PARA EMPEZAR

1 **Indica si las siguientes igualdades son identidades o ecuaciones, y resuelve estas últimas.**

a) $x + 5 + x = 1 + 2x + 4$

b) $2x + 3 = 25$

c) $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

d) $7x + 5 = 10$

a) Identidad

b) Ecuación. $2x + 3 = 25 \Rightarrow 2x = 22 \Rightarrow x = 11$

c) Identidad

d) Ecuación. $7x + 5 = 10 \Rightarrow 7x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{7}$

2 **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.**

a) $3x^2 - 75 = 0$ **b)** $5x^2 - 4x = 0$ **c)** $2x^2 - 4x + 4 = 0$

a) $3x^2 - 75 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 75 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

b) $5x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(5x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \end{cases}$

c) $2x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$. No tiene solución real.

3 **Comprueba si los valores $x = 3$, $y = 1$ forman la solución del siguiente sistema de ecuaciones.**

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 9x + 5y = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 9 - 2 = 7 \\ 9 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 27 + 5 = 32 \neq 0 \end{cases}$ Los valores no forman la solución del sistema.

4 **Averigua la edad a la que murió Diofanto.**

Se traduce la información al lenguaje algebraico.

Dios hizo que fuera niño una sexta parte de su vida.	$\frac{x}{6}$
Añadiendo un doceavo, las mejillas tuvieron la primera barba.	$\frac{x}{12}$
Le encendió el fuego nupcial después de un séptimo,	$\frac{x}{7}$
y el quinto año después de la boda le concedió un hijo.	5
Pero ay, niño tardío y desgraciado, en la mitad de la medida de la vida de su padre, lo arrebató la helada tumba.	$\frac{x}{2}$
Después de consolar su pena cuatro años con esta ciencia de cálculo, llegó al término de su vida.	4

Sumando las cantidades, se obtiene la ecuación $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$.

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \Rightarrow \frac{84x}{84} = \frac{14x}{84} + \frac{7x}{84} + \frac{12x}{84} + \frac{420}{84} + \frac{42x}{84} + \frac{336}{84} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 84x = 14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 \Rightarrow 9x = 756 \Rightarrow x = 84.$$

Diofanto murió a la edad de 84 años. Su infancia duró 14 años, a los 21 le salió la primera barba, se casó con 33 años, tuvo un hijo con 38 años, el hijo vivió 42 años y murió cuando el padre tenía 80 años.

Ecuaciones de segundo grado

PARA PRACTICAR

4.1 Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas.

a) $4x^2 - 36 = 0$

b) $x^2 - x = 0$

c) $3x^2 - 5 = 0$

d) $8x^2 + 16x = 0$

a) $4x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

b) $x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

c) $3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \dfrac{5}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

d) $8x^2 + 16x = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

4.2 Resuelve las siguientes ecuaciones completas.

a) $x^2 - 7x - 18 = 0$

b) $x^2 + 5x + 10 = 0$

c) $2x^2 + 10x + 12 = 0$

d) $2x^2 - 8x - 10 = 0$

e) $-x^2 + 4x - 7 = 0$

f) $100x^2 - 400x + 300 = 0$

a) $x^2 - 7x - 18 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{121}}{2} = \dfrac{7 \pm 11}{2} = \begin{cases} \dfrac{7 + 11}{2} = 9 \\ \dfrac{7 - 11}{2} = -2 \end{cases}$

b) $x^2 + 5x + 10 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{-15}}{2}$. No tiene solución real.

c) $2x^2 + 10x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$

d) $2x^2 - 8x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$

e) $-x^2 + 4x - 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7)}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-12}}{-2}$. No tiene solución real.

f) $100x^2 - 400x + 300 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

4.3 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $x(x - 1) - x^2 = x^2 - 2$

b) $(x + 3)(x - 1) = x - 3$

c) $\dfrac{x + 1}{x - 3} = 5$

d) $\dfrac{x}{7} + \dfrac{21}{x + 5} = \dfrac{47}{7}$

e) $\dfrac{6 + x}{x + \frac{3}{2}} = \dfrac{-2x}{2x + 3}$

f) $\dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{x}{x + 4} = 1$

a) $x(x - 1) - x^2 = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - x^2 = x^2 - 2 \Rightarrow 0 = x^2 + x - 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

b) $(x + 3)(x - 1) = x - 3 \Rightarrow x^2 - x + 3x - 3 = x - 3 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

c) $\dfrac{x + 1}{x - 3} = 5 \Rightarrow x + 1 = 5(x - 3) \Rightarrow 16 = 4x \Rightarrow x = 4$

d) $\dfrac{x}{7} + \dfrac{21}{x + 5} = \dfrac{47}{7} \Rightarrow \dfrac{x(x + 5)}{7(x + 5)} + \dfrac{21 \cdot 7}{7(x + 5)} = \dfrac{47(x + 5)}{7(x + 5)} \Rightarrow x^2 + 5x + 147 = 47x + 235 \Rightarrow x^2 - 42x - 88 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 44 \\ x = -2 \end{cases}$

e) $\dfrac{6 + x}{x + \frac{3}{2}} = \dfrac{-2x}{2x + 3} \Rightarrow \dfrac{2(6 + x)}{2\left(x + \frac{3}{2}\right)} = \dfrac{-2x}{2x + 3} \Rightarrow \dfrac{12 + 2x}{2x + 3} = \dfrac{-2x}{2x + 3} \Rightarrow 12 + 2x = -2x \Rightarrow x = -3$

f) $\dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{x}{x + 4} = 1 \Rightarrow \dfrac{x(x + 4)}{(x + 1)(x + 4)} + \dfrac{x(x + 1)}{(x + 1)(x + 4)} = \dfrac{(x + 1)(x + 4)}{(x + 1)(x + 4)} \Rightarrow x^2 + 4x + x^2 + x = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Ejercicio resuelto

4.4 Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones $x = -4$ y $x = 3$.

La ecuación será de la forma $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio que tiene por raíces -4 y 3.

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

Operando obtenemos: $x^2 + x - 12 = 0$.

4.5 Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado que tenga las soluciones indicadas.

a) $x = 3$, $x = 7$

b) $x = 5$ (doble)

a) $(x - 3)(x - 7) = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0$

b) $(x - 5)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$

4.6 Factoriza la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$ sin emplear la fórmula de resolución. Para ello, calcula directamente las raíces teniendo en cuenta que son divisores del término independiente.

Las raíces son $x = 1$, $x = 3$. La ecuación factorizada es $(x - 1)(x - 3) = 0$.

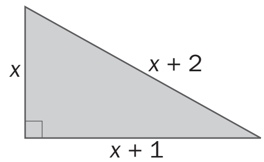
4.7 Comprueba que la ecuación $x^2 - 6mx + 9m^2 = 0$ tiene las soluciones iguales para cualquier valor m.

$x = \dfrac{6m \pm \sqrt{(-6m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9m^2}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6m \pm \sqrt{36m^2 - 36m^2}}{2} = \dfrac{6m}{2} = 3m$. La solución es $x = 3m$.

Problema resuelto

4.8 Sergio quiere construir un triángulo rectángulo tal que las medidas de sus lados sean números consecutivos. ¿Cuáles son estos números?

Si x es la longitud del cateto menor, el otro cateto medirá $x + 1$, y la hipotenusa, $x + 2$.



Como el triángulo es rectángulo, se debe cumplir el teorema de Pitágoras:

$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = -1, x = 3$

Como una longitud siempre es positiva, la solución válida es $x = 3$. Por tanto, los lados del rectángulo miden 3, 4 y 5 unidades de longitud.

4.9 La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 2 unidades mayor que el cateto mayor. Este, a su vez, es 2 unidades mayor que el otro cateto. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

Llamando x a la longitud del cateto mayor, la hipotenusa será $x + 2$ y el cateto menor, $x - 2$. Debe cumplirse el teorema de Pitágoras.

$$(x + 2)^2 = x^2 + (x - 2)^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 0 = x^2 - 8x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

Como la medida debe ser positiva, el cateto mayor mide 8 unidades, el menor 6 unidades y la hipotenusa 10 unidades.

4.10 Un cuadro de forma rectangular tiene 4800 centímetros cuadrados de superficie y un perímetro de 280 centímetros. ¿Cuál es la medida de los lados?

El semiperímetro mide 140 cm. Los lados serán x y $140 - x$.

El área es el producto de los lados. $x(140 - x) = 488 \Rightarrow 0 = x^2 - 140x + 4800 \Rightarrow \begin{cases} x = 80 \\ x = 60 \end{cases}$

Los lados miden 80 y 60 cm.

4.11 La edad que tendrá Araceli dentro de 6 años es el cuadrado de la edad que tenía hace 6. ¿Cuántos años tiene Araceli actualmente?

Si x es la edad actual de Araceli, $x + 6 = (x - 6)^2 \Rightarrow x^2 - 13x + 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 3 \end{cases}$.

La segunda solución no tiene sentido, ya que la edad actual no puede ser menor de 6 años. Por tanto, Araceli tiene 10 años.

4.12 Halla tres números impares consecutivos, tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos, se obtiene como resultado 7.

Los números serán $x - 2$, x, $x + 2$.

$$(x + 2)^2 - x^2 - (x - 2)^2 = 7 \Rightarrow -x^2 + 8x = 7 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 1 \end{cases}$$

Los números serán 5, 7 y 9, o -1, 1 y 3. Al no especificarse que deban ser naturales, hay dos soluciones posibles.

4.13 Se tienen dos cuadrados distintos. La suma de dos lados, uno de cada cuadrado, es de 62 centímetros, y la suma de sus áreas, de 1954 centímetros cuadrados. ¿Cuáles son sus medidas?

Medidas de los lados: x, $62 - x$.

$$x^2 + (62 - x)^2 = 1954 \Rightarrow 2x^2 - 124x + 1890 = 0 \Rightarrow x^2 - 62x + 945 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ x = 27 \end{cases}$$

Los lados miden 35 y 27 cm.

4.14 Dos grifos permiten llenar una piscina en 6 horas. ¿En cuánto tiempo la llena cada uno por separado si el primer grifo lo hace en 5 horas menos que el segundo?

El primer grifo llena la piscina en t horas, y el segundo en $t + 5$ horas.

El primer grifo llena cada hora $\frac{1}{t}$ del depósito. El segundo llena cada hora $\frac{1}{t+5}$.

Debe cumplirse que $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+5} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{6(t+5)}{6t(t+5)} + \frac{6t}{6t(t+5)} = \frac{t(t+5)}{6t(t+5)} \Rightarrow 6t + 30 + 6t = t^2 + 5t \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2 - 7t - 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -3 \end{cases}$

La solución negativa no tiene sentido, luego el primer grifo tardaría 10 horas y el segundo 15 horas.

4.15 Los alumnos de una clase de 4.º de ESO han decidido enviarse postales durante las vacaciones. Si cada uno de ellos envía una postal a los demás, y en total se han enviado 56 postales, ¿cuántos alumnos son?

Si hay x alumnos, cada uno envía $x - 1$ postales.

$x(x-1) = 56 \Rightarrow x^2 - x - 56 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -7 \end{cases}$

Solo tiene sentido la solución positiva, 8 alumnos.

Ecuaciones de grado superior a dos

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

4.16 Resuelve la siguiente ecuación incompleta de grado 4:

$$x^4 - 256 = 0$$

En este tipo de ecuaciones de la forma $ax^n + b = 0$ podemos hallar la solución despejando x^n y después extrayendo la raíz.

$$x^4 = 256\ ;\ x = \pm\sqrt[4]{256} = \pm\sqrt[4]{2^8} = \pm 2^2 = \pm 4$$

4.17 Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas.

a) $x^5 - 100\,000 = 0$

b) $\frac{x^3}{4} = 2000$

c) $2x^4 = 162$

d) $x^6 = 6{,}4 \cdot 10^7$

a) $x^5 - 100\,000 = 0 \Rightarrow x^5 = 100\,000 = 10^5 \Rightarrow x = 10$

b) $\frac{x^3}{4} = 2000 \Rightarrow x^3 = 8000 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8000} = 20$

c) $2x^4 = 162 \Rightarrow x^4 = 81 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$

d) $x^6 = 6{,}4 - 10^7 \Rightarrow x = \pm\sqrt[6]{6{,}4 \cdot 10^7} = \pm\sqrt[6]{64 \cdot 10^6} = \pm\sqrt[6]{2^6 \cdot 10^6} = \pm 2 \cdot 10 = \pm 20$

4.18 Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

c) $2x^4 + 10x^2 + 12 = 0$

d) $3x^4 - 12x^2 - 15 = 0$

e) $5x^4 - 5x^2 - 60 = 0$

f) $4x^4 - 37x + 9 = 0$

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{10 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

b) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \\ x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$

c) $2x^4 + 10x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x^4 + 5x^2 + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -2 \\ x^2 = -3 \end{cases}$. No tiene soluciones reales.

d) $2x^4 + 10x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x^4 + 5x^2 + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ x^2 = -1 \Rightarrow \text{No tiene soluciones reales.} \end{cases}$

e) $5x^4 - 5x^2 - 60 = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = -3 \Rightarrow \text{No tiene soluciones reales.} \end{cases}$

f) $4x^4 - 37x + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ x^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$

4.19 Escribe una ecuación bicuadrada cuyas soluciones sean −3, 3, −1 y 1.

$(x + 3)(x - 3)(x + 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Ejercicio resuelto

4.20 Resuelve la siguiente ecuación incompleta de grado 6 transformándola en una de segundo grado mediante un cambio de variable.

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$$

Se realiza el cambio de variable:	$z = x^3$; $z^2 = x^6$
Se sustituye en la ecuación:	$z^2 - 7z - 8 = 0$
Se resuelve la ecuación:	$z = 8$, $z = -1$
Se calculan los valores de x:	$x^3 = 8$; $x = 2$ $x^3 = -1$; $x = -1$

4.21 Resuelve la siguiente ecuación incompleta mediante un cambio de variable.

$$x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$$

$x^{10} + 31x^5 - 32 = 0 \underset{z = x^5}{\Rightarrow} z^2 + 31z - 32 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \Rightarrow x = \sqrt[5]{1} = 1 \\ z = -32 \Rightarrow x = \sqrt[5]{-32} = -2 \end{cases}$

4.22 Resuelve por factorización las siguientes ecuaciones.

a) $x^6 - 64x^3 = 0$

b) $x^4 - 16x^2 = 0$

c) $x^5 - x^4 = 0$

d) $x^6 - 125x^3 = 0$

a) $x^6 - 64x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x^3 - 64) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 64 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$

b) $x^4 - 16x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 16 \Rightarrow x = \pm 4 \end{cases}$

c) $x^5 - x^4 = 0 \Rightarrow x^4(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

d) $x^6 - 125x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x^3 - 125) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{125} = 5 \end{cases}$

4.23 Resuelve por factorización las siguientes ecuaciones, que tienen al menos una solución entera.

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

b) $6x^3 + x^2 - 26x - 21 = 0$

c) $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$

d) $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80 = 0$

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0$. Soluciones: $-3, -1, 1$

b) $6x^3 + x^2 - 26x - 21 = 0 \Rightarrow (x + 1)(6x^2 - 5x - 21) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 6x^2 - 5x - 21 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} \\ x = \dfrac{-3}{2} \end{cases} \end{cases}$

c) $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0 \Rightarrow x(x^3 - x^2 - 16x - 20) = 0 \Rightarrow x(x + 2)(x^2 - 3x - 10) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$

d) $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 4)(x - 4)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \\ x = 4 \\ x = 5 \end{cases}$

PARA APLICAR

Problema resuelto

4.24 Halla las edades de dos hermanos sabiendo que su producto es 20, y la suma de sus cuadrados, 41.

Como el producto de las edades es 20, si x es una de ellas, la otra es $\dfrac{20}{x}$.

Como la suma de sus cuadrados es 41, se puede plantear la siguiente ecuación.

$$x^2 + \left(\frac{20}{x}\right)^2 = 41 \Rightarrow x^4 - 41x^2 + 400 = 0$$

La ecuación obtenida es bicuadrada, se utiliza el cambio de variable: $x^2 = z$.

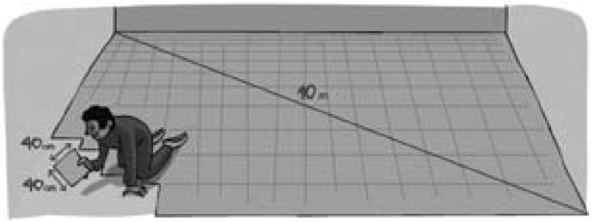
$z^2 - 41z + 400 = 0$

$z = 25, z = 16$

$x = \pm 5, x = \pm 4$

Las edades de los hermanos son 4 y 5 años.

4.25 Calcula las dimensiones de la sala de la figura, sabiendo que se han empleado 300 baldosas para enlosar el suelo.

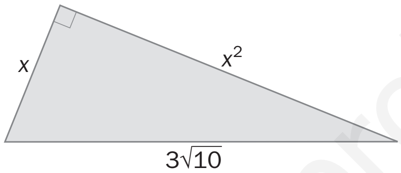


El suelo tiene una superficie de $300 \cdot 0{,}4^2 = 48\ \text{m}^2$. Por tanto, se puede escribir la medida de sus lados como x, $\frac{48}{x}$.

Por el teorema de Pitágoras, $x^2 + \left(\frac{48}{x}\right)^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 + \frac{2304}{x^2} = 100 \Rightarrow x^4 - 100x^2 + 2304 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8 \\ x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6 \end{cases}$

Solo tienen sentido las longitudes positivas. Los lados de la sala miden 8 y 6 metros.

4.26 Calcula las dimensiones del siguiente triángulo.



$x^2 + (x^2)^2 = (3\sqrt{10})^2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 90 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ x^2 = -10 \Rightarrow \text{No tiene soluciones reales.} \end{cases}$

Por ser la medida de un lado, solo tiene sentido la longitud positiva. Los catetos miden 3 y 9 unidades.

4.27 Halla tres números enteros consecutivos tales que su suma sea la quinta parte de su producto.

Como deben ser consecutivos, se pueden escribir como $x - 1$, x, $x + 1$.

$$x - 1 + x + x + 1 = \frac{x(x-1)(x+1)}{5} \Rightarrow 3x = \frac{x^3 - x}{5} \Rightarrow x^3 - 16x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

Hay tres soluciones posibles: $(-1, 0, 1)$, $(3, 4, 5)$, $(-5, -4, -3)$.

4.28 Halla las dimensiones de la jarra de la figura sabiendo que su altura es el triple del diámetro.

El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h la altura del cilindro.

En este caso, $h = 3 \cdot 2r = 6r$. Como el volumen es de 1 litro ($1\ \text{dm}^3$), se toman las medidas en decímetros.

Por tanto, $\pi r^2 \cdot 6r = 1 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{6\pi}} \approx 0{,}376$ dm. El radio de la base mide 0,376 dm y la altura de la jarra mide 2,256 dm.

4.29 Calcula el radio de una esfera cuyo volumen es el cuádruple de su superficie.

Superficie: $S = 4\pi r^2$. Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Como $V = 4S \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 16\pi r^3 \Rightarrow 4r^3 = 3 \cdot 16r \underset{r \neq 0}{\Rightarrow} r = 12$. El radio mide 12 unidades.

4.30 Halla las dimensiones de un ortoedro sabiendo que son proporcionales a los números 6, 8 y 10, y que tiene un volumen de 12 960 centímetros cúbicos.

Al ser proporcionales a 6, 8 y 10, se podrán escribir como $6x$, $8x$, $10x$.

$6x \cdot 8x \cdot 10x = 12\,960 \Rightarrow 480x^3 = 12\,960 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{12\,960}{480}} = 3$. Las dimensiones son 18, 24 y 30 cm.

Ecuaciones radicales

PARA PRACTICAR

4.31 Eleva al cuadrado los dos miembros de las siguientes ecuaciones tal como se dan. ¿Tienen las ecuaciones obtenidas las mismas soluciones que la ecuación original?

a) $2x - 8 = 0$ **b)** $x - 5 = 6x$

a) $2x - 8 = 0 \Rightarrow$ Solución: $x = 4$
$(2x - 8)^2 = 0^2 \Rightarrow 4x^2 - 32x + 64 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$. Solución: $x = 4$ (la misma).

b) $x - 5 = 6x \Rightarrow$ Solución: $x = -1$

$(x - 5)^2 = (6x)^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 36x^2 \Rightarrow 35x^2 + 10x - 25 = 0 \Rightarrow 7x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \dfrac{5}{7} \end{cases}$

Tiene una solución más.

4.32 Calcula mentalmente la solución de las siguientes ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{x + 1} = 4$ **c)** $\sqrt{\dfrac{x}{4}} = 9$ **e)** $\sqrt{3x + 1} = 7$ **g)** $\sqrt{x^4} = 9$

b) $\sqrt{2x} = 6$ **d)** $\sqrt{2x + 3} = 5$ **f)** $\sqrt{x} = 8$ **h)** $\sqrt{x^6} = 8$

a) $x = 15$ c) $x = 324$ e) $x = 16$ g) $x = \pm 3$

b) $x = 18$ d) $x = 11$ f) $x = 64$ h) $x = \pm 2$

4.33 Resuelve la ecuación $\sqrt{x + 5} = x - 1$.

a) Buscando directamente el número desconocido x.

b) Eliminando la raíz.

a) Directamente: se obtiene por tanteo $x = 4$.

b) Eliminando la raíz: $\sqrt{x + 5} = x - 1 \Rightarrow x + 5 = (x - 1)^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \Rightarrow \text{No cumple la ecuación.} \end{cases}$

4.34 Halla, eliminando los radicales, las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $\sqrt{x + 3} = \sqrt{5x - 1}$

b) $\sqrt{2x^2 + x + 2} = \sqrt{2x + 3}$

c) $5 - \sqrt{3x + 1} = 0$

d) $\sqrt{9x^2 - 5} - 3x = -1$

a) $\sqrt{x + 3} = \sqrt{5x - 1} \Rightarrow x + 3 = 5x - 1 \Rightarrow x = 1$

b) $\sqrt{2x^2 + x + 2} = \sqrt{2x + 3} \Rightarrow 2x^2 + x + 2 = 2x + 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

c) $5 - \sqrt{3x + 1} = 0 \Rightarrow 5 = \sqrt{3x + 1} \Rightarrow 25 = 3x + 1 \Rightarrow x = 8$

d) $\sqrt{9x^2 - 5} - 3x = -1 \Rightarrow$ No tiene solución, la raíz es positiva y el segundo miembro de la ecuación es negativo.

4.35 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\sqrt{x+3} + 20 + x = 2x + 17$

b) $\sqrt{5+4x} - (x-3) = 5$

c) $\sqrt{40 - x^2} + 7x = 4(x+3)$

d) $3 + 2x = 2\sqrt{x+1} - x$

a) $\sqrt{x+3} + 20 + x = 2x + 17 \Rightarrow \sqrt{x+3} = x - 3 \Rightarrow x + 3 = (x-3)^2 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow \text{ No es válida} \\ x = 6 \end{cases}$

b) $\sqrt{5+4x} - (x-3) = 5 \Rightarrow \sqrt{5+4x} = x + 2 \Rightarrow 5 + 4x = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

c) $\sqrt{40 - x^2} + 7x = 4(x+3) \Rightarrow \sqrt{40 - x^2} = 12 - 3x \Rightarrow 40 - x^2 = 144 - 72x + 9x^2 \Rightarrow 10x^2 - 72x + 104 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{26}{5} \text{ No es válida} \end{cases}$

d) $3 + 2x = 2\sqrt{x+1} - x \Rightarrow 3 + 3x = 2\sqrt{x+1} \Rightarrow 9x^2 + 14x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \dfrac{-5}{9} \end{cases}$

4.36 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $3x\sqrt{2} + 2\sqrt{3x+5} = 35\sqrt{2}$

b) $(x-2)\sqrt{2x^2 - 1} - \dfrac{x^3 - 4x}{x+2} = 0$

a) $3x\sqrt{2} + 2\sqrt{3x+5} = 35\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{3x+5} = (35 - 3x)\sqrt{2} \Rightarrow 4(3x+5) = (35-3x)^2 \cdot 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6x + 10 = 1225 - 210x + 9x^2 \Rightarrow 9x^2 - 216x + 1215 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 24x + 135 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \text{ No es válida} \\ x = 9 \end{cases}$

b) $(x-2)2x^2 - 1 - \dfrac{x^3 - 4x}{x+2} = 0 \xrightarrow[x+2 \neq 0]{} (x-2)\sqrt{2x^2 - 1} - x(x-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \sqrt{2x^2 - 1} - x = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \text{ No es válida.} \end{cases} \end{cases}$

4.37 Encuentra por tanteo el número natural *x* que cumple la siguiente relación.

$$\sqrt{13 - x} + \sqrt{x} = 5$$

Se busca un número tal que $(13 - x)$ y x sean cuadrados perfectos, con x menor que 13. Es fácil encontrar la solución: $x = 9$ ó $x = 4$.

4.38 Halla la solución entera de la siguiente ecuación.

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{4x} = 4$$

a) Buscando directamente el número desconocido *x*.

b) Eliminando sucesivamente las raíces.

a) Por tanteo, $x = 1$.

b) $\sqrt{x+3} + \sqrt{4x} = 4 \Rightarrow \sqrt{x+3} = 4 - \sqrt{4x} \Rightarrow x + 3 = 16 + 4x - 8\sqrt{4x} \Rightarrow 8\sqrt{4x} = 3x + 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow 64 \cdot 4x = 9x^2 + 78x + 169 \Rightarrow 9x^2 - 178x + 169 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{169}{9} \text{ No es válida} \end{cases}$

4.39 Resuelve las siguientes ecuaciones con dos radicales.

a) $\sqrt{x} - \sqrt{x+16} = -2$

b) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 5$

c) $2\sqrt{x-4} + \sqrt{2x+26} = 8$

d) $4\sqrt{x-5} - 3\sqrt{x+7} = -4$

a) $\sqrt{x} - \sqrt{x+16} = -2 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 = \sqrt{x+16} \Rightarrow x + 4 + 4\sqrt{x} = x + 16 \Rightarrow 4\sqrt{x} = 12 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow x = 9$

b) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 5 \Rightarrow x + 3 + x - 2 + 2\sqrt{(x+3)(x-2)} = 25 \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + x - 6} = 24 - 2x \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x^2 + x - 6} = 12 - x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 144 - 24x + x^2 \Rightarrow 25x = 150 \Rightarrow x = 6$

c) $2\sqrt{x-4} + \sqrt{2x+26} = 8 \Rightarrow \sqrt{2x+26} = 8 - 2\sqrt{x-4} \Rightarrow 2x + 26 = 64 + 4(x-4) - 32\sqrt{x-4} \Rightarrow$
$\Rightarrow 32\sqrt{x-4} = 22 + 2x \Rightarrow 16\sqrt{x-4} = 11 + x \Rightarrow 256(x-4) = 121 + 22x + x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 229 \text{ No es válida} \end{cases}$

d) $4\sqrt{x-5} - 3\sqrt{x+7} = -4 \Rightarrow 4\sqrt{x-5} = 3\sqrt{x+7} - 4 \Rightarrow 16x - 80 = 9x + 63 + 16 - 24\sqrt{x+7} \Rightarrow$
$\Rightarrow 24\sqrt{x+7} = -7x + 159 \Rightarrow 24\sqrt{x+7} = -7x + 159 \Rightarrow 576x + 4032 = 49x^2 - 2226x + 25\,281 \Rightarrow$
$\Rightarrow 49x^2 - 2802x + 21\,249 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \dfrac{2361}{49} \text{ No es válida} \end{cases}$

4.40 Reduce los radicales semejantes para obtener una ecuación con solo dos radicales.

$$\sqrt{4x+20} + 3\sqrt{2x+8} = 7 + \sqrt{x+5} + 2\sqrt{2}\sqrt{x+4}$$

$\sqrt{4x+20} + 3\sqrt{2x+8} = 7 + \sqrt{x+5} + 2\sqrt{2}\sqrt{x+4} \Rightarrow \sqrt{4(x+5)} + 3\sqrt{2(x+4)} = 7 + \sqrt{x+5} + 2\sqrt{2}\sqrt{x+4} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\sqrt{x+5} + 3\sqrt{2}\sqrt{x+4} = 7 + \sqrt{x+5} + 2\sqrt{2}\sqrt{x+4} \Rightarrow \sqrt{x+5} = 7 - \sqrt{2}\sqrt{x+4}$

Ahora se puede resolver la ecuación.

$\sqrt{x+5} - 7 = -\sqrt{2}\sqrt{x+4} \Rightarrow x + 5 + 49 - 14\sqrt{x+5} = 2x + 8 \Rightarrow 46 - x = -14\sqrt{x+5} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2116 - 92x + x^2 = 196x + 980 \Rightarrow x^2 - 288x + 1136 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 284 \text{ No es válida} \end{cases}$

4.41 Elimina sucesivamente los tres radicales para encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+2}$

b) $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+4} = 2\sqrt{x-1}$

c) $\sqrt{9x+7} - \sqrt{x} - \sqrt{16x-7} = 0$

d) $\sqrt{9x+10} - 2\sqrt{x+3} = \sqrt{x-2}$

a) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+2} \Rightarrow x + 7 + x - 1 + 2\sqrt{(x+7)(x-1)} = 4x + 8 \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + 6x - 7} = 2x + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 6x - 7} = x + 1 \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = 2$

b) $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+4} = 2\sqrt{x-1} \Rightarrow x - 4 + x + 4 + 2\sqrt{(x-4)(x+4)} = 4x - 4 \Rightarrow 2\sqrt{x^2 - 16} = 2x - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 16} = x - 2 \Rightarrow x^2 - 16 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x = 5$

c) $\sqrt{9x+7} - \sqrt{x} - \sqrt{16x-7} = 0 \Rightarrow \sqrt{9x+7} - \sqrt{x} = \sqrt{16x-7} \Rightarrow 9x + 7 + x - 2\sqrt{9x^2 + 7x} = 16x - 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 14 - 6x = 2\sqrt{9x^2 + 7x} \Rightarrow 7 - 3x = \sqrt{9x^2 + 7x} \Rightarrow 49 - 42x + 9x^2 = 9x^2 + 7x \Rightarrow x = 1$

d) $\sqrt{9x+10} - 2\sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} \Rightarrow 9x + 10 + 4x + 12 - 4\sqrt{9x^2 + 37x + 30} = x - 2 \Rightarrow 12x + 24 =$
$= 4\sqrt{9x^2 + 37x + 30} \Rightarrow 3x + 6 = \sqrt{9x^2 + 37x + 30} \Rightarrow 9x^2 + 36x + 36 = 9x^2 + 37x + 30 \Rightarrow x = 6$

4.42 «Con tu dinero y el mío podríamos comprar un helado. ¿Cuánto dinero llevas?», pregunta María a su amiga. «Lo que llevo más su raíz cuadrada positiva son 30 euros», le contesta.

¿Cuánto dinero lleva la amiga de María?

Llamando x al dinero de la amiga, se debe cumplir que $x + \sqrt{x} = 30$.

$$x + \sqrt{x} = 30 \Rightarrow \sqrt{x} = 30 - x \Rightarrow x = 900 - 60x + x^2 \Rightarrow x^2 - 61x + 900 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ x = 36 \ \text{No es válida} \end{cases}$$

La amiga lleva 25 euros.

4.43 La edad que tenía Alba hace tres años es la raíz cuadrada de la que tendrá dentro de tres años.

¿Qué edad tiene Alba actualmente?

Si su edad actual es x, debe cumplirse la ecuación $x - 3 = \sqrt{x + 3}$.

$$x - 3 = \sqrt{x + 3} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = x + 3 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \ \text{No es válida} \end{cases}$$

Alba tiene 6 años.

4.44 Si a un número se le suma el doble de su raíz cuadrada, se obtiene 10 veces dicha raíz.

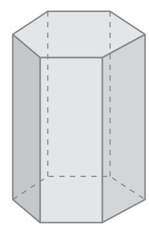
¿Cuál es el número?

$$x + 2\sqrt{x} = 10\sqrt{x} \Rightarrow x = 8\sqrt{x} \Rightarrow x = 64$$

4.45 Si se calcula la raíz cuadrada de la suma de tres números consecutivos, se obtiene el doble de la raíz cuadrada del número anterior al menor de los tres. Halla dichos números.

$\sqrt{(x - 1) + x + (x + 1)} = 2\sqrt{x - 2} \Rightarrow 3x = 4x - 8 \Rightarrow x = 8$. Los números son 7, 8 y 9.

4.46 Calcula el lado de la base del prisma de la figura sabiendo que su volumen es de $4500\sqrt{3}$ centímetros cúbicos y que su altura es el triple de dicho lado.



Se calcula primero la apotema de la base en función del lado. Usando el teorema de Pitágoras, si el lado es x, la apotema será $\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

$$V = A_{\text{base}} \cdot h = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h$$

$$4500\sqrt{3} = \frac{6x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} \cdot 3x \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10$$

El lado de la base mide 10 cm, la apotema mide $5\sqrt{3}$ cm y la altura 30 cm.

Sistemas de ecuaciones de primer grado

P A R A   P R A C T I C A R

4.47 Escribe una ecuación con dos incógnitas de modo que una de sus soluciones sea $x = 5$, $y = -3$.

Por ejemplo, $x + y = 2$

4.48 Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya única solución sea $x = 3$, $y = -3$.

Por ejemplo, $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 6 \end{cases}$

4.49 **Clasifica los siguientes sistemas de ecuaciones en función de sus soluciones.**

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 5x + 5y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ -6x + 10y = -14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x - y = 6 \\ 14x + 2y = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

a) Incompatible

b) Compatible indeterminado

c) Compatible determinado

d) Compatible determinado

4.50 **La primera ecuación de un sistema de dos ecuaciones es $2x - 3y = 5$.**
Completa el sistema con otra ecuación para que sea:

a) Incompatible

b) Compatible indeterminado

c) Compatible determinado

d) Compatible determinado con solución $x = 1$, $y = -1$

a) Por ejemplo, $2x - 3y = 0$

b) Por ejemplo, $4x - 6y = 10$

c) Por ejemplo, $3x + 2y = 1$

d) Por ejemplo, $x + y = 0$

4.51 **Encuentra ecuaciones equivalentes a $2x - 5y = 3$, en las que el coeficiente de x sea:**

a) 8 **b) −6** **c) 5**

a) $8x - 20y = 12$

b) $-6x + 15y = -9$

c) $5x - \frac{25}{2}y = \frac{15}{2}$

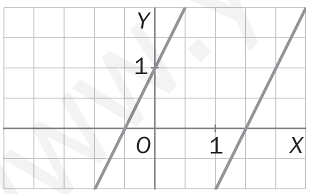
4.52 **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones.**

a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

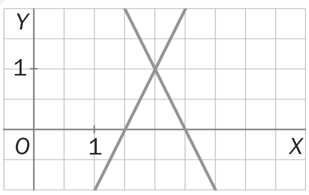
b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$

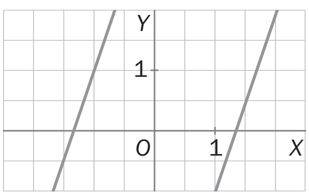
a) Incompatible



b) Compatible determinado. Solución: $x = 2$, $y = 1$



c) Incompatible



4.53 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por sustitución.**

a) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 4x + 3y = 20 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 3y = 7 \Rightarrow x = 7 - 3y \\ 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5(7 - 3y) - 2y = 1 \Rightarrow 35 - 15y - 2y = 1 \Rightarrow 34 = 17y \Rightarrow \boxed{y = 2} \Rightarrow x = 7 - 3 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{x = 1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \Rightarrow x = \dfrac{2 + 2y}{5} \\ 4x + 3y = 20 \Rightarrow 4\left(\dfrac{2 + 2y}{5}\right) + 3y = 20 \Rightarrow \dfrac{8 + 8y}{5} + \dfrac{15y}{5} = \dfrac{100}{5} \Rightarrow \boxed{y = 4} \Rightarrow x = \dfrac{2 + 2 \cdot 4}{5} \Rightarrow \boxed{x = 2} \end{cases}$

4.54 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por reducción.**

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 4x + 3y = 20 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$

$$9x = 18 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$4 \cdot 2 + 3y = 11 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

b) $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \xrightarrow{\cdot 3} 15x - 6y = 6 \\ 4x + 3y = 20 \xrightarrow{\cdot 2} 8x + 6y = 40 \end{cases}$

$$23x = 46 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$5 \cdot 2 - 2y = 2 \Rightarrow \boxed{y = 4}$$

4.55 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones quitando previamente los denominadores.**

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} - \dfrac{y}{6} = 1 \\ \dfrac{5x}{8} + \dfrac{3y}{4} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \longrightarrow 3x - 5y = 1 \xrightarrow{\cdot 3} 9x - 15y = 3 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{4x}{12} + \dfrac{3y}{12} = \dfrac{18}{12} \Rightarrow 4x + 3y = 18 \xrightarrow{\cdot 5} 20x + 15y = 90 \end{cases}$

$$29x = 93 \Rightarrow \boxed{x = \frac{93}{29}}$$

$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \xrightarrow{\cdot 4} 12x - 20y = 4 \\ 4x + 3y = 18 \xrightarrow{\cdot(-3)} -12x - 9y = -54 \end{cases}$

$$-29y = -50 \Rightarrow \boxed{y = \frac{50}{29}}$$

b) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} - \dfrac{y}{6} = 1 \Rightarrow \dfrac{9x}{12} - \dfrac{2y}{12} = \dfrac{12}{12} \Rightarrow 9x - 2y = 12 \xrightarrow{\cdot 3} 27x - 6y = 36 \\ \dfrac{5x}{8} + \dfrac{3y}{4} = \dfrac{7}{2} \Rightarrow \dfrac{5x}{8} + \dfrac{6y}{8} = \dfrac{28}{8} \Rightarrow 5x + 6y = 28 \longrightarrow 5x + 6y = 28 \end{cases}$

$$32x = 64 \Rightarrow \boxed{x = 2} \Rightarrow 5 \cdot 2 + 6y = 28 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

4.56 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones quitando previamente los paréntesis.

a) $\begin{cases} 2x - 3(4 - y) = 6 \\ 3(2x - 9) - 5y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3(2x - 1) - 5(y + 2) = 3 \\ 2(x + 3y) + 3(y - 4x) = -10 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - 3(4 - y) = 6 \Rightarrow 2x - 12 + 3y = 6 \Rightarrow 2x + 3y = 18 \xrightarrow{\cdot(-3)} -6x - 9y = -54 \\ 3(2x - 9) - 5y = -1 \Rightarrow 6x - 27 - 5y = -1 \Rightarrow 6x - 5y = 26 \longrightarrow \quad 6x - 5y = 26 \end{cases}$

$$-14y = -28 \Rightarrow \boxed{y = 2} \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

b) $\begin{cases} 3(2x - 1) - 5(y + 2) = 3 \Rightarrow 6x - 3 - 5y - 10 = 3 \Rightarrow 6x - 5y = 16 \\ 2(x + 3y) + 3(y - 4x) = -10 \Rightarrow 2x + 6y + 3y - 12x = -10 \Rightarrow -10x + 9y = -10 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x - 5y = 16 \xrightarrow{\cdot 5} 30x - 25y = 80 \\ -10x + 9y = -10 \xrightarrow{\cdot 3} -30x + 27y = -30 \end{cases}$

$$2y = 50 \Rightarrow \boxed{y = 25} \Rightarrow 6x - 5 \cdot 25 = 16 \Rightarrow \boxed{x = \frac{47}{2}}$$

4.57 Resuelve este sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 5(x + 1) - \dfrac{3 - y}{5} = 26 \\ \dfrac{3(2x - 1)}{7} - \dfrac{2(y - 5)}{3} = -1 \end{cases}$$

$\begin{cases} 5(x + 1) - \dfrac{3 - y}{5} = 26 \\ \dfrac{3(2x - 1)}{7} - \dfrac{2(y - 5)}{3} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x + y = 108 \\ 9x - 7y = -41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 108 - 25x \\ 9x - 7(108 - 25x) = -41 \Rightarrow 184x = 715 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{715}{184}} \end{cases}$

Así tenemos que $y = 108 - 25 \cdot \dfrac{715}{184} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{1997}{184}}$

PARA APLICAR

4.58 En la fiesta de cumpleaños de Carmen, el número de chicas supera en 10 al de chicos. Llegan 5 chicas más, y ahora el número de chicas es el doble del de chicos.

¿Cuántas personas hay en la fiesta?

Llamando x al número inicial de chicas e y al número de chicos, se obtiene el siguiente sistema.

$\begin{cases} x - y = 10 \\ x + 5 = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 + y \\ 10 + y + 5 = 2y \Rightarrow \boxed{y = 15} \Rightarrow x = 10 + 15 \Rightarrow \boxed{x = 25} \end{cases}$

Inicialmente había 40 personas, 25 chicas y 15 chicos. Al final hay 45, 30 chicas y 15 chicos.

4.59 Para preparar una bebida se ha utilizado zumo de naranja y de piña en distinta proporción. Si el litro de zumo de naranja cuesta 0,60 y el de piña cuesta 0,80 euros, ¿qué cantidad de cada tipo de zumo se ha empleado para obtener 20 litros de mezcla por un total de 13 euros?

Sean x e y los litros empleados de cada zumo.

$\begin{cases} x + y = 20 \Rightarrow x = 20 - y \\ 0{,}6x + 0{,}8y = 13 \Rightarrow 0{,}6(20 - y) + 0{,}8y = 13 \Rightarrow 0{,}2y = 1 \Rightarrow \boxed{y = 5} \Rightarrow \boxed{x = 15} \end{cases}$

Se emplearon 15 litros de zumo de naranja y 5 litros de zumo de piña.

4.60 María tenía hace seis años el triple de la edad de Alberto, y dentro de dos años tendrá solo el doble. ¿Cuáles son sus edades actuales?

x = edad de María $\qquad$ y = edad de Alberto

$$\left.\begin{cases} x - 6 = 3(y - 6) \Rightarrow x - 3y = -12 \Rightarrow x = 3y - 12 \\ x + 2 = 2(y + 2) \Rightarrow x - 2y = 2 \Rightarrow x = 2y + 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow 3y - 12 = 2y + 2 \Rightarrow \boxed{y = 14}$$

$x = 2 \cdot 14 + 2 \Rightarrow \boxed{x = 30}$

María tiene 30 años, y Alberto tiene 14 años.

4.61 Carolina ha dibujado a varios de sus amigos y también varios personajes de *Los Simpsons*, todos ellos saludando con ambas manos. Teniendo en cuenta que los personajes de la serie tienen solo cuatro dedos en cada mano, y que en total, en el dibujo se ven 12 cabezas y 110 dedos, ¿cuántos personajes de la serie hay en el dibujo?

Sea x el número de personajes de la serie e y el número de amigos.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 8x + 10y = 110 \Rightarrow 4x + 5y = 55 \end{cases}$$

$x = 12 - y \Rightarrow 4(12 - y) + 5y = 55 \Rightarrow \boxed{y = 7} \Rightarrow \boxed{x = 5}$

Hay 5 personajes de la serie y 7 amigos de Carolina.

4.62 Al invertir un número de dos cifras se obtiene otro 36 unidades mayor. Halla el número inicial.

Las cifras serán x, y.

$(10y + x) - (10x + y) = 36 \Rightarrow 9y - 9x = 36 \Rightarrow y - x = 4$

Como no hay más datos, las soluciones posibles serán los números de dos cifras cuya última cifra es 4 unidades mayor que la primera: 15, 26, 37, 48 y 59.

Sistemas de ecuaciones de segundo grado

PARA PRACTICAR

4.63 Comprueba si los valores $x = 2$, $y = -2$ son solución de estos sistemas.

a) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = -8 \\ 3x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $\begin{cases} 5x + 2y = 6 \\ x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = -8 \Rightarrow 2^2 - 3 \cdot (-2)^2 = 4 - 12 = -8 \\ 3x^2 - y^2 = 8 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 - (-2)^2 = 12 - 4 = 8 \end{cases}$ Son solución.

b) $\begin{cases} 5x + 2y = 6 \Rightarrow 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = 10 - 4 = 6 \\ x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 6 \Rightarrow 2^2 - \dfrac{(-2)^2}{2} = 4 - 2 \neq 6 \end{cases}$ No son solución.

4.64 Escribe un sistema de ecuaciones de segundo grado que no tenga solución real.

Por ejemplo, $\begin{cases} x^2 + y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$

4.65 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - 2y^2 = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 4 \\ 5x^2 - 2y^2 = 3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 3 \\ 2x^2 - 3y^2 = 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 7x^2 = y^2 - 8 \\ -5x^2 + 2y^2 = 52 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \xrightarrow{\cdot 2} 2x^2 + 2y^2 = 20 \\ x^2 - 2y^2 = 7 \longrightarrow x^2 - 2y^2 = 7 \end{cases}$

$$3x^2 \qquad = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}$$

$$9 + y^2 = 10 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \boxed{y = \pm 1}$$

b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{\cdot 2} 6x^2 + 2y^2 = 8 \\ 5x^2 - 2y^2 = 3 \longrightarrow 5x^2 - 2y^2 = 3 \end{cases}$

$$11x^2 \qquad = 11 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

$$y^2 = 4 - 3x^2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \boxed{y = \pm 1}$$

c) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 3 \xrightarrow{\cdot 2} 6x^2 - 10y^2 = 6 \\ 2x^2 - 3y^2 = 5 \xrightarrow{\cdot(-3)} -6x^2 + 9y^2 = -15 \end{cases}$

$$-y^2 = -9 \Rightarrow \boxed{y = \pm 3}$$

$$2x^2 - 3 \cdot (\pm 3)^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \boxed{x = \pm 4}$$

d) $\begin{cases} 7x^2 = y^2 - 8 \Rightarrow y^2 = 7x^2 + 8 \\ -5x^2 + 2y^2 = 52 \Rightarrow -5x^2 + 2(7x^2 + 8) = 52 \Rightarrow 9x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2} \end{cases}$

$$y^2 = 7 \cdot (\pm 2)^2 + 8 = 36 \Rightarrow \boxed{y = \pm 6}$$

4.66 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 - 2y^2 = 17 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x^2 - 9y^2 = 14 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = y^2 - 8 \\ 2y^2 - 3x^2 = 15 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - x \\ x^2 - 2y^2 = 17 \Rightarrow x^2 - 2(7 - x)^2 = 17 \Rightarrow -x^2 + 28x - 115 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 23 \Rightarrow y = -16} \\ \boxed{x = 5 \Rightarrow y = 2} \end{cases} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = -1 \Rightarrow x = -1 - 3y \\ 2x^2 - 9y^2 = 14 \Rightarrow 2(-1 - 3y)^2 - 9y^2 = 14 \Rightarrow 9y^2 + 12y - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \Rightarrow x = 5 \\ y = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = -3 \end{cases} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \Rightarrow y = 2x - 3 \\ 3x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 3x^2 + (2x - 3)^2 = 4 \Rightarrow 7x^2 - 12x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1 \Rightarrow y = -1} \\ \boxed{x = \dfrac{5}{7} \Rightarrow y = \dfrac{-11}{7}} \end{cases} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = y^2 - 8 \Rightarrow y^2 = x - 8 \\ 2y^2 - 3x^2 = 15 \Rightarrow 2(x - 8) - 3x^2 = 15 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 31 = 0 \Rightarrow \boxed{\text{No tiene solución real}} \end{cases}$

4.67 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 37 \\ \dfrac{xy}{3} = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x^2 - y = 6 \\ xy = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 = 3y - 8 \\ \dfrac{xy}{3} = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy = 6 \Rightarrow y = \dfrac{6}{x} \\ x^2 - 2y^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot \left(\dfrac{6}{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^4 - x^2 - 72 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 3 \Rightarrow y = 2} \\ \boxed{x = -3 \Rightarrow y = -2} \end{cases} \\ x^2 = -8 \Rightarrow \text{No tiene solución real} \end{cases} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 37 \Rightarrow x^2 + \left(\dfrac{6}{x}\right)^2 = 37 \Rightarrow x^4 - 37x^2 + 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 6} \\ x^2 = 36 \Rightarrow \boxed{x = \pm 6 \Rightarrow y = \pm 1} \end{cases} \\ \dfrac{xy}{3} = 2 \Rightarrow y = \dfrac{6}{x} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x^2 - y = 6 \Rightarrow y = 2x^2 - 6 \\ xy = 4 \Rightarrow x(2x^2 - 6) = 4 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2 \Rightarrow y = 2} \\ \boxed{x = -1 \Rightarrow y = -4} \end{cases} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 = 3y - 8 \Rightarrow x^2 = \dfrac{9}{x} - 8 \Rightarrow x^3 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1 \Rightarrow y = 3} \\ \dfrac{xy}{3} = 1 \Rightarrow y = \dfrac{3}{x} \end{cases}$

4.68 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} - 2y^2 = 4 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{6} = \dfrac{25}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3(x^2 - 4) + 2(y - 9)^2 = 4 \\ -3x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{3} - \dfrac{y - 5}{4} = 2 \\ \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{3y^2}{4} = \dfrac{23}{12} \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x - 3)(y + 5) = 7 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} - 2y^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 6y^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 6y^2 + 12 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{6} = \dfrac{25}{3} \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 = 100 \Rightarrow 3(6y^2 + 12) - 2y^2 = 100 \Rightarrow 16y^2 = 64 \Rightarrow \boxed{y = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 6} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3(x^2 - 4) + 2(y - 9)^2 = 4 \Rightarrow 3x^2 - 12 + 2(y^2 - 18y + 81) = 4 \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 - 36y = -146 \\ -3x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$

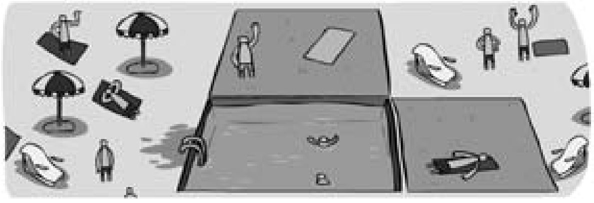
$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2y^2 - 36y = -146 \\ -3x^2 + 2y^2 \qquad\; = \quad 5 \\ \hline 4y^2 - 36y = -141 \end{array}$$

La ecuación $4y^2 - 36y + 141 = 0$ no tiene solución, por tanto este sistema no tiene solución.

c) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{3} - \dfrac{y - 5}{4} = 2 \Rightarrow 4x - 3y = 13 \Rightarrow y = \dfrac{4x - 13}{3} \\ \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{3y^2}{4} = \dfrac{23}{12} \Rightarrow 2x^2 - 9y^2 = 23 \Rightarrow 2x^2 - 9\left(\dfrac{4x - 13}{3}\right)^2 = 23 \Rightarrow 14x^2 - 104x + 192 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = 1 \\ x = \dfrac{24}{7} \Rightarrow y = \dfrac{5}{21} \end{cases} \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x - 3)(y + 5) = 7 \Rightarrow (8 - 2y - 3)(y + 5) = 7 \Rightarrow 2y^2 + 5y - 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 2 \Rightarrow x = 4} \\ \boxed{y = \dfrac{-9}{2} \Rightarrow x = 17} \end{cases} \\ x + 2y = 8 \Rightarrow x = 8 - 2y \end{cases}$

4.69 Una piscina tiene forma rectangular. En dos de sus lados hay zonas cuadradas con césped, como se ve en el dibujo.



Sabiendo que el área de la piscina es de 216 metros cuadrados, y el área de la zona de césped, de 468, calcula las dimensiones de la piscina.

Sean x e y las dimensiones de la piscina.

$$\begin{cases} xy = 216 \\ x^2 + y^2 = 468 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{216}{x} \\ x^2 + \left(\dfrac{216}{x}\right)^2 = 468 \Rightarrow x^4 - 468x^2 + 46\,656 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 12 \Rightarrow y = \pm 18 \\ x = \pm 18 \Rightarrow y = \pm 12 \end{cases} \end{cases}$$

Los lados de la piscina miden 12 y 18 metros. Las soluciones negativas no tienen sentido.

4.70 Una valla rodea un terreno rectangular. La valla mide 100 metros, y el terreno tiene un área de 525 metros cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Sean x e y las dimensiones del terreno.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x \\ xy = 525 \Rightarrow x(50 - x) = 525 \Rightarrow x^2 - 50x + 525 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \Rightarrow y = 15 \\ x = 15 \Rightarrow y = 35 \end{cases} \end{cases}$$

Los lados miden 35 y 15 metros.

4.71 La pista de baloncesto es un rectángulo cuyo lado mayor mide 13 metros más que el otro, y que tiene una superficie de 420 metros cuadrados. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Sea x el lado mayor e y el menor.

$$\begin{cases} x - y = 13 \Rightarrow x = y + 13 \\ xy = 420 \Rightarrow y(y + 13) = 420 \Rightarrow y^2 + 13y - 420 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 15 \Rightarrow x = 28 \\ y = -28 \;\; \text{No tiene sentido} \end{cases} \end{cases}$$

Los lados miden 28 y 15 metros.

4.72 Halla un número de dos cifras sabiendo que la diferencia entre ambas es 1, y la diferencia entre sus cuadrados, 9. ¿Cuántas soluciones tiene este problema?

Sean x e y las cifras. Hay varias posibilidades, según el orden en el que se consideren las diferencias.

$$\begin{cases} x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1 \\ x^2 - y^2 = 9 \Rightarrow (y + 1)^2 - y^2 = 9 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

Dos soluciones, los números 45 y 54.

4.73 Halla las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 26 metros y cuya superficie es de 240 metros cuadrados.

Sean x e y los lados del rectángulo.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26^2 \Rightarrow x^2 + \left(\dfrac{240}{x}\right)^2 = 676 \Rightarrow x^4 - 676x^2 + 57\,600 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 576 \Rightarrow x = \pm 24 \Rightarrow y = \pm 10 \\ x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10 \Rightarrow y = \pm 24 \end{cases} \\ xy = 240 \Rightarrow y = \dfrac{240}{x} \end{cases}$$

Solo tiene sentido la solución positiva. Los lados miden 24 y 10 metros.

4.74 Varios amigos van a hacer un regalo de bodas que cuesta 720 euros. A última hora se apuntan tres amigos más, con lo que cada uno deberá pagar 12 euros menos. ¿Cuántos amigos eran inicialmente? ¿Cuánto pagará al final cada uno?

Sean x el número inicial de amigos e y la cantidad inicial a pagar.

$$\begin{cases} xy = 720 \Rightarrow y = \dfrac{720}{x} \\ (x + 3)(y - 12) = 720 \Rightarrow (x + 3)\left(\dfrac{720}{x} - 12\right) = 720 \Rightarrow x^2 + 3x - 180 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \Rightarrow y = 60 \\ x = -15 \Rightarrow \text{No tiene sentido} \end{cases} \end{cases}$$

Inicialmente eran 12 amigos. Al final, cada uno pagará 48 euros.

4.75 Las diagonales de un rombo se diferencian en 10 centímetros, y su área es de 208 centímetros cuadrados. Calcula su perímetro.

Sean x e y las diagonales.

$$\begin{cases} x - y = 10 \Rightarrow y = x - 10 \\ \dfrac{xy}{2} = 208 \Rightarrow x(x - 10) = 416 \Rightarrow x^2 - 10x - 416 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 26 \\ x = -16 \end{cases} \end{cases}$$

Como estamos hablando de medidas, la solución negativa no tiene sentido. Por tanto una diagonal mide 26 cm y la otra $26 - 10 = 16$.

Para calcular el perímetro usamos el teorema de Pitágoras para sacar uno de los lados: $l = \sqrt{8^2 + 13^2} \cong 15{,}26$ cm

El perímetro es $4 \cdot l = 61$ cm aproximadamente.

4.76 El perímetro de un triángulo rectángulo mide 30 centímetros, y su área, 30 centímetros cuadrados. Calcula lo que miden sus lados.

Si los catetos son x e y, se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{2} = 30 \Rightarrow y = \dfrac{60}{x} \\ x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 30 \Rightarrow x + \dfrac{60}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{60}{x}\right)^2} = 30 \end{cases}$$

$$x + \frac{60}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{60}{x}\right)^2} = 30 \Rightarrow \frac{x^2 + 60}{x} + \sqrt{\frac{x^4 + 3600}{x^2}} = 30 \Rightarrow \frac{x^2 + 60}{x} + \sqrt{\frac{x^4 + 3600}{x^2}} = \frac{30x}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^4 + 3600}{x^2}} = \frac{30x - x^2 - 60}{x} \Rightarrow \frac{x^4 + 3600}{x^2} = \frac{(30x - x^2 - 60)^2}{x^2} \Rightarrow \cancel{x^4} + \cancel{3600} = 900x^2 + \cancel{x^4} + \cancel{3600} - 60x^3 - 3600x + 120x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60x^3 - 1020x^2 + 3600 = 0 \Rightarrow x^3 - 17x^2 + 60x = 0 \Rightarrow x(x - 12)(x - 5) = 0$$

La solución $x = 0$ no tiene sentido. Por tanto, los catetos miden 12 y 5 cm.

MATEMÁTICAS APLICADAS

PARA APLICAR

4.77 La suma de las edades de Pablo, Álvaro y Mario es 21. Sabemos además que Álvaro tiene un año más que Pablo y uno menos que Mario. Averigua las edades de los tres amigos utilizando un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Llamando x, y, z a las edades de los tres amigos, se debe cumplir el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ y = x + 1 \\ y = z - 1 \Rightarrow z = y + 1 = (x + 1) + 1 = x + 2 \end{cases}$$

Sustituyendo en la primera ecuación, $x + x + 1 + x + 2 = 21 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow z = 8$.

Pablo tiene 6 años, Álvaro 7 y Mario 8.

4.78 **En un número de tres cifras, si las sumamos obtenemos 10. El triple de la cifra de las centenas más la cifra de las decenas da 7. La cifra de las unidades menos la cifra de las decenas da 1. ¿De qué número se trata?**

Llamando *x, y, z* a las cifras del número, se debe cumplir el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 3x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - 3x \\ z - y = 1 \Rightarrow z = y + 1 = 8 - 3x \end{cases}$$

$x + 7 - 3x + 8 - 3x = 10 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow z = 5$

El número pedido es 145.

ACTIVIDADES FINALES

PARA PRACTICAR Y APLICAR

4.79 **Adela tiene 6 años menos que David, y este tiene 6 años menos que Elisa. El producto de las edades de las dos chicas es 288. ¿Cuántos años tiene David?**

Sea x la edad de David.

$(x - 6)(x + 6) = 288 \Rightarrow x^2 - 36 = 288 \Rightarrow x^2 = 288 + 36 = 324 \Rightarrow x = \pm 18$

David tiene 18 años, Adela tiene 12 años y Elisa tiene 24 años.

4.80 **El número 365 tiene una curiosa propiedad: se puede escribir como suma de los cuadrados de tres números naturales consecutivos, o como suma de los cuadrados de los dos números naturales siguientes a estos. Halla esos números.**

$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 365 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 365 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 360 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 120 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -12 \end{cases}$$

Como deben ser naturales, la solución es $10^2 + 11^2 + 12^2 = 365$. Se puede comprobar con facilidad que $13^2 + 14^2 = 365$.

4.81 **Halla las dimensiones de un campo de voleibol rectangular de área 117 metros cuadrados, sabiendo que sus lados se diferencian en 4 metros.**

Si un lado es x, el otro será $x + 4$.

$$x(x + 4) = 117 \Rightarrow x^2 + 4x - 117 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -13 \text{ No tiene sentido} \end{cases}$$

Los lados miden 9 y 13 metros.

4.82 **En una reunión, cada persona saluda a todas las demás con un apretón de manos.**

a) Calcula el número de apretones de manos en el caso de que en la reunión haya tres, cuatro y cinco personas.

b) Si se han dado 55 saludos, ¿cuántas personas hay en la reunión?

a) Si hay tres personas, cada una saluda a las otras dos. Habría $3 \cdot 2 = 6$ saludos, pero como cada uno se ha contado dos veces, se quedan en la mitad, 3. Para 4 personas se habrán dado $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, y para 5 serán $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ saludos.

b) $\frac{x(x - 1)}{2} = 55 \Rightarrow x^2 - x - 110 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = -10 \end{cases}$ Hay 11 personas en la reunión.

4.83 **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.**

a) $3x(2x-5)-4x(6-3x)=0$ **b)** $\dfrac{2x(x-5)}{3}-\dfrac{x^2-14x}{6}=-x$ **c)** $3x(2x-1)-2(x-2)=5$

a) $3x(2x-5)-4x(6-3x)=0 \Rightarrow 6x^2-15x-24x+12x^2=0 \Rightarrow x(18x-39)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{39}{18} \end{cases}$

b) $\dfrac{2x(x-5)}{3}-\dfrac{x^2-14x}{6}=-x \Rightarrow \dfrac{2x^2-10x}{3}-\dfrac{x^2-14x}{6}=-x \Rightarrow \dfrac{4x^2-20x}{6}-\dfrac{x^2-14x}{6}=\dfrac{-6x}{6} \Rightarrow 3x^2=0 \Rightarrow x=0$

c) $3x(2x-1)-2(x-2)=5 \Rightarrow 6x^2-3x-2x+4=5 \Rightarrow 6x^2-5x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\dfrac{-1}{6} \end{cases}$

4.84 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $2x^2(-6x^2-4)-5(3x^2-7)=0$ **b)** $9x^4-3x^2+\dfrac{1}{4}=0$ **c)** $x^2(x^2-8)=9$

a) $2x^2(-6x^2-4)-5(3x^2-7)=0 \Rightarrow -12x^4-8x^2-15x^2+35=0 \Rightarrow -12x^4-23x^2+35=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ x^2=\dfrac{-35}{12} \text{ No tiene solución} \end{cases}$

b) $9x^4-3x^2+\dfrac{1}{4}=0 \Rightarrow x^2=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 9\cdot\dfrac{1}{4}}}{29}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-9}}{18}=\dfrac{1}{6} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{6}}=\dfrac{\pm\sqrt{6}}{6}$

c) $x^2(x^2-8)=9 \Rightarrow x^4-8x^2-9=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3 \\ x^2=-1 \text{ No tiene solución real} \end{cases}$

4.85 **Resuelve por factorización las siguientes ecuaciones, sabiendo que tienen al menos una raíz entera.**

a) $x^3+3x^2-4x-12=0$

b) $x^4-4x^3+x^2+6x=0$

c) $x^4-7x^2-2x^3+12+8x=0$

a) $x^3+3x^2-4x-12=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)(x+3)=0 \Rightarrow$ Soluciones: 2, -2, -3

b) $x^4-4x^3+x^2+6x=0 \Rightarrow x(x-2)(x+1)(x-3)=0 \Rightarrow$ Soluciones: 0, 2, -1, 3

c) $x^4-7x^2-2x^3+12+8x=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow$ Soluciones: 3, -2, 2, -1

4.86 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $\sqrt{3x-2}+2=x$ **b)** $2\sqrt{2x^2+1}-x^2=2$ **c)** $4\sqrt{x-3}-\sqrt{x+5}=1$

a) $\sqrt{3x-2}+2=x \Rightarrow \sqrt{3x-2}=x-2 \Rightarrow 3x-2=x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-7x+6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=1 \text{ No es válida} \end{cases}$

b) $2\sqrt{2x^2+1}-x^2=2 \Rightarrow 2\sqrt{2x^2+1}=x^2+2 \Rightarrow 8x^2+4=x^4+4x^2+4 \Rightarrow x^4-4x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$

c) $4\sqrt{x-3}-\sqrt{x+5}=1 \Rightarrow 4\sqrt{x-3}=\sqrt{x+5}+1 \Rightarrow 16x-48=x+5+1+2\sqrt{x+5} \Rightarrow 15x-54=2\sqrt{x+5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 225x^2-1620x+2916=4x+20 \Rightarrow 225x^2-1624x+2896=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\dfrac{724}{225} \Rightarrow \text{No es válida} \end{cases}$

4.87 Calcula un número sabiendo que al restarle la raíz cuadrada del número siguiente el resultado es 41.

$$x - \sqrt{x+1} = 41 \Rightarrow x - 41 = \sqrt{x+1} \Rightarrow x^2 - 82x + 1681 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 83x + 1680 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 48 \\ x = 35 \ \text{ No es válida} \end{cases}$$

4.88 Determina si los siguientes sistemas son incompatibles, compatibles determinados o compatibles indeterminados.

a) $\begin{cases} 3x - 6y = 7 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \frac{3}{2}x - 3y = \frac{15}{4} \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 13x + 7y = 20 \\ 12x + 6y = 18 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3(x-2) - 6y = 6 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - 6y = 7 \Rightarrow 6x - 12y = 14 \\ 2x - 4y = 5 \Rightarrow 6x - 12y = 15 \end{cases} \Rightarrow$ Incompatible

b) $\begin{cases} \frac{3}{2}x - 3y = \frac{15}{4} \Rightarrow 6x - 12y = 15 \\ 2x - 4y = 5 \Rightarrow 6x - 12y = 15 \end{cases} \Rightarrow$ Compatible indeterminado

c) $\begin{cases} 13x + 7y = 20 \\ 12x + 6y = 18 \end{cases}; \frac{13}{12} \neq \frac{7}{6} \Rightarrow$ Compatible determinado

d) $\begin{cases} 3(x-2) - 6y = 6 \Rightarrow 3x - 6y = 12 \\ 2x - 4y = 8 \Rightarrow x - 2y = 4 \Rightarrow 3x - 6y = 12 \end{cases} \Rightarrow$ Compatible indeterminado

4.89 Un grifo llena un depósito de agua en 2 horas. Otro grifo lo llena en 3 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito, si abrimos los dos a la vez?

- Sin ecuaciones: el primer grifo llena en 1 hora medio depósito, y el segundo llena una tercera parte. Entre los dos llenan cada hora $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. En llenar el depósito tardarán $\frac{6}{5} = 1$ h 12 min.
- En este caso, plantear el problema usando el álgebra es mucho más complicado, no tiene sentido hacerlo. Se puede proponer como ejemplo de un problema en el que es mejor no utilizar ecuaciones.

4.90 El área de un triángulo rectángulo es de 60 metros cuadrados, y la hipotenusa mide 17 metros. Halla las longitudes de sus catetos.

Sean x e y los catetos.

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} = 60 \Rightarrow y = \frac{120}{x} \\ x^2 + y^2 = 17^2 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{120}{x}\right)^2 = 289 \Rightarrow x^4 - 289x^2 + 14\,400 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 225 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow y = 8 \\ x^2 = 64 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = 15 \end{cases} \end{cases}$$

Los catetos miden 15 y 8 metros.

4.91 Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} \frac{2x - y}{3} = \frac{1}{4} \\ 3x - \frac{4}{5}y = \frac{13}{10} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3(5x - 1) - 4(3y + 6) = 27 \\ x - 2(y - 1) = 8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \frac{2x - y}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4(2x - y) = 3 \Rightarrow 8x - 4y = 3 \Rightarrow -16x + 8y = -6 \\ 3x - \frac{4}{5}y = \frac{13}{10} \Rightarrow \frac{30x}{10} - \frac{8y}{10} = \frac{13}{10} \Rightarrow 30x - 8y = 13 \Rightarrow 30x - 8y = 13 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$

b) $\begin{cases} 3(5x - 1) - 4(3y + 6) = 27 \Rightarrow 15x - 12y = 54 \Rightarrow 5x - 4y = 18 \Rightarrow 5(2y + 6) - 4y = 18 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = 2 \\ x - 2(y - 1) = 8 \Rightarrow x - 2y = 6 \Rightarrow x = 2y + 6 \end{cases}$

4.92 **En un concurso se ganan 200 euros por cada respuesta acertada y se pierden 500 por cada fallo. Después de 20 preguntas, Jesús lleva ganados 500 euros. Calcula por tanteo el número de aciertos y fallos, y resuelve después el problema mediante un sistema de ecuaciones.**

Al ser 20 preguntas, es fácil hallar la solución por tanteo: 15 aciertos y 5 fallos.

Sea x el número de aciertos e y el número de fallos.

$$\begin{cases} x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x \\ 200x - 500y = 500 \Rightarrow 2x - 5y = 5 \Rightarrow 2x - 5(20 - x) = 5 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$$

4.93 **Margarita y su abuelo cumplen años el mismo día. Curiosamente, este año han utilizado las mismas cifras en las dos tartas de cumpleaños.**

Calcula sus edades sabiendo que las dos cifras suman 8 y Margarita tiene 54 años menos que su abuelo.

Si la edad del abuelo se escribe xy, hay que resolver este sistema.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 10x + y - (10y + x) = 54 \Rightarrow 9x - 9y = 54 \Rightarrow x - y = 6 \end{cases}$$

El sistema es muy sencillo, la solución es $x = 7$, $y = 1$. El abuelo tiene 71 años y la nieta 17.

4.94 **Resuelve los siguientes sistemas.**

a) $\begin{cases} 6x^2 - 5y^2 = 19 \\ 5x^2 - 2y^2 = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 = y^2 + 20 \\ x^2 - 2y^2 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - y = 3 \\ 7x^2 - 25y^2 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x^2 - 9y^2 = 0 \end{cases}$

a) $$\begin{cases} 6x^2 - 5y^2 = 19 \Rightarrow -12x^2 + 10y^2 = -38 \\ 5x^2 - 2y^2 = 18 \Rightarrow \quad 25x^2 - 10y^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 1$$

b) $$\begin{cases} x^2 = y^2 + 20 \\ x^2 - 2y^2 = 4 \Rightarrow y^2 + 20 - 2y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow x = \pm 6 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x^2 - y = 3 \Rightarrow x^2 = y + 3 \\ 7x^2 - 25y^2 = 3 \Rightarrow 7(y + 3) - 25y^2 = 3 \Rightarrow 25y^2 - 7y - 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = \pm 2 \\ y = \dfrac{-18}{25} \Rightarrow x = \pm \dfrac{\sqrt{57}}{5} \end{cases} \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \Rightarrow x = \dfrac{12 - 3y}{2} \\ 4x^2 - 9y^2 = 0 \Rightarrow 4\left(\dfrac{12 - 3y}{2}\right)^2 - 9y^2 = 0 \Rightarrow 144 - 72y = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

4.95 **Halla dos números sabiendo que sus cuadrados se diferencian en 208 unidades y que la razón entre ambos números es $\dfrac{7}{6}$.**

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 208 \Rightarrow x^2 - \left(\dfrac{6x}{7}\right)^2 = 208 \Rightarrow \dfrac{13x^2}{49} = 208 \Rightarrow x = \pm 28 \Rightarrow y = \pm 24 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{7}{6} \Rightarrow y = \dfrac{6x}{7} \end{cases}$$

Los números son 28 y 24 ó -28 y -24.

4.96 Resuelve, sin utilizar la fórmula, estas ecuaciones de segundo grado.

a) $3x^2 - 6x = 0$ **c)** $13x^2 - 8x = 0$ **e)** $3x^2 + 12 = 0$

b) $6x^2 - 24x = 0$ **d)** $2x^2 - 32 = 0$ **f)** $9x^2 - 4 = 0$

a) $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

b) $6x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 6x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

c) $13x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(13x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{8}{13} \end{cases}$

d) $2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

e) $3x^2 + 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = -4$ No tiene solución real

f) $9x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \dfrac{4}{9} \Rightarrow x = \pm\dfrac{2}{3}$

4.97 Sin resolverlas, indica el número de soluciones de cada ecuación.

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ **b)** $x^2 + x + 3 = 0$ **c)** $2x^2 - 20x + 50 = 0$ **d)** $-2x^2 + x + 3 = 0$

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 > 0 \Rightarrow$ Dos soluciones reales

b) $x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11 < 0 \Rightarrow$ Ninguna solución real

c) $2x^2 - 20x + 50 = 0 \Rightarrow \Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 50 = 0 \Rightarrow$ Una solución real (doble)

d) $-2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 25 > 0 \Rightarrow$ Dos soluciones reales

4.98 Resuelve las ecuaciones del ejercicio anterior en los casos en que sea posible.

a) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{2}{3} \end{cases}$ b) No es posible. c) $x = \dfrac{20}{4} = 5$ d) $x = \dfrac{-1 \pm 5}{-4} = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{3}{2} \end{cases}$

4.99 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(2x - 4)(x + 3) = 0$ **b)** $3(4x - 7)\left(x + \dfrac{1}{3}\right) = 0$ **c)** $2x(x + 1)(3x - 12) = 0$ **d)** $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$

a) $(2x - 4)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$

b) $3(4x - 7)\left(x + \dfrac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7}{4} \\ x + \dfrac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

c) $2x(x + 1)(3x - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$

d) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 + 1 = 0 \text{ No tiene solución real} \end{cases}$

4.100 Resuelve las siguientes ecuaciones por factorización.

a) $3(x^2 + 2x + 1)(x - 1) = 0$ **b)** $x(x^2 - 2) = 4$ **c)** $x^3 - 5x^2 + 8x = 4$ **d)** $x^4 + x^3 = x^2 + x$

a) $3(x^2 + 2x + 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow 3(x + 1)^2(x - 1) = 0$. Soluciones: -1 (doble), 1

b) $x(x^2 - 2) = 4 \Rightarrow x^3 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 2) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + 2x + 2 = 0 \text{ No tiene solución real} \end{cases}$

c) $x^3 - 5x^2 + 8x = 4 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2)^2$. Soluciones: 1, 2 (doble)

d) $x^4 + x^3 = x^2 + x \Rightarrow x(x - 1)(x + 1)^2$. Soluciones: 0, 1, -1 (doble)

4.101 Resuelve estas ecuaciones bicuadradas.

a) $x^4 - 14x^2 - 32 = 0$ **b)** $36x^4 + 5x^2 = 1$

a) $x^4 - 14x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{14 \pm \sqrt{324}}{2} = \begin{cases} \dfrac{14 + 18}{2} = 16 \\ \dfrac{14 - 18}{2} = -2 \end{cases}$

$x^2 = 16 \Rightarrow \boxed{x = \pm 4}$

$x^2 = -2$ No tiene soluciones reales.

b) $36x^4 + 5x^2 = 1 \Rightarrow 36x^4 + 5x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \boxed{x = \pm\dfrac{1}{3}} \\ x^2 = \dfrac{-1}{4} \text{ No tiene soluciones reales} \end{cases}$

4.102 Resuelve estas ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{3x - 2} + x = 10$ **b)** $\sqrt{2x - 5} + \sqrt{3x + 7} = 5$

a) $\sqrt{3x - 2} + x = 10 \Rightarrow \sqrt{3x - 2} = 10 - x \Rightarrow 3x - 2 = (10 - x)^2 \Rightarrow x^2 - 23x + 102 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 6} \\ x = 17 \text{ No es válida} \end{cases}$

b) $\sqrt{2x - 5} + \sqrt{3x + 7} = 5 \Rightarrow 2x - 5 + 3x + 7 + 2\sqrt{(2x - 5)(3x + 7)} = 25 \Rightarrow 2\sqrt{6x^2 - x - 35} = 23 - 5x \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(6x^2 - x - 35) = 25x^2 - 230x + 529 \Rightarrow x^2 - 226x + 669 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 3} \\ x = 223 \text{ No es válida} \end{cases}$

4.103 Resuelve estos sistemas por sustitución y por reducción.

a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 6x + 3y = 7 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$

a) Por sustitución: $\begin{cases} 3x - y = 5 \Rightarrow y = 3x - 5 \\ 4x + 3y = 11 \Rightarrow 4x + 3(3x - 5) = 11 \Rightarrow 13x - 15 = 11 \Rightarrow \boxed{x = 2} \Rightarrow \boxed{y = 1} \end{cases}$

Por reducción: $\begin{cases} 3x - y = 5 \xrightarrow{\cdot 3} 9x - 3y = 15 \\ 4x + 3y = 11 \Rightarrow 4x + 3y = 11 \end{cases} \Rightarrow 13x = 26 \Rightarrow \boxed{x = 2} \Rightarrow 3 \cdot 2 - y = 5 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

b) Por sustitución:

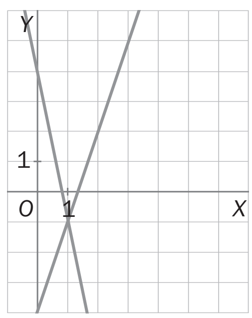
$\begin{cases} 6x + 3y = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7 - 3y}{6} \\ 4x - 5y = 7 \Rightarrow 4\left(\dfrac{7 - 3y}{6}\right) - 5y = 7 \Rightarrow \dfrac{14 - 6y}{3} - 5y = 7 \Rightarrow 14 - 6y - 15y = 21 \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{-1}{3}} \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{4}{3}} \end{cases}$

Por reducción:

$\begin{cases} 6x + 3y = 7 \xrightarrow{\cdot 3} 12x + 6y = 14 \\ 4x - 5y = 7 \xrightarrow{\cdot(-3)} -12x + 15y = -21 \end{cases} \Rightarrow 21y = -7 \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{-1}{3}} \Rightarrow 6x + 3\dfrac{-1}{3} = 7 \Rightarrow 6x - 1 = 7 \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{4}{3}}$

4.104 Resuelve gráficamente y por sustitución el siguiente sistema.

$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$



$\begin{cases} 3x - y = 4 \Rightarrow y = 3x - 4 \\ 5x + y = 4 \Rightarrow 5x + 3x - 4 = 4 \Rightarrow \boxed{x = 1} \Rightarrow \boxed{y = -1} \end{cases}$

4.105 Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 4x^2 + 7y^2 = 23 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 5y = 1 \\ x^2 - 5y^2 = 11 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \Rightarrow 21x^2 - 35y^2 = 49 \\ 4x^2 + 7y^2 = 23 \Rightarrow 20x^2 + 35y^2 = 115 \end{cases} \Rightarrow 41x^2 = 164 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2} \Rightarrow \boxed{y = \pm 1}$

b) $\begin{cases} x + 5y = 1 \Rightarrow x = 1 - 5y \\ x^2 - 5y^2 = 11 \Rightarrow (1 - 5y)^2 - 5y^2 = 11 \Rightarrow 20y^2 - 10y - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 1} \Rightarrow \boxed{x = -4} \\ \boxed{y = \dfrac{-1}{2}} \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{7}{2}} \end{cases} \end{cases}$

4.106 La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 25. Calcula ambos números.

$(x + 1)^2 - x^2 = 25 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 = 25 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12$. Los números son 12 y 13.

4.107 La *media geométrica* de dos números es la raíz cuadrada de su producto. Halla dos números cuya media aritmética es 39 y cuya media geométrica es 36.

$$\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} = 39 \Rightarrow x + y = 78 \Rightarrow y = 78 - x \\ \sqrt{xy} = 36 \Rightarrow xy = 1296 \Rightarrow x(78 - x) = 1296 \Rightarrow x^2 - 78x + 1296 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 54 \Rightarrow y = 23 \\ x = 24 \Rightarrow y = 54 \end{cases} \end{cases}$$

Los números son 54 y 24.

4.108 Con 3000 kilogramos de comida se puede alimentar en un día a 8 vacas y 8 caballos, o a 14 caballos y 5 vacas. ¿Cuánto come cada animal al día?

Sea x la cantidad de comida diaria de una vaca, e y la de un caballo.

$$\begin{cases} 8x + 8y = 3000 \Rightarrow x + y = 375 \Rightarrow y = 375 - x \\ 5x + 14y = 3000 \Rightarrow 5x + 14(375 - x) = 3000 \Rightarrow -9x + 5250 = 3000 \Rightarrow x = 250 \Rightarrow y = 125 \end{cases}$$

Cada vaca come 250 kg diarios, y cada caballo come 125 kg.

4.109 Escribe una ecuación que cumpla las condiciones pedidas en cada caso.

a) De segundo grado, con soluciones 2 y 7.

b) De segundo grado, con una solución doble, 4.

c) De segundo grado, completa y sin solución real.

a) De segundo grado, con soluciones 2 y 7: $(x - 2)(x - 7) = 0 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$

b) De segundo grado, con una solución doble, 4: $(x - 4)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$

c) De segundo grado, completa y sin solución real: $x^2 + x + 1 = 0$

PARA AMPLIAR

4.110 Las soluciones x_1 y x_2 de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ cumplen las siguientes relaciones.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Sin resolver la ecuación de segundo grado, calcula las soluciones de $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Las raíces deben sumar 6, y su producto debe ser 8. Es fácil comprobar que son 2 y 4, por tanteo.

4.111 Un tren recorre los 300 kilómetros de distancia entre dos ciudades en *t* horas. A la vuelta aumenta su velocidad en 10 km/h, realizando el recorrido en 1 hora menos. Halla la velocidad media y el tiempo total empleado en el viaje completo.

Sea v la velocidad en el viaje de ida, y t el tiempo que tarda en realizar dicho viaje.

$$\begin{cases} vt = 300 \Rightarrow t = \dfrac{300}{v} \\ (v + 10)(t - 1) = 300 \Rightarrow (v + 10)\left(\dfrac{300}{v} - 1\right) = 300 \Rightarrow v^2 + 10v - 3000 = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = 50 \Rightarrow t = 6 \\ v = -60 \ \text{No tiene sentido} \end{cases} \end{cases}$$

Si empleó 11 horas en un viaje de 600 km, la velocidad media fue de $\dfrac{600}{11} = 54\dfrac{6}{11}$ km/h.

4.112 Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x - ay = 6 \end{cases}$.

a) Halla el valor de *a* para que el sistema sea compatible indeterminado.

b) Resuelve el sistema para $a = -3$.

a) Los coeficientes de ambas ecuaciones deben ser proporcionales. Como la razón entre los que se conocen es 2, debe ser $a = -2$.

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 2x \\ 4x + 3y = 6 \Rightarrow 4x + 3(3 - 2x) = 6 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{y = 0} \end{cases}$

4.113 Resuelve la ecuación $x^6 - x^5 - 13x^4 + 13x^3 + 36x^2 - 36x = 0$.

$x^6 - x^5 - 13x^4 + 13x^3 + 36x^2 - 36x = x(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x + 3)(x - 3)$

Las soluciones de la ecuación son 0, 1, −2, 2, −3, 3.

4.114 Resuelve la ecuación $\sqrt{x^2 - 5} + 4 = x^2 - 3$.

$$\sqrt{x^2 - 5} + 4 = x^2 - 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 5} = x^2 - 7 \Rightarrow x^2 - 5 = x^4 - 14x^2 + 49 \Rightarrow x^4 - 15x^2 + 54 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3} \\ x^2 = 6 \ \text{No es válida} \end{cases}$$

4.115 Resuelve la ecuación $\sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[4]{x} + 2 = 0$.

(*Sugerencia: estudia la relación que hay entre $\sqrt{x}$ y $\sqrt[4]{x}$, y haz un cambio de variable.)*

$$\sqrt{x} = 3 \cdot \sqrt[4]{x} + 2 = 0 \xrightarrow[z^2 = (\sqrt[4]{x})^2 = \sqrt{x}]{z = \sqrt[4]{x}} z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \Rightarrow x = 1^4 \Rightarrow 1 \\ z = 2 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{cases}$$

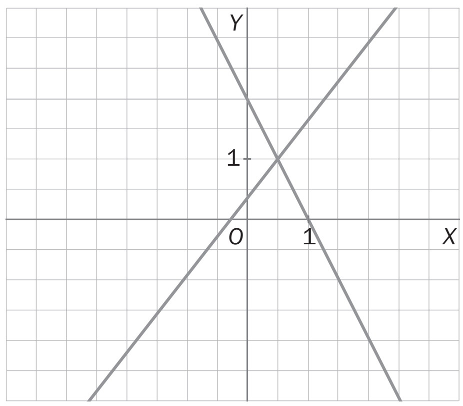
4.116 Resuelve la ecuación $\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} - 2 = 0$.

$$\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} - 2 = 0 \xrightarrow[z^2 = (\sqrt[3]{x^2})^2 = \sqrt[3]{x^4}]{z = \sqrt[3]{x^2}} z^2 + z - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1^3} = \pm 1 \\ z = -2 \Rightarrow x = \sqrt{(-2)^3} \ \text{No tiene solución real} \end{cases}$$

4.117 Resuelve gráfica y algebraicamente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{2x + y = 2} \\ \mathbf{4x - 3y = -1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - 2x \\ 4x - 3y = -1 \Rightarrow 4x - 3(2 - 2x) = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$



4.118 Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} \mathbf{3x^2 - y^2 = 1} \\ \mathbf{x^2 + 2y^2 = 5} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 2} \\ \mathbf{8x^2 - 9y^2 = 1} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow 6x^2 - 2y^2 = 2 \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow 7x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \Rightarrow y = \dfrac{2 - 2x}{3} \\ 8x^2 - 9y^2 = 1 \Rightarrow 8x^2 - 9\left(\dfrac{2 - 2x}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow 4x^2 + 8x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{-5}{2} \Rightarrow y = \dfrac{7}{3} \end{cases} \end{cases}$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

4.119 Velocidad del sonido

Para calcular la profundidad de un pozo, Pepa lanza una piedra y cuenta el tiempo que transcurre desde que la deja caer hasta que la oye chocar en el agua, resultando ser exactamente 2 segundos.

Después, Pepa aplica la siguiente información que encuentra en su libro de Física:

- **Espacio recorrido por un cuerpo en caída libre en función del tiempo: $e(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ donde, g es la aceleración de la gravedad: $g = 9,8$ m/s^2.**
- **Velocidad del sonido en el aire: 340 m/s.**

¿Cuál es la profundidad del pozo?

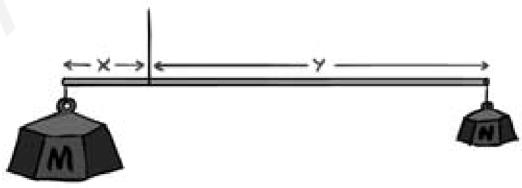
Tiempo que tarda en escucharse el choque = tiempo de caída + tiempo que tarda en llegar el sonido.

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{340} = 2 \Rightarrow \frac{2h}{g} = 4 + \frac{h^2}{340^2} - \frac{h}{85} \Rightarrow 85 \cdot 340^2 \cdot 2h = 4 \cdot 9{,}8 \cdot 340^2 \cdot 85 + h^2 \cdot 85 \cdot 9{,}8 - 340^2 - 9{,}8$$

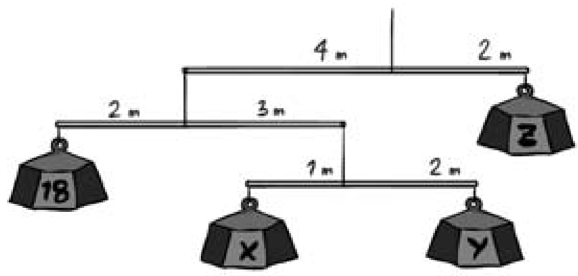
$$833h^2 - 20\,784\,880h + 385\,179\,200 = 0 \Rightarrow h^2 - 24\,952h + 462\,400 = 0 \Rightarrow h = 18{,}5m$$

4.120 El equilibrio

Para que dos masas *M* y *N*, colgadas en los extremos de una vara de masa despreciable, se encuentren en equilibrio, se ha de verificar la siguiente igualdad: $x \cdot M = N \cdot y$.



Calcula los valores de las masas desconocidas en el siguiente caso:



$\begin{cases} x \cdot 1 = 2 \cdot y \\ 3(x + y) = 2 \cdot 18 \end{cases} \Rightarrow 9y = 36 \Rightarrow y = 4 \quad x = 8$

$(18 + x + y)4 = 2x \Rightarrow z = \dfrac{30 \cdot 4}{2} = 60$

4.A1 Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas.

a) $x^2 - 6x = 0$

b) $x^3 - x^2 = 0$

c) $x^4 - 256 = 0$

d) $x^4 = 9x^2$

e) $6x^3 = x^2$

f) $3x^2 - 39x = 0$

a) $x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$

b) $x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (doble)} \\ x = 1 \end{cases}$

c) $x^4 - 256 = 0 \Rightarrow x^4 = 256 \Rightarrow x = \sqrt[4]{256} = \pm 4$

d) $x^4 = 9x^2 \Rightarrow x^4 - 9x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (doble)} \\ x = \pm 3 \end{cases}$

e) $6x^3 = x^2 \Rightarrow x^2(6x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \ (\textit{doble}) \\ x = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

f) $3x^2 - 39x = 0 \Rightarrow 3x(x - 13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 13 \end{cases}$

4.A2 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $4x^2 - 12x + 5 = 0$

b) $x^2 - 9x + 18 = 0$

a) $4x^2 - 12x + 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4} = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{8} = \dfrac{12 \pm \sqrt{64}}{8} = \dfrac{12 \pm 8}{8} =$

$= \begin{cases} \dfrac{12 + 8}{8} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{12 - 8}{8} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

b) $x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \dfrac{9 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{9 + 3}{2} = 6 \\ \dfrac{9 - 3}{2} = 3 \end{cases}$

4.A3 Resuelve la ecuación $3x^2 - 12x + 9 = 0$ directamente y escríbela luego factorizada.

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow 3(x - 1)(x - 3) = 0$

4.A4 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \xrightarrow[z^2 = x^4]{z = x^2} z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ z = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

b) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Rightarrow z^2 - 6z + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ z = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

4.A5 Aplica directamente la definición de raíz cuadrada para calcular el valor de x en la ecuación $\sqrt{x + 4} = 8$.

$\sqrt{x + 4} = 8 \xrightarrow[\text{Definición}]{} x + 4 = 8^2 \Rightarrow x = 60$

4.A6 **Aísla sucesivamente las raíces para calcular el valor de x en la ecuación $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+8} = 3$.**

$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+8} = 3 \Rightarrow \sqrt{x+8} = 3 - \sqrt{x+1} \Rightarrow x + 8 = 9 + x + 1 - 6\sqrt{x+1} \Rightarrow 6\sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 36(x+1) = 4 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{-8}{9}}$

4.A7 **Añade una ecuación a $x + 3y = 10$ para que el sistema formado por ambas sea compatible determinado.**

Respuesta abierta. Por ejemplo, $x + y = 4$.

4.A8 **Resuelve el siguiente sistema.**

$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ -6x + 5y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 5 \Rightarrow x = 5 + 3y \\ -6x + 5y = -4 \Rightarrow -6(5 + 3y) + 5y = -4 \Rightarrow -13y = 26 \Rightarrow \boxed{y = -2} \Rightarrow \boxed{x = -1} \end{cases}$$

4.A9 **Calcula dos números consecutivos cuyo producto sea igual a 72. Hazlo por tanteo y planteando una ecuación de segundo grado.**

$x(x+1) = 72 \Rightarrow x^2 + x - 72 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -9 \end{cases}$

Los números son 8 y 9 o -9 y -8.

4.A10 **Martín dice que tres números pares consecutivos pueden ser medidas de los lados de un triángulo rectángulo. ¿Es cierto? Determina dichos números**

Llamando x al menor, $x^2 + (x+2)^2 = (x+4)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases}$

La solución negativa no tiene sentido, ya que el número es el lado de un triángulo. Por tanto, los lados son 6, 8 y 10.

4.A11 **Resuelve los siguientes sistemas.**

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \Rightarrow x^2 + \left(\dfrac{4}{x}\right)^2 = 17 \Rightarrow x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 4 \end{cases} \\ xy = 4 \Rightarrow y = \dfrac{4}{x} \end{cases}$

Soluciones: (4, 1), (-4, -1), (1, 4), (-1, -4).

b) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

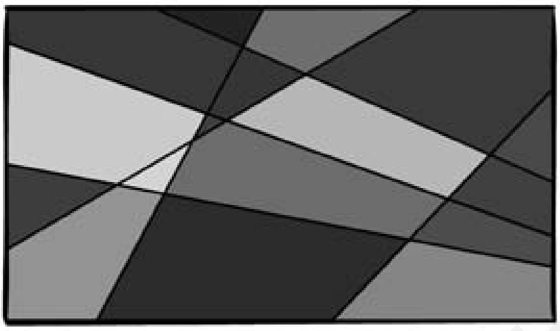
$4x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2} \Rightarrow \boxed{y = \pm 3}$

Soluciones: (2, 3), (-2, -3), (2, -3), (-2, 3).

… A colorear

Coge una hoja en blanco y traza en ella varias rectas de manera que la hoja quede dividida en distintas regiones. La tarea consiste en colorearlas de forma que dos regiones con frontera común tengan diferente de distinto color. Si dos regiones solo tienen un punto en común pueden pintarse del mismo color.

En el ejemplo, hemos utilizado un color distinto para cada región, pero se puede lograr con muchos menos colores.



¿Cuál es el menor número de colores con los que lo consigues tú?

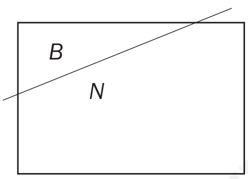
Responderemos a una pregunta más amplia: **¿cuál es el menor número de colores necesarios para colorear cualquier distribución de este tipo?**

Vamos a comprobar que con dos colores es suficiente. El modo en que vamos a verlo es con un método constructivo—inductivo. Es decir, con un procedimiento tal que, siguiéndolo paso a paso, consigamos el objetivo en cualquier caso.

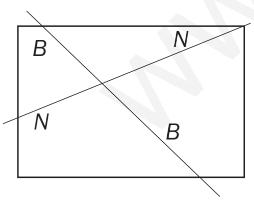
Trabajamos por inducción sobre el número de rectas trazadas en la hoja en blanco.

- Si solo hay una recta, solo hay dos regiones. Así, con un color para cada una basta. Sean por ejemplo el blanco (B) y el negro (N).
- Si añadimos una recta, esta divide a la hoja inicial en dos partes, cada una por separado bien coloreada. Como el problema surge en la frontera común, mantenemos las regiones de un lado con los mismos colores que tenían y cambiamos el color de las regiones del otro lado, las que estaban B las pongo N y las N las pongo B.
- Esta misma operación puede repetirse cada vez que añadamos una nueva recta, de manera que siempre podré colorear una distribución de este tipo con dos colores diferentes.

1.



2.



3.