Ejercicio nº 1.- Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética con 5 centímetros de diferencia. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

2 puntos

Ejercicio nº 2.- Resuelve la siguiente ecuación con fracciones algebraicas:

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{10x+1}{x^2+x}$$

2 puntos

Ejercicio nº 3.- Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada:

$$4x^4-17x^2+4=0$$

2 puntos

Ejercicio nº 4.- Resuelve la siguiente ecuación con radicales:

$$x+\sqrt{10x+6}=9$$

2 puntos

Ejercicio nº 5.- Resuelve la siguiente ecuación de grado superior a dos:

$$x^4-2x^3-10x^2+4x+16=0$$

2 puntos

Ejercicio nº 6.- Calcula las diagonales de un rombo sabiendo que su lado mide 5 cm y su área es 24 cm^2.

2 puntos

Ejercicio nº 7.- Resuelve la siguiente inecuación expresando el resultado en forma gráfica, de intervalo y de conjunto:

$$x^2-4x+3\geq 0$$

2 puntos

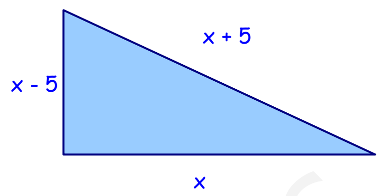
Nota importante:

1. *Elige sólo uno de los dos primeros ejercicios.*
2. *Entre los ejercicios 3 y 4, resuelve sólo uno.*
3. *El resto de ejercicios son obligatorios.*
4. *Cuando trabajes el examen en casa debes hacer todos los ejercicios, no solo los que has elegido en tu examen.*

<u>SOLUCIONES</u>

E.1. Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética con 5 centímetros de diferencia. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:



$$x^2+(x-5)^2=(x+5)^2 \Rightarrow x^2+x^2-10x+25=x^2+10x+25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-20x=0 \Rightarrow x\cdot(x-20)=0 \Rightarrow x=\begin{cases}\cancel{0}\\ 20\end{cases}$$

Sus lados miden 15, 20 y 25 cm.

<u>Perímetro</u>: $P=15+20+25=60\text{ cm}$.

<u>Área</u>: $A=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{20\cdot 15}{2}=150\text{ cm}^2$.

Solución.- El perímetro del triángulo es 60 cm y su superficie, 150 cm^2.

E.2. Resuelve la siguiente ecuación con fracciones algebraicas: $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{10x+1}{x^2+x}$.

Las soluciones no pueden ser valores que anulen el denominador, por lo tanto, $x\neq -1$, $x\neq 0$.

Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores y resolvemos:

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{10x+1}{x^2+x} \Rightarrow \frac{x^2+(x+1)^2}{x\cdot(x+1)}=\frac{10x+1}{x\cdot(x+1)} \Rightarrow x^2+x^2+2x+1=10x+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2-8x=0 \Rightarrow 2x\cdot(x-4)=0 \Rightarrow x=\begin{cases}\cancel{0}\\ 4\end{cases}$$

La única solución es $x=2$.

E.3. Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada: $4x^4-17x^2+4=0$.

Hacemos el cambio de variable $x^2=z$ para conseguir una ecuación de segundo grado:

$$4x^4-17x^2+4=0 \Rightarrow z=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8}=\frac{17\pm\sqrt{225}}{8}=\frac{17\pm 15}{8}=\begin{cases}4\\ 1/4\end{cases}$$

Ahora deshacemos el cambio de variable:

- Si $x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$.
- Si $x^2=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\pm\dfrac{1}{2}$.

E.4. Resuelve la siguiente ecuación con radicales: $x+\sqrt{10x+6}=9$.

En primer lugar aislamos el radical en el primer miembro de la ecuación, después elevamos ambos miembros al cuadrado, y seguidamente, resolvemos:

$$x+\sqrt{10x+6}=9 \Rightarrow \sqrt{10x+6}=9-x \Rightarrow \left(\sqrt{10x+6}\right)^2=(9-x)^2 \Rightarrow 10x+6=81-18x+x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 28x + 75 = 0 \Rightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 300}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{484}}{2} = \frac{28 \pm 22}{2} = \begin{cases} \cancel{25} \\ 3 \end{cases}$$

Como es una ecuación con radicales debemos comprobar si, efectivamente, son soluciones:

- $x = 25 \rightarrow 25 + \sqrt{256} = 9 \Rightarrow 25 + 16 = 9$ (falso) $\Rightarrow$ $x = 25$ no es solución.
- $x = 3 \rightarrow 3 + \sqrt{36} = 9 \Rightarrow 3 + 6 = 9$ (cierto) $\Rightarrow$ $x = 3$ es solución.

E.5. Resuelve la siguiente ecuación de grado superior a dos: $x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 4x + 16 = 0$.

Aplicamos la regla de Ruffini para factorizar la ecuación y resolver fácilmente:

	1	-2	-10	+4	+16
-2		-2	+8	+4	-16
	1	-4	-2	+8	0
+4		+4	0	-8	
	1	0	-2	0	

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0 \Rightarrow (x+2)\cdot(x-4)\cdot(x^2-2) = 0^{(*)}$$

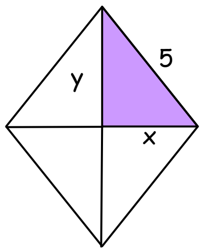
$x = -2$

$x = 4$

$x = \pm\sqrt{2}$

(*) Para que el producto de varios factores sea cero, alguno de ellos ha de ser cero.

E.6. Calcula las diagonales de un rombo sabiendo que su lado mide 5 cm y su área es 24 cm^2.



Planteamos un sistema de ecuaciones:

Para la primera ecuación aplicamos el teorema de Pitágoras.

Para la segunda ecuación, el razonamiento que utilizamos es el siguiente: si la superficie del rombo es 24 cm^2, el triángulo coloreado tendrá 6 cm^2 de área.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ \dfrac{x \cdot y}{2} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

Despejamos y en la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$\boxed{y = \frac{12}{x}} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + \frac{144}{x^2} = 25 \Rightarrow x^4 + 144 = 25x^2 \Rightarrow x^4 - 25x^2 + 144 = 0.$$

Hemos obtenido una ecuación bicuadrada que resolvemos mediante el cambio de variable $x^2 = z$:

$$z^2 - 25z + 144 = 0 \Rightarrow z = \frac{25 \pm \sqrt{625-576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \\ 9 \end{cases}.$$

Ahora deshacemos el cambio de variable:

- Si $x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} = \pm 4$.
- Si $x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$.

Rechazamos los valores negativos, y calculamos y:

- Si $x = 4 \Rightarrow y = \frac{12}{4} = 3$.
- Si $x = 3 \Rightarrow y = \frac{12}{3} = 4$.

Solución.- La diagonal mayor mide 8 cm, y la menor, 6 cm.

E.7. Resuelve la siguiente inecuación expresando el resultado en forma gráfica, de intervalo y de conjunto: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Resolvemos la ecuación asociada a la inecuación:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Representamos las soluciones en la recta real y analizamos en qué tramos se cumple la inecuación y en cuales no:

$(0) \rightarrow (0)^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \geq 0$ (Cierto, se cumple la inecuación)

$(2) \rightarrow 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \geq 0$ (Falso, no se cumple la inecuación)

$(10) \rightarrow (10)^2 - 4 \cdot (10) + 3 = 63 \geq 0$ (Cierto, se cumple la inecuación)

<u>Solución</u>: $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty) = \{ x \in IR / x \leq -1 \text{ ó } x \geq 3 \}$.