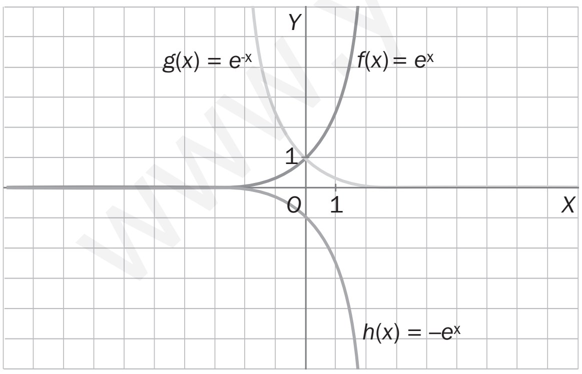
d) Trasladar la función $y = e^x$ dos unidades a la derecha.



12.35 Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ y $h(x) = -e^x$.

a) ¿Qué tipo de simetría existe entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$?

b) ¿Y entre las gráficas de $f(x)$ y $h(x)$?



a) Son simétricas respecto al eje de ordenadas.

b) Son simétricas respecto al eje de abscisas.

12.36 Ordena las siguientes funciones según la rapidez con que decrecen.

$f(x) = -6e^x$ $g(x) = e^{-6x}$ $h(x) = 6e^{-6x}$

x	0	1	10	100
$-6e^x$	-6	$-16{,}31$	$-132\,158{,}79$	$-1{,}61 \cdot 10^{44}$
e^{-6x}	1	0,0024	$8{,}76 \cdot 10^{-27}$	$2{,}65 \cdot 10^{-261}$
$6e^{-6x}$	6	0,015	$5{,}25 \cdot 10^{-26}$	$1{,}59 \cdot 10^{-260}$

$h(x) > g(x) > f(x)$

12.37 Aplica a la función $y = e^{-x}$ las siguientes traslaciones y escribe la expresión algebraica de la función representada.
a) Cinco unidades hacia arriba.
b) Dos unidades a la izquierda.
c) Una unidad hacia abajo.
d) Seis unidades a la derecha.

a) $y = e^{-x} + 5$
b) $y = e^{-x-2}$
c) $y = e^{-x} - 1$
d) $y = e^{-x+6}$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

12.38 Observa la función $y = a^x$, siendo a un número positivo y distinto de 1. ¿Existe algún valor de a para el cual se obtenga un valor de y negativo?

No, porque si $a > 0$, entonces $a^x > 0$.

12.39 ¿En qué puntos corta la función $y = k \cdot e^x$ a los ejes de coordenadas? ¿Y la función $y = k \cdot e^{-x}$?

Las dos funciones cortan al eje OY en el mismo punto: $x = 0 \Rightarrow y = k \Rightarrow A(0, k)$.
Ninguna de las dos funciones corta al eje OX.

12.40 Dada la función $y = (e + 1)^x$, realiza las siguientes cuestiones.
a) ¿Es exponencial? Razona tu respuesta.
b) Calcula su dominio y recorrido.
c) ¿Es creciente o decreciente?
d) Halla los puntos de corte con los ejes.

a) Sí, porque es de la forma $y = a^x$, con a un número real.
b) $Dom\ f(x) = \mathbf{R}$ y $Rec\ f(x) = \mathbf{R}^+$
c) Es creciente en todo su dominio.
d) Corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0, 1)$. No corta el eje de abscisas.

12.41 ¿Por qué, al estudiar las funciones exponenciales, no se considera el caso en el que la base sea negativa? Explícalo, utilizando ejemplos para ello.
Teniendo en cuenta el resultado anterior, ¿sería objeto de estudio $f(x) = (1 - e)^x$?

Si la base fuese negativa, por ejemplo, $y = (-2)^x$, la función no estaría definida para valores de x racionales de denominador par. Por ejemplo, $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ es un número real.
Como $1 < e$, entonces $1 - e < 0$ y sería uno de los casos en los que la base es negativa y, por tanto, no es objeto de estudio.

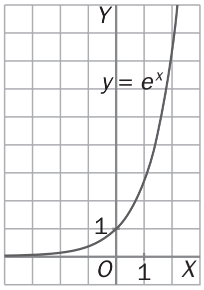
12.42 Considera las funciones exponenciales $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^x$, siendo a y b números positivos, y $a < b$. Responde a las siguientes cuestiones.
a) Cuando a y b son números mayores que 1, ¿qué función crece más rápidamente?
b) Cuando a y b son números comprendidos entre 0 y 1, ¿qué función decrece más rápidamente?

a) Si a y b son números mayores que 1, $g(x)$ crece más rápidamente porque $b^x > a^x$.
b) Si a y b son números comprendidos entre 0 y 1, $f(x)$ decrece más rápidamente porque $a^x > b^x$.

12.43 A partir de la gráfica de la función $y = e^x$, representa gráficamente $y = |e^x|$. ¿Cómo son las gráficas de estas funciones? ¿Por qué se obtiene este resultado?

$|e^x| = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad e^x > 0 \\ -e^x & \text{si} \quad e^x < 0 \end{cases}$. Pero $e^x > 0$ para cualquier valor de x.

Por lo tanto, $y = |e^x| = e^x$.



12.44 Considera las funciones cuya expresión gráfica es $y = k \cdot a^x$, con k un número real. Completa en tu cuaderno el cuadro siguiente, escribiendo una cruz donde corresponda.

	$k > 0$ $a > 1$	$k < 0$ $a > 1$	$k > 0$ $0 < a < 1$	$k < 0$ $0 < a < 1$
Creciente				
Decreciente				

	$k > 0$ $a > 1$	$k < 0$ $a > 1$	$k > 0$ $0 < a < 1$	$k < 0$ $0 < a < 1$
Creciente	x			x
Decreciente		x	x	

12.45 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y explica por qué.

a) El dominio de $y = 3^x$ es $\mathbf{R}^+$.

b) El recorrido de la función $y = e^{-x}$ es $\mathbf{R}^-$.

c) Todas las funciones exponenciales pasan por el punto (1, 0).

d) La función $y = 10^{-x}$ es decreciente.

a) Falso. La variable independiente puede tomar cualquier valor.

b) Falso. $e^{-x} > 0$ para cualquier valor de x. Por tanto, el recorrido de la función $y = e^{-x}$ es $\mathbf{R}^+$.

c) Falso, ninguna función exponencial corta el eje de abscisas.

d) Verdadero. Si $a < b$, entonces $10^{-a} > 10^{-b}$. Por tanto, es decreciente.

12.46 Explica si es posible que las gráficas de las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = -a^x$ se corten en algún punto.

No, porque el recorrido de $f(x)$ es $\mathbf{R}^+$, y el de $g(x)$ es $\mathbf{R}^-$.

PROBLEMAS PARA APLICAR

12.47 El economista y demógrafo inglés Thomas Malthus (1766-1834) estudió la población humana y su relación con los recursos alimentarios. Concluyó que el número de individuos a lo largo del tiempo t (en años) sigue una expresión, en su forma más simple, del tipo $P(t) = P_0 \cdot 1{,}0281^t$, siendo P_0 la población en el instante inicial. De la misma manera, la ley que expresa la cantidad de alimentos es de la forma $A(t) = A_0 t$, donde A_0 es el total de alimentos que existen en el instante inicial.

a) ¿Qué tipo de crecimiento presenta el número de habitantes?

b) ¿Y la cantidad de alimentos?

c) ¿Cuál de las dos funciones crece más rápidamente?

d) ¿Qué cabe esperar que ocurra con el paso del tiempo?

a) El número de habitantes presenta un crecimiento exponencial.

b) La cantidad de alimentos presenta un crecimiento lineal.

c) Crece más rápidamente el número de habitantes.

d) Cabe esperar que, con el paso del tiempo, haya más habitantes que alimentos, y, por tanto, estos no sean suficientes para alimentar a toda la población.

12.48 Con el fin de ahorrar, Julia ha abierto una cuenta en un banco que le ofrece un interés del 2,5% anual. Si inicialmente ingresa 500 euros, calcula:

a) Cuánto dinero tendrá en la cuenta al finalizar el primer año, el segundo, el tercero, el cuarto y el quinto, si no ingresa ni retira dinero en ese tiempo.

b) La fórmula que permite obtener el dinero que tendrá en la cuenta con el paso de los años, si se mantiene el interés.

c) ¿Cuántos años tendrían que pasar para que se duplicara el ingreso inicial?

d) Si en lugar de abrir la cuenta con 500 euros, lo hubiera hecho con 1000, ¿se habría reducido a la mitad el tiempo que tardara en duplicar el importe inicial?

a)

Años	1	2	3	4	5
Dinero	512,50	525,31	538,46	551,91	565,70

b) Si llamamos t al tiempo (en años) e y al capital final, tenemos: $y = 500 \cdot 1{,}025^t$.

c) $1000 = 500 \cdot 1{,}025^t \Rightarrow 2 = 1{,}025^t \Rightarrow t = 30$

Por tanto, han de pasar 30 años.

d) $2000 = 1000 \cdot 1{,}025^t \Rightarrow 2 = 1{,}025^x \Rightarrow t = 30$

Se tarda el mismo tiempo.

12.49 De un material radiactivo se sabe que un kilogramo se reduce a la mitad cada año.

a) Escribe la expresión algebraica de la función que indica la pérdida de material a lo largo de los años.

b) Calcula el dominio y el recorrido de dicha función.

c) ¿Es creciente o decreciente?

d) Haz la representación gráfica de la función.

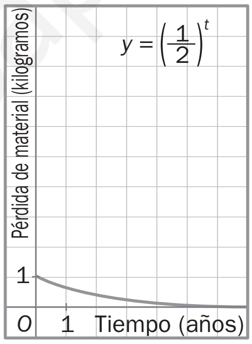
e) ¿Cuántos años han de pasar para que no quede material radiactivo?

a) Si llamamos t al tiempo transcurrido en años, e y a la cantidad de material perdido, tenemos: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

b) *Dom* $f(x) = \mathbf{R}^+$ y *Rec* $f(x) = \mathbf{R}^+$

c) Es una función decreciente.

d)



e) La función nunca se anula, pues $\left(\frac{1}{2}\right)^t > 0$.

Por tanto, siempre quedará algo de material radiactivo.

12.50 Juan y Ana se encuentran a una distancia de 10 metros. Juan avanza la mitad de esa distancia y Ana retrocede la cuarta parte. Después, Juan avanza de nuevo la mitad de la distancia que lo separa de Ana y esta vuelve a retroceder la cuarta parte.

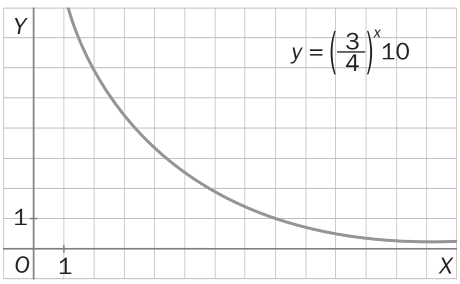
a) Calcula la expresión algebraica que indica la distancia que los separa en función del número de movimientos realizados.

b) Dibuja la gráfica aproximada de la función.

c) ¿Cuántos movimientos han de realizar ambos amigos para juntarse?

a) Si llamamos x al número de movimientos realizados e y a la distancia que los separa, tenemos: $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot 10$.

b)



c) La distancia nunca se hace cero.

12.51 **Cada persona produce al año unos 300 kilogramos de basura, de los que un 90% pueden reciclarse.**

a) Halla la función que exprese la cantidad de basura que se puede reciclar en función de los años transcurridos.

b) Construye una tabla de valores que indique los kilogramos de basura que se pueden reciclar durante los 5 primeros años.

c) ¿Es una función creciente o decreciente?

a) Llamamos t a los años transcurridos, e y a la cantidad de basura reciclada: $y = 300 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^{t-1} = 270 \cdot 0{,}1^{t-1}$.

b)

x	1	2	3	4	5
y	270	27	2,7	0,27	0,027

c) Es una función decreciente.

12.52 **La cantidad de unidades vendidas de un producto de limpieza viene dada, en función del número de veces que ha aparecido su publicidad en televisión, t, según la expresión:**

$$E(t) = 3000 - 500 \cdot 2^{1-t}$$

a) ¿Cuántas unidades se habrían vendido si el producto no hubiera aparecido ninguna vez en televisión?

b) ¿Existe algún valor de t para el cual el número de unidades vendidas sea nulo?

a) $E(0) = 3000 - 1000 = 2000$ unidades

b) $3000 = 10 \cdot 2^{1-t} \Rightarrow 300 = 2^{1-t}$. Como $1 - t \leqslant 1$, pues $t \geqslant 0$, entonces $2^{1-t} \leqslant 2$. Luego $2^{1-t} \leqslant 300$. Por tanto, no existe ningún valor de t para el cual el número de unidades vendidas sea nulo.

R E F U E R Z O

Funciones exponenciales

12.53 **Identifica cuál o cuáles de las siguientes funciones son exponenciales.**

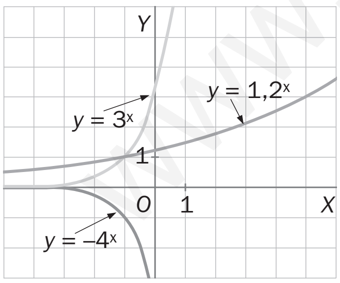
a) $y = 16^x$ **c)** $y = (-8)^x$ **e)** $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$

b) $y = -x^3$ **d)** $y = \frac{2}{5}x$ **f)** $y = -15^{2x}$

Son funciones exponenciales las de los apartados a, b, e y f.

12.54 **Representa gráficamente las siguientes funciones en los mismos ejes de coordenadas.**

a) $f(x) = -4^x$ **b)** $g(x) = 3^x$ **c)** $h(x) = 1{,}2^x$



12.55 **Sin representarlas gráficamente, indica cuáles de las siguientes funciones son crecientes y cuáles decrecientes.**

a) $y = \left(\frac{2}{9}\right)^x$

b) $y = 24^{-x}$

c) $y = 6{,}8^x$

d) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

Son crecientes las funciones de los apartados c y d, y decrecientes las de los apartados a y b.

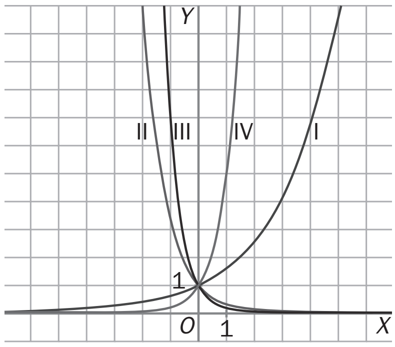
12.56 Asocia a cada gráfica la expresión algebraica que le corresponde.

a) $y = 1{,}6^x$

b) $y = 0{,}3^x$

c) $y = 7^{-x}$

d) $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-x}$



I con b; II con c; III con a; IV con d

Crecimiento exponencial

12.57 Estudia el tipo de crecimiento de las siguientes funciones.

$$f(x) = 7x \qquad g(x) = x^7 \qquad h(x) = 7^x$$

$f(x)$ tiene un crecimiento lineal, $g(x)$ potencial y $h(x)$ exponencial.

12.58 Sin hacer una tabla de valores ni su gráfica, indica cuáles de las siguientes funciones presentan un crecimiento exponencial.

a) $y = 5^{-x}$ **c)** $y = \dfrac{10}{3}x$ **e)** $y = 1{,}3^x$

b) $y = \left(\dfrac{2}{9}\right)^x$ **d)** $y = x^{15}$ **f)** $y = -x^{28}$

Las funciones de los apartados a, b y e son exponenciales.

De ellas, solamente la función del apartado e presenta un crecimiento exponencial. Las otras dos funciones presentan un decrecimiento exponencial.

12.59 Compara el decrecimiento exponencial de las funciones $f(x) = \left(\dfrac{1}{8}\right)^x$ y $g(x) = 14^{-x}$.

Construimos una tabla de valores para las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

x	0	1	10	100	1000
$f(x)$	1	0,125	$9{,}31 \cdot 10^{-10}$	$4{,}91 \cdot 10^{-91}$	$8{,}13 \cdot 10^{-904}$
$g(x)$	1	0,0714	$3{,}46 \cdot 10^{-12}$	$2{,}44 \cdot 10^{-115}$	$7{,}45 \cdot 10^{-1147}$

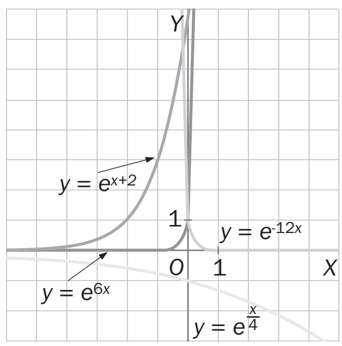
A la vista de la tabla, decrece más rápidamente la función $g(x)$.

El número *e*

12.60 Construye una tabla de valores para cada una de estas funciones y represéntalas gráficamente.

a) $y = e^{6x}$ **b)** $y = e^{-12x}$ **c)** $y = e^{x+2}$ **d)** $y = -e^{\frac{x}{4}}$

x	−2	−1	0	1	2
$y = e^{6x}$	$6{,}14 \cdot 10^{-6}$	$2{,}48 \cdot 10^{-3}$	1	403,43	162 754,79
$y = e^{-12x}$	$2{,}65 \cdot 10^{10}$	$6{,}14 \cdot 10^{-6}$	1	$6{,}14 \cdot 10^{-6}$	$3{,}78 \cdot 10^{-11}$
$y = e^{x+2}$	1	2,72	7,39	20,09	54,60
$y = -e^{\frac{x}{4}}$	−0,61	−0,78	−1	−1,28	−7,39



12.61 De entre las siguientes funciones, ¿cuáles son crecientes y cuáles decrecientes?

a) $y = e^{9x}$ **b)** $y = e^{-5x}$ **c)** $y = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{x^2}$ **d)** $y = e^{\frac{7}{5}x}$

Son crecientes las funciones de los apartados a y d, y decrecientes las de los apartados b y c.

12.62 Compara el crecimiento exponencial de las funciones $f(x) = e^{8x}$ y $g(x) = e^{\frac{4}{5}x}$.

x	0	1	10	20
$f(x)$	1	2980,96	$5{,}54 \cdot 10^{34}$	$3{,}07 \cdot 10^{69}$
$g(x)$	1	2,23	2890,96	$5{,}54 \cdot 10^{34}$

Crece más rápidamente la función $f(x)$.

AMPLIACIÓN

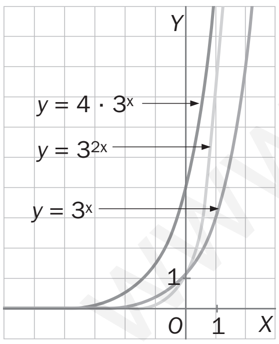
12.63 Dadas las funciones $f(x) = e^{10x}$ y $g(x) = 7^{4x}$, ¿cuál de ellas crece más rápidamente?

x	0	1	10
$f(x)$	1	22 026,47	$2{,}69 \cdot 10^{43}$
$g(x)$	1	2401	$6{,}37 \cdot 10^{33}$

Crece más rápidamente la función $f(x) = e^{10x}$.

12.64 Realiza la representación gráfica de las funciones $f(x) = 4 \cdot 3^x$ y $g(x) = 3^{2x}$ y compáralas con $h(x) = 3^x$, estudiando su dominio, su recorrido, los puntos de corte con los ejes, su crecimiento y su decrecimiento.

¿En cuál de ellas es más rápido el crecimiento?



- *Dom* $f(x)$ = *Dom* $g(x)$ = *Dom* $h(x) = \mathbf{R}$
- *Rec* $f(x)$ = *Rec* $g(x)$ = *Rec* $h(x) = \mathbf{R}^+$
- Corte de $f(x)$ con el eje OY: (0, 4). No corta el eje OX.
- Corte de $g(x)$ con el eje OY: (0, 1). No corta el eje OX.
- Corte de $h(x)$ con el eje OY: (0, 1). No corta el eje OX.
- Las tres funciones son crecientes.
- El crecimiento es más rápido en la función $g(x)$.

12.65 Halla el dominio de las siguientes funciones exponenciales.

a) $y = 2^{\frac{1}{x}}$ **b)** $y = e^{\sqrt{2x+6}}$ **c)** $y = \left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{x+1}{x-3}}$ **d)** $y = 5^{\frac{4}{\sqrt{x-1}}}$

a) *Dom* $y = \mathbf{R} - \{0\}$ b) *Dom* $y = [-3, +\infty)$ c) *Dom* $y = \mathbf{R} - \{3\}$ d) *Dom* $y = [1, +\infty)$

12.66 Para cada uno de los casos siguientes, escribe la expresión algebraica de una función exponencial.

a) No corta al eje de ordenadas en (0, 1).

b) Es decreciente, siendo la base y el exponente positivos.

a) $y = 3 \cdot 2^x$ b) $y = -6^x$

12.67 Dadas las sucesiones que tienen por término general $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ y $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$.

a) Calcula, para cada una de ellas, los términos que se encuentran en las posiciones 1, 2, 3, 4, 10, 100, 1000 y 10 000.

b) ¿A qué número se aproximan cada una de ellas cuando n tiende a $+\infty$?

c) Teniendo en cuenta el resultado anterior, ¿qué forma debe tener una sucesión que tiene por límite el número e?

a)

n	1	2	3	4	10	100	1000	10 000
a_n	2,25	2,37	2,44	2,49	2,60	2,70	2,716	2,718
b_n	1,22	2,44	2,52	2,57	2,65	2,71	2,717	2,7182

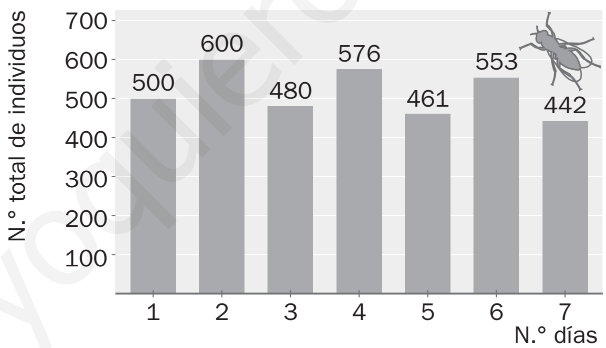
b) Tienden al número e.

c) $\left(1 + \dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n}$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

12.68 Crecimiento de la población

La población de ciertos insectos de una zona de aguas estancadas presenta un crecimiento muy curioso. Fíjate en el siguiente gráfico:



Como ves, si un día aumenta, al día siguiente disminuye. Lo más curioso es que siempre lo hace en el mismo porcentaje, tanto el día que aumenta como el que disminuye.

a) A la vista de los datos, calcula el mencionado porcentaje de aumento y disminución.

b) Calcula la población en el undécimo día.

c) ¿Podrías dar una expresión exponencial que permitiera calcular la población en los días impares?

d) Calcula la población cuando han pasado 30 días.

a) Fijándonos en el primer aumento: $\dfrac{500}{100} = \dfrac{100}{x}$ · Luego $x = 20$. El porcentaje de aumento y disminución es del 20%.

b) En el tercer día: $500 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 500 \cdot 0{,}96 = 480$ insectos

En el quinto día: $500 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 500 \cdot 0{,}96^2 = 461$ insectos

En el séptimo día: $500 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 442$ insectos

En el undécimo día: $500 \cdot 0{,}96^{\frac{11-1}{2}} = 408$ insectos

c) Si llamamos y al número de insectos, tenemos: $y(n) = 500 \cdot 0{,}96^{\frac{n-1}{2}}$.

d) $y\ (29) = 500 \cdot 0{,}96^{\frac{29-1}{2}} = 339$ insectos

12.69 Convergencia económica

A continuación, se ofrecen los datos sobre la renta per cápita de dos países *A* y *B* en los años 1990 y 2005.

	1990	2005
País *A*	10 200	18 100
País *B*	14 200	19 110

Se supone que el porcentaje de crecimiento en un año (tasa de crecimiento anual) de la renta en cada país es siempre constante (igual para todos los años) y que así permanecerá en el futuro próximo.

a) Comprueba cuál de las dos tasas de crecimiento anual es la tasa de crecimiento del país *A*:

i) 3,9% **ii) 11,83%**

b) Calcula la tasa de crecimiento anual del país *B*.

c) Completa la siguiente tabla e indica en qué momento la renta de *A* superará a la de *B*:

	2006	2008	2010
A			
B			

Ten en cuenta que se supone que la tasa de crecimiento es siempre la misma para cada país.

a) La tasa de crecimiento anual de la renta de *A* es del 3,9%, ya que $10\,200 \cdot 1{,}039^{15} \approx 18\,100$.

b) $19\,110 = 14\,200 \cdot r^{15} \Rightarrow r^{15} = \dfrac{12\,110}{14\,200} = 1{,}346 \Rightarrow r \approx 1{,}02$

Por tanto, la tasa de crecimiento anual de la renta de *B* es del 2%.

c)

	2006	2008	2010
A	18 806	20 301	21 916
B	19 492	20 280	21 099

En el año 2008, la renta de *A* será superior a la de *B*.

AUTOEVALUACIÓN

12.A1 Identifica, de entre las siguientes funciones, las que son exponenciales.

a) $y = 5 + x + 2x^2$

b) $y = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x}{6}}$

c) $y = e^{-10x}$

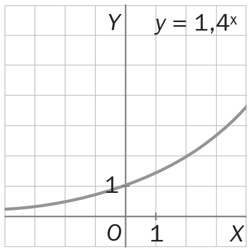
d) $y = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{3} x$

Son exponenciales las funciones de los apartados b y c.

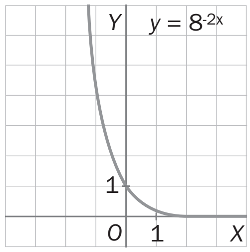
12.A2 Representa gráficamente las siguientes funciones.

a) $y = 1{,}4^x$ **b)** $y = 8^{-2x}$ **c)** $y = e^{-12x}$ **d)** $y = \left(\frac{9}{5}\right)^x$

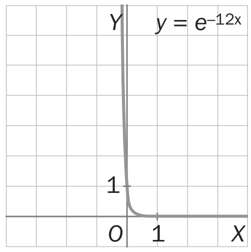
a)



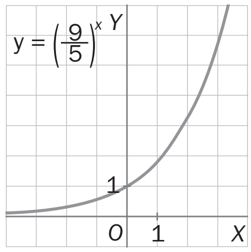
b)



c)



d)



12.A3 Halla el punto de corte con el eje de ordenadas de las funciones siguientes.

a) $y = -4^{7x}$ **b)** $y = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ **c)** $y = -e^{x-1}$ **d)** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$

a) $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0, -1)$

b) $x = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow A(0, 6)$

c) $x = 0 \Rightarrow y = -e^{-1} \Rightarrow A\left(0, \frac{-1}{e}\right)$

d) $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{9} \Rightarrow A\left(0, \frac{1}{9}\right)$

12.A4 Sin hacer la gráfica, indica si son crecientes o decrecientes cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^{-12x}$ **b)** $g(x) = 0{,}6^x$ **c)** $h(x) = \left(\frac{8}{7}\right)^x$

La función $h(x)$ es creciente, y las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son decrecientes.

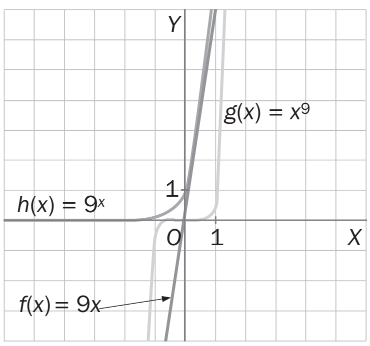
12.A5 Calcula el dominio y el recorrido de las funciones siguientes.

a) $y = 5^{4x}$ **b)** $y = 2{,}6^x$ **c)** $y = -16^x$ **d)** $y = 3^{-x}$

a) *Dom* $y = \mathbf{R}$; *Rec* $y = \mathbf{R}^+$
b) *Dom* $y = \mathbf{R}$; *Rec* $y = \mathbf{R}^+$
c) *Dom* $y = \mathbf{R}$; *Rec* $y = \mathbf{R}^-$
d) *Dom* $y = \mathbf{R}$; *Rec* $y = \mathbf{R}^+$

12.A6 Representa gráficamente las siguientes funciones y compara su crecimiento para valores suficientemente grandes de la variable *x*.

$f(x) = 9x$ $g(x) = 9x$ $h(x) = 9^x$



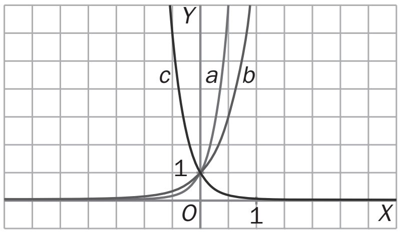
$f(x)$ tiene un crecimiento lineal, $g(x)$ potencial y $h(x)$ exponencial. La que crece más rápidamente es $h(x)$, y luego, $g(x)$.

12.A7 **Identifica cada gráfica con la expresión algebraica que le corresponde.**

$f(x) = 7^x$

$g(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

$h(x) = 3^x$



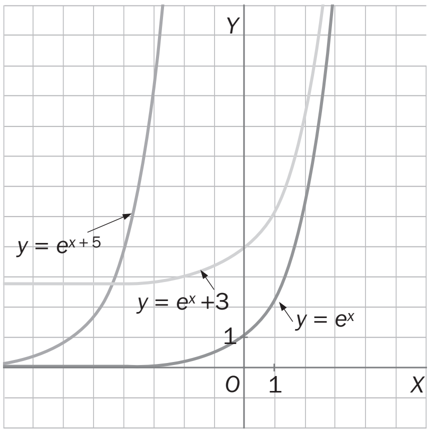
a es la gráfica de $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$.

b es la gráfica de $y = 3^x$.

c es la gráfica de $y = 7^x$.

12.A8 **A partir de la gráfica de $y = e^x$, representa las siguientes funciones.**

a) $y = e^x + 3$ **b)** $y = e^{x+5}$



a) Se traslada 3 unidades hacia arriba.

b) Se traslada 5 unidades a la izquierda.

12.A9 **Un banco ofrece elegir entre un 6% de interés compuesto, con período de capitalización anual, trimestral o mensual. Si Marcos decide hacer un ingreso de 10 000 euros a 20 años, ¿cuánto recibiría en cada caso?**

Anual: $C = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}06)^{20} = 32\,071{,}35$ €

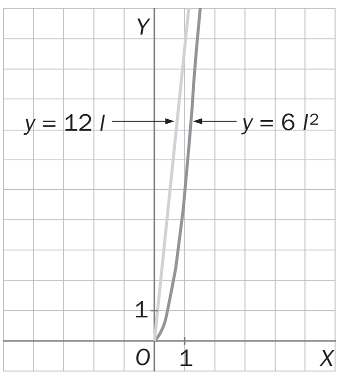
Trimestral: $C = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{400}\right)^{4 \cdot 20} = 32\,906{,}63$ €

Mensual: $C = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{12 \cdot 20} = 33\,102{,}04$ €

MATETIEMPOS

Cubo

Si el lado de un cubo mide "*l*" unidades, construye un gráfico en el que se representan la longitud total de sus aristas y el área total del cubo en función de "*l*". ¿Existe algún punto en el que ambos valores coincidan?



Las funciones son $y = 6\,l^2$ e $y = 12\,l$. Ambas coinciden si $6\,l^2 = 12\,l$.

Resolviendo la ecuación, se obtiene $l = 0$ o $l = 2$. Por tanto, coinciden cuando el lado mide 2 unidades.

EJERCICIOS PROPUESTOS

13.1 **Clasifica los siguientes caracteres estadísticos:**

a) El récord del mundo de 100 metros lisos.
b) El número de hermanos que tienes.
c) Tu asignatura favorita.
d) La producción de hierro de una mina.

a) Cuantitativo continuo.
b) Cuantitativo discreto.
c) Cualitativo.
d) Cuantitativo continuo.

13.2 **Propón dos ejemplos en cada caso.**

a) Carácter estadístico cualitativo.
b) Variable estadística discreta.
c) Variable estadística continua.

a) El medio de transporte que utilizas para ir al instituto.
b) El número de películas que ves al mes.
c) Tu altura.

13.3 **Para realizar un sondeo sobre intención de voto en unas elecciones autonómicas, una empresa de demoscopia ha realizado entrevistas mediante llamadas telefónicas a 1000 personas, mediante llamadas telefónicas con el fin de conocer las expectativas de voto de un candidato.**

a) ¿Te parece que éste es un buen procedimiento?
b) ¿Qué ocurre si una persona tiene tres líneas telefónicas a su nombre?
c) ¿Qué sucede si alguien no tiene teléfono?

a) No, ya que no todos tienen la misma probabilidad de ser elegidos para la muestra.
b) Una persona con tres líneas telefónicas a su nombre tiene el triple de posibilidades de ser elegida para la muestra que una que solo tiene una línea.
c) Si una persona no tiene teléfono, nunca podrá ser seleccionada para formar parte de la muestra.

13.4 **El departamento de control de calidad de una fábrica realiza con cierta periodicidad mediciones sobre los productos que salen de su cadena de fabricación para comprobar si cumplen las características que figuran en el etiquetado del envase.**

a) ¿Sería bueno probar con los 100 primeros productos que salen del proceso de fabricación a primera hora de la mañana?
b) ¿Estaría mejor examinar con los 100 últimos productos fabricados al final del día?
c) ¿Cómo podrías mejorar la elección de la muestra?

a) No, pues al comienzo del día puede estar la máquina bien, estropearse a la segunda hora y seguir estropeada todo el día.
b) No, porque la máquina puede funcionar bien a lo largo de toda la jornada y estropearse al final del día.
c) Tomando uno o dos productos cada hora para formar parte de la muestra.

13.5 **Si sabemos que una muestra de 2500 personas es representativa de una población de 300 000, y que de esas 2500 personas, 500 son menores de edad, ¿cuántos menores de edad hay en la población?**

Si de un total de 2500 personas de la muestra representativa, 500 son menores de edad, de los 300 000 de la población deberá haber:

$$\frac{2500}{500} = \frac{300\,000}{x} \Rightarrow x = 60\,000 \text{ menores de edad}$$

13.6 Un 65% de los 15 000 socios colaboradores de una ONG son mujeres. La dirección de la ONG quiere conocer la opinión de sus socios y realiza telefónicamente una encuesta a 1000 de ellos, de los cuales 450 son mujeres. ¿Es suficientemente representativa la muestra elegida?

En la muestra debe haber un 65% de mujeres.

65% de 1000 $= 650 > 450$, por lo que la muestra no es representativa.

Para que fuera representativa debería haber 650 mujeres.

13.7 En el estudio de una variable *X* se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias.

x_i	2	3	4	5	6
f_i	1	7	3	4	5

Construye la tabla completa de frecuencias.

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
2	1	0,05	1	0,05
3	7	0,35	8	0,4
4	3	0,15	11	0,55
5	4	0,2	15	0,75
6	5	0,25	20	1
	20	1		

13.8 Las puntuaciones conseguidas en un test de cultura general realizado a 45 estudiantes fueron:

8 1 9 9 1 6 6 8 3 2 5 2 9 5 4
2 3 4 1 9 3 1 2 8 4 7 4 3 7 8
3 5 1 8 9 5 3 7 7 8 5 5 8 8 1

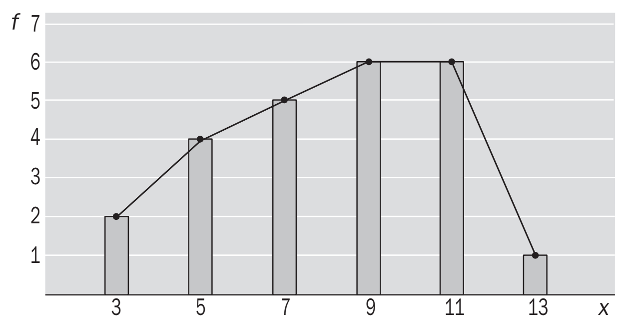
Construye la tabla completa de frecuencias.

Puntuación	f_i	h_i	F_i	H_i
1	6	0,133	6	0,133
2	4	0,089	10	0,222
3	6	0,133	16	0,356
4	4	0,089	20	0,444
5	6	0,133	26	0,578
6	2	0,044	28	0,622
7	4	0,089	32	0,711
8	8	0,178	40	0,889
9	5	0,111	45	1
	45	1		

13.9 En el estudio de una variable *X* se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias.

x_i	3	5	7	9	11	13
f_i	2	4	5	6	6	1

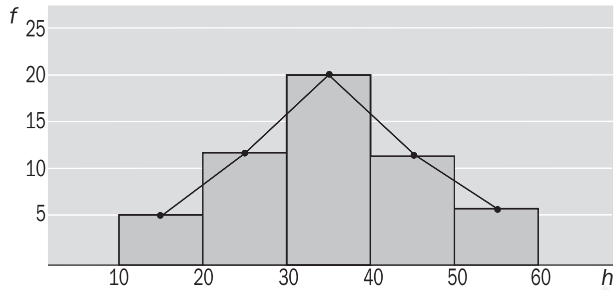
Construye el diagrama de barras y su polígono de frecuencias.



13.10 **En el estudio de una variable *X* se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias.**

Clases	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)
f_i	5	12	20	11	6

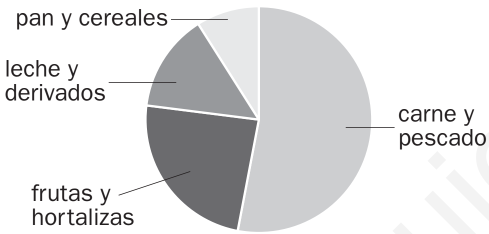
Construye el histograma y su polígono de frecuencias.



13.11 **Este diagrama de sectores refleja, en porcentajes, la composición de la cesta de la compra en los hogares españoles.**

a) ¿Qué tipo de alimento es el más consumido?

b) ¿Y el que menos?



a) La carne y el pescado.

b) El pan y los cereales.

13.12 **La tabla adjunta muestra el número de faltas de asistencia en una clase a lo largo de un mes.**

N.º de faltas	0	1	2	3	4	5
N.º de alumnos	10	7	6	2	1	4

Calcula la media aritmética, la moda y los cuartiles de la distribución.

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 4}{10 + 7 + 6 + 2 + 1 + 4} \approx 1{,}63 \text{ faltas}$$

$M_o = 0$ faltas

N.º de faltas	f_i	F_i
0	10	$10 > 7{,}5$
1	7	$17 > 15$
2	6	$23 > 22{,}5$
3	2	25
4	1	26
5	4	30
	30	

$Q_1 = 0$ faltas

$Q_2 = 1$ falta

$Q_3 = 2$ faltas

13.13 La tabla adjunta muestra los resultados de unos alumnos en la prueba de salto con pértiga.

Medida del salto (m)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
N.º de alumnos	6	12	15	4

Calcula la media aritmética, la moda y los cuartiles de la distribución.

Número de alumnos	Marca de clase	h_i	F_i
[2; 2,5)	2,25	6	6
[2,5; 3)	2,75	12	18 > 9,25
[3; 3,5)	3,25	15	33 > 27,75
[3,5; 4)	3,75	4	37
		37	

$$\bar{x} = \frac{2{,}25 \cdot 6 + 2{,}75 \cdot 12 + 3{,}25 \cdot 15 + 3{,}75 \cdot 4}{37} \approx 2{,}98 \text{ m}$$

$M_o = 3{,}25$ m

$Q_1 = [2{,}5; 3)$

$Q_2 = Q_3 = [3; 3{,}5)$

13.14 Calcula la media aritmética, la varianza y la desviación típica de la distribución dada por la siguiente tabla.

x_i	3	4	5	6	7	8	9
f_i	2	5	11	15	10	6	2

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 15 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 2}{2 + 5 + 11 + 15 + 10 + 6 + 2} \approx 6{,}019$$

$$s^2 = \frac{2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 4^2 + 11 \cdot 5^2 + 15 \cdot 6^2 + 10 \cdot 7^2 + 6 \cdot 8^2 + 2 \cdot 9^2}{2 + 5 + 11 + 15 + 10 + 6 + 2} - 6{,}02^2$$

$$s = +\sqrt{1{,}96} = 1{,}4$$

13.15 Dados los datos de la siguiente tabla:

Clases	[10, 20)	[20, 30)	[30 40)	[40, 50)	[50, 60)
f_i	5	12	20	11	6

Calcula la media aritmética, la varianza y la desviación típica de la distribución asociada.

$$\bar{x} = \frac{15 \cdot 5 + 25 \cdot 12 + 35 \cdot 20 + 45 \cdot 11 + 55 \cdot 6}{5 + 12 + 20 + 11 + 6} = 35{,}185$$

$$s^2 = \frac{15^2 \cdot 5 + 25^2 \cdot 12 + 35^2 \cdot 20 + 45^2 \cdot 11 + 55^2 \cdot 6}{5 + 12 + 20 + 11 + 6} - 35{,}185^2 \approx 124{,}05$$

$$s = +\sqrt{124{,}05} \approx 11{,}137$$

13.16 Dado el siguiente conjunto de datos:

63, 62, 60, 20, 65, 80, 82, 110, 70, 75,
73, 72, 108, 84, 78, 67, 19, 60, 61, 63

a) Calcula la media aritmética.

b) ¿Hay algún atípico? Si los hay, descartalos y vuelve a calcular la media aritmética.

a) Hay 20 datos:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 63 + 62 + 2 \cdot 60 + 20 + 65 + 80 + 82 + 110 + 70 + 75 + 73 + 72 + 108 + 84 + 78 + 67 + 19 + 61}{20} = \frac{1372}{20} \approx 68{,}6$$

b) 19 y 20 son datos atípicos. Los eliminamos y volvemos a calcular la media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 63 + 62 + 2 \cdot 60 + 65 + 80 + 82 + 110 + 70 + 75 + 73 + 72 + 108 + 84 + 78 + 67 + 61}{20} = \frac{1333}{20} \approx 74{,}06$$

13.17 Calcula la media aritmética truncada al 20% del siguiente conjunto de datos:

600, 396, 490, 1604, 8,
606, 604, 594, 1246, 42

Hay 10 datos. Para calcular la media truncada al 20% debemos descartar el 20% de los datos superiores y el 20% de los inferiores. Es decir, hay que eliminar el 20% de 10 = 2 datos superiores y 2 datos inferiores. Por tanto, el conjunto de datos queda de la siguiente forma:

600, 396, 490, 606, 604, 594

La media truncada es:

$$\bar{x} = \frac{600 + 396 + 490 + 606 + 604 + 594}{6} \approx 548{,}33$$

13.18 Para los datos del ejercicio anterior, calcula los valores atípicos, aplicando el criterio dado en el epígrafe.

$Q_3 = 606$; $Q_1 = 396$

$Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 921$

$Q_1 - 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 81$

Entonces:

x es atípico por la derecha si $x > Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 921$. Los valores atípicos por la derecha son 1246 y 1604.

x es atípico por la izquierda si $x < Q_1 - 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 81$. Los valores atípicos por la izquierda son 8 y 42.

13.19 Una distribución viene dada por la siguiente tabla:

x_i	3	4	5	6	7	8	9
f_i	2	5	11	15	10	6	2

Calcula la media y la desviación típica y halla el porcentaje de datos incluidos en los intervalos $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$; $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$; $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$.

Por el ejercicio 13.14 se sabe que $\bar{x} \approx 6{,}019$ y $s = 1{,}4$.

Intervalo $(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (4{,}619; 7{,}419)$

En este intervalo hay 11 + 15 + 10 = 36 datos. 36 de 51 datos totales representan el 70,6%.

Intervalo $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (3{,}219; 8{,}819)$

En este intervalo hay 5 + 11 + 15 + 10 + 6 = 47 datos. 47 de 51 datos totales representan el 92,6%.

Intervalo $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s) = (1{,}819; 10{,}219)$

En este intervalo hay 2 + 5 + 11 + 15 + 10 + 6 + 2 = 51 datos. 51 de 51 datos totales representan el 100%.

13.20 En la tabla se recogen los datos correspondientes a una distribución estadística:

Clases	**[1, 2)**	**[2, 3)**	**[3, 4)**	**[4, 5)**	**[5, 6)**	**[6, 7)**	**[7, 8)**
f_i	**6**	**12**	**15**	**20**	**16**	**11**	**6**

Calcula la media y la desviación típica y halla el porcentaje de datos incluidos en los intervalos $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$; $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$.

Clases	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)	[7, 8)
Marca	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
f_i	6	12	15	20	16	11	6

$$\bar{x} = \frac{1{,}5 \cdot 6 + 2{,}5 \cdot 12 + 3{,}5 \cdot 15 + 4{,}5 \cdot 20 + 5{,}5 \cdot 16 + 6{,}5 \cdot 11 + 7{,}5 \cdot 6}{6 + 12 + 15 + 20 + 16 + 11 + 6} \approx 4{,}44$$

$$s = +\sqrt{\frac{1{,}5^2 \cdot 6 + 2{,}5^2 \cdot 12 + 3{,}5^2 \cdot 15 + 4{,}5^2 \cdot 20 + 5{,}5^2 \cdot 16 + 6{,}5^2 \cdot 11 + 7{,}5^2 \cdot 6}{6 + 12 + 15 + 20 + 16 + 11 + 6} - 4{,}44^2} = 1{,}77$$

Intervalo $(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (2{,}67; 6{,}21)$
En este intervalo hay 15 + 20 + 16 = 51 datos. 51 de 86 datos totales representan el 59%.

Intervalo $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (0{,}9; 7{,}98)$
En este intervalo hay 6 + 12 + 15 + 20 + 16 + 11 = 80 datos. 80 de 86 datos totales representan el 93%.

Intervalo $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s) = (-0{,}87; 9{,}75)$
En este intervalo hay 6 + 12 + 15 + 20 + 16 + 11 + 6 = 86 datos. 86 de 86 datos totales representan el 100%.

13.21 Calcula el coeficiente de variación de la siguiente distribución.

x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
f_i	**5**	**12**	**18**	**11**	**7**	**4**	**1**

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 18 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 1}{5 + 12 + 18 + 11 + 7 + 4 + 1} \approx 3{,}33$$

$$s = +\sqrt{\frac{1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 12 + 3^2 \cdot 18 + 4^2 \cdot 11 + 5^2 \cdot 7 + 6^2 \cdot 4 + 7^2 \cdot 1}{5 + 12 + 18 + 11 + 7 + 4 + 1} - 3{,}33^2} \approx 1{,}41$$

$$CV = \frac{1{,}41}{3{,}33} = 0{,}42 = 42\%$$

13.22 Compara las dispersiones de las siguientes distribuciones.

x_i	**6**	**3**	**4**	**3**	**7**	**5**	**6**	**8**
y_i	**63**	**39**	**64**	**55**	**66**	**70**	**65**	**62**

$$\bar{x} = \frac{6 + 3 + 4 + 3 + 7 + 5 + 6 + 8}{8} = 5{,}25$$

$$s_x = +\sqrt{\frac{6^2 + 3^2 + 4^2 + 3^2 + 7^2 + 5^2 + 6^2 + 8^2}{8} - 5{,}25^2} \approx 1{,}71 \qquad CV_x = \frac{1{,}71}{5{,}25} = 0{,}33 \approx 33\%$$

$$\bar{y} = \frac{63 + 39 + 64 + 55 + 66 + 70 + 65 + 62}{8} = 60{,}5$$

$$s_y + \sqrt{\frac{63^2 + 39^2 + 64^2 + 55^2 + 66^2 + 70^2 + 65^2 + 62^2}{8} - 60{,}5^2} \approx 81{,}75 \qquad CV_y = \frac{81{,}75}{60{,}5} = 1{,}35 \approx 135\%$$

$CV_x < CV_Y \Rightarrow$ La distribución X es menos dispersa que la distribución Y.

13.23 En ese mismo examen, Alberto (de 4.º A) ha sacado un 7, y Borja (de 4.º B), otro 7. Compara sus resultados.

Ordenando las notas de ambas clases, veremos que en la de Alberto hay cinco notas iguales o superiores a 7, y que en la de Borja hay 12.

Para comparar sus notas podemos calcular la puntuación típica teniendo en cuenta los parámetros que se han calculado en el problema resuelto. Restamos en cada caso la media del grupo y dividimos entre la desviación típica, obteniendo los siguientes valores:

Alberto: $\frac{7 - 5{,}5}{1{,}23} = 1{,}22$ Borja: $\frac{7 - 5{,}5}{2{,}43} = 0{,}62$

La puntuación de Alberto ha sido mejor, teniendo en cuenta los resultados del grupo.

13.24 En el siguiente examen de 4.º A, la nota media ha sido 5,8, y la desviación típica, 1,5. Ana ha vuelto a sacar un 6. Compara esta nota con la del primer examen.

Ahora, al no conocer las notas del resto de la clase, no podemos ordenarlas. Vamos a calcular su puntuación típica.

$$\text{Ana: } \frac{6 - 5{,}8}{1{,}5} = 0{,}13$$

La nota fue mejor en el primer examen.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRETENERSE

Caracteres, muestreo y recuento de datos

13.25 Di si los siguientes caracteres son cualitativos o cuantitativos, y relaciónalos con sus posibles modalidades o valores.

Carácter	Tipo	Modalidades/Valores
Estilo de veraneo		**1200, 2300, 800, 1000...**
N.º de mensajes de móvil		**Montaña, playa, aventura...**
Sueldo mensual de los trabajadores		**3, 15, 8, 12, 1, 7, 23, 9...**
N.º de libros que utiliza un alumno		**2, 6, 5, 3, 4, 1, 2, 4, 5...**

Carácter	Tipo	Modalidades/Valores
Estilo de veraneo	Cualitativo	Montaña, playa, aventura...
N.º de mensajes de móvil	Cuantitativo discreto	3, 15, 8, 12, 1, 7, 23, 9...
Sueldo mensual de los trabajadores	Cuantitativo continuo	1200, 2300, 800, 1000...
N.º de libros que utiliza un alumno	Cuantitativo discreto	2, 6, 5, 3, 4, 1, 2, 4, 5...

13.26 **El consejo escolar de un centro desea realizar una encuesta para conocer el grado de satisfacción de los padres de los alumnos con el funcionamiento general del centro. ¿Cuál crees que es el mejor y más rápido procedimiento, y por qué?**
A. Hacer el estudio con una clase elegida al azar.
B. En la salida del centro, elegir a los 30 primeros alumnos que salgan.
C. Seleccionar al azar 4 alumnos por grupo.

La opción C es la más adecuada, porque la muestra será más representativa del centro, al elegir alumnos de todos los grupos y niveles.

13.27 **La siguiente tabla informa del uso de la sala de musculación de un polideportivo municipal.**

Sexo	Renta
H 75%	Baja: 30%
	Media: 60%
	Alta: 10%
M 25%	Baja: 40%
	Media: 50%
	Alta: 10%

Se quiere realizar una encuesta a 40 personas sobre las instalaciones. ¿Cuántos usuarios de cada modalidad tendría que haber en la muestra?

- Hombres: 75% de 40 = 30 hombres, de los cuales:
  - Renta baja: 30% de 30 = 9
  - Renta media: 60% de 30 = 18
  - Renta alta: 10% de 30 = 3
- Mujeres: 25% de 40 = 10 mujeres, de las cuales:
  - Renta baja: 40% de 10 = 4
  - Renta media: 50% de 10 = 5
  - Renta alta: 10% de 10 = 1

13.28 **Completa los valores de la tabla.**

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
1	2			
2	4			
3	3			
4	7			
5	3			
6	1			
Total				

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
1	2	$\frac{1}{10}$	2	$\frac{2}{10}$
2	4	$\frac{1}{5}$	6	$\frac{6}{10}$
3	3	$\frac{3}{20}$	9	$\frac{9}{20}$
4	7	$\frac{7}{20}$	16	$\frac{16}{20}$
5	3	$\frac{3}{20}$	19	$\frac{19}{20}$
6	1	$\frac{1}{20}$	20	$\frac{20}{20}$
Total	20	1	72	4

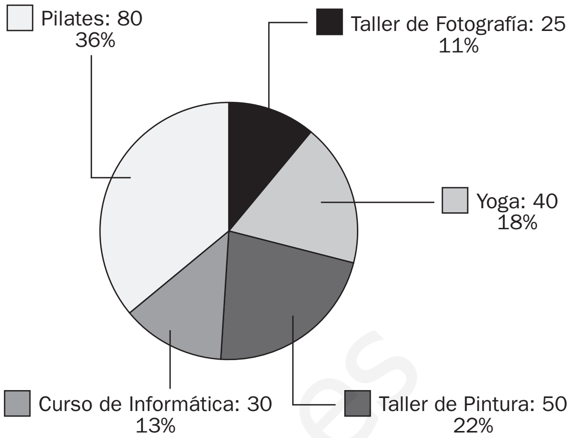
13.29 **El número de llamadas perdidas al día que realizan 30 alumnos de 4.º ESO de un centro es:**
30, 10, 17, 62, 57, 48, 74, 32, 47, 34, 12, 16, 15, 65, 22, 44, 38, 13, 36, 28, 38, 40, 61, 53, 52, 31, 27, 25, 20, 19
Agrupa los datos en clases y elabora una tabla de frecuencias.

Clases	f_i	h_i	F_i	H_i
[75, 95)	4	0,13	4	0,13
[95, 115)	2	0,07	6	0,20
[115, 135)	7	0,23	13	0,43
[135, 155)	9	0,30	22	0,73
[155, 175)	4	0,13	26	0,87
[175, 195)	0	0,00	26	0,87
[195, 215)	2	0,07	28	0,93
[215, 235)	2	0,07	30	1,00
Total	30	1,00		

Gráficos y parámetros

13.30 La siguiente tabla muestra las actividades ofertadas por un centro cultural y el número de vecinos que las realizan. Representa el diagrama de sectores asociado.

Actividades	N.º de vecinos
Yoga	40
Taller de pintura	50
Curso de informática	30
Pilates	80
Taller de fotografía	25



13.31 La siguiente tabla presenta el número de horas semanales que dedican al estudio los 30 alumnos de una clase de 4.º de ESO.

N.º de faltas	N.º de alumnos
[0, 4)	8
[4, 8)	10
[8, 12)	8
[12, 16)	4

a) Halla la media, la moda, la mediana y los otros dos cuartiles.

b) Calcula el rango, la varianza y la desviación típica.

c) Representa el histograma y el polígono de frecuencias.

a)

Marcas	f_i	F_i
2	8	$8 > 7{,}5$
6	10	$18 > 15$
10	8	$26 > 22{,}5$
14	4	30
	30	

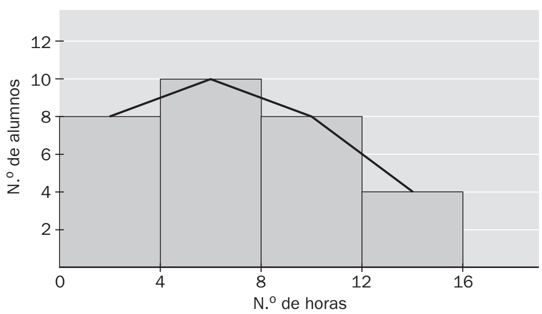
$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 8 + 6 \cdot 10 + 102 \cdot 8 + 14 \cdot 4}{30} \approx 7{,}07$$

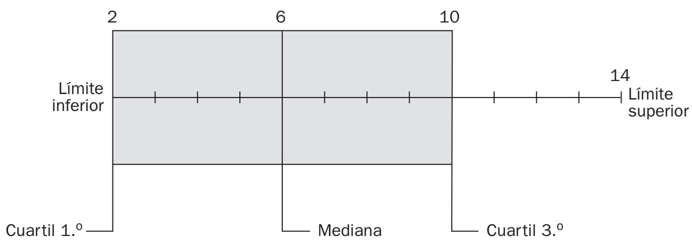
$M_o = 6$; $M = 6$; $Q_1 = 2$; $Q_3 \quad 10$

b) Rango $= 14 - 2 = 12$

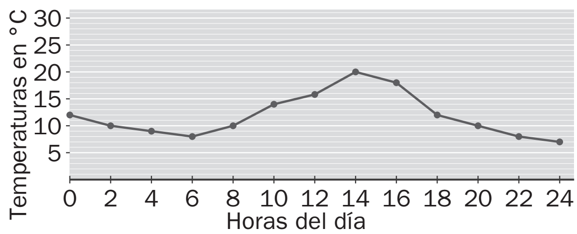
$$s^2 = \frac{2^2 \cdot 8 + 6^2 \cdot 10 + 10^2 \cdot 8 + 14^2 \cdot 4}{30} - 7{,}07^2 \approx 15{,}88 \Rightarrow s = +\sqrt{15{,}88} \approx 3{,}99$$

c)





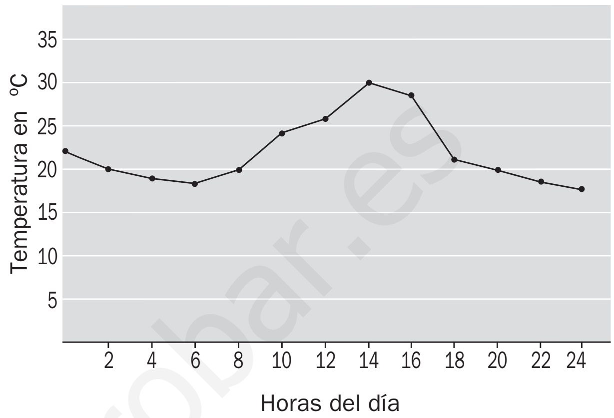
13.32 La evolución de la temperatura a lo largo de un día de otoño en una ciudad del centro del país viene reflejada por el siguiente diagrama lineal.



Realiza otros dos diagramas lineales de lo que podría ser la evolución de la temperatura en un día de invierno y otro de verano en el mismo lugar.

Invierno

Verano



Valores atípicos

13.33 Los resultados obtenidos en un test de inteligencia en una población concreta han sido:

135, 125, 80, 140, 210, 156, 92, 141, 130, 128,
110, 230, 162, 60, 137, 118, 136, 205, 100, 143,
136, 128, 90, 143, 156, 157, 140, 125, 215, 130

a) Ordénalos en clases de amplitud 20.

b) Calcula sus cuartiles.

c) Halla los valores atípicos.

d) Calcula la media aritmética truncada al 20% y compárala con la media aritmética normal.

a)

Clases	Marca de clase	f_i	F_i
[60, 80)	70	1	1
[80, 100)	90	3	4
[100, 120)	110	3	7
[120, 140)	130	10	17 > 7,5; 15
[140, 160)	150	8	25 > 22,5
[160, 180)	170	1	26
[180, 200)	190	0	26
[200, 220)	210	3	29
[220, 240)	230	1	30

b) $Q_1 = Q_2 = 130$; $Q_3 = 150$

c) $Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 180 \cdot Q_1 - 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 100$

x es atípico por la derecha si $x > Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 180$. Valores atípicos por la derecha: 205, 210, 230 y 215.

x es atípico por la izquierda si $x < Q_1 - 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 100$. Valores atípicos por la izquierda: 60, 80, 90 y 92.

d) El 20% de 30 = 6.

Eliminamos seis datos superiores (157, 162, 205, 210, 215 y 230) y seis datos inferiores (60, 80, 90, 92 y 100).

La media es: $\bar{x} = \dfrac{70 \cdot 1 + 90 \cdot 3 + 110 \cdot 3 + 130 \cdot 10 + 150 \cdot 8 + 170 \cdot 1 + 210 \cdot 3 + 230 \cdot 1}{30} \approx 140$

La media truncada al 20% es: $\bar{x}_{truncada} = \dfrac{110 \cdot 2 + 130 \cdot 10 + 150 \cdot 7}{18} \approx 142{,}78.$

La media truncada es más representativa de la población.

Utilización conjunta de parámetros

13.34 Se ha realizado un estudio con el fin de averiguar la cantidad de toneladas de papel que recicla cada uno de los distintos distritos y se han obtenido los siguientes resultados:

64, 65, 68, 67, 68, 67, 72, 74, 80, 74, 68, 74, 68, 72, 68, 65, 72, 67, 68, 85

a) Halla la media y la desviación típica.

b) Calcula el porcentaje de distritos cuyas cantidades recicladas se encuentran dentro del intervalo $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$.

a)

x_i	f_i
64	1
65	2
67	3
68	6
72	3
74	3
80	1
85	1
	20

$$\bar{x} = \frac{64 + 65 \cdot 2 + 67 \cdot 3 + 68 \cdot 6 + 72 \cdot 3 + 74 \cdot 3 + 80 + 85}{20} = 70{,}3$$

$$s = +\sqrt{\frac{64^2 + 65^2 \cdot 2 + 67^2 \cdot 3 + 68^2 \cdot 6 + 72^2 \cdot 3 + 74^2 \cdot 3 + 80^2 + 85^2}{20} - 70{,}3^2} = 5{,}1$$

b) $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (60{,}1; 80{,}5)$. En este intervalo hay 19 distritos, lo que supone un porcentaje del 95%.

13.35 La tabla recoge las temperaturas máximas alcanzadas en dos ciudades durante 10 días consecutivos del mes de agosto.

A	32	33	24	22	35	30	29	31	20	19
B	27	28	25	31	24	25	24	26	22	28

a) ¿Qué ciudad ha tenido una temperatura media más alta a lo largo de esos 10 días?

b) ¿Qué ciudad ha sufrido una variabilidad mayor de temperatura?

c) ¿Qué parámetro has empleado para contestar el anterior apartado? ¿Por qué?

a) Como $\bar{x}_A = \frac{275}{10} = 27{,}5°$ y $\bar{x}_B = \frac{260}{10} = 26°$, la ciudad *A* ha tenido una temperatura media más alta.

b) $s_A^2 = \frac{7861}{10} - 27{,}5^2 = 29{,}85 \Rightarrow s_A \approx 5{,}46 \Rightarrow CV_A = \frac{5{,}46}{27{,}5} \approx 0{,}198$

$s_B^2 = \frac{6820}{10} - 26^2 = 6 \Rightarrow s_B \approx 2{,}45 \Rightarrow CV_B = \frac{2{,}45}{26} \approx 0{,}09$

Por tanto, la ciudad *A* ha tenido una variabilidad de temperatura mayor.

c) El parámetro empleado es el *CV*, y se utiliza porque las medias y las desviaciones típicas de las dos distribuciones son distintas, y es la única manera de comparar sus dispersiones.

13.36 Las notas obtenidas en la asignatura de Matemáticas por los alumnos de dos clases de 4.º de ESO son las siguientes.

Notas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4.º A	5	4	1	0	0	0	0	0	1	4	5
4.º B	0	0	2	2	3	6	3	2	2	0	0

a) ¿Cuál es la calificación media de cada una de las dos clases?

b) ¿Cuál de ellas tiene las notas menos dispersas?

c) ¿Es necesario calcular el coeficiente de variación para poder determinarlo? ¿Por qué?

a) La nota media de 4.º A es:

$$\overline{x}_A = \frac{0\cdot5+1\cdot4+2\cdot1+3\cdot0+4\cdot0+5\cdot0+6\cdot0+7\cdot0+8\cdot1+9\cdot4+10\cdot5}{5+4+1+1+4+5} = 5$$

La nota media de 4.º B es:

$$\overline{x}_A = \frac{2\cdot2+3\cdot2+4\cdot3+5\cdot6+6\cdot3+7\cdot2+8\cdot2}{20} = 5$$

b) Para observar la dispersión calculamos las desviaciones típicas de ambas clases:

$$s_A = +\sqrt{\frac{1^2\cdot4+2^2\cdot1+8^2\cdot1+9^2\cdot4+10^2\cdot5}{20}-5^2} \approx 4{,}45$$

$$s_B = +\sqrt{\frac{2^2\cdot2+3^2\cdot2+4^2\cdot3+5^2\cdot6+6^2\cdot3+7^2\cdot2+8^2\cdot2}{20}-5^2} \approx 1{,}7$$

Por tanto, 4.º B tiene las notas menos dispersas.

c) No ha sido necesario calcular *CV*, ya que cuando las medias son iguales tiene menor dispersión la distribución que tenga menor desviación típica.

13.37 La media y la desviación típica de dos distribuciones *A* y *B* son las siguientes.

$$\overline{x}_A = 100,\quad \overline{x}_B = 200,\quad s_A = 1{,}2,\quad s_B = 2{,}1$$

Indica cuál de ellas es más dispersa.

Calculamos el coeficiente de variación de ambas:

$$CV_A = \frac{1{,}2}{100} = 0{,}012 \qquad CVB = \frac{2{,}1}{200} = 0{,}0105$$

Como $CV_A > CV_B$, la distribución *A* es más dispersa.

13.38 La profesora de Educación Física realiza un estudio referente a la altura y el peso de los alumnos de una clase, obteniendo los siguientes resultados: la altura, en metros, del 95% de los alumnos se encuentra dentro del intervalo (1,52; 1,92), y el peso, en kilogramos, del mismo porcentaje de alumnos se incluye en el intervalo (56,9; 66,1).

¿Cuál de las distribuciones tiene una dispersión relativa mayor?

El intervalo que contiene el 95% de los datos de una distribución es $(\overline{x} - 2s, \overline{x} + 2s)$. Sustituyendo los datos del enunciado obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para la altura:

$$\begin{cases}\overline{x} - 2s = 1{,}52\\ \overline{x} + 2s = 1{,}92\end{cases} \Rightarrow \overline{x} = 1{,}72;\ s = 0{,}1. \text{ Por tanto: } CV_a = \frac{0{,}1}{1{,}72} = 0{,}06$$

De igual manera, para el peso obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases}\overline{x} - 2s = 56{,}9\\ \overline{x} + 2s = 66{,}1\end{cases} \Rightarrow \overline{x} = 61{,}5;\ s = 2{,}3. \text{ Por tanto: } CV_p = \frac{2{,}3}{61{,}5} = 0{,}04$$

En definitiva, la distribución de las alturas tiene una dispersión relativa mayor, ya que su *CV* es mayor.

13.39 ¿Puede ser que la media no coincida con ningún valor de la variable? ¿Y la moda? Razona tus respuestas.

La media puede no coincidir con ningún valor de la variable; sin embargo, la moda siempre estará asociada a un valor concreto de la distribución.

13.40 Averigua el dato que falta en la siguiente distribución para que la media sea 18.

7 12 15 22 23 28 32

$$\frac{7 + 12 + 15 + 22 + 23 + 28 + 32 + x}{8} = 18 \Rightarrow x = 5$$

13.41 ¿Qué habría de ocurrir para que la media aritmética de una variable estadística fuese cero? Pon un ejemplo de una distribución que verifique la propiedad anterior.

Como $\bar{x} = \dfrac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n}{N}$, para que $\bar{x} = 0$ se ha de verificar que $x_1 \cdot f_1 + \ldots + x_n \cdot f_n = 0$.

Las frecuencias son siempre mayores o iguales que cero, por lo que debe ocurrir que la variable tome valores positivos y negativos.

Ejemplo: Las temperaturas mínimas recogidas en una ciudad a lo largo de una semana del mes de enero han sido: 0°, −3°, 2°, 0°, 1°, −1°, 1°. Por tanto, $\bar{x} = 0$, es decir, la temperatura media a lo largo de esa semana fue de 0°.

13.42 Al preguntar a 30 alumnos cuántas asignaturas han suspendido, 13 de ellos contestan que 5 materias. ¿Qué sector circular le corresponde al valor 5 de la variable *número de suspensos*?

Le corresponde el sector circular de 156°, ya que si 360° corresponde al total de los alumnos, entonces a 13 alumnos les corresponden 156°.

13.43 Si se suma a todos los valores de la variable una constante, ¿cómo quedan afectadas la media y la varianza? ¿Y si se multiplican por una constante?

Si se suma a todos los valores de la variable una constante, la media queda aumentada en esa constante, mientras que la varianza no varía.

Si se multiplican todos los valores de la variable por una constante, la media queda multiplicada por esa constante, mientras que la varianza queda multiplicada por el cuadrado de dicha constante.

13.44 Pon un ejemplo de una distribución donde la media, la moda y la mediana coincidan.

Por ejemplo, la siguiente distribución: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5. En este caso, media = moda = mediana = 3.

Puede considerarse también cualquier otro ejemplo que conserve una simetría.

13.45 Calcula el rango de estas dos distribuciones e indica en cuál de ellas el rango es más significativo de la realidad de los datos y por qué.

x_i	5	15	40
f_i	2	25	3

y_i	5	15	40
f_i	12	2	16

El rango de las dos distribuciones es 40 − 5 = 35, es decir, indica una dispersión grande de los datos que es mucho más real en y_i que en x_i, ya que, en general, en esta última están muy poco dispersos.

13.46 Fíjate en la tabla que recoge la distribución de cierta variable estadística y responde:

x_i	F_i
0	**1**
5	**9**
7	**18**
9	**28**
11	**39**
18	**40**

a) ¿Cuántos valores atípicos hay?

b) ¿Cuáles son los valores? Justifica tu respuesta.

c) Calcula la media truncada sin esos valores atípicos.

a) Calculamos los tres cuartiles.

x_i	F_i
0	1
5	9
7	$18 > 10$
9	$28 > 20$
11	$39 > 30$
18	40

$Q_1 = 7$; $Q_2 = 9$; $Q_3 = 11$

$Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 17 \cdot Q_1 - 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 1$

Entonces:

x es atípico por la derecha si $x > 17$. Valores atípicos por la derecha: 18. Hay 40 valores.

x es atípico por la izquierda si $x < 1$. Valores atípicos por la izquierda: 0. Hay 1 valor.

b) Del apartado a, los valores son 18 y 0.

c) La media truncada es:

$$\bar{x}_{truncada} = \frac{5 \cdot 9 + 7 \cdot 18 + 9 \cdot 28 + 11 \cdot 39}{9 + 18 + 28 + 39} = \frac{462}{94} \approx 4{,}91$$

PROBLEMAS PARA APLICAR

13.47 En una ciudad, el 35% de sus habitantes son hombres, y el 65%, mujeres. Entre las mujeres, el 20% son niñas; el 25%, adultas, y el 55%, mayores. Entre los hombres, el 15% son niños; el 25%, adultos, y el 60%, mayores.

Para elaborar un estudio sobre los hábitos de la población de esa ciudad, se elige una muestra de 1200 habitantes. ¿Cuál de las tres muestras siguientes es la más representativa de la población?

	Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3	
	H	***M***	***H***	***M***	***H***	***M***
Niños	**63**	**156**	**58**	**160**	**70**	**145**
Adultos	**105**	**195**	**100**	**182**	**95**	**170**
Mayores	**252**	**429**	**262**	**438**	**255**	**465**

Para que la muestra sea representativa de la población total se deben distribuir de la siguiente manera:

- Hombres: 35% de 1200 = 420, de los cuales:
  - Niños: 15% de 420 = 63
  - Adultos: 25% de 420 = 105
  - Mayores: 60% de 420 = 252
- Mujeres: 65% de 1200 = 780, de las cuales:
  - Niñas: 20% de 780 = 156
  - Adultos: 25% de 780 = 195
  - Mayores: 55% de 780 = 429

Por lo que la muestra más representativa es la 1.

13.48 En ocasiones, la media se ajusta más que la moda a la distribución, y a veces lo contrario. En cada una de las siguientes tablas, ¿qué parámetro ($\bar{x}$ o M_o) es más significativo y por qué?

Variable *A*	
x_i	f_i
138	**2**
254	**1**
351	**1**
2	**30**

Variable *B*	
y_i	f_i
3	**8**
7	**6**
12	**7**
21	**5**

Variable *A*

$$\bar{x} = \frac{138 \cdot 2 + 254 \cdot 1 + 351 \cdot 1 + 2 \cdot 30}{2 + 1 + 1 + 30} = \frac{941}{34} \approx 27{,}68 \qquad s = +\sqrt{\frac{2 \cdot 138^2 + 254^2 \cdot 1 + 351^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 30}{2 + 1 + 1 + 30} - 27{,}68^2} \approx 76{,}67$$

$M_o = 2$

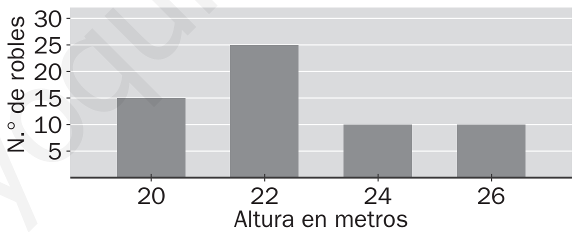
En esta variable, la varianza es muy grande, lo cual demuestra que la media no es muy representativa. Si nos fijamos en la tabla, se observa que de 34 datos hay 30 que son 2. Con lo cual la moda es mucho más representativa de la distribución.

Variable *B*

$$\bar{y} = \frac{3 \cdot 8 + 7 \cdot 6 + 12 \cdot 7 + 21 \cdot 5}{8 + 6 + 7 + 5} \approx 9{,}81 \qquad s = +\sqrt{\frac{3^2 \cdot 8 + 7^2 \cdot 6 + 12^2 \cdot 7 + 21^2 \cdot 5}{8 + 6 + 7 + 5} - 9{,}81^2} \approx 6{,}44 \qquad M_o = 3$$

Observando la varianza y la tabla, en esta variable, la media es bastante representativa, más que la moda.

13.49 En el Parque Nacional de los Picos de Europa se ha realizado un estudio sobre la altura de sus robles, y para ello se ha tomado una muestra en una superficie de 15 kilómetros cuadrados, obteniéndose los siguientes resultados gráficos.



a) Halla la media, la moda y la mediana.

b) Calcula el intervalo que contenga el 95% de los robles.

a) De la gráfica obtenemos la siguiente tabla:

x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
20	15	15	300	6000
22	25	40 > 30	550	12 100
24	10	50	240	5760
26	10	60	260	6760
	60		1350	30 620

x_i = Altura de los robles

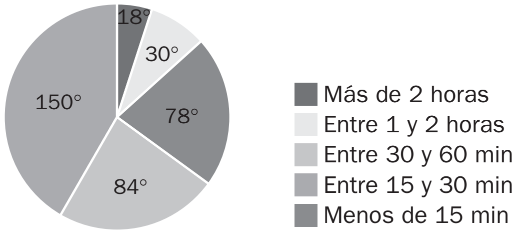
f_i = Número de robles

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 15 + 22 \cdot 25 + 24 \cdot 10 + 26 \cdot 10}{60} = 22{,}5; \ ; M_o = 22; M_e = 22$$

b) En el intervalo ($\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s$) se encuentra al menos el 95% de los datos.

$$s = +\sqrt{\frac{20^2 \cdot 15 + 22^2 \cdot 25 + 24^2 \cdot 10 + 26^2 \cdot 10}{60} - 22{,}5^2} \approx 2{,}02 \Rightarrow (\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (18{,}46; 26{,}54)$$

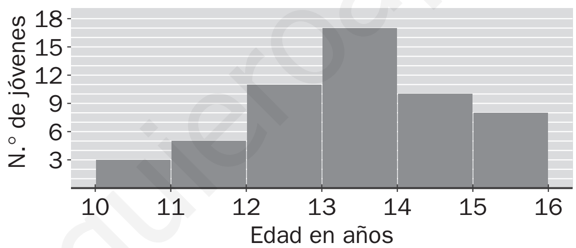
13.50 Este diagrama recoge el tiempo que dedican diariamente al ordenador 60 alumnos de Secundaria.



¿Cuántos alumnos respondieron a las distintas categorías del estudio?

Realizando sendas reglas de tres obtenemos los siguientes resultados: *A*: 13 alumnos; *B*: 25; *C*: 14; *D*: 5, y *E*: 3

13.51 Según un estudio realizado a nivel nacional, la edad media en que la población realiza su primer viaje al extranjero es de 13,6 años. En un estudio realizado en un centro de Secundaria a 54 jóvenes se han obtenido los siguientes resultados.



a) Elabora una tabla con los datos del gráfico y calcula su media y su mediana.

b) Compara los resultados con la media nacional.

a)

Edad (años)	N.° de alumnos	Marcas x_i	F_i
[10, 11)	3	10,5	3
[11, 12)	5	11,5	8
[12, 13)	11	12,5	19
[13, 14)	17	13,5	36
[14, 15)	10	14,5	46
[15, 16)	8	15,5	54
	54		

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 10{,}5 + 5 \cdot 11{,}5 + 11 \cdot 12{,}5 + 17 \cdot 13{,}5 + 10 \cdot 14{,}5 + 8 \cdot 15{,}5}{54} \approx 13{,}43$$

Mediana: $M = 13{,}5$

b) La media nacional es de 13,6, así que el estudio ratifica la bajada de edad en el consumo de alcohol e incluso con una media menor.

13.52 **En cierto centro escolar cuyo número total de alumnos es de 600, el 40% son chicos, de los cuales solo el 25% se encuentra en Bachillerato, mientras que el 50% de las chicas cursan ESO.**

a) Detalla cómo ha de ser la estructura de una muestra significativa que conste de la quinta parte del alumnado.

b) En cierta muestra aleatoria simple de 50 alumnos de 2.º de ESO, se ha estudiado el número de sobresalientes por alumno en la primera evaluación, obteniéndose los siguientes resultados.

Número de sobresalientes	Número de alumnos
0	4
1	7
2	10
3	15
4	5
5	6
6	1
7	1
8	1

Calcula la media truncada al 10% de esta distribución.

a) El tamaño de la muestra ha de ser la quinta parte del total: $n = 120$.

Para que la muestra sea representativa tiene que haber:

- Chicos: 40% de 120 = 48, de los cuales:
  - Bachillerato: 25% de 48 = 12
  - ESO: 75% de 48 = 36
- Chicas: 60% de 120 = 72, de las cuales:
  - Bachillerato: 50% de 72 = 36
  - Adultos: 50% de 72 = 36

Resumiendo, la muestra debe tener la siguiente distribución:

	ESO	Bachillerato	Total
Chicos	36	12	48
Chicas	36	36	72
Total	72	48	120

b) Hay 50 datos en total. Como el 10% de 50 = 5, para calcular la media truncada al 10% hay que eliminar 5 datos superiores (5, 5, 6, 7 y 8) y 5 datos inferiores (0, 0, 0, 0 y 1).

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4}{40} \approx 2{,}78$$

13.53 **En una población nórdica con 2500 habitantes adultos se ha realizado un estudio sobre su altura. La distribución de alturas es normal (unimodal y simétrica).**

Sabiendo que en el intervalo (172, 196) se encuentran 2375 habitantes y que la altura media es de 184 centímetros, calcula:

a) La desviación típica de la distribución.

b) El número de habitantes que miden entre 178 y 190 centímetros.

a) En el intervalo (172, 196) se encuentran 2375 habitantes, lo que supone el 95% de la población total. Como el intervalo que contiene el 95% de los datos de una distribución es $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$, se tiene que $\bar{x} + 2s = 172$.

Sustituyendo los datos del enunciado obtenemos la siguiente ecuación:

$$184 - 2s = 172 \Rightarrow 2s = 184 - 172 \Rightarrow s = \frac{184 - 172}{2} = 6$$

b) El número de habitantes que miden entre 178 y 190 cm será igual al número de habitantes que se encuentren en el intervalo $(178, 190) = (\bar{x} - s, \bar{x} + s)$. Este último intervalo contiene el 68% de los datos, lo que supone que hay 1700 habitantes que miden entre 178 y 190 cm.

Caracteres y parámetros estadísticos. Gráficos

13.54 **La siguiente tabla muestra las edades de los jóvenes que acuden a un bibliobús solicitando préstamos de libros en un día cualquiera.**

Edad	N.º de personas
[6, 8)	5
[8, 10)	12
[10, 12)	14
[12, 14)	13
[14, 16)	4
[16, 18)	2

a) Halla la media, la moda y el tercer cuartil.

b) Calcula la desviación típica.

c) Representa el histograma y el polígono de frecuencias.

a)

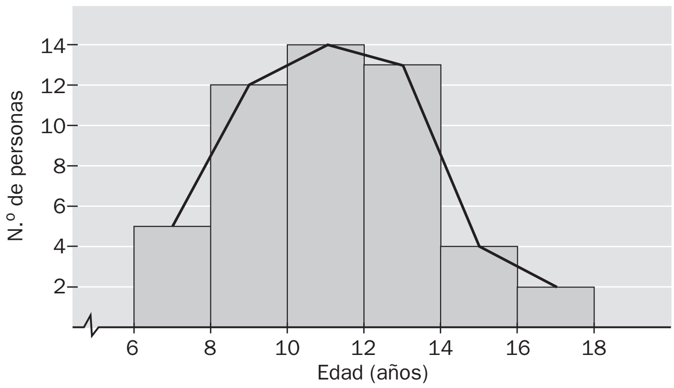
Marcas	*f*	*F*
7	5	5
9	12	17
11	14	31
13	13	44
15	4	48
17	2	50
	50	

$$\bar{x} = \frac{7 \cdot 5 + 9 \cdot 12 + 11 \cdot 14 + 13 \cdot 13 + 15 \cdot 4 + 17 \cdot 2}{50} = 11{,}2$$

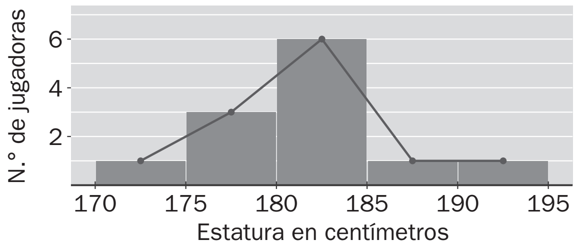
$M_o = 11$ años. $Q_3 = 13$ años

b) $s = +\sqrt{\dfrac{7^2 \cdot 5 + 9^2 \cdot 12 + 11^2 \cdot 14 + 13^2 \cdot 13 + 15^2 \cdot 4 + 17^2 \cdot 2}{50} - 11{,}2^2} \approx 2{,}5$

c)



13.55 El siguiente polígono de frecuencias muestra las estaturas de las 12 jugadoras de un equipo de voleibol femenino.



Calcula la media aritmética y la desviación típica.

Nos creamos la tabla asociada al polígono de frecuencias anterior para poder responder a las cuestiones:

Marcas (cm)	Número de jugadoras
172,5	1
177,5	3
182,5	6
187,5	1
192,5	1
	12

$$\bar{x} = \frac{172,5 + 177,5 \cdot 3 + 182,5 \cdot 6 + 187,5 + 192,5}{12} \approx 181,67 \text{ cm}$$

$$s = +\sqrt{\frac{172,5^2 + 177,5^2 \cdot 3 + 182,5^2 \cdot 6 + 187,5^2 + 192,5^2}{12} - 181,67^2} \approx 4,81 \text{ cm}$$

13.56 La profesora de Educación Plástica y Visual evalúa a sus alumnos cada trimestre con la media de 10 calificaciones sobre distintas pruebas y trabajos. Susana ha obtenido, de momento, las siguientes notas:

2, 4, 4, 5, 8, 3, 6, 3, 5

¿Qué calificación debe obtener en el último examen que le queda para aprobar la asignatura con un 5?

Para aprobar necesita que su media sea 5, es decir:

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 4 + 5 + 8 + 3 + 6 + 3 + 5 + a}{10} = 5 \Rightarrow \frac{40 + a}{10} = 5 \Rightarrow a = 10$$

Por tanto, para aprobar la asignatura con un 5 debe obtener un 10.

Utilización conjunta de $\bar{x}$ y s

13.57 La siguiente tabla recoge el número de goles marcados por dos equipos de balonmano en 8 partidos del Campeonato Nacional de Liga.

EQ. 1	**25**	**24**	**27**	**24**	**26**	**25**	**27**	**24**
EQ. 2	**28**	**30**	**21**	**22**	**27**	**20**	**28**	**30**

a) Calcula el número medio de goles de cada uno de los equipos.

b) ¿Cuál de ellos es más regular en su tanteo?

a) Equipo 1:

Número de goles	24	25	26	27
Número de partidos	3	2	1	2

$$\bar{x}_1 = \frac{24 \cdot 3 + 25 \cdot 2 + 26 + 27 \cdot 2}{8} = 25,25 \text{ goles}$$

Equipo 2:

Número de goles	20	21	22	27	28	30
Número de partidos	1	1	1	1	2	2

$$\bar{x}_2 = \frac{20 + 21 + 22 + 27 + 28 \cdot 2 + 30 \cdot 2}{8} = 25,75 \text{ goles}$$

b) Ya que las medias son distintas, para comprobar la regularidad de cada uno debemos calcular el *CV*:

$$s_1 = +\sqrt{\frac{24^2 \cdot 3 + 25^2 \cdot 2 + 26^2 + 27^2 \cdot 2}{8} - 25{,}25^2} \approx 1{,}2 \Rightarrow CV_1 = \frac{1{,}2}{25{,}25} \approx 0{,}05$$

$$s_2 = +\sqrt{\frac{20^2 + 21^2 + 22^2 + 27^2 + 28^2 \cdot 2 + 30^2 \cdot 2}{8} - 25{,}75^2} \approx 3{,}83 \Rightarrow CV_2 = \frac{3{,}83}{25{,}75} \approx 0{,}15$$

Por tanto, es más regular en su tanteo el equipo 1, ya que su *CV* es menor.

13.58 Se ha realizado una encuesta entre los alumnos de un colegio de Enseñanza Primaria con el objeto de conocer el número de horas semanales que ven la televisión. El estudio arroja la siguiente información: el número de horas del 95% de los alumnos se encuentra en el intervalo (3,18; 17,1). Calcula la media aritmética y la desviación típica.

El intervalo que contiene el 95% de los datos de una distribución es ($\bar{x} - 2s$, $\bar{x} + 2s$). Sustituyendo los datos del enunciado obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} \bar{x} - 2s = 3{,}18 \\ \bar{x} + 2s = 17{,}1 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = 10{,}14;\ s = 3{,}48$$

AMPLIACIÓN

13.59 Completa la siguiente distribución con dos datos más de forma que:

4, 6, 7, 7, 9, 9

a) Se conserve la media, pero la desviación típica aumente.

b) Se conserve la media, pero la desviación típica disminuya.

a) Para que se conserve la media y aumente la desviación típica, podemos añadir los datos 3 y 9.

b) Para que se conserve la media y disminuya la desviación típica, podemos añadir los datos 6 y 6.

13.60 Dadas las distribuciones:

Variable *A*

x_i	f_i
1	3
3	7
5	11
7	18
9	21

Variable *B*

x_i	f_i
1	15
3	7
5	15
7	8
9	15

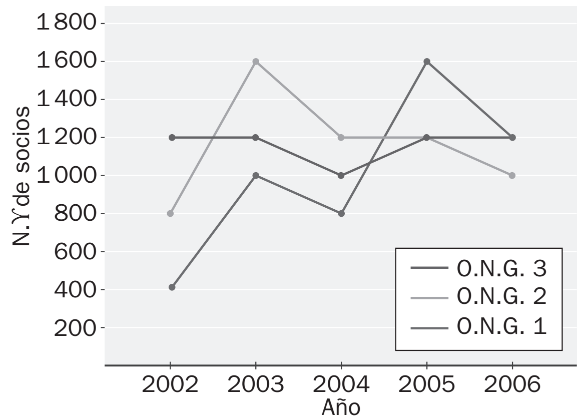
Variable *C*

x_i	f_i
1	5
3	12
5	25
7	14
9	4

¿En cuál de ellas se puede decir que en el intervalo ($\bar{x} - s$, $\bar{x} + s$) se encuentra el 68% de los datos? ¿Por qué?

La tercera variable es la única donde se puede asegurar dicha afirmación, ya que es simétrica y unimodal. En la primera variable no se puede garantizar por ser asimétrica, y en la segunda tampoco por ser trimodal.

13.61 Los siguientes diagramas lineales muestran la evolución del número de socios de tres ONG en los últimos cinco años.



a) Calcula el coeficiente de variación de cada una de ellas.

b) ¿Cuál tiene mayor variabilidad en el número de socios? ¿Por qué?

a) De la gráfica se deduce la tabla de frecuencias para cada ONG.

ONG 1

x_i	f_i
400	1
800	1
1000	1
1200	1
1600	1
	5

$$\bar{x} = \frac{400 + 800 + 1000 + 1200 + 1600}{5} = 1000$$

$$s = +\sqrt{\frac{400^2 + 800^2 + 1000^2 + 1200^2 + 1600^2}{5} - 1000^2} = 400$$

$$CV = \frac{400}{1000} = 0{,}4 = 40\%$$

ONG 2

x_i	f_i
800	1
1000	1
1200	2
1600	1
	5

$$\bar{x} = \frac{800 + 1000 + 2 \cdot 1200 + 1600}{5} = 1160$$

$$s = +\sqrt{\frac{800^2 + 100^2 + 2 \cdot 1200^2 + 1600^2}{5} - 1160^2} = 265{,}32$$

$$CV = \frac{265{,}32}{1160} = 0{,}23 = 23\%$$

ONG 3

x_i	f_i
1000	1
1200	4
	5

$$\bar{x} = \frac{1000 + 4 \cdot 1200}{5} = 1160$$

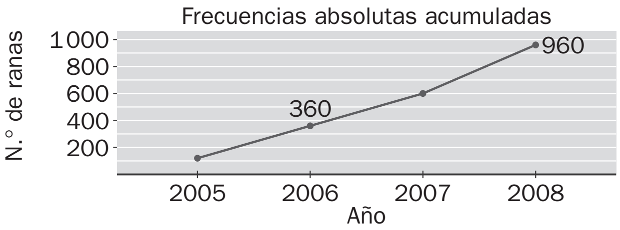
$$s = +\sqrt{\frac{1000^2 + 4 \cdot 1200^2}{5} - 1160^2} = 80$$

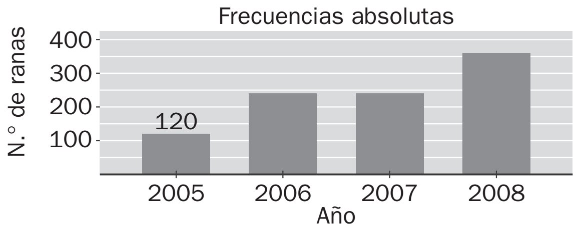
$$CV = \frac{80}{1160} = 0{,}07 = 7\%$$

b) La ONG 1 tiene mayor variabilidad, pues su coeficiente de variación es superior al de las otras dos ONG.

13.62 Población de ranas

Los siguientes gráficos estadísticos representan la misma distribución: la evolución de la población de ranas en un estanque durante los cuatro veranos que van desde el año 2005 hasta el 2008.





Completa la tabla con ayuda de los gráficos.

	F. absoluta	F. acumulada
2005	120	120
2006	240	360
2007	240	600
2008	360	960
Total	960	

13.63 Media aritmética y media geométrica

Como sabes, la media aritmética de dos números *a* y *b* se calcula mediante la expresión:

$$\bar{x} = \frac{a + b}{2}$$

Pero este valor no es el único parámetro estadístico de centralización. La media geométrica es también otro valor que sirve para representar los datos. Se calcula mediante la expresión:

$$x_g = \sqrt{a \cdot b}$$

a) Completa la siguiente tabla:

Datos		Media aritmética	Media geométrica
a	***b***		
1	**9**		
6	**24**		
5	**5**		
4	**0**		
−2	**18**		

b) Indica alguna desventaja que aprecies para la utilización de la media geométrica.

c) Recordando que el cuadrado de cualquier número es positivo o nulo, y el desarrollo de la expresión $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$, demuestra que la media geométrica de dos números es inferior o igual que la media aritmética de los mismos.

a)

Datos		Media aritmética	Media geométrica
a	***b***		
1	**9**	5	3
6	**24**	15	12
5	**5**	5	5
4	**0**	2	0
−2	**18**	8	No definida

b) La media geométrica no está definida si uno de los dos valores es negativo. Además, si uno de los datos es nulo, su valor siempre será cero.

c) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} - 2\sqrt{ab} \geqslant 0 \Rightarrow a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$

13.A1 Esta tabla recoge los resultados de un atleta en las diez últimas pruebas de salto de longitud en que ha participado.

Longitud de salto (m)	N.º de saltos
[7,8; 7,9)	**1**
[7,9; 8,0)	**2**
[8,0; 8,1)	**3**
[8,1; 8,2)	**2**
[8,2; 8,3)	**2**

a) Halla la media, la moda, la mediana y el primer cuartil.

b) Calcula el rango y la desviación típica.

c) Representa los datos en un histograma.

a)

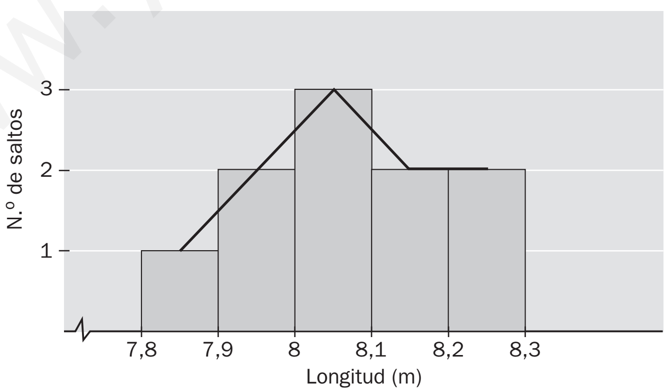
Longitud de salto (m)	Marca de clase	f_i	F_i
[7,8; 7,9)	7,85	1	1
[7,9; 8,0)	7,95	2	3 > 2,5
[8,0; 8,1)	8,05	3	6 > 5
[8,1; 8,2)	8,15	2	8
[8,2; 8,3)	8,25	2	10

$$\bar{x} = \frac{7{,}85 + 7{,}95 \cdot 2 + 8{,}05 \cdot 3 + 8{,}15 \cdot 2 + 8{,}25 \cdot 2}{1 + 2 + 3 + 2 + 2} = 8{,}07 \text{ m} \quad M_o = 8{,}05 \text{ m} \quad M = 8{,}05 \text{ m} \quad Q_1 = 7{,}95 \text{ m}$$

b) Rango = 8,25 − 7,85 = 0,4 mm

$$s = +\sqrt{\frac{7{,}85^2 + 7{,}95^2 \cdot 2 + 8{,}05^2 \cdot 3 + 8{,}15^2 \cdot 2 + 8{,}25^2 \cdot 2}{10} - 8{,}07^2} \approx 0{,}125$$

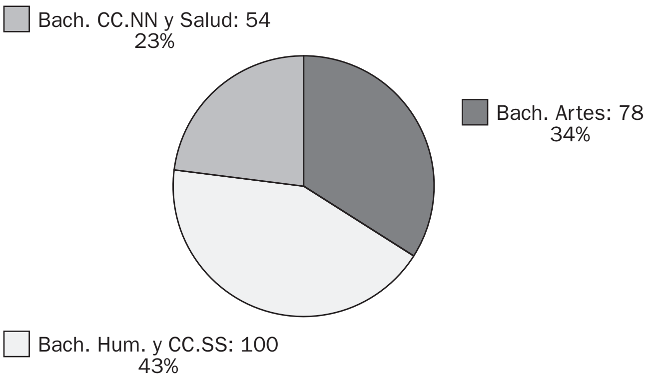
c) El histograma que se obtiene es el siguiente:



13.A2 Si la media de una distribución es $\bar{x}$ = 1,97 y la desviación típica es s = 0,08, halla el intervalo en el cual se encuentran el 99% de los datos de la distribución.

El intervalo que contiene el 99% de los datos de una distribución es ($\bar{x} - 3s$, $\bar{x} + 3s$). Por tanto, al sustituir los datos del enunciado en el intervalo obtenemos (1,73; 2,21), que es el intervalo pedido.

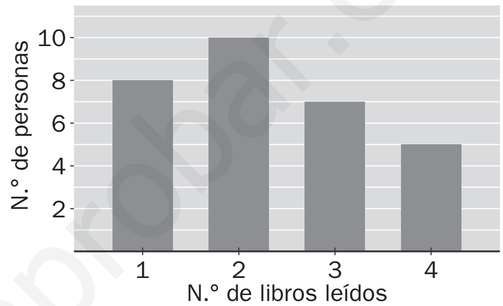
13.A3 **En las aulas de Bachillerato de un centro escolar hay 100 alumnos en la modalidad de Humanidades y CC. SS., 54 en la de CC. NN. y de la Salud, y 78 en la de Artes.**
Representa estos datos en un diagrama de sectores.



13.A4 **El siguiente diagrama de barras nos muestra el número de libros leídos en un año por las treinta personas que trabajan en una oficina.**

a) Calcula la media aritmética y la desviación típica.

b) ¿Cuál es el coeficiente de variación?



a)

Libros leídos x_i	N.° de personas f_i
1	8
2	10
3	7
4	5
	30

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 5}{30} = 2,3$$

$$s = +\sqrt{\frac{1^2 \cdot 8 + 2^2 \cdot 10 + 3^2 \cdot 7 + 4^2 \cdot 5}{30} - 2,3^2} \approx 1,04$$

b) $CV = \dfrac{1,04}{2,3} \approx 0,45 = 45\%$

MATETIEMPOS

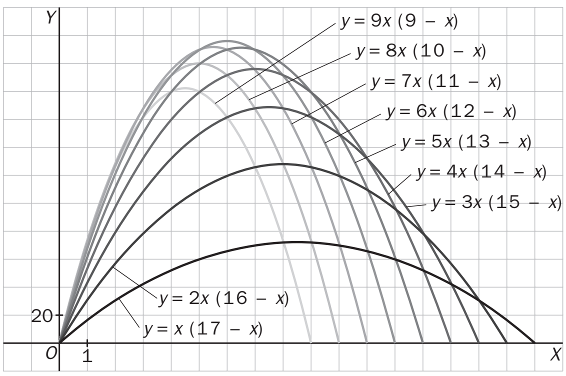
El equipaje de vuelo

Una compañía aérea tiene esta norma sobre la dimensión del equipaje que se puede transportar en sus aviones: "El equipaje de los pasajeros debe cumplir que la suma de sus tres dimensiones (largo, ancho y alto) no exceda de 1,80 metros". ¿Qué tamaño pueden tener las maletas para ser admitidas por esta compañía aérea?

El problema plantea la búsqueda de las dimensiones óptimas de un prisma sabiendo que la suma de las tres es de 1,80 m. Por comodidad, trabajaremos con decímetros, luego $a + b + c = 18 \Rightarrow c = 18 - a - b$.

De todos los prismas posibles, buscamos el de mayor volumen. Este será: $V = abc = ab(18 - a - b) = 18ab - a^2b - ab^2$.

b	1	2	3	4	5	...
$v(a)$	$a(17 - a)$	$2a(16 - a)$	$3a(15 - a)$	$4a(14 - a)$	$5a(13 - a)$	...



Si construimos una gráfica (con la ayuda de una calculadora gráfica) para cada valor de b entre 1 y 9, tenemos todas las posibilidades:

El máximo se produce cuando $a = 6$, $b = 6$ y $c = 18 - 6 - 6 = 6$. Luego las dimensiones óptimas serán:

$a = 6$ dm $= 60$ cm

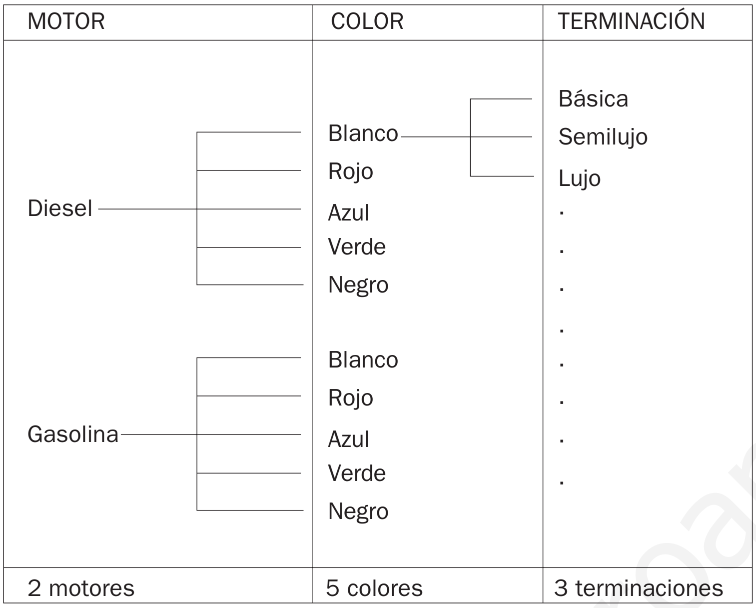
$b = 6$ dm $= 60$ cm

$c = 6$ dm $= 60$ cm

EJERCICIOS PROPUESTOS

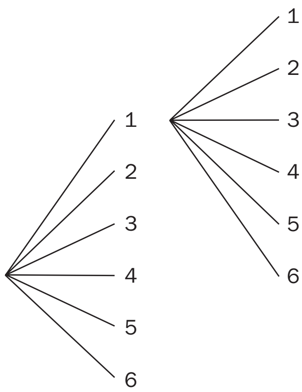
14.1 Un determinado modelo de automóvil se fabrica con dos tipos de motores: diésel y gasolina. En cinco colores: blanco, rojo, azul, verde y negro, y con tres terminaciones: básica, semilujo y lujo. ¿Cuántos modelos diferentes se fabrican?

Formamos el siguiente diagrama de árbol.



Por tanto, se fabrican 30 modelos diferentes de coches.

14.2 Se lanzan al aire 2 dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6 y, cuando caen al suelo, se anota el resultado de la cara superior. Forma un diagrama en árbol para calcular los diferentes resultados que se pueden obtener. ¿Y si se lanzan tres dados cúbicos?



Por tanto, se pueden obtener $6 \cdot 6 = 36$ resultados diferentes.

Para el caso de tres dados, el número de resultados diferentes que se pueden obtener es: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

14.3 Un partido político tiene 18 candidatos para formar las listas de unas elecciones. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar a los 4 primeros de las listas?

Se trata de obtener las variaciones sin repetición de 18 elementos tomados de 4 en 4:

$V_{18,4} = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 73\,440$ formas

14.4 En una clase con 30 alumnos, se van a elegir el delegado, el subdelegado y el secretario. ¿De cuántas formas se pueden asignar los tres cargos?

Se trata de obtener las variaciones sin repetición de 30 elementos tomados de 3 en 3:

$V_{30,3} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360$ formas

14.5 ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5?

Se trata de obtener las variaciones con repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3:

$VR_{5,3} = 5^3 = 125$ números

14.6 ¿Cuántos números de tres formas se pueden formar con los dígitos del 0 al 9?

Como ha de ser un número de tres dígitos, el primer dígito tiene que ser distinto de 0. Así que el primer dígito puede ser cualquier cifra del 1 al 9, y el segundo y el tercer dígito pueden ser cualquier cifra del 0 al 9.

Luego habrá $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números distintos.

14.7 En España, las matrículas de los coches están representadas por 4 números, repetidos o no, seguidos de tres letras consonantes repetidas o no, exceptuando la ñ, q, ll y ch. ¿Cuántos coches se podrán matricular con este sistema?

Formaciones diferentes de los 4 números: $VR_{10,4} = 10^4$.

Formaciones diferentes de las 26 letras: $VR_{26,3} = 26^3$.

Matrículas diferentes que se pueden formar $= 10^4 \cdot 26^3 = 175\,760\,000$.

14.8 Calcula las siguientes operaciones con factoriales.

a) 5! **b) $\frac{6!}{4!}$** **c) $\frac{9!}{7!}$** **d) $\frac{10!}{6! \cdot 4!}$**

a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

b) $\frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

c) $\frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 9 \cdot 8 = 72$

d) $\frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$

14.9 Pedro tiene que colocar en una estantería 24 libros y un diccionario.

a) ¿De cuántas formas diferentes los puede colocar?

b) ¿De cuántas maneras distintas los puede ordenar si quiere que el diccionario quede siempre el primero por la izquierda?

a) Se trata de hallar las diferentes maneras de ordenar 25 elementos; por tanto, $P_{25} = 25! = 1{,}55 \cdot 10^{25}$.

b) Se coloca el diccionario a la izquierda, y se trata de hallar las diferentes maneras de ordenar 24 elementos; por tanto, $P_{24} = 24! = 6{,}2 \cdot 10^{23}$.

14.10 ¿Cuántos números diferentes se pueden obtener si permutamos de todas las formas posibles las cifras del número 2323? Escríbelos.

Se trata de obtener el número de permutaciones con repetición de 4 elementos que se repiten 2 veces cada uno:

$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ formas

Los números son los siguientes: 2233, 2323, 2332, 3223, 3232 y 3322.

14.11 ¿De cuántas formas distintas se puede alinear ocho signos más y seis signos menos?

Se trata de obtener el número de permutaciones con repetición de 14 elementos que se repiten 8 y 6 veces:

$P_{14}^{6,8} = \frac{14!}{6! \cdot 8!} = 3003$ formas

14.12 Escribe el enunciado de un problema que se resuelva calculando las $P_6^{1,2,3}$.

¿Cuántos números diferentes se pueden obtener al permutar de todas las formas posibles las cifras del número 888776?

Para resolver el problema es necesario obtener el número de permutaciones con repetición de 6 elementos que se repite un elemento tres veces, otro elemento dos veces y un elemento una vez.

$$P_6^{1,2,3} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60 \text{ formas}$$

14.13 En una bolsa hay cuatro bolas blancas y tres negras. Se sacan las bolas una a una. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener?

Se trata de obtener el número de permutaciones con repetición de 7 elementos que se repiten 4 y 3 veces:

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35 \text{ resultados distintos}$$

14.14 Se añade una bola a la bolsa del ejercicio anterior y se repite el experimento. Calcula cuántos resultados distintos se pueden conseguir dependiendo del color de la nueva bola.

Si la bola es blanca, se trata de obtener el número de permutaciones con repetición de 8 elementos que se repiten 5 y 3 veces:

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56 \text{ resultados distintos}$$

Si la bola es negra, se trata de obtener el número de permutaciones con repetición de 8 elementos que se repiten 4 veces cada uno:

$$P_8^{4,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70 \text{ resultados distintos}$$

14.15 Se han reunido 5 amigos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado si se han saludado todos entre sí?

Como no influye el orden, se trata de hallar el número de combinaciones de 5 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{5,2} = \frac{V_{5,2}}{P_2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ saludos}$$

14.16 ¿Cuántas carreteras hay que construir para comunicar siete pueblos de manera que cada dos pueblos queden unidos por una carretera?

Se trata de hallar el número de combinaciones de 7 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{7,2} = \frac{V_{7,2}}{P_2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \text{ carreteras}$$

14.17 Una ONG dedicada a la conservación del medio ambiente necesita elegir entre sus 96 miembros un equipo compuesto por 4 personas. ¿Cuántos equipos diferentes se pueden formar?

Se trata de hallar el número de combinaciones de 96 elementos tomados de 4 en 4.

$$C_{96,4} = \frac{V_{96,4}}{P_4} = \frac{96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 3\,321\,960 \text{ equipos}$$

14.18 Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar? ¿Y cuántos números de cuatros cifras diferentes se pueden formar?

Números de cinco cifras:

Como influye el orden e intervienen todos los elementos, se trata de una permutación de 5 elementos:

$P_5 = 5! = 120$ números

Números de cuatro cifras:

Como influye el orden, no intervienen todos los elementos y estos no se pueden repetir, se trata de obtener las variaciones sin repetición de 5 elementos tomados de 4 en 4:

$V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ números

14.19 ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 12 alumnos en los cuatro asientos de la primera fila de una clase? ¿Y si el primer puesto está reservado siempre para el delegado?

Hay 12 alumnos y hay que seleccionar a 4. Como no influye el orden, se trata de calcular el número de combinaciones de 12 elementos tomados de 4 en 4:

$$C_{12,4} = \frac{V_{12,4}}{P_4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495 \text{ formas}$$

Si el primer puesto está reservado para el delegado, hay que seleccionar 3 alumnos de un grupo de 11. Como no influye el orden, se trata de calcular el número de combinaciones de 11 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{11,3} = \frac{V_{11,3}}{P_3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165 \text{ formas}$$

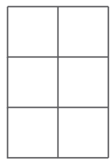
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

14.20 En un tablero de ajedrez un rey hace un recorrido desde la casilla *A*-1 hasta la casilla *H*-8, de forma que en cada paso va de una casilla a otra contigua de color diferente. ¿Cuántos caminos distintos puede seguir teniendo en cuenta que nunca retrocede?

La condición de ir alternando colores impide que el rey vaya en diagonal. Moviendo el rey, se puede comprobar que hay que hacer 7 movimientos hacia la derecha y 7 hacia abajo, es decir, 14 en total. No tiene sentido un movimiento hacia arriba o hacia la izquierda, que aleja del objetivo.

La solución, al igual que en el problema resuelto, es $P_{14}^{7,7} = \dfrac{14!}{7! \cdot 7!} = 3432$ caminos posibles.

14.21 En Braille se utiliza como base un rectángulo como el de la figura, en el que en cada casilla se puede colocar un punto en relieve o dejarla vacía. Si cada combinación representa un carácter, ¿cuántos se pueden representar?



En cada rectángulo se pueden colocar 0, 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 puntos.

Colocando 0 puntos hay 1 posibilidad.

Colocando un punto, hay que dejar cinco huecos libres y uno ocupado. Por tanto, se trata de una permutación con repetición de 6 elementos, donde un elemento se repite una vez y otro se repite cinco veces.

$$P_6^{1,5} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = 6 \text{ posibilidades}$$

Colocando dos puntos, hay que dejar cuatro huecos libres y dos ocupados. Por tanto, se trata de una permutación con repetición de 6 elementos, donde un elemento se repite dos veces y otro se repite cuatro veces.

$$P_6^{2,4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15 \text{ posibilidades}$$

Colocando tres puntos, hay que dejar tres huecos libres y tres ocupados. Por tanto, se trata de una permutación con repetición de 6 elementos, donde cada elemento se repite tres veces.

$$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20 \text{ posibilidades}$$

Colocando cuatro puntos, hay que dejar dos huecos libres y cuatro ocupados. Por tanto, se trata de una permutación con repetición de 6 elementos, donde un elemento se repite dos veces y otro se repite cuatro veces.

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15 \text{ posibilidades}$$

Colocando cinco puntos, hay que dejar un hueco libre y cinco ocupados. Por tanto, se trata de una permutación con repetición de 6 elementos, donde un elemento se repite una vez y otro se repite cinco veces.

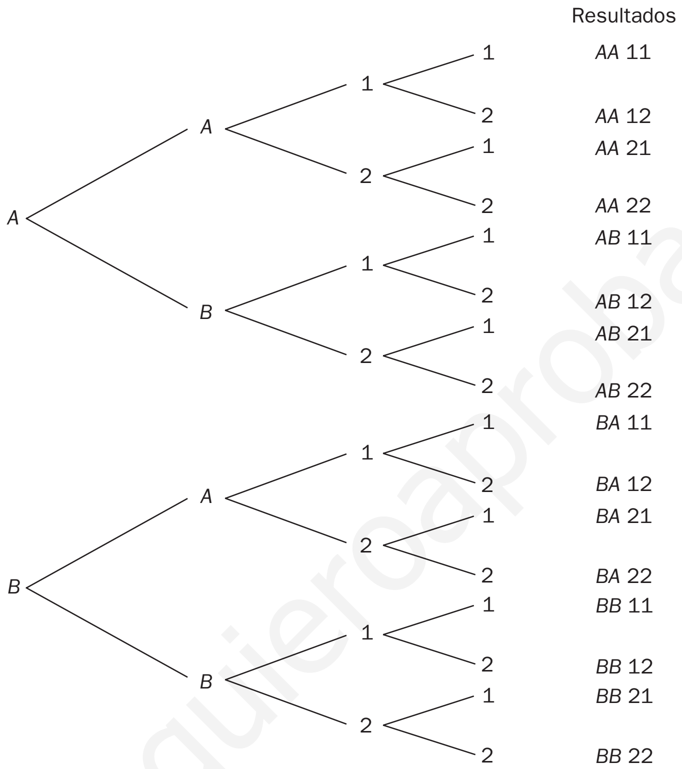
$$P_6^{1,5} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = 6 \text{ posibilidades}$$

En total hay $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$ posibilidades.

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

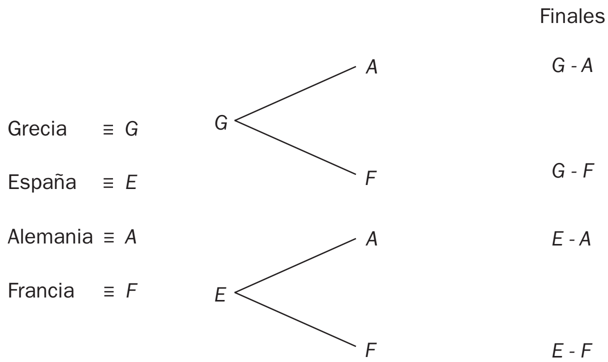
Diagrama en árbol. Recuento

14.22 El código de un candado consta de 2 letras (*A* y *B*) y de 2 números (1 y 2). Realiza el diagrama en árbol y calcula el número de códigos posibles.

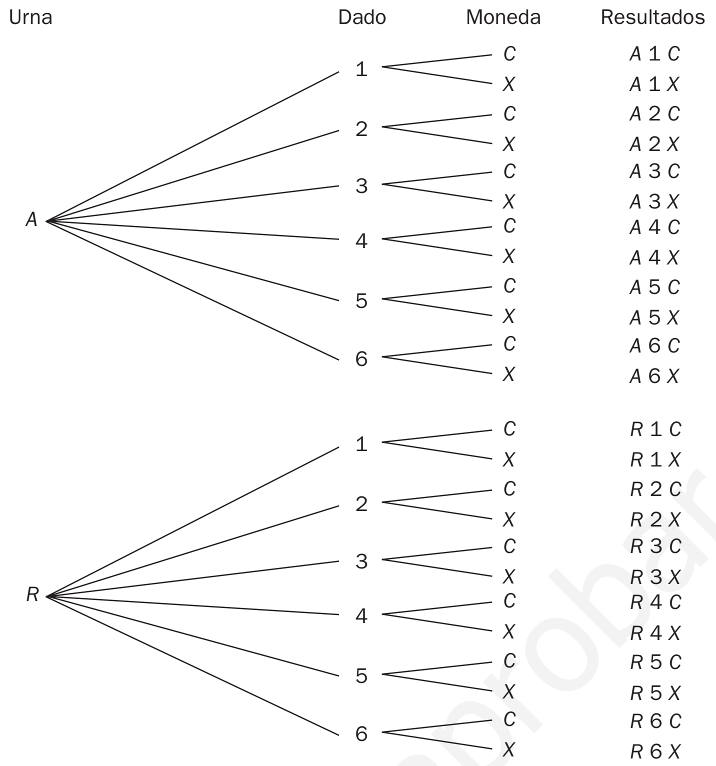


Número de códigos posibles: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

14.23 Los partidos de semifinales de una competición europea de baloncesto son Grecia-España y Alemania-Francia. Dibuja el diagrama en árbol correspondiente a las posibles finales.



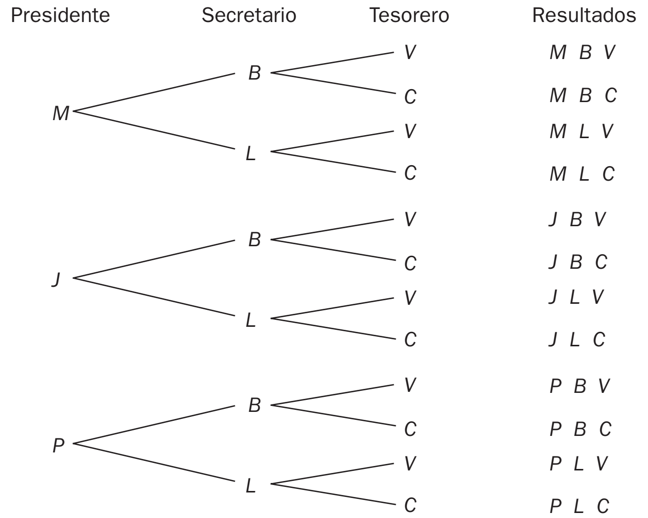
14.24 Utilizando un diagrama en árbol, calcula el número de resultados posibles al extraer una bola de una urna que contiene una azul y otra roja, y a la vez que se lanza un dado cúbico y una moneda.



Número de resultados posibles: $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$.

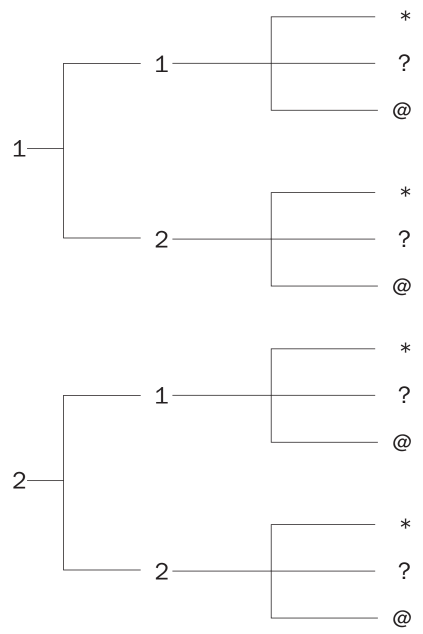
14.25 Una ONG quiere escoger una nueva junta directiva. Al cargo de presidente optan 3 personas: María, Julia y Pedro; al de secretario, 2: Belén y Luis, y al de tesorero, otras 2: Vanesa y Carlos. Representa en un diagrama en árbol todas las posibilidades de elección.

María ≡ *M*
Julia ≡ *J*
Pedro ≡ *P*
Belén ≡ *B*
Luis ≡ *L*
Vanesa ≡ *V*
Carlos ≡ *C*



Número de elecciones posibles: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

14.26 El código de la taquilla del instituto de Zaira está formado, en primer lugar, por 2 números (1 y 2) y, posteriormente, por 3 símbolos (*, ?, @). Con ayuda de un diagrama en árbol, describe y calcula el número de posibles códigos que se pueden utilizar para abrir la taquilla.



Número de códigos posibles: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Permutaciones, variaciones y combinaciones

14.27 Un chico coloca cada día los libros de texto en su estantería al llegar a casa. En ella dispone los 6 libros que utiliza con mayor frecuencia.

¿Cuántas ordenaciones distintas puede realizar?

Número de ordenaciones distintas: $P_6 = 6! = 720$

14.28 Con las letras de la palabra FLAMENCO, ¿cuántos grupos diferentes de 8 letras se pueden formar?

Grupos diferentes de 8 letras: $P_8 = 8! = 40\,320$

14.29 En un juego de azar se eligen 6 números del 1 al 49, ambos inclusive.

¿Cuántas jugadas distintas pueden efectuarse?

Número de jugadas distintas: $C_{49,\,6} = \dfrac{49!}{6!\,43!} = 13\,983\,816$

14.30 El AVE que une las ciudades de Madrid y Zaragoza está formado por 6 vagones: 4 de clase turista y 2 de *business class*.

¿De cuántas formas posibles pueden ordenarse los vagones detrás de la locomotora?

$P_6^{4,2} = \dfrac{6!}{4!\,2!}$ posibles ordenaciones de los vagones

14.31 La comida básica de un poblado está basada en el arroz, las judías, el maíz y la patata.

¿Cuántos platos distintos pueden realizar mezclando 3 alimentos a la vez?

Número de platos distintos: $C_{4,\,3} = \dfrac{4!}{3!\,1!} = 4$

14.32 El aula de informática de un instituto tiene 10 ventanas. Teniendo en cuenta que sus posiciones posibles son abiertas o cerradas, y que debe haber 6 abiertas y 4 cerradas, calcula el número de posiciones distintas que pueden tener las ventanas.

$P_{10}^{6,4} = \dfrac{10!}{6!\,4!}$ 30 posiciones de las ventanas

14.33 En un juego de cartas, una mano está compuesta por 4 naipes.

¿Cuántas manos distintas se pueden formar con una baraja española (40 cartas)?

Número de manos distintas: $C_{40,4} = \dfrac{40!}{4!\,36!} = 91\,390$

14.34 En una clase de 4.º de ESO se realiza la elección del delegado y del subdelegado entre 5 alumnos.

a) ¿Cuántos resultados posibles existen?

b) Si Juan Gómez es uno de los candidatos, ¿en cuántos de los resultados anteriores es elegido como subdelegado?

a) Resultados posibles: $V_{5,\,2} = 5 \cdot 4 = 20$

b) Juan Gómez sería subdelegado con 4 posibles delegados; por tanto, estaría en 4 elecciones.

14.35 En un juego de mesa se utilizan 15 tarjetas de 3 colores distintos.

Si cada uno de los chicos coge 3 tarjetas, ¿cuántas posibilidades hay de que los dos tengan la misma combinación de colores?

Número de posibilidades de que los chicos tengan la misma combinación: $P_3 = 3! = 6$

14.36 Cierto alfabeto está formado por los siguientes símbolos: %, $, € y @.

¿Cuántas posibles palabras de 8 símbolos se pueden formar teniendo en cuenta que debe haber dos símbolos de cada tipo?

$P_8^{2,2,2,2} = \dfrac{8}{2!2!2!2!} = 2520$ posibles palabras

14.37 El diseño de un nuevo circuito de velocidad debe incluir 9 curvas, de las que cuatro deben ser hacia la derecha y cinco hacia la izquierda.

¿De cuántas formas distintas pueden distribuirse las curvas en el circuito?

$P_9^{4,5} = \dfrac{9!}{4!\,5!} = 126$ disposiciones distintas de las curvas en el circuito

14.38 Los alumnos del último curso de un centro escolar desean formar una comisión con 3 alumnas y 2 alumnos para organizar el viaje de fin de curso. El número total de alumnas es de 25 y el de alumnos es de 20.

¿De cuántas formas distintas pueden completar dicha comisión?

Formas de completar la comisión: $C_{25,3} \cdot C_{20,2} = \binom{25}{3} \cdot \binom{20}{2} = \dfrac{25!}{22!\,3!} \cdot \dfrac{20!}{18!\,2!} = 437\,000$

14.39 **Con las letras de la palabra EUROPA, ¿cuántos grupos de 4 letras se pueden formar? ¿Cuántos de ellos acaban en vocal?**

Se pueden formar en total: $V_{6,\,4} = 360$ grupos de 4 letras. En vocal acaban: $4 \cdot V_{5,\,3} = 240$ grupos.

14.40 **Fayna dispone de 5 faldas, 4 camisetas y 3 pares de zapatos.**

¿Cuántas posibilidades tiene para elegir el conjunto que vestirá mañana? ¿En cuántas de ellas no intervienen ni el rojo ni el negro?

Posibilidades para elegir el conjunto que vestirá: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Posibilidades en las que no intervienen ni el rojo ni el negro: $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$.

14.41 **Halla el valor de x en estas igualdades.**

a) $3V_{x,2} = 10C_{x-1,2}$ **b)** $5V_{x,3} = V_{x+2,3}$ **c)** $\frac{12}{5}P_x^{2,3} = P_{x-1}$ **d)** $8P_{x+1}^{2,4} = P_x$

a) $3V_{x,2} = 10C_{x-1,2}$ ($x \neq 1, 2$, pues si no, $C_{x-1,2}$ no tendría sentido).

$$3 \cdot x \cdot (x-1) = 10 \cdot \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{2} \Rightarrow 3 \cdot x \cdot (x-1) = 5 \cdot (x-1) \cdot (x-2) \Rightarrow 3x = 5 \cdot (x-2) \Rightarrow x = 5$$

b) $5V_{x,3} = V_{x+2,3}$ ($x \neq 0$, pues si no, $V_{x+2,3}$ no tendría sentido).

$$5 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = (x+2) \cdot (x+1) \cdot x \Rightarrow 5 \cdot (x-1) \cdot (x-2) = (x+2) \cdot (x+1) \Rightarrow 5x^2 - 15x + 10 =$$

$$= x^2 + 3x + 2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 18x + 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4} = \begin{cases} 4 \\ 2/4 = 1/2 \end{cases}$$

Como $x = \frac{1}{2}$ no tiene sentido, entonces $x = 4$.

c) $\frac{12}{5}P_x^{2,3} = P_{x-1}$

$x \neq 1$, pues si no, P_{x-1} no tendría sentido. Además, $x = 2 + 3 = 5$ para que $P_x^{2,3}$ esté correctamente definido.

Veamos: $= \frac{12}{5} \cdot \frac{x!}{2! \cdot 3!} = (x-1)! \Rightarrow \frac{12}{5} \cdot \frac{x \cdot (x-1)!}{12} = (x-1)! \Rightarrow \frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5$

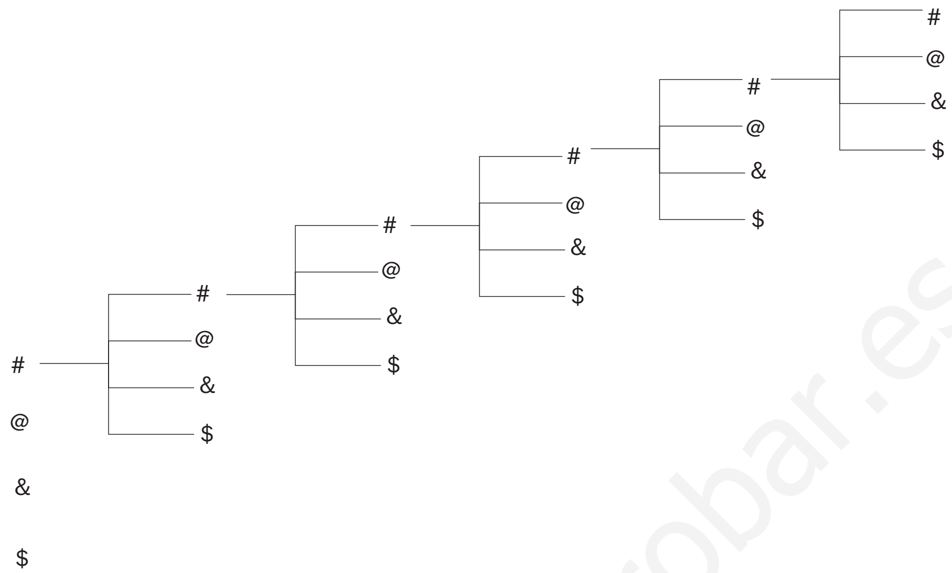
d) $8P_{x+1}^{2,4} = P_x$

$x \neq 0$, pues si no, P_x no tendría sentido. Además, para que $8P_{x+1}^{2,4}$ esté definido, $x + 1 = 2 + 4$, luego $x = 5$.

Veamos: $\frac{(x+1)!}{2! \cdot 4!} = x! \Rightarrow \frac{(x+1) \cdot x!}{6} = x! \Rightarrow \frac{x+1}{6} = 1 \Rightarrow x = 5$

14.42 Con estos símbolos: #, @, &, $, ¿cuántos posibles grupos de 6 símbolos se pueden formar teniendo en cuenta que no hace falta que intervengan todos?

Utiliza un diagrama en árbol y establece el recuento de resultados.



Se pueden formar todos los grupos de 6 elementos con 4 integrantes distintos, es decir, los grupos correspondientes a las $VR_{4,\,6} = 4096$.

14.43 ¿De qué forma se obtienen más grupos diferentes de 4 letras distintas: permutando las de la palabra CANOA o las de la palabra LIBRO? ¿Por qué?

Permutando las letras de la palabra LIBRO, ya que todas sus letras son distintas, y las P_5 palabras posibles son todas diferentes. La palabra CANOA, sin embargo, tiene dos letras iguales que generan palabras repetidas.

14.44 ¿Por qué 7! es múltiplo de 2, 3 y 5 a la vez?

$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow 7!$ es múltiplo de 2, 3 y 5 a la vez porque tiene estos tres números entre sus factores.

14.45 Si 9! = 362 880, calcula de forma inmediata el valor de 10! ¿Qué relación existe entre n! y (n + 1)!?

$10! = 10 \cdot 9! = 3\,628\,800$

Relación entre $n!$ y $(n+1)!$: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

14.46 Si $x! = 479\,001\,600$ y $(x-1)! = 43\,545\,600$, halla el valor de x.

$$11 = \frac{479\,001\,600}{43\,545\,600} = \frac{x!}{(x-1)!} = \frac{x \cdot (x-1)!}{(x-1)!} = x$$

14.47 ¿Tiene sentido calcular el número de variaciones de 3 elementos tomados de 5 en 5? Razona tu respuesta.

No, ya que es imposible formar grupos de 5 miembros con tan solo 3 integrantes si no se pueden repetir.

14.48 Con los dígitos 3, 5 y 9 se forman todos los números posibles de 4 cifras. ¿Cómo hallamos el número de resultados, con $VR_{3,\,4}$ o con $V_{4,\,3}$?

Con $VR_{3,\,4}$, pues es inevitable que haya repetición, al ser mayor el número de cifras que el número de los dígitos disponibles.

14.49 Relaciona en tu cuaderno las operaciones de la columna de la izquierda con la herramienta combinatoria correspondiente de la derecha.

$\mathbf{7^4}$	$\boldsymbol{P_7}$
$\mathbf{\dfrac{7!}{4!3!}}$	$\boldsymbol{VR_{7,\,4}}$
7!	$\boldsymbol{V_{7,\,4}}$
$\mathbf{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}$	$\boldsymbol{C_{7,\,4}}$

$7^4 = VR_{7,\,4}$ $\quad \dfrac{7!}{4!3!} = C_{7,4}$ $\quad 7! = P_7$ $\quad 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = V_{7,4}$

14.50 Calcula:

a) $\boldsymbol{V_{5,\,5}}$ **b)** $\boldsymbol{P_5}$ **c)** $\boldsymbol{P_8}$ **d)** $\boldsymbol{V_{8,\,8}}$

¿Qué observas? ¿Cuál es la relación entre las variaciones de *n* elementos tomados de *n* en *n* y las permutaciones de *n* elementos?

a) $V_{5,\,5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) $P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

d) $V_{8,\,8} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

Se observa que $V_{5,\,5} = P_5$ y que $P_8 = V_{8,\,8}$. Se deduce, pues, que, en general, $P_n = V_{n,\,n}$.

14.51 Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) En las variaciones con repetición no importa el orden.

b) En las variaciones sin repetición sí importa el orden.

c) En las permutaciones importa el orden.

d) En las combinaciones importa el orden.

a) Falso

b) Verdadero

c) Verdadero

d) Falso

14.52 a) ¿Qué relación existe entre $\boldsymbol{P_6^{2,4}}$, $\boldsymbol{C_{6,2}}$ y $\boldsymbol{C_{6,4}}$?

b) ¿Qué diferencia hay entre las permutaciones con repetición y las combinaciones?

c) ¿Cómo han de ser las permutaciones con repetición y las combinaciones para que ocurra lo del apartado a)?

a) Aplicando las fórmulas correspondientes a cada expresión, obtenemos:

$$P_6^{2,4} = \frac{6!}{4!2!} = 15\,;\ C_{6,2} = \frac{V_{6,2}}{P_2} = 15\,;\ C_{6,4} = \frac{V_{6,4}}{P_4} = 15$$

Por tanto, se deduce que valen lo mismo las tres expresiones.

b) En las permutaciones con repetición importa el orden a la hora de formar los grupos de elementos, mientras que en las combinaciones el orden no importa.

c) La estructura ha de ser la siguiente:

$P_n^{a,b} = C_{n,a}$ o $P_n^{a,b} = C_{n,b}$

14.53 **Una persona ha olvidado su clave de la tarjeta de crédito. Sólo recuerda que empieza por 9 y que es un número par.**

¿Qué posibilidad tiene de encontrarla sabiendo que las claves son de 4 cifras con posible repetición?

Las posibilidades en cada cifra son las siguientes: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$.

14.54 **En un intercambio cultural, el monitor responsable desea distribuir por parejas a los 24 alumnos que participan para completar los asientos del autobús que van a utilizar en los desplazamientos.**

¿De cuántas formas puede realizarlo?

Si hay 8 alumnos del mismo país, ¿en cuántas disposiciones estos 8 alumnos no están emparejados entre ellos?

En total hay $C_{24,\,2} = 276$ agrupamientos posibles.

En $C_{8,\,2} = 28$ de esos agrupamientos están los alumnos del mismo país juntos.

Por tanto, en $276 - 28 = 248$, los alumnos del mismo país están mezclados con el resto.

14.55 **Uniendo 5 vértices de un heptágono se obtiene un pentágono.**

¿Cuántos pentágonos distintos se pueden conseguir siguiendo este procedimiento?

Número de pentágonos: $C_{7,5} = \dfrac{7!}{2!\,5!} = 21$

14.56 **Los números escritos en base ocho solo permiten el uso de las cifras del 0 al 7.**

¿Cuántos números de 4 cifras escritos en dicha base tienen todas las cifras distintas?

Números de 4 cifras: $V_{8,4} = \dfrac{8!}{4!} = 1680$

14.57 **Un equipo de balonmano está formado por seis jugadores de campo y por un portero. Si un entrenador dispone de 12 jugadores de campo y de 2 porteros, ¿cuántas alineaciones distintas puede completar?**

Número de alineaciones distintas: $2 \cdot C_{12,6} = \dfrac{12!}{6!\,6!} = 1848$

14.58 **La contraseña de acceso a la cuenta de cierto correo electrónico está formada por 8 caracteres: los 5 primeros son dígitos del 1 al 9, y los 3 últimos son vocales.**

¿Cuántas contraseñas distintas se pueden formar?

Número de contraseñas distintas: $VR_{9,5} \cdot VR_{5,3} = 9^5 \cdot 5^3 = 7\,381\,125$

14.59 **Un programa de ordenador descifra claves secretas en tiempo récord. Una agencia de investigación necesita descubrir un código de 5 dígitos y 3 letras (y en ese orden).**

Sabiendo que emplea una milésima de segundo en analizar cada código, ¿cuántos días tardará en desvelar el código secreto?

Número de códigos posibles: $VR_{10,5} \cdot VR_{27,3} = 10^5 \cdot 27^3 = 1\,968\,300\,000$

El tiempo que se tarda en descifrarlos será igual a:

$1\,968\,300\,000 \cdot 0{,}001 = 1\,968\,300$ segundos $= 22{,}8$ días, aproximadamente

14.60 **La codificación de los libros de una biblioteca se establece de la siguiente manera: los 3 primeros dígitos del código hacen referencia a la sección a la que pertenecen; los 2 siguientes, al número de la estantería en la que se encuentran, y los 2 últimos, a la posición que ocupan dentro de dicha estantería.**

Teniendo en cuenta que se utilizan las cifras del 0 al 9, ¿cuántos libros se pueden codificar?

Número de libros que se pueden codificar: $VR_{10,7} = 10^7 = 10\,000\,000$.

14.61 **Entre las actividades de fin de curso de un centro se organiza un partido y se premia a quien adivine el resultado del encuentro. Contabiliza todos los tanteos que en principio se pueden producir si se ha decidido imponer un tope de 7 goles por equipo.**

Si han apostado 4 personas por cada resultado y cada apuesta cuesta un euro, ¿cuánto recibe cada uno de los que ganen?

Tanteos posibles: $VR_{8,\,2} = 8^2 = 64$.

Dinero recaudado: $64 \cdot 4 = 256$ €.

Por tanto, cada uno de los cuatro ganadores recibirá $256 : 4 = 64$ €.

14.62 **Con las 27 letras independientes del alfabeto:**

a) ¿Cuántos grupos de 5 letras distintas se pueden formar?

b) ¿Cuántos empiezan y terminan con vocal?

c) ¿Cuántos empiezan por consonante y terminan con vocal?

a) Grupos de 5 letras distintas: $V_{27,\,5} = 9\,687\,600$

b) Grupos que empiezan y terminan con vocal:

$V_{25,\,5}$ (las 3 letras del centro) $\cdot$ $V_{5,2}$ (las posibles ordenaciones de las 5 vocales en el inicio y final) $= 276\,000$

c) Grupos que empiezan por consonante y terminan con vocal:

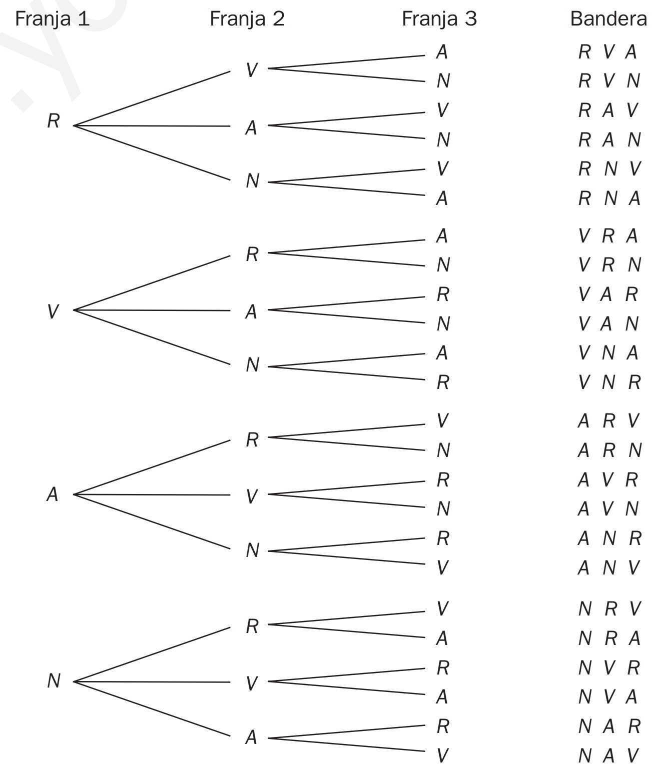
22 (posibles consonantes) $\cdot$ $V_{25,\,3}$ (ordenaciones en puestos del centro de todas las letras menos 2) $\cdot$ 5 (posibles vocales al final) $= 1\,518\,000$

REFUERZO

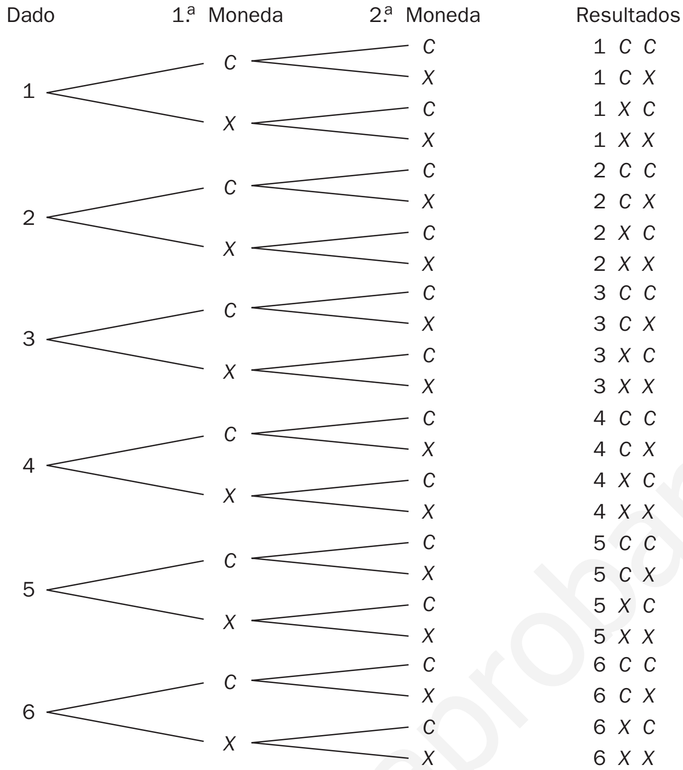
Diagramas de árbol

14.63 **Disponemos de los colores rojo, verde, amarillo y negro para formar todas las banderas posibles con 3 franjas verticales.**

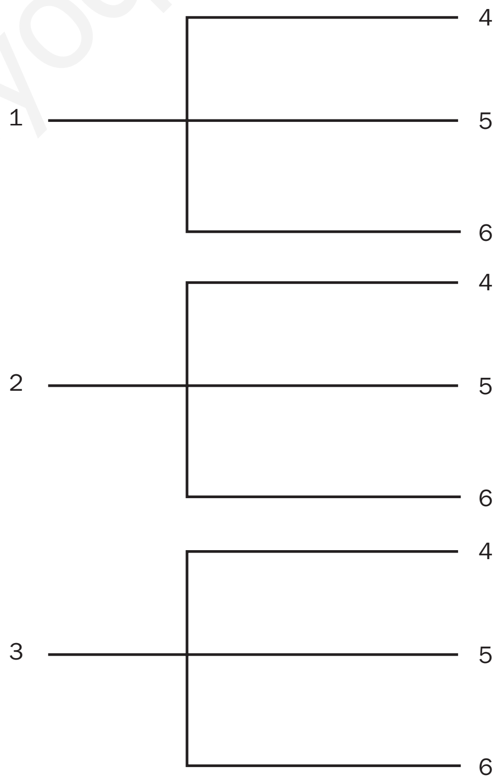
Dibuja un diagrama en árbol que represente todas las banderas resultantes de tal manera que no se repitan colores en la misma bandera.



14.64 Dibuja el diagrama en árbol correspondiente a lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6 y dos monedas de un euro.



14.65 Hacemos girar una ruleta que contiene números del 1 al 3, y a continuación otra con los números del 4 al 6. Calcula cuántos números de dos cifras se pueden formar al girar cada ruleta, en el orden indicado. Forma un diagrama de árbol que ilustre este experimento.



Hay $3 \cdot 3 = 9$ números.

Permutaciones, variaciones y combinaciones

14.66 a) ¿Cuántos números distintos de 6 cifras existen en los que aparezca dos veces el 3, dos veces el 4 y dos el 5?

b) ¿Cuántos de esos números son pares?

a) $P_6^{2,2,2} = \dfrac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$ números distintos

b) La única manera de que sean pares es que acaben en 4; por tanto, *fijamos* uno de los cuatros en la última posición, y obtenemos:

$P_5^{2,2,1} = \dfrac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$ números son pares

14.67 Cierta comarca está formada por 15 pueblos, y todos sus ayuntamientos deciden rehabilitar sus carreteras.

Si todas las localidades se encuentran comunicadas entre sí, ¿cuántas carreteras deberán rehabilitarse?

Número de carreteras que se deben rehabilitar: $C_{15,2} = \dfrac{15!}{2!\,13!} = 105$

14.68 ¿De cuántas maneras se pueden sentar 7 amigos que acuden a un concierto de música clásica en una fila de 7 butacas?

Formas de sentarse: $P_7 = 7! = 5040$

14.69 En una bolsa hay 8 bolas numeradas del 1 al 8. Extraemos una, anotamos su número y la devolvemos a la bolsa. Repetimos la operación 3 veces.

¿Cuántos resultados distintos se pueden dar?

Número de resultados distintos: $VR_{8,3} = 8^3 = 512$

14.70 Con las cifras impares:

a) ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar?

b) ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se pueden conseguir?

c) ¿Cuántos productos de 3 factores distintos se pueden realizar?

Tenemos 5 cifras impares {1, 3, 5, 7, 9}.

a) Números de 3 cifras distintas: $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) Números de 5 cifras diferentes: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) Productos de 3 factores distintos: $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3!\,2!} = 10$

14.71 Se define un *byte* como una combinación de 8 dígitos que solo pueden ser ceros y unos. ¿Cuántos *bytes* distintos hay que tengan 6 ceros y 2 unos? ¿Cuántos de estos *bytes* terminan en 1?

El número de *bytes* que podemos formar con esas condiciones es: $P_8^{6,2} = \dfrac{8!}{6!\,2!} = 28$

Para que acaben en uno, en la última posición *fijamos* uno de los unos, y obtenemos:

$P_7^{6,1} = \dfrac{7!}{6!\,1!} = 7$ *bytes* que terminen en uno.

14.72 Con los números del 1 al 6 (ambos inclusive), ¿cuántos números de 3 cifras distintas pueden formarse que sean divisibles por 3?

Podrán formarse $8 \cdot 3! = 48$ números de 3 cifras distintos.

14.73 ¿Cuántos números capicúas de 4 cifras existen? ¿Cuántos son pares? ¿Cuántos son múltiplos de 5? ¿Cuántos son menores que 3200?

Números capicúas de 4 cifras: $VR_{10,\,2} = 10^2 = 100$. Ahora, $100 - 10$ (los que empiezan por 0) $= 90$.

Números capicúas pares: $4 \cdot 10 = 40$

Números capicúas múltiplos de 5 son solo los que terminan por 5. Hay 10 que empiezan o terminan por 5.

Números capicúas menores que 3200 son los que empiezan por 1 (hay 10), los que empiezan por 2 (hay 10) y los que empiezan por 31 (hay 1). En total tendremos 21.

14.74 De todos los resultados posibles al lanzar 3 dados cúbicos, ¿en cuántos de ellos aparece al menos un 5?

Todas las posibilidades son: $VR_{6,\,3} = 6^3 = 216$.

(Salir al menos un cinco) U (Salir ningún cinco) = Total.

Salir ningún cinco: $VR_{5,\,3} = 5^3 = 125$.

Salir al menos un cinco: $216 - 125 = 91$.

14.75 Con las cifras impares 1, 3, 5, 7 y 9:

a) ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener al sumar las cifras de 3 en 3?

b) De los números de 5 cifras diferentes que se pueden formar, ¿cuántos son mayores que 70 000?

c) ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden conseguir? Averigua la suma de todos ellos.

a) Número de resultados distintos al sumar de 3 en 3 las cifras $= C_{5,\,3} = 10$.

b) De los números de 5 cifras diferentes que se pueden formar son mayores que 70 000: $2 \cdot P_4 = 48$.

c) Números de 3 cifras distintas $= V_{5,\,3} = 60$

Para calcular la suma de todos ellos:

Al ser números de tres cifras, serán de la forma *C D U* (centenas, decenas y unidades).

$$\sum U = V_{4,2} \cdot 9 + V_{4,2} \cdot 7 + V_{4,2} \cdot 5 + \ldots + V_{4,2} \cdot 1 = 300$$

$$\sum D = 10 \cdot 300 = 3000$$

$$\sum C = 100 \cdot 300 = 30000$$

$$\sum Total = 33\,300$$

14.76 Determina cuál de las siguientes relaciones es la correcta, siendo n un número natural mayor que 1, y justifica tu respuesta.

$\boldsymbol{n! < n^n}$ $\qquad$ $\boldsymbol{n! = n^n}$ $\qquad$ $\boldsymbol{n! > n^n}$

La relación correcta es la primera, ya que $n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}_{(n \text{ factores})} < n^n = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot n \ldots \cdot n}_{(n \text{ factores})}$

14.77 Halla todos los valores de n que verifican la siguiente igualdad. $\boldsymbol{\dfrac{P_n^{4,2,1}}{P_{n-2}^{2,2,1}} = \dfrac{21}{6}}$

$$\frac{\dfrac{n!}{4! \cdot 2! \cdot 1!}}{\dfrac{(n-2)!}{2! \cdot 2! \cdot 1!}} = \frac{21}{6} \Rightarrow \frac{\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{48}}{\dfrac{(n-2)!}{4}} = \frac{21}{6} \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1)!}{12} = \frac{21}{6} \Rightarrow n^2 - n + 42 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm 13}{2} = \begin{cases} 7 \\ -6 \end{cases}$$

Descartamos la solución $n = -6$, pues no tiene sentido. Luego $n = 7$.

14.78 El número de combinaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n* es igual a $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$, pero hay otra manera de calcular este número en la que la expresión obtenida depende solo de factoriales. Obtén esta fórmula y, a partir de ella, deduce una expresión para hallar las $V_{m,n}$ en la que solo aparezcan factoriales.

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} = \frac{m \cdot \ldots \cdot (m-n+1) \cdot (m-n)!}{n!\,(m-n)!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Por tanto, $C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

Partiendo de la expresión inicial, tenemos:

$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} \Rightarrow V_{m,n} = C_{m,n} \cdot P_n$, sustituyendo la expresión obtenida anteriormente, llegamos a:

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} \cdot n! = \frac{m!}{(m-n)!}$$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

14.79 Un nuevo lenguaje de programación

Un grupo de aficionados a la informática ha ideado un lenguaje de programación al que han llamado Artex. Las palabras reservadas en este lenguaje, que sirven para establecer todo tipo de órdenes de forma automática, son las que se obtienen al permutar las letras de *Artex*, y se clasifican en:

Tipo de orden	Empiezan por	Acaban en
Instrucciones aritméticas básicas	Consonante	Consonante
Instrucciones algebraicas	A	Consonante
Instrucciones condicionales	E	X
Instrucciones de iteración	E	Consonante distinta de X
Funciones y procedimientos	Vocal	Vocal

a) ¿Cuántas palabras reservadas diferentes tiene este lenguaje?

b) Calcula el número de órdenes de cada tipo que se pueden establecer.

c) ¿Existen palabras reservadas no utilizadas en ninguna de las órdenes? En caso afirmativo, calcula su número y descríbelas.

a) $P_5 = 5! = 120$ palabras reservadas diferentes

b) Instrucciones aritméticas básicas: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 36$

Instrucciones algebraicas: $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18$

Instrucciones condicionales: $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$

Instrucciones de iteración: $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$

Procedimientos y funciones: $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$

c) Hay $120 - 84 = 36$ permutaciones no utilizadas que corresponden con las palabras que empiezan por consonante y acaban por vocal. Es decir: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 36$.

14.80 Santi, Pilar, Ana, Rodrigo y Elena van a ir de viaje en un coche de 5 plazas con dos asientos delanteros y tres traseros.

Solo las chicas tienen el carnet de conducir y, además, Santi tiene que ir en los asientos delanteros porque se marea.

Teniendo en cuenta estas condiciones:

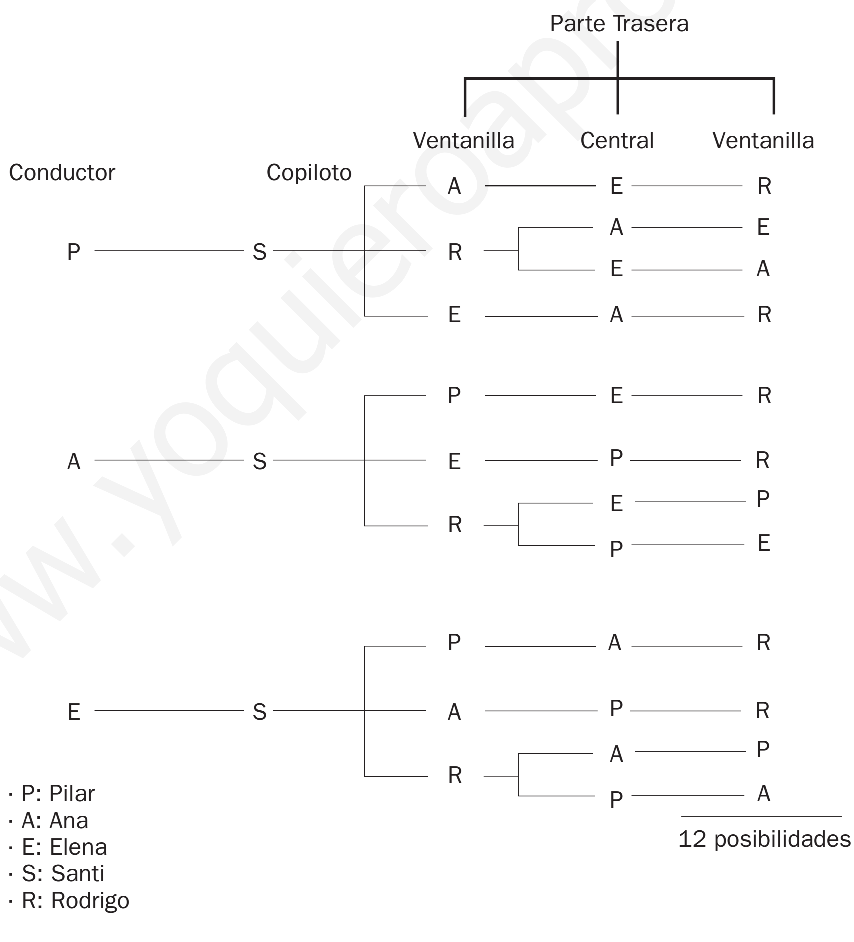
a) ¿De cuántas formas diferentes pueden ocupar los asientos del coche?

b) ¿En cuántas de estas formas irá Rodrigo sentado al lado de una de las cuatro ventanillas?

c) ¿En cuántos casos irá Ana sentada entre Pilar y Rodrigo?

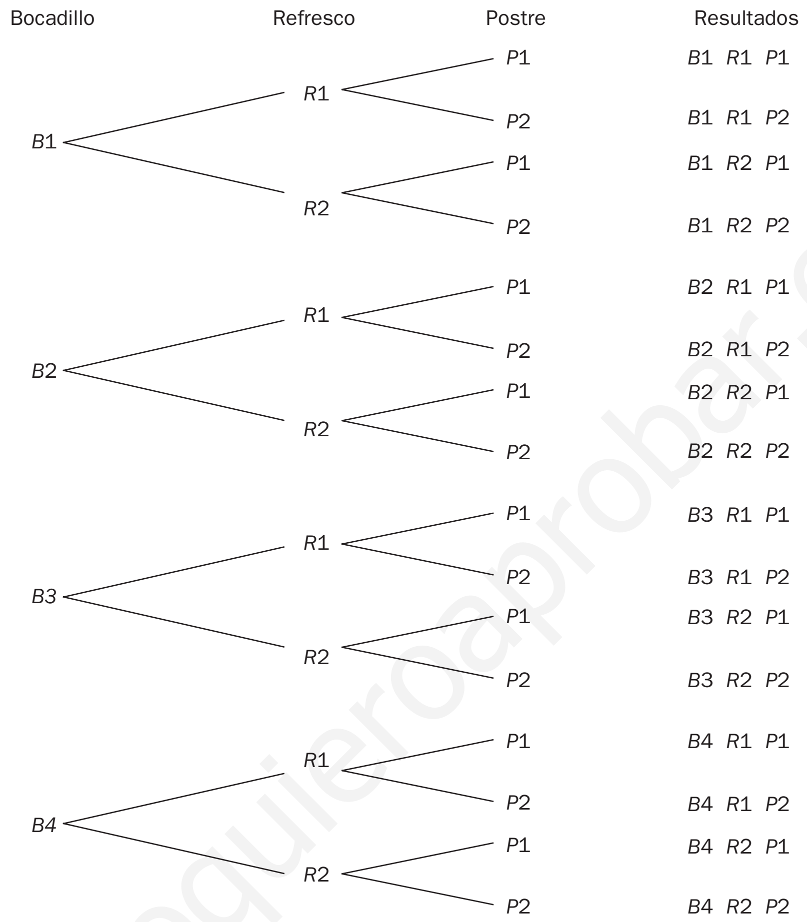
a) Santi debe ir en el asiento delantero y una chica conduciendo. Luego las posibilidades son: $3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$.

b) Hacemos el diagrama en árbol que describe esta situación:



c) Para que Ana vaya sentada entre Pilar y Rodrigo, estos tres deben ir en el asiento trasero del coche. Por tanto, Elena tiene que ir conduciendo, y Santi, en el asiento del copiloto. En el asiento trasero, para que se dé la condición del enunciado, pueden ir sentados Pilar-Ana-Rodrigo o Rodrigo-Ana-Pilar. Por tanto, hay dos posibilidades.

14.A1 Se organiza una fiesta solidaria con el fin de recaudar fondos para el centro de personas mayores del barrio. En dicha fiesta se disponen 4 tipos de bocadillos, 2 clases de refrescos y 2 postres. Dibuja el diagrama en árbol correspondiente a la elección de un bocadillo, un refresco y un postre. ¿Cuántas posibilidades distintas existen?



Hay $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ posibilidades distintas.

14.A2 La primera fila del palco presidencial de un estadio de fútbol se halla compuesta de 11 asientos. ¿De cuántas formas pueden completarse con los miembros de los equipos directivos de manera que los dos presidentes se sienten juntos?

Número de formas de sentarse de modo que los dos presidentes estén juntos: $2 \cdot P_{10} = 2 \cdot 10! = 7\,257\,600$

14.A3 Juan quiere irse de viaje el fin de semana, y dispone de 5 camisetas de las cuales desea llevar 3. ¿De cuántas formas distintas puede realizar la elección?

Número de formas distintas de hacer la elección: $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$

14.A4 ¿De cuántas formas diferentes se pueden escoger 3 figuras de entre todas las existentes en una baraja española de 40 cartas?

Número de formas distintas de hacer la elección: $C_{12,3} = \dfrac{12!}{3!\,9!} = 220$

14.A5 ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden constituir con los dígitos 2, 4, 6, 8 y 9? ¿Cuántos de ellos son pares? ¿Cuántos se podrían formar sin repetir ningún dígito?

Números de 4 cifras: $VR_{5,4} = 625$

Números pares: $4 \cdot VR_{5,3} = 500$

Números con cifras distintas: $V_{5,4} = 120$

14.A6 Calcula el valor de x en estas igualdades.

a) $V_{x,4} = 6V_{x,2}$

b) $P_x = 20P_{x,2}$

c) $P_x = 20P_{x-2}$

d) $V_{x,3} = 4C_{x+1,2}$

a) $\dfrac{x!}{(x-4)!} = 6 \cdot \dfrac{x!}{(x-2)!} \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 5$

b) $x! = 20 \cdot (x-2)! \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x = 5$

c) $x! = 20 \cdot (x-2)! \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x = 5$

d) $x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 4 \cdot \dfrac{(x+1) \cdot x}{2} \Rightarrow x = 5$

14.A7 Los 4 refugios de un parque natural están comunicados todos ellos dos a dos. ¿Cuántos caminos diferentes hay?

Caminos diferentes: $C_{4,2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$

14.A8 Los 7 miembros de un grupo *scout* llevan gorra, siendo 4 rojas y 3 azules. ¿Cuántas posibles ordenaciones por colores pueden hacer cuando caminan en fila?

Posibles ordenaciones $P_7^{4,3} = \dfrac{7!}{4!\,3!} = 35$

M A T E T I E M P O S

El precio de la gasolina

La capacidad media de un barril de petróleo es de 158,98 litros. El coste medio del barril en el mercado de Londres durante un determinado mes es de 70 dólares. Si el precio de la gasolina, en ese mismo mes, fue de 1 euro por litro y un dólar se cotizó a 0,7 euros, ¿cuál fue la diferencia entre el precio de coste y el de venta?

Precio de un litro de petróleo en dólares: $\dfrac{70}{158,98} = 0,4403$

Precio de un litro de petróleo en euros: $0,4403 \cdot 0,7 = 0,3082$

Diferencia, en euros, entre el precio de un litro de gasolina y el de un litro de petróleo: $1 - 0,3082 = 0,6918$

EJERCICIOS PROPUESTOS

15.1 En una bolsa hay 9 bolas numeradas del 1 al 9. Se saca una bola al azar y se anota su número.

a) Explica si el experimento es aleatorio.

b) Determina el espacio muestral.

c) Forma dos sucesos compuestos y sus contrarios.

a) El experimento es aleatorio, ya que, por muchas veces que se repita, nunca se sabrá el resultado que se va a obtener.

b) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

c) $A = \{2, 4, 5, 7\} \Rightarrow \overline{A} = \{1, 3, 6, 8, 9\}$

$B = \{1, 3, 6\} \Rightarrow \overline{B} = \{2, 4, 5, 7, 8, 9\}$

15.2 Se hace girar una ruleta que contiene 6 compartimentos numerados del 0 al 5 y se apunta el número donde se detiene la bola.

a) ¿Es aleatorio este experimento?

b) Determina el espacio muestral.

c) Forma los sucesos contrarios de $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y $C = \{3\}$.

a) El experimento es aleatorio, ya que, por muchas veces que se repita, nunca se puede predecir el resultado que se va a obtener en una próxima experiencia.

b) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $\overline{A} = \{0, 1, 3, 5\}$; $\overline{B} = \{2, 4\}$; $\overline{C} = \{0, 1, 2, 4, 5\}$

15.3 En el experimento del ejercicio resuelto anterior se considera también el suceso $C = \{5, 9, 12\}$.

a) Halla los sucesos $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap C$ y $B \cap C$.

b) Señala cuáles de los sucesos A, B y C son compatibles y cuáles incompatibles.

a) $A \cup C = \{2, 4, 5, 7, 9, 12\}$ $\quad B \cup C = \{3, 4, 5, 7, 9, 12\}$ $\quad A \cap C = \varnothing$ $\quad B \cap C = \{9, 12\}$

b) Sucesos compatibles: A y B, B y C

Sucesos incompatibles: A y C

15.4 Se realiza un experimento que consiste en sacar una bola de una bolsa que contiene 9 bolas numeradas del 1 al 9 y anotar su número. Describe dos sucesos A y B incompatibles cuya unión coincida con E. ¿Es necesario que B sea el suceso contrario de A?

Consideramos los sucesos A = "*sacar número par*" y B = "*sacar número impar*".

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = E$

$A \cap B = \varnothing$

Para que la unión de dos sucesos incompatibles sea el espacio muestral, los sucesos han de ser contrarios.

15.5 Se saca una carta al azar de una baraja española, que está formada por 40 cartas, 10 de cada uno de los cuatro palos (oros, copas, espadas y bastos). Halla la probabilidad de los sucesos:

a) *Salir un oro*

b) *Salir un rey*.

c) *Salir una figura*.

d) *Salir el as de bastos*.

a) Sea A = "*salir un oro*" $\Rightarrow P(A) = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4}$

b) Sea B = "*salir un rey*" $\Rightarrow P(B) = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10}$

c) Sea C = "*salir una figura*" $\Rightarrow P(C) = \dfrac{12}{40} = \dfrac{3}{10}$

d) Sea D = "*salir el as de bastos*" $\Rightarrow P(D) = \dfrac{1}{40}$

15.6 **Se lanza un dado dodecaédrico con las caras numeradas del 1 al 12. Se espera que se pose sobre una de las caras y se anota el resultado de la cara superior. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:**

a) *P*(*salir número par*)

b) *P*(*salir un múltiplo de 3*)

c) *P*(*salir un número mayor que 5*)

a) A = "*salir par*" = $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

b) B = "*salir múltiplo de 3*" = $\{3, 6, 9, 12\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

c) D = "*salir mayor que 5*" = $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \Rightarrow P(D) = \frac{7}{12}$

15.7 **Lucía tiene dos dados cúbicos, uno rojo y otro verde, y sabe que uno de los dos está trucado para aumentar la probabilidad de que salga un 5. Para averiguar cuál es el dado trucado ha lanzado los dos 20 veces, anotando el número de ocasiones en que salía un 5 en cada dado, y luego ha repetido el experimento con 1000 lanzamientos. Observa los resultados anotados en la tabla y explica razonadamente cuál es el dado trucado.**

	Dado rojo		Dado verde	
N.º de lanzamientos	20	1000	20	1000
N.º de veces que sale el 5	7	165	4	400

Para saber si un dado está trucado, hay que lanzarlo muchas veces. Por ejemplo, 1000 como ha hecho Lucía. Por tanto, nos vamos a fijar en los resultados obtenidos para 1000 lanzamientos.

La probabilidad de obtener un 5 al lanzar un dado es de $\frac{1}{6}$. Por tanto, al lanzar el dado 1000 veces deben haber salido 167 cincos. Luego el dado trucado es el verde, pues el resultado de sus lanzamientos se aleja mucho del valor teórico esperado.

15.8 **Explica razonadamente cuáles de los siguientes valores no pueden corresponder a la probabilidad de un suceso.**

a) 0,85 b) 0,037 c) $\frac{1}{10002}$ d) −0,11 e) 2,31 f) 0,231

La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1. Por tanto, no corresponden a la probabilidad de un suceso los valores de los apartados d y e.

15.9 **Se extrae una bola de una bolsa en la que hay cinco bolas numeradas del 1 al 5 y se anota su resultado.**

a) Escribe un suceso seguro y un suceso imposible asociados a este experimento.

b) Calcula la probabilidad de cada uno.

a) Suceso seguro: "*Sacar un número menor o igual que 5*". Suceso imposible: "*Sacar un número negativo*".

b) Sea A = "*Sacar un número menor o igual que 5*": $P(A) = 1$. Sea B = "*Sacar un número negativo*": $P(B) = 0$.

15.10 **En una caja hay 30 bombones, de los cuales 10 son de almendra, 12 de avellana y el resto de chocolate puro. Si se escoge un bombón al azar, halla:**

a) *P*(*que sea de almendra*).

b) *P*(*que no sea de avellana*).

c) *P*(*que sea de almendra o de chocolate puro*).

a) P(*que sea de almendra*) $= \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

b) P(*que no sea de avellana*) $= \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

c) P(*que sea de almendra o de chocolate puro*) $= \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

15.11 En el experimento del ejercicio resuelto anterior se considera el suceso C = "*salir un número menor que 5*". Calcula $P(A \cup C)$ y $P(B \cup C)$.

$P(C) = \frac{4}{8}$

$A \cap C = \{2, 4\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{2}{6} \Rightarrow P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$B \cap C = \{3\} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

15.12 En una urna hay 5 bolas numeradas del 1 al 5. Escribe dos sucesos compatibles para el experimento que consiste en extraer al azar una bola de la urna y calcula la probabilidad de su unión.

Sea A = "*extraer un múltiplo de 2*" $\Rightarrow P(A) = \frac{2}{5}$.

Sea B = "*extraer un número mayor o igual que 3*" $\Rightarrow P(B) = \frac{3}{5}$.

$A \cap B = \{4\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

15.13 En una determinada ciudad se sabe que, para personas de más de 60 años, la probabilidad de padecer una enfermedad de corazón es 0,15 y la de padecer artrosis es 0,25. También se sabe que la probabilidad de padecer ambas enfermedades es 0,08. Elegida al azar una persona de esa ciudad con más de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que padezca del corazón o de artrosis?

Sea A = "*padecer artrosis*" y C = "*padecer de corazón*".

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}08 = 0{,}32$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

15.14 Noelia ha retirado la mitad de las bolas azules que Pablo tenía en la caja. ¿Cuál es ahora la probabilidad de sacar una bola verde?

Si Noelia retira la mitad de las bolas azules, la composición de la caja será:

- Verdes: n bolas
- Rojas: $2n$ bolas
- Azules: $3n$ bolas

En total habrá $n + 2n + 3n = 6n$ bolas, por lo que P("*extraer una bola verde*") $= \frac{n}{6n} = \frac{1}{6}$.

15.15 Samuel dice que si mete 3 bolas negras en cualquier caja que cumpla las condiciones de la que Pablo tenía al principio, entonces la probabilidad de sacar una bola verde es $\frac{1}{12}$. ¿Tiene razón?

En este caso, la composición de la caja será:

- Verdes: n bolas
- Rojas: $2n$ bolas
- Azules: $6n$ bolas
- Negras: 3 bolas

En total habrá $n + 2n + 6n + 3 = 9n + 3$ bolas, por lo que P("*extraer una bola verde*") $= \frac{n}{9n + 3}$. Para que la probabilidad de sacar una bola verde sea de $\frac{1}{12}$ ha de cumplirse:

$\frac{1}{12} = \frac{n}{9n + 3} \Rightarrow 12n = 9n + 3 \Rightarrow 3n = 3 \Rightarrow n = 1$. Por lo que solo se cumplirá cuando $n = 1$.

En este caso, la composición de la urna será: 1 bola verde, 2 bolas rojas, 6 azules y 3 negras.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Experimentos y sucesos aleatorios

15.16 Indica si los siguientes experimentos son aleatorios y, en caso afirmativo, describe el espacio muestral correspondiente.

a) Hacer girar la flecha de una ruleta dividida en 6 sectores numerados del 1 al 6.

b) Apuntar el tiempo que emplea un vehículo en recorrer 80 kilómetros.

c) Sacar al azar una carta de la baraja española y anotar a qué palo pertenece.

d) Extraer una bola de la urna del dibujo.

a) Sí es un experimento aleatorio. Su espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) No es un experimento aleatorio.

c) Sí es un experimento aleatorio. Su espacio muestral es $E = \{$cualquier carta de la baraja$\}$.

d) No es un experimento aleatorio.

15.17 Diseña y describe un experimento aleatorio tal que el suceso "*sacar una bola blanca*" sea un suceso imposible y "*sacar una bola negra impar*" sea un suceso seguro.

Considerar el experimento consistente en sacar una bola de una urna que contiene cuatro bolas negras numeradas con los números 3, 5, 7 y 9.

Consideramos los sucesos:

$A =$ "*Sacar una bola blanca*".

$B =$ "*Sacar una bola negra impar*".

$P(A) = 1 \Rightarrow A$ es un suceso seguro.

$P(B) = 0 \Rightarrow B$ es un suceso imposible.

Operaciones con sucesos

15.18 En el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado con 10 caras numeradas del 1 al 10 consideramos los sucesos: $A =$ "*salir un número par*" y $B =$ "*salir un número múltiplo de 4*".

a) Forma los sucesos A, B y sus contrarios.

b) Halla $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cup B$, $\overline{A} \cap B$.

c) ¿Son incompatibles los sucesos A y B? ¿Y los sucesos $\overline{A}$ y B? Razona tus respuestas.

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow \overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 8\}$

$B = \{4, 8\} \Rightarrow \overline{B} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

b) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$A \cap B = \{4, 8\}$

$\overline{A} \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$

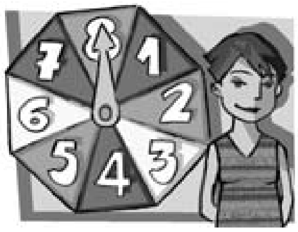
$\overline{A} \cap B = \{8\}$

c) Los sucesos A y B no son incompatibles porque $A \cap B \neq \varnothing$.

Los sucesos $\overline{A}$ y B no son incompatibles porque $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$.

Probabilidad de un suceso. Regla de Laplace

15.19 Se procede a girar la flecha de la ruleta.



Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) *Salir un número par*.

b) *Salir un número impar y el color rojo*.

c) *Salir un número impar o el color amarillo*.

d) *Salir un número par o el color verde*.

e) *No salir el color rojo*.

Consideramos los sucesos:
P = "*salir par*" I = "*salir impar*" A = "*salir amarillo*" V = "*salir verde*" R = "*salir rojo*"

a) $P(P) = \frac{1}{2}$

b) $P(I \cap R) = \frac{1}{4}$

c) $P(I \cup A) = P(I) + P(A) - P(I \cap A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

d) $P(P \cup V) = P(P) + P(V) - P(A \cap V) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

e) $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

15.20 Se extrae al azar una ficha de un dominó. Calcula la probabilidad de que la suma de los puntos de la ficha sacada sea superior a 5.

Número de fichas = 28 $\Rightarrow$ P("*suma mayor que 5*") $= \frac{16}{28} = \frac{4}{7} = 0{,}5714$

15.21 La baraja francesa está compuesta de 54 cartas, de las cuales 2 son comodines y las 52 cartas restantes están repartidas por igual en 4 palos: picas, corazones, tréboles y diamantes. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos del experimento que consiste en extraer al azar una carta de la baraja francesa.

a) *Sacar una pica o una figura*.

b) *Sacar una carta de palo rojo*.

c) *Sacar una carta de palo negro o figura*.

d) *Sacar una carta de palo rojo y menor que 5*.

e) *No sacar un comodín*.

a) $P(P \cup F) = P(P) + P(F) - P(P \cap F) = \frac{13}{54} + \frac{12}{54} - \frac{3}{54} = \frac{22}{54} = \frac{11}{27} \approx 0{,}401$

b) $P(R) = 26\backslash 54 = 0{,}48$

c) $P(N \cup F) = P(N) + P(F) - P(N \cap F) = \frac{26}{54} + \frac{12}{54} - \frac{6}{54} = \frac{32}{54} = 0{,}59$

d) $P(R \cap$ "*menor que 5*"$) = \frac{8}{54} = 0{,}15$

e) $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{2}{54} = \frac{42}{54} = \frac{26}{27}$

Probabilidad en experimentos compuestos

15.22 Laura, Pablo y Leticia han lanzado al aire dos monedas 50 veces, y cada uno ha anotado en un papel el número de cruces obtenidas en cada lanzamiento (0, 1 ó 2). Con los resultados han formado esta tabla.

	Laura	Pablo	Leticia
0	13	11	12
1	23	28	25
2	14	11	13

a) Calcula la probabilidad experimental de los siguientes sucesos.

A* = *"no obtener ninguna cruz"

B* = *"obtener una cruz"

C* = *"obtener dos cruces"

b) Compara las probabilidades experimentales obtenidas con las probabilidades teóricas esperadas. ¿Podemos asegurar que alguna de las monedas está cargada?

a) Sumamos el número de veces que salió ninguna cruz: $13 + 12 + 11 = 36$.

Sumamos el número de veces que salió una cruz: $23 + 28 + 25 = 76$.

Sumamos el número de veces que salieron dos cruces: $14 + 11 + 13 = 38$.

$36 + 76 + 38 = 150$ fue el número total de veces que lanzaron las monedas entre los tres.

La probabilidad experimental de cada suceso coincide con la frecuencia relativa. Por tanto:

$P(\text{"}ninguna\ cruz\text{"}) = \frac{36}{150} = 0{,}24 \qquad P(\text{"}una\ cruz\text{"}) = \frac{76}{150} = 0{,}5 \qquad P(\text{"}dos\ cruces\text{"}) = \frac{39}{150} = 0{,}25$

b) Las probabilidades teóricas de cada suceso son:

$P(\text{"}ninguna\ cruz\text{"}) = \frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad P(\text{"}una\ cruz\text{"}) = \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad P(\text{"}dos\ cruces\text{"}) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

A la vista de los resultados, y de la similitud entre las probabilidades experimentales y teóricas, no podemos concluir que ninguna moneda esté cargada.

Propiedades de la probabilidad

15.23 Sofía tiene en su armario tres camisetas rojas, cuatro azules, una verde, y dos que combinan el rojo y el azul.

a) Si escoge una camiseta al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

A* = *"que no sea verde"

B* = *"que contenga el color rojo o azul"

C* = *"que sea de color azul"

D* = *"que sea de color rojo"

b) ¿Son los sucesos *C* y *D* incompatibles? ¿Por qué?

a) Utilizando la propiedad del suceso contrario y la regla de Laplace:

- $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$
- $P(B) = P(\text{"}contenga\ el\ rojo\text{"}) + P(\text{"}contenga\ el\ azul\text{"}) - P(\text{"}contenga\ el\ rojo\ y\ el\ azul\text{"}) = \frac{5}{10} + \frac{6}{10} - \frac{2}{10} = \frac{9}{10}$
- $P(C) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
- $P(D) = \frac{3}{10}$

b) No, porque el suceso "*contenga el rojo y el azul*" es distinto del vacío, ya que hay dos camisetas que combinan ambos colores.

15.24 Una asociación juvenil ha organizado una rifa para recaudar fondos. El sorteo consiste en extraer una bola al azar de un bombo que contiene bolas numeradas del 1 al 1000.

Se consideran los siguientes sucesos.

A* = *"que la bola extraída sea múltiplo de dos"

B* = *"que la bola extraída sea múltiplo de cinco"

a) Calcula $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cup B)$.

b) ¿Son *A* y *B* sucesos compatibles o incompatibles? Razona tu respuesta.

a) Desde el 1 hasta el 1000 hay 500 múltiplos de 2, entonces $P(A) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$.

Desde el 1 hasta el 1000 hay 200 múltiplos de 5, entonces $P(B) = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$.

Los múltiplos de 2 y de 5 son los múltiplos de 10. Por tanto, $P(A \cap B) = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

b) No, porque $P(A \cap B) \neq \varnothing$.

15.25 Observa la composición del frutero de Rosario:

Si se extrae una fruta al azar, indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. Justifica tu respuesta.

a) *P*(*que sea pera o naranja*)

b) *P*(*que no sea plátano*)

c) *P*(*que sea manzana o pera*)

d) *P*(*que sea plátano o pera*)

a) Verdadera: $P(\text{"sea pera o naranja"}) = P(\text{"sea pera"}) + P(\text{"sea naranja"}) = \frac{3}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

b) Falsa: $P(\text{"no sea plátano"}) = 1 - P(\text{"sea plátano"}) = 1 - \frac{2}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

c) Verdadera: $P(\text{"sea manzana o pera"}) = P(\text{"sea manzana"}) + P(\text{"sea pera"}) = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

d) Falsa: $P(\text{"sea plátano o pera"}) = P(\text{"sea plátano"}) + P(\text{"sea pera"}) = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

15.26 En el lanzamiento de un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6, ¿cuál es el suceso contrario al de "sacar un múltiplo de 3"? ¿Cuál es su probabilidad?

Consideramos el suceso A = "*sacar múltiplo de 3*" = {3,6} $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5\}$. Entonces: $P(\overline{A}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

15.27 En un experimento aleatorio se ha obtenido que la probabilidad de un suceso *A* es de 0,31, y la de un suceso *B*, de 0,69. ¿Podemos asegurar que *A* y *B* son sucesos contrarios?

Sí, ya que $P(B) = 1 - P(A)$

15.28 Si lanzo una moneda 9 veces y aparece cara en todos los lanzamientos, ¿es más probable que a la décima vez salga cruz en lugar de cara? Razona tu respuesta.

No, la probabilidad sigue siendo la misma, la moneda no tiene memoria.

15.29 ¿En cuál de las siguientes urnas es más probable extraer una bola roja?

1.ª urna: $P(R) = \frac{1}{2}$ 2.ª urna: $P(R) = \frac{3}{5}$ 3.ª urna: $P(R) = \frac{5}{11}$

Luego es más probable extraer una bola roja en la 2.ª urna.

15.30 Si $P(A) = \frac{1}{4}$, ¿quiere decir que hay 4 casos posibles en el experimento y solo 1 favorable al suceso *A*? Justifica la respuesta.

No, ya que la fracción puede estar simplificada.

15.31 Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.
a) El suceso contrario al suceso seguro es el suceso imposible.
b) La probabilidad de un suceso *A* puede ser igual a 1,3.
c) *A* y *B* son incompatibles si $A \cup B = \varnothing$.
d) Si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, entonces *A* y *B* son compatibles.
e) Si $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, $P(A) = \frac{2}{7}$ y $P(B) = \frac{3}{7}$, entonces $P(A \cup B) = \frac{5}{7}$.

a) Verdadera b) Falsa c) Falsa d) Falsa e) Falsa

15.32 Si al lanzar un dado cúbico 600 veces sale un 3 en 85 ocasiones, ¿cuál es la diferencia aproximada entre la probabilidad experimental y la teórica?

$$P(\textit{teórica}) = \frac{100}{600} = \frac{1}{6},\ P(\textit{experimental}) = \frac{85}{600} = \frac{17}{120} \Rightarrow P(\textit{teórica}) - P(\textit{experimental}) = \frac{1}{6} - \frac{17}{120} = \frac{3}{120} = \frac{1}{40}$$

15.33 ¿Qué es más probable?
a) Que aparezca un 3 al tirar un dado de 6 caras.
b) Que salga una espada al extraer una carta.
c) Que acabe en 8 el gordo de la lotería.

a) $P(\textit{sacar 3}) = \frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$ b) $P(\textit{sacar espadas}) = \frac{1}{4} = 0,25$ c) $P(\textit{acabe en 8}) = \frac{1}{10} = 0,1$

Luego el suceso b es el más probable.

PROBLEMAS PARA APLICAR

15.34 Observa las monedas que tiene Silvia. Si toma al azar una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que con la mano extraída pueda pagar un bolígrafo que cuesta 70 céntimos?

Son una moneda de 2 euros, dos monedas de 1 euro, una moneda de 50 céntimos y una moneda de 20 céntimos.

$$P(\textit{“pueda comprar”}) = \frac{\textit{monedas favorables}}{\textit{monedas posibles}} = \frac{3}{5}$$

15.35 Jimena ha escrito cada una de las 12 letras de la palabra experimental en 12 tarjetas diferentes, alternando una letra mayúscula con una minúscula. Ha metido las 12 tarjetas en una bolsa y ha extraído una al azar. Calcula las siguientes probabilidades.

a) *P*("*ser vocal o mayúscula*")

b) *P*("*ser consonante o minúscula*")

c) *P*("*ser mayúscula o minúscula*"). ¿Cómo se llama a este suceso?

a) $P(\text{"ser vocal o mayúscula"}) = P(\text{"vocal"}) + P(\text{"mayúscula"}) - P(\text{"vocal y mayúscula"}) = \frac{5}{12} + \frac{6}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

b) $P(\text{"ser consonante o minúscula"}) = P(\text{"consonante"}) + P(\text{"minúscula"}) - P(\text{"consonante y minúscula"}) = \frac{7}{12} + \frac{6}{12} - \frac{3}{12} =$
$= \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

c) $P(\text{"ser mayúscula o minúscula"}) = 0$, pues cada letra es mayúscula o minúscula. Se llama suceso imposible.

15.36 Los alumnos de 4.º de ESO de un centro escolar sortean un ordenador portátil para conseguir ingresos destinados a su viaje de fin de curso. Venden papeletas numeradas del 1 al 100. Calcula la probabilidad de ganar el ordenador si se adquieren todas las papeletas que sean múltiplos de 3 o de 5.

Consideramos los sucesos A = "*ser múltiplo de 3*" y B = "*ser múltiplo de 5*".

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{33}{100} + \frac{20}{100} - \frac{6}{100} = \frac{47}{100} = 0{,}47$

15.37 Una baraja de cartas infantil consta de 5 familias de colores numeradas todas ellas del 1 al 6. Los colores de las familias son rojo, verde, azul, amarillo y negro. Se definen los siguientes sucesos.

A* = *salir un 6 — ***C* = *salir una carta de la familia azul***

B* = *salir un número impar — ***D* = *salir un múltiplo de 3***

Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos.

a) $B \cup C$ b) $A \cup D$ c) $C \cap D$ d) $C \cap \overline{B}$

a) $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{15}{30} + \frac{6}{30} - \frac{3}{30} = \frac{18}{30} = 0{,}6$

c) $P(C \cap D) = \frac{6}{30} = 0{,}2$

b) $P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = \frac{1}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{6}{30} = 0{,}2$

d) $P(C \cap \overline{B}) = \frac{3}{30} = 0{,}1$

15.38 Rodrigo sospecha que la ruleta de uno de sus juegos, que está dividida en ocho secciones iguales con los números del 1 al 8, está trucada. Para comprobar si se encuentra en lo cierto, ha hecho girar la ruleta 80 veces y ha anotado los resultados en la siguiente tabla.

Número de la ruleta	Veces que ha salido
1	5
2	7
3	6
4	8
5	24
6	11
7	9
8	10

a) Calcula las probabilidades experimentales de cada uno de los posibles resultados y compáralas con las probabilidades teóricas.

b) ¿Tiene fundamento la sospecha de Rodrigo?

a) Las probabilidades experimentales son:

$P(1) = \frac{5}{80}$ $P(2) = \frac{7}{80}$ $P(3) = \frac{6}{80}$ $P(4) = \frac{8}{80}$ $P(5) = \frac{24}{80}$ $P(6) = \frac{11}{80}$ $P(7) = \frac{9}{90}$ $P(8) = \frac{10}{80}$

La probabilidad teórica es $P(\text{"teórica de cualquier número"}) = \frac{10}{80}$. El más aproximado es el número 8.

b) Sí, parece que la ruleta está trucada con el número 5, ya que la diferencia entre la probabilidad experimental y la teórica es muy acusada.

15.39 De los 25 alumnos de una clase de 4.º de ESO, en la primera evaluación, 5 alumnos aprobaron todas las asignaturas, 19 tuvieron 3 o menos suspensos y 4 alumnos suspendieron 5 o más asignaturas. Escogido al azar un alumno de esa clase, calcula las probabilidades de los siguientes sucesos.

a) Que haya suspendido 1, 2 ó 3 asignaturas.

b) Que tenga exactamente 4 suspensos.

c) Que haya suspendido alguna asignatura.

a) Con 0, 1, 2 ó 3 suspensos hay 19 alumnos, y con 0 suspensos hay 5. Por tanto, hay 14 alumnos, de 25, que han tenido 1, 2 ó 3 suspensos.

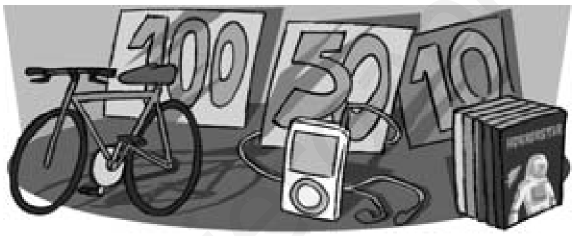
$P(\text{"}\textit{1, 2 ó 3 suspensos}\text{"}) = \frac{14}{25} = 0{,}56$

b) Hay 19 alumnos con 0, 1, 2 ó 3 suspensos y 4 alumnos con 5 o más suspensos. Por tanto, hay 2 alumnos con 4 suspensos.

$P(\text{"}\textit{4 suspensos}\text{"}) = \frac{2}{25} = 0{,}08$

c) $P(\text{"}\textit{suspender alguna materia}\text{"}) = 1 - P(\text{"}\textit{no suspender ninguna materia}\text{"}) = 1 - \frac{5}{25} = \frac{20}{25} = 0{,}8.$

15.40 En una tómbola se venden boletos a un euro cada uno. En cada uno se obtienen siempre 1, 5, 10, 15, 50 ó 100 puntos. Por acumulación de puntos, se pueden conseguir estos premios.



Esta tabla muestra el porcentaje de papeletas con cada una de las puntuaciones.

Puntos	1	5	10	15	50	100
%	40	25	15	10	7	3

Si solo compramos un boleto, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) *A = ganar una bicicleta*

b) *B = ganar un reproductor de MP3*

c) *C = no ganar ningún premio*

d) *D = obtener algún premio*

1 € = 1 boleto

a) $P(A) = P(\text{"}\textit{sacar un boleto de 100}\text{"}) = \frac{3}{100} = 0{,}03.$

b) $P(B) = P(\text{"}\textit{sacar un boleto de 100}\text{" o "}\textit{sacar un boleto de 50}\text{"} = P(\text{"}\textit{sacar un boleto de 100}\text{"}) + P(\text{"}\textit{sacar un boleto de 50}\text{"}) =$

$= \frac{3}{100} + \frac{7}{100} = \frac{10}{100} = 0{,}1.$

c) $P(C) = P(\text{"}\textit{sacar un boleto de 5}\text{" o "}\textit{sacar un boleto de 1}\text{"}) = \frac{40}{100} + \frac{25}{100} = \frac{65}{100} = 0{,}65.$

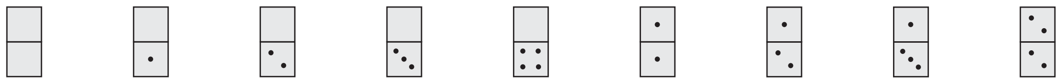
d) $P(D) = 1 - P(\text{"}\textit{no obtener premio}\text{"}) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35.$

Experimentos y sucesos aleatorios

15.41 Describe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.

a) Sacar de una caja una ficha de dominó teniendo en cuenta que solo contiene aquellas cuya suma depuntos es inferior a 5.

b) Extraer de una caja una de las piezas del ajedrez.

a) 

b) E = {peón blanco, peón negro, torre blanca, torre negra, caballo blanco, caballo negro, alfil blanco, alfil negro, reina blanca, reina negra, rey blanco, rey negro}

15.42 Al tomar una carta de una baraja española, se consideran los sucesos:

A = sacar un basto

B = sacar una figura

C = sacar un as

a) Halla los sucesos $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$.

b) ¿Son compatibles B y C? ¿Por qué?

Sea O = *oros*, Co = *copas*, E = *espadas* y B = *bastos*.

a) $A \cup B = \{1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 7B, SB, CB, RB, SO, CO, RO, SCo, CCo, RCo, SE, CE, RE\}$

$A \cup C = \{1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 7B, SB, CB, RB, 1O, 1Co, 1E\}$

$B \cup C = \{SO, CO, RO, SCo, CCo, RCo, SE, CE, RE, SB, CB, RB, 1O, 1Co, 1E, 1B\}$

b) B y C no son compatibles (es decir, son incompatibles), ya que $B \cap C = \emptyset$.

Probabilidad de un suceso

15.43 Se lanza al aire un dado icosaédrico con las caras numeradas del 1 al 20. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) *Salir un número par o múltiplo de 5*.

b) *Salir un número impar o múltiplo de 6*.

c) *Salir un cuadrado perfecto o múltiplo de 2*.

d) *No salir un número primo*.

a) $P(\text{salir par o múltiplo de 5}) = P(\text{salir par}) + P(\text{salir múltiplo de 5}) - P(\text{salir par y múltiplo de 5}) =$

$= \frac{10}{20} + \frac{4}{20} - \frac{2}{20} = \frac{12}{20} = 0{,}6$

b) $P(\text{salir impar o múltiplo de 6}) = P(\text{salir impar}) + P(\text{salir múltiplo de 6}) = \frac{10}{20} + \frac{3}{20} = \frac{13}{20} = 0{,}65$

c) $P(\text{salir un cuadrado perfecto o múltiplo de 2}) = P(\text{salir cuadrado}) + P(\text{salir múltiplo de 2}) - P(\text{salir cuadrado perfecto y múltiplo de 2}) = \frac{4}{20} + \frac{10}{20} - \frac{2}{20} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

d) $P(\text{no salir número primo}) = 1 - P(\text{salir número primo}) = 1 - \frac{8}{20} = \frac{12}{20} = 0{,}6$

Probabilidad de la unión de sucesos

15.44 Se considera el experimento que consiste en extraer una bola de un bombo que contiene bolas numeradas del 1 al 100. Relaciona los siguientes sucesos con sus probabilidades.

A = salir un número par o múltiplo de 3

B = salir un número par o impar

C = salir un múltiplo de 7 o de 50

D = salir un número mayor que 100

1	$\mathbf{\frac{67}{100}}$	**0**	$\mathbf{\frac{4}{25}}$

¿Cuál es el suceso seguro? ¿Y cuál el suceso imposible?

$P(A) = P(\text{"salga par"}) + P(\text{"salga múltiplo de 3"}) - P(\text{"salga par y múltiplo de 3"}) = \frac{1}{2} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100} = \frac{67}{100}$

$P(B) = P(\text{"salga par"}) + P(\text{"salga impar"}) = 1$

$P(C) = P(\text{"salga múltiplo de 7"}) + P(\text{"salga múltiplo de 50"}) = \frac{14}{100} + \frac{2}{100} = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$

$P(D) = 0$, ya que los números mayores de 100 no están en el bombo.

El suceso seguro es el *B*, y el imposible, el *D*.

15.45 Un equipo de fútbol vende camisetas de sus jugadores numeradas del 1 al 25. Puedes comprarlas blancas o azules, pero los números se alternan con los colores; es decir, la 1 es siempre blanca, la 2 es azul, la 3 blanca…, y así sucesivamente.

Se escoge una camiseta al azar de un montón que contiene las veinticinco.

a) Calcula las siguientes probabilidades.

P(ser blanca o múltiplo de seis)

P(ser azul o múltiplo de cinco)

P(ser blanca o número primo)

P(no ser múltiplo de 10)

b) Inventa un suceso seguro y uno imposible para este experimento aleatorio.

a) Los sucesos "*ser blanca*" o "*ser múltiplo de 6*" son sucesos incompatibles, porque las camisetas blancas son siempre números impares y, por tanto, no pueden ser múltiplos de 6.

- $P(\text{ser blanca o múltiplo de 6}) = P(\text{ser blanca}) + P(\text{ser múltiplo de 6}) = \frac{13}{25} + \frac{4}{25} = \frac{17}{25}$
- $P(\text{ser azul o múltiplo de 5}) = P(\text{ser azul}) + P(\text{ser múltiplo de 5}) - P(\text{ser azul y múltiplo de 5}) = \frac{13}{25} + \frac{4}{25} = \frac{17}{25}$
- $P(\text{ser blanca o primo}) = P(\text{ser blanca}) + P(\text{ser primo}) - P(\text{ser blanca y primo}) = \frac{13}{25} + \frac{9}{25} - \frac{8}{25} = \frac{14}{25}$
- $P(\text{no ser múltiplo de 10}) = 1 - P(\text{ser múltiplo de 10}) = 1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

b) "*Ser blanca y número par*" es un suceso imposible, ya que no hay ninguna camiseta que sea blanca y tenga un número par, y, por tanto, $P(\text{ser blanca y par}) = 0$.

"*Sea azul y número par*" es un suceso seguro, ya que todas las camisetas azules tienen número par, y, por tanto, $P(\text{ser azul y número par}) = 1$.

AMPLIACIÓN

15.46 En una urna se mezclan tarjetas con las letras de las siguientes palabras:

PANTANO VENTANA PEÑA PALADAR

Se extrae una tarjeta de la urna:

a) ¿Cuál es la letra con mayor probabilidad de salir? ¿Cuál es su probabilidad?

b) ¿Qué es más probable, que salga vocal o que salga consonante?

c) ¿Qué letra tiene una probabilidad de salir de 0,16?

d) Después de extraer 12 tarjetas de la urna se consiguen crear las palabras ENTERADO y NATA. ¿Qué letra tiene mayor probabilidad de salir en siguiente lugar, la *P* o la *N*?

a) Hay 3 letras *P*, 8 letras *A*, 4 letras *N*, 1 letra *Ñ*, 2 letras *T*, 1 letras *O*, 2 letras *E*, 1 letra *V*, 1 letra *L*, 1 letra *R* y 1 letra *D*.

Por tanto, la letra con mayor probabilidad de salir es la *A*, y $P(\text{“}salir\ A\text{”}) = \frac{8}{25} = 0{,}32$.

b) Hay 11 vocales y 14 consonantes. $P(\text{“}salir\ vocal\text{”}) = \frac{11}{25}$ y $P(\text{“}salir\ consonante\text{”}) = \frac{14}{25}$. Por tanto, es más probable sacar una consonante.

c) $0{,}16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25} \Rightarrow$ Es la letra *N* porque es la única que aparece cuatro veces.

d) Al extraer estas palabras, quedan dentro de la urna 3 letras *P* y 2 letras *N*. Luego es más probable sacar la *P*.

15.47 Explica razonadamente si la siguiente desigualdad es cierta o falsa sean cuales fueran los sucesos *A* y *B*.

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$

Es cierta para cualquier par de sucesos *A* y *B*, pues $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, y:

- Si *A* y *B* son incompatibles, $P(A \cap B) = 0$ y, por tanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Si *A* y *B* son compatibles, $1 > P(A \cap B) > 0$ y, por tanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) < P(A) + P(B)$.

15.48 Pablo lleva en su cartera una foto de Eva, su mujer; otra de ella con sus dos hijos, Jaime y Diego; dos fotos de Jaime solo; otras dos de Diego; una foto de los cuatro juntos, y otra de él solo. Sacamos al azar una foto de su cartera. Considera los siguientes sucesos y calcula las probabilidades que se indican.

***A* = que Eva salga en la foto**

***B* = que Pablo salga en la foto**

***C* = que alguno de sus hijos salga en la foto**

a) $P(C)$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(\overline{C})$ d) $P(A \cap \overline{B})$

Numeramos las fotos: 1 (foto de Eva), 2 (foto de mujer e hijos), 3 (foto de Jaime), 4 (foto de Jaime), 5 (foto de Diego), 6 (foto de Diego), 7 (foto de los cuatro) y 8 (foto de él solo).

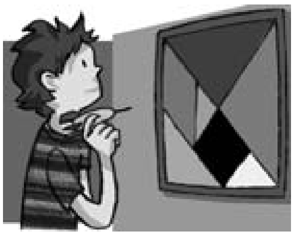
a) $P(C) = P(sacar\ foto\ 2 \cup sacar\ foto\ 3 \cup sacar\ foto\ 4 \cup sacar\ foto\ 5 \cup sacar\ foto\ 6 \cup sacar\ foto\ 7) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

b) $P(A \cup B) = P(sacar\ foto\ 1 \cup sacar\ foto\ 2 \cup sacar\ foto\ 7 \cup sacar\ foto\ 8) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c) $P(\overline{C}) = P(sacar\ foto\ 1 \cup sacar\ foto\ 8) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

d) $P(A \cap \overline{B}) = \text{P}(sacar\ foto\ 1 \cup sacar\ foto\ 2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

15.49 Me han regalado una diana en forma de tangram en la que cada pieza es de un color diferente. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dardo lo clave en la zona coloreada en azul?



Todas las áreas de las figuras tangram son múltiplos del triángulo pequeño, que llamamos u.

Triángulo pequeño $= 1u$

Triángulo mediano $= 2u$

Triángulo grande $= 4u$

Cuadrado $= 2u$

Romboide $= 2u$

$P(romboide) = \dfrac{2u}{16u} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

15.50 ¡A la mesa!

Un grupo de ocho amigas, entre las que se encuentran Elena y Patricia, han reservado mesa para cenar en un restaurante chino. Observa la disposición de la mesa que les han preparado.

Las ocho amigas han decidido sortear los ocho asientos. Calcula la probabilidad de que Elena y Patricia:

a) Se sienten una enfrente de la otra.

b) Queden una enfrente de la otra ocupando dos esquinas de la mesa.

c) Ocupen dos esquinas de la mesa.

a) Suponiendo que Elena ocupa uno de los asientos, para que estén una enfrente de la otra, Patricia solo tiene una posibilidad de las siete que le quedan para que estén una enfrente de la otra. $P(A) = \dfrac{1}{7}$.

b) Los casos posibles son las variaciones sin repetición de 8 elementos tomados de 2 en 2: $V_{8,2} = 56$ casos posibles. Los casos favorables son 4.

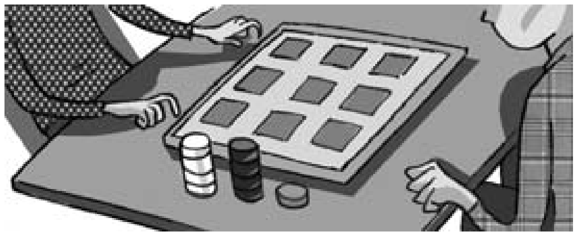
Por tanto, P("*queden enfrente ocupando dos esquinas*") $= \dfrac{4}{56} = \dfrac{1}{14}$.

c) También los casos favorables son 56. Los casos posibles son variaciones sin repetición de 4 elementos tomados de 2 en 2: $V_{4,2} = 12$.

Por tanto, P("*ocupen dos esquinas de la mesa*") $= \dfrac{12}{56} = \dfrac{3}{14}$

15.51 Un juego de tablero.

Un juego de mesa consiste en colocar al azar nueve fichas en las nueve casillas del tablero de la figura. Cuatro de ellas son blancas, otras cuatro son negras y una es verde.



a) Sin necesidad de calcular probabilidades, di si la posibilidad de que haya por lo menos una fila, columna o diagonal con 3 fichas del mismo color es exactamente el doble de la probabilidad de que haya por lo menos una fila, columna o diagonal con tres fichas blancas. Justifica tu respuesta.

b) Calcula la probabilidad de que la ficha verde ocupe la casilla central.

c) Calcula la probabilidad de que la ficha verde ocupe la casilla central y, además, no haya dos fichas del mismo color contiguas

a) No es justo el doble, ya que se debe restar la probabilidad de que haya (por lo menos) una fila, columna o diagonal con tres fichas blancas y otra fila, columna o diagonal con tres fichas negras.

b) Los casos posibles son las permutaciones con repetición de 3 elementos que se repiten 4 veces (fichas blancas), 4 veces (fichas negras) y 1 vez (ficha verde). Casos posibles $= \frac{9!}{4!4!}$.

Para calcular los casos favorables, una vez colocada la ficha verde, hay que situar las restantes fichas en los 8 huecos. Los casos favorables son las permutaciones con repetición de 2 elementos que se repiten 4 veces (fichas negras) y 4 veces (fichas blancas).

Casos favorables $= \frac{8!}{4!4!}$: P(*"verde casilla central"*) $- \dfrac{\frac{8!}{4!4!}}{\frac{9!}{4!4!}} = \frac{8!}{9!} = \frac{1}{9}$.

c) Los casos posibles son los mismos que en el apartado b. Los casos favorables son 2. Una vez colocada la ficha verde en la casilla central, hay 2 maneras de colocar las fichas alternativamente.

P(*"verde casilla central y no hay dos fichas de igual color contiguas"*) $= \dfrac{2}{\frac{9!}{4!4!}} = \dfrac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{9}!$

AUTOEVALUACIÓN

15.A1 Se hace girar la perindola de la figura y se anota el número del lado sobre el que queda apoyada. Se consideran los sucesos: $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{3, 4\}$ y $C = \{1, 4\}$.

a) Halla: $A \cup B$ $\quad B \cup C$ $\quad A \cap C$ $\quad A \cup C$ $\quad A \cap B$ $\quad B \cap C$

b) ¿Cuáles son incompatibles?

La perindola está numerada con números del 1 al 6.

a) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$ $\quad B \cup C = \{1, 3, 4\}$ $\quad A \cap C = \varnothing$

$A \cap B = \{3\}$ $\quad B \cap C = \{4\}$ $\quad A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) Son incompatibles los sucesos A y C porque $A \cap C = \varnothing$.

15.A2 Se extrae una bola de una urna que contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20. Se consideran los siguientes sucesos.

A* = *salir un número múltiplo de 3* $\quad$ *B* = *salir un número múltiplo de 5* $\quad$ *C* = *salir un número par

a) Escribe los sucesos *A*, *B* y *C*, y calcula sus probabilidades.

b) ¿Son compatibles *B* y *C*? ¿Por qué?

a) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ $\quad B = \{5, 10, 15, 20\}$ $\quad C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \qquad P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \qquad P(C) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

b) B y C son compatibles porque $B \cap C = \{10, 20\} \neq \varnothing$.

15.A3 Durante el año pasado, en el hospital en el que trabaja Rodrigo nacieron 2450 bebés, de los que 1421 fueron niñas. Calcula la probabilidad experimental correspondiente al suceso "nacer niña" en ese hospital y compárala con la probabilidad teórica.

Probabilidad experimental: $P(\text{"}nacer\ niña\text{"}) = \frac{1421}{2450} = 0{,}58$ Probabilidad teórica: $P(\text{"}nacer\ niña\text{"}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

La probabilidad teórica se aproxima bastante a la probabilidad experimental.

15.A4 De dos sucesos *A* y *B* se conocen las siguientes probabilidades.

$$P(A) = \frac{1}{3},\ P(B) = \frac{2}{5}\ \text{ y }\ P(\overline{A \cap B}) = \frac{3}{4}$$

Calcula:

a) $P(A \cap B)$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(\overline{A \cup B})$

a) $P(A \cap B) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{29}{60}$

c) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{29}{60} = \frac{31}{60}$

15.A5 Una urna contiene cuatro bolas blancas numeradas del 1 al 4, tres negras con los números del 5 al 7 y tres rojas con los números del 8 al 10. Si se extrae una bola al azar, calcula las siguientes probabilidades.

a) *P*(*salir una blanca o un número par*)

b) *P*(*salir una negra o un número impar*)

c) *P*(*no salir una blanca o un múltiplo de 3*)

a) *P*(*salir una blanca o número par*) = *P*(*salir blanca*) + *P*(*salir par*) − *P*(*salir blanca y par*) $= \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$

b) *P*(*salir negra o número impar*) = *P*(*salir negra*) + *P*(*salir impar*) − *P*(*salir negra e impar*) $= \frac{3}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{5}$

c) *P*(*no salir blanca o múltiplo de 3*) = *P*(*no salir blanca*) + *P*(*no salir múltiplo de 3*) − *P*(*no salir blanca ni múltiplo de 3*) =

$= \frac{6}{10} + \frac{7}{10} - \frac{9}{10} = \frac{4}{10}$

MATETIEMPOS

¿Metros y kilogramos?

Un profesor ha realizado un estudio sobre la altura y el peso medios de los alumnos de una clase de 4.º de ESO, obteniendo los siguientes valores:

Varible	Media	Desviación típica
Altura (m)	1,72	0,29
Peso (kg)	65,4	4,68

¿Qué varía más, la altura o el peso? ¿Por qué?

Para comparar las magnitudes se utilizará el coeficiente de variación definido como $CV = \frac{S}{\overline{X}}$.

De este modo se eliminan las unidades, y el resultado se expresa en porcentaje de variación que compara el grado de dispersión entre las distribuciones. En nuestro caso:

$$\text{Altura: } CV_A = \frac{0{,}29}{1{,}72} \cdot 100 = 16{,}86\% \qquad \text{Peso: } CV_P = \frac{4{,}68}{65{,}4} \cdot 100 = 7{,}15\ \%$$

Hay más dispersión de valores en la altura que en el peso, pues $CV_A > CV_P$.

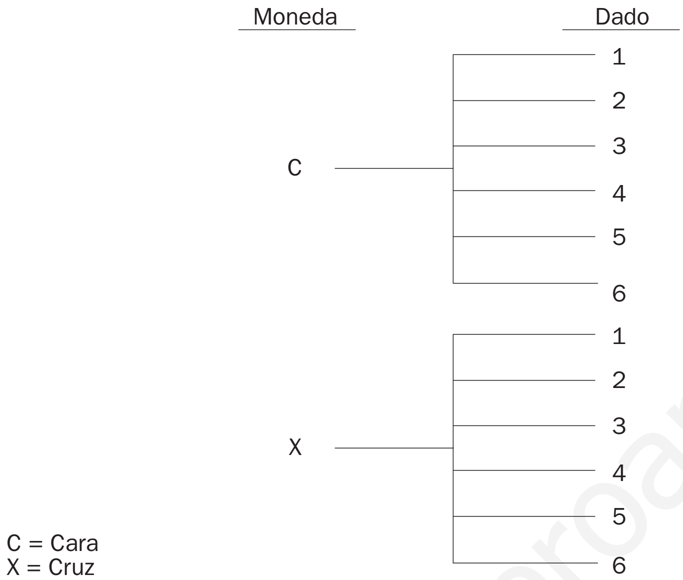
EJERCICIOS PROPUESTOS

16.1 Se lanzan una moneda y un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6.

a) Forma el diagrama en árbol. ¿Cuántos resultados se obtienen?

b) Calcula la probabilidad de que salgan cara y número par.

a)



Hay 12 resultados posibles.

$E = \{(C, 1); (C, 2); (C, 3); (C, 4); (C, 5); (C, 6); (X, 1); (X, 2); (X, 3); (X, 4); (X, 5); (X, 6)\}$

b) $P(\text{cara y número par}) = P(\text{cara}) \cdot P(\text{número par}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

16.2 Se lanzan simultáneamente dos dados cúbicos. Halla las siguientes probabilidades:

a) *Obtener dos cincos*.

b) *Obtener un 2 y un 3*.

c) *La suma de las caras sea igual a 8.*

$E = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6); (4, 4); (4, 5); (4, 6); (5, 5); (5, 6); (6, 6)\}$

a) $P(\text{obtener dos cincos}) = \frac{1}{21}$

b) $P(\text{obtener un 2 y un 3}) = \frac{1}{21}$

c) $P(\text{suma de las caras igual a 8}) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

16.3 En una bolsa se introducen unas tarjetas con los nombres de los alumnos de una clase compuesta por 16 chicas y 12 chicos. Se extraen 2 tarjetas al azar. Halla la probabilidad de que sean 2 chicas:

a) Con devolución de la primera tarjeta.

b) Sin devolución de la primera tarjeta.

$P\,(1.^{\text{o}}\ \textit{chica} \cap 2.^{\text{o}}\ \textit{chica}) = P\,(1.^{\text{o}}\ \textit{chica}) \cdot P\,(2.^{\text{o}}\ \textit{chica}) = \frac{16}{28} \cdot \frac{16}{28} = \frac{256}{784} \approx 0{,}33$

$P\,(1.^{\text{o}}\ \textit{chica} \cap 2.^{\text{o}}\ \textit{chica}) = P\,(1.^{\text{o}}\ \textit{chica}) \cdot P\,(2.^{\text{o}}\ \textit{chica}\ /\ 1.^{\text{o}}\ \textit{chica}) = \frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} = \frac{240}{756} \approx 0{,}32$

16.4 Una caja contiene 15 caramelos de limón y otros 15 de menta. Se extraen 2 caramelos al azar. Halla la probabilidad de que el primero sea de menta y el segundo de limón:

a) Con devolución del primer caramelo.

b) Sin devolución del primer caramelo.

a) $P\,(1.^{\text{o}}\ \textit{menta y}\ 2.^{\text{o}}\ \textit{limón}) = P\,(1.^{\text{o}}\ \textit{menta}) \cdot P\,(2.^{\text{o}}\ \textit{limón}) = \frac{15}{30} \cdot \frac{15}{30} = \frac{225}{900} = 0{,}25$

b) $P\,(1.^{\text{o}}\ \textit{menta y}\ 2.^{\text{o}}\ \textit{limón}) = P\,(1.^{\text{o}}\ \textit{menta}) \cdot P\,(2.^{\text{o}}\ \textit{limón}\ /\ 1.^{\text{o}}\ \textit{menta}) = \frac{15}{30} \cdot \frac{15}{29} = \frac{225}{870} = 0{,}26$

16.5 En una urna hay 4 bolas iguales con las letras O, H, A y L. Se extraen sucesivamente las cuatro bolas. Calcula la probabilidad de que formen la palabra HOLA en los siguientes casos:

a) Devolviendo las bolas a la urna.

b) Sin devolverlas.

a) $P\,(\textit{se forme la palabra HOLA}) = P\,(1.^{\text{a}}\ H) \cdot P\,(2.^{\text{a}}\ O) \cdot P\,(3.^{\text{a}}\ L) \cdot P\,(4.^{\text{a}}\ A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256} = 0{,}004$

b) $P\,(\textit{se forme la palabra HOLA}) = P\,(1.^{\text{a}}\ H) \cdot P\,(2.^{\text{a}}\ O\ /\ 1.^{\text{a}}\ H) \cdot P\,(3.^{\text{a}}\ L\ /\ (1.^{\text{a}}\ H \cap 2.^{\text{a}}\ O) \cdot P\,(4.^{\text{a}}\ A\ /\ 1.^{\text{a}}\ H \cap 2.^{\text{a}}\ O \cap 3.^{\text{a}}\ A)$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24} \approx 0{,}04$

16.6 En un control de tráfico fueron multados 10 conductores: siete, por no llevar puesto el cinturón de seguridad, y los otros tres, por circular a mayor velocidad de la permitida. Elegidos al azar dos de los conductores sancionados, calcula la probabilidad de que ambos hayan sido multados por exceso de velocidad.

$P\,(\textit{ambos multados por exceso de velocidad}) = P\,(1.^{\text{o}}\ \textit{exceso de velocidad}) \cdot P\,(2.^{\text{o}}\ \textit{exceso de velocidad}\ /\ 1.^{\text{o}}\ \textit{exceso de velocidad})$

$= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = 0{,}07$

16.7 Utiliza la tabla de contingencia anterior para hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) *El dorsal elegido pertenezca a una mujer.*

b) *El dorsal elegido sea de la categoría veterano.*

c) *El dorsal sea de un corredor masculino junior.*

d) *El dorsal sea de un hombre, sabiendo que es de la categoría junior.*

e) *El dorsal sea de la categoría junior, sabiendo que es el de un hombre.*

a) $P\,(F) = \frac{175}{400} = 0{,}4375$

b) $P\,(V) = \frac{165}{400} = 0{,}4125$

c) $P\,(M \cap J) = \frac{25}{400} = 0{,}0625$

d) $P\,(H\ /\ J) = \frac{25}{40} = 0{,}625$

e) $P\,(J\ /\ H) = \frac{25}{225} = 0{,}11$

16.8 **De un estuche que contiene 5 bolígrafos azules y 6 negros, se sacan sin mirar dos de ellos. Halla la probabilidad de que ambos sean de distinto color.**

$P\,(\textit{distinto color}) = P\,(\textit{1.º azul}) \cdot P\,(\textit{2.º negro / 1.º azul}) + P\,(\textit{1.º negro}) \cdot P\,(\textit{2.º azul / 1.º negro}) = \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} =$
$= \frac{30}{110} + \frac{30}{110} = \frac{60}{110} \approx 0{,}55$

16.9 **Una bolsa contiene 5 bolas rojas, 10 negras y 12 azules. Se extraen 2 bolas al azar. Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.**

$P\,(\textit{mismo color}) = P\,(\textit{1.ª roja}) \cdot P\,(\textit{2.ª roja / 1.ª roja}) + P\,(\textit{1.ª negra}) \cdot P\,(\textit{2.ª negra / 1.ª negra}) + P\,(\textit{1.ª azul}) + P\,(\textit{2.ª azul / 1.ª azul}) =$
$= \frac{5}{27} \cdot \frac{4}{26} + \frac{10}{27} \cdot \frac{9}{26} + \frac{12}{27} \cdot \frac{11}{26} = \frac{121}{351} = 0{,}3447$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

16.10 **Ahora Ana elige dos números entre {5, 11, 15, 27} y los suma, y Rubén escoge dos del conjunto {5, 7, 9} y los multiplica. ¿Qué probabilidad hay de que Ana obtenga un resultado mayor?**

Resultados posibles de Ana:

$5 + 11 = 16$ $5 + 15 = 20$ $11 + 15 = 26$ $5 + 27 = 32$ $11 + 27 = 38$ $15 + 27 = 42$

Resultados posibles de Rubén:

$5 \cdot 7 = 35$ $5 \cdot 9 = 45$ $7 \cdot 9 = 63$

Número de casos posibles $= 6 \cdot 3 = 18$

Hacemos el recuento de los casos favorables:

- Si Ana suma 16, pierde en cualquier caso.
- Si Ana suma 20, pierde en cualquier caso.
- Si Ana suma 32, pierde en cualquier caso.
- Si Ana suma 26, pierde en cualquier caso.
- Si Ana suma 38, gana si Rubén obtiene 35.
- Si Ana suma 42, gana si Rubén obtiene 35.

En total hay 2 casos favorables.

Entonces, aplicando la regla de Laplace, la probabilidad de que gane Ana es de $\frac{2}{18} = \frac{1}{9}$.

16.11 **Con los mismos conjuntos de números del ejercicio anterior, el juego cambia: ahora Ana sumará tres números, y Rubén seguirá multiplicando dos. ¿Qué probabilidad de ganar tiene Ana?**

Resultados posibles de Ana:

$5 + 11 + 15 = 31$ $5 + 11 + 27 = 43$ $5 + 15 + 27 = 47$ $11 + 15 + 27 = 53$

Resultados posibles de Rubén:

$5 \cdot 7 = 35$ $5 \cdot 9 = 45$ $7 \cdot 9 = 63$

Número de casos posibles $= 4 \cdot 3 = 12$

Hacemos el recuento de los casos favorables:

- Si Ana suma 31, pierde en cualquier caso.
- Si Ana suma 43, gana si Rubén obtiene 35.
- Si Ana suma 47, gana si Rubén obtiene 35 ó 45.
- Si Ana suma 53, gana si Rubén obtiene 35 ó 45.

En total hay 5 casos favorables.

Entonces, aplicando la regla de Laplace, la probabilidad de que gane Ana es de $\frac{5}{12}$.

A C T I V I D A D E S

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

Experimentos compuestos

Probabilidad condicionada

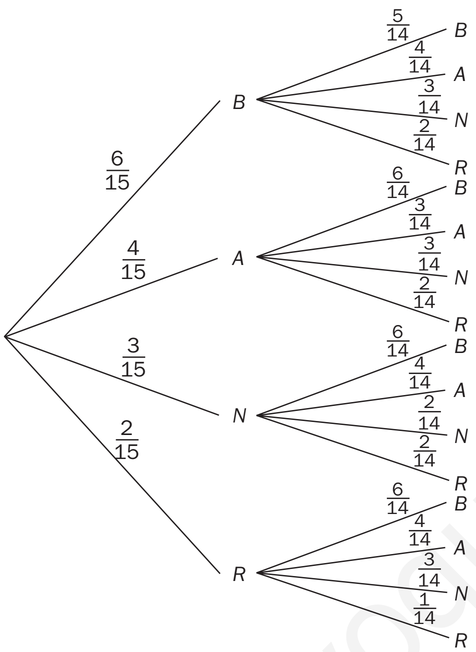
16.12 En el armario de Luis hay 6 camisetas blancas, 4 azules, 3 negras y 2 rojas. Si saca consecutivamente 2 camisetas, ¿qué tipo de experimento realiza? Dibuja un diagrama en árbol con los resultados posibles y calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) *Sacar dos camisetas negras*.

b) *Sacar una camiseta blanca y otra azul*.

c) *No sacar ninguna camiseta roja*.

El experimento que realiza es aleatorio.



a) $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2 / N_1) = \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{6}{210} \approx 0{,}0286$

b) $P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A / B) + P(A) \cdot P(B / A) = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{14} + \frac{4}{15} \cdot$

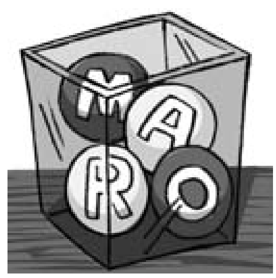
$\cdot \frac{6}{14} = \frac{48}{210} \approx 0{,}229$

c) $P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = P(\overline{R_1}) \cdot P(\overline{R_2} / \overline{R_1}) = \frac{13}{15} \cdot \frac{12}{14} = \frac{156}{210} = 0{,}743$

16.13 Extraemos sucesivamente cuatro bolas de la urna de la figura. Calcula la probabilidad de obtener la palabra AMOR en los siguientes casos.

a) Devolviendo la bola a la urna después de cada extracción.

b) Sin devolverla.



a) $P(\text{se forme la palabra AMOR}) = P(1.^a\ A) \cdot P(2.^a\ M) \cdot P(3.^a\ O) \cdot P(4.^a\ R) =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256} = 0{,}004$

b) $P(\text{se forme la palabra AMOR}) = P(1.^a\ A) \cdot P(2.^a\ M / 1.^a\ A) \cdot$

$\cdot P(3.^a\ O / (1.^a\ A \cap 2.^a\ M) \cdot P(4.^a\ R / (1.^a\ A \cap 2.^a\ M \cap 3.^a\ O) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24} \approx 0{,}04$

16.14 Una urna contiene 4 bolas numeradas del 1 al 4. Si se forman todos los números de 3 cifras posibles al extraer 3 bolas de dicha urna sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que el número formado sea par? ¿Y si las extracciones se efectuasen con reemplazamiento?

Sin reemplazamiento: $P(\text{N.º par}) = \frac{2 \cdot V_{3,2}}{V_{4,3}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

Con reemplazamiento: $P(\text{N.º par}) = \frac{2 \cdot VR_{4,2}}{VR_{4,3}} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

16.15 **Si se tiran 3 dados de 6 caras, ¿cuál es la probabilidad de que en todas las caras aparezca igual número de puntos?**

$P\,(\textit{igual n.º de puntos}) = P\,[(1 \cap 1 \cap 1) \cup (2 \cap 2 \cap 2) \cup \ldots \cup (6 \cap 6 \cap 6)] = \dfrac{6}{VR_{6,3}} = \dfrac{6}{216} = 0{,}02\widehat{7}$

16.16 **Se ha averiguado experimentalmente que la probabilidad de que cierto tipo de chinchetas caigan con la punta hacia arriba es de 0,35.**

Si se lanzan dos chinchetas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas caiga con la punta hacia arriba?

$P\,(1 \cup 2) = P\,(1) + P\,(2) - P\,(1 \cap 2) = 0{,}35 + 0{,}35 - 0{,}35 \cdot 0{,}35 = 0{,}5775$

16.17 **Un jugador de dardos dispone de dos oportunidades de dar en el blanco en la diana. La probabilidad de acertar cuando lanza es de 0,63.**

a) Halla la probabilidad de que atine al menos una vez.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que falle en los dos lanzamientos?

a) $P\,(B_1 \cup B_2) = P\,(B_1) + P\,(B_2) - P\,(B_1 \cap B_2) = 0{,}63 + 0{,}63 - 0{,}63 \cdot 0{,}63 = 0{,}8631$

b) $P\,(F_1 \cap F_2) = 1 - P(\overline{F_1 \cap F_2}) = 1 - P\,(B_1 \cup B_2) = 1 - 0{,}8631 = 0{,}1369$

Tablas de contingencia

16.18 **Copia y completa la siguiente tabla de contingencia que muestra la distribución de las tres clases de 4.º de ESO de un centro escolar.**

	Alumnos	Alumnas	
A	**30**		
B		**60**	**100**
C			**78**
	100		**232**

Se escoge un estudiante al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Pertenezca a la clase *A*.

b) Sea una alumna.

c) Sea una alumna y esté en la clase *B*.

d) Pertenezca a la clase *C* sabiendo que es alumna.

e) Sea un alumno sabiendo que pertenece a la clase *A*.

	Alumnos	Alumnas	
A	**30**	24	54
B	40	**60**	**100**
C	30	48	**78**
	100	132	**232**

a) $P\,(\textit{pertenezca a la clase A}) = \dfrac{54}{232} \approx 0{,}23$

b) $P\,(\textit{sea alumna}) = \dfrac{132}{232} \approx 0{,}57$

c) $P\,(\textit{sea alumna / pertenezca a la clase B}) = \dfrac{60}{232} \approx 0{,}26$

d) $P\,(\textit{pertenezca a la clase C / sea alumna}) = \dfrac{48}{132} \approx 0{,}36$

e) $P\,(\textit{sea alumno / pertenezca a la clase A}) = \dfrac{30}{54} \approx 0{,}\widehat{5}$

16.19 **Copia y completa la siguiente tabla de contingencia, que muestra el tipo de medio de transporte que utilizan para llegar hasta su puesto de trabajo los 200 empleados de una empresa situada en la periferia de una gran ciudad.**

	Hombres	**Mujeres**	
Público		**50**	**85**
Privado			
	120		

Se escoge un trabajador al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Sea un hombre y utilice el transporte público.

b) Utilice el transporte público sabiendo que es un hombre.

c) Sea una mujer sabiendo que usa el transporte privado.

d) ¿Los sucesos "*ser hombre*" y "*utilizar el transporte público*" son dependientes o independientes? Razona tu respuesta.

	Hombres	**Mujeres**	
Público	35	**50**	**85**
Privado	85	30	115
	120	80	200

Usando la regla de Laplace:

a) $P\,(\textit{sea hombre / use transporte público}) = \dfrac{35}{200} = 0{,}175$

b) $P\,(\textit{use transporte público / sea hombre}) = \dfrac{35}{120} \approx 0{,}29$

c) $P\,(\textit{sea mujer / use transporte privado}) = \dfrac{30}{115} \approx 0{,}26$

d) $P\,(\textit{sea hombre}) \cdot P\,(\textit{use transporte público}) = \dfrac{120}{200} \cdot \dfrac{85}{200} = \dfrac{10\,200}{40\,000} \approx 0{,}255 \neq P\,(\textit{sea hombre / use transporte público}) \Rightarrow$ Son sucesos dependientes.

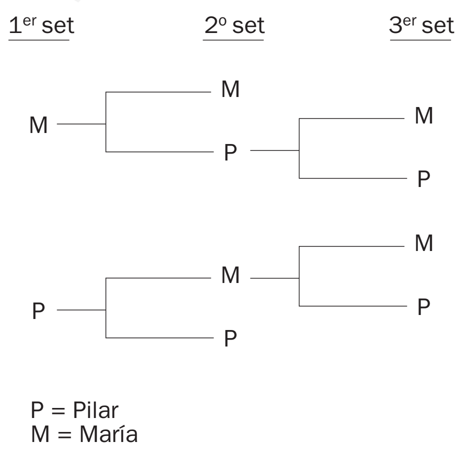
Probabilidad total

16.20 **María y Paula juegan un partido de tenis de mesa. La vencedora será la primera que gane dos de los tres sets de que consta el encuentro.**

a) Dibuja un diagrama de árbol con todos los posibles resultados.

b) Calcula la probabilidad de que Paula gane el partido si la probabilidad de que María logre un set es de 0,4.

a)



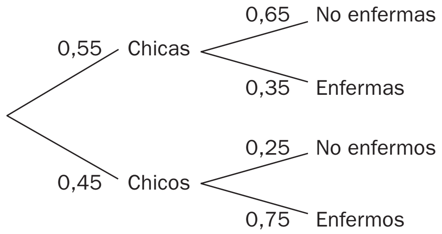
b) Considerando los sucesos Pi = "*Paula gana el set i*" y M_i = "*María gana el set i*".

Por el teorema de la probabilidad total:

$P(\textit{gane Paula}) = P(P_1 \cap P_2) + P(P_1 \cap M_2 \cap P_3) + P(M_1 \cap P_2 \cap P_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}648$

16.21 En un centro de enseñanza secundaria, el 55% de los estudiantes matriculados son chicas. Se sabe que el 65% de las alumnas no han estado enfermas durante el curso y que el 25% de los alumnos tampoco.

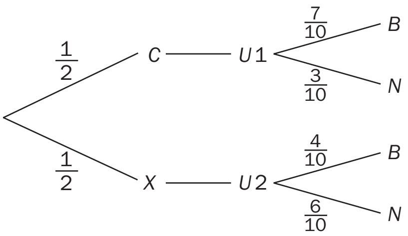
Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya encontrado enfermo? Realiza el diagrama en árbol correspondiente.



$P(enfermo) = 0{,}45 \cdot 0{,}75 + 0{,}55 \cdot 0{,}35 = 0{,}53$

16.22 Considera el experimento compuesto que consiste en lanzar una moneda al aire y, si sale cara, se extrae una bola de la primera urna, y si aparece cruz, una de la segunda.

Dibuja un diagrama en árbol indicando la probabilidad de cada suceso y calcula la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.



$P\,(blanca) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{11}{20} = 0{,}55$

16.23 Pedro desea coger la bicicleta guardada en su trastero, y para ello necesita abrir dos puertas. Dispone de 4 llaves: dos de ellas abren la primera puerta; otra de ellas, la segunda, y la cuarta es maestra. Si escoge las llaves al azar, ¿cuál es la probabilidad de que abra las dos puertas en el primer intento?

$P\,(\text{abra las dos puertas al primer intento}) = P\,(\text{abra la 1.ª puerta}) \cdot P\,(\text{abra la 2.ª puerta}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{16} \approx 0{,}375$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

16.24 En el lanzamiento de 3 dados de 6 caras, ¿cuál es el suceso contrario al de *sacar al menos un 5*? ¿Cuál es su probabilidad?

$A = \text{“sacar al menos un 5”} \Rightarrow \overline{A} = \text{“no sacar ningún 5”} \Rightarrow P\,(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}5787$

16.25 Señala qué condiciones deben darse para que se cumpla que $P(A\ /\ B) = P(A)$.

Debe ocurrir que los sucesos A y B sean independientes.

16.26 Dados los sucesos A, B y C, conocemos las siguientes probabilidades.

$P(A) = \frac{2}{13}$ $\quad P(C) = \frac{2}{9}$ $\quad P(B \cap C) = \frac{10}{63}$ $\quad P(B) = \frac{5}{7}$ $\quad P(A\ /\ B) = \frac{2}{13}$ $\quad P(A \cap C) = \frac{3}{104}$

¿Qué parejas de sucesos son independientes? Razona tu respuesta.

$P\,(A\ /\ B) = \frac{2}{13} = P\,(A) \Rightarrow A$ y B son independientes.

$P\,(A) \cdot P\,(C) = \frac{2}{13} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{117} \neq \frac{3}{104} = P\,(A \cap C) \Rightarrow A$ y C no son independientes.

$P\,(B) \cdot P\,(C) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{10}{63} = P\,(B \cap C) \Rightarrow B$ y C son independientes.

16.27 Si al sacar 3 cartas de una baraja española obtengo 3 oros, ¿la probabilidad de conseguir en una cuarta extracción una espada es la misma si devuelvo las cartas a la baraja que si no lo hago? ¿Por qué?

A = *Obtener 3 oros en tres extracciones*

B = *Obtener espadas*

Con devolución: $P(B) = \frac{10}{40} = 0{,}25$

Sin devolución: $P(B) = \frac{10}{37} = 0{,}27$

Luego la probabilidad no es la misma. Es mayor en el caso de que las extracciones se hagan sin devolución, porque el número de casos posibles es menor que cuando las extracciones se producen con devolución.

16.28 Si $P(A \cap B) = \frac{2}{7}$, $P(A) = \frac{4}{5}$ y $P(B) = \frac{5}{6}$, ¿son A y B independientes? Calcula $P(B / A)$.

$P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \neq P(A \cap B) \Rightarrow A$ y B no son independientes.

$P(B / A) = P(A \cap B) / P(A) = \frac{2}{7} : \frac{4}{5} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$

16.29 En el experimento que consiste en extraer una carta de la baraja española se consideran los siguientes sucesos.

A* = *obtener un basto.

B* = *obtener un cinco.

Explica razonadamente cuál de las siguientes probabilidades es mayor, $P(A / B)$ o $P(B / A)$.

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{4}{40}} = \frac{1}{4}$$

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{10}{40}} = \frac{1}{10}$$

Por tanto, $P(A / B) > P(B / A)$

16.30 Copia y completa la tabla de contingencia referida a los sucesos *A*, *B*, *C* y *D*, de los que conocemos las siguientes probabilidades condicionadas.

$$P(B / C) = \frac{15}{25};\ P(D / B) = \frac{12}{27};\ P(D / A) = \frac{5}{15}$$

Ten en cuenta que las fracciones no han sido simplificadas.

	A	***B***	
C			
D			

	A	***B***	
C	10	15	25
D	5	12	17
	15	27	42

16.31 Si lanzo 2 dados de 6 caras, ¿qué es más probable lograr como suma, 7 ó 10?

Casos favorables a 7: 1 y 6, 2 y 5, 3 y 4.

Casos favorables a 10: 4 y 6, 5 y 5.

Luego P(*sacar 7*) $>$ P(*sacar 10*).

PROBLEMAS PARA APLICAR

16.32 En una población, la probabilidad de medir más de 170 centímetros es del 30%, y la de ser aficionado al cine, del 65%.

¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar mida menos de dicha altura y le guste el cine?

P(*más bajo de 170* $\cap$ *aficionado al cine*) $= \frac{70}{100} \cdot \frac{65}{100} = 0{,}455$

16.33 Silvia posee una moneda de 2 euros, dos de un euro, una de 50 céntimos y otra de 20.

Si toma del monedero dos monedas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad sumada de ambas sea superior a un euro?

N.º de extracciones de 2 monedas $= \binom{5}{2} = 10 \Rightarrow P(\text{cantidad sumada sea mayor que } 1€) = \frac{9}{10}$

16.34 Según un informe de la Cruz Roja sobre los enfermos que padecen paludismo en África, si son atendidos en un dispensario, los $\frac{3}{5}$ se curan al cabo de tres semanas.

En una muestra al azar de 5 pacientes, calcula la probabilidad de que:

a) Se curen exactamente 3.

b) Sanen al menos 2.

c) Se recuperen todos.

Consideremos los sucesos A_i = *"se cure el enfermo i"*. $P(A) = \frac{3}{5}$ y $P(\overline{A}) = \frac{2}{5}$

a) $P(\textit{se curen exactamente 3}) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \approx 0{,}346$

b) $P(\textit{sanen al menos 2}) = P(\textit{se curen 2} \cup \textit{se curen 3}) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \approx 0{,}576$

c) $P(\textit{se recuperen todos}) = \left(\frac{2}{5}\right)^5 \approx 0{,}078$

16.35 En un aula con 24 estudiantes de 1.º de ESO, los profesores de Matemáticas, Lengua e Inglés piden cada día al azar los cuadernos a algunos alumnos para revisarlos. El de Matemáticas se lo reclama a 4 alumnos; el de Lengua, a 6, y el de Inglés, a 8.

Halla la probabilidad de que a un alumno concreto, en un día:

a) Le pidan 2 cuadernos. **b) No le reclamen ninguno.** **c) Le soliciten los 3 cuadernos.**

a) $P(\textit{le pidan 2 cuadernos}) = P[(\textit{mates y lengua}) \cup (\textit{mates e inglés}) \cup (\textit{lengua e inglés})] =$

$= \frac{4}{24} \cdot \frac{6}{24} + \frac{4}{24} \cdot \frac{8}{24} + \frac{6}{24} \cdot \frac{8}{24} = \frac{1}{24} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{13}{72} \approx 0{,}18$

b) $P(\textit{ningún cuaderno}) = P(\textit{no mates} \cap \textit{no lengua} \cap \textit{no inglés}) = \frac{20}{24} \cdot \frac{18}{24} \cdot \frac{16}{24} = 0{,}41\widehat{6}$

c) $P(\textit{le pidan los 3}) = \frac{4}{24} \cdot \frac{6}{24} \cdot \frac{8}{24} = 0{,}0139$

16.36 Una entidad bancaria realiza un sorteo de 3 premios entre sus clientes, y para ello reparte 1000 papeletas. Uno de los clientes habituales tiene en su poder 20 números. ¿Cuál es la probabilidad de que reciba algún premio?

$P(\textit{algún premio}) = 1 - P(\textit{ningún premio}) = 1 - P(\textit{no 1.º} \cap \text{no 2.º} \cap \textit{no 3.º}) = 1 - \frac{980}{1000} \cdot \frac{979}{999} \cdot \frac{978}{1000} \approx 0{,}059$

16.37 La probabilidad de nacimientos de niños en un país está en torno al 52%. Halla la probabilidad de que una familia de 4 hijos tenga:

a) Por lo menos un niño. **b) Exactamente una niña y tres niños.**

a) $P(\textit{por lo menos un niño}) = 1 - P(\textit{ningún niño}) = 1 - \left(\frac{48}{100}\right)^4 \approx 0{,}947$

b) $P(\textit{1 niña y 3 niños}) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{52}{100}\right)^3 \cdot \left(\frac{48}{100}\right) = 0{,}27$

16.38 El departamento de selección de personal de una multinacional entrevista a 65 candidatos para un puesto de la empresa: 35 de ellos poseen experiencia laboral previa y 40 disponen de un título universitario.

¿Cuál es la probabilidad de que se elija a una persona que tenga experiencia laboral y un título universitario?

Consideramos los sucesos A = *"tiene experiencia laboral"* y B = *"tiene título universitario"*.

$A \cap B = 10$ (ya que $40 + 35 = 75$, que sobrepasan en 10 a los 65 entrevistados)

$P(A \cap B) = \frac{10}{65} \approx 0{,}15$

16.39 Las estadísticas de los derbis entre dos equipos de la misma ciudad e históricamente rivales son las siguientes: el 25% de las veces ha ganado el equipo A; el 45%, el conjunto B, y el 30% han empatado. En el próximo torneo van a enfrentarse en 3 ocasiones.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane A los 3 partidos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que A venza al menos en un partido?

a) $P(\text{gane A los 3 partidos}) = P(\text{1.º gane A} \cap \text{2.º gane A} \cap \text{3.º gane A}) = \left(\frac{25}{100}\right)^3 \approx 0{,}016$

b) $P(\text{gane A al menos 1 partido}) = 1 - P(\text{no gane A ninguno}) = 1 - \left(\frac{75}{100}\right)^3 \approx 0{,}578$

16.40 Un árbol de Navidad está alumbrado por una tira de 25 bombillas de colores recién compradas.

Si la probabilidad de que una bombilla se funda antes de 15 días es de 0,1, ¿cuál es la probabilidad de que el alumbrado del árbol funcione sin problemas durante los 15 días de las fiestas navideñas?

Consideramos los sucesos B_i = *"fundirse la bombilla i"*. $P(\text{funcione}) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{25}}) = 0{,}9^{25} \approx 0{,}072$

16.41 Un profesor tiene 2 estuches. Uno contiene 5 bolígrafos azules y 3 negros, y el otro, 2 azules y 6 negros.

Si abre un estuche al azar y extrae un bolígrafo, ¿cuál es la probabilidad de que sea negro?

Consideramos los sucesos N = *"ser negro"*, A = *"escoger estuche A"* y B = *"escoger estuche B"*.

$P(N) = P(A) \cdot P(N / A) + P(B) \cdot P(N / B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} \approx 0.563$

16.42 En una empresa de control de calidad, los productos pasan por 3 pruebas independientes. En la primera se detecta un 8% de productos con defectos; en la segunda, un 12%, y en la tercera, un 15%. Halla la probabilidad de que un producto tenga:

a) 0 defectos. b) 1 defecto. c) 2 defectos.

Consideremos los sucesos D = "*defecto*" y B = *"bien"*.

a) $P(\text{0 defectos}) = P(\text{pase 1.ª criba} \cap \text{pase 2.ª criba} \cap \text{pase 3.ª criba}) = \frac{92}{100} \cdot \frac{88}{100} \cdot \frac{85}{100} \approx 0{,}688$

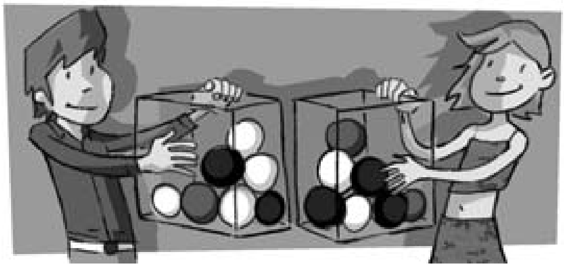
b) $P(\text{1 defecto}) = P(\text{DBB} \cup \text{BDB} \cup \text{BBD}) = \frac{8}{100} \cdot \frac{88}{100} \cdot \frac{85}{100} + \frac{92}{100} \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{85}{100} + \frac{92}{100} \cdot \frac{88}{100} \cdot \frac{15}{100} = 0{,}27$

c) $P(\text{2 defectos}) = P(\text{DDB} \cup \text{DBD} \cup \text{BDD}) = \frac{8}{100} \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{85}{100} + \frac{8}{100} \cdot \frac{88}{100} \cdot \frac{15}{100} + \frac{92}{100} \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{15}{100} \approx 0{,}035$

Experimentos compuestos. Probabilidad condicionada.

16.43 Laura y Unai juegan a que cada uno saca de su urna 2 bolas consecutivamente y sin reemplazamiento.

Si gana el que saca 2 bolas del mismo color, ¿quién tiene mayor probabilidad de ganar?



$P(\textit{ganar Laura}) = 2 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \approx 0{,}238$

$P(\textit{ganar Uani}) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}\widehat{3}$

Por tanto, tiene más probabilidad de ganar el jugador que extrae las bolas de la urna 2.

16.44 La probabilidad de que un jugador de baloncesto enceste un tiro libre es de 0,85. Si lanza consecutivamente dos tiros libres, ¿cuál es la probabilidad de que no acierte con ninguno de los dos lanzamientos? ¿Son sucesos independientes? Razona tu respuesta.

Sean los sucesos E_1 = *"encestar en el primer tiro libre"* y E_2 = *"encestar en el segundo tiro libre"*.

$P(E_1) = P(E_2) = 0{,}85 \Rightarrow P(\overline{E_1}) = 1 - P(E_1) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15 = P(\overline{E_2})$

$P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = P(\overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_2} / \overline{E_1}) = 0{,}15 \cdot 0{,}15 = 0{,}225 = P(\overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_2})$

Por tanto, son sucesos independientes.

16.45 Dos amigos juegan a sacar la carta más alta de una baraja española. El orden es: as, dos, tres… y así sucesivamente hasta el rey.

Si el primero que realiza la extracción saca una sota, devolviéndola a la baraja, calcula:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el segundo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que venza el primero?

c) ¿Cuál es la probabilidad de repetición por empate?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que gane cada uno de ellos si no se devuelve la sota extraída a la baraja? ¿Importa quién saque la primera carta en este caso?

a) $P(\textit{gane el 2.º}) = \frac{8}{40} = 0{,}2$

b) $P(\textit{gane el 1.º}) = \frac{28}{40} = 0{,}7$

c) $P(\textit{empate}) = \frac{4}{40} = 0{,}1$

d) $P(\textit{gane el 1.º}) = \frac{28}{39} \approx 0{,}718$; $P(\textit{gane el 2.º}) = \frac{8}{39} \approx 0{,}205$

Por tanto, sí que importa quién haga la primera extracción.

Tablas de contingencia

16.46 **Para tratar de curar una enfermedad, se ha aplicado un nuevo tratamiento a una serie de individuos. La siguiente tabla refleja los resultados obtenidos.**

	Curados	No curados	
Tratamiento nuevo	**60**	**21**	
Tratamiento anterior	**43**	**36**	

Copia y completa la tabla.

Calcula la probabilidad de que, elegido un individuo al azar:

a) Se haya curado.

b) Haya recibido el nuevo tratamiento.

c) Se haya curado con el tratamiento nuevo.

d) Se haya curado sabiendo que ha recibido el tratamiento nuevo.

e) Haya recibido el tratamiento nuevo sabiendo que se ha curado

	Curados	No curados	
Tratamiento nuevo	60	21	81
Tratamiento anterior	43	36	79
	103	57	**160**

a) $P(\textit{curado}) = \frac{103}{160} \approx 0{,}64$

b) $P(\textit{recibido el nuevo tratamiento}) = \frac{81}{160} \approx 0{,}51$

c) $P(\textit{curado con el tratamiento nuevo}) = \frac{60}{103} \approx 0{,}58$

d) $P(\textit{curado / recibido tratamiento nuevo}) = \frac{60}{81} \approx 0{,}74$

e) $P(\textit{recibido tratamiento nuevo / curado}) = \frac{60}{103} \approx 0{,}58$

Probabilidad total

16.47 **Señala cuál de los siguientes sucesos es más probable.**

a) *Obtener 5 al sumar el resultado de dos dados de seis caras.*

b) *Obtener dos bastos al extraer dos cartas de una baraja española sin devolución.*

c) *Obtener dos cruces al lanzar dos monedas.*

a) $P(\textit{sumen 5}) = P(\textit{sacar un 3 y sacar un 2}) + P(\textit{sacar un 1 y sacar un 4}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 0{,}0\overset{\frown}{5}$

b) $P(\textit{extraer dos bastos}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{90}{1560} \approx 0{,}058$

c) $P(\text{obtener dos cruces}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Lo más probable es obtener dos cruces.

16.48 **Se tira un dado octaédrico (8 caras) y, si sale número par, se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas amarillas y 6 moradas; y si aparece impar, se toma una bola de otra urna que guarda 8 bolas amarillas y 2 moradas.**

Halla la probabilidad de sacar una bola morada.

$P(\textit{sacar bola morada}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{10} = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}$

16.49 Se extraen 4 cartas sin devolución de una baraja española. Calcula la probabilidad de:

a) ***Obtener las 4 sotas.***

b) ***Obtener las 4 del mismo palo.***

c) ***Obtener al menos un 5.***

d) ***Obtener las 4 con el mismo número.***

e) ***Sumar 11.***

a) $P(\text{obtener 4 sotas}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{1}{37} \approx 0{,}000011$

b) $P(\text{obtener 4 del mismo palo}) = P(\text{4 oros} \cup \text{4 espadas} \cup \text{4 copas} \cup \text{4 bastos}) = P(\text{4 oros}) + P(\text{4 copas}) + P(\text{4 espadas}) +$

$+ P(\text{4 bastos}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{38} \cdot \frac{7}{37} \cdot 4 \approx 0{,}0091$

c) $P(\text{obtener al menos un 5}) = 1 - P(\text{no obtener 5}) = 1 - \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} \cdot \frac{33}{37} \approx 0{,}356$

d) $P(\text{obtener los 4 del mismo número}) = P(\text{4 unos} \cup \text{4 doses} \cup \ldots \cup \text{4 reyes}) = P(\text{4 unos}) + \ldots + P(\text{4 reyes}) =$

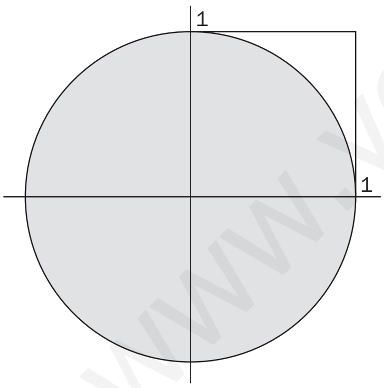
$= \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{1}{37} \cdot 10 \approx 0{,}0001$

e) $P(\text{sumen 11}) = P[\text{sacar}(7,2,1,1) \cup \text{sacar}(6,3,1,1) \cup \text{sacar}(6,2,2,1) \cup \text{sacar}(5,4,1,1) \cup \text{sacar}(5,3,2,1) \cup \text{sacar}(5,2,2,2)] =$

$= 4! \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot \frac{3}{37} + 4! \,,\cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot \frac{3}{37} + 4! \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot \frac{3}{37} \cdot$

$\cdot 4! \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot \frac{3}{37} + 4! \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot \frac{3}{37} + 4! \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot \frac{3}{37} = \approx 0{,}0122$

16.50 Si se generan aleatoriamente dos números reales, *a* y *b*, comprendidos entre 0 y 1, ¿cuál es la probabilidad de que el punto (*a*, *b*) se encuentre en el interior del círculo centrado en el origen y con radio la unidad?



$P[(a, b) \in \text{círculo}(0, 1)] = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$

16.51 En una zona de reforestación en la Selva Negra, devastada por la lluvia ácida, se han plantado 3 tipos de coníferas: un 20%, de tipo *A*; un 30%, de *B*, y un 50%, de clase *C*.

La posibilidad de supervivencia es del 60% en las de tipo *A*, del 45% en las de *B* y del 75% en las de C.

Si selecciono un árbol superviviente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de clase *C*?

$P(\text{superviviente de tipo C}) = P(\text{sea de tipo C} \cap \text{sobreviva}) = P(\text{C}) \cdot P(\text{sobreviva / C}) = \frac{50}{100} \cdot \frac{75}{100} = \frac{3750}{10\,000} = 0{,}375$

16.52 Se lanzan *n* monedas de un euro. Halla la probabilidad de obtener al menos una cara.

$P(\text{al menos una cara}) = 1 - P(\text{ninguna cara}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

16.53 El interés por internet

Entre los vecinos de una localidad se ha realizado una encuesta para conocer su grado de interés por las redes informáticas.

Uno de los objetivos del sondeo era conocer si la edad del encuestado estaba o no relacionada con la inclinación que este mostraba por internet.

Estos son los datos y los resultados de la encuesta:

- **Se preguntó a 250 personas.**
- **El 54% manifestaron estar interesados por la red.**
- **El 36% de las personas preguntadas tenían menos de 20 años y, de ellas, solo una décima parte no presentaba interés por internet.**
- **El 24% de las personas encuestadas tenían más de 60 años y, de ellas, tres de cada diez mostraban inclinación por esta tecnología.**

a) Completa la siguiente tabla de contingencia.

	Con interés	Sin interés	
Menos de 20 años	81	9	90
Entre 20 y 60 años	36	64	100
Más de 60 años	18	42	60
	135	115	250

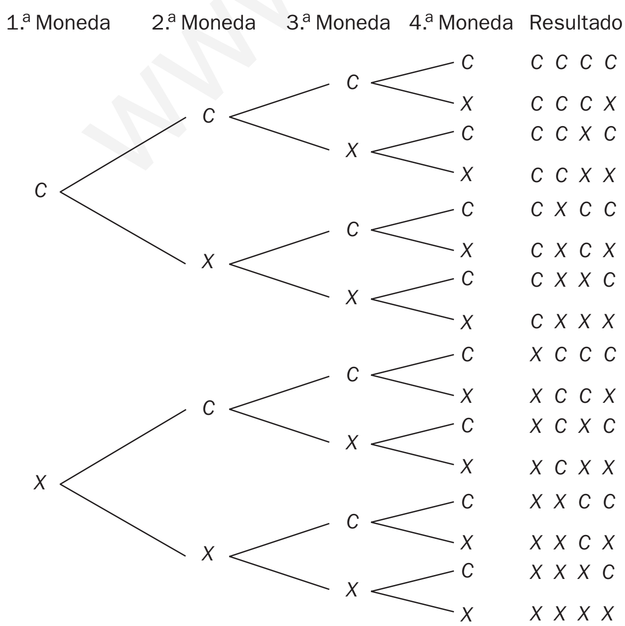
b) Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no demuestre interés y no sea mayor de 60 años?

b) P(*no muestre interés y no sea mayor de 60 años*) $= \dfrac{9 + 64}{250} = \dfrac{73}{250} = 0{,}292$

AUTOEVALUACIÓN

16.A1 Se lanzan 4 monedas de un euro y se anota el resultado de la cara superior. ¿Qué tipo de experimento se realiza?

Forma el diagrama en árbol y calcula la probabilidad de obtener 4 caras.



El experimento que se realiza es aleatorio, ya que por muchas veces que se repita, jamás se podrá predecir el resultado que se va a obtener en un próxima experiencia.

$$P(CCCC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

16.A2 Extraemos tres cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de que sean tres ases:

a) Si se devuelve cada carta antes de realizar la siguiente extracción.

b) Si no se reponen las cartas extraídas.

a) $P(\textit{tres ases}) = P(\textit{1.ª extracción un as}) \cdot P(\textit{2.ª extracción un as}) \cdot P(\textit{2.ª extracción un as}) = \left(\frac{4}{40}\right)^3 = 0{,}001$

b) $P(\textit{tres ases}) = P(\textit{1.ª extracción un as}) \cdot P(\textit{2.ª extracción un as}) \cdot P(\textit{2.ª extracción un as}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{24}{59\,280} \approx 0{,}00041$

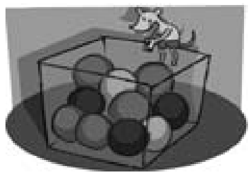
16.A3 Una bolsa contiene tiras de papel de colores, de las cuales, 6 son rojas, 5 amarillas y 3 negras. Si se sacan tres tiras, calcula la probabilidad de poder formar con ellas la bandera de España.

Para formar la bandera de España necesitamos extraer dos tiras rojas y una amarilla.

Existen $C_{2,3} \cdot C_{1,1} = \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = 3$ maneras diferentes de extraer dos tiras rojas y una tira amarilla. Por tanto:

$P(\textit{“extraer dos tiras rojas y una amarilla”}) = 3 \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{12} = \frac{450}{2184} \approx 0{,}21$

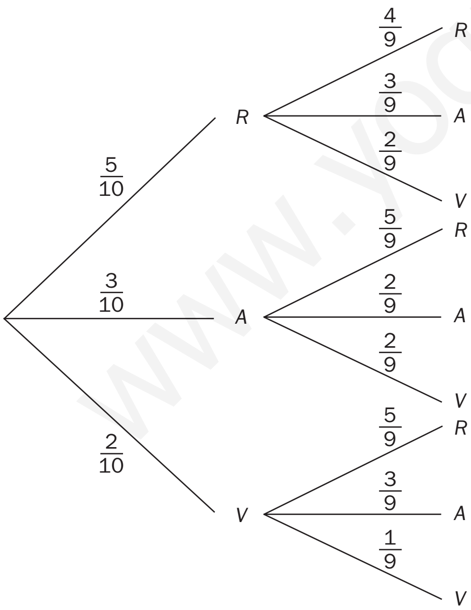
16.A4 De la urna de la figura se sacan, consecutivamente y sin reemplazamiento, 2 bolas. Realiza un diagrama en árbol del experimento y calcula la probabilidad de que:



a) La primera sea azul y la segunda roja.

b) Las dos sean azules.

c) Las dos sean del mismo color.



a) $P(A_1 \cap R_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{15}{90} = 0{,}1\widehat{6}$

b) $P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = 0{,}0\widehat{6}$

c) $P(\textit{mismo color}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{15} = 0{,}3\widehat{1}$

16.A5 Copia la siguiente tabla de contingencia sobre la procedencia y el sexo de los candidatos para secretario de las Naciones Unidas.

Completa la tabla y calcula la probabilidad de:

a) Que el secretario sea mujer.

b) Que el secretario sea hombre y europeo.

c) Que el secretario sea mujer o americano.

d) Que el secretario no sea africano.

e) Sea de procedencia asiática, sabiendo que ha sido elegida una mujer.

f) Sea un hombre, sabiendo que ha sido americano.

	Hombre	Mujer	
Europa	**1**	3	**4**
América	**2**	3	**5**
África	2	**0**	**2**
Asia	**1**	2	3
Oceanía	0	**1**	1
	6	**9**	15

a) $P(\textit{sea mujer}) = \frac{6}{15} = 0{,}4$

b) $P(\textit{sea hombre y europeo}) = \frac{3}{15} = 0{,}2$

c) $P(\textit{sea mujer o americano}) = P(\textit{sea mujer}) + P(\textit{sea americano}) - P(\textit{sea mujer y americana}) = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = 0{,}6$

d) $P(\textit{no sea africano}) = 1 - P(\textit{sea africano}) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15} = 0.8\widehat{6}$

e) $P(\textit{sea asiática / sea mujer}) = \frac{1}{6} = 0{,}1\widehat{6}$

f) $P(\textit{sea hombre / sea americano}) = \frac{3}{5} = 0{,}6$

16.A6 Una compañía de autobuses cubre las tres rutas de un colegio. El 70% de los vehículos realiza la primera ruta; el 20%, la segunda, y el 10% completa la tercera. Se sabe que, diariamente, la probabilidad de que un autobús sufra una avería es del 2%, 3% y 5%, respectivamente, para cada ruta. Determina la probabilidad de que, en un día cualquiera, un autobús se averíe.

Utilizando el teorema de la probabilidad total obtenemos:

$P(\textit{avería}) = P(\textit{avería / 1.ª línea}) \cdot P(\textit{1.ª línea}) + P(\textit{avería / 2.ª línea}) \cdot P(\textit{2.ª línea}) + P(\textit{avería / 3.ª línea}) \cdot P(\textit{3.ª línea}) =$
$= 0{,}02 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 + 0{,}1 \cdot 0{,}05 = 0{,}025$

MATETIEMPOS

Dos hijos

En una familia con dos hijos, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, si se sabe que el hijo mayor lo es? ¿Y si se sabe que al menos uno de los dos es niño?

Para empezar, suponemos que el suceso de nacer niño es igualmente equiprobable que el de nacer niña.

Sean los sucesos: H: que la familia tenga un niño y M: que la familia tenga una niña.

a) Al ser sucesos equiprobables, $P(H) = P(M) = \frac{1}{2}$.

$$P(H \cap H \,/\, 1.^{\text{o}}\, H) = \frac{P((H \cap H) \cap 1.^{\text{o}}\, H)}{P(1.^{\text{o}}\, H)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Otra forma de resolver el problema sería por recuentos y Laplace:. Casos posibles: el hijo mayor es niño, es decir: *HH*, *HM.*

$$\text{P(ambos sean niños si el primero es niño)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{1}{2}$$

b) $$P(H \cap H \,/\, \textit{al menos un } H) = \frac{P(H \cap H)}{1 - P(M \cap M)} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Por recuentos y Laplace: Casos posibles: al menos uno es un niño, es decir, *HH*, *HM*, *MH*.

$P(\textit{ambos sean niños si al menos uno de los hijos es niño}) = \frac{1}{3}$