Geometría en el plano. Vectores y rectas

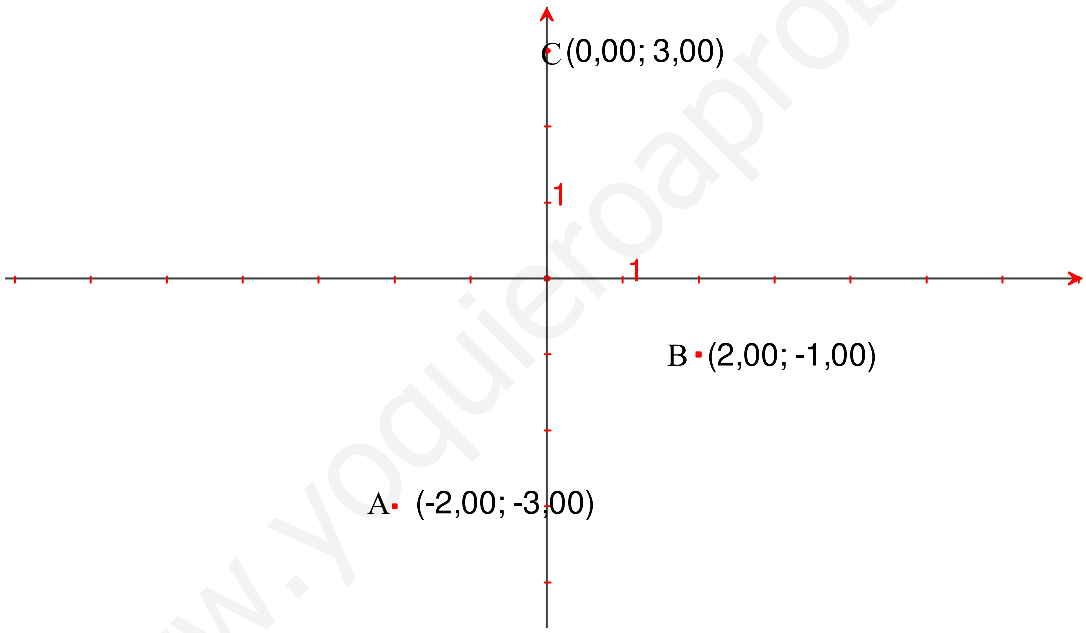
1. Vectores y puntos en el plano. Coordenadas

El sistema de coordenadas cartesianas es la manera más habitual de ordenar la posición de los elementos en el plano y en el espacio. En este tema nos centraremos en los sistemas en el plano (2 dimensiones)

Definición: sistema de coordenadas cartesianas en el plano está formado por dos rectas perpendiculares (eje vertical OY, eje horizontal OX) que se cortan en un punto denominado origen. Cada uno de los dos ejes está escalado de forma que la distancia entre dos naturales consecutivos es la misma. La parte derecha (respecto al origen) del eje OX es el semieje positivo siendo la izquierda el negativo. En el eje OY la parte positiva es la de arriba del origen siendo la negativa la inferior

Definición: un punto P en el plano nos describe una posición, viene definido por dos coordenadas P(x,y), siendo las proyecciones del punto en los ejes OX y OY. Los puntos se escriben con mayúsculas y las coordenadas se escriben a continuación de la letra sin escribir el símbolo igual entre ambas.

Ejemplos: A(-2,-3), B(2,-1), C(0,3)



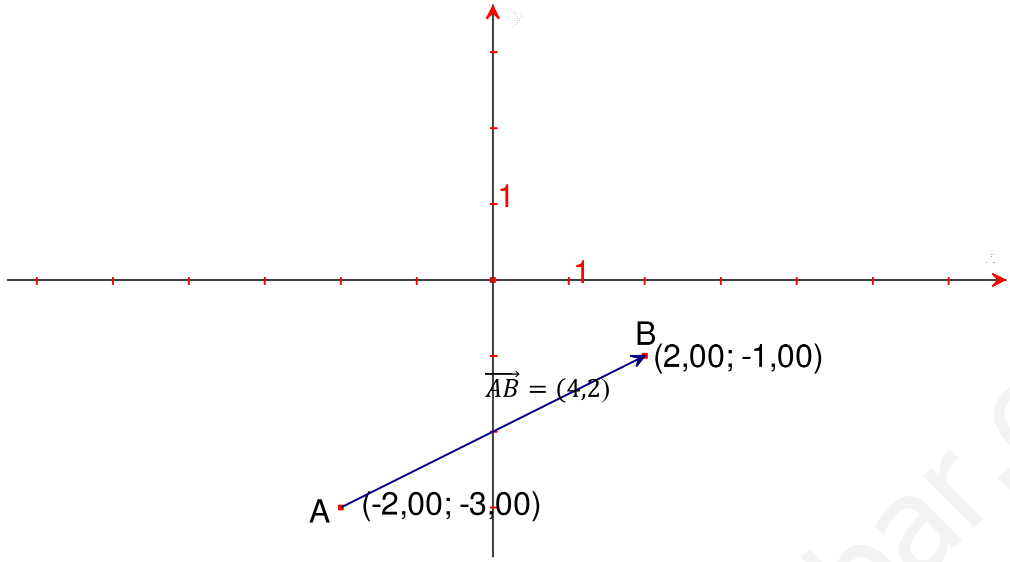
***Definición*:** vector fijo $\overline{AB}$ entre dos puntos A (origen) y B (extremo) es un segmento orientado caracterizado por:

- Dirección o recta que le contiene o cualquiera paralela
- Sentido u orientación del vector de A a B
- Módulo o longitud del segmento
- Origen (el punto A)

Coordenadas del vector fijo: el vector $\overline{AB}$ caracterizado por dos coordenadas $\overline{AB}$=(x,y), donde x indica las unidades que avanza en el eje horizontal e y las unidades de avanza en el eje vertical. Las coordenadas se obtienen restando las coordenadas del extremo menos la del origen, si $A(x_a,y_a)$ y $B(x_b,y_b)$ → $\overline{AB}=(x_b-x_a,y_b-y_a)$.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejemplo: veamos gráficamente el vector $\overrightarrow{AB}$:



Vemos en este ejemplo $\overrightarrow{AB}=(4,2)$, vemos que avanza 4 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.

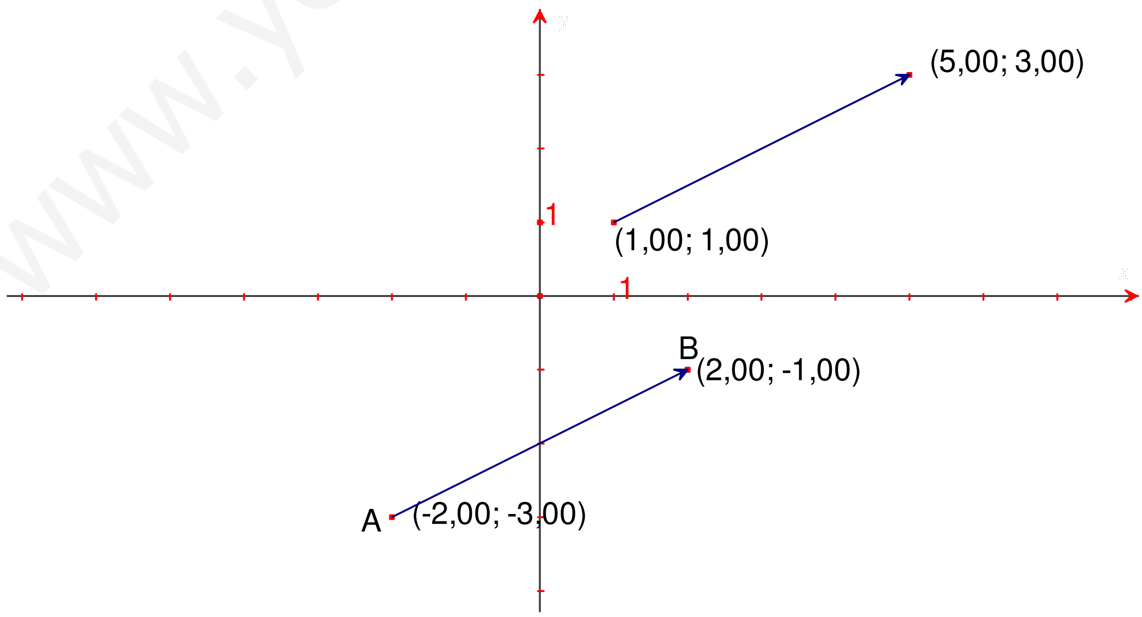
El módulo del vector se denota como $|\overrightarrow{AB}|$. Para calcular el módulo de un vector $\overrightarrow{AB}$=(x,y)=(x_b-x_a,y_b-y_a) aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}$$

Nota: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$, es decir mismo módulo dirección, pero sentido opuesto.

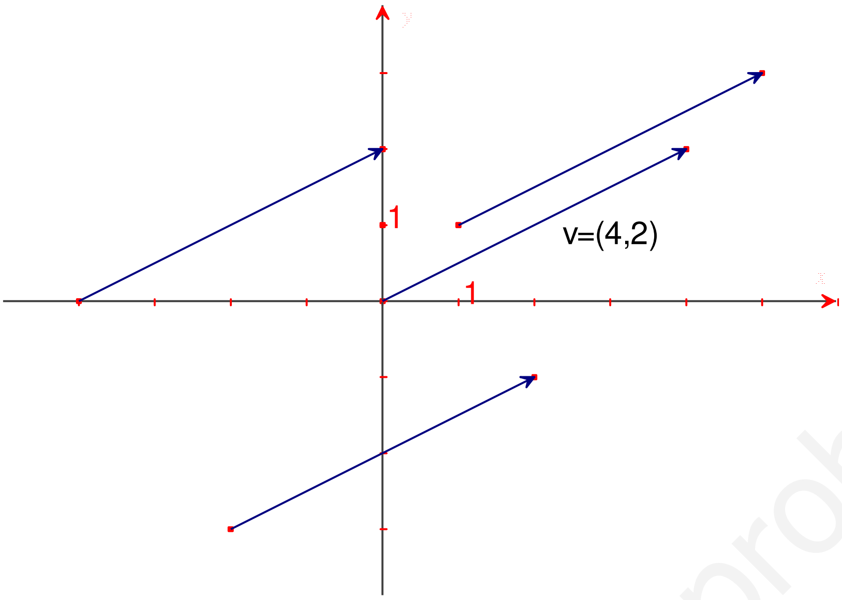
Definición: vectores equipolentes son los que tienen misma dirección, sentido y módulo, lo único que cambia es el origen del vector. Las coordenadas son las mismas en todos los vectores equipolentes.

Ejemplo: A(-2,-3), B(2,-1), C(1,1), D(5,3) $\overrightarrow{AB}=(4,2)$, $\overrightarrow{CD}=(4,2)$



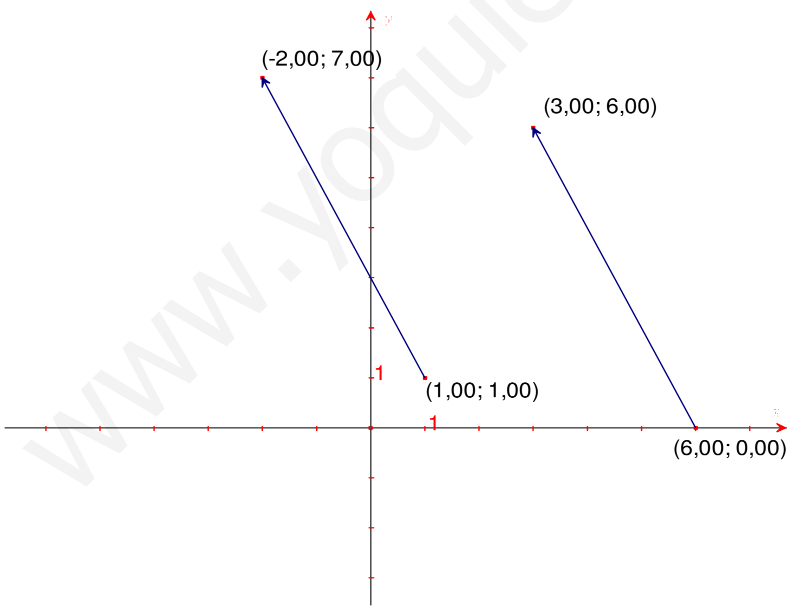
***Definición*:** vector libre es el conjunto de todos los vectores equipolentes, se suelen denotar con una letra minúscula con vector arriba. A la hora de representarlos se suele tomar el vector cuyo origen está en el origen de coordenadas.

Ejemplo $\vec{v} = (4{,}2)$



Ejercicios

Ejercicio 1. Representar los vectores $\overrightarrow{AB}$ **y** $\overrightarrow{CD}$ siendo A(1,1), B(-2,7), C(6,0), D(3,6) y observa que son equipolentes. Calcula las coordenadas y el módulo.



$\overrightarrow{AB}$=$\overrightarrow{CD}$=(-3,6)

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{9+36}=$
$=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

Ejercicio 2. Dados los puntos A(3,-1), B(4,6) y C(0,0) hallar el punto D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ **y** $\overrightarrow{CD}$ sean equipolentes.

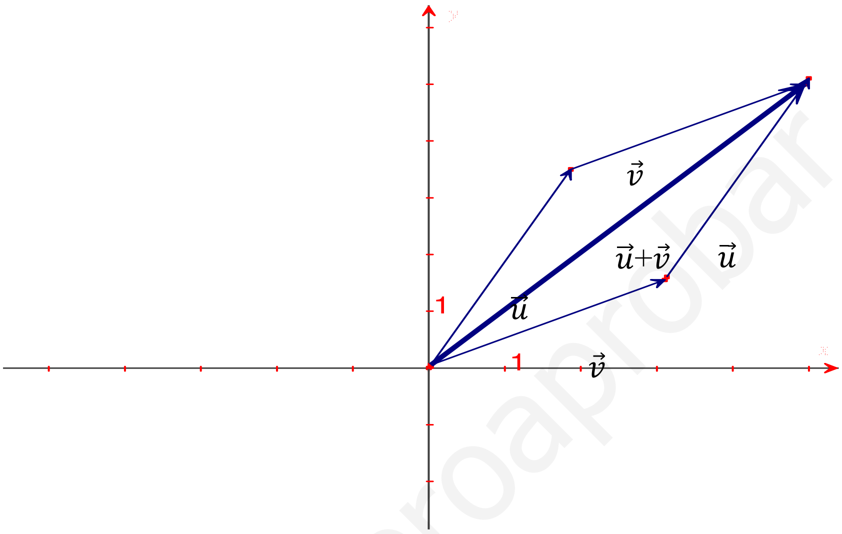
D(x,y), $\overrightarrow{AB}=(4-3{,}6+1)=(1{,}7)$ $\overrightarrow{CD}=(x-0, y-0)$. Como son equipolentes se cumple $\overrightarrow{AB}$=$\overrightarrow{CD}$ → x=1, y=7→ D(1,7)

2. Operaciones con vectores

2.1. Suma y resta de vectores

La suma de dos vectores $\vec{u}$=(x_1,y_1) y $\vec{v}$=(x_2,y_2) es otro vector libre que se denota como $\vec{u}+\vec{v}$ =(x_1+x_2,y_1+y_2). Gráficamente el vector suma es que se obtiene de la siguiente forma:

- Se sitúan los dos vectores con mismo origen
- A partir de los dos vectores se genera un paralelogramo
- El vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ es la diagonal del paralelogramo

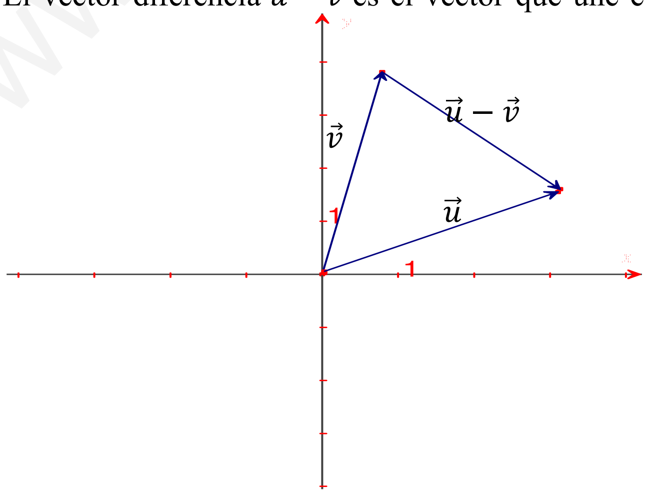


Propiedades:

- Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

La diferencia de dos vectores $\vec{u}$=(x_1,y_1) y $\vec{v}$=(x_2,y_2) es otro vector libre que se denota como $\vec{u}-\vec{v}$ =(x_1-x_2,y_1-y_2). Gráficamente el vector diferencia es que se obtiene de la siguiente forma:

- Se sitúan los dos vectores con mismo origen
- El vector diferencia $\vec{u}-\vec{v}$ es el vector que une el extremo de $\vec{v}$ con el de $\vec{u}$



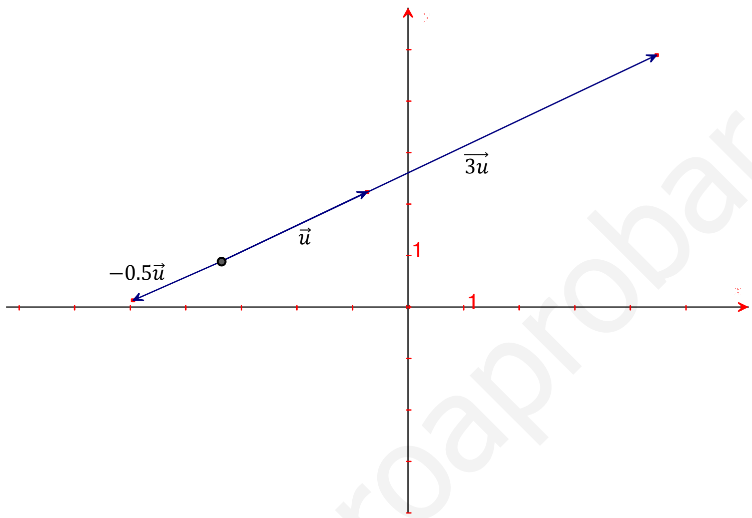
 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2.2. Producto de un número real por un vector.

El producto de un vector libre $\vec{u}$=(x,y) por un número real λ es otro vector libre $\lambda\cdot\vec{u}$ = (λx, λy) tal que se cumple:

- Misma dirección
- El módulo: $|\lambda\cdot\overrightarrow{u}|=|\lambda|\cdot|\vec{u}|$
- El sentido es tal que si λ>0 mismo sentido y si λ<0 sentido contrario

Ejemplo gráfico:

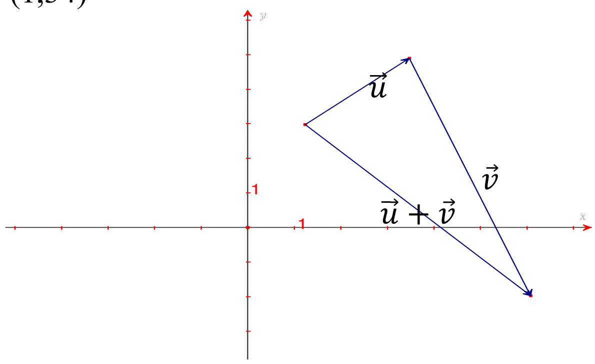


Ejemplo analítico: $\vec{u}=(3{,}4)$, $2\cdot\ \vec{u}=(6{,}8)$ → módulo $|\ \vec{u}\ |=\sqrt{9+16}=5$, $|2\vec{u}|=\sqrt{36+64}=2\cdot 5=10$

Ejercicio 3.

a) Representar los vectores $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ siendo A(1,3), B(4,5)y C(6,-2). Halla sus coordenadas
b) Representar $\vec{u}$+$\vec{v}$ y obtén las coordenadas
c) Representar 3$\vec{u}$, -2$\vec{u}$, 0$\vec{v}$ y hallar sus coordenadas
d) Representa y halla las coordenadas de 3$\vec{u}$-4$\vec{v}$

a) $\overrightarrow{AB}=(3{,}2), \overrightarrow{BC}=(2,-7)$
b) $\vec{u}$+$\vec{v}$=(5,-5)
c) $3\vec{u}=(9{,}6), -2\vec{u}=(-6,-4),\ 0\vec{v}=(0{,}0)$
d) 3$\vec{u}$-4$\vec{v}$=(9,6)-(8,-28)=(1,34)

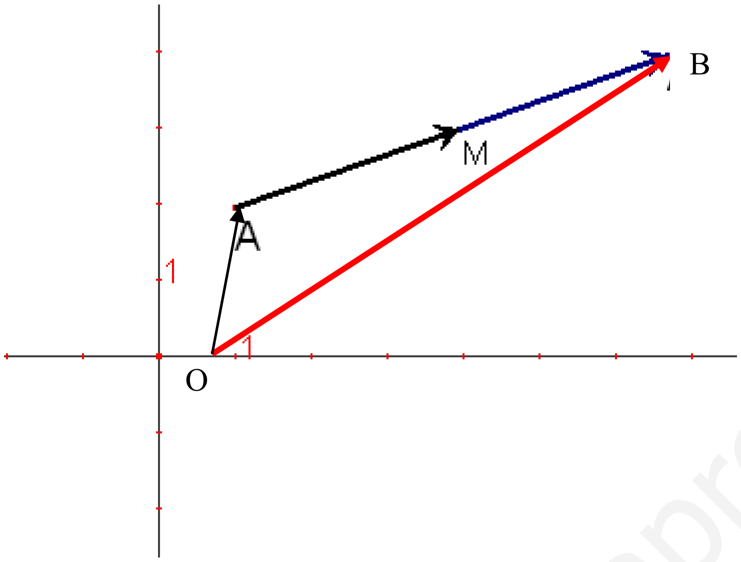


 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2.3. Punto medio de dos puntos

En este apartado seremos capaces de calcular el punto medio un segmento a partir de la suma de vectores.

Consideramos el segmento con extremos $A(x_a,y_a)$ y $B(x_b,y_b)$ y vamos a determinar el punto medio $M(x_m,y_m)$. Observa la figura:



$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{AM} \rightarrow \overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{AM}$

Expresando los vectores en coordenadas:

$(x_b-x_a,y_b-y_a)=2\cdot(x_m-x_a,y_a-y_m) \rightarrow \begin{cases} x_b = x_a + 2(x_m - x_a) \\ y_b = y_a + 2(y_m - y_a) \end{cases}$

De donde despejando obtenemos las coordenadas de M:

$$\boxed{x_m = \frac{x_a + x_b}{2} \qquad y_m = \frac{y_a + y_b}{2}}$$

Ejercicio 4: Hallar el punto medio del segmento de vértices A(1,3), B(2,-1). Dividir el segmento anterior en tres partes

a) $M(\frac{1+2}{2},\frac{3-1}{2}) \rightarrow M(1.5,1)$

b) Llamemos $M_1(x,y)$ y $M_2(x',y')$ a los puntos que dividen el segmento AB en tres partes, se cumple:

$\overrightarrow{AB}=3\cdot\overrightarrow{AM_1} \rightarrow (1,-4)=3(x-1,y-3) \rightarrow \begin{array}{c} 1 = 3x - 3 \rightarrow x = \frac{4}{3} \\ -4 = 3y - 9 \rightarrow y = \frac{5}{3} \end{array}$

$2\cdot\overrightarrow{AM}_1=\overrightarrow{AM}_2 \rightarrow 2\cdot(\frac{4}{3}-1,\frac{5}{3}-3)=(x'-1,y'-3) \rightarrow \begin{array}{c} \frac{2}{3} = x - 1 \rightarrow x = \frac{5}{3} \\ -\frac{8}{3} = y - 3 \rightarrow y = \frac{1}{3} \end{array}$

3. Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores libres $\vec{u}=(u_x,u_y)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y)$ es un número cumple:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ Siendo $\widehat{\vec{u},\vec{v}}$ el ángulo que forman los dos vectores.

Se puede calcular de forma analítica de la siguiente forma:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y$

Si dos vectores son perpendiculares se cumple que $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=0$ y por tanto su producto escalar es nulo: $\vec{u}\perp\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Las dos definiciones del producto escalar nos permiten calcular el ángulo que forma los dos vectores, simplemente despejando $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ de las dos ecuaciones:

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y}{\sqrt{{u_x}^2+{u_y}^2}\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}}$$

Ejercicio 5: calcular el producto escalar de $\vec{u}=(-2,5)$ y $\vec{v}=(1,3)$ así como el ángulo que forman los dos vectores.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y=-2\cdot1+5\cdot3=13$

$|\vec{u}|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$

$|\vec{v}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{13}{\sqrt{29}\sqrt{10}}=\frac{13}{\sqrt{290}} \rightarrow \widehat{\vec{u},\vec{v}}=\arccos(\frac{13}{\sqrt{290}})=40{,}23^\circ$

Ejercicio 6: Calcular el valor de a para que el vector $\vec{u}=(a,1)$ forme un ángulo de 30º con el vector $\vec{v}=(2,3)$:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=2a+3$

$|\vec{u}|=\sqrt{a^2+1}$

$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{2a+3}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{13}}=\cos(30)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$4a+6=\sqrt{3}\sqrt{13}\sqrt{a^2+1}$

$(4a+6)^2=3\cdot13(a^2+1)$

$16a^2+36+48a=39a^2+39 \rightarrow 23a^2-48a+3=0 \rightarrow a=\frac{48\pm\sqrt{2028}}{46}=\begin{cases}\frac{24}{23}+\frac{13\sqrt{3}}{23}\\ \frac{24}{23}-\frac{13\sqrt{3}}{23}\end{cases}$

Comprobando sólo válida la primera solución $\rightarrow a=\frac{24}{23}+\frac{13\sqrt{3}}{23}$

4. Combinación lineal de vectores

Un vector $\vec{w}$ es combinación lineal de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si existen dos números reales que llamaremos λ y μ tal que $\vec{w}=\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{v}$

Ejemplo:

(3,-2)=3·(1,0)-2·(0,1)

(7,2)=2·(2,1)+3·(1,0)

Ejercicio 7: Calcular λ y μ:

a) (6,1)= λ·(2,1)+ μ·(1,-2)
b) (1,-6)= λ·(1,0)+ μ(1,-3)
c) (3,-2)= λ(1,1)+μ(2,2)

a) $\left.\begin{array}{r} 6=2\lambda+\mu \\ 1=\lambda-2\mu \end{array}\right\} \rightarrow$ λ=13/5, μ=4/5

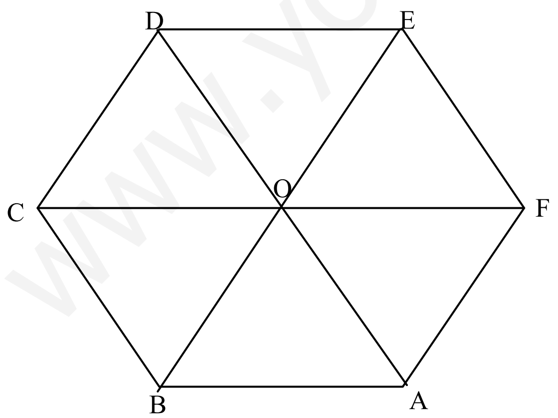
b) $\left.\begin{array}{r} 1=\lambda+\mu \\ -6=-3\mu \end{array}\right\} \rightarrow$ λ=-1, μ=2

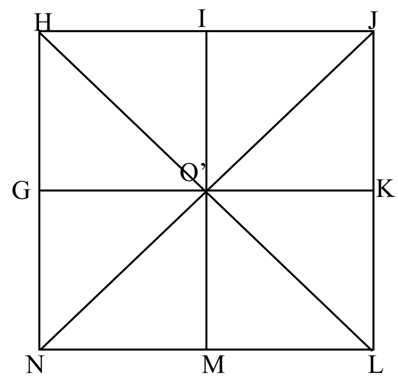
c) $\left.\begin{array}{r} 3=\lambda+2\mu \\ -2=\lambda+2\mu \end{array}\right\}$ Incompatible.

Si los dos vectores no son proporcionales todo vector se puede poner como combinación lineal de éstos (**linealmente independientes**).

Si son proporcionales esto no ocurre, ver ejemplo c). Se llaman **linealmente dependientes**

Ejercicio 8: rellenar los cuadrados con números:





1) $\overrightarrow{AF}=\ \overrightarrow{OB}+\ \overrightarrow{CO}$
2) $\overrightarrow{CF}=\ \overrightarrow{DO}+\ \overrightarrow{BO}$
3) $\overrightarrow{BE}=\ \overrightarrow{CO}+\ \overrightarrow{OD}$
4) $\overrightarrow{DE}=\ \overrightarrow{OB}+\ \overrightarrow{FE}$
5) $\overrightarrow{BE}=\ \overrightarrow{OB}+\ \overrightarrow{CO}$

1) $\overrightarrow{GO'}=\ \overrightarrow{NO'}+\ \overrightarrow{HO'}$
2) $\overrightarrow{IO'}=\ \overrightarrow{IJ}+\ \overrightarrow{JO'}$
3) $\overrightarrow{NJ}=\ \overrightarrow{JO'}+\ \overrightarrow{GO'}$
4) $\overrightarrow{O'L}=\ \overrightarrow{O'M}+\ \overrightarrow{LM}$

Solución

1) $\overrightarrow{AF}$=-1·$\overrightarrow{OB}$+0·$\overrightarrow{CO}$
2) $\overrightarrow{CF}$=2·$\overrightarrow{DO}$+2·$\overrightarrow{BO}$
3) $\overrightarrow{BE}$=2·$\overrightarrow{CO}$+2·$\overrightarrow{OD}$
4) $\overrightarrow{DE}$=-1·$\overrightarrow{OB}$-1·$\overrightarrow{FE}$
5) $\overrightarrow{BE}$=-2·$\overrightarrow{OB}$+0·$\overrightarrow{CO}$

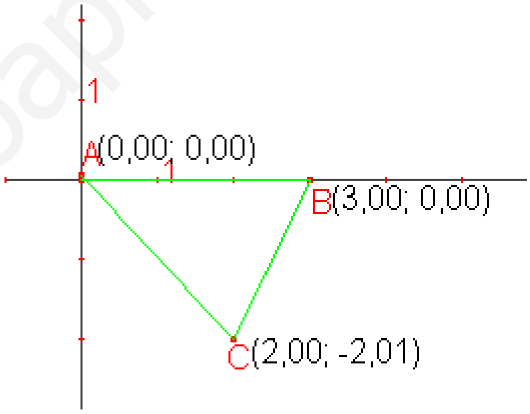
1) $\overrightarrow{GO'}$=0.5·$\overrightarrow{NO'}$+0.5·$\overrightarrow{HO'}$
2) $\overrightarrow{IO'}$=1·$\overrightarrow{IJ}$+1·$\overrightarrow{JO'}$
3) $\overrightarrow{NJ}$=-2·$\overrightarrow{JO'}$+0·$\overrightarrow{GO'}$
4) $\overrightarrow{O'L}$=1·$\overrightarrow{O'M}$-1·$\overrightarrow{LM}$

5. Distancia entre dos puntos

La distancia de dos puntos A y B, d(A,B), coincide con el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$, ya que recordemos que el módulo media el tamaño del vector, es decir la distancia entre el origen A y el extremo B del vector:

d(A,B)=| $\overrightarrow{AB}$|=$\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

Ejercicio 9: Sea el triángulo de vértices A(0,0), B(3,0), C(2,-2). 1) Determinar si el triángulo es isósceles, equilátero o escaleno. 2) calcular los ángulos y ver si es acutángulo, rectángulo o obtusángulo



Viendo la distancia entre los vértices obtendremos el tamaño de los lados, y así podremos discernir si es equilátero, isósceles o escaleno.

1) c=d(A,B)=|$\overrightarrow{AB}$|=|(3,0)|=3

b=d(A,C)=| $\overrightarrow{AC}$|=|(2,-2)|=$\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$

a=d(B,C)= | $\overrightarrow{BC}$|=|(-1,-2)|=$\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

Los tres lados son distintos, luego es **escaleno**.

2) Veamos los ángulos:

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \frac{6}{3\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \hat{A} = 45^\circ$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow \hat{B} = 63{,}4^\circ$$

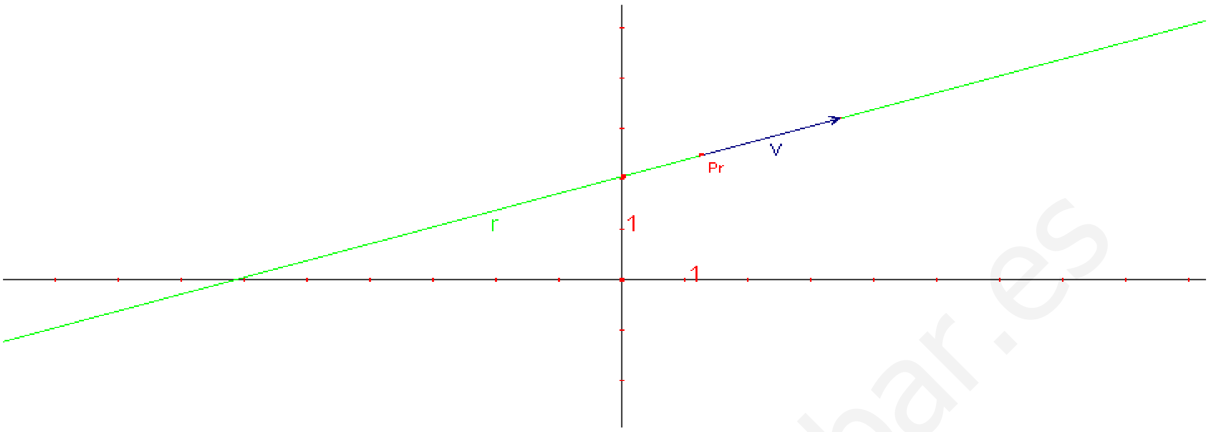
$$\cos(\hat{C}) = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{|\overline{CB}|\cdot|\overline{CA}|} = \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{40}} = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow \hat{C} = 71{,}6^\circ$$

Acutángulo

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

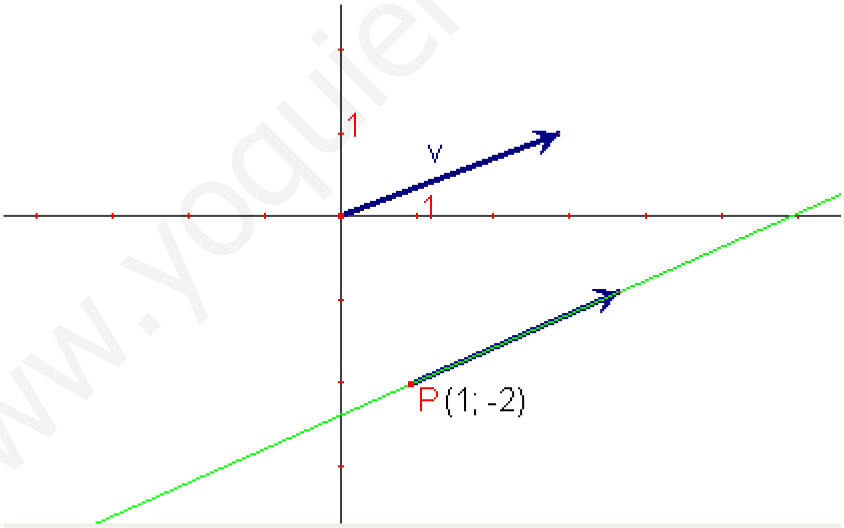
6. Ecuación de la recta

Una recta en el plano, que llamaremos r, está caracterizada por un punto $P_r(x_0,y_0)$ por donde pasa la recta y un vector director $\overrightarrow{v_r}=(v_x,v_y)$ que nos marca la dirección de la recta. Veámoslo gráficamente:



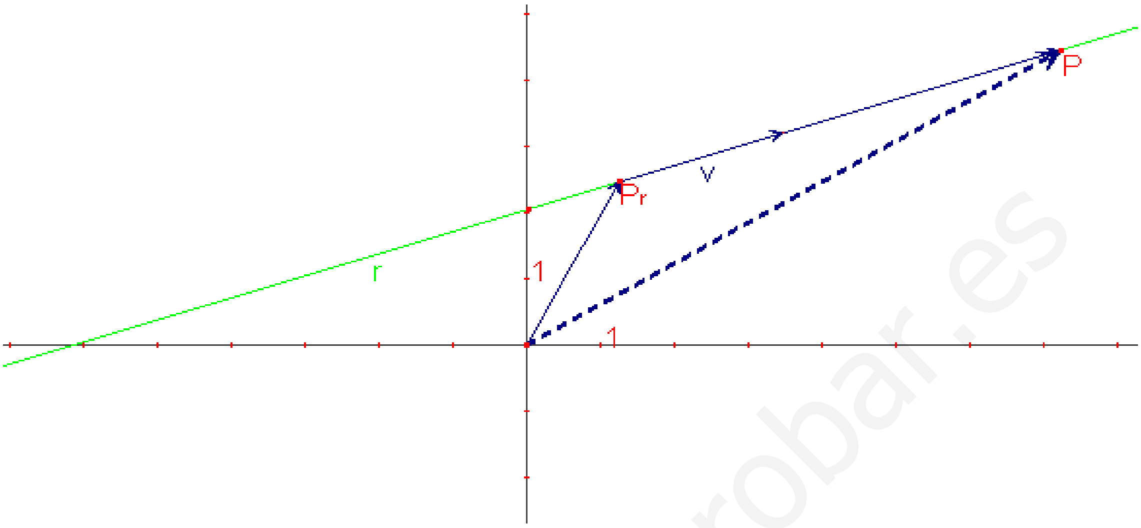
También queda definida con dos puntos, P_r y P_r', ya que estos dos puntos definen el vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{P_rP'_r}$.

Ejercicio 10: Representar la recta que cumple: pasa por P(1,-2) y $\overrightarrow{v_r}=(3,1)$



6.1. Vectorial y paramétrica

Todo punto P(x,y) de la recta tiene mismas coordenadas que el vector $\overrightarrow{OP}=(x,y)$. El vector $\overrightarrow{OP}$ se puede expresar como suma del vector $\overrightarrow{OP}_r$, con P_r punto de la recta, y de un número de veces el vector director $\overrightarrow{v_r}$. Veamos un ejemplo:



De esta forma todo punto P(x,y) de la recta se podrá expresar como

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}_r+t\cdot\overrightarrow{v_r}$. Con t un número real.

Expresándolo en coordenadas tenemos la ecuación vectorial de la recta:

$$\boxed{r: (x,y)=(x_0,y_0)+(t\cdot v_x, t\cdot v_y)}$$ **Ecuación vectorial**

La ecuación en paramétricas se obtiene separando las dos coordenadas:

$$\boxed{r:\begin{cases} x = x_0 + t\cdot v_x \\ y = y_0 + t\cdot v_y \end{cases}}$$ **Ecuación en paramétricas**

Ejemplo: expresar la recta que pasa por los puntos A(1,2) y B(3,5) en forma vectorial y paramétrica. Obtener dos puntos más de la recta:

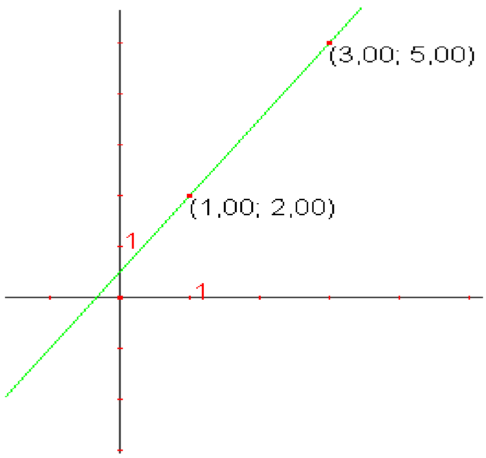
1) Tomemos uno de los puntos como punto de la recta, por ejemplo A: $P_r(1,2)$
2) El vector director es el vector que forman los puntos A y B→ $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}$=(2,3)

Vectorial → r:(x,y)=(1,2)+t(2,3)

Paramétricas $r:\begin{cases} x = 1 + 2\cdot t \\ y = 2 + 3\cdot t \end{cases}$

Puntos de la recta dando valores a t:

- t=0 → (x,y)=(1,2) que es A
- t=1 → (x,y)=(3,5) que es B
- t=0.5 → (x,y)=(2,3.5)
- t=-1 →(x,y)=(-1,-1)



Ejercicio 11: calcular la ecuación vectorial y paramétrica de una recta que pasa por los puntos A(0,1) y B(1,-1). Obtener dos puntos más de la recta:

Tomemos uno de los puntos como punto de la recta, por ejemplo A: $P_r(0,1)$

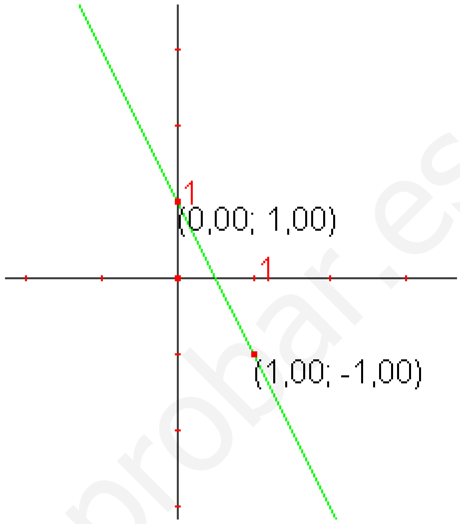
El vector director es el vector que forman los puntos A y B→ $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(1,-2)$

Vectorial → r:(x,y)=(0,1)+t(1,-2)

Paramétricas→ r: $\begin{cases} x = 0 + 1\cdot t \\ y = 1 - 2\cdot t \end{cases}$

Puntos de la recta dando valores a t:

- t=0 → (x,y)=(0,1) que es A
- t=1 → (x,y)=(1,-1) que es B
- t=0.5 → (x,y)=(0.5,0)
- t=-1 →(x,y)=(-1,3)



6.2. Ecuaciones de la recta continua y general

Ecuación continua:

En las dos ecuaciones paramétricas de r lo que vamos a hacer es eliminar la t del sistema y relacionar "y" con "x" como si fuera una función.

Despejando t de la ecuación en paramétricas tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x - x_0}{v_x} \\ t = \dfrac{x - y_0}{v_y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y}$$

La ecuación de la recta r que pasa por el punto $P(x_0,y_0)$ y con vector director $\overrightarrow{v_r}=(v_x,v_y)$, siempre que $v_x\neq 0$ y $v_y\neq 0$ viene dada por la expresión:

$$\boxed{r: \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y}}$$

Ecuación continua de la recta

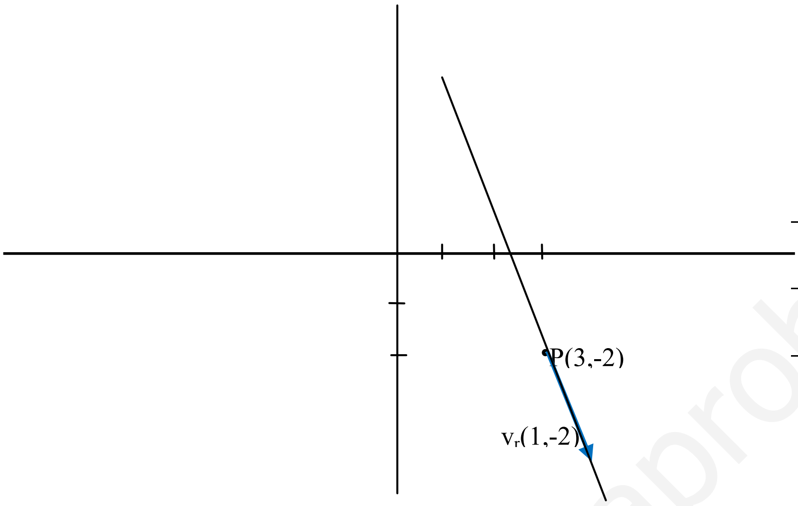
> *Nota:*
>
> Si $v_x=0$ entonces es una recta paralela al eje OY → r: $x=x_0$
>
> Si $v_y=0$ entones es una recta paralela al eje OX → r: $y=y_0$

Ejemplos:

1) la recta que pasa por $P_r(3,-2)$ y $\vec{v_r}=(1,-2)$ tiene la ecuación continua:

$$r: \frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-2}$$

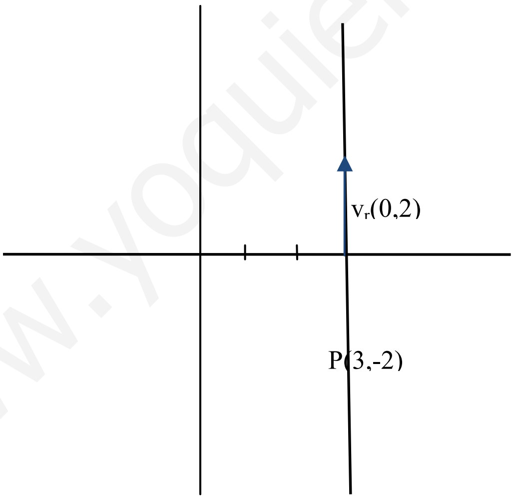
Para hallar otros puntos de la recta hacemos la tabla de valores



x	y
3	-2
0	4
-1	6

2) La recta que pasa por $P_r(3,-2)$ y $\vec{v_r}=(0,2)$ tiene la ecuación continua:

r: x=3



x	y
3	2
3	1
3	0

<u>Ecuación general</u>: consiste en multiplicar en cruz en la ecuación continua, y ordenar todos los términos en el mismo lado de la igualdad, obteniendo la siguiente expresión:

$v_y(x-x_0)=v_x(y-y_0)$ →operando:

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$ **Ecuación general**

Nota: como veremos en el apartado 6.5 el vector $\vec{n}=(A,B)$ es normal a la recta.

Ejemplo 1: la recta que pasa por $P_r(3,-2)$ y $\overrightarrow{v_r}$=(1,-2) tiene la ecuación continua:

r: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-2}$ → -2x+6=y+2

r: 2x+y-4=0

6.3. Ecuación punto pendiente y explícita de la recta

Ecuación punto pendiente: se llama así porque se obtiene fácilmente a partir de conocer un punto de la recta $P(x_0,y_0)$ y la pendiente m.

La pendiente m=$\frac{v_y}{v_x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ y nos indica el crecimiento o decrecimiento de la recta:

m>0 crece

m<0 decrece

m=0 no crece ni decrece (paralela al eje OX)

m=$\frac{v_y}{0}=\infty$ crece infinito (paralela eje OY)

Se puede obtener la ecuación a partir de la continua:

$\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}$ → $(y-y_0)=v_y/v_x(x-x_0)$:

$\boxed{(y-y_0)=m\cdot(x-x_0)}$ **Ecuación punto pendiente**

Si en vez de conocer $\overrightarrow{v_r}$ conocemos dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_0(x_0,y_0)$ la pendiente será (recordemos que $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{P_1P_0}$):

m=$\frac{v_y}{v_x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$

Ecuación explícita de la recta: se obtiene despejando la y de la ecuación general, de la ecuación punto pendiente o de la continua:

$\boxed{y=m\cdot x+n}$ **Ecuación explícita**

El valor de n se llama ordenada en el origen pues el valor de y cuando x=0. Así la recta r pasará por el punto (0,n).

Ejercicio 12: calcular la ecuación de la recta en forma punto pendiente, explícita, general, vectorial y paramétrica sabiendo que pasa por el punto $P_1(1,3)$ y $P_0(0,-2)$.

Calculemos el vector director: $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{P_1P_0}$=(-1,-5)

$$m=\frac{-5}{-1}=5$$

- Ecuación punto pendiente: r: (y+2)=5·(x-0)
- Ecuación explícita: r: y=5x-2
- Ecuación general r:y-5x+2=0
- Ecuación vectorial r:(x,y)=(0,-2)+t(-1,-5)
- Ecuación paramétrica r: $\begin{cases} x = 0 - t \\ y = -2 - 5t \end{cases}$

6.4 Rectas paralelas y perpendiculares

Paralelas: dos rectas paralelas serán las que tengan los vectores directores proporcionales, de tal forma que estos tengan misma dirección. Veamos como por tanto tienen misma pendiente:

$r_1 \rightarrow \overrightarrow{v_1} = (v_{1x}, v_{1y})$

$r_2 \rightarrow \overrightarrow{v_2} = (v_{2x}, v_{2y}) = k \cdot (v_{1x}, v_{1y}) = (k \cdot v_{1x}, k \cdot v_{1y})$

$$m_2 = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \frac{k \cdot v_{1y}}{k \cdot v_{1x}} = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = m_1$$

Perpendiculares: dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares, y por tanto su producto escalar es cero. Una forma de conseguir un vector perpendicular a uno dado, $\overrightarrow{v_1} = (v_{1x}, v_{1y})$, es cambiar las coordenadas x por y, y un signo de una de las dos coordenadas$\rightarrow \overrightarrow{v_2} = (v_{1y}, -v_{1x})$. Veámoslo y relacionemos sus pendientes:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (v_{1x}, v_{1y}) \cdot (v_{1y}, -v_{1x}) = -v_{1x} \cdot v_{1y} - v_{1x} \cdot v_{1y} = 0 \rightarrow \overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2}$$

$$m_2 = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = -\frac{v_{1x}}{v_{1y}} = -\frac{1}{m_1}.$$

Ejemplo y=$\frac{2}{3}$x+1 es perpendicular a y=$-\frac{3}{2}$x-3.

> ***Conclusión:***
>
> r∥r ‘→ m=m’
>
> r⊥r’ →m=-1/m’

Ejercicio 14*:* dada la recta r: 2y=-3x+4, calcular:

a) La recta paralela a esta que pasa por P(1,-2) en general y continua
b) La recta perpendicular que pasa por P(0,1) en continua

a) Primero calculemos la pendiente de r despejando y → y=$-\frac{3}{2}$x+2, m=$-\frac{3}{2}$

r' : y+2=$-\frac{3}{2}$(x-1)→ r: y=$-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$.

Para pasarla a continua calculemos un vector director, dos métodos

i) Calculamos otro punto P_2(5, -8) →$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{PP_2}$=(4,-6)
ii) A partir de la pendiente m=$-\frac{3}{2}$ → $\overrightarrow{v_r}$= (2,-3)

r': $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}$

b) m'=-1/m=2/3 → r: y-1=2/3(x-0) →r': y=2/3x+1

r': $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}$

6.5. Vector normal a la recta

Llamamos vector normal a la recta, a todo vector que sea perpendicular a la recta, y por tanto perpendicular al vector director de la misma $\vec{v}_r=(v_x,v_y)$. Recordemos que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero, luego una forma sencilla de calcular un vector normal es cambiar las coordenadas de orden y a una de ellas cambiarla de signo: $\vec{n}=(-v_y,v_x)$.

Comprobémoslo: $\vec{v}_r\cdot\vec{n}=(-v_x\cdot v_y+v_y\cdot v_x)=0$

Por otro lado cuando calculábamos la ecuación general de la recta r, los valores de A y B de la ecuación (r:Ax+By+C=0) eran A=v_y y B=-v_x por tanto un vector normal de la recta es $\vec{n}=(A,B)$ con A y B coeficientes de x e y en la ecuación general de la recta.

Ejemplo: un vector normal a la recta r: 3x-y+4=0 es $\vec{n}=(3,-1)$

Ejercicio 14: calcular la recta que tiene como vector normal $\vec{n}$=(5,3) y pasa por P(2,-4).

Varias formas:

1) A partir de la ecuación general → A=5, B=3, r: 5x+3y+C=0. Como P∈r cumple 5·2+3·(-4)+C=0 → C=2. Por tanto la ecuación de la recta es r: 5x+3y+2=0

2) A partir de la ecuación punto pendiente m_{perp}=3/5 → m=-5/3. r: y+4=-5/3(x-2)

3) Ecuación vectorial o continua $\vec{v}_r=(-3,5)$ → r:(x,y)=(2,-4)+t(-3,5) ó $r:\frac{x-2}{-3}=\frac{y+4}{5}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

7. Posición relativas de dos rectas

En este apartado veremos las posiciones relativas entre dos rectas, que pueden ser:

- **Secantes**: se cortan en un punto
- **Paralelas**: si no tienen ningún punto en común (misma pendiente, o vector director)
- **Coincidente**: son la misma recta (dos puntos en común).

La posición relativa la hemos estudiado indirectamente cuando veíamos las soluciones de un sistema, ya que:

- si dos rectas son paralelas no se cortan y no tienen solución. Sistema incompatible
- si son secantes se cortan en un punto y por tanto una solución. Sistema compatible determinado
- si son coincidentes son la misma recta e infinitas soluciones. Sistema compatible indeterminado.

Si expresamos las dos rectas en forma general, tenemos

$$\begin{cases} r: Ax + By + C = 0 \\ r': A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

a) Secantes si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ (distinta pendiente)

b) Paralelas si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ (misma pendiente, pero no mismos puntos)

c) Coincidentes si $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} = \frac{C}{C'}$ (misma pendiente y punto en común)

8. Ángulo entre dos rectas

En este apartado vamos a ver la forma de obtener el ángulo que forman dos rectas entre sí. De los dos ángulos que forman tomaremos el menor de ellos. En el caso de que sean paralelas o coincidentes el ángulo será de 0º.

Es fácil calcular el ángulo entre dos rectas si nos damos cuenta que es el mismo que forman sus dos vectores directores. Calculamos así el ángulo de las rectas a partir del ángulo que forman sus vectores directores.

Sean así dos rectas r y r' con vectores directores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_{r'}}$, el ángulo que forman es la siguiente:

$$\angle(r, r') = \angle(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_{r'}}) = \arccos\frac{\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_{r'}}}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_{r'}}|}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 15: calcular el ángulo que forman estas dos rectas:

$$r: 2x-3y+1=0$$
$$r': -5x+2y+2=0$$

Primero calculemos sus vectores directores, haremos cada uno de ellos por métodos diferentes.

$\overrightarrow{v_r}$ → calculamos dos puntos $P_1(0,1/3)$, $P_2(-1/2,0)$ $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{P_1P_2}$ =(-1/2,-1/3). Podemos usar uno proporcional más sencillo → $\overrightarrow{v_r}$=-6·(-1/2,-1/3)=(3,2)

$\overrightarrow{v_{r'}}$ → calculamos la pendiente de r despejando la y→ y=5/2x-1 , luego m=5/2 y entonces $\overrightarrow{v_{r'}}$ =(2,5). Otra opción es a partir de $\vec{n}=(-5,2)\rightarrow \overrightarrow{v_{r'}}$=(2,5)

$$\angle(r, r') = \angle(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_{r'}}) = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_{r'}}}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_{r'}}|}\right) = \arccos\left(\frac{(3,2)\cdot(2,5)}{\sqrt{13}\sqrt{29}}\right) = \arccos\left(\frac{16}{\sqrt{377}}\right) = 34{,}5^\circ$$

9. Distancia entre puntos y rectas

En este apartado queremos calcular la distancia entre una recta (con vector director $\vec{v}_r=(v_x,v_y)$ y punto de la recta $P(x_p,y_p)$) y un punto arbitrario $Q(x_q,y_q)$.

Gráficamente la forma de realizarlo se realiza de la siguiente forma:

1. Recta perpendicular, s, a la recta r ($\vec{v}_s=(-v_y,v_x)$ por el punto Q:
   $s:(x,y)=(x_q,y_q)+t\cdot(-v_y,v_x)$
2. Calcular el punto de intersección de r y s, que llamaremos R.
3. La distancia entre r y Q es la distancia entre R y Q.

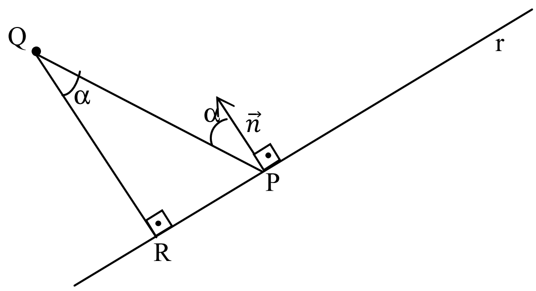
Analíticamente podemos hacerlo también así (R será la solución al sistema formado por las ecuaciones de r y s), aunque veremos una fórmula que nos simplifica el cálculo:

Sea la recta r con ecuación general r:Ax+By+C=0 (con lo que el vector normal a r es $\vec{n}=(A,B)$) y el punto Q con coordenadas $Q(Q_x,Q_y)$:

$$d(r,Q)=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A\cdot x_q+B\cdot y_q+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Demostración: Dibujemos la recta r, con sus parámetros, y el punto Q:



Los ángulos $\widehat{RQP}$ y el formado por el vector normal, $\vec{n}$, y el segmento PQ son iguales al estar formado por lados perpendiculares. Le denotaremos como ángulo α.

$$d(Q,r)=d(Q,R)=\left|\overrightarrow{QR}\right|$$

$$(1)\ \cos(\alpha)=\frac{\left|\overrightarrow{QR}\right|}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|}\rightarrow\left|\overrightarrow{QR}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\cos(\alpha)$$

$$(2)\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(\alpha)\rightarrow\cos(\alpha)=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot|\vec{n}|}$$

$$d(Q,R)=\left|\overrightarrow{QR}\right|\underset{(1)\,y\,(2)}{=}\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\overbrace{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}\right|}^{valor\ abs\,(d>0)}}{|\vec{n}|}=\frac{\left|(x_q-x_p,y_q-y_p)\cdot(A,B)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$

$$=\frac{\left|A\cdot x_q+B\cdot x_q-(A\cdot x_p+B\cdot x_p)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\underset{el\ punto\ Q\ cumple\ \ Ax+By+C=0}{=}\frac{\left|A\cdot x_q+B\cdot x_q-(-C)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|A\cdot x_q+B\cdot x_q+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ejercicio 16. Calcular la distancia entre el punto P(1,-3) y la recta r: 5x+2y-9=0.

$$d(r,Q)=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{\left|A\cdot x_q+B\cdot y_q+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|5\cdot1+2\cdot(-3)-9|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{29}}=\frac{10\sqrt{29}}{29}u$$

Ejercicio 17.Sean las rectas r: 5x+2y-9=0, s: -10x-4y-4=0, t: 15x+6y-27=0 y u:x+y=0

Calcular la distancia entre:

a) r y s

b) r y t

c) r y u

Solución: Antes de calcular las distancias tenemos que ver las posiciones relativas entre las dos rectas:

a) r y s → $\frac{-10}{5}=\frac{-4}{2}\neq\frac{-4}{-9}$ (S. I. Paralelas). Para calcular la distancia vemos la distancia de un punto arbitrario de s a la recta r.

s: -10x-4y-4=0 → Si x=0, y=-1. Q(0,-1)

d(r,s)=d(Q,r)=$\frac{|5\cdot 0+2(-1)-9|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{11}{\sqrt{29}}=\frac{11\cdot\sqrt{29}}{29}\ u$

b) r y t→ $\frac{15}{5}=\frac{6}{2}=\frac{-27}{-9}$ (S.C.I. coincidente). Como son la misma recta su distancia es cero→ d(r,t)=0

c) r y u → $\frac{1}{5}\neq\frac{1}{2}$(S.C.D. se cortan). Como se cortan la distancia entre ellas es cero d(r,u)=0

10. Bisectrices de dos rectas. Incentro de un triangulo

Antes de calcular las bisectrices veamos una definición:

Definición: Vector unitario a otro dado $\vec{v}$ es un vector con misma dirección, sentido pero módulo unidad. Para obtenerlo bastará con dividir $\vec{v}$ por su módulo.

$$\overrightarrow{u_v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}\,|}$$

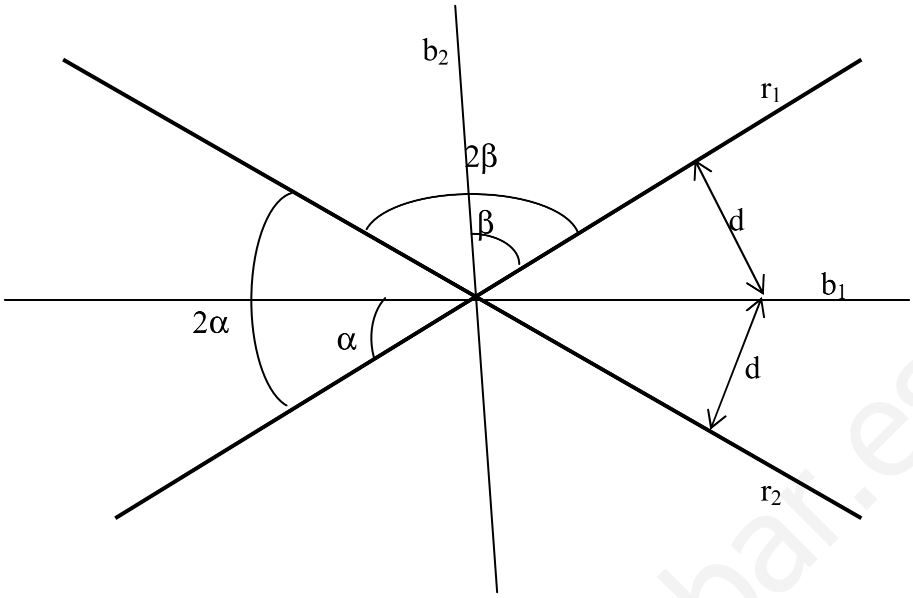
Ejemplo: $\vec{v}=(2,-3)$ calcular su vector unitario

$\overrightarrow{u_v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}\,|}=\frac{(2,-3)}{\sqrt{13}}=(\frac{2\sqrt{13}}{13},-\frac{3\sqrt{13}}{13})$. Comprobemos que el módulo es 1.

$$\overrightarrow{|u_v|}=\sqrt{\frac{4}{13}+\frac{9}{13}}=1$$

10.1. Bisectriz

Definición: la bisectrices de dos rectas r_1 y r_2 son otras dos rectas tal que los ángulos que forman con r_1 y r_2 son la mitad que el ángulo que forman r_1 y r_2. Se cumple también que la distancia de cualquier punto de las bisectrices a las dos rectas es la misma.



Métodos para el cálculo de bisectrices:

Método 1: Calculando en punto de corte de las dos rectas (punto de la bisectiz) y el vector director de la misma.

- El punto: será el de corte de las dos rectas r_1 y r_2 (resolver el sistema)
- El vector director, cada una de las dos bisectrices tendrá un vector director diferente y que obtenemos sumando o restando los vectores directores de r_1 y r_2 unitarios.

Método 2: a partir de la definición de bisectriz de lugar geométrico de los puntos a igual distancia de r_1 y r_2. Si los puntos de la bisectriz son Q(x,y) buscamos aquellos que cumple $d(r_1,Q)= d(r_2,Q)$. Hay dos soluciones, que son las dos bisectices.

Ejemplo: calcular las bisectrices de las rectas r_1: y=3x-2, $r_{2:}$y=-2x+3.

Método 1:

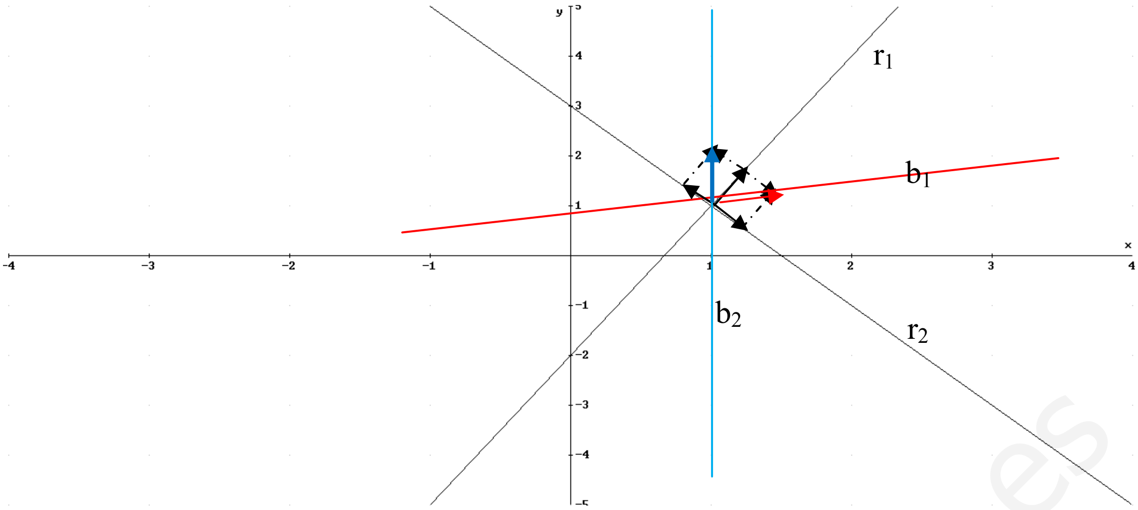
1) calculemos el punto de corte de las dos rectas, que obtenemos resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \rightarrow P(1,\ 1)$$

2) vectores directores

$m_1=3 \rightarrow v_1=(1,3) \rightarrow \overrightarrow{u_{v1}} = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$

$m_2=-2 \rightarrow v_2=(1,-2) \rightarrow \overrightarrow{u_{v2}} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$



Bisectriz b_1: P(1,1)

$\vec{v} = \overrightarrow{u_{v1}} + \overrightarrow{u_{v2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$=(0.76,0.05)

$b_1 : \frac{x-1}{0.76} = \frac{y-1}{0.05} \rightarrow b_1 : -0{,}05x + 0{,}76y - 0{,}71 = 0$

Bisectriz b_2:

P(1,1)

$\vec{v} = \overrightarrow{u_{v1}} - \overrightarrow{u_{v2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{13}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$=(-0.13, 1.84)

$b_2 : -\frac{x-1}{0.13} = \frac{y-1}{1.84} \rightarrow$ b_2:$1.84x + 0.13y - 1.95 = 0$

Método 2: r_1: 3x-y-2=0, r_2:2x+y-3=0

Q(x,y)

d(Q,r_1)= $\frac{|A\cdot x + B\cdot x + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|3x-y-2|}{\sqrt{10}}$

d(Q,r_2)= $\frac{|A\cdot x + B\cdot x + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2x+y-3|}{\sqrt{5}}$

d(Q,r_1)= d(Q,r_2) → $\frac{|3x-y-2|}{\sqrt{10}} = \frac{|2x+y-3|}{\sqrt{5}}$

b_1→ $\sqrt{5}(3x-y-2) = \sqrt{10}(2x+y-3) \rightarrow$ b_1: -0,38x+5.4y+5,01=0

b_2→ $\sqrt{5}(3x-y-2) = -\sqrt{10}(2x+y-3) \rightarrow$ b_2:13,03x+0.93·y-13.95=0

Comprobación que son iguales las bisectrices calculadas:

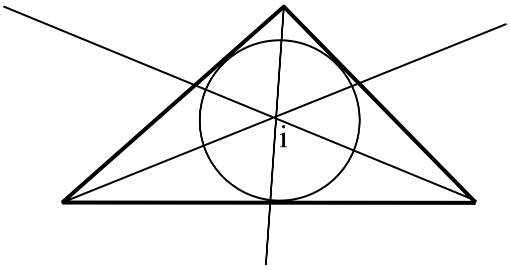
$b_1 \rightarrow \frac{-0.38}{-0.05} = \frac{5.4}{0{,}76} = \frac{-5.01}{-0.71}$ $\quad$ $b_2 \rightarrow \frac{13.03}{1.84} = \frac{0.93}{0.13} = \frac{-13.95}{-1.95}$

Ejercicio18: Calcular la bisectrices de las siguientes dos rectas: r_1: $y=-2x+1$ y r_2:$3y+2x+1=0$

Lo haremos

10.2. Incentro

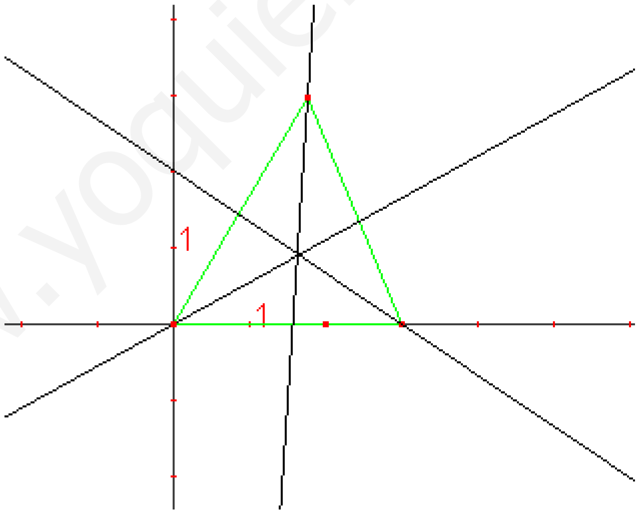
Definición: el incentro de un triángulo es el lugar donde corta las 3 bisectrices internas del mismo. Se cumple que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



Pasos para calcular el incentro:

1. Calcular las bisectrices internas de dos vértices.
2. Calcular el punto de corte de estas dos bisectrices (resolver el sistema)

Ejemplo: Calcular el incentro y las rectas de la aristas del triángulo cuyos vértices son A(0,0), B(3,0), C(2,3). Calcula el radio de la circunferencia inscrita



Calculo de las rectas de las aristas

Recta que pasa por A(0,0) y B(3,0): $m=\dfrac{0-0}{3-0}=0 \rightarrow$ r_1: $y=0$

Recta que pasa por A(0,0) y C(2,3): $m=\dfrac{3-0}{2-0}=\dfrac{3}{2} \rightarrow$ r_2: $y=\dfrac{3}{2}x$

Recta que pasa por B(3,0) y C(2,3): $m=\dfrac{3-0}{2-3}=-3 \rightarrow$ r_3:$y=-3(x-3)$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

1. Calculemos la bisectriz de A y de B:

- La bisectriz de A, b_A: dos vectores $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB} = (3,0)$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC} = (2,3)$. Calculemos los unitarios: $\overrightarrow{u_{v1}} = \frac{(3,0)}{3} = (1,0)$, $\overrightarrow{u_{v2}} = \frac{(2,3)}{\sqrt{13}} = (0.55,0.83)$
- El vector director de b_A→ $\overrightarrow{v_{bA}} = (1,0) + (0.55,0.83) = (1.55,0.83)$ → m=$\frac{0.83}{1.55} = 0.54$.

Luego b_A sabemos m=0.54 y pasa por A(0,0) → b_A: y=0.54x

La bisectriz de B, b_B: dos vectores $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{BA} = (-3,0)$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{BC} = (-1,3)$. Calculemos los unitarios: $\overrightarrow{u_{v1}} = \frac{(-3,0)}{3} = (-1,0)$, $\overrightarrow{u_{v2}} = \frac{(-1,3)}{\sqrt{10}} = (-0.32,0.95)$

El vector director de b_B→ $\overrightarrow{v_{bB}} = (-1,0) + (-0.32,0.95) = (-1.32,0.95)$ → m=$-\frac{0.95}{1.32} = -0.72$

Luego b_B tiene m=-0,72 y pasa por B(3,0)→ b_B : y=-0.72(x-3)

2. Incentro:

$$\left.\begin{array}{l} b_A : y = 0.54x \\ b_B : y = -0{,}72x + 2{,}16 \end{array}\right\} \rightarrow 0.54x = -0{,}72x + 2{,}16 \rightarrow x = 1.71, y = 0.93$$

I(1.71, 0.93)

3. Calculo del radio de la circunferencia inscrita: se calcula viendo la distancia entre el incentro y una de los lados (recta que contiene dicho lado)

Veamos la distancia con la recta r_1: y=0 (que contiene a los vértices A y B) e I(1.71,0.93)

$$d(r_1, I) = \frac{|0.93|}{\sqrt{1}} = 0.93u$$

Ejercicio 19: Calcular el incentro y las rectas de la aristas del triángulo cuyos vértices son A(1,0), B(4,0), C(3,3).

Solución I(2.72, 0.92)

11.Mediatriz de un segmento. Circuncentro de un triángulo

11.1. Mediatriz de un segmento

Definición: La mediatriz de un segmento AB es una recta que cumple:

- Es la perpendicular a la recta AB que pasa por el punto medio
- El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y B.

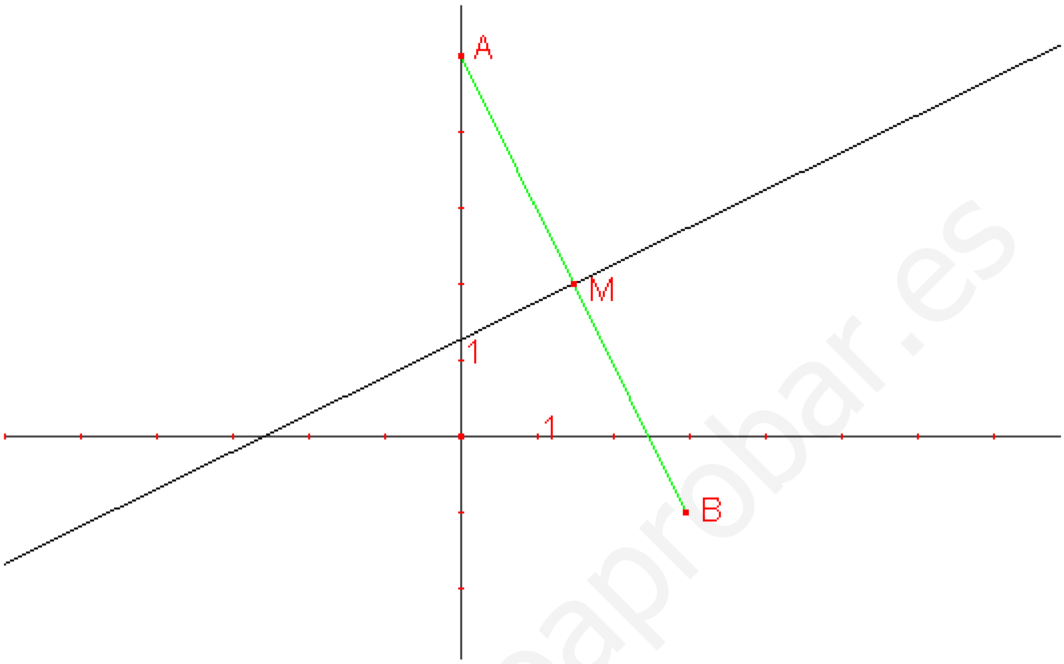
Para calcular la mediatriz no tenemos más que aplicar la definición, así tenemos dos métodos.

Método1: A partir de la primera definición

1) Calculamos el punto medio de AB, que llamaremos M

2) Calculamos la pendiente de la recta que pasa por A B, y luego coma la recta es perpendicular m'=-1/m

Ejemplo: calcular la mediatriz del segmento AB, con A(0,5) y B(3,-1)



1) El punto Medio M=$\left(\frac{3+0}{2},\frac{-1+5}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},2\right)$
2) $\overrightarrow{AB}$ =(3,-6) → m=-6/3=-2 →Luego la mediatriz tiene como pendiente m=1/2

Mediatriz: pasa por M$\left(\frac{3}{2},2\right)$ y m=1/2 → r: y-2=1/2(x-3/2)→ r: y=1/2x+5/4

<u>Método 2</u>: a partir de la segunda definición.

1) Calculamos la distancia de un punto arbitrario P(x,y) de la mediatriz al punto A y al punto B
2) Igualamos las distancias y obtendremos la recta

Ejemplo: calcular la mediatriz del segmento AB, con A(0,5) y B(3,-1)

1) d(P,A)=$\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2}$

   d(P,B)=$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$

2) d(P,A)=d(P,B) → $\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$ →

$x^2+(y-5)^2=(x-3)^2+(y+1)^2$→4y-2x-5=0 → r: y=1/2x+5/4

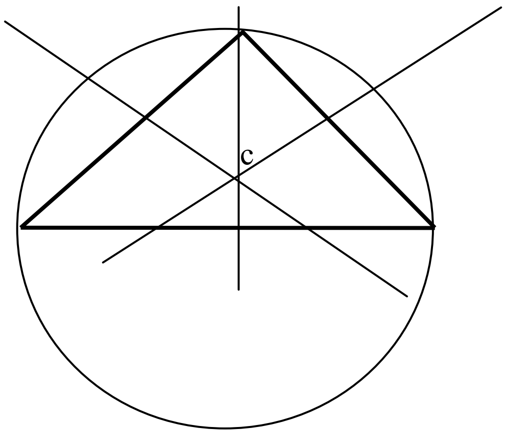
Ejercicio 20: calcular la mediatriz de los puntos A(2,1) y B(-1-2)

Solución:

r: 4x-3y+20=0

11.2. Circuncentro

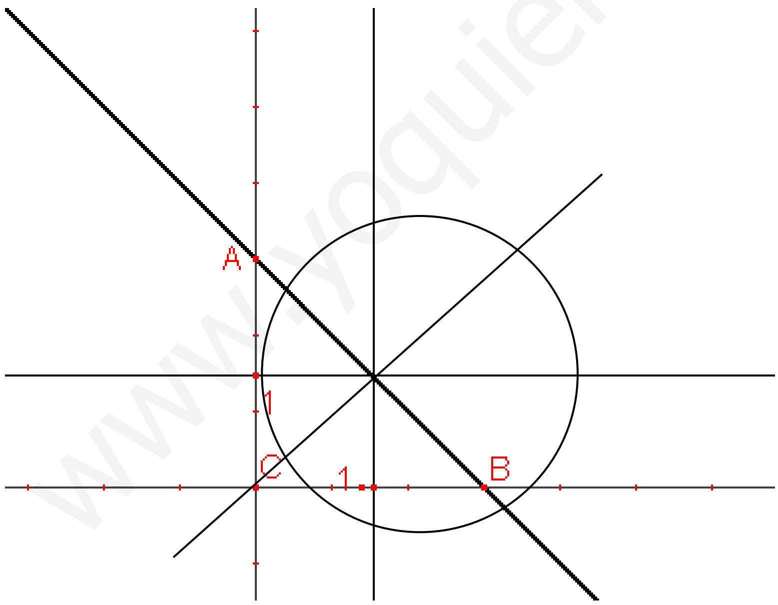
Definición: el circuncentro de un triángulo es el punto que se obtiene de la intersección de las 3 mediatrices. Se cumple que es el centro de la circunferencia que circunscribe el triángulo, ya que el punto donde se cortan las mediatrices equidista de los tres vértices.



Cálculo del circuncentro, dos pasos:

1. Calcular las mediatrices de dos de los tres lados.
2. Calcular la intersección de estas dos mediatrices.

Ejemplo: calcular las mediatrices del triángulo que forma la recta y=-x+3 con los semiejes coordenados positivos. Calcular el circuncentro, el radio de la circunferencia y el área del triángulo



Calculemos primero los puntos de corte de la recta con los ejes coordenados. Son claramente A(0,3), ya que n=3 es la ordenada en el origen y B(3,0).

1) Mediatrices:
   a. Del lado AC → M(0,1.5), y es una recta paralela al eje OX → y=1.5
   b. Del lado CB → M(1.5,0), es una recta paralela al eje OY → x=1.5
   c. Del lado AB→ M(1.5,1.5), $\overrightarrow{AB}=(3,-3)$→ m'=-1, luego m=1→ y-1.5=(x-1.5)→y=x

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2) Circuncentro, sólo necesitamos dos de las tres mediatrices:

$$\begin{cases} x = 1.5 \\ y = 1.5 \end{cases} \rightarrow C(1.5,1.5)$$

3) Radio circunferencia circunscrita es d(c,A)=d(c,B)=d(c,C)=$\sqrt{1.5^2+1.5^2}=2.12u$

Ejercicio 21: Calcular el circuncentro del triángulo con vértices A(1,0), B(0,1), C(0,0)

Solución: C$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

12. Medianas y alturas de un triángulo. Baricentro y ortocentro

12.1. Medianas y alturas

Definición: La mediana de un triángulo es cada una de las rectas que pasa por la mitad de un lado del triángulo y por su vértice opuesto.

Metodología para el cálculo de la mediana de un triángulo:

1. Calculamos el punto medio del lado
2. Calculamos la recta que pasa por este punto medio y el vértice opuesto.

Ejemplo: dado el triangulo ABC con A(2,0), B(3,-1) y C(1,3), calcular la mediana del vértice A.

1. Calculamos el punto medio del lado BC → M=(2,1)
2. La recta buscada pasa por el punto M(2,1) y A(2,0) → m=$\frac{0-1}{2-2}$, no se puede dividir por cero, luego es una recta paralela al eje OY → x=2.

Definición: la altura de un triángulo es cada una de las rectas que pasa por el vértice del triángulo y que es perpendicular al lado opuesto del vértice.

Metodología para el cálculo de la altura.

1. Calculamos la pendiente de la altura sabiendo que es perpendicular al lado opuesto
2. Conocemos la pendiente y un punto de la recta (vértice), luego por la ecuación punto pendiente calculamos la recta pedida.

Ejemplo: dado el triangulo ABC con A(2,0), B(3,-1) y C(1,3), calcular la altura del vértice A.

1. $\overrightarrow{BC}=(-2,4)\rightarrow m_{BC}=\frac{4}{-2}=-2$. Luego la pendiente de la altura de A es la inversa con signo cambiado $\rightarrow m_{h_A}=\frac{1}{2}$
2. h_A: y-0=$\frac{1}{2}(x-2)$

12.2. Baricentro y ortocentro

Definición: el baricentro de un triángulo es el punto donde se cortan las tres medianas. Para calcularlo basta con calcular dos medianas y calcular el punto de corte entre ambas.

Ejemplo: dado el triangulo ABC con A(2,0), B(3,-1) y C(1,3), calcular el baricentro.

La mediana del vértice A ya la habíamos calculado → x=2

La mediana vértice B → M_{AC}=(3/2, 3/2). $\overrightarrow{MB}$=(3/2, -5/2) m=$\frac{-5/2}{3/2}=-\frac{5}{3}$. Luego la mediana es (y+1)= $-\frac{5}{3}$(x-3)→ 3y+5x-12=0

Luego el baricentro es $\begin{cases} x=2 \\ 3y+5x-12=0 \end{cases}$ → x=2, y=2/3

Definición: el ortocentro de un triángulo es el punto donde se cortan las tres alturas. Para calcularlo basta con calcular dos alturas y ver el punto de corte entre ambas.

Ejemplo: dado el triangulo ABC con A(2,0), B(3,-1) y C(1,3), calcular el ortocentro.

La altura del vértice A ya calculada → h_A: y-0=$\frac{1}{2}(x-2)$, → h_A: y=0.5x-1

La altura del vértice B → $\overrightarrow{AC}$=(-1,3) → m'=$\frac{3}{-1}=-3$. Luego como la altura es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ su pendiente es m=$\frac{1}{3}$

h_B: m=$\frac{1}{3}$ y pasa por B(3,-1) → h_B: (y+1)= $\frac{1}{3}$ (x-3)→ h_B: 3y-x+6=0

Luego el ortocentro es $\begin{cases} 3y-x+6=0 \\ y=0.5x-1 \end{cases}$ → y=-4, x=-6

Ejercicios Finales

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 22. Hallar el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}$=(-1,3) y $\vec{c}$=(7,-2).

Podemos hacerlo a partir de un sistema igualando una a una cada coordenada, o de forma más sencilla despejando el vector $\vec{b}$:

$\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \rightarrow \frac{1}{2}\vec{b} = 3\vec{a} - \vec{c} \rightarrow \vec{b} = 6\vec{a} - 2\vec{c}$=(-6,18)-(14,-4)=(-20,22)

Ejercicio 23. Dados los vectores $\vec{a} = (3,-2)$, $\vec{b}$ =(-1,2) y $\vec{c}$=(0,-5) poner el vector $\vec{c}$ como combinación linear de los otros dos:

$\vec{c} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} \rightarrow$(0,-5)=m·(3,-2)+n·(-1,2).

$$\begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Resolviendo el sistema m=$-\frac{5}{4}$ y n=$-\frac{15}{4}$ $\rightarrow$(0,-5)=· $-\frac{5}{4}$(3,-2) $-\frac{15}{4}$·(-1,2).

Ejercicio 24. Dada las rectas r y s de ecuaciones r:2x-y+2=0 y s:x+y-3=0, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de estas dos recta y por el punto P(5,3)

Calculemos la intersección:

$$\begin{cases} r: 2x - y + 2 = 0 \\ s: x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x=\frac{1}{3},\ y=\frac{8}{3} \rightarrow Q\left(\frac{1}{3},\frac{8}{3}\right)$$

Vector director $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{3} - 5, \frac{8}{3} - 3\right) = \left(-\frac{14}{3}, -\frac{1}{3}\right) \rightarrow$ m=1/14

r': y-3=$\frac{1}{14}$(x-5)

Ejercicio 25. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-3,8) y que determina con el sentido positivo de los ejes coordenados un triángulo cuya área es de 6 unidades cuadradas.

De la recta buscada sabemos que pasa por el punto P, nos falta por saber su pendiente m. Que determinaremos a partir de saber el área que forma con los ejes coordenados.

y-8=m(x+3)

Veamos los puntos de corte con los ejes en función de m:

Eje OX (y=0) $\rightarrow$ x=$-\frac{8}{m} - 3$

Eje OY (x=0)$\rightarrow$ y=3m+8

Area=$\dfrac{(-\frac{8}{m} - 3)\cdot(3m+8)}{2} = 6 \rightarrow \quad (-\frac{8}{m} - 3)\cdot(3m+8) = 12 \rightarrow$-24m-64-9m^2-24m=12m

-9m^2-60m-64=0 m=$\begin{cases} -\dfrac{16}{3} \\ -\dfrac{4}{3} \end{cases}$. Veamos cual de las dos pendientes es la que hace que los puntos de corte con los ejes sean positivas:

a) m=$-\dfrac{16}{3}$ → x=-3/2<0, y=-8 →No válido

b) m=$-\dfrac{4}{3}$ →x=3, y=4 Válido

Luego la recta buscada es r: y-8=$-\dfrac{4}{3}(x+3)$

Ejercicio 26. Calcular los parámetros m y n para que las rectas r:2x+3y-2=0 y s:x+my+n=0 sean

a) Paralelas

b) Perpendiculares

c) Misma recta

Pondremos la recta r en forma explícita r: y=$\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x$, donde la pendiente es m=$-\frac{2}{3}$ y la ordenada del origen es n=$\frac{2}{3}$

Ponemos ahora la recta s en forma explícita s: y=$-\frac{n}{m}-\frac{1}{m}x$, cuya pendiente es $-\frac{1}{m}$ y su ordenada en el origen es $-\frac{n}{m}$

a) Paralelas, mismas pendientes $-\frac{2}{3}=-\frac{1}{m}$ → m=$\frac{3}{2}$. Se cumple también que tienen distinta ordenada en el origen → $-\frac{2}{3}\neq-\frac{n}{m}=-\frac{n}{3/2}$→n≠-1

b) Perpendiculares, cuando son perpendiculares se cumple que las pendientes cumplen m'=-1/m: $\frac{2}{3}$=$-\frac{1}{-1/m}$ → m=-2/3

c) Coincidentes cuando tienen misma pendiente y ordenada en el origen es decir según vimos en a) → m=$\frac{3}{2}$ y n=1.

Ejercicio 27. Dados los puntos A(3,-1), B(6,2) y C(2,6) hallar el ángulo formado por las semirrectas AB y AC:

Para ver el ángulo de las dos rectas sólo tenemos que ver el ángulo que forman sus dos vectores directores: $\overrightarrow{AB}=(3,3)$ $\overrightarrow{AC}=(-1,7)$

$$\angle(r_{AB},s_{AC})=\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}\right)=\arccos\left(\frac{-3+21}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}}\right)=\arccos\left(\frac{18}{\sqrt{900}}\right)=$$

=53º7'48''

Ejercicio 28. Calcular m para que las rectas r: y=-3x+1 s: mx+2y-3=0 sean rectas perpendiculares:

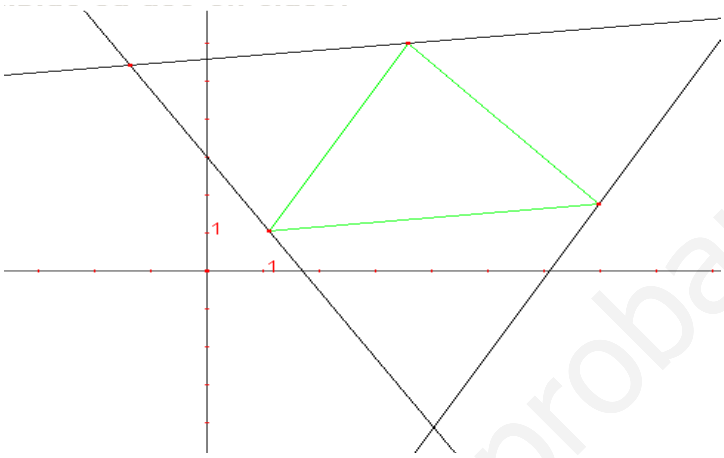
Si son perpendiculares se cumple que pendientes inversas con distinto signo. Calculemos las pendientes despejando y de ambas ecuaciones:

r: y=-3x+1 →m=-3

s:y=$-\frac{m}{2}x+\frac{3}{2}$ → m'=$-\frac{m}{2}$

Luego $-\frac{m}{2}=\frac{1}{3}$ → m=$-\frac{2}{3}$

Ejercicio 29. Sea el triángulo de vértices A(1,1), B(4,6) y C(7,2). Las rectas paralelas por cada vértice al lado opuesto determinan un triángulo A'B'C'. Calcular las coordenadas de estos vértices. Calcular que son semejantes calculado los ángulos de ambos triángulos.



Calculemos los lados que pasan por cada vértice sabiendo que son paralelas a los lados opuestos del triángulo ABC:

Por el vértice A(1,1): $\overrightarrow{BC}=(3,-4)$ $m=-\frac{4}{3}$ → r: y-1=$-\frac{4}{3}$(x-1)

Por el vértice B(4,6): $\overrightarrow{AC}=(6,1)$; m=1/6 → s: y-6=1/6(x-4)

Por el vértice C(7,2): $\overrightarrow{AB}=(3,5)$; m=$\frac{5}{3}$ → t: y-2=$\frac{5}{3}(x-7)$

Los vértices son los puntos de corte de estas rectas:

A': $\begin{cases} y-6=\frac{1}{6}(x-4) \\ y-2=\frac{5}{3}(x-7) \end{cases} \rightarrow x=10,\, y=7\;\; A'(10,7)$

B' $\begin{cases} y-1=-\frac{4}{3}(x-1) \\ y-2=\frac{5}{3}(x-7) \end{cases} \rightarrow x=4,\, y=-3\;\; B'(4,-3)$

C' $\begin{cases} y-6=\frac{1}{6}(x-4) \\ y-1=-\frac{4}{3}(x-1) \end{cases} \rightarrow x=-2,\, y=5\;\; C'(-2,5)$

Ejercicio 30. La recta que pasa por M(2,3) y es paralela a la recta r: y=3x+1 determina con los ejes coordenados un triángulo. Halla su área

Calculemos la recta sabiendo que pasa por M(2,3) y su pendiente es la misma que de r (ya que son paralelas)→ m=3→ s:y-3=3(x-2).

Puntos de corte con los ejes:

Eje OX(y=0): -3=3(x-2), x=1

Eje OY(x=0): y-3=3(0-2), y=-3

Área=$\frac{1\cdot|-3|}{2}=1{,}5u^2$

Ejercicio 31. Comprueba si los siguientes puntos A(-1,3), B(-5/2,1/2), C(-4,-2) están alineados.

Para ver si están alineados calculamos la recta que pasa por dos de los tres puntos y comprobamos que el tercero pertenezca a la recta, es decir que cumpla la ecuación de la recta.

1) Calculamos la recta que pasa por A y C→ m=$\frac{-2-3}{-4+1}=\frac{5}{3}$ → r: y-3=$\frac{5}{3}$(x+1)

2) Comprobamos si B∈r, es decir si cumple la ecuación de r sustituyendo x=-5/2 y=1/2:
$\frac{1}{2}-3=\frac{5}{3}(-\frac{5}{2}+1)$ → $-\frac{5}{2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}$ Se cumple la igualdad luego están alineados

Ejercicio 32. Calcular el valor de m para que los puntos R(5,-2), S(-1,1) y T(2,m) estén alineados.

Calculemos la recta que pasa por R y S → m=$\frac{1+2}{-1-5}=-\frac{1}{2}$ → r:y-1=$-\frac{1}{2}$(x+1). Si están alineados entonces T∈r, es decir sustituyendo x=2, y=m en la ecuación calculamos m → m-1=$-\frac{1}{2}$(2+1) → m=$-\frac{1}{2}$