UNIDAD 1

NÚMEROS REALES

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1. Clasificar los números decimales en periódicos y no periódicos o irracionales.
2. (**) Operar con radicales.
3. Simplificar expresiones radicales.
4. (**) Racionalizar expresiones fraccionarias con radicales en el denominador.

** Indica objetivo mínimo

Esquema:

1. Introducción

2. Clasificación de números
   2.1. Números naturales
   2.2. Números enteros
   2.3. Números racionales
      a) Definición
      b) Clasificación
   2.4. Números irracionales
   2.5. Números reales

3. Radicales
   3.1. Definición
   3.2. Propiedades de los radicales
      a) Propiedad fundamental de los radicales
      b) Reducción de radicales a índice común
      c) Multiplicación y división de radicales
      d) Introducción y extracción de factores
      e) Racionalización de radicales
      f) Suma y resta de radicales

1. INTRODUCCIÓN

La noción de número natural y entero surge como respuesta a la necesidad que tenía el hombre de contar. Estos números tienen una capacidad limitada para medir, puesto que en la realidad rara vez una medida es un número entero. Así aparecen los números fraccionarios o racionales resolviendo este problema.

Aún así existen cantidades, como la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1, que no pueden ser medidas mediante números racionales y por ello los griegos introdujeron cantidades llamadas irracionales.

El sistema de numeración que se utiliza para medir, contar, comparar,… es el sistema de los números reales.

Actividad:

1. Sitúa en el cuadro los siguientes números:

0, 5, - 6, 0’27, $\sqrt{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\sqrt[3]{2}$, $\frac{28}{7}$, $\frac{-24}{6}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt{16}$, 7'313131…,

π, $\frac{-5}{9}$

N															
Z															
Q															
I															
R															

2. CLASIFICACIÓN DE NÚMEROS

2.1. *Números naturales*

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

2.2. *Números enteros*

Son los números naturales, sus opuestos y el cero.

$$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

2.3. *Números racionales*

a) Definición

Se llama número racional al que puede expresarse como una fracción de números enteros, es decir:

$$Q = \left\{\frac{a}{b} / a, b \in Z, b \neq 0\right\}$$

b) Clasificación

- Su expresión decimal puede ser exacta o periódica (pura o mixta):

b1) Decimal exacta: tiene un número finito de decimales.

Ejemplo: 3'45, 5'689, 54'788

b2) Periódica pura: detrás de la coma aparece el periodo (que es uno o varios decimales que se repiten)

Ejemplo:

3´45454545...

Observa en este ejemplo:

- Parte entera: 3
- Periodo: 45

b3) Periódica mixta: detrás de la coma aparece el anteperiodo (un número finito de decimales) y luego el periodo.

Ejemplo:

3'578454545...

Observa en este ejemplo:

- Parte entera: 3
- Anteperiodo: 578
- Periodo: 45

- Si el número racional aparece en forma de fracción, también se puede saber de que forma será su expresión decimal (una vez que la fracción sea irreducible):

Recuerda: una fracción es irreducible cuando no se puede simplificar mas.

b1) Decimal exacta: en el denominador sólo aparecen potencias de 2, 5 o de ambos.

Ejemplo:

$$\frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2'5$$

Observa en este ejemplo: en el denominador sólo aparece una potencia de 2.

b2) Periódico pura: en el denominador aparecen potencias distintas de 2 y de 5.

Ejemplo:

$$\frac{1}{3} = 0'333...$$

Observa en este ejemplo: en el denominador sólo aparecen potencia de 3 que es distinta de 2 y de 5.

b3) Periódico mixto: En el denominador aparecen potencias de 2 y/o de 5, y alguna otra distinta de 2 y de 5.

Ejemplo:

$$\frac{1}{6} = 0'1666...$$

Observa en este ejemplo: en el denominador aparece el 6, su descomposición es $2 \cdot 3$, es decir una potencia de 2 y otra distinta de 2 y 5, es decir el 3.

Actividad:

2. Clasificar en decimal exacto, periódico puro o periódico mixto los números:

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{10}, \frac{1}{7}, 2'28, \frac{3}{14}, \frac{2}{18}, 3'27313131..., 5'2666...$$

2.4. Números irracionales

I = conjunto de números cuya expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas. No pueden expresarse como cociente de números enteros, por ejemplo $\sqrt{2}, \pi, e...$ por lo que no puede darse su valor exacto y por ello se suelen utilizar aproximaciones mediante números racionales cercanos.

Ejemplo:

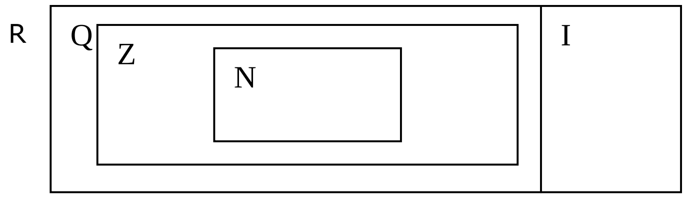
$$\pi \cong 3'1415$$

($\cong$ este símbolo significa aproximadamente)

2.5. Números reales

R = Es el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales. Se representan en la recta real asignando a cada punto un número. Entre cada dos números reales hay infinitos números reales, lo que impide que sean consecutivos.

$$R = Q \cup I$$



Actividad:

3. Clasifica los siguientes números:

3, -5, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{28}$, 0’999…, 3’27, 0’3222…, $\frac{1}{12}$, 2’23555…, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, 3’2754…

3. RADICALES

Los números irracionales se expresan como números decimales de infinitas cifras no periódicas y como radicales.

Actividad:

4. Escribe en forma de potencia:

a) $\sqrt[3]{3}$
b) $\sqrt{7}$
c) $\sqrt[5]{8}$

5. Escribe en forma de radical:

a) $3^{\frac{1}{2}}$
b) $10^{\frac{2}{5}}$
c) $5^{\frac{1}{4}}$

3.1 Definición

Toda potencia con exponente fraccionario es igual a un radical cuyo índice es el denominador del exponente y el radicando es otra potencia cuya base es la dada y el exponente es el numerador.

Los radicales de uso más corriente son las raíces cuadradas.

c = índice del radical
a^b = radicando
raíz = radical

$$\boxed{a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}}$$

Ejemplos:

- $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$
- $5^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{5^5}$
- $6^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{6^3} = \sqrt[5]{2^3 \cdot 3^3}$

- $\sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$
- $\sqrt[5]{3^2 \cdot 7^3} = 3^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{\frac{3}{5}}$
- $\sqrt[4]{25} = 25^{\frac{1}{4}} = \left(5^2\right)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$

Recuerda: cuando tenemos doble potencia los exponentes se multiplican.

Actividad:

6. Transforma en radicales las siguientes potencias de exponente fraccionario:

a) $3^{\frac{5}{3}}$ **d)** $4^{\frac{5}{6}}$ **g)** $52^{\frac{2}{5}}$ **j)** $7^{\frac{3}{2}}$

b) $2^{\frac{3}{7}}$ **e)** $4^{\frac{2}{3}}$ **h)** $x^{\frac{5}{4}} =$ **k)** $y^{\frac{1}{2}} =$

c) $3^{\frac{5}{3}} =$ **f)** $4^{\frac{3}{4}} =$ **i)** $x^{\frac{-2}{3}} =$ **l)** $y^{\frac{-3}{2}} =$

7. Transforma en potencia los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{a}$ **b)** $\sqrt[5]{a^4}$ **c)** $\sqrt[3]{ab^2}$ **d)** $\sqrt[10]{ab^2c^3}$

e) $\sqrt[5]{a^2} =$ **f)** $\sqrt{a^5} =$ **g)** $\sqrt[3]{7^4} =$ **h)** $\sqrt[3]{3^7} =$

i) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} =$ **j)** $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^2}} =$

3.2. Propiedades de los radicales

a) Propiedad fundamental de los radicales

Si se multiplican o dividen por un número el exponente del radicando y el índice de la raíz, el radical no varía:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nm]{a^{pm}} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a^{\frac{p}{m}}}}$$

Ejemplos:

- $\sqrt[6]{b^4} = \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[12]{b^8}$
- $\sqrt[10]{a^8} = \sqrt[5]{a^4} = \sqrt[30]{a^{24}}$

En caso que en el radicando aparezca un producto o cociente de potencias, multiplicamos o dividimos todos los exponentes por el mismo número por el que se multiplica o divide el índice.

Ejemplos:

- $\sqrt{2a} = \sqrt[4]{2^2a^2} = \sqrt[6]{2^3a^3}$
- $\sqrt[5]{a^2+b^2} = \sqrt[10]{(a^2+b^2)^2} = \sqrt[15]{(a^2+b^2)^3}$
- $\sqrt[10]{\dfrac{x^4}{b^2}} = \sqrt[5]{\dfrac{x^2}{b}} = \sqrt[30]{\dfrac{x^{12}}{b^6}}$

La propiedad fundamental se utiliza para:

- Amplificar radicales

Multiplicando el exponente y el índice de la raíz por el mismo número.

- Simplificar radicales

Dividiendo el exponente y el índice de la raíz por el mismo número.

Actividad:

8. Simplificar los radicales:

a) $\sqrt[4]{\dfrac{a^6b^2}{c^{18}}} =$ **b)** $\sqrt[4]{36} =$ **c)** $\sqrt[9]{a^6b^9c^{15}} =$

d) $\sqrt[6]{x^3} =$ **e)** $\sqrt[3]{x^6} =$ **f)** $\sqrt[4]{x^2y^4} =$

g) $\sqrt{x^2y^4z^6} =$ **h)** $\sqrt[12]{64} =$ **i)** $\sqrt[5]{32} =$

j) $\sqrt[6]{125} =$ **k)** $\sqrt[8]{16x^4} =$ **l)** $\sqrt[4]{1+\dfrac{9}{16}} =$

9. Amplificar radicales:

a) $\sqrt[4]{\frac{b^6c}{a}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{a^2b}{9}}$

c) $\sqrt[5]{\frac{a^3b^5}{c^7}}$

b) Reducción de radicales a índice común(homogeneizar)

Pasos:

1. Se halla el m.c.m. de los índices, que será el índice común a todos los radicales.
2. Se divide el índice común entre el índice de cada radical y el resultado será el exponente del correspondiente radicando.

Ejemplo:
Reduce a índice común los siguientes radicales: $\sqrt{2b^2}, \sqrt[6]{3c^2 4b^3}, \sqrt[4]{5(x-a)^3}$

1. m.c.m.(2,6,4) = 12
2. $\sqrt{2b^2} = \sqrt[12]{(2b^2)^6} = \sqrt[12]{2^6 b^{12}}$

$\sqrt[6]{3c^2 4b^3} = \sqrt[12]{(3c^2 4b^3)^2} = \sqrt[12]{3^2 c^4 4^2 b^6}$

$\sqrt[4]{5(x-a)^3} = \sqrt[12]{(5(x-a)^3)^3} = \sqrt[12]{5^3 (x-a)^9}$

Actividad:

10. Reducir a índice común los siguientes radicales:

a) $\sqrt{5},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{5x},\ \sqrt[3]{4x^2y},\ \sqrt[6]{7a^3b}$

c) $\sqrt{a},\ \sqrt[4]{a},\ \sqrt[8]{a}$

d) $\sqrt[4]{6},\ \sqrt[3]{6},\ \sqrt[6]{40}$

e) $\sqrt[4]{3},\ \sqrt[3]{7},\ \sqrt{5}$

f) $\sqrt{2a},\ \sqrt[6]{15a^3x^2},\ \sqrt[3]{3a^2b}$

g) $\sqrt{a},\ \sqrt[3]{b},\ \sqrt[6]{c}$

h) $\sqrt[4]{6},\ \sqrt[6]{4}$

c) Multiplicación y división de radicales

Para multiplicar o dividir radicales **es necesario que tengan el mismo índice**, si no lo tienen reducimos a índice común.

$$\boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}} \qquad \boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

Ejemplos:

- $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{7}=\sqrt[5]{2\cdot 7}=\sqrt[5]{14}$
- $\sqrt[6]{a^4}\cdot\sqrt[4]{ab^3}=\sqrt[12]{a^8a^3b^9}=\sqrt[12]{a^{11}b^9}$
- $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^3}}=\dfrac{\sqrt[12]{a^8}}{\sqrt[12]{a^9}}=\sqrt[12]{\dfrac{a^8}{a^9}}=\sqrt[12]{a^{-1}}=\sqrt[12]{\dfrac{1}{a}}$

Recuerda:
- cuando multiplicamos potencias de la misma base los exponentes se suman. $\left(a^n\cdot a^m=a^{n+m}\right)$
- cuando dividimos potencias de la misma base los exponentes se restan. $\left(a^n : a^m=a^{n-m}\right)$
- una potencia elevada a un exponente negativo es el inverso. $\left(a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\right)$

Actividad:

11. Calcula:

a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{2x^2}=$

b) $3\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[4]{8a^3}=$

c) $\sqrt[4]{a^2b^2}\cdot 2\sqrt[3]{3a^2b}=$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{8a^3b}\cdot\sqrt[4]{4a^2}}{\sqrt[6]{2a^3b^2}}=$

e) $\dfrac{\sqrt{9m^2}\cdot\sqrt[4]{6n^2}}{\sqrt[6]{m^3n^2}\cdot\sqrt[3]{mn}}=$

f) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{32}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{16}}=$

g) $5\sqrt{27}\cdot 4\sqrt{6}=$

h) $\sqrt{72}\cdot 3\sqrt{8}=$

i) $5\sqrt{\dfrac{3}{4}}\cdot\sqrt{\dfrac{8}{27}}=$

j) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[8]{x^7}=$

k) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2y^4}=$

l) $\sqrt[5]{\dfrac{x^2y^2}{z^2}}:\sqrt{\dfrac{xy}{z}}=$

m) $\dfrac{\sqrt[9]{64a^3b^6}}{\sqrt[3]{4a}}=$

n) $\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}=$

d) Introducción y extracción de factores

La introducción de factores dentro de un radical equivale a realizar una multiplicación de radicales no homogéneos.

Ejemplos:

- $b\ \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{b^3 b^2} = \sqrt[3]{b^5}$
- $a^2\ \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{(a^2)^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^6 a^2} = \sqrt[3]{a^8}$

Un factor que forma parte del radicando se puede sacar total o parcialmente siempre y cuando el exponente sea mayor o igual que el índice de la raíz. Para ello se divide el exponente del radicando entre el índice de la raíz, de forma:

-El cociente se toma como exponente del factor fuera del radical.
-El resto se toma como exponente del factor dentro del signo radical.

Ejemplos:

- $\sqrt[9]{b^{38}} = b^4\ \sqrt[9]{b^2}$
- $\sqrt{a^5 b^7 c^3} = a^2 b^3 c\sqrt{abc}$
- $\sqrt[4]{3^5} = 3\ \sqrt[4]{3}$

Actividad:

12. Extrae todos los factores que se puedan:

a) $\sqrt{50a^2b}$ **b)** $\sqrt{98a^3b^5c^7}$ **c)** $6\sqrt{\dfrac{5a^3}{24x^2}}$

d) $5\sqrt{\dfrac{9n^3}{5m^2}}$ **e)** $\sqrt[3]{\dfrac{125}{4b^5}}$ **f)** $\sqrt{9a^2}$

g) $\sqrt{50} =$ **h)** $\sqrt{12} =$ **i)** $\sqrt{18} =$

j) $\sqrt{45} =$ **k)** $\sqrt{75} =$ **l)** $\sqrt[3]{16} =$

m) $\sqrt[3]{40} =$ **n)** $\sqrt[3]{48} =$ **ñ)** $\sqrt[4]{64} =$

o) $\sqrt[5]{128a^5b^{11}} =$ **p)** $\sqrt{a^4b^5} =$ **q)** $\sqrt{12x^2y^5} =$

r) $\sqrt{\dfrac{125a^2b}{16}} =$ **s)** $\sqrt[3]{\dfrac{16a^4x^3}{27y^6}} =$ **t)** $\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}} =$

u) $\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}} =$ **v)** $\sqrt{\dfrac{x}{9}+\dfrac{x}{16}} =$ **w)** $\sqrt{\dfrac{x^5}{25}+\dfrac{x^5}{144}} =$

13. Introduce los factores dentro del radical:

a) $3\sqrt[3]{5}$ **b)** $2\sqrt{7}$ **c)** $\frac{2}{3}\sqrt[4]{6}$

d) $4\cdot\sqrt[3]{4} =$ **e)** $x\cdot\sqrt{\frac{2}{x}} =$ **f)** $\frac{2}{x}\cdot\sqrt{\frac{3x}{8}} =$

g) $2\cdot\sqrt{5} =$ **h)** $4\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}} =$ **i)** $\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{25}{9}} =$

j) $\frac{3x}{4}\cdot\sqrt{\frac{32a}{27x}} =$ **k)** $5\sqrt{7} =$

e) <u>Racionalización de radicales</u>

Tenemos dos casos:

e1) <u>El denominador es un monomio</u>:

e1.1) Radical de índice dos:

Se multiplican numerador y denominador por la raíz que aparece en el denominador.

Ejemplos:

- $\frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$
- $\frac{6}{5\sqrt{18}} = \frac{6}{5\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{2}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{5}$

Actividad:

14. Racionalizar:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} =$ **e)** $\frac{2}{\sqrt{3}} =$ **h)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$

b) $\frac{3}{\sqrt{2-x}} =$ **f)** $\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} =$ **i)** $\frac{\sqrt{xy}}{5\sqrt{vz}} =$

c) $\frac{4}{\sqrt{2}} =$ **g)** $\frac{1}{\sqrt{2}} =$ **j)** $\frac{3}{\sqrt{3}} =$

d) $\frac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2}} =$

e1.2) Radical de índice m:

Se multiplican numerador y denominador por la raíz m-ésima de una expresión cuyo producto por el radicando del denominador sea potencia m-ésima perfecta. (Al hacer la multiplicación, en el denominador el índice de la raíz debe coincidir con el exponente del radicando)

Ejemplos

- $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt[3]{5}}=\dfrac{\sqrt{5}\ \sqrt[3]{5^2}}{2\sqrt[3]{5}\ \sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{\sqrt[6]{5^3 5^4}}{2\cdot 5}=\dfrac{\sqrt[6]{5^3 5^4}}{10}=\dfrac{\sqrt[6]{5^7}}{10}=\dfrac{5\ \sqrt[6]{5}}{10}=\dfrac{\sqrt[6]{5}}{2}$
- $\dfrac{3}{\sqrt[4]{ab^2c^3}}=\dfrac{3\sqrt[4]{a^3b^2c}}{\sqrt[4]{ab^2c^3}\ \sqrt[4]{a^3b^2c}}=\dfrac{3\sqrt[4]{a^3b^2c}}{abc}$

Actividad:

15. Racionalizar:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$ **b)** $\dfrac{6x}{\sqrt[5]{ab^2x^3}}$ **c)** $\dfrac{3}{\sqrt[5]{(x+y)^3}}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}=$ **e)** $\dfrac{2}{\sqrt[4]{x^2y}}$ **f)** $\dfrac{12}{\sqrt[4]{27}}=$

g) $\dfrac{12}{\sqrt[4]{27}}=$ **h)** $\dfrac{3x+y}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$ **i)** $\dfrac{a}{\sqrt[4]{a}}=$

j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}=$ **k)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3^2}}=$

e2) <u>El denominador es un binomio con radical de índice dos:</u>

Se multiplican numerador y denominador por el binomio conjugado del denominador, el cual se obtiene cambiando el signo de uno de los términos (es decir el conjugado de a + b es a − b y el conjugado de a − b es a + b)

Ejemplos:

- $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{1\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$
- $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{12-3\sqrt{6}-2\sqrt{6}+3}{8-3}=\dfrac{15-5\sqrt{6}}{5}=3-\sqrt{6}$

Observa en los ejemplos: en el denominador aparece una identidad notable $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Actividad:

16. Racionalizar:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{2}}=$ **e)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}-5}=$ **f)** $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=$

g) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

f) <u>Suma y resta de radicales (radicales semejantes)</u>

f1) <u>Suma y resta de radicales</u>

Para poder sumar y restar radicales, estos tienen que ser semejantes, es decir tener el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplos:

- $2\sqrt{2}+7\sqrt{2}+5\sqrt{2}=14\sqrt{2}$
- $6\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}$
- $\sqrt[3]{54}+\sqrt{8}+\sqrt[3]{250}-\dfrac{3}{4}\sqrt{32}-\sqrt[3]{16}=$

$$\sqrt[3]{2\cdot 3^3}+\sqrt{2^3}+\sqrt[3]{2\cdot 5^3}-\frac{3}{4}\sqrt{2^5}-\sqrt[3]{2^4}=$$

$$3\sqrt[3]{2}+2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\frac{3}{4}\,4\,\sqrt{2}-2\sqrt[3]{2}=$$

$$(3-2)\sqrt[3]{2}+(2+5-3)\sqrt{2}=\sqrt[3]{2}+4\sqrt{2}$$

Observa en el último ejemplo:

- primero se descomponen los números.
- segundo se extraen aquellos factores que se puedan
- tercero se suman los coeficientes de los radicales semejantes

Actividad:

17. Realiza las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{45}-\sqrt{27}-\sqrt{20}=$
b) $\sqrt{175}+\sqrt{243}-\sqrt{63}-\sqrt{75}=$
c) $\sqrt{80}-2\sqrt{252}+3\sqrt{405}-3\sqrt{500}=$
d) $2\sqrt{450}+9\sqrt{12}-7\sqrt{48}-3\sqrt{98}=$
e) $\frac{1}{2}\sqrt{12}-\frac{1}{3}\sqrt{18}+\frac{3}{4}\sqrt{48}+\frac{1}{6}\sqrt{72}=$
f) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{16}=$
g) $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{1029}-\sqrt[3]{625}=$
h) $\sqrt[3]{81}-3\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{686}+2\sqrt[3]{648}=$
i) $3\sqrt{5}+\sqrt{180}-\sqrt{80}=$
j) $3\sqrt{12}-5\sqrt{48}+2\sqrt{192}=$
k) $3\sqrt{32}-5\sqrt{98}+\sqrt{18}=$
l) $5\sqrt{2}-11\sqrt{2}+4\sqrt{5}-13\sqrt{5}+4\sqrt{2}+\sqrt{5}=$
m) $5\sqrt{2}-\sqrt{18}+3\sqrt{72}+11\sqrt{8}-3\sqrt{50}=$
n) $3\sqrt{12}-11\sqrt{2}+8\sqrt{3}+5\sqrt{8}+2\sqrt{75}=$
o) $4\sqrt{20}-3\sqrt{45}+11\sqrt{125}-20\sqrt{5}=$
p) $5\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{27}-4\sqrt{3}-\sqrt{300}=$
q) $5\cdot\sqrt[3]{16}+3\cdot\sqrt[3]{250}+2\cdot\sqrt[3]{54}-4\cdot\sqrt[3]{2}=$
r) $5\cdot\sqrt[4]{2}+7\cdot\sqrt{2}-6\cdot\sqrt[4]{32}+13\cdot\sqrt[4]{64}-\sqrt[4]{1250}=$
s) $\sqrt{\frac{2}{5}}+4\sqrt{\frac{18}{125}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}}+\sqrt{\frac{5}{2}}=$
t) $3\sqrt[3]{81ab^5}+12b\sqrt[3]{\frac{3a^4}{8}}+\sqrt[3]{3a^7}=$

f2) <u>Potencia de un radical</u>:

Potencia de un radical es igual a otro radical de igual índice y cuyo radicando es igual a una potencia de exponente la multiplicación de exponentes.

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}}$$

Ejemplo:

$$\left(\sqrt[3]{a^6}\right)^4 = \sqrt[3]{a^{24}} = a^8$$

f3) Radical de un radical:

Radical de un radical es igual a otro radical cuyo índice será la multiplicación de los índices y el radicando será el inicial.

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{\mathbf{a}}} = \sqrt[mn]{\mathbf{a}}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{3a^2}} = \sqrt[12]{3a^2}$$

$$\sqrt[4]{a^3 \cdot \sqrt{a}} = \sqrt[4]{\sqrt{a^6 a}}\sqrt[8]{a^7}$$

Actividad:

18. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{ab}}}\right)^{12} =$ **b)** $\left(\sqrt{\sqrt[4]{32a^4}}\right)^2 =$ **c)** $\sqrt{\sqrt[3]{2a^3\ \sqrt[5]{2^4}}} =$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^{60}}}} =$ **e)** $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5 =$ **f)** $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}}} =$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}}} =$ **h)** $\left(\sqrt[3]{25}\right)^4 =$ **i)** $\left(\sqrt{8}\right)^3 =$

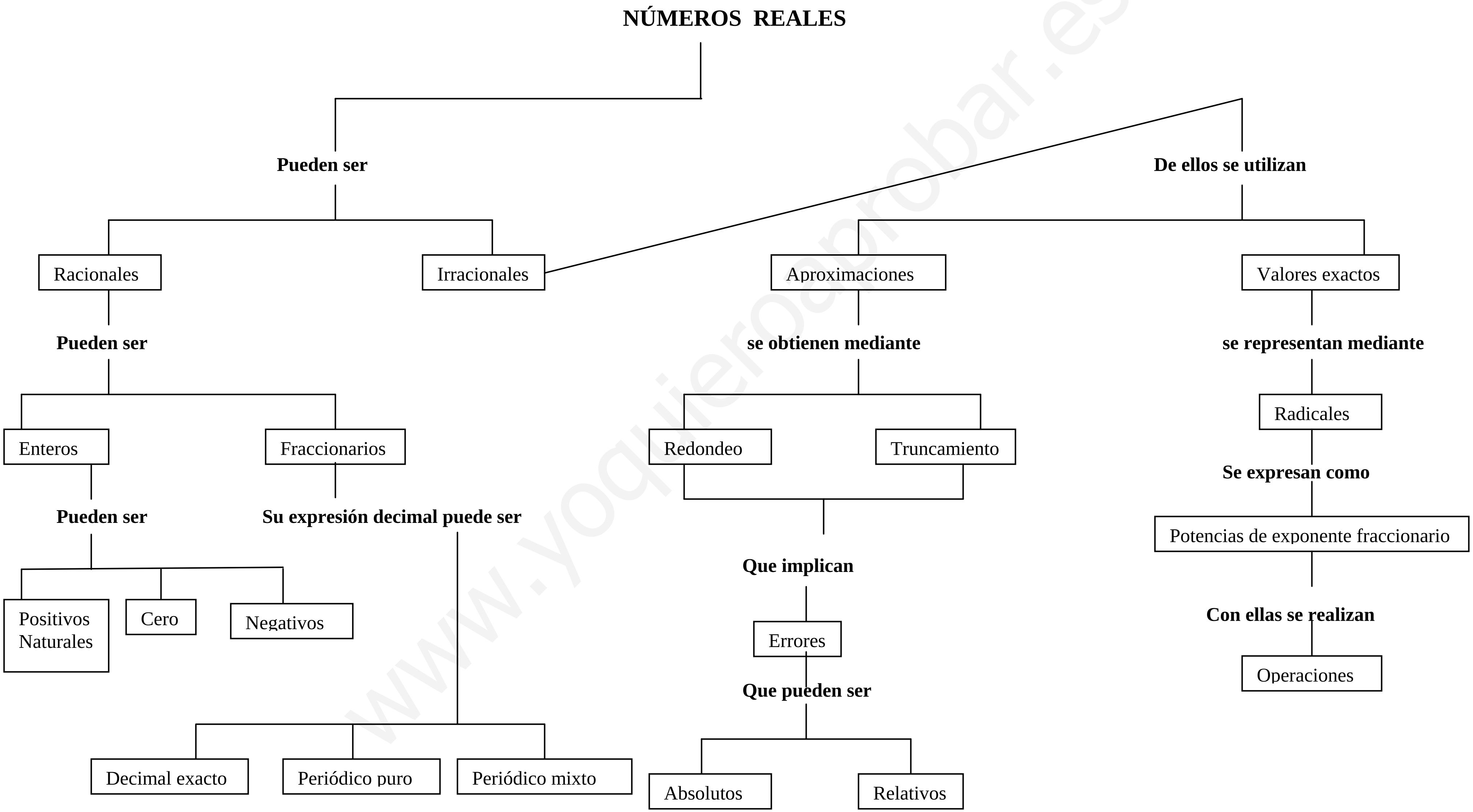
j) $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^6 =$ **k)** $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^9 =$ **l)** $\left(\sqrt[3]{27a^4}\right)^2 =$

m) $\sqrt{\sqrt{3}} =$ **n)** $\sqrt{\sqrt[3]{5}} =$ **ñ)** $\sqrt{\sqrt{\sqrt{8}}} =$

o) $\sqrt{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt[6]{a^5\sqrt{a^5}} \cdot \sqrt[4]{a\ \ \sqrt[3]{a}} =$ **p)** $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{8}}} =$ **q)** $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} =$

r) $\sqrt[4]{\frac{25}{9}\ \sqrt[3]{\frac{9}{25}}} =$ **s)** $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{\sqrt{8x^3}}}\right)^7 =$ **t)** $\sqrt[4]{\frac{x}{y}\ \sqrt[3]{\frac{y}{x}}} =$

MAPA CONCEPTUAL



EJERCICIOS

1. Clasifica los siguientes números:

$5,\ 2'7,\ -7,\ \frac{3}{5},\ \sqrt{4},\ \frac{4}{9},\ \sqrt{3},\ \frac{1}{6},\ 2'777\ldots,\ \pi,\ 3'82555\ldots,\ 2'358573\ldots$

2. Extraer todos los factores posibles:

a) $\sqrt{18}$

b) $\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{50a^2b}$

d) $2\sqrt{75x^4y^5}$

e) $\sqrt{\dfrac{27a^6m^3n^2}{392b^9c^2}}$

f) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{27x^4}{16a^2b^4}}$

g) $2xy\ \sqrt[4]{\dfrac{81a^9}{4x^5y^{12}}}$

h) $\sqrt{32}$

i) $\sqrt[3]{16x^5}$

j) $\sqrt[4]{64x^5y^6}$

k) $\sqrt{\dfrac{27}{26}}$

l) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^2y^4z^5}{81a^4b}}$

m) $\sqrt{\dfrac{2^6a^6b^7c^8}{3^6x^3y^6z^9}}$

3. Introducir dentro del radical todos los factores posibles que se encuentren fuera de él:

a) $3\sqrt{5}$

b) $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{8}$

c) $20a^3b^2\ \sqrt[3]{2b^2}$

d) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

e) $\dfrac{1}{2}a^{-2}b\ \sqrt[3]{4abx}$

f) $5mn^2p^3\sqrt{2m^3np^2}$

4. Calcula:

a) $\sqrt{3}+\sqrt{18}-2\sqrt{8}=$

b) $\sqrt{20}-\sqrt{245}+3\sqrt{5}=$

c) $4\sqrt{\dfrac{2}{25}}-3\sqrt{18}+6\sqrt{\dfrac{2}{9}}-\sqrt{\dfrac{18}{16}}=$

d) $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{50}=$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{a^7}{8}}-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{a^4 27}+\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{b^6c^3a}=$

f) $2a\sqrt{3}-\sqrt{27a^2}+a\sqrt{12}$

g) $2a\sqrt{2}-a\sqrt{8}+3\sqrt{2a^2}$

h) $2\sqrt{48}+3\sqrt{12}+\sqrt{75}+\sqrt{300}=$

i) $\sqrt{32}-\sqrt{18}+\sqrt{98}=$

j) $2\sqrt{8}+4\sqrt{72}-7\sqrt{18}=$

k) $\sqrt{36x}+\dfrac{5}{2}\sqrt{9x^3}-\dfrac{3}{5}\sqrt{\dfrac{x}{4}}=$

l) $6\sqrt{3}-4\sqrt{3}+5\sqrt{3}$

m) $3\sqrt{2}-3\sqrt{8}+3\sqrt{18}$

5. Realizar las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{2}\sqrt{14}\cdot\frac{2}{7}\sqrt{21}$

b) $\sqrt{\frac{a}{2a}} : \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{2x^4}{25y^5}}\cdot\sqrt[4]{\frac{4x^5 5y}{5y}}$

d) $\sqrt{75x^2y^3} : 5\sqrt{3xy}$

e) $\frac{2a}{3}\sqrt[3]{x^2} : \frac{a}{3x^2}\sqrt[4]{x^3}$

f) $\sqrt[3]{\frac{a^4b^3}{c^7}}\cdot\sqrt{\frac{a^6c^3}{b^4}}$

g) $\sqrt{8a^5bc^4} : \left(\frac{3}{2}a\sqrt{ab^2c^6}\right)$

h) $\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{x-1}}$

i) $\left(a-\sqrt{b}\right)\cdot\left(a+\sqrt[3]{b^2}\right)$

j) $5\sqrt[5]{x^4} * \frac{3}{5}\sqrt[4]{x^7a} * 2\sqrt{x^6 25} =$

k) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2}$

l) $\frac{5}{6}\sqrt[3]{15}\cdot 12\sqrt[3]{50}$

m) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right) : \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$

n) $3\sqrt[3]{16a^5} : 4\sqrt[3]{2a^2}$

ñ) $5\sqrt[5]{x^4}\cdot\frac{3}{5}\sqrt[4]{x^7a}\cdot 2\sqrt{x^6 25}$

o) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\cdot 4\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$

p) $7\sqrt[3]{\frac{3xy^2}{4z}}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2xz}{3y}}\cdot 4\sqrt[4]{\frac{5x}{64y^2}}$

q) $\left(\sqrt{3-a}-\sqrt{3+a}\right)\cdot\left(\sqrt{3-a}+\sqrt{3+a}\right)-2a$

r) $\left(\sqrt{\frac{a}{2b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4b^2}{a^2}}\right) : \sqrt{\frac{2b}{a}}$

6. Simplificar:

a) $\sqrt[6]{12}\left(5\sqrt{3} : \sqrt[3]{9}\right)-\left(\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{\frac{4}{3}}\right)$

b) $\dfrac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} : \sqrt[4]{a^3}}{\frac{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[8]{a^7}}}$

c) $\sqrt{4a-8b}-\sqrt{9a-18b}+2\sqrt{16a-32b}$

d) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}}$

e) $\sqrt[4]{b\sqrt[3]{\frac{1}{b}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{\frac{1}{b}}}}}$

f) $\left(\sqrt[4]{x^7y^5a^3}\right)^3$

g) $\sqrt{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt[6]{a^5\sqrt{a^5}}\cdot\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}} =$

j) $\dfrac{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}} : \sqrt{a}}{\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}} : \sqrt[8]{a}}$

k) $\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{2}{x}}-\sqrt{\frac{1}{2x}}+\sqrt{8x}$

l) $\sqrt{\frac{2a}{b}}-\sqrt{\frac{2b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{2b}}+\sqrt{\frac{2}{ab}}-\sqrt{\frac{ab}{2}}$

m) $3\sqrt{3\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{3}}}$

n) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}\sqrt{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{b^3}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{b}}}$

ñ) $\sqrt[3]{\frac{3^0 * 5^{-1}}{5 * 4}}$

o) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} =$

h) $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}} =$

i) $\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 =$

p) $\sqrt{25\sqrt{81\sqrt{256}}} =$

7. Racionalizar las siguientes expresiones:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$

2) $\dfrac{7\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+1} =$

3) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} =$

4) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-1} =$

5) $\dfrac{5\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{5\sqrt{2}-5\sqrt{3}} =$

6) $\dfrac{7\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+1} =$

7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

8) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} =$

9) $\dfrac{6}{\sqrt{2}} =$

10) $\dfrac{2}{\sqrt{6}} =$

11) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} =$

12) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$

13) $\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}} =$

14) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} =$

15) $\dfrac{8}{\sqrt{5}-1} =$

16) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}} =$

17) $\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}$

18) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}} =$

19) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2^2}} =$

20) $\dfrac{ab^2}{\sqrt[5]{a^3b^2}}$

21) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$

22) $\dfrac{\sqrt{3}-2}{2+2\sqrt{3}} =$

23) $\dfrac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} =$

24) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$

25) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$

26) $\dfrac{5}{\sqrt{3}} =$

27) $\dfrac{3x-2y}{\sqrt[7]{3x^2y^4}}$

28) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1} =$

29) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} =$

8. ¿Cuáles de los siguientes radicales son semejantes? ¿Y cuáles homogéneos?

a) $5\sqrt{2},\ 3\sqrt{8},\ \sqrt{18}$

b) $\sqrt[3]{81},\ \sqrt[3]{24},\ \sqrt[6]{9},\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{9a^3}}$

c) $\sqrt{3a},\ \sqrt[6]{81a^4},\ \sqrt[6]{27a^3},\ \sqrt{2a}$

d) $\sqrt{2}, \sqrt[4]{9}, \sqrt[6]{27}$

e) $6^{\frac{1}{4}}, 36^{\frac{1}{8}}, 15^{\frac{1}{4}}$

f) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}$

g) $\sqrt{3a^2},\ \sqrt{27},\ \sqrt{\dfrac{1}{3}},\ 2\sqrt{\dfrac{4}{27}}$

h) $3\sqrt[4]{2xy},\ \sqrt[4]{32x^5y},\ \sqrt[4]{2x^9y^5}$

i) $\sqrt{2}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{8}$

j) $\sqrt[5]{2}, \sqrt[10]{8}, 5\sqrt[5]{4}$

k) $\sqrt{a}, \sqrt[4]{a^2}, \sqrt[6]{a^3}$

l) $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{54}$

CUESTIONES

1. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades:

- **a)** $a^4 + a^2 = a^6$
- **b)** $5^2 - 2^2 = 3^2$
- **c)** $a^m \cdot b^n = (a \cdot b)^{m \cdot n}$
- **d)** $\dfrac{5x^{-2}y^{-2}}{x^{-2}y^{-3}} = 5y$
- **e)** $\dfrac{x}{y^{-1}} - \dfrac{y}{x^{-1}} = 0$

2. Indica si son verdaderas o falsas:

- **a)** El número $\sqrt{5}$ es real. ¿Es irracional?
- **b)** El número 5 es natural. ¿Es entero?
- **c)** El número – 7 es entero. ¿Es racional?
- **d)** El número $\dfrac{2}{3}$ es real. ¿Es irracional?
- **e)** El número π es irracional. ¿Es racional?
- **f)** El número 2’777777... es real. ¿Es racional?

3. Dado un cuadrado de lado $\sqrt{3}$ cm. ¿Qué tipo de número será su área? y ¿su perímetro?.

4. Indica si son verdaderas o falsas:

- **a)** Todo número real es racional.
- **b)** Todo número natural es entero.
- **c)** Todo número entero es racional.
- **d)** Todo número real es irracional.
- **e)** Todo número natural es racional.
- **f)** Un número irracional es decimal finito.
- **g)** Algunos números enteros son naturales.

5. Explica la diferencia que hay entre las expresiones decimales de los números racionales y los irracionales.

6. ¿Es cierto que entre $\dfrac{2}{5}$ y $\dfrac{3}{5}$ existen números?

7. Siendo la raíz cuadrada de un número irracional, ¿el número debe ser irracional?

8. Indica si son verdaderas o falsas:

- **a)** $\sqrt{x-y} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$
- **b)** $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 = 1$
- **c)** $\sqrt[4]{\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$

9. De las tres opciones expuestas a continuación elige la correcta, si es que la hay:

- **a)** Los números racionales contienen como subconjunto a los números enteros, pero están contenidos en los números naturales.
- **b)** Los números racionales contienen como subconjunto a los números enteros, que a su vez contienen al conjunto de los naturales.
- **c)** Los números racionales están contenidos en el conjunto de los números enteros, que a su vez contienen al conjunto de los naturales.

10. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta:

- **a)** Hay dos clases de números racionales: los que se pueden escribir en forma decimal y los que se pueden escribir en forma de fracción.
- **b)** Hay dos clases de números racionales: los que se pueden escribir en forma decimal y los que no.
- **c)** Todo número racional se puede escribir en forma de fracción y en forma de decimal.

11. A la hora de multiplicar dos radicales lo primero que tenemos que hacer es:

- **a)** Reducirlos a índice común, si es que no lo tienen.
- **b)** Observar si tienen el mismo radicando, y si no lo tienen debemos reducirlos a radicando común.
- **c)** No son necesarias ninguna de las condiciones anteriores, siempre se pueden multiplicar sin necesidad de transformarlos previamente.

12. Para poder efectuar la suma de radicales:

- **a)** Deben tener el mismo radicando.
- **b)** Deben tener el mismo índice.
- **c)** Deben tener el mismo índice y el mismo radicando.

13. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- **a)** El conjunto de los números reales contiene a los números racionales pero no a los irracionales.
- **b)** El conjunto de los números reales contiene tanto a los números racionales como a los números irracionales.
- **c)** El conjunto de los números

UNIDAD 2

POLINOMIOS

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1. (**) Realizar operaciones con polinomios.
2. (**) Utilizar la regla de Ruffini para dividir polinomios entre binomios.
3. Utilizar el Teorema del resto para hallar el resto de las divisiones de polinomios entre binomios.
4. Factorización de polinomios.
5. (**) Operaciones y simplificaciones de fracciones algebraicas.

** Indica objetivo mínimo

Esquema:

1. Operaciones con polinomios.
    1.1. Suma y resta de polinomios.
    1.2. Multiplicación de polinomios.
    1.3. División de polinomios.

2. Regla de Ruffini.

3. Teorema del Resto.

4. Divisibilidad de polinomios.
    4.1. Divisibilidad de polinomios.
    4.2. Factorización de polinomios.

5. Fracciones algebraicas.
    5.1. Definición
    5.2. Simplificación
    5.3. Reducción a común denominador
    5.4. Suma y resta
    5.5. Producto
    5.6. Cociente

1. OPERACIONES CON POLINOMIOS

Actividad:

1. Dados los polinomios:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$
$$Q(x) = x^2 + 3x - 1$$

Calcular:
a) $P(x) + Q(x)$
b) $2P(x) - 3Q(x)$
c) $P(x) \cdot Q(x)$
d) $P(x) : Q(x)$

2. Calcula la división $\left(x^4 - x^2 + 5x - 2\right) : (x + 2)$ utilizando la Regla de Ruffini, indicando el cociente y el resto.

3. Halla el valor numérico de $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ en los puntos x=0, x= -1.

1.1. Suma y resta de polinomios

Para sumar y restar polinomios, sumamos y restamos términos semejantes.
Términos semejantes: son aquellos que tienen la variable y el exponente iguales.

Ejemplos:

a) $(5x^3 + 4x^2 - 2x + 3) + (2x^3 - 3x^2 + x - 5) = 7x^3 + x^2 - x - 2$

b) $(5x^3 + 4x^2 - 2x + 3) - (2x^3 - 3x^2 + x - 5) =$
$5x^3 + 4x^2 - 2x + 3 - 2x^3 + 3x^2 - x + 5 =$
$3x^3 + 7x^2 - 3x + 8$

1.2. Multiplicación de polinomios

Para multiplicar polinomios, multiplicamos cada monomio de uno de ellos por todos los monomios del otro polinomio y luego agrupamos términos semejantes.

Recuerda: cuando multiplicas potencias de igual base se suman exponentes (por ejemplo: $x^3 \cdot x^5 = x^8$)

Ejemplo:

$$\left(3x^2 - 2x + 1\right) \cdot (x + 3) = 3x^3 - 2x^2 + x + 9x^2 - 6x + 3 = 3x^3 + 7x^2 - 5x + 3$$

1.3. División de polinomios

a) La división de dos polinomios es otro polinomio, se puede hacer si el dividendo contiene todas las variables del divisor con el grado igual o mayor:

Recuerda: cuando divides potencias de igual base los exponentes se restan (por ejemplo: $x^5 : x^2 = x^3$)

Ejemplo:

$$\left(24a^3x^3y^2\right) : 8a^2xy = 3ax^2y$$

b) Si hacemos la división de un polinomio entre un monomio, es necesario que todos los monomios que formen el polinomio sean divisibles entre el divisor:

Ejemplo:

$$\left(3x^4yz^2 - 4ax^2y^3 - 7x^3y^2z + 2x^2y\right) : 2x^2y = \frac{3}{2}x^2z^2 - 2ay^2 - \frac{7}{2}xyz + 1$$

c) Si hacemos la división de un polinomio entre otro polinomio, normalmente la división no suele ser exacta:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Donde: P(x) dividendo
D(x) divisor
Q(x) cociente
R(x) resto

Ejemplo:
$\left(3x^6 + 3x^4 - 2x + x^5\right) : \left(x^2 + 2x - 1\right)$ **=**

Antes de empezar a dividir, dividendo y divisor tienen que estar ordenados en forma decreciente y en el dividendo si falta algún término se pone 0:

<u>1º paso</u>: se divide el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor, el monomio que resulte será el primer término del cociente.

<u>2º paso</u>: el monomio obtenido en el 1º paso se multiplica por el divisor y el polinomio que resulte cambiado de signo, se coloca debajo del dividendo y se realiza una suma (**recuerda** que sólo puedes sumar términos semejantes), resultando otro polinomio.

<u>3º paso</u>: el proceso se continúa hasta que el polinomio sea de un grado menor que el cociente, este polinomio será el resto de la división.

$$\begin{array}{l|l} 3x^6 + x^5 + 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 0 & x^2 + 2x - 1 \\ \hline \end{array}$$

$$3x^4 - 5x^3 + 16x^2 - 37x + 90$$

$$\underline{-3x^6 - 6x^5 + 3x^4}$$

$$-5x^5 + 6x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 0$$

$$\underline{5x^5 + 10x^4 - 5x^3}$$

$$16x^4 - 5x^3 + 0x^2 - 2x + 0$$

$$\underline{-16x^4 - 32x^3 + 16x^2}$$

$$-37x^3 + 16x^2 - 2x + 0$$

$$\underline{37x^3 + 74x^2 - 37x}$$

$$90x^2 - 39x + 0$$

$$\underline{-90x^2 - 180x + 90}$$

$$-219x + 90$$

Esta división no es exacta, ya que el resto es distinto de cero.

Actividad:

4. Calcula las siguientes divisiones:

a) $(2x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 18x^2 - 30x - 18) : (x^2 - 5x - 3)$

b) $(2x^5 - 18x^3 + 16x^2 - 25x + 30) : (2x^3 - 4x^2 + 6)$

c) $(x^5 - 7x^4 - 3x^2 - 4) : (x^2 + 2x - 3)$

5. Dados los polinomios:

$P(x) = 3x^5 - 4x^4 + 3x - 2$

$Q(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3$

$R(x) = 5x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

$S(x) = x^2 - 7$

Calcula:

a) $P(x) + Q(x) =$

b) $R(x) - P(x) =$

c) $3P(x) - 5R(x) =$

d) $Q(x)*P(x) =$

e) $R(x) : S(x) =$

6. Resuelve la siguiente operación:

a) $4x(3x^2 + 2x^3) + (4x^5 + 3x - 2x^4)(2x^2 + 2x^4) =$

b) $[(3x^5 - 4x^3 + 2x - 7) * (6x^4 - 3x^3 + 6x + 7)] - (2x^5 + 3x4 - 4x)$

2. REGLA DE RUFFINI

La Regla de Ruffini es un algoritmo que permite obtener el cociente y el resto de una división sin necesidad de realizarla siempre y cuando el divisor sea de la forma $\mathbf{x-a}$. Vamos a utilizar la Regla de Ruffini en el siguiente ejemplo:

$$\mathbf{P(x)=2x^3+x^2-3x+5} \text{ y } \mathbf{Q(x)=x-1}$$

Luego para aplicar la Regla de Ruffini tenemos que tener en cuenta los siguientes pasos:

- Se ordena el polinomio P(x) en forma decreciente y escribimos los coeficientes con su signo de cada término, en caso de faltar algún término su coeficiente será 0. A la izquierda se pone el término independiente del divisor cambiado de signo, en este caso 1 y se baja el coeficiente de mayor grado. **(Fig. 1)**

- Se multiplica el coeficiente que se ha bajado **2** por el que se ha colocado a la izquierda **1.** El resultado del producto se coloca debajo del coeficiente del término siguiente y se suman. **(Fig. 2)**

- El resultado de la suma se vuelve a multiplicar por el número situado a la izquierda y se repite el proceso. **(Fig. 3 y 4)**

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

Fig. 1

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & & 2 & & \\ \hline & 2 & 3 & & \end{array}$$

Fig. 2

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & & 2 & 3 & \\ \hline & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

Fig. 3

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & & 2 & 3 & 0 \\ \hline & 2 & 3 & 0 & \boxed{5} \end{array}$$

Fig. 4

- Si nos fijamos en la figura 4 el último número de la fila inferior corresponde con el resto de la división y el resto de los números serán los coeficientes del cociente, cuyo grado será uno menos que el grado del dividendo.

Resto = **5**

Cociente = $\mathbf{2x^2+3x+0=2x^2+3x}$

Como dividendo es igual a divisor por cociente mas resto, en este caso se verifica:

$$\mathbf{2x^3+x^2-3x+5=(x-1)\cdot(2x^2+3x)+5}$$

Actividad:

7. Realiza la siguiente división por Ruffini, especificando el resto y el cociente:

a) $\left(13x^4+50+15x^3\right):(x+5)$

b) $\left(x^5-6x^3+3x^2+2x+2\right):(x-1)$

c) $\left(5x^4-6x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-5\right):(x-2)$

d) $\left(-2x^4+5x^3-6x^2+7x+\frac{3}{2}\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

3. TEOREMA DEL RESTO

3.1. Valor numérico de un polinomio

Sea P(x) un polinomio y a un número, entonces si sustituimos la x por a obtenemos el valor numérico del polinomio P(x) en a.

Ejemplo:

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ vamos a calcular el valor numérico del polinomio en el punto x = - 1:

$$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 3(-1) - 1 = -1 - 2 - 3 - 1 = -7$$

Si el resultado obtenido es cero, decimos que a es raíz o un cero del polinomio.

3.2. Teorema del Resto

El valor numérico del polinomio P(x) cuando x = a es igual al resto r de la división de P(x) entre (x – a), es decir **P(a) = r**

Demostración

Si dividimos P(x) entre (x – a) obtenemos un cociente C(x) y un resto r. Entonces se tiene:

Dividendo es igual a divisor por cociente mas resto.

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + r$$

Si hallamos el valor numérico del polinomio en el punto x = a, se obtiene:

$$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + r$$

Operando, se llega a:

$$P(a) = 0 \cdot C(a) + r$$
$$P(a) = r$$

Ejemplo:

Calcular el resto de la división $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ entre x + 1:

Aplicamos el Teorema del Resto para x = - 1

$P(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 2 + 3 + 1 = 6 =$ resto de la división, en este caso NO es exacta.

Actividad:

8. Aplicando el Teorema del Resto, probar si son divisibles:

a) $\left(5x^3 - 3x^2 - 4x - 3\right) : (x - 3)$

b) $\left(3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5x - 2\right) : (x + 1)$

c) $\left(x^5 + 6x^2 - 8x - 3\right) : (x + 2)$

d) $\left(x^5 - 6x^3 + 3x^2 + 2x + 2\right) : (x - 1)$

4. DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

4.1. Divisibilidad de polinomios

Del Teorema del Resto y de la Regla de Ruffini podemos deducir que un polinomio es divisible entre (x – a) si a es un cero del polinomio, es decir, si $P(a)=0$.

Las raíces enteras de un polinomio se encuentran entre los divisores del término independiente. La determinación de sus raíces permite, por ejemplo descomponer un polinomio en producto de binomios u otros polinomios más sencillos.

Para descomponer un polinomio como producto de polinomios de grado más pequeño vamos a utilizar la Regla de Ruffini aplicándola varias veces.

- Las posibles raíces del polinomio se encuentran entre los divisores del término independiente (nos interesan aquellos que den de resto cero).
- Se considera el cociente que resulta de realizar la Regla de Ruffini y se vuelve a repetir lo anterior hasta que resulte un polinomio irreducible.
- El polinomio de partida se escribe como producto del polinomio irreducible por todos los binomios del tipo (x – a), siendo a raíz del polinomio

Ejemplo:

Descomponer en factores el polinomio: $P(x) = x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x + 16$, las posibles raíces enteras del polinomio se encuentran entre los divisores del término independiente 16, en este caso $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 6 & 1 & -24 & 16 \\ -4 & & -4 & -8 & 28 & -16 \\ \hline & 1 & 2 & -7 & 4 & 0 \end{array}$$

Entonces se tiene: $P(x) = (x + 4)(x^3 + 2x^2 - 7x + 4)$

Continuamos aplicando la Regla de Ruffini al cociente:

	1	2	- 7	4	
1		1	3	- 4	
	1	3	- 4	0	$\Rightarrow x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = (x-1)(x^2 + 3x - 4)$
1		1	4		
	1	4	0		$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$

El polinomio P(x) queda descompuesto de la siguiente forma:

$$P(x) = (x+4)(x-1)(x-1)(x+4) = (x-1)^2(x+4)^2$$

Las raíces o ceros de este polinomio son:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ doble
$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ doble

Actividad:

9. Descomponer en factores los siguientes polinomios, indicando las raíces:

a) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$
b) $P(x) = x^5 - 7x^4 + 7x + 10x^3 - 10 - x^2$
c) $P(x) = 6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$
d) $P(x) = x^3 - 4x$
e) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
f) $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$
g) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
h) $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$
i) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

4.2. Factorización de polinomios

Descomponer polinomios en factores es expresarlos como producto de monomios o de polinomios de grado menor.

a) Extracción de factor común

Cuando en todos los términos de un polinomio aparece un factor común, el polinomio se puede descomponer en una multiplicación de dos factores:
- Uno de ellos es el factor común
- El otro es el cociente de la división del polinomio entre el factor común

Ejemplos:

- $6x^3 + 2x^2 + 4x^4 = 2x^2(3x + 1 + 2x^2)$
- $3x^2y^3 - 9xy^4 + 6x^3y^2 + 27xy^4z = 3xy^2(xy - 3y^2 + 2x^2 + 9y^2z)$

Actividad:

10. Sacar factor común en las siguientes expresiones:

a) $25\ a^3b^2 - 10\ a^5\ y^2 + 5\ a^2\ b^3\ y + 15\ a^6\ b^5$
b) $4\ a\ y^3\ z^4 - 10\ a^3\ y^5\ z + 24\ a\ y^2$
c) $169\ a^5\ b^3\ c - 13\ a\ b^3\ c^5$
d) $125\ a^4b^3c^5 - 45\ a^5b^3c^4x^3 + 5\ a^3\ b^2\ c^4 - 300\ a^4\ b^2\ c^8\ x - 10\ a^3\ b^2\ c^5$
e) $18a^2b^4c^2 - 54a^2b^5c^2x - 18ab^3c^2 + 36a^2b^4c^4 - 90ab^3c^5x^3 + 72\ ab^4c^2\ x^3\ y$
f) $\frac{3}{4}\ a^2\ x^3\ y + 4\ a^5\ x^2\ y^3 - 6\ a^4\ x^6\ 10\ a\ x^4$
g) $7/3\ m^6\ x^3\ y + 7\ m^5\ n\ x^2 + 14/5\ m^2\ n^3\ x\ y$

b) <u>Identidades notables</u>

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Ejemplos:

- $25x^2 + 30x + 9 = \begin{cases} 25x^2 = (5x)^2 \\ 9 = 3^2 \\ 30x = 2 \cdot 5x \cdot 3 \end{cases} = (5x+3)^2$

- $9y^2z^2 + 36 - 36yz = \begin{cases} 9y^2z^2 = (3yz)^2 \\ 36 = 6^2 \\ 36yz = 2 \cdot 6 \cdot 3yz \end{cases} = (3yz - 6)^2$

- $49 - 4x^2 = 7^2 - (2x)^2 = (7 + 2x)(7 - 2x)$

Actividad:

11. Factorizar:

a) $x^2 + 10x + 25$
b) $m^2 + 2mn + n^2$
c) $9/25\, x^6 + 12/5\, x^3 y + 4 y^2$
d) $36/25\, a^4 b^6 x^6 + 6 a^3 b^3 x^3 y^2 + 25/4\, a^2 y^4$
e) $16/9\, m^4 y^4 c^2 - 8/5\, m^2 y^2 c n^4 z^2 + 9/25\, n^8 z^4$
f) $0{,}25\, m^4 n^2 - 1/7\, m^2 n x^4 y^6 + 1/49\, x^8 y^{12}$
g) $9 m^2 q^4 + 1{,}8\, m p^2 q^2 + 0{,}09\, p^4$
h) $4a^2 - 9b^2$
i) $100 y^4 - 64 m^2 x^6$
j) $144 m^6 - 121 x^8 y^4$
k) $\frac{1}{4} b^4 x^2 - 9/25\, m^2 n^6$
l) $4 x^6 y^4 z^2 - 1/36\, m^4 n^8 d^2$
m) $1/9\, x^2 y^4 m^6 - 4/25\, a^2 b^6$
n) $4/49\, x^4 - 1/9\, y^2$

5. FRACCIONES ALGEBRAICAS

5.1. Definición

Se llama fracción algebraica al cociente de dos polinomios

5.2. Simplificación

Para simplificar una fracción, se dividen el numerador y el denominador por uno o más factores comunes a ambos. Se obtiene así una fracción equivalente.

5.2.1. Cuando en el numerador y en el denominador sólo aparecen factores multiplicándose:

Ejemplo:

$$\frac{6x^2y^5z}{12xy^4} = \frac{xyz}{2}$$

5.2.2. Cuando en el numerador o en el denominador aparecen sumas o restas:

- Se saca factor común
- Identidad notable

Ejemplo:

$$\frac{2x^2 + 4xy + 2y^2}{x^2 - y^2} = \frac{2(x^2 + 2xy + y^2)}{(x+y)(x-y)} = \frac{2(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{2(x+y)}{(x-y)}$$

Actividad:

12. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{4x^2a}{12xya^2}$ **b)** $\frac{-3m^5n}{-6m^4n^3z}$ **c)** $\frac{35mn^3}{21m^2n}$

d) $\frac{ax-bx}{a-b}$ **e)** $\frac{16a^3b-12a^2b^3}{8a^3b}$ **f)** $\frac{21axy^3-49x^2y}{63(xy^2)^3}$

g) $\frac{mx-my}{ax-ay}$ **h)** $\frac{mx+my}{x^2-y^2}$ **i)** $\frac{mx-my}{ay-ax}$

j) $\frac{3ax-3ay}{9y^2-9x^2}$ **k)** $\frac{a+b}{(a+b)^2}$ **l)** $\frac{m^2+mn}{m+n}$

m) $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$ **n)** $\frac{3a^2x}{6a^2-9a^3x}$ **ñ)** $\frac{a^2-16}{(a-4)^2}$

5.3. Reducción a común denominador

Se sustituye cada fracción por otra equivalente, de modo que todas tengan el mismo denominador. Este será múltiplo a todos los demás.

Ejemplo:

$$\frac{1}{x},\quad \frac{5}{y},\quad \frac{6}{y^2}$$

$$\frac{y^2}{xy^2},\quad \frac{5xy}{xy^2},\quad \frac{6x}{xy^2}$$

Denominador común xy^2

Actividad:

13. Reduce a común denominador las fracciones de los siguientes apartados:

a) $\frac{a}{bc},\frac{b}{ac},\frac{c}{ab}$ **b)** $\frac{a-b}{ab},\frac{a-c}{ac},\frac{b-c}{bc}$

c) $\frac{a}{2b},\frac{a-1}{3b},\frac{a+b}{6b}$ **d)** $\frac{a}{a-b},\frac{b}{a+b},\frac{c}{a^2-b^2}$

e) $\frac{x-3}{x+3},\frac{x+3}{x-3},\frac{1}{x^2-9}$ **f)** $\frac{2x}{(x+y)^2},\frac{3y}{(x-y)^2},\frac{2x-3y}{x^2-y^2}$

g) $\frac{m+2n}{3m-n},\frac{3m-2n}{3m+n},\frac{6mn}{9m^2-n^2}$ **h)** $\frac{3x}{x^2-4},\frac{3-2x}{x+2},\frac{5+2x}{2x+4}$

i) $\frac{x+y}{x^2-2xy+y^2},\frac{x}{x^2-y^2},\frac{x-y}{x^2+2xy+y^2}$

j) $\frac{a}{a^2b-2ab^2+b^3},\frac{a}{a^2b-b^3},\frac{b}{a^3-a^2b}$

5.4. Suma y resta

Para sumar o restar fracciones algebraicas, estas se reducen a común denominador y se suman o restan los numeradores, dejando el mismo denominador común.

5.4.1. Cuando en los denominadores sólo aparecen números:

Ejemplo:

$$\frac{xy}{3}+\frac{3xy}{6}-\frac{5xy}{2}=\frac{2xy+3xy-15xy}{6}=\frac{-10xy}{6}=\frac{-5xy}{3}$$

Actividad:

14. Calcula el resultado de las operaciones siguientes:

a) $\frac{a}{3}+\frac{3a}{4}-\frac{5a}{12}=$

b) $\frac{x}{5}-\frac{2x}{3}+\frac{7x}{15}=$

c) $\frac{a+b}{3}+\frac{a-b}{4}-\frac{2a-b}{6}=$

c) $\frac{a+b}{3}+\frac{3a-5b}{2}-\frac{5a-4b}{6}=$

d) $\frac{3a+2b}{2}-\frac{3a+2b}{3}-a=$

e) $\frac{4a-7}{6}-\frac{2a+6}{9}-\frac{a-5}{3}=$

f) $\frac{5a-2}{3}-\frac{2a-3}{4}+\frac{2a+1}{4}=$

g) $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{4}-\frac{3a-2b}{6}-\frac{b}{3}=$

5.4.2. Cuando en los denominadores aparecen letras multiplicándose:

Ejemplo:

$$\frac{1}{x}+\frac{5}{y}-\frac{6}{y^2}=\frac{y^2}{xy^2}+\frac{5xy}{xy^2}-\frac{6x}{xy^2}=\frac{y^2+5xy-6x}{xy^2}$$

Actividad:

15. Calcula las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{a}+\frac{4}{a^2}-\frac{5}{a^3}=$

b) $\frac{3}{a^3}-\frac{2}{3a^2}+\frac{1}{a}=$

c) $\frac{a}{b}+\frac{3a}{4b}=$

d) $\frac{5a-2}{3}-\frac{2a-3}{4}+\frac{2a+1}{4}$

e) $\frac{3}{2a^2}+\frac{5}{2a}+\frac{1}{3a^3}-\frac{9a+2}{6a^3}$

f) $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}-\frac{ay^2-bx^2}{x^2y^2}$

g) $\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}-\frac{1}{ab}-\frac{ay-b}{ab^2}$

h) $-\frac{a+b}{2ab}-\frac{b^2-2b}{4b^2}+\frac{2a-4}{8a}=$

5.4.3. Cuando en los denominadores aparecen letras y números sumándose y restándose:

Ejemplo:

$$\frac{5x}{x^2+2xy+y^2}-\frac{3xy}{2x^2-2y^2}=\frac{5x}{(x+y)^2}-\frac{3xy}{2(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{5x2(x-y)-3xy(x+y)}{(x+y)^2 2(x-y)}=\frac{10x^2-10xy-3x^2y-3xy^2}{(x+y)^2 2(x-y)}$$

Actividad:

16. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{a}{x+y}+\frac{a}{x-y}$

b) $\frac{ax}{x^2-y^2}-\frac{a}{x+y}$

c) $\frac{8}{x^2+2x}-\frac{4x}{2x+4}$

d) $\frac{3}{a+b}-\frac{4}{a-b}+\frac{b}{a^2-b^2}$

e) $\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}=$

f) $\frac{2x}{x+3}-\frac{x-4}{3+2x}=$

g) $\frac{4x-m}{x-m}-\frac{x+3m}{x^2-m^2}=$

h) $\frac{5x+2}{9-4x^2}-\frac{x-1}{3+2x}=$

i) $\frac{x+5}{2x-4}-\frac{3-x}{x^2-4}-\frac{3x}{x+2}=$

j) $\frac{4-x}{5-3x}-\frac{3}{25-9x^2}-\frac{x-5}{5+3x}=$

k) $\frac{3-x}{x}-\frac{2x}{x-1}-\frac{x-1}{3x}=$

l) $\frac{x-2}{6x+6}-\frac{x+2}{2x+2}-\frac{3-x}{4x+4}=$

m) $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x(x-1)}{x-2}-\frac{x+1}{2}=$

n) $\frac{3a}{a-b}-\frac{2b}{a+b}-\frac{a^2-3ab}{a^2-b^2}=$

5.5. Producto

El producto de dos fracciones algebraicas es el producto de sus numeradores partido por el producto de sus denominadores.

- Si hay sumas y restas primero se saca factor común y luego se mira por si aparece una identidad notable

Ejemplos:

- $\frac{2x}{3y^2}\cdot\frac{5y}{6x^3}=\frac{2x\cdot 5y}{3y^2\cdot 6x^3}=\frac{5}{9x^2y}$
- $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}\cdot\frac{2a+2b}{4a-4b}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}\cdot\frac{2(a+b)}{4(a-b)}=\frac{1}{2}$

5.6. Cociente

El cociente de dos fracciones algebraicas es el producto de la primera por la inversa de la segunda.

- Si hay sumas y restas primero se saca factor común y luego se mira por si aparece una identidad notable.

Ejemplos:

- $\frac{2x}{3y^2} : \frac{5y}{6x^3} = \frac{2x \cdot 6x^3}{3y^2 \cdot 5y} = \frac{4x^4}{5y^3}$

- $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} : \frac{2a + 2b}{4a - 4b} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2} : \frac{2(a+b)}{4(a-b)} =$

$\frac{(a+b)4(a-b)^2}{2(a+b)^3} = \frac{2(a-b)^2}{(a+b)^2}$

Actividad:

17. Simplifica todo lo que se pueda:

a) $\frac{2x}{x-y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{2}$

b) $\frac{(x+y)^2}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x-y}{x+y}$

c) $\frac{ax + ay}{ax} \cdot \frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2}$

d) $\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) \cdot \frac{x^3}{x-1}$

e) $\left(\frac{4}{3x-3} - \frac{x+2}{x^2 - 2x + 1}\right) \cdot \frac{3x+9}{x+6}$

f) $\frac{x^3 - x^2}{x-5} : \frac{3x^3 - 3x}{x^2 - 25}$

g) $\frac{(a+b)^3}{a^2 - b^2} : \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$

h) $\frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}}$

i) $\left(\frac{xy}{5z^2} : \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{10z^3}{x^2 - 1}$

j) $\frac{x-1}{x+1} : \frac{x^2 - 1}{x}$

k) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1} : (1 - x)$

l) $\frac{x^2 - y^2}{x - y} \cdot \frac{x + y}{x^2 + 2xy + y^2} =$

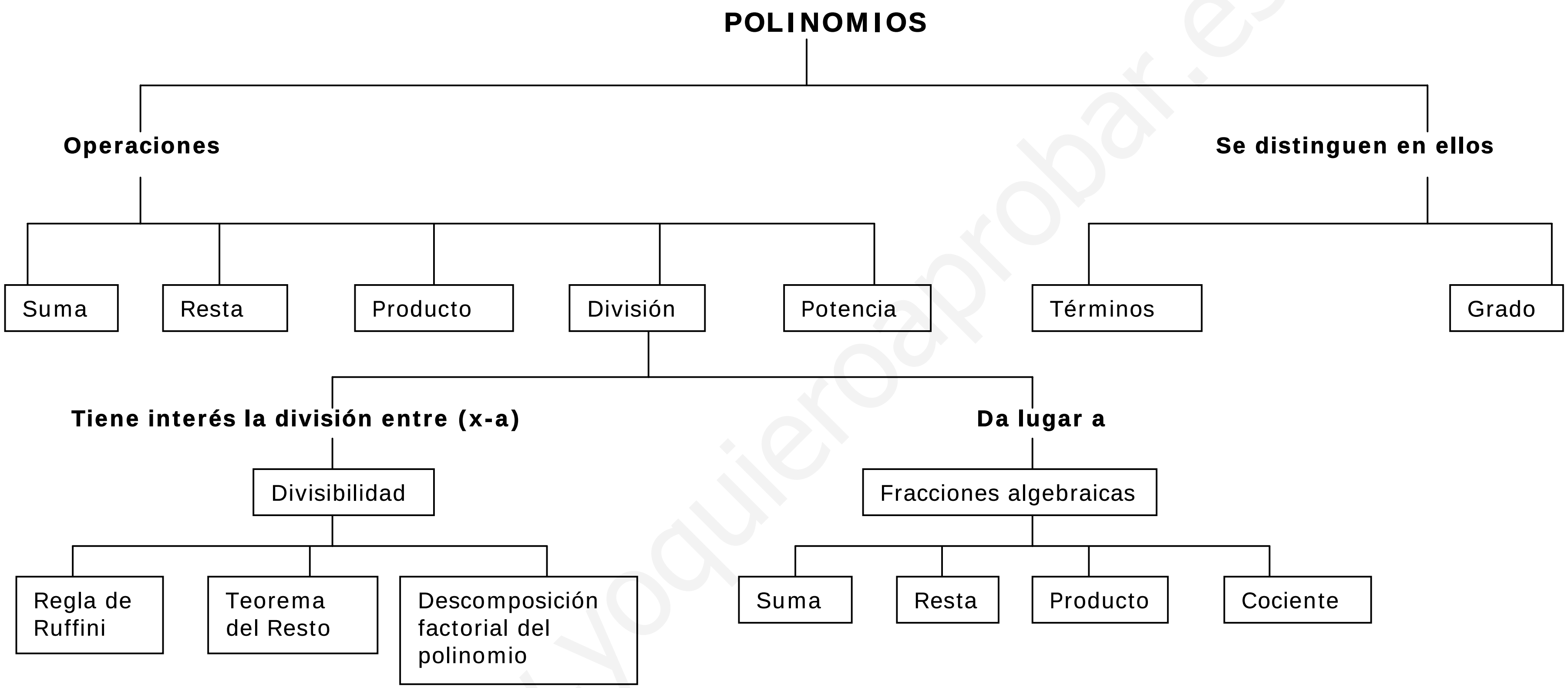
m) $\frac{y^2 - x^2}{x^2 + xy} \cdot \frac{3x}{x - y} =$

n) $\frac{x^2 + 2xyy^2}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} =$

ñ) $\frac{1 - \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}} \cdot \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} =$

o) $\frac{1 + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}}{a + 3 + \frac{2}{a}} \cdot \frac{a - \frac{1}{a}}{1 - \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}} =$

MAPA CONCEPTUAL



EJERCICIOS

1. Calcula las siguientes divisiones:

a) $\left(5x^3 - x^7 - 3x^4 + 3x - 4x^2 + x^8 - 2\right) : \left(x^3 - x^2 + 1\right)$
b) $\left(2x^4 - 4x^3 - 20x^2 - 20x - 12\right) : \left(x^2 - 5x + 1\right)$
c) $\left(12x^2 - 5 + x^4 + 21x + 2x^3\right) : \left(3x - 6 + x^2\right)$

2. Aplicar la Regla de Ruffini:

a) $\left(x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + x - 6\right) : (x - 2)$
b) $\left(5x^4 - 6x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 5\right) : (x + 1)$
c) $\left(13x^4 + 50 + 15x^3\right) : (x + 2)$
d) $(x^3 + x^2 - x - 1) : (x - 2)$
e) $(3x^6 - 2x^3 + x^5 - 1) : (x^2 + 1)$

3. Aplicar el Teorema del Resto para hallar el resto de las siguientes divisiones:

a) $\left(2x - 5x^2 + 12x^4 - 5\right) : (x + 2)$
b) $\left(5x^3 - 3x^2 - 4x - 3\right) : (x - 3)$
c) $\left(x^5 + 1\right) : (x + 1)$
d) $(x^3 - 4x^2 + 5x - 8) : (x - 2)$

4. Hallar el valor de m en cada caso:

a) $\left(4x^3 - 6x + m\right)$ y $(x - 3)$ son divisibles
b) $\left(x^3 - 2mx^2 + 2x - 4\right)$ y $(x - 2)$ da de resto 1.
c) $\left(3x^5 - 8x^3 + mx - 20\right)$ y $(x - 2)$ da de resto -1.

5. Descomponer en factores, indicando las raíces:

a) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
b) $P(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$
c) $P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 4x - 4$
d) $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 24$

6. Halla m para que la división $(2x^3 + 9x^2 + 7x - m) : (x + 2)$:
a) Sea exacta.
b) Tenga resto 6.

7. Simplificar:

a) $\dfrac{6a^4b^5c^2}{2a^3b^2}$ **b)** $\dfrac{6abx^3}{12a^2bx^2}$ **c)** $\dfrac{-5a^2x^3y^4}{-2ax^3y^4}$

d) $\dfrac{-15x^5y^4z^3}{30x^4y^5z^4}$ **e)** $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$ **f)** $\dfrac{a^2-25}{a^2-5a}$

g) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$ **h)** $\dfrac{a^2b^2-b^2}{a^2-2a+1}$ **i)** $\dfrac{14a^2-7ax}{10ay-5xy}$

j) $\dfrac{x^3-2x^2}{x^4-4x^3+4x^2}$ **k)** $\dfrac{2y^2-4ay}{2y^4-8a^2y^2}$ **l)** $\dfrac{3x^2-27}{3x^2+6x+9}$

m) $\dfrac{x^3y+2x^2y+xy}{x^2y-xy-2y}$ **n)** $\dfrac{9a^2-4b^2}{9a^2+12ab+4b^2}$ **ñ)** $\dfrac{9b^3-6b^2+b}{9b^3-3b^2}$

8. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2a-4}{8a}-\dfrac{a+x}{2ax}-\dfrac{x^2-2x}{4x^2}$

b) $\dfrac{2b}{a-b}+\dfrac{2a+1}{a+b}-\dfrac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}$

c) $\dfrac{6a}{1-x^2}-\dfrac{3a}{1-x}-\dfrac{2a}{1+x}$

d) $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}\cdot\dfrac{x+y}{x^2+2xy+y^2}=$

e) $\dfrac{y^2-x^2}{x^2+xy}\cdot\dfrac{3x}{x-y}=$

f) $\dfrac{x^2+2xyy^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}=$

g) $\dfrac{1-\dfrac{x}{y}}{1+\dfrac{x}{y}}\cdot\dfrac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}=$

h) $\dfrac{1+\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a^2}}{a+3+\dfrac{2}{a}}\cdot\dfrac{a-\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a^2}}=$

i) $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{x}{y}-2+\dfrac{y}{x}}:\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)=$

j) $\dfrac{4a^2-4}{(a+1)^2-a}\cdot\dfrac{a^3-1}{a^3-2a^2}\cdot\dfrac{a^4-2a^3}{a^2-1}=$

k) $\dfrac{(a-1)^2}{x^2-1}:\dfrac{a^2-1}{(x-1)^2}=$

l) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{x^2-y^2}:\dfrac{a-b}{x-y}=$

m) $\dfrac{8x}{4x+8}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}-\dfrac{x+3}{2x^2-8}=$

n) $\dfrac{3}{2x-4}\cdot\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+10}{2x^2-8}=$

o) $\left(\dfrac{4}{3x-3}-\dfrac{x+2}{x^2-2x+1}\right)\cdot\dfrac{3x+9}{x+6}=$

CUESTIONES

1. Hallar a y b para que $P(x)=x^3+ax^2+bx-3$ sea divisible entre (x+1)(x-1).

2. ¿Cuál debe ser el término independiente del polinomio $P(x)=x^4-3x^2+x+m$ para que sea divisible entre (x-2)?

3. En el polinomio $P(x)=2x^3-\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{5}{6}x-3m$ ¿qué valor ha de tener m para que $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ sea un factor?

4. Halla el valor que debemos dar a p para que el polinomio $P(y) = 3a^5y^2 - 2a^7 + 6a^4y^3 - py^4 + y^7 - a^2y^5$ sea divisible entre (y – a).

5. Para poder dividir dos polinomios es necesario que:

a) El grado del dividendo sea menor que el grado del divisor.
b) El grado del dividendo sea mayor que el grado del divisor.
c) El grado del dividendo sea igual que el grado del divisor.

6. El resto de la división $(x^3 - 2x^2 + 3x + 1) : (x - 2)$ es:

a) 7   b) – 7   c) – 21

7. Indica qué afirmación es cierta:
a) Si un polinomio es divisible entre (x – a) el resto de la división es siempre distinto de cero.
b) Si un polinomio es divisible entre (x – a) el resto de la división es siempre igual a cero.
c) Si un polinomio es divisible entre (x – a) el resto de la división puede ser cero o un número distinto de cero.

8. Si x = 1, x = - 1, x = 2 son ceros de un polinomio, este es:
a) $P(x) = x^3 - 2x + 2$
b) $P(x) = -x^3 - 2x^2 - x + 2$
c) $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

9. Halla polinomios que tengan las siguientes raíces:
a) $x_1 = 2,\ x_2 = -3$
b) $x_1 = -1,\ x_2 = 5$
c) $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$

10. Dado $P(x) = x^4 - kx^2 + 4x + 10$
a) Halla k para que sea divisible entre (x – 3)
b) Halla k para que al dividirlo entre (x + 2) el resto sea 7.

11. Encuentra un polinomio de tercer grado que tenga por divisores $(x^2 + x + 1)$ y (x – 3).

12. Calcula un polinomio que dividido entre (2x – 3) da $(x^2 + x - 3)$ de cociente, dejando un resto de 8 unidades.

13. ¿Cuáles son las raíces de $Q(x) = (x + 1)(2x - 3)(x^2 + 1)$?

14. Si la división $P(x) : (x - 2)$ es exacta, ¿qué podemos afirmar de P(2)?

15. Si – 5 es una raíz de P(x), ¿qué podemos afirmar de la división $P(x) : (x + 5)$?

16. Halla el valor de k para que el resto de la división sea 6, siendo la división: $(x^3 + kx - 15) : (x - 3)$

17. Dado el polinomio $P(x) = x^3 - 5x^2 + x - m$.

- **a)** Halla el valor de m para que sea divisible entre (x + 1).
- **b)** Halla el valor de m para que al dividirlo entre (x – 2), el resto valga 6.

18. Las raíces enteras del polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ son:

- **a)** -1 y -2
- **b)** 1 y 2
- **c)** -1 y 2
- **d)** 1 y -2

19. El polinomio $P(x) = x^3 - 8$ es divisible entre:

- **a)** x + 1
- **b)** x – 1
- **c)** x + 2
- **d)** x – 2

UNIDAD 3

ECUACIONES

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1. (**) Resolver ecuaciones de primer grado.
2. (**) Resolver ecuaciones de segundo grado.
3. (**)Resolver ecuaciones de grado superior: bicuadradas y Ruffini.
4. Solucionar ecuaciones irracionales.
5. (**)Representar gráficamente rectas.
6. (**)Representar gráficamente parábolas.

** Indica objetivo mínimo

Esquema:

1. Ecuaciones de primer grado
   1.1. Definición

2. Ecuaciones de segundo grado
   2.1. Definición
   2.2. Resolución de una ecuación completa de segundo grado
   2.3. Descomposición factorial
   2.4. Discriminante

3. Ecuaciones de grado superior
   3.1. Ruffini
   3.2. Ecuaciones bicuadradas

4. Ecuaciones irracionales

5. Representación gráfica de rectas y parábolas.
   5.1. Representación gráfica de rectas
   5.2. Representación gráfica de parábolas.

1. ECUACIONES DE 1º GRADO

1.1. Definición

- Una ecuación de primer grado con una incógnita x es una igualdad de la forma $ax + b = 0$ con a, b números reales y $a \neq 0$.
- Los valores de x que satisfacen la igualdad se llaman soluciones.
- Resolver una ecuación significa hallar el valor de la incógnita que verifica la igualdad.

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación:

$$3x + 3(2x - 4) = 5(3x - 2)$$

- Quitamos paréntesis:

$$3x + 6x - 12 = 15x - 10$$

- Transponer términos: (términos en x en una parte de la igualdad y términos sin x en la otra parte)

$$3x + 6x - 15x = -10 + 12$$

- Se reducen términos semejantes:

$$-6x = 2$$

- Se calcula el valor de x:

$$x = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

- Comprobación:

$$3 \cdot \frac{-1}{3} + 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{-1}{3} - 4\right) = 5 \cdot \left(3 \cdot \frac{-1}{3} - 2\right)$$
$$-1 + 3 \cdot \left(\frac{-2}{3} - 4\right) = 5 \cdot (-1 - 2)$$
$$-1 + 3 \cdot \left(\frac{-2 - 12}{3}\right) = 5 \cdot (-3)$$
$$-1 - 14 = -15$$
$$-15 = -15$$

Ejemplo 2:

Resolver la ecuación:

$$\frac{\mathbf{2x-1}}{\mathbf{3}}-\frac{\mathbf{2x+5}}{\mathbf{4}}=\frac{\mathbf{6-x}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{7-2x}}{\mathbf{6}}$$

- Reducimos a común denominador:

$$\frac{4\cdot(2x-1)-3\cdot(2x+5)}{12}=\frac{6\cdot(6-x)+2\cdot(7-2x)}{12}$$

- Simplificamos denominadores:

$$4\cdot(2x-1)-3\cdot(2x+5)=6\cdot(6-x)$$

- Quitamos paréntesis:

$$8x-4-6x-15=36-6x+14-4x$$

- Transponemos términos:

$$8x-6x+6x+4x=36+14+4+15$$

- Reducimos términos semejantes:

$$12x=69$$

- Calculamos el valor de x:

$$x=\frac{69}{12}=\frac{23}{4}$$

- Comprobación:

$$\frac{2\cdot\frac{23}{4}-1}{3}-\frac{2\cdot\frac{23}{4}+5}{4}=\frac{6-\frac{23}{4}}{2}+\frac{7-2\cdot\frac{23}{4}}{6}$$

$$\frac{\frac{23}{2}-1}{3}-\frac{\frac{23}{2}+5}{4}=\frac{6-\frac{23}{4}}{2}+\frac{7-\frac{23}{2}}{6}$$

$$\frac{\frac{23-2}{2}}{3}-\frac{\frac{23+10}{2}}{4}=\frac{\frac{24-23}{4}}{2}+\frac{\frac{14-23}{2}}{6}$$

$$\frac{21}{2}:3-\frac{33}{2}:4=\frac{1}{4}:2-\frac{9}{2}:6$$

$$\frac{21}{6}-\frac{33}{8}=\frac{1}{8}-\frac{9}{12}$$

$$\frac{84-99}{24}=\frac{3-18}{24}\Rightarrow\frac{-15}{24}=\frac{-15}{24}$$

Actividad:

1. Resuelve las ecuaciones de primer grado:

a) $(4-2x)(x-3)=(2x-2)(5-x)-3$

b) $2x+\frac{5x-4}{3}=\frac{4x-5}{9}+\frac{31x+7}{6}$

c) $\frac{x-1}{4}-\frac{x-9}{2}=\frac{1}{8}\left(\frac{x-5}{4}-\frac{7-x}{6}\right)+\frac{43}{24}$

d) $\frac{x}{6}-\frac{2x-1}{6}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0$

2. ECUACIONES DE 2º GRADO

2.1. Definición

- Una ecuación de 2º grado es una igualdad de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$.
- Los valores que verifican la igualdad se llaman soluciones o raíces de la ecuación.

2.2. Resolución de una ecuación completa de 2º grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

- Pasamos c al otro lado:

$$ax^2 + bx = -c$$

- Multiplicamos por 4a:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

- Sumamos b^2:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

- Identidad notable:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

- Despejamos el cuadrado:

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

- Pasamos b restando:

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

- Pasamos 2a dividiendo:

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

2.3. Descomposición factorial

Salen dos soluciones x_1 y x_2, por tanto la **descomposición factorial** será:

$$\boxed{a(x - x_1)(x - x_2) = 0}$$

2.4. Discriminante

Se llama discriminante de una ecuación de 2º grado a :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

a) Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ dos soluciones reales distintas
b) Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ dos soluciones reales iguales
c) Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ no tiene soluciones reales

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación: $\mathbf{2x^2 + 3x + 1 = 0}$

- Discriminante: $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow$ dos soluciones reales distintas.
- Soluciones:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+1}{4} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-3-1}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $\frac{-1}{2}$ y -1

- Descomposición factorial:

$$2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1) = 0$$

Ejemplo2:

Resolver la ecuación: $\mathbf{x^2 - 6x + 9 = 0}$

- Discriminante: $\Delta = 36 - 36 = 0 \Rightarrow$ dos soluciones reales iguales
- Soluciones:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3 \text{ doble}$$

Soluciones: 3 doble

- Descomposición factorial:

$$(x-3)(x-3) = 0$$
$$(x-3)^2 = 0$$

Ejemplo 3:

Resolver la ecuación: $\mathbf{x^2 - 6x + 13 = 0}$

- Discriminante: $\Delta = 36 - 52 = -16 < 0 \Rightarrow$ no tiene solución real

Ejemplo 4:

Resolver la ecuación: $\mathbf{x^2} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$

- Ecuación de segundo grado faltando el término independiente, entonces para resolverla sacamos factor común:

$$x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

- Soluciones: 0 y 1
- Descomposición factorial:

$$x(x-1) = 0$$

Ejemplo 5:

Resolver la ecuación $\mathbf{5x^2} = \mathbf{0}$

- Ecuación de segundo grado faltando el término independiente y el término en x

$$5x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{5} = 0 \Rightarrow x = 0$$

- Soluciones: x = 0 doble

Ejemplo 6:

Resolver la ecuación: $\mathbf{x^2 - 4 = 0}$

- Ecuación de segundo grado faltando el término en x, se resuelve de la siguiente forma:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

- Soluciones: 2 y − 2
- Descomposición factorial:

$$(x-2)(x+2) = 0$$

Actividad:

2. Resuelve las ecuaciones de segundo grado, analiza el discriminante, halla la descomposición factorial e indica las soluciones:

a) $\frac{3x}{2} - \frac{x^2+4}{4} = 1$

b) $2x(3x-4) - (1-3x)(1+x) = -2$

c) $6x^2 - 7x - 20 = 0$

d) $16x^2 + 8x + 1 = 0$

e) $\frac{1}{2} + \frac{x^2+x}{4} = 1 - \frac{x+2}{8}$

f) $9x^2 - 36 = 0$

g) $4x^2 - 24x + 32 = 0$

h) $6x^2 - 7x + 2 = 0$

i) $3x^2 - 12x + 9 = 0$

3. ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

3.1. Ruffini

Investiga sobre ello repasando los apuntes del tema anterior.

Ejemplo:

Resolver la ecuación: $\mathbf{x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 9x + 30 = 0}$

	1	-3	-13	9	30
-2		-2	10	6	-30
	1	-5	-3	15	0
5		5	0	-15	
	1	0	-3		

- Descomposición factorial:

$$(x+2)(x-5)(x^2-3) = 0$$

$$(x^2-3) = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$(x+2)(x-5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$$

- Soluciones: -2, 5, $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$

Actividad:

3. Resuelve por Ruffini, descomponiendo en factores e indicando las soluciones:

a) $2x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 4x + 6 = 0$ **b)** $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$

c) $3x^3 + 5x^2 - 4x - 4 = 0$ **d)** $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$

e) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

3.2. *Ecuaciones bicuadradas*

a) Definición

- Las ecuaciones bicuadradas son las que se pueden reducir a la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, es decir no hay término en x^3 y en x.

b) Resolución

- Se resuelven mediante un cambio de variable: $\mathbf{z = x^2}$ de lo que se deduce, elevando al cuadrado que $\mathbf{z^2 = x^4}$
- La ecuación bicuadrada se convierte en: $az^2 + bz + c = 0$ que es una ecuación de 2º grado y que resolvemos por la fórmula dándonos dos soluciones para z que serán z_1 y z_2, pero tenemos que hallar los valores de x.
- Como $\mathbf{z = x^2}$ se tiene:

$$\begin{cases} x^2 = z_1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{z_1} \\ x^2 = z_2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{z_2} \end{cases}$$

- **Importante:** no olvides que no existen raíces de índice par de números negativos en los números reales.

c) Descomposición factorial

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$$

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación: $\mathbf{x^4 - 13x^2 + 36 = 0}$

- Ecuación bicuadrada, hacemos el cambio de variable: $x^2 = z \Rightarrow x^4 = z^2$
- La ecuación resultante será: $z^2 - 13z + 36 = 0$
- Ecuación de 2º grado y que resolvemos por la fórmula:

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} z_1 = \dfrac{13 + 5}{2} = 9 \\ z_2 = \dfrac{13 - 5}{2} = 4 \end{cases}$$

- Como $z = x^2$, hallamos los valores de x:

$$\begin{cases} x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3 \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

  - Descomposición factorial:

$$(x - 3)(x + 3)(x - 2)(x + 2) = 0$$

  - Soluciones: 3, - 3, 2 y – 2

Ejemplo 2:

Resolver la ecuación: $\mathbf{x^4 - 3x^2 - 4 = 0}$

- Ecuación bicuadrada, hacemos el cambio de variable: $x^2 = z \Rightarrow x^4 = z^2$
- La ecuación resultante será: $z^2 - 3z - 4 = 0$
- Ecuación de 2º grado y que resolvemos por la fórmula:

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} z_1 = \dfrac{3+5}{2} = 4 \\ z_2 = \dfrac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

- Como $z = x^2$, hallamos los valores de x:

$$\begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \text{ imposible en los reales} \end{cases}$$

  - Descomposición factorial:

$$(x-2)(x+2)(x^2+1) = 0$$

  - Soluciones reales: 2 y − 2

Actividad:

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de grado superior:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
c) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$
d) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
e) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$
f) $100x^4 - 289x^2 + 144 = 0$
g) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

4. ECUACIONES IRRACIONALES

a) Definición

Se llaman ecuaciones irracionales aquellas en las que alguna de las incógnitas está bajo el signo radical.

Ejemplo1:

Resolver la ecuación: $\mathbf{18 - \sqrt{x + 10} = 2}$

a) Aislamos el radical en una de las partes de la igualdad:

$$18 - 2 = \sqrt{x + 10} \Rightarrow 16 = \sqrt{x - 10}$$

b) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$(16)^2 = (\sqrt{x + 10})^2 \Rightarrow 256 = x + 10$$

c) Resolvemos:

$$256 - 10 = x \Rightarrow 246 = x$$

d) Comprobamos que el resultado satisface la ecuación:

$$18 - \sqrt{246 + 10} = 2 \Rightarrow 18 - \sqrt{256} = 2 \Rightarrow 18 - 16 = 2 \Rightarrow 2 = 2$$

Ejemplo 2:

Resolver la ecuación: $\mathbf{\sqrt{x + 9} + \sqrt{x - 3} = 6}$

a) Aislamos el radical en una de las partes de la igualdad:

$$\sqrt{x + 9} = 6 - \sqrt{x - 3}$$

b) Elevamos al cuadrado ambos miembros: (date cuenta que aparece una identidad notable)

$$(\sqrt{x + 9})^2 = (6 - \sqrt{x - 3})^2 \Rightarrow x + 9 = 36 - 12\sqrt{x - 3} + x - 3$$

c) Volvemos a aislar el otro radical, reduciendo términos semejantes:

$$12\sqrt{x - 3} = 36 + x - 3 - x - 9 \Rightarrow 12\sqrt{x - 3} = 24 \Rightarrow \sqrt{x - 3} = 2$$

d) Volvemos a elevar al cuadrado:

$$\left(\sqrt{x - 3}\right)^2 = (2)^2 \Rightarrow x - 3 = 4$$

e) Resolvemos:

$$x = 4 + 3 \Rightarrow x = 7$$

d) Comprobamos que el resultado satisface la ecuación:

$$\sqrt{7 + 9} + \sqrt{7 - 3} = 6 \Rightarrow \sqrt{16} + \sqrt{4} = 6 \Rightarrow 4 + 2 = 6 \Rightarrow 6 = 6$$

Importante: Comprueba todas las soluciones pues hay muchas posibilidades de que aparezcan falsas soluciones.

Actividad:

5. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $\sqrt{x-1}-x+7=0$ **b)** $\sqrt{9-x}-11=x$

c) $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2}=1$ **d)** $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=1$

e) $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+4}=1$ **f)** $2+\sqrt{x-5}=13-x$

g) $\sqrt{2x-1}=x-2$ **h)** $\sqrt{5x+4}-1=2x$

i) $\sqrt{36-x}-\sqrt{x}=2$ **j)** $\sqrt{25-x}=3+\sqrt{4+x}$

5. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE RECTAS Y PARÁBOLAS

5.1. *Representación gráfica de rectas*

Elementos de la recta:

- La expresión analítica en su forma explícita de una recta es de la forma **y = ax + b**, donde a y b son números reales.
- Cuando b = 0 hablamos de función lineal y cuando b ≠ o se llama afín.
- A a se le llama pendiente de la recta.
  - a > 0 ⇒ función es creciente
  - a < 0 ⇒ función es decreciente
- Para representar una recta se necesitan dos puntos.
- El punto de corte de la gráfica con el eje de abscisas (OX) es la solución de la ecuación y = 0, es decir de la ecuación:

0 = ax + b que es una ecuación de primer grado, entonces $x=\frac{-b}{a}$ y se tiene el punto $\left(\frac{-b}{a},0\right)$

- Si consideramos x = 0, entonces y = b y se tiene el punto $(0,b)$, que será el punto de corte con el eje de ordenadas (OY).
- Esos dos puntos serán los puntos de corte con los ejes.

Ejemplo 1:

Representa la función: **y = 3x +2**

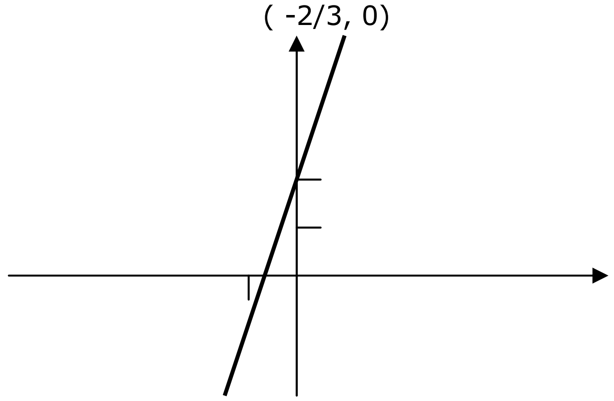
a) b = 2 ≠ 0 ⇒ función afín

b) a = 3 ⇒ por ser positiva es una función creciente

c) Puntos de corte:

Si x = 0 ⇒ y = 2 ⇒ (0, 2)

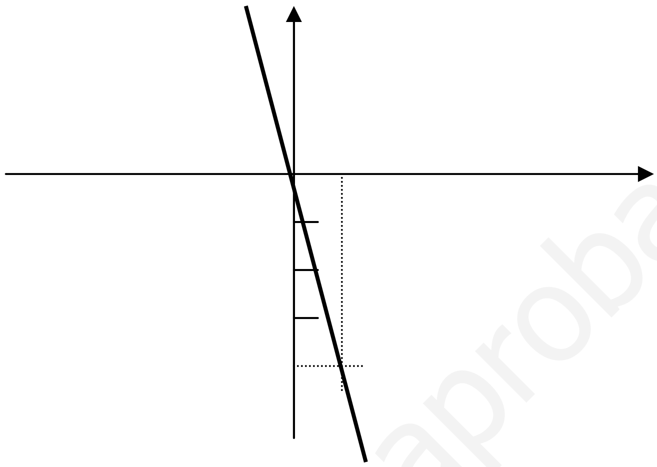
Si y = 0 ⇒ 0 = 3x +2 ⇒ - 2 = 3x ⇒ x = - 2 / 3 ⇒ (-2/3, 0)



Ejemplo 2:

Representa la función: **y = - 4x**

a) b = 0 ⇒ función lineal
b) a = - 4 ⇒ por ser negativa es una función decreciente
c) Puntos de corte:
Si x = 0 ⇒ y = 0 ⇒ (0,0)
Consideramos otro valor para x o para y que sea distinto de 0 por ejemplo:
x = 1 ⇒ y = - 4 ⇒ (1,- 4)



Actividad:

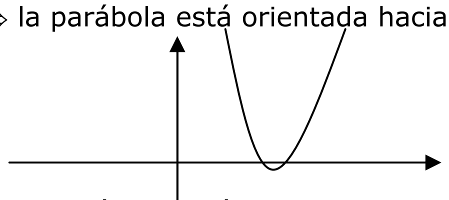
6. Representa las siguientes rectas:

a) y = x **b)** y = x + 2
c) y = - 5x **d)** y = - 5x +2
e) y = 2x − 6 **f)** y = 8x
g) y = - 2x + 3 **h)** y = -3x

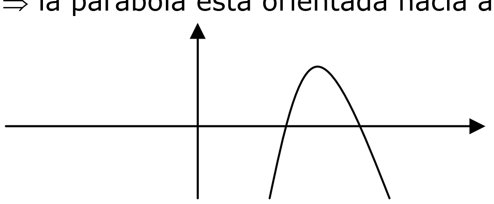
5.2. *Representación gráfica de parábolas*

Elementos de la parábola

- La expresión analítica de una parábola es de la forma $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, donde a, b y c son números reales.
- Si a > 0 ⇒ la parábola está orientada hacia arriba



- Si a < 0 ⇒ la parábola está orientada hacia abajo

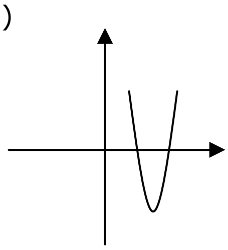


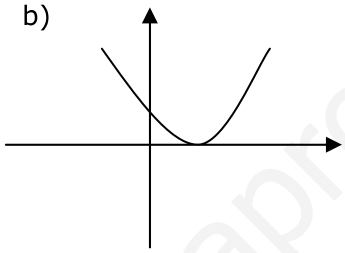
- Los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas son las soluciones de la ecuación y = 0, es decir, las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ que es una ecuación de segundo grado.

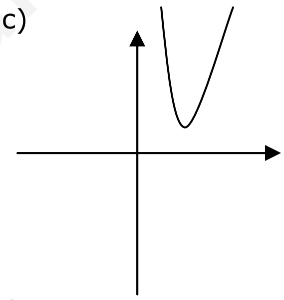
- Una ecuación de segundo grado puede tener dos soluciones, una o ninguna según el valor del discriminante $\Delta = \mathbf{b^2 - 4ac}$ sea positivo, nulo o negativo respectivamente.
  Recordamos que:

  a) Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ dos soluciones reales distintas
  b) Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ dos soluciones reales iguales
  c) Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ no tiene soluciones reales

- Gráficamente las soluciones coinciden con los puntos de corte en el eje X de la parábola $y = ax^2 + bx + c$

a)


b)


c)


- El punto de corte de la gráfica con el eje de ordenadas es decir si x = 0, se tiene y = c $\Rightarrow$ se tiene el punto (0,c)

- El vértice de una parábola tiene como abscisa **x = - b / 2a**, para calcular la ordenada se sustituye el valor hallado de la x en la parábola.

Ejemplo 1:

Representa la función: $\mathbf{y = x^2 - 6x + 8}$

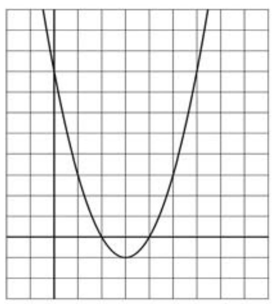
a) a = 1>0$\Rightarrow$ la parábola está orientada hacia arriba

b) $y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

(4, 0) y (2, 0)

c) $x = 0 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow (0, 8)$

d) Vértice: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3 \Rightarrow y = 9 - 18 + 8 = -1 \Rightarrow (3,-1)$



Ejemplo 2:

Representa la función: $\mathbf{y = -3x^2 - x + 2}$

a) a = - 3 <0 $\Rightarrow$ la parábola está orientada hacia abajo

b) y = 0 $\Rightarrow$ $-3x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-6} = \dfrac{1 \pm 5}{-6} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{-4}{-6} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

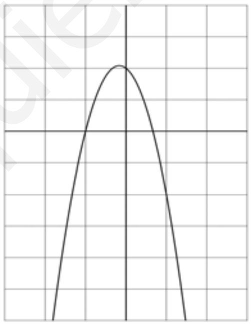
$(-1,0)$ y $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$

c) x = 0 $\Rightarrow$ y = 2 $\Rightarrow$ (0, 2)

d) Vértice: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{-6} = \dfrac{-1}{6} \Rightarrow$

$$y = -3 \cdot \left(\frac{-1}{6}\right)^2 - \frac{-1}{6} + 2 = -3 \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{6} + 2 = \frac{-1}{12} + \frac{1}{6} + 2 = \frac{-1+2+24}{12} = \frac{25}{12}$$

El vértice será: $\left(\dfrac{-1}{6}, \dfrac{25}{12}\right)$



Actividad:

7. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 + 4x + 3$

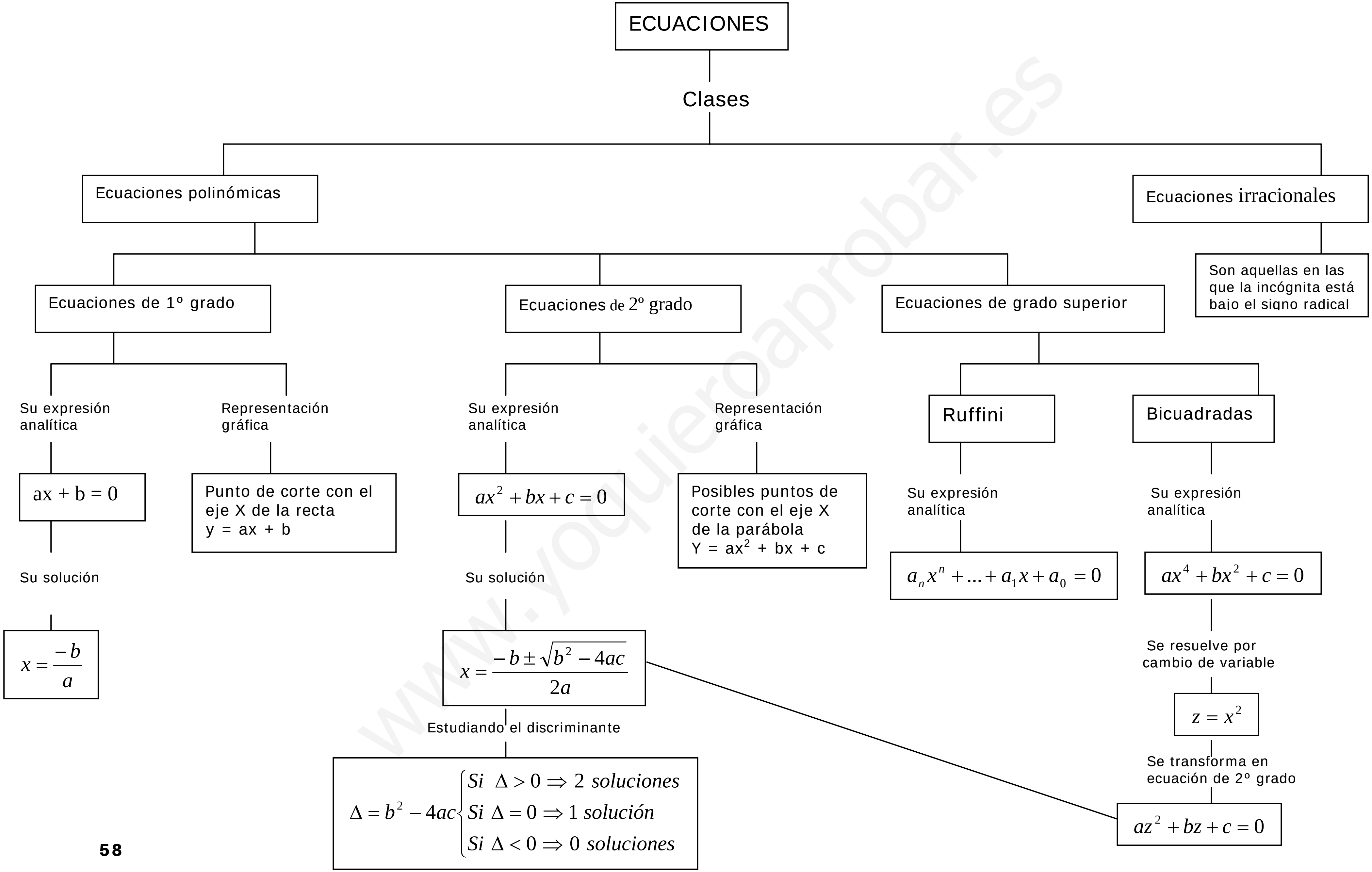
b) $y = -2x^2 + 3x - 5$

c) $y = -x^2 + 2x - 1$

d) $y = x^2 + 4x + 4$

e) $y = x^2 + x - 1$

f) $y = x^2 - 4$


ECUACIONES
Clases
Ecuaciones polinómicas
Ecuaciones irracionales
Son aquellas en las que la incógnita está bajo el signo radical
Ecuaciones de 1º grado
Ecuaciones de 2º grado
Ecuaciones de grado superior
Su expresión analítica
Representación gráfica
$ax + b = 0$
Punto de corte con el eje X de la recta y = ax + b
Su solución
$x = \frac{-b}{a}$
Su expresión analítica
Representación gráfica
$ax^2 + bx + c = 0$
Posibles puntos de corte con el eje X de la parábola Y = $ax^2 + bx + c$
Su solución
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Estudiando el discriminante
$\Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} Si \ \Delta > 0 \Rightarrow 2 \ soluciones \\ Si \ \Delta = 0 \Rightarrow 1 \ solución \\ Si \ \Delta < 0 \Rightarrow 0 \ soluciones \end{cases}$
Ruffini
Bicuadradas
Su expresión analítica
$a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$
Su expresión analítica
$ax^4 + bx^2 + c = 0$
Se resuelve por cambio de variable
$z = x^2$
Se transforma en ecuación de 2º grado
$az^2 + bz + c = 0$

EJERCICIOS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-8}{12}=\frac{5-x}{4}-\frac{x}{3}$

b) $\frac{1}{2}\left(\frac{2x+5}{3}-\frac{x+3}{2}\right)=\frac{1}{5}x$

c) $\frac{x+9}{2}-\frac{1-2x}{7}=\frac{11-x}{14}-\frac{3x+5}{4}$

d) $2x-\left(\frac{15x}{9}-5x\right)=\frac{x-6}{3}+7$

e) $\frac{11x+5}{5}-\frac{3x+2}{2}=\frac{6x}{5}+\frac{x+6}{2}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado, indicando el valor del discriminante y la descomposición factorial:

a) $4x^2-9x-9=0$

b) $2x^2-3x+1=0$

c) $x^2+3x-4=0$

d) $4x^2-24x+32=0$

e) $6x^2-7x+2=0$

f) $3x^2-12x+9=0$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de grado superior:

a) $9x^4+5x^2-4=0$

b) $x^4-26x^2+25=0$

c) $x^4-20x^2+64=0$

d) $x^4-10x^2+9=0$

e) $4x^4+11x^2-3=0$

f) $4x^4-9x^2-9=0$

g) $6x^4-27x^2+12=0$

h) $5x^4+6x^2-8=0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $x+\sqrt{5x+10}=8$

b) $3x-3\sqrt{x+3}=x+3$

c) $1+\sqrt{x}=\sqrt{15}$

d) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x}=2$

e) $x-\sqrt{x}=2$

f) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$

g) $x-\sqrt{25-x^2}=1$

h) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6$

i) $\sqrt{7+2x}-\sqrt{3+x}=1$

j) $\sqrt{7+2x}-\sqrt{3+x}=1$

k) $-3+\sqrt{x}=9-x$

5. Representa las siguientes rectas y parábolas:

a) $y=6x$

b) $y=-3x+5$

c) $y=x^2+2x+1$

d) $y=-x^2+5x+6$

e) $y = -6x$

f) $y = 2x + 6$

g) $y = 5x$

h) $y=x^2+4x+5$

i) $y=-x^2+3x-2$

6. Resuelve por Ruffini, descomponiendo en factores e indicando las soluciones:

a) $x^4-5x^2+4=0$

b) $x^3+5x^2-4x-20=0$

c) $x^4+6x^3+3x^2-26x-24=0$

d) $x^3-4x^2+x+6=0$

e) $x^3-7x-6=0$

f) $x^3-2x^2-x-2=0$

g) $x^3-3x+2=0$

h) $2x^4-5x^3+5x-2=0$

CUESTIONES

1. Los números 2 y – 2 son las soluciones de la ecuación:

a) $x^2+4=0$

b) $x^2-4=0$

c) $x^2-2=0$

d) $4x^2=0$

2. La ecuación $2x^2-3x+1=0$ tiene una raíz, que es 1. La otra raíz es:

a) 2 **b)** – 1 **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{1}{2}$

3. ¿Qué ecuación tiene discriminante negativo?

a) $2x^2+4x+2=0$

b) $-x^2+x-1=0$

c) $x^2-2x-1=0$

d) $3x^2=0$

4. Averigua, en cada caso, si los números que se dan son solución de la ecuación correspondiente:

a) $3x^2 - 10x + 3 = 0$ $\quad \frac{1}{3}$ y 3

b) $x^2 - 2x = 0$ $\quad 2$ y 0

c) $-x^2 + 5x - 6 = 0$ $\quad 2$ y 3

d) $(x-1)(x-3) = 0$ $\quad 1$ y -3

5. Sin resolverlas, averigua el número de soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

b) $x^2 - 2x - 5 = 0$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

d) $x(x-1) = 0$

6. Escribe una ecuación bicuadrada cuyas soluciones sean 3, - 3, 5 y – 5.

7. Halla c en la siguiente ecuación $4x^2 - 6x + c = 0$, de forma que una solución sea $\frac{3}{4}$.

8. Observa las ecuaciones de las siguientes parábolas:

$$y = 3x^2, \quad y = -4x^2, \quad y = \frac{1}{3}x^2, \quad y = -\frac{1}{4}x^2$$

¿Qué parábolas estarán orientadas hacia arriba? ¿y hacia abajo?

9. Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones:

a) $x_1 = \frac{3}{4}$ y $x_2 = \frac{-2}{5}$

b) $x_1 = -16$ y $x_2 = 9$

c) $x_1 = \frac{3}{10}$ y $x_2 = -4$

10. Halla el valor de los coeficientes b y c en la ecuación $7x^2 + bx + c = 0$ sabiendo que sus soluciones son 5 y – 6.

11. Calcula el coeficiente b en la ecuación $5x^2 + bx + 6 = 0$ sabiendo que una de las soluciones es 1. ¿Cuál es la otra solución?

12. Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones 5 y – 2 y tal que:

a) El coeficiente de x^2 sea 4.

b) El coeficiente de x sea 4.

c) El término independiente sea 4.

13. Determina para que valores de b la ecuación $x^2 - bx + 25 = 0$

a) Tiene dos soluciones distintas

b) Tiene una solución

c) No tiene solución

14. La gráfica de la parábola $y = x^2 - 4x + c$ pasa por el punto (2,6). Encuentra el valor de c y averigua si la gráfica corta al eje de abscisas.

15. Indica cuántos puntos de corte con el eje de abscisas tiene una parábola que verifica:

a) $a>0$ y el vértice está por encima del eje OX
b) $a>0$ y el vértice está en el eje OX
c) $a<0$ y el vértice está por encima del eje OX
d) $a<0$ y el vértice está por debajo del eje OX

UNIDAD 4

SISTEMAS DE ECUACIONES INECUACIONES

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1. Interpretar gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones.
2. (**) Resolver algebraicamente sistemas de dos y tres incógnitas. Conociendo en qué consiste cada método de resolución de sistemas de ecuaciones.
3. (**) Aplicar el lenguaje simbólico y algebraico a la resolución de problemas.
4. Resolver sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas: Gauss
5. (**) Calcular las soluciones de un sistema de inecuaciones de una incógnita.
6. Interpretar inecuaciones con dos incógnitas.

** Indica objetivo mínimo

Esquema:

1. Sistemas de ecuaciones.
   1.1. Introducción.
   1.2. Definición.
   1.3. Clasificación.
   1.4. Estudio gráfico.

2. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
   2.1. Método gráfico.
   2.2. Método de sustitución.
   2.3. Método de igualación.
   2.4. Método de reducción.

3. Resolución de problemas.
   3.1. Pasos para resolver un problema.

4. Resolución de sistemas de tres o más ecuaciones.

5. Inecuaciones.
   5.1. Introducción.
   5.2. Inecuaciones de primer grado con una incógnita.
   5.3. Propiedades.
   5.4. Sistemas de inecuaciones de una variable.
   5.5. Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

1. SISTEMA DE ECUACIONES

1.1. Introducción

Cuando queremos resolver un problema en el que aparece más de una incógnita, necesitamos relacionarlas mediante ecuaciones.

1.2. Definición

- Para ello definimos: sistema de ecuaciones como un conjunto de ecuaciones.
- Las ecuaciones que vamos a considerar en este tema son ecuaciones lineales, es decir las variables tienen exponentes uno:

$$a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_2 x_2 + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

1.3. Clasificación

Según las soluciones un sistema de ecuaciones puede ser:

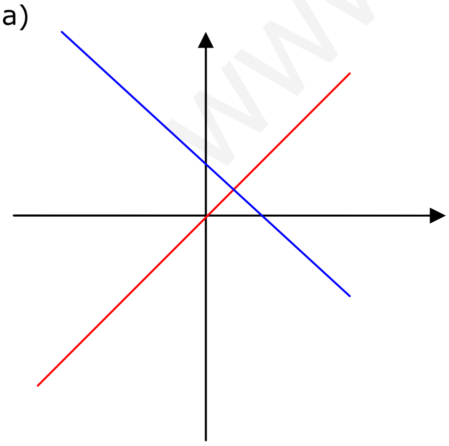
- Sistema compatible:
  Tiene solución y puede ser:
  - Determinado: Existe una única solución
  - Indeterminado: Tiene infinitas soluciones
- Sistema incompatible
  No tiene solución

1.4. Estudio gráfico

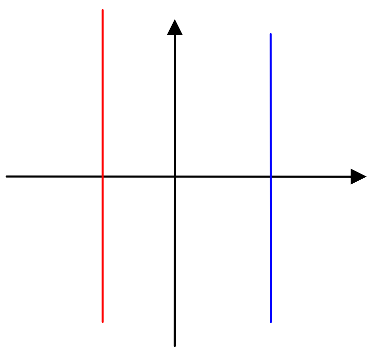
Gráficamente, para un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se tiene:(recordamos que la representación gráfica de cada ecuación es una recta)

a) Si se cortan en un punto: sistema compatible determinado y serán dos rectas secantes.
b) Si no tienen puntos en común: sistema incompatible y serán dos rectas paralelas.
c) Si tienen infinitas soluciones: sistema compatible indeterminado y serán dos rectas coincidentes.

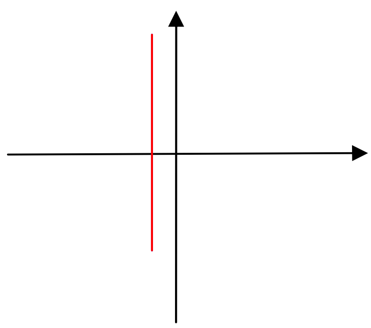
a)



b)



c)



2. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE PRIMER GRADO

Vamos a estudiar los métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

2.1 Método gráfico

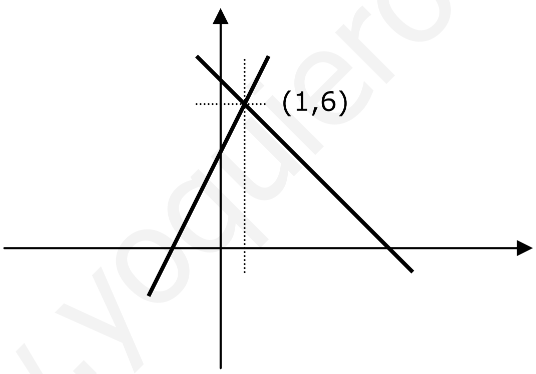
Cada ecuación de dos incógnitas de primer grado es una recta. Representamos cada recta y si se cortan en un punto, ese punto será la solución del sistema.

Ejemplo:

Resolver por el método gráfico el sistema: $\begin{cases} \mathbf{2x - y = -4} \\ \mathbf{x + y = 7} \end{cases}$

Como cada ecuación es una recta, calculamos los puntos de corte.

- $2x - y = -4$
    - Si $x = 0 \Rightarrow -y = -4 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0,4)$
    - Si $y = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2,0)$
- $x + y = 7$
    - Si $x = 0 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow (0,7)$
    - Si $y = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow (7,0)$



(1,6) es el punto de corte de las dos rectas y la solución del sistema, en este caso es un sistema compatible determinado

Actividad:

1. Analiza las soluciones de los siguientes sistemas gráficamente:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$

2.2. Método de sustitución

Pasos que se deben seguir:

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye el valor de esa incógnita en la otra ecuación.
3. Se resuelve la ecuación resultante, ya que sólo tiene una incógnita.

Ejemplo:

Resolver por el método de sustitución el sistema: $\begin{cases} \mathbf{2x - y = -4} \\ \mathbf{x + y = 7} \end{cases}$

- $x + y = 7 \Rightarrow x = 7 - y$
- $2 \cdot (7 - y) - y = -4$
- $14 - 2y - y = -4 \Rightarrow -2y - y = -4 - 14 \Rightarrow -3y = -18 \Rightarrow y = \dfrac{-18}{-3} = 6$
- Como $x = 7 - y \Rightarrow x = 7 - 6 = 1 \Rightarrow x = 1$
- Luego la solución será: (1,6)
- Comprobación en las dos ecuaciones

Actividad:

2. Resuelve los sistemas empleando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -10 \\ 5x + 4y = -2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 7x + 4y = 10 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = -3 \end{cases}$

2.3. Método de igualación

Pasos que se deben seguir:

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2. Se igualan los resultados obtenidos.
3. Se resuelve la ecuación resultante, que sólo tiene una incógnita.

Ejemplo:

Resolver por el método de igualación el sistema: $\begin{cases} \mathbf{2x - y = -4} \\ \mathbf{x + y = 7} \end{cases}$

- $x + y = 7 \Rightarrow x = 7 - y$
- $2x - y = -4 \Rightarrow 2x = -4 + y \Rightarrow x = \dfrac{-4 + y}{2}$
- $7 - y = \dfrac{-4 + y}{2} \Rightarrow \dfrac{14 - 2y}{2} = \dfrac{-4 + y}{2} \Rightarrow 14 - 2y = -4 + y \Rightarrow$

  $-2y - y = -4 - 14 \Rightarrow -3y = -18 \Rightarrow y = \dfrac{-18}{-3} = 6$
- Como $x = 7 - y \Rightarrow x = 7 - 6 = 1 \Rightarrow x = 1$
- Luego la solución será: (1,6)
- Comprobación en las dos ecuaciones

Actividad:

3. Resuelve los sistemas empleando el método de igualación:

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 14 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 10(x-2) + y = 1 \\ x + 3(x - y) = 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$

2.4. *Método de reducción:*

Pasos que se deben seguir:

1. Se transforman las ecuaciones de modo que una de las incógnitas tenga coeficientes opuestos en ambas ecuaciones.
2. Se suman ambas ecuaciones.
3. Se resuelve la ecuación resultante, que sólo tiene una incógnita.

Ejemplo:

Resolver por el método de reducción el sistema: $\begin{cases} \mathbf{2x - y = -4} \\ \mathbf{x + y = 7} \end{cases}$

- Vamos a quitar la variable x para ello multiplicamos la segunda ecuación por − 2, es decir:

$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ -2x - 2y = -14 \end{cases}$$

- Sumamos ambas ecuaciones:

$$-3y = -18$$

- Resolvemos la ecuación que es de primer grado:

$$y = \frac{-18}{-3} = 6$$

- Como y = 6, sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones de partida, es decir:

$$x + y = 7 \Rightarrow x + 6 = 7 \Rightarrow x = 7 - 6 \Rightarrow x = 1$$

- Luego la solución será: (1,6)
- Comprobación en las dos ecuaciones

Actividad:

4. Resuelve los sistemas empleando el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 20 \\ 5x - 7y = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + 4y = 17 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 10x + 4y = 3 \\ 20x - 5y = 4 \end{cases}$

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON DOS INCÓGNITAS

3.1. Pasos para resolver un problema

1) Definir incógnitas.
2) Planteamiento verbal del problema.
3) Resolución de la ecuación o sistema de ecuaciones.
4) Comprobación.
5) Respuesta directa a la pregunta, con sus correspondientes unidades.

Ejemplo 1:

Las dos cifras de un número suman 12. Halla dicho número sabiendo que si se invierte el orden de sus cifras, el número disminuye en 36 unidades.

1) x = primera cifra del número
   y = segunda cifra del número
   número = 10x + y

2) *Si sumamos las cifras de un número, es decir x + y, nos dá de resultado 12

   x + y = 12

   *número con las cifras invertidas es 10y + x, número disminuido en 36 unidades será 10x + y − 36 y como son iguales, la ecuación será:

   10y + x = 10x + y − 36

3) El sistema que debemos resolver será:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 10y + x = 10x + y - 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ 10y + x - 10x - y = -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ 9y - 9x = -36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ y - x = -4 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de reducción, para ello sumamos y eliminamos la variable x:

$$\{2y = 8 \Rightarrow y = 4$$

Para hallar la x utilizo la primera ecuación:

$$x + y = 12 \Rightarrow x + 4 = 12 \Rightarrow x = 12 - 4 \Rightarrow x = 8$$

4) Comprobamos en el sistema de partida:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 10y + x = 10x + y - 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + 4 = 12 \\ 10 \cdot 4 + 8 = 10 \cdot 8 + 4 - 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 = 12 \\ 40 + 8 = 80 + 4 - 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 = \\ 48 = \end{cases}$$

5) El número es 84

Ejemplo 2:

Dos ciudades están separadas por 450km. Una moto sale de una de ellas a 50km/h y otra, de la otra ciudad a 40km/h (una va al encuentro de la otra). ¿Cuándo y dónde se encontrarán?

1) Sea **x** el espacio que recorre la moto que va a 50km/h y **450-x** el espacio que recorre la moto que va a 40km/h. Sea **t** el tiempo que tardan en encontrarse.
2) Sabemos que $\text{velocidad} = \dfrac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$

A x 450 - x B

Punto de encuentro

	Espacio	Velocidad	Tiempo
A	x	50km/h	t
B	450 - x	40km/h	t

Sabemos que el espacio que recorre la primera moto más el espacio que recorre la segunda moto debe ser 450km:

$$50 \cdot t + 40 \cdot t = 450$$

Además x = 50t

3) Resolvemos la ecuación de primer grado:

$$50 \cdot t + 40 \cdot t = 450 \Rightarrow 90 \cdot t = 450 \Rightarrow t = 5$$

$$50 \cdot t = x \Rightarrow 50 \cdot 5 = x \Rightarrow x = 250$$

4) Comprobamos:

$$50 \cdot 5 + 40 \cdot 5 = 450 \Rightarrow 250 + 200 = 450 \Rightarrow 450 = 450$$

5) Se encuentran al cabo de 5 horas a 250km de la ciudad A y al de 200km de la ciudad B

Actividad:

5. Las edades de un padre y un hijo suman 51 años. Dentro de tres años la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tienen?

6. Un vinatero mezcla vino de 3'6 euros el litro con otro de 2 euros, de modo que el litro de la mezcla lo vende a 3 euros. ¿Cuántos litros de cada clase ha mezclado si tiene 600 litros de la mezcla?

7. En un establecimiento se han vendido 13 paquetes de almendras y 18 de pipas pagando en total 31'50 euros. Halla el precio del paquete de cada clase sabiendo que los de almendras cuestan 4 veces más que los de pipas.

8. Halla un número de dos cifras, tal que el doble de sus decenas más el triple de sus unidades sea 23, y que la suma de dicho número con el que resulta de invertir el orden de sus cifras sea 110.

9. Un malhechor se escapa a 70 km/h; 90 km más atrás le persigue la policía a 85 km/h. ¿Cuándo y dónde le alcanzará?

10. El perímetro de una finca rectangular es 480 metros. Sabiendo que la largura es cinco veces la anchura, ¿cuánto mide el largo y el ancho?

4. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE TRES O MÁS ECUACIONES

Para resolver sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas vamos a utilizar el método de Gauss, para ello tenemos que llegar a tener un sistema triangular

Consiste en aplicar reiteradamente el método de reducción hasta conseguir un sistema triangular en el que la 1ª ecuación tenga tres incógnitas, la 2ª dos y la 3ª una.

Ejemplo:

Resolver por el método de Gauss el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x + y + z = 1} \\ \mathbf{2x - y - 3z = 0} \\ \mathbf{-x + 2y - 2z = -5} \end{cases}$$

- Fijamos una de las tres ecuaciones, en este caso la primera.
- Utilizamos el método de reducción para quitar la variable x, 1º y 2º multiplicando a la 1º por – 2, y 1º y 3º (no hace falta multiplicar ya que la variable x tiene coeficientes opuestos)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad -3y - 5z = -2 \\ \quad 3y - z = -4 \end{cases}$$

- Volvemos a utilizar el método de reducción entre la 2º y 3º, quitando la variable y (no hace falta multiplicar ya que la variable y tiene coeficientes opuestos)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad -3y - 5z = -2 \\ \quad\quad -6z = -6 \end{cases}$$

- Una vez conseguido el sistema triangular, resolvemos las ecuaciones empezando por la 3º para hallar z, este valor lo sustituyo en la 2º y calculo y, hasta llegar a la primera para calcular x $\{z = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 1$
- Solución: (1, - 1, 1)
- Comprobación en las tres ecuaciones

Actividad:

11. Resuelve los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \\ y + z - x = 3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$

5. INECUACIONES

5.1. Introducción

Denominamos inecuaciones a las expresiones algebraicas que relacionan una o varias incógnitas mediante una desigualdad.

5.2. Inecuaciones de 1º grado con una incógnita

Una inecuación de 1º grado, después de realizar las operaciones necesarias, es de la forma:

$ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$ $ax + b < 0$

Solución de una inecuación es todo número real que, al sustituirlo en la variable, satisface la desigualdad.

5.3. Propiedades

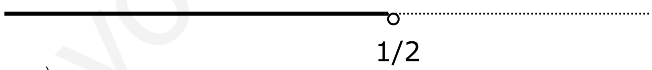
1) Si a los miembros de una desigualdad se les suma o resta un número, la desigualdad tiene el mismo sentido

2) Si a los dos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por un número positivo, la desigualdad tiene el mismo sentido

3) Si a los dos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por **un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.**

Ejemplo:
Resolver la inecuación: **3(x + 2) > 5 + 5x**

$$3x+6>5+5x \Rightarrow 6-5>5x-3x \Rightarrow 1>2x \Rightarrow \frac{1}{2}>x$$



Solución: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

5.4. Sistemas de inecuaciones de una variable

Están formados por un conjunto de inecuaciones con una variable. La solución tiene que verificar todas las inecuaciones.

Se resuelve cada inecuación por separado y la solución del sistema serán los puntos que sean solución de todas las inecuaciones que formen el sistema (si un punto es solución de una inecuación, pero no de otra entonces no es solución del sistema)

Ejemplo 1:

Resolver el sistema de inecuaciones con una incógnita:

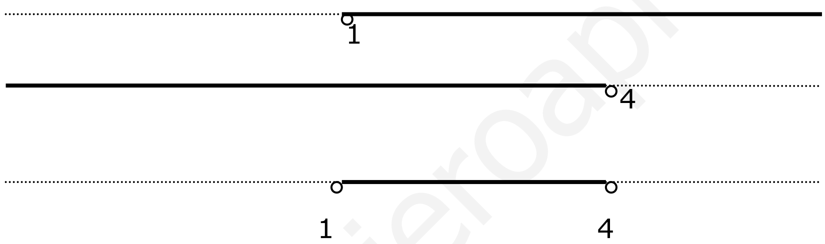
$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{2x-2}}{\mathbf{5}} + \dfrac{\mathbf{5-2x}}{\mathbf{3}} < \mathbf{1} \\ \dfrac{\mathbf{x+2}}{\mathbf{3}} - \dfrac{\mathbf{2x-3}}{\mathbf{4}} > \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \end{cases}$$

- Resolvemos cada inecuación por separado:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-2}{5} + \dfrac{5-2x}{3} < 1 \Rightarrow \dfrac{6x-6+25-10x}{15} < \dfrac{15}{15} \Rightarrow -4x+19 < 15 \Rightarrow -4x < 15-19 \Rightarrow \\ -4x < -4 \Rightarrow x > \dfrac{-4}{-4} \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{2x-3}{4} > \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{4x+8-6x+9}{12} > \dfrac{9}{12} \Rightarrow -2x+17 > 9 \Rightarrow -2x > 9-17 \Rightarrow \\ -2x > -8 \Rightarrow x < \dfrac{-8}{-2} \Rightarrow x < 4 \end{cases}$$

- Veamos gráficamente cuál es la solución de cada una de ellas y del sistema:



- Solución: (1,4)

Ejemplo 2:

Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{3x+8 \le x+14} \\ \mathbf{2x > \dfrac{3x}{2} - 1} \end{cases}$$

- Resolvemos cada inecuación por separado:

$$\begin{cases} 3x+8 \le x+14 \\ 2x > \dfrac{3x}{2} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \le 6 \\ 4x > 3x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2,3]$$

- La solución del sistema será:

Actividad:

12. Resuelve las inecuaciones con una incógnita:

a) $\frac{7x}{5} - \frac{1}{2} \leq \frac{3x}{2} - 5$ $\qquad$ $\frac{x-2}{4} \leq \frac{x-1}{2}$

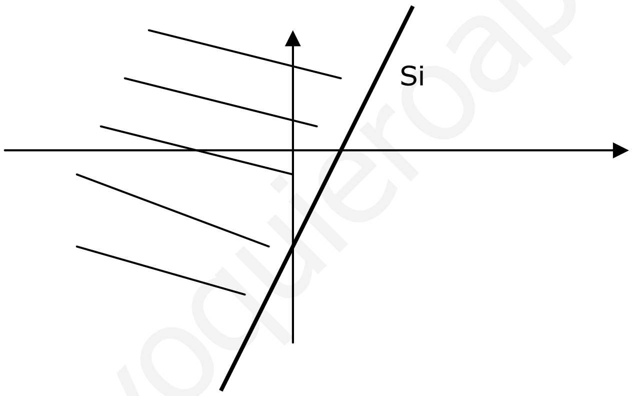
b) $2x + 1 < 13$ $\qquad$ $\frac{3-4x}{15} < 1$

5.5. *Inecuaciones de 1º grado con dos incógnitas*

Ejemplo:

Resolvemos la inecuación de dos incógnitas: $\mathbf{2x - y \leq 4}$

- Convertimos la desigualdad en igualdad:
  $2x - y = 4$
- Gráficamente es una recta que para dibujarla necesitamos dos puntos.
  $(0, -4)$ y $(2, 0)$
- La recta será solución en el caso que aparezca $\leq, \geq$ y estará excluida si es $<, >$
- La recta divide al plano en dos semiplanos.



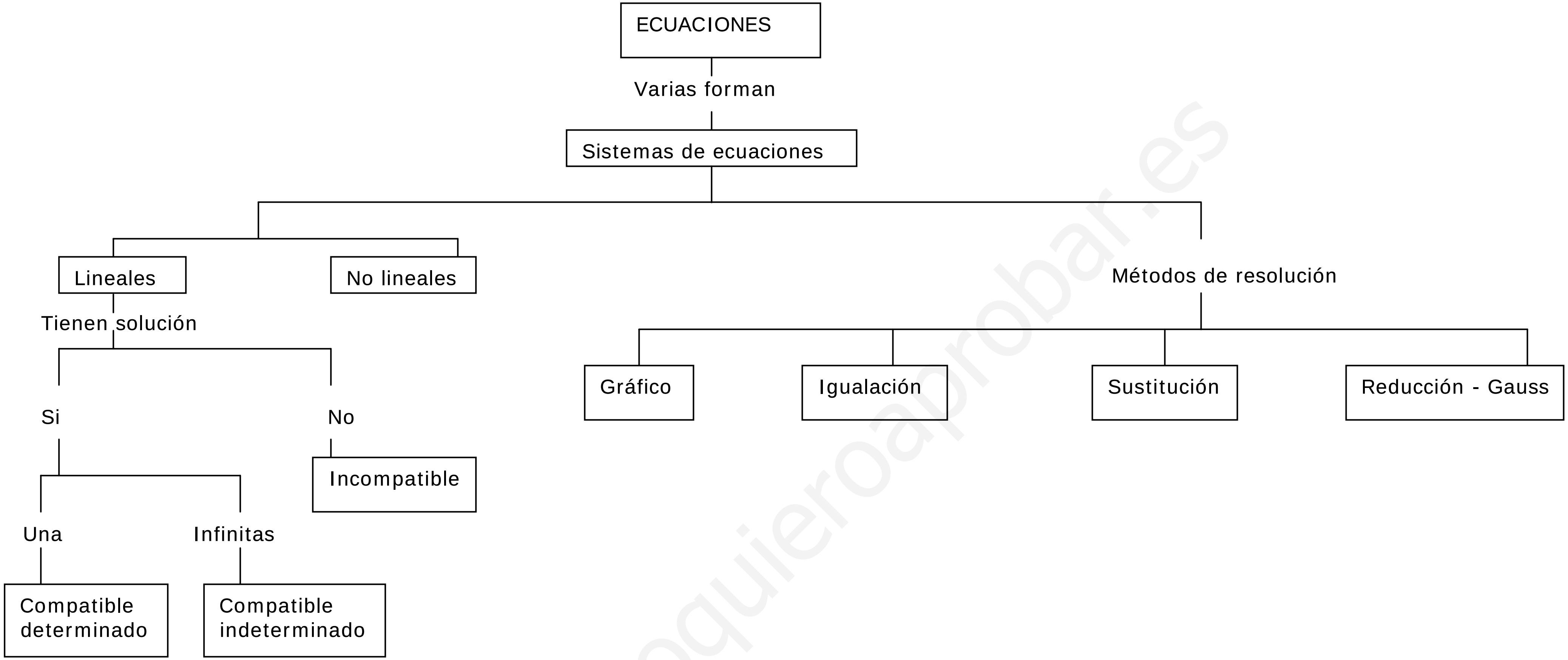
- El si significa que la recta es parte de la solución.
- Uno de esos dos semiplanos será solución, para saber cuál es escogemos un punto que no pertenezca a la recta, si verifica la inecuación será solución el semiplano que contenga al punto, en caso contrario la solución de la inecuación será el otro semiplano.
  Por ejemplo en este caso se considera el punto (0,0), que no pertenece a la recta y lo se sustituye en la inecuación $0 \leq 4$, que es cierto, luego la solución será el semiplano que contiene al punto (0,0)

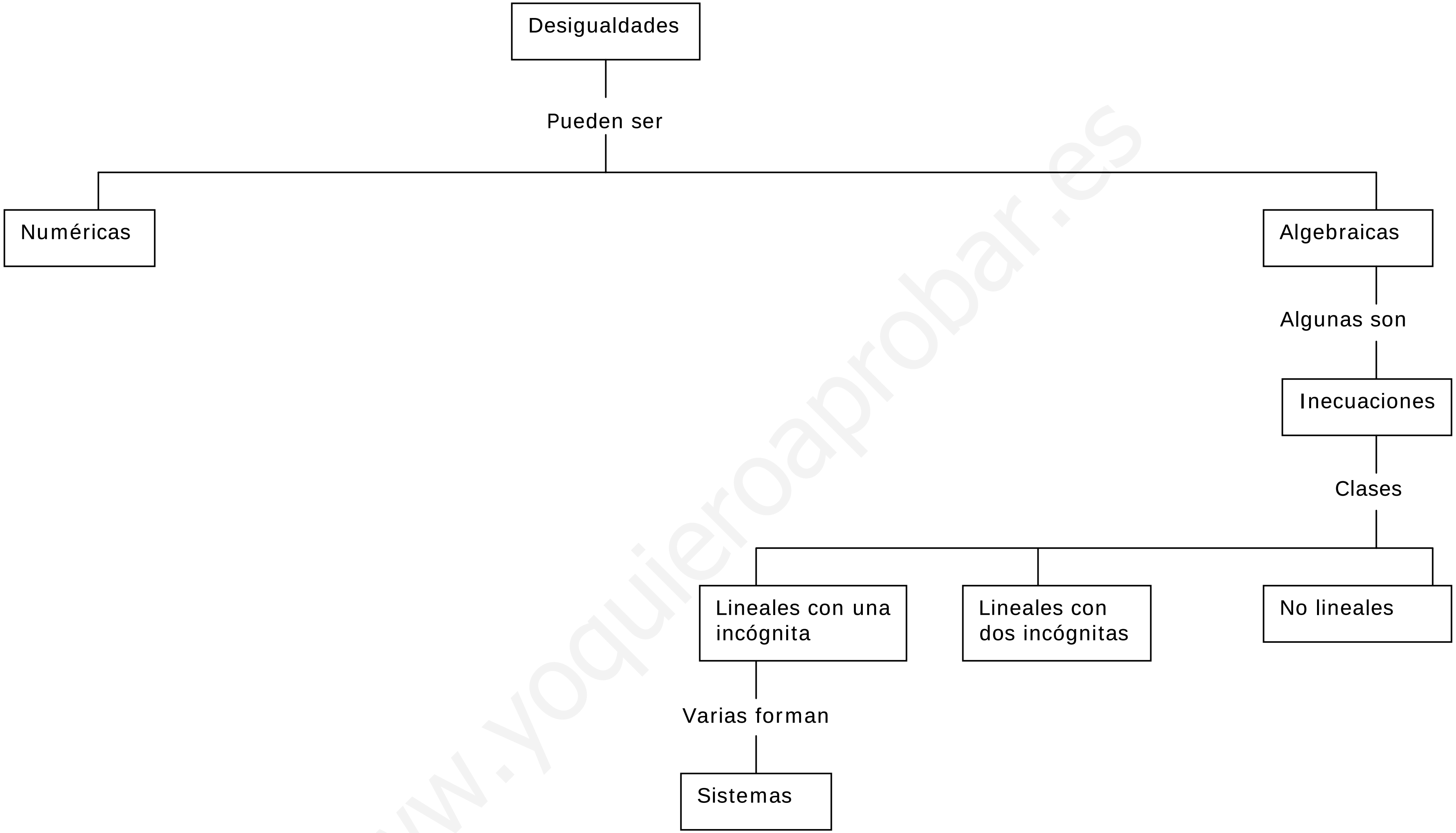
Actividad:

13. Resuelve las inecuaciones con dos incógnitas:

a) $6x + 5y \leq 30$ $\qquad$ **b)** $2x + 8 \leq 3y$

c) $3x + y < 6$ $\qquad$ **d)** $3x + y - 5 < 0$


ECUACIONES
Varias forman
Sistemas de ecuaciones
Lineales
No lineales
Métodos de resolución
Tienen solución
Si
No
Incompatible
Una
Infinitas
Compatible determinado
Compatible indeterminado
Gráfico
Igualación
Sustitución
Reducción - Gauss


Desigualdades
Pueden ser
Numéricas
Algebraicas
Algunas son
Inecuaciones
Clases
Lineales con una incógnita
Lineales con dos incógnitas
No lineales
Varias forman
Sistemas

EJERCICIOS

1. Resuelve los sistemas empleando el método gráfico:

a) $\begin{cases} 5x + 2y = 10 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

2. Resuelve los sistemas empleando el método de sustitución, igualación y reducción:

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 6x - 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x - y}{2} + \dfrac{x - y}{3} = 5 \\ \dfrac{x + y}{7} + y = 3 \end{cases}$

3. Resuelve los sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} 6x - 3 < 4x + 7 \\ 3x - 1 \geq -2x + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4 > x + 6 \\ 2x + 3 < x + 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 1 > 2x + 10 \\ x - 5 \leq 15 - 3x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 1 < 2x - 2 \\ x + 4 \leq 7 - 4x \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 3 < 5x + 6 \\ -x - 2 > 3x - 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x - \dfrac{3 - 2x}{4} < \dfrac{3x - 1}{3} \\ \dfrac{3x + 3}{4} > \dfrac{x + 1}{2} + 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{2} < 5 - \dfrac{x}{6} \\ \dfrac{2x - 4}{3} \geq \dfrac{2x - 5}{12} \end{cases}$

4. Resuelve las inecuaciones con dos incógnitas:

a) $2x - 3y + 5 > 7$

b) $5y \leq \frac{2x}{3} - \frac{x}{2}$

c) $3y + 2x \geq \frac{1}{2}$

d) $4x - 6y < \frac{2}{3}$

e) $2x - 3 < 4 - 2y$

f) $6 - 5x \leq 8 + 3y$

g) $4 - x > y + 18$

5. Resuelve los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \\ y + z - x = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x + y - 2z = -5 \\ 2x + y + 3z = 16 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \\ 2x - y - 4z = 7 \\ 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases}$

Resolver los problemas siguiendo los cinco pasos dados en teoría:

6. La edad del padre es doble de la que el hijo tendrá dentro de 10 años. La edad del hijo es un tercio de la que el padre tenía hace dos años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

7. En una granja hay conejos y pollos. En total hay 47 cabezas y 124 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

8. En el colegio se ha hecho una colecta con motivo de la campaña contra el hambre. Los profesores han contribuido con 3 euros cada uno y los alumnos con 0'60 euros. Se han recaudado 1512 euros. Sabiendo que hay 25 veces más alumnos que profesores, ¿cuántos profesores y cuántos alumnos hay en el colegio?

9. Halla dos números cuya diferencia es – 5 y el triple de uno de ellos es igual al doble del otro.

10. La medida de los lados de un triángulo son tres números consecutivos. Si el perímetro del triángulo son 12 centímetros, ¿cuánto mide cada lado?

11. La suma de las cifras de un número es 11. Si lo invertimos, el número obtenido excede en 5 unidades al triple del número dado. Hallar ese número.

12. Calcular las dimensiones de un rectángulo de 20 metros de perímetro, sabiendo que la altura es 2/3 de la base.

13. En una reunión de 49 personas hay doble número de mujeres que de hombres, y el número de niños es cuádruplo del número de hombres. Hallar cuántas mujeres, hombres y niños hay.

14. Dos coches salen a la vez de dos puntos A y B, separados por una distancia de 300 kilómetros y se dirigen uno hacia otro, el primero a 60 km/h y el segundo a 90 km/h. ¿Cuándo y dónde se encontrarán?

15. Un grupo de alumnos ha pagado 80€ por 3 entradas de palco y 6 de patio. Otro grupo que ha llegado más tarde, por 2 entradas de palco y 2 de patio ha pagado 42€. Calcula los precios de cada localidad.

16. Un comerciante vende 84 pantalones vaqueros a dos precios distintos: unos a 27€ y otros a 21'6€, obteniendo de la venta 1863€. El problema es que no sabe cuántos pantalones vendió de cada clase. ¿Podrías tú hallarlos?

17. Halla las edades de la abuela Ana y de su nieta Pamela, Sabiendo que hace 10 años la edad de la abuela era 4 veces la edad de la nieta, y dentro de 20 años la edad de la abuela será sólo el doble.

18. Las densidades de dos metales, en g/cm^3, son 1'4 y 2'6 y se funden obteniéndose un metal de densidad 1'8. Halla la cantidad de metal que hay que tomar de cada clase para obtener una mezcla de 60 g.

19. Un ganadero mezcla leche de 3% de grasa con leche de 4% de grasa para obtener 400 litros de leche con 3'25 % de grasa. ¿Cuántos litros debe mezclar de cada clase?

20. Ana ha comprado en las rebajas una falda y una blusa por 54'6€. La falda está rebajada un 20% y la blusa un 15% ¿Cuál era el precio sin la rebaja si las dos juntas costaban 66€?

21. He salido a comprar unos regalos y he comprado 3 libros, todos de igual precio, y una agenda. Todo me ha costado 5'1€. Sabiendo que la agenda me ha costado el doble que un libro. Halla el precio de cada cosa.

22. En el corral de un vecino del pueblo hay 2 ocas más y una oveja menos que en el de al lado, donde hay 6 animales, y el número de patas es 16 en cualquiera de los dos corrales. ¿Cuántos animales de cada clase hay en cada pueblo?

23. Hallar un número de dos cifras tal que la suma de ellas es 10, y si el producto de ellas se le añade 40, se obtiene el número que resulta de invertir el orden de sus cifras.

24. Halla las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 78 m y el área 360 m^2.

25. Halla dos números, sabiendo que su diferencia es 22 y que el mayor es triple del menor.

26. La diferencia entre dos números es 121 y su cociente exacto es 12. Calcular estos números.

27. Un padre tiene triple edad que su hijo. Si el padre tuviera 30 años menos y el hijo 8 más, los dos tendrían la misma edad. Averigua la edad de cada uno.

28. Un terreno ha sido dividido en dos partes desiguales, cuya diferencia es 272 m^2. Los 5/6 de la primera parte, reúnen igual número de metros que los 7/5 de la segunda. Calcular el valor del total del terreno, vendido a 18000€ la Ha. (10.000 m^2 = 1 Ha)

29. Un cesto contiene 72 unidades entre manzanas, peras y naranjas. Sabiendo que el número de manzanas es cinco veces el de peras y que el de naranjas es la semisuma de los otros dos, hallar las unidades que contiene de cada clase.

30. Dividir el número 63 en dos partes, tales que los cocientes de dividir la primera parte entre tres y la segunda entre 6, sean iguales.

31. Una mujer lleva una cesta de huevos al mercado y pensaba venderlos a 10’8 céntimos la unidad. En el camino se le rompen 16 y calcula que vendiéndolos a 12’6 céntimos, obtiene el mismo dinero. ¿Cuántos huevos contenía la cesta?

32. En un garaje hay motos de 2 cilindros y autos de 6 cilindros; en total hay 80 cilindros y 58 ruedas. Calcular el número de motos y autos que hay en el garaje.

33. Hace dos años la edad de Luis doblaba a la edad de Belén. Dentro de 3 años la razón de sus edades será 3/2. Calcula las edades actuales.

34. En el recreo de ayer con 5’4€ compramos 6 bocadillos de tortilla y uno de chorizo. Hoy con 6€ pesetas hemos comprado 4 de chorizo y 3 de tortilla, sobrándonos 15 céntimos. ¿Cuál es el precio de cada bocadillo?

35. La suma de las edades de un padre y de su hijo es de 42 años. Dentro de 9 años, la edad del padre será tres veces la del hijo. ¿qué edades tienen el padre y el hijo?

36. La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede en 1 a la cifra de sus unidades. Hallar este número sabiendo que dividiéndolo por la cifra de las decenas se obtiene 10 de cociente y 4 de resto.

37. Hallar un número de dos cifras tal que la suma de ellas es 10, y si al producto de ellas se le añade 40, se obtiene el número que resulta de invertir el orden de sus cifras.

38. Unos malhechores cometen un atraco en una ciudad y escapan a una velocidad de 90Km/h, la policía comienza su persecución 65km más atrás a 120km/h. ¿Cuándo y dónde los detendrán?

39. Dos ciudades están separadas por 450km. Una moto sale de una de ellas a 50km/h y otra, de la otra ciudad a 40km/h. ¿Cuándo y dónde se encontrarán?

40. Un tren sale de una ciudad a 80km/h. Dos horas más tarde sale otro de la misma ciudad a una velocidad de 100km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarlo?

41. Dos ciudades A y B distan 720 km. A las 4 de la mañana sale un coche de la ciudad A a la ciudad B con una velocidad media de 110 km/h. A la misma hora sale un camión de la ciudad B hacia la ciudad A con una velocidad de 70 km/h. ¿A qué hora se encuentran? ¿A qué distancia de las ciudades A y B se encuentran los dos vehículos?

42. Dos ciudades A y B distan entre sí 360 km. A las 5 de la tarde sale un coche de la ciudad A a la ciudad B con una velocidad media de 70 km/h. A la misma hora sale un camión de la ciudad B hacia A con una velocidad de 50 km/h. ¿A qué hora se encuentran los coches?

43. Pablo va de la ciudad A a la ciudad B en moto a una velocidad de 80 km/h, y vuelve a A a una velocidad de 120 km/h. Sabiendo que el viaje ha durado 6 horas, halla la distancia entre A y B.

44. Esther viaja de Lugo a Madrid en su coche. Sale a las 8 de la mañana y lleva una velocidad de 90km/h. A 110 km de Lugo, Juan coge a esa hora un autobús con la misma dirección que lleva Ester y una velocidad de 70 km/h. ¿A qué hora se encuentran el coche de Ester y el autobús de Juan? ¿Qué espacio habrá recorrido cada uno?

45. Resuelve las inecuaciones con una incógnita:

a) $\frac{7x}{5} - \frac{1}{2} \leq \frac{3x}{2} - 5$ $\qquad \frac{x-2}{4} \leq \frac{x-1}{2}$

b) $2x + 1 < 13$ $\qquad \frac{3-4x}{15} < 1$

46. Resuelve las inecuaciones con dos incógnitas:

a) $6x + 5y \leq 30$ $\qquad$ **b)** $2x + 8 \leq 3y$

c) $3x + y < 6$ $\qquad$ **d)** $3x + y - 5 < 0$

47. Utiliza el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + z = 4 \\ y + z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ 3x + 5y - 3z = 7 \\ 4x - y + 7z = 23 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = -1 \\ 3x + 2y - z = 7 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$

48. En un canódromo la distancia de la salida de los perros a la liebre mecánica es de 80m. Sabiendo que el perro que más corre lleva una velocidad de 10 m/sg. Y que la liebre va a 5 m/sg. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarla?

49. Un coche sale de Lugo con dirección La Coruña a 80km/h. Se detiene en La Coruña una hora y media y vuelve a Lugo a 90km/h. Calcular la distancia entre ambas ciudades sabiendo que desde que sale hasta que vuelve han transcurrido tres horas y media.

50. Un automóvil y un ciclista parten de un mismo punto a la misma hora y en igual sentido, a las velocidades de 160km/h y 40km/h respectivamente. Al recorrer 150km el automóvil regresa y encuentra al ciclista. Hallar a qué distancia del punto de partida se encontrarán.

51. Un número está formado por dos cifras cuya suma es 9. Invirtiendo el orden de colocación de dichas cifras, resulta un número superior en 9 unidades al inicial. Calcula el número.

52. Halla un número de dos cifras tal que la suma de ellas es 14, y este número disminuye en 36 unidades cuando se invierte el orden de las cifras.

53. En otro corral del pueblo hay vacas y gallinas. Si les cuentan las patas, hay 24. Cuando las vacas están pastando, sólo se cuentan 16 patas. ¿Cuántos animales de cada clase hay?

54. Laura compró 30 sellos, algunos de 20 céntimos y otros de 30 céntimos, con un coste total de 7'5 euros. ¿Cuántos sellos compró de 20 céntimos?

55. En un test de elección múltiple, se puntúa 4 por una respuesta correcta y se resta un punto por una equivocada. Un estudiante responde a 17 cuestiones y obtiene 43 puntos. ¿Cuántas cuestiones respondió correctamente?

56. Invirtiendo los dígitos de la edad de Carmen se obtiene la de su abuela. La diferencia de sus edades es de 45 años. Si la suma de los dígitos es 7, halla la edad de cada una de ellas.

57. Halla un número de dos cifras que suman 6 sabiendo que si a dicho número se le quita el que resulta de invertir el orden de sus cifras se obtiene 36.

58. Averiguar la edad de dos hermanos sabiendo que el séxtuplo de la que tenía el mayor hace tres años era igual a siete veces la del menor y que el doble de la del mayor equivale a la del menor más 30.

59. Halla un número de dos cifras, tal que el doble de sus decenas más el triple de sus unidades sea 23, y que la suma de dicho número con el que resulta de invertir el orden de sus cifras sea 110.

60. En la bolsa A y en la bolsa B hay un total de 80 bolas. Si pasamos 10 bolas de la bolsa B a la bolsa A, el número de la bolsa A es 3 veces el número de bolas de la bolsa B. ¿Cuántas bolas hay en cada bolsa?

61. Laura compró 30 sellos, algunos de 20 céntimos de euro y otros de 30 céntimos de euro, con un coste total de 750 céntimos de euro. ¿Cuántos sellos compró de cada clase?

62. En un pequeño zoo que tiene sólo jirafas y canguros, el guarda contó sólo cabezas y su hijo sólo patas. Había 92 cabezas y 290 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

63. Halla dos números, sabiendo que su diferencia es 22 y que el mayor es triple del menor.

64. Un padre tiene triple edad que su hijo. Si el padre tuviera 30 años menos y el hijo 8 más, entonces tendrían la misma edad.

65. Una mujer lleva una cesta de huevos al mercado y pensaba venderlos a 18 céntimos la unidad. En el camino se le rompen 16 y calcula que vendiéndolos a 21 céntimos, obtiene el mismo dinero. ¿Cuántos huevos contenía la cesta?

66. La suma de las edades de un padre y de su hijo es de 42 años. Dentro de 9 años, la edad del padre será tres veces la del hijo. ¿Qué edades tienen el padre y el hijo?

67. Resuelve los sistemas por Gauss:

a) $\begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y - z = 15 \\ 5x - y + 5z = 16 \\ x + 4y + z = 20 \end{cases}$

68. Resuelve los sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{2} < 5 - \dfrac{x}{6} \\ \dfrac{2x-4}{3} + \dfrac{3x-1}{3} > \dfrac{2x-5}{12} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{x+1}{7} \le x - 2 \\ \dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{x-8}{4} < \dfrac{x+14}{2} - 2 \end{cases}$

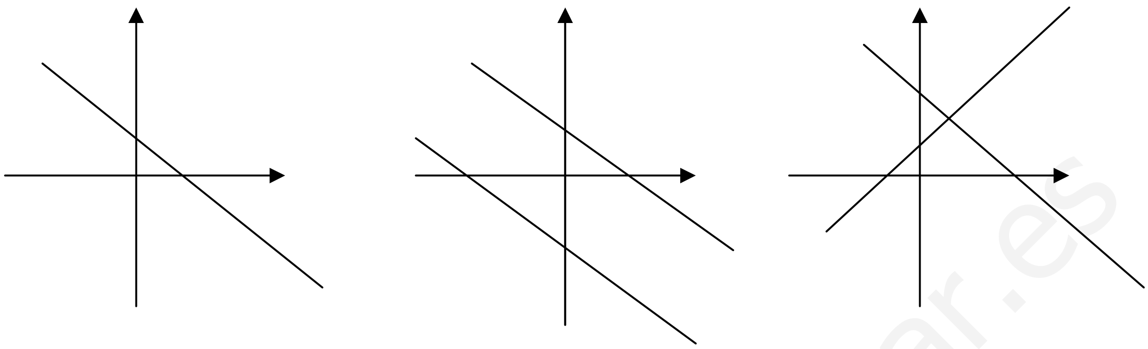
69. Resuelve las inecuaciones con dos incógnitas:

a) $2x - 3y + 5 > 7$

b) $5y \le \dfrac{2x}{3} - \dfrac{x}{2}$

CUESTIONES

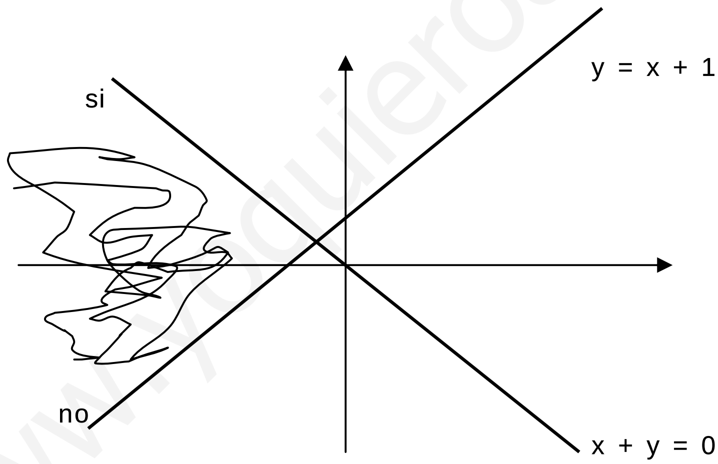
1. Dadas las siguientes representaciones gráficas, indica si el sistema de ecuaciones tiene una, ninguna o infinitas soluciones. Justifica tu respuesta:



2. ¿Cuáles de los siguientes pares de números son soluciones de este sistema?

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \qquad (-3,-6),\ (-2,-1),\ (1,2),\ (0,0)$$

3. Escribe el sistema de inecuaciones cuya solución está representada por la siguiente región:



4. Los números 2 y 3 son solución del sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ -x + y = 1 \end{cases}$. ¿Es correcta esta forma de expresar la solución del sistema?

5. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede tener exactamente dos soluciones? Si la respuesta es afirmativa, da un ejemplo; en caso contrario razona por qué no.

6. Razona, sin resolverlo, ¿cuántas soluciones tiene el sistema $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$

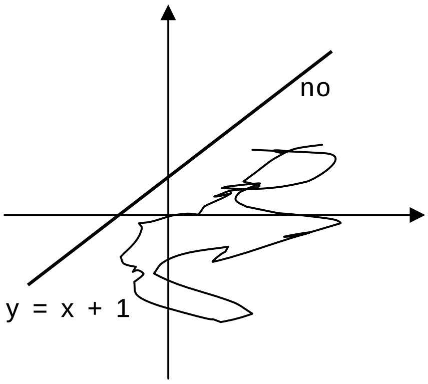
7. Dada la ecuación x – y = 12, añade otra ecuación de modo que el sistema resultante sea incompatible. Justifica la respuesta.

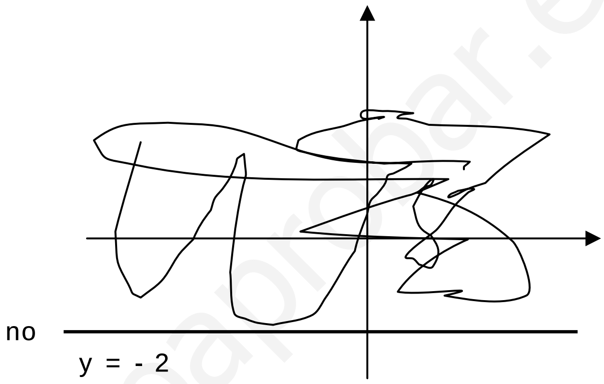
8. Indica a qué expresión corresponde la siguiente gráfica:

$-2 < x \leq 5$
$-2 \leq x \geq 5$
$-2 \geq x > 5$
$-2 \leq x < 5$

9. Un lado de un rectángulo mide 15 cm y el otro mide x cm. Determina la medida de x para qué el área del rectángulo sea inferior a 40 cm.

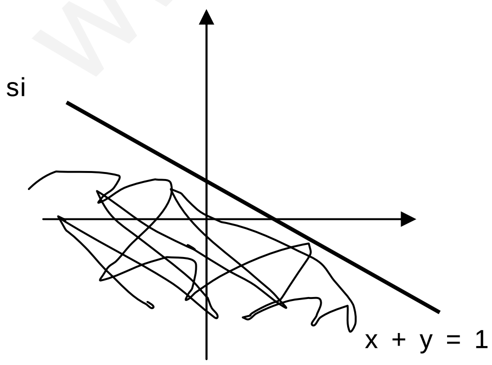
10. Calcula la intersección de las dos regiones:

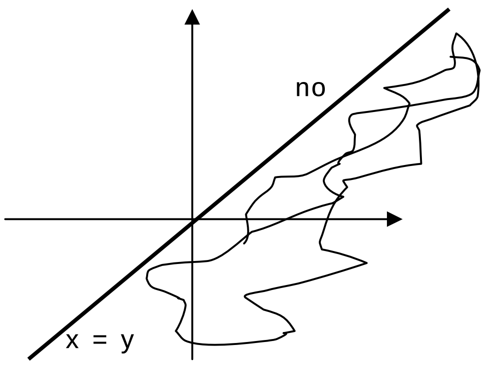




11. Indica analíticamente las soluciones representadas gráficamente:

12. Calcula la intersección de las dos regiones:





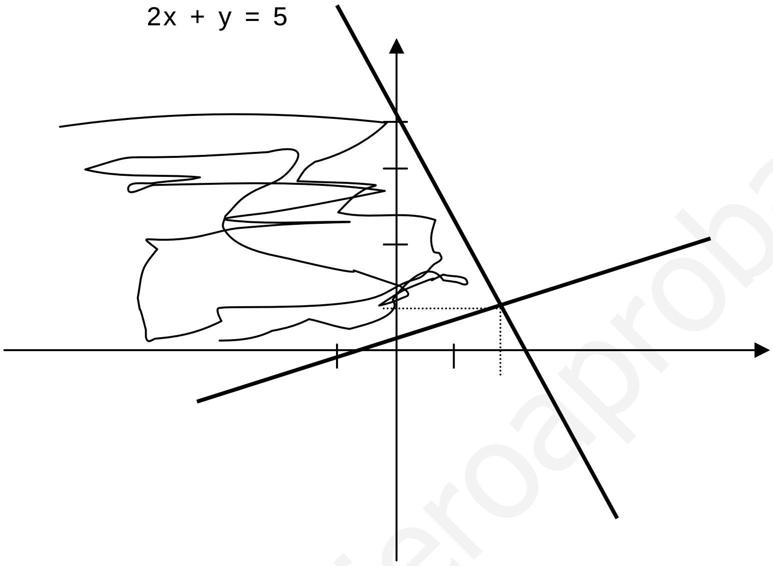
13. La siguiente región corresponde al sistema:

a) $\begin{cases} 2x + y < 5 \\ -x + 3y < 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y < 5 \\ -x + 3y > 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y > 5 \\ -x + 3y > 1 \end{cases}$

d) Ninguno de los anteriores



UNIDAD 5

SUCESIONES

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1. (**)Obtener el término general de una sucesión.
2. (**)Calcular el término n-ésimo de una progresión.
3. Realizar las sumas de términos de sucesiones aritméticas y geométricas.
4. Diferenciar una progresión aritmética de una geométrica.

** Indica objetivo mínimo

Esquema:

1. Sucesiones.
    - 1.1 Definiciones.
        - a) Sucesión de números reales.
        - b) Término de una sucesión.
        - c) Término general de una sucesión.
    - 1.2 Clasificación de sucesiones.

2. Progresiones aritméticas.
    - 2.1. Definición.
    - 2.2. Clasificación.
    - 2.3. Término general.
    - 2.4. Suma de términos.

3. Progresiones geométricas.
    - 3.1. Definición.
    - 3.2. Clasificación.
    - 3.3. Término general.
    - 3.4. Suma de términos.

1. SUCESIONES

Hay colecciones de objetos o números que se comportan siempre cumpliendo una determinada regla, un determinado orden es decir, guardan una regularidad.

Ejemplos:

a)
```
-----   -----   -----   -----
        -----   -----   -----
                -----   -----
                        -----
```

b) El conjunto de números:
1, 3, 5, 7, 9, ...

Son los números impares y la regla a seguir es que cada número se obtiene sumando 2 unidades al anterior.

En este interés por ordenar las cosas se basa la idea del concepto de sucesión matemática. En esta Unidad estudiaremos

1.1 Definiciones

a) Sucesión de números reales
Es un conjunto de números reales ordenados.

Ejemplo:
2, 4, 6, 8, 10, ...

b) Término de una sucesión
Es cada uno de los números que compone la sucesión. Los términos se designan con una letra y un subíndice, que indica el lugar que ocupa dentro de la sucesión (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...)

Ejemplo:

$a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6$, $a_4=$, $a_5=$

c) Término general de una sucesión
Es aquel a partir del cual se obtienen todos los demás, es una expresión que relaciona la posición n que ocupa el término de la sucesión con el valor que tiene. Se representa por a_n.

Ejemplo:
$a_n = 2n$

- Toda sucesión la representaremos por: $\{ a_n \}$

1.2. Clasificación de sucesiones

a) Sucesiones limitadas

Tienen un número finito de términos.

Ejemplo: 1, 3, 5, 7, 9.

b) Sucesiones ilimitadas

Tienen un número infinito de términos.

Ejemplo: 1, 3, 5, 7, 9, ..., 2n-1, ...

c) Sucesión { a_n } es creciente

Si cada término es igual o mayor que el anterior.

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq .... \leq a_n \leq ...$$

Ejemplo: 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5,...

d) Sucesión { a_n } es estrictamente creciente

Si cada término es mayor que el anterior.

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < .... < a_n < ...$$

Ejemplo: 7, 8, 9, 10, ..., n + 6, ...

e) Sucesión { a_n } es decreciente

Si cada término es igual o menor que el anterior.

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq .... \geq a_n \geq ...$$

Ejemplo: 9, 9, 9, 8, 7, 7, 7, ...

f) Sucesión { a_n } es estrictamente decreciente:

Si cada término es menor que el anterior.

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > .... > a_n > ...$$

Ejemplo: 9, 7, 5, 3, ..., - 2n + 11

g) Sucesión { a_n } es constante

Si todos los términos son iguales.

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \dots\ a_n = \dots$$

Ejemplo: 1, 1, 1, 1, 1, ...

h) Sucesión { a_n } es oscilante

Los términos de la sucesión van cambiando alternativamente de signo

Ejemplo: 2, -2, 2, -2, 2, ...

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Consideramos la siguiente sucesión:

2, 4, 6, 8, 10, ...

si nos fijamos cada término se consigue sumando al anterior la constante 2, es decir:

4 = 2 + 2
6 = 4 + 2
8 = 6 + 2
10 = 8 + 2

a esa constante fija que sumamos se le llama **diferencia** (por ser la resta que hay entre cada término y el anterior) y se le representa por "d". Podemos definir:

2.1. Definición

Una progresión aritmética es una sucesión de números reales en la que cada término (exceptuando el primero) se obtiene a partir del anterior sumándole una constante d, llamada diferencia.

Ejemplo

3, 5, 7, 9, ... progresión aritmética cuya diferencia d=2

2.2 Clasificación

En el ejemplo 2, 4, 6, 8, 10, ... d>0 como cada término es mayor que el anterior, la sucesión es estrictamente creciente

Ejemplo:
Consideramos el siguiente ejemplo:
8, 5, 2, -1, -4, ...

¿Cuánto vale en este caso d?
¿Es estrictamente creciente?
¿Es estrictamente decreciente?
¿Qué se puede deducir?

a) Estrictamente creciente

Una progresión aritmética decimos que es **estrictamente creciente** cuando $d>0$.

Ejemplo
3, 5, 7, 9, ...

progresión aritmética estrictamente creciente con $d= 2>0$

b) Estrictamente decreciente

Una progresión aritmética decimos que es **estrictamente decreciente** cuando $d< 0$.

Ejemplo
8, 5, 2, -1, -4, ...

progresión aritmética estrictamente decreciente con $d=-3<0$

2.3 Término general

En las progresiones aritméticas podemos calcular el **término general** directamente. Por definición, cada término es igual al anterior más una constante d, por lo que se tiene:

$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$
....

Nos fijamos que cada término es igual a a_1 mas la constante d cuyo coeficiente coincide con el subíndice del término anterior, de aquí podemos deducir:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)d}$$

Actividad:

1. Halla el noveno término de una progresión aritmética $\{7,\ 10,\ 13,\ 16,\dots\}$

2. Calcula la diferencia de una progresión aritmética donde $a_1 = 3$ y $a_6 = 8$.

3. El quinto término de una progresión aritmética es 7 y el séptimo término es $\frac{25}{3}$. Halla la diferencia.

4. ¿Cuál es el término general de una progresión aritmética cuyo primer término es 2 y el a_{11} es 52?

5. La suma del segundo y el undécimo término de una progresión aritmética vale 46, el cuarto término tiene un valor de 13. Halla a_1 y d.

2.4. Suma de términos

Queremos encontrar una fórmula que nos permita sumar los n primeros términos de una sucesión aritmética, es decir:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

(donde S_n denota la suma de los n primeros términos)

Para ello vamos a utilizar la idea puesta en práctica por Gauss cuando contaba con 10 años.

Vamos a sumar los 100 primeros números naturales, es decir:

$$\begin{array}{l} S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

Hemos escrito la suma S, y después la misma suma en orden inverso. Sumamos las dos expresiones y cada suma parcial suma 101. El sumando 101 aparece 100 veces, luego se tiene:

$$2S = 100 \cdot 101 \Rightarrow S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Vamos a llevar este ejemplo a cualquier progresión aritmética, sumando los primeros n términos de la sucesión:

Consideramos la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

(donde S_n denota la suma de los n primeros términos)

Utilizando la definición de cada término de una progresión aritmética tenemos:

$$S_n = a_1 + \underbrace{a_1 + d}_{a_2} + \underbrace{a_1 + 2d}_{a_3} + \underbrace{a_1 + 3d}_{a_4} + \dots + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n}$$

Podemos expresar la suma en orden inverso (ya que cada término es igual al siguiente menos d)

$$S_n = a_n + \underbrace{a_n - d}_{a_{n-1}} + \underbrace{a_n - 2d}_{a_{n-2}} + \underbrace{a_n - 3d}_{a_{n-3}} + \dots + \underbrace{a_n - (n-1)d}_{a_1}$$

Sumamos las dos expresiones anteriores miembro a miembro:

$$\begin{array}{l} Sn = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + \dots + a_1 + (n-1)d \\ \underline{Sn = a_n + a_n - d + a_n - 2d + a_n - 3d + \dots + a_n - (n-1)d} \\ 2Sn = (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + \dots + (a_1+a_n) \end{array}$$

$$2Sn = n\,(a_1+a_n) \Rightarrow \boxed{\mathbf{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}}$$

Ejemplo:

Dada la sucesión 2, 4, 6, 8, 10, ... calcula el término general, el octavo término y la suma de los ocho primeros términos.

Observamos que es una progresión aritmética de diferencia d = 2, para calcular el término general aplicamos la fórmula:

$a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)2 = 2 + 2n - 2 = 2n \Rightarrow a_n = 2n$ término general

$a_8 = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow a_8 = 16$ (al tener la fórmula del término general para calcular cualquier término sólo tenemos que sustituir la n por el término que queramos calcular, en este caso por 8)

$S_8 = \dfrac{8(2+16)}{2} = \dfrac{8 \cdot 18}{2} = \dfrac{144}{2} = 72 \Rightarrow$ la suma de los ocho primeros términos de la sucesión es 72

Comprueba este resultado calculando dichos términos y realizando la suma

Ejemplo:

Las edades de cuatro hermanos forman una progresión aritmética, y su suma es 32 años. El mayor tiene 6 años más que el menor. Halla las edades de los cuatro hermanos.

- Como las edades de los cuatro suman 32 años, el dato que da el problema es:

$$S_4 = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 32$$

- Como son cuatro hermanos, se tienen cuatro términos de la progresión aritmética a_1, a_2, a_3, a_4

- El mayor a_4 es 6 años mayor que el menor a_1 teniendo la ecuación:

$$a_4 = 6 + a_1$$

- Al ser una progresión aritmética $a_4 = a_1 + 3d$ donde d es la diferencia teniendo que resolver el sistema:

$\begin{cases} a_4 = 6 + a_1 \\ a_4 = a_1 + 3d \end{cases} \Rightarrow$ utilizamos el método de igualación y se tiene $6 + a_1 = a_1 + 3d$

$\Rightarrow 6 = 3d \Rightarrow d = 2$

- Como d=2 y $S_4 = 32$, se tiene:

$S_4 = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{4(a_1 + a_4)}{2} = 32$ y como $a_4 = 6 + a_1$ utilizamos el método de sustitución, resultando la siguiente ecuación:

$$\frac{4(a_1 + a_4)}{2} = 32 \Rightarrow \frac{4(a_1 + 6 + a_1)}{2} = 32 \Rightarrow 4(6 + 2a_1) = 64 \Rightarrow$$

$$6 + 2a_1 = 16 \Rightarrow 2a_1 = 10 \Rightarrow a_1 = 5$$

- Sabiendo que d=2 y que $a_1 = 5$, podemos calcular todos los términos de la sucesión, es decir las edades de los cuatro hermanos:

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = a_1 + d = 5 + 2 = 7$$
$$a_3 = a_2 + d = 7 + 2 = 9$$
$$a_4 = a_3 + d = 9 + 2 = 11$$

- Las edades de los cuatro hermanos son 5, 7, 9 y 11.

- Comprobamos:
  - La suma de los cuatro debe ser 32:
    5+7+9+11=32
  - El mayor tiene 6 años más que el menor:

    El mayor tiene 11 años que efectivamente son 6 años más que el menor que tiene 5 años.

Actividad:

6. Eduardo sale en bicicleta todos los días, de modo que cada día recorre 3 km más que el día anterior. Si el quinto día ha recorrido 24 km, ¿cuántos kilómetros recorrió el primer día? Calcula el término general.

7. En un jardín hay 6 filas de árboles. Cada fila tiene 3 árboles más que la anterior. La fila tercera tiene 11 árboles. Halla los árboles que hay en la primera fila, en la última y el número total de árboles.

8. Una persona compra a plazos un televisor. El primer mes paga 132 euros, el segundo 120 euros, el tercero 108 euros, hasta el último mes que paga 24 euros, con lo que el televisor queda totalmente pagado. ¿Cuántos meses fueron necesarios para pagar el televisor?

9. Una persona compra a plazos un televisor. El primer mes paga 132 euros, el segundo 120 euros, el tercero 108 euros, hasta el último mes que paga 24 euros, con lo que el televisor queda totalmente pagado. ¿Cuántos meses fueron necesarios para pagar el televisor?

10. Un carro que baja por un plazo inclinado recorre un metro en el primer segundo, 3 metros en el segundo segundo, 5 metros en el tercero y así sucesivamente. Se desea saber:
   a) ¿Cuánto recorrerá en los 30 primeros segundos?
   b) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer los 2.500 m que tiene de longitud el plano inclinado?

11. En una progresión aritmética, la suma de todos ellos es 176 y la diferencia entre los extremos es 30, ¿cuál es la progresión de 11 términos?

3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Consideramos la sucesión:

3, 6, 12, 24, ...

si nos fijamos cada término se consigue multiplicando al anterior por la constante 2, es decir:

$$6 = 3 \cdot 2$$
$$12 = 6 \cdot 2$$
$$24 = 12 \cdot 2$$

a esa constante fija que multiplicamos se le llama **razón** (por ser la división de cada término entre el anterior) y se le representa por “r”. Podemos definir:

3.1. Definición

Una progresión geométrica es una sucesión de números reales en la que cada uno de los términos (exceptuando el primero) se obtiene multiplicando el anterior por una constante r, que se denomina razón de la progresión.

Ejemplo

1, 2, 4, 8, 16, … progresión geométrica de razón r = 2

3.2. Clasificación

En el ejemplo 3, 6, 12, 24, … r=2>1 y como cada término es mayor que el anterior, la sucesión es estrictamente creciente

Ejemplo:

Consideramos los siguientes ejemplos:

a) $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

b) 4, -8, 16, -32,

¿Cuánto vale en cada caso r?
¿Es estrictamente creciente?
¿Es estrictamente decreciente?
¿Qué se puede deducir?

a) Estrictamente creciente

Una progresión geométrica de términos positivos es estrictamente creciente si la razón es mayor que 1.

Ejemplo

3, 6, 12, 24, …

progresión geométrica estrictamente creciente de razón r=2>1

b) Estrictamente decreciente

Una progresión geométrica de términos positivos es estrictamente decreciente si la razón está comprendida entre 0 y 1.

Ejemplo

1, 1/2, 1/4, 1/8,...

progresión geométrica estrictamente decreciente de razón r=1/2 (comprendida la razón entre 0 y 1)

c) Oscilante

Una progresión geométrica es oscilante si la razón es negativa, ya que los términos de la sucesión van cambiando alternativamente de signo.

Ejemplo

3, -6, 12, -24,...

progresión geométrica oscilante de razón r=- 2<0

3.3. Término general

En las progresiones geométricas podemos calcular el término general directamente. Por definición, cada término es igual al anterior por una constante r, por lo que se tiene:

$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1r$
$a_3 = a_2r = a_1rr = a_1r^2$
$a_4 = a_3r = a_1r^2r = a_1r^3$
....

Nos fijamos que cada término es igual a a_1 que multiplica a la constante r elevada al subíndice del término anterior, de aquí podemos deducir:

$$\boxed{\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}}$$

Actividad:

12. Calcula el noveno término de una progresión geométrica $\{2,\ 8,\ 32,\ldots\}$

13. El noveno término de una progresión geométrica es $\frac{64}{2187}$ y su razón es $\frac{2}{3}$. Hallar el primer término.

14. Escribe el término general de una progresión geométrica en la que $a_3 = 75$ y $a_4 = 375$.

15. Calcula la razón y el término general de la progresión geométrica definida por $a_2 = 20$ y $a_5 = 0'16$.

16. En una progresión geométrica de cuatro términos, la suma de los dos primeros es 2 y la de los dos últimos es 50. Calcular dichos términos.

3.4. Suma de los términos de una progresión geométrica

Queremos encontrar una fórmula que nos permita sumar los n primeros términos de una sucesión geométrica, es decir:

$$Sn = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

Para ello, consideramos el siguiente ejemplo:

“ A Pepe y a Juan les han contado un secreto. Aunque les han pedido que no se lo cuenten a nadie cada uno de ellos pasado un cuarto de hora se lo ha contado a 3 amigos de toda confianza y un cuarto de hora más tarde cada uno de ellos se lo ha contado a otros tres amigos. ¿Cuánta gente lo conocerá pasadas tres horas?

Hagamos un esquema de cuánta gente va conociendo el secreto:

- Primero lo conocen 2 personas.
- Cada una de ellas se lo cuentan a tres es decir a 6 personas que es lo mismo que $2 \cdot 3$
- Cada una de esas 6 se lo cuentan a otras 3, es decir a 18 que es lo mismo que $2 \cdot 3^2$
- Cada una de esas 18 se lo cuentan a otras 3, es decir a 54 que es lo mismo que $2 \cdot 3^3$
- Así sucesivamente.

Nos piden saber cuántas personas lo conocen pasadas 3 horas, o lo que es lo mismo 12 cuartos de hora. El número total de personas se conocerá sumando 13 términos de la sucesión geométrica.

Consideramos $S = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \ldots + 2 \cdot 3^{11} + 2 \cdot 3^{12}$

Consideramos la misma suma pero multiplicada por la razón que en este caso es 3: $3 \cdot S = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \ldots + 2 \cdot 3^{11} + 2 \cdot 3^{12} + 2 \cdot 3^{13}$

Haciendo la resta $3 \cdot S - S$ nos quedará:

$$3 \cdot S = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \ldots + 2 \cdot 3^{11} + 2 \cdot 3^{12} + 2 \cdot 3^{13}$$
$$S = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \ldots + 2 \cdot 3^{11} + 2 \cdot 3^{12}$$

$$3 \cdot S - S = -2 + 2 \cdot 3^{13} \Rightarrow S \cdot (3-1) = 2\left(3^{13} - 1\right) \Rightarrow S = \frac{2\left(3^{13} - 1\right)}{2} = 3^{13} - 1 = 1.594.322$$

de personas lo conocerán pasadas 3 horas

Vamos a llevar este ejemplo a cualquier progresión geométrica, sumando los n primeros términos de la sucesión:

Consideramos la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica, entonces:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

(donde S_n denota la suma de los n primeros términos)

Utilizando la definición de cada término de una progresión geométrica tenemos:

$$Sn = a_1 + \underbrace{a_1 r}_{a_2} + \underbrace{a_1 r^2}_{a_3} + \underbrace{a_1 r^3}_{a_4} + \ldots + \underbrace{a_1 r^{n-1}}_{a_n}$$

Multiplicamos por r, la expresión anterior:

$$r \cdot S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \ldots + a_1 r^n$$

Hacemos la resta rSn – Sn:

$$\begin{array}{l} rSn = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \ldots + a_1 r^n \\ \underline{Sn = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-1}} \\ rSn - Sn = -a_1 + a_1 r^n \end{array}$$

$Sn\ (r - 1) = a_1(r^n - 1) \Rightarrow$ $$\boxed{\mathbf{S_n = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1} = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}}}$$

Ejemplo:

Dada la sucesión 2, 6, 18, 54, ... calcula el término general, el séptimo término y la suma de los siete primeros términos.

Observamos que es una progresión geométrica de razón r = 3, para calcular el término general aplicamos la fórmula:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ término general

$a_7 = 2 \cdot 3^6 \Rightarrow a_8 = 2 \cdot 729 = 1458 \Rightarrow a_8 = 1458$ (al tener la fórmula del término general para calcular cualquier término sólo tenemos que sustituir la n por el término que queramos calcular, en este caso por 7)

$S_7 = \dfrac{a_7 r - a_1}{r - 1} = \dfrac{1458 \cdot 3 - 2}{2} = \dfrac{4372}{2} = 2186 \Rightarrow$ la suma de los siete primeros términos de la sucesión es 2186

Compruébalo.

Ejemplo:

Halla los ángulos de un cuadrilátero sabiendo que están en progresión geométrica y que el mayor es 27 veces el menor.

- Sabemos que en un cuadrilátero los ángulos suman 360º, podemos plantear la primera ecuación de la forma:

  $S_4 = 360 \Rightarrow$ como es una progresión geométrica se tiene:

  $$S_n = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1} = \frac{a_n r - a_1}{r - 1} = 360$$

- Como un cuadrilátero tiene 4 ángulos tenemos cuatro términos a_1, a_2, a_3, a_4

- El ángulo mayor es 27 veces mayor que el menor, planteamos la ecuación:

$$a_4 = a_1 \cdot 27$$

- Además $a_4 = a_1 \cdot r^3$, y se tiene el sistema:

$$\begin{cases} a_4 = a_1 \cdot 27 \\ a_4 = a_1 \cdot r^3 \end{cases}$$

Para resolverlo empleamos el método de igualación:

$$a_1 \cdot 27 = a_1 \cdot r^3 \Rightarrow a_1 \cdot 27 - a_1 \cdot r^3 = 0 \Rightarrow a_1\left(27 - r^3\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \text{ imposible} \\ 27 - r^3 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos la ecuación $27 - r^3 = 0 \Rightarrow 27 = r^3 \Rightarrow 3^3 = r^3 \Rightarrow 3 = r$

- Como hemos averiguado que r=3, sustituimos este valor en la ecuación de la suma:

$$S_n = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1} = \frac{a_1\left(3^4 - 1\right)}{3 - 1} = 360 \Rightarrow \frac{a_1(81 - 1)}{2} = 360 \Rightarrow \frac{a_1 \cdot 80}{2} = 360 =$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot 40 = 360 \Rightarrow a_1 = \frac{360}{40} = 9$$

- Sabiendo los valores de $a_1 = 9$ y r=3, calculamos los cuatro ángulos:

$$a_1 = 9$$
$$a_2 = a_1 \cdot r = 9 \cdot 3 = 27$$
$$a_3 = a_2 \cdot r = 27 \cdot 3 = 81$$
$$a_4 = a_3 \cdot r = 81 \cdot 3 = 243$$

- Los cuatro ángulos son: 9º, 27º, 81º y 243º

- Comprobamos:

  - La suma de los ángulos es 360º:

    $9 + 27 + 81 + 243 = 360$

  - El ángulo mayor es 27 veces mayor que el menor:

    $243 = 27 \cdot 9 = 243$

Actividad:

17. Una persona envía una copia de una carta a dos amigos suyos, rogándoles a su vez que cada uno de ellos envíe otra copia a otros dos amigos con el mismo ruego. Después de 12 envíos, ¿cuántas copias se han enviado?

18. La población de una ciudad ha aumentado en progresión geométrica. En 1996 era de 200.000 habitantes y en 1999 de 345.600. Calcula la población en 1997. ¿Cuál es la razón con la que crece la población?

19. Un laboratorio estudia cómo aumenta la cantidad de hierro en el organismo, suministrando dicho componente a una persona con anemia. Observan que es una progresión geométrica donde la razón vale 1´2, y que la suma total, al final del quinto día, de hierro en sangre, es de 1500 mg/l. ¿Qué cantidad de hierro tenía la persona inicialmente?

20. Halla el valor de cada uno de los ángulos de un cuadrilátero, los cuales forman una progresión geométrica y el cuarto es igual a nueve veces el segundo?

21. Una empresa de fabricación de automóviles vende 100.000 automóviles el primer año y cada año triplica sus ventas. ¿Cuántos coches vendió durante los cinco primeros años de funcionamiento?

22. A las ocho de la mañana un alumno de un instituto cuenta un rumor a dos de sus compañeros. Un minuto después cada uno de éstos se lo cuenta a otros dos que no lo conocen y así, sucesivamente, de manera que cada alumno que conoce el rumor lo cuenta una sola vez a dos que no lo conocen. ¿A qué hora conocerán el rumor los 2047 alumnos del centro?

Actividad:

23. Halla término general de las siguientes progresiones indicando si son aritméticas o geométricas:

a) 10, 20, 40, 80, ...
b) – 7, - 4, - 1, 2, 5, ...
c) 1, 2, 3, 4, ...
d) 2, 4, 6, 8, ...
e) 1, 3, 5, 7, 9, ...
f) $5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \ldots$
g) 0, 3, 6, 9, ...
h) 0, 2, 4, 6, ...
i) 2, 4, 8, 16, ...

24. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$
b) $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots$
c) $\frac{4}{9}, \frac{8}{5}, \frac{16}{1}, \frac{32}{-3}, \ldots$

SUCESIONES

- clases
  - Aritméticas
    - Término general: $a_n = a_1 + (n - 1)d$
    - Suma de n términos: $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$
  - Geométricas
    - Término general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
    - Suma de n términos: $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a_n r - a_1}{r - 1}$
- conocidas por
  - Descripción de sus términos
  - Expresión del término general
    - Un término cualquiera viene expresado a través de una fórmula en función del lugar que ocupa
  - Ley de recurrencia

EJERCICIOS

1. Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones siguientes que tienen como término general:

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

b) $a_n = \dfrac{n-1}{n}$

2. Halla la suma de los 12 primeros múltiplos de 5. Siendo el primero 5.

3. Calcula el número de pisos de un hotel sabiendo que la primero planta tiene una altura de 4 m, que la azotea está a 37 m del suelo y que la altura de cada piso es de 2’75m.

4. En una gran ciudad hay una avenida cuya longitud es 4.560 m. Se han colocado dos farolas, una a 20 m del principio de la calle y otra a 20 m del extremo. ¿Cuántas farolas serán precisas colocar entre estas dos si la distancia entre dos consecutivas ha de ser de 40 m?

5. Un afortunado jugador de bingo gana el primer día 30 euros; el segundo día 90 euros; el tercer día, 150 euros, y así, durante seis días. Sabiendo que el primer día jugó 3 euros, el segundo 12 euros, el tercero 48 euros y así sucesivamente, hacer el balance a los seis días.

6. Averiguar la profundidad de un pozo si por perforar el primer metro se han pagado 15 euros y por cada uno de los restantes 5 euros más que por el anterior, sabiendo que el pozo ha costado 510 euros.

7. Un mendigo pidió hospitalidad a un avaro haciéndole la siguiente proposición: Yo le pagare 6 euros el primer día, 12 euros el segundo, 18 euros el tercero y así sucesivamente durante 30 días, en cambio usted me dará 0’01 euro el primer día, 0’02 euros el segundo, 0’04 el tercero y así sucesivamente. El avaro encontró interesante la proposición y consintió en este arreglo. Liquidad la cuenta al cabo de 30 días.

8. ¿Cuál es la razón de una progresión geométrica de 9 términos, sabiendo que $a_9 = 192$ y $a_1 = 12$? Calcula la suma de sus términos y el quinto término.

9. El perímetro de un triángulo rectángulo es 1’8m. Calcula la longitud de sus lados sabiendo que están en progresión aritmética.

10. Calcula la distancia que recorre un peón que arroja un cubo de agua en cada uno de los 30 árboles de un lado de la calzada, sabiendo que el primer árbol dista del pozo 10 m. Y entre sí distan 6 m. Y al final deja el cubo al lado del pozo.

11. Un coronel que manda 2.485 soldados los quiere formar en triángulo, de tal forma, que la primera fila tenga un soldado, la segunda 2, la tercera 3, y así sucesivamente. ¿Cuántas filas podrá formar?

12. En una población que cuenta con 29524 habitantes mayores de siete años, uno de ellos se entera de una noticia en un cierto instante. Al cabo de un minuto lo ha comunicado a tres de sus amigos. Cada uno de estos lo comunica en otro minuto a otra tres personas distintas, las cuales continúan extendiendo la noticia de igual modo, y así sucesivamente. ¿Al cabo de cuanto tiempo se habrán enterado todos los habitantes mayores de siete años?

13. Un avión de papel avanza en línea recta y cada segundo progresa la mitad de lo recorrido en el segundo anterior. Si sabes que en el primer segundo avanzó 10m. ¿Llegará a tocar una pared que está a 18m de distancia?

14. Halla el término general y el 50 de las siguientes sucesiones:

a) $\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{6}{13}, \frac{8}{17}, \ldots$

b) $\frac{3}{5}, 1, \frac{9}{7}, \frac{12}{8}, \ldots$

c) $\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{10}, \frac{5}{12}, \ldots$

15. ¿Cuánto dinero llevó Mercedes a sus vacaciones si el primer día gastó 200 euros, cada día que pasaba gastaba menos a razón de 5 euros diarios y el dinero le duró 20 días?

16. Carlos quiere colocar su colección de 5050 soldados de plomo en un tablero formando un triángulo de la siguiente manera: en la primera coloca uno, en la segunda dos, en la tercera tres, y así sucesivamente. ¿Cuántas filas tendrá el triangulo?

17. Calcular las medidas de un triángulo rectángulo sabiendo que sus longitudes están en progresión aritmética y que el menor de todos ellos mide 3 cm.

18. La suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica es 728, y dos de ellos consecutivos son 18 y 54. Calcular el primero y el sexto términos, así como la razón.

19. En un parque hay 50 filas de árboles y se sabe que la diferencia entre el número de árboles de una fila y el del anterior es constante y además que en la fila ocho hay 41 árboles y en la quince 62. Hallar:

a) La diferencia entre el número de árboles de dos filas consecutivas.

b) Valor de la plantación si cada árbol vale 2 euros.

20. Los tres primeros términos de una progresión aritmética son 12, 16 y 20. Calcular el número de términos que hay que añadirle para que la suma total sea 300.

21. Halla el cuarto término de una progresión aritmética, sabiendo que el séptimo es nueve veces el primero y que la suma de los siete primeros términos es 105.

22. ¿Cuántos términos de la progresión 3, 1, -1, -3, -5,… se deben tomar para que la suma sea -140?

23. Sabiendo que la diferencia de una progresión aritmética es 3 y que la suma de los 25 primeros términos es 29 veces el último, calcular este y el primero.

24. Una empresa compra a plazos una mercancía por 620€ se compromete a pagar 60€ el primer mes, 65€ el segundo mes y así sucesivamente con un aumento constante por mes de 5€. ¿Cuántos meses necesitara para pagar la mercancía?

25. ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 es preciso tomar para que su suma sea igual a 1521?

26. Pepe y Juan deciden apuntarse al maratón de su ciudad. Con el fin de conseguir una buena forma física, deciden realizar el siguiente entrenamiento: recorrer el primer día 4km e ir aumentando sucesivamente 3km cada día. Busca una expresión que nos dé los kilómetros recorridos según el número de días.

27. Se ha remodelado una carretera entre dos ciudades y se quieren situar 5 gasolineras en ella. En el kilómetro 135 se sitúa la primera y en el kilómetro 335 se localiza la última gasolinera. ¿Dónde deberán situarse las otras gasolineras si las cinco deben encontrarse a la misma distancia?

28. En el año 1970 por el alquiler de una casa se acuerda pagar 15000 pesetas al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 6000 pesetas mensuales. ¿Cuánto dinero se pagará mensualmente en el año 1990? ¿Cuánto dinero se habrá pagado desde el inicio del alquiler hasta el final del año 2000?

29. Un coche deportivo costó inicialmente 48000€. Al cabo de dos años se vendió por la mitad de precio; pasados otros dos años se volvió a vender a la mitad de l último precio, y así sucesivamente. ¿Cuánto le costó el coche al décimo propietario? ¿Qué cantidad se pago en total por los seis primeros propietarios?

30. Se cuenta que hace muchos años un tratante de ganado propuso a un señor el siguiente negocio: "Yo le vendo este caballo a condición de que usted me pague un céntimo por el primer clavo de la herradura del caballo, dos céntimos por el segundo clavo, cuatro por el tercero, y así sucesivamente hasta llegar al clavo 32, que es el último" Averigua el precio del caballo.

31. En el laboratorio de Ciencias Naturales se realiza un experimento para observar el crecimiento de las bacterias XY34 que se reproducen por bipartición (es decir, cada bacteria al cabo de 30 segundos se divide en dos nuevas bacterias). Partiendo a las doce del mediodía de un cultivo de 100 bacterias, intenta escribir la cantidad de bacterias que debe haber al cabo de medio minuto, un minuto y cinco minutos. ¿Cuántas bacterias habrá aproximadamente a las doce y media?

32. Halla el término general y el décimo término de las siguientes sucesiones indicando si alguna de ellas es progresión:

- **a)** 128, 64, 32, ...
- **b)** 72, 68, 64, ...
- **c)** 24, 48, 96, ...
- **d)** 3, 7, 11, ...

33. Halla el quinto término de una progresión geométrica si $a_1 = 2$ y $r = \frac{1}{3}$, y la suma de los cinco primeros términos.

34. En una progresión geométrica el quinto término es 81 y el segundo es -3. Halla el término general.

35. ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica si $a_1 = 7$, el último 448 y su suma 889?

36. En una granja hay 200 pollos y cada día nacen 15. ¿Cuántos hay al cabo de 20 días si no ha muerto ninguno?

37. Alberto decide ahorrar y guarda en la hucha 1€ la primera semana, 1'25€ la segunda y 1'5€ la tercera y asi sucesivamente. ¿Cuánto tiene ahorrado al cabo de 20 semanas?

38. Un buscador de oro encuentra el primer día 3 g de dicho metal y cada día consigue doble cantidad que el día anterior. ¿Cuánto oro reunió en 15 días?

39. En una prueba de laboratorio se ha comprobado que el número de bacterias crece en progresión geométrica a medida que pasan los días. Si al iniciarse el experimento había 250.000 y el sexto día 8.000.000, ¿cuántas bacterias había los días 2º, 3º, 4º y 5º?

40. En cierta ciudad un ciudadano se enteró casualmente de un chisme sobre el alcalde. Al cabo de una hora lo había contado a otras 5 personas. Cada una de estas, a su vez, lo cuenta a otras 5 en la siguiente hora y así sucesivamente. ¿Cuántos habitantes conocían el chisme al cabo de 7 horas?

41. Un caminante ha de recorrer 500 Km. El primer día hace 10 Km. Y va aumentando cada día 2 Km. Más. ¿Cuánto tardará en hacer los 500 Km.?

CUESTIONES

1. Comprueba cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones y, las que lo sean, indica si son aritméticas o geométricas:
- **a)** -3, 0, 6, 9...
- **b)** 2, 4, 7, 11, 16...
- **c)** 7, 5, 3, 1, -1, -3...
- **d)** 5, 15, 45, 135...
- **e)** 2, 4, 8, 24, 96...
- **f)** $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81} \ldots$

2. Halla los siete primeros términos de una progresión aritmética:
- **a)** Cuyo primer término es 5 y su diferencia 3.
- **b)** Cuyo primer término es – 4 y su diferencia 2.
- **c)** Cuyo tercer término es 7 y su diferencia 3.
- **d)** Cuyo quinto término es 17 y su diferencia – 3.

3. Halla el término general de una progresión aritmética si su primer término es 5 y su diferencia es 3.

4. Halla el término general de una progresión aritmética si sus dos primeros términos son 4 y 9. Halla también el vigésimo término y la suma de los veinte primeros.

5. Entre las siguientes progresiones, identifica las aritméticas y las geométricas. Indica en cada caso cuál es la diferencia o la razón:

a) 2, 4, 8, 16...
b) 4, 12, 36, 108...
c) 20, 40, 60, 80...
d) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81} \ldots$
e) 2, -4, 8, -16, 32...
f) 6, 3, $\frac{3}{2}, \frac{3}{4} \ldots$
g) 2, -2, 2, -2...
h) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4 \ldots$

6. Halla el término general de una progresión geométrica de razón 3 y cuyo primer término es 2. Halla también el séptimo término.

7. Halla el término general de una progresión geométrica cuyo segundo y tercer término son 6 y 12, respectivamente. ¿Cuál es su octavo término?

8. Construye la progresión geométrica que empieza por 25 y en la que cada término es los 2/5 del anterior.

9. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica de razón 3 sabiendo que su primer término es 1/9.

10. Halla el término general de las sucesiones:

a) -3, -1, 1, 3, 5...
b) 1, 8, 27, 64...
c) 2, 5, 10, 17, 26...
d) $\frac{1}{3}, \frac{8}{5}, \frac{27}{7}, \frac{64}{9} \ldots$
e) $\frac{3}{-3}, \frac{6}{1}, \frac{9}{5}, \frac{12}{9}, \frac{15}{13} \ldots$
f) -1, 2, -3, 4, -5...
g) $\frac{5}{3}, \frac{10}{4}, \frac{17}{5}, \frac{26}{6}, \frac{37}{7} \ldots$

11. Halla los términos 4º y 7º de las sucesiones cuyo término general es:

a) $\frac{n^2 - 3}{n + 1}$
b) $(-1)^n (n + 3)$

12. Halla los cinco primeros términos de las sucesiones cuya ley de recurrencia es:

a) $a_1 = 2;\ a_n = a_{n-1} + 2n\ (n > 1)$

b) $a_1 = a_2 = 1;\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \ (n > 2)$

13. Comprueba que la sucesión de término general $a_n = 4n - 5$ es una progresión aritmética y halla su diferencia.
¿Es 395 un término de la progresión? ¿Qué lugar ocupa?
¿Es 900 un término de la progresión?

14. Escribe una progresión aritmética cualquiera. Después multiplica cada término por un número distinto de cero. Prueba que obtienes otra progresión aritmética indicando la nueva diferencia.

15. Indica si es cierta o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Las progresiones aritméticas son siempre crecientes, es decir, cada término es mayor que el anterior.

b) Las sucesiones constantes como 5, 5, 5, 5, 5... se pueden considerar como progresiones aritméticas y como progresiones geométricas.

16. Considera las progresiones aritméticas:

$a_n = \{4,7,10,13,16,19,22,25\}$

$b_n = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$

a) Escribe las progresiones opuestas, es decir, $-a_n$ y $-b_n$. Comprueba que también son progresiones aritméticas. ¿Cuál es la diferencia de cada una?

b) Suma $a_n + b_n$ sumando los términos del mismo orden. ¿Es la suma otra progresión aritmética?

c) ¿Cuál es la diferencia de la progresión $a_n - b_n$?

17. Estudia si son crecientes o decrecientes las siguientes sucesiones de término general:

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$

b) $b_n = (-1)^{2n+1}$

c) $c_n = 0$

d) $d_n = \dfrac{n}{n+1}$

18. ¿Existe una progresión aritmética que empiece por 5 y cuyo sexto término sea 7?

UNIDAD 6

TRIGONOMETRÍA

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1. (**)Expresar los ángulos tanto en radianes como en grados sexagesimales.
2. Deducir las razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.
3. (**)Estudiar el signo de las diferentes razones trigonométricas.
4. Conocer la relación entre las razones trigonométricas del mismo ángulo.
5. Deducir a partir de sus lados las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
6. (**)Deducir las razones trigonométricas de un ángulo a partir de una dada.
7. (**)Resolver triángulos rectángulos.
8. (**)Reconocer las relaciones que existen entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, ángulos que difieren en 180º y opuestos.
9. Reducir el cálculo de las razones trigonométricas de cualquier ángulo a las de un ángulo del primer cuadrante.
10. Deducir qué ángulos tienen el mismo seno, coseno y tangente.
11. Resolver polígonos regulares y triángulos isósceles.

** Indica objetivo mínimo

Esquema:

1. Introducción.

2. Unidades para medir ángulos.

3. Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

4. Signo de las razones trigonométricas.

5. Relaciones trigonométricas.
    - 5.1. Relaciones inversas.
    - 5.2. Relación pitagórica
    - 5.3. Relación entre las razones trigonométricas

6. Razones trigonométricas de 30º, 60º y 45º
    - 6.1. Ángulos 30º y 60º
    - 6.2. Ángulo 45º

7. Resolución de triángulos.

8. Reducción al primer cuadrante.
    - 8.1. Ángulos que pertenecen al 2º cuadrante.
    - 8.2. Ángulos que pertenecen al 3º cuadrante.
    - 8.3. Ángulos que pertenecen al 4º cuadrante.
    - 8.4. Reducción a ángulos comprendidos entre 0º y 45º.
    - 8.5. Ángulos mayores que 360º.

9. Resolución de triángulos equiláteros e isósceles.

10. Resolución de polígonos regulares.

1. INTRODUCCIÓN

El origen de la palabra trigonometría proviene del griego. Es la composición de dos palabras griegas trigonon (triángulo) y metron (medida), luego trigonometría es la medida de los triángulos.

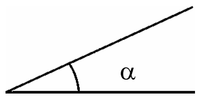
Aunque el origen de la trigonometría se remonta a las Matemáticas Egipcias y Babilonias, consideran a Hiparco, astrónomo de Nicea (Turquía) como el padre de la trigonometría debido principalmente a sus hallazgos de algunas relaciones entre lados y ángulos de un triángulo.

El estudio de la trigonometría no limita sus aplicaciones a la resolución de triángulos que utilizan sobre todo en geometría, navegación, astronomía; sino también para el tratamiento matemático en el estudio del movimiento ondulatorio, vibraciones, sonido, corriente alterna, termodinámica, investigación atómica.

2. UNIDADES PARA MEDIR ÁNGULOS

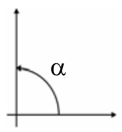
La trigonometría se encarga de estudiar las relaciones entre lados y ángulos.

Se define **ángulo** como la parte del plano limitada por 2 semirrectas del mismo origen.



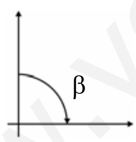
Puede ser medido en grados sexagesimales o en radianes.

Se consideran ángulos con sentido positivo si el sentido de su recorrido es contrario al de las agujas del reloj.



$\alpha > 0$ positivo

Se consideran ángulos con sentido negativo si el sentido de su recorrido coincide con el de las agujas del reloj.

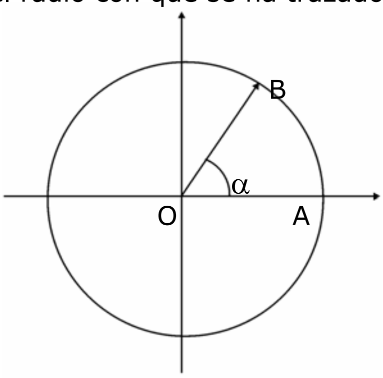


$\beta < 0$ negativo

La medida oficial de los ángulos es el radián.

Un radián es la medida de un ángulo central al que corresponde un arco de igual longitud que el radio con que se ha trazado. $\overline{OA} = \overline{OB} = \overset{\frown}{AB}$

1 rad $\cong 57^\circ$



Donde α = 1 rad

La relación fundamental para pasar de grados a radianes o viceversa es la siguiente:

$$\mathbf{2\pi \text{ rad} = 360^\circ \Rightarrow \pi \text{ rad} = 180^\circ}$$

Los más conocidos:

360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	0°
2π	$3\pi/2$	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

Ejemplo:

a) Dado el ángulo 210º ¿cuántos radianes son?

Hacemos una regla de tres: 180º ———— **π** rad
210º ———— x rad

$$x = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6}\text{rad}$$

b) Dado el ángulo $\frac{3\pi}{5}$ rad ¿cuántos grados son?

Hacemos una regla de tres: **π** rad ———— 180º
$\frac{3\pi}{5}$ rad ———— xº

$$x = \frac{\frac{3\pi}{5}\cdot 180}{\pi} = \frac{3\cdot 180}{5} = 108^\circ$$

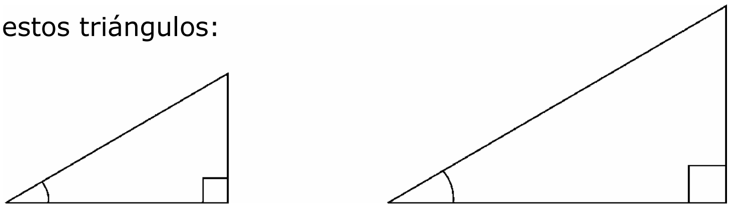
Actividad:

1. Expresar los siguientes ángulos tanto en radianes como en grados.

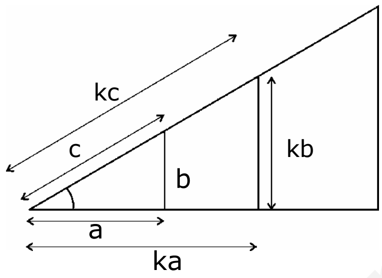
a) $\alpha = 3$ rad
b) $\alpha = 2'5$ rad
c) $\alpha = \frac{7\pi}{2}$ rad
d) $\alpha = 0'5$ rad
e) $\alpha = 45^\circ$
f) $\alpha = 210^\circ$
g) $\alpha = 315^\circ$
h) $\alpha = 240^\circ$

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Observa estos triángulos:

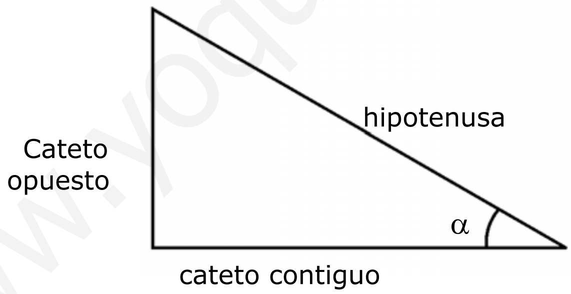


Los ángulos de estos triángulos son iguales, pero ¿cómo son los lados? ¿existe relación entre ellos? Vamos a observar esa relación en el siguiente dibujo



Si en un triángulo rectángulo mantenemos los ángulos pero agrandamos sus lados, estos son proporcionales (estamos hablando de triángulos semejantes) y las divisiones posibles que se pueden hacer entre sus lados se mantienen constantes. Puedes comprobarlo con el dibujo anterior.

A las razones entre los lados de un triángulo rectángulo se les llama razones trigonométricas. (Se pueden establecer seis razones)



Definimos:

Seno del ángulo α: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

Coseno del ángulo α: $\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$

Tangente del ángulo α: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$

De aquí deducimos:

$$tg\alpha = \frac{cateto \quad opuesto}{cateto \quad contiguo} = \frac{\frac{cateto \quad opuesto}{hipotenusa}}{\frac{cateto \quad contiguo}{hipotenusa}} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{\mathbf{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}}}$$

Sus inversas son:

Cosecante del ángulo α: $\cos ec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto \quad opuesto}$

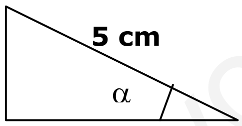
Secante del ángulo α: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto \quad contiguo}$

Cotangente del ángulo α: $\cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{cateto \quad contiguo}{cateto \quad opuesto}$

Ejemplo:

Calculamos las razones trigonométricas del ángulo α

3 cm



4 cm

Primero identificamos respecto al ángulo:

- Cateto opuesto: 3 cm
- Cateto contiguo: 4 cm
- Hipotenusa: 5 cm

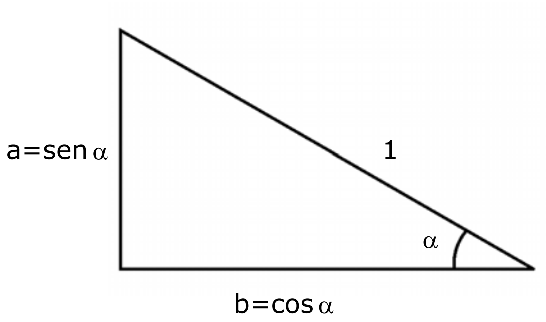
$$sen\alpha = \frac{cateto \quad opuesto}{hipotenusa} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos ec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{5}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto \quad contiguo}{hipotenusa} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{5}{4}$$

$$tg\alpha = \frac{cateto \quad opuesto}{cateto \quad contiguo} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{4}{3}$$

a) Dibuja un triángulo cuya hipotenusa valga 5.
b) Dibuja un triángulo cuyo coseno valga 0'7

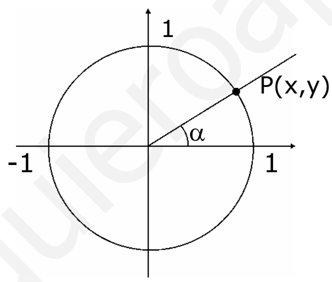
Estas proporciones permanecen invariables en cualquier triángulo rectángulo en el que esté el ángulo α, luego podemos considerar el más cómodo que será el de hipotenusa igual a 1 y así las razones trigonométricas quedarán más visibles.



$$\text{sen}\alpha = \frac{a}{1} = a$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{1} = b$$

A partir de ahora vamos a considerar la circunferencia de radio 1, llamada circunferencia goniométrica o unidad.

Consideramos la circunferencia goniométrica, es decir de radio 1, donde el centro de la circunferencia está situado en el origen de unos ejes de coordenadas, construimos un ángulo α el cual determina un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa coincide con el valor del radio, es decir 1 y los catetos tienen el valor de las coordenadas del punto P(x,y) donde x será el cateto contiguo y la y el cateto opuesto.



Aplicando la definición, las razones trigonométricas quedarían expresadas:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{1} = y \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{1} = x \qquad \sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$

Tanto el seno y el coseno toman valores entre –1 y 1 ambos incluidos (ya que en un triángulo los lados son siempre menores que la hipotenusa)

Actividad:

2. En un triángulo rectángulo, los dos catetos miden 5 y 12 cm. Calcula las razones trigonométricas de los dos ángulos agudos.

3. Calcula las alturas de los triángulos equiláteros cuyos lados miden:
   - **a)** 10 cm
   - **b)** 50 cm

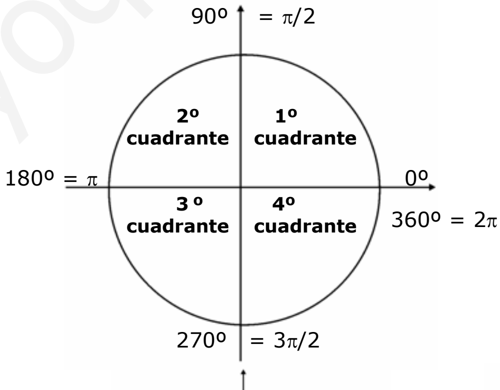
4. Calcula el lado de un triángulo equilátero cuya altura vale:
   - **a)** 12 cm
   - **b)** 33 cm

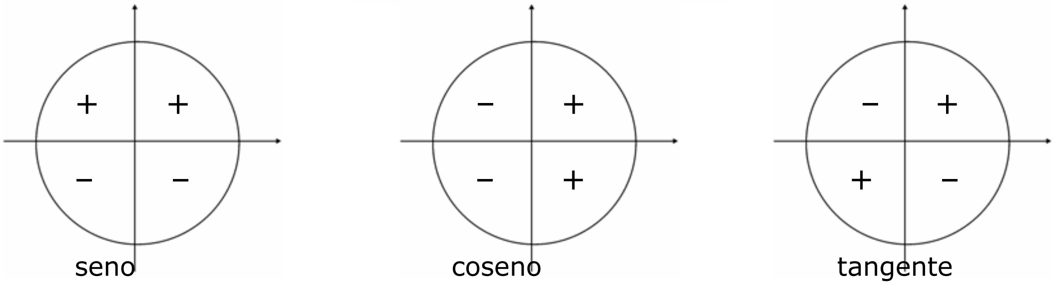
5. Halla el lado del cuadrado cuya diagonal vale:
   - **a)** 12 cm
   - **b)** 32 cm

6. Halla, en los casos siguientes, las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es $\hat{A}$.
   a. b = 3 cm y c = 4 cm
   b. a = 25 cm y c = 24 cm
   c. a = 8 cm y b = 7 cm

4. SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Los signos de las razones trigonométricas vienen dadas por los signos de las coordenadas del punto P(x,y), es decir el signo lo determinará el cuadrante donde se encuentre el punto.





seno
cosecante

coseno
secante

tangente
cotangente

Ejemplo:

¿Qué signo tienen las razones trigonométricas de los ángulos 30º, 335º, 260º y 135º?

a) 30º está en el primer cuadrante, luego las seis razones trigonométricas serán positivas.

b) 335º está en el cuarto cuadrante:
Serán positivas: coseno y secante
Serán negativas: seno, cosecante, tangente y cotangente.

c) 260º está en el tercer cuadrante:
Serán positivas: Tangente y cotangente.
Serán negativas: seno, cosecante, coseno y secante.

d) 135º está en el segundo cuadrante:
Serán positivas: seno y cosecante
Serán negativas: coseno, secante, tangente y cotangente.

Actividad:

7. Averigua los signos que corresponden a las razones trigonométricas de los ángulos 130º, 220º, 179º, 299º, 91º, 355º, 18º y 272º.

8. ¿Qué signo tienen las tangentes de los ángulos siguientes?
a) $\alpha = 123º$ **b)** $\alpha = 222º$
c) $\alpha = 303º$ **d)** $\alpha = 197º$

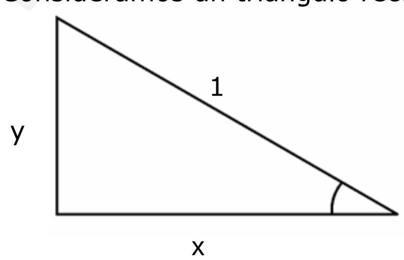
5. RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

5.1. *Relaciones inversas*

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1$$
$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$$
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1$$

5.2. *Relación pitagórica*

Consideramos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea igual a 1:



$$\operatorname{sen}\alpha = y$$
$$\cos\alpha = x$$

por Pitágoras se tiene:

$$1 = x^2 + y^2$$

Luego se tiene la relación fundamental:

$$\boxed{\mathbf{1} = \mathbf{sen}^2\alpha + \mathbf{cos}^2\,\alpha}$$

5.3. Relación entre las razones trigonométricas

- De la definición de tangente podemos deducir:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}}{\dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{\mathbf{tg}\alpha = \frac{\mathbf{sen}\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha}}$$

- Si dividimos la relación fundamental entre $\cos^2 \alpha$ se tiene:

$$\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\boxed{\mathbf{1} + \mathbf{tg}^2\alpha = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2\,\alpha}}$$

- Si dividimos la relación fundamental entre $\mathrm{sen}^2\alpha$ se tiene:

$$\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\mathrm{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\alpha} \Rightarrow 1 + \cot g^2\alpha = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\alpha}$$

$$\boxed{\mathbf{1} + \mathbf{cot\,g}^2\alpha = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen}^2\alpha}}$$

A partir de estas fórmulas conociendo una sola podemos calcular todas las demás, teniendo en cuenta el signo de cada una de ellas que se determinará dependiendo del cuadrante en el que se encuentre el ángulo

Ejemplo:

Si $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ y el ángulo está en el cuarto cuadrante calcular el resto de las razones trigonométricas.

Al estar en el cuarto cuadrante:

- Razones positivas: coseno y secante
- Razones negativas: seno, cosecante, tangente y cotangente

- Como sabemos el valor del coseno primero hallaremos su inversa:

$$\sec\alpha = \frac{5}{4}$$

- Utilizamos la relación fundamental para hallar el seno:

$$1 = \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \Rightarrow 1 = \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow 1 = \text{sen}^2\alpha + \frac{16}{25} \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow$$

$\text{sen}^2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$ como el ángulo está en el cuarto cuadrante, sabemos que debe ser negativo, se tiene:

$$\text{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$$

- Calculamos la inversa del seno:

$$\text{cosec}\alpha = -\frac{5}{3}$$

- Calculamos la tangente:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{-3}{4}$$

- Calculamos la inversa de la tangente:

$$\text{cotg}\alpha = \frac{-4}{3}$$

Actividad:

9. Halla las razones trigonométricas del ángulo α si $\text{sen}\,\alpha = 0'8$ y $0º < \alpha < 90º$

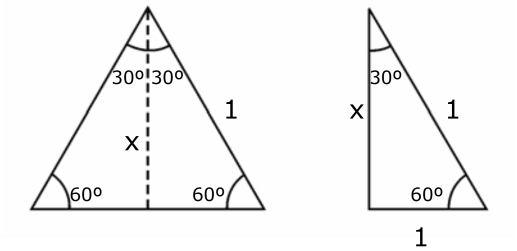
10. Calcula las razones trigonométricas del ángulo α si $\cos\alpha = 0'5$ y $270º < \alpha < 360º$

11. Halla las razones trigonométricas del ángulo α si $\text{tg}\,\alpha = 5$ y $180º < \alpha < 270º$.

6. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30º, 60º Y 45º

6.1. Ángulos de 30º y 60º

Consideramos un triángulo equilátero de lado 1, el cual dividimos en dos triángulos rectángulos iguales, cuyos ángulos miden 30º y 60º.



Por Pitágoras se tiene: $x^2 = c_1^2 + c_2^2$, en este caso se tiene:

$$1^2 = x^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como estamos calculando una medida de un lado, se tiene:

$$x = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Ángulo de 30º:

$$\text{sen}30º = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30º = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 1/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}30º = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Las inversas serán:

$$\sec 30º = \frac{1}{\cos 30º} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cosec}30º = \frac{1}{\text{sen}30º} = 2$$

$$\text{cotg}30º = \sqrt{3}$$

- Ángulo de 60º:

$$\operatorname{sen}60^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}60^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

Las inversas serán:

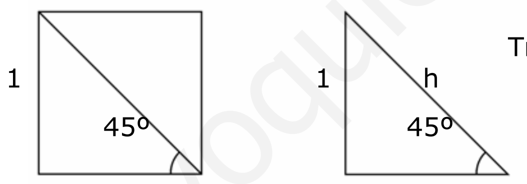
$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$$

$$\operatorname{cosec}60^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen}60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg}60^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg}60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

6.2. Ángulo de 45º

Consideramos un cuadrado de lado 1 y trazamos la diagonal, la cual divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos iguales.



Triángulo rectángulo

Para calcular la diagonal que es la hipotenusa del triángulo rectángulo aplicamos Pitágoras:

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2 \Rightarrow h^2 = 1 + 1 \Rightarrow h = \pm\sqrt{2}$$

Como estamos calculando una medida $h = \sqrt{2}$

$$\operatorname{sen}45^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}45^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{1}{1} = 1$$

Las inversas serán:

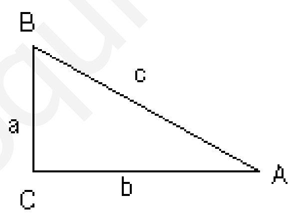
$$\sec 45º = \frac{1}{\cos 45º} = \sqrt{2}$$
$$\operatorname{cosec} 45º = \frac{1}{\operatorname{sen} 45º} = \sqrt{2}$$
$$\operatorname{cotg} 45º = \frac{1}{\operatorname{tg} 45º} = 1$$

Se tiene la siguiente tabla:

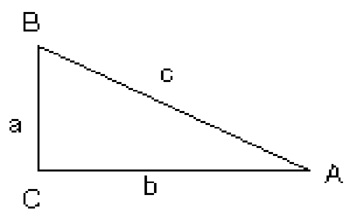
	sen α	cos α	tg α
0º	0	1	0
30º	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90º	1	0	∞
180º	0	-1	0
270º	-1	0	∞

Actividad:

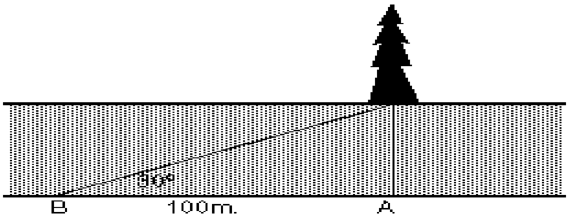
12. Resolver el siguiente triángulo, sabiendo que a=12 y A=30º.



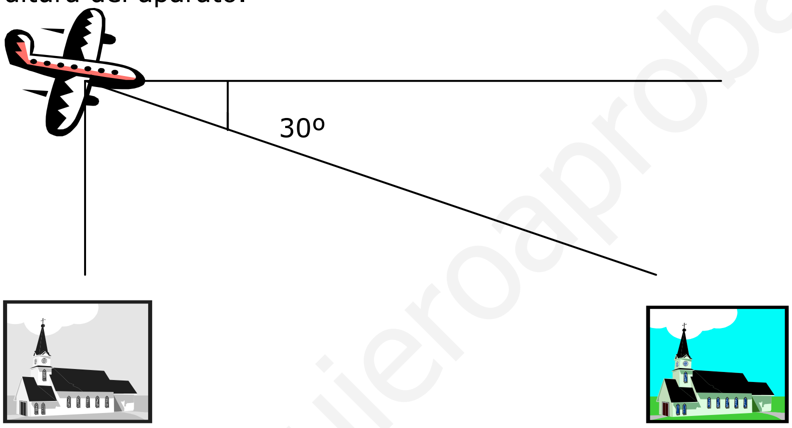
13. Resolver el siguiente triángulo, sabiendo que Â=30º y c=20, sin utilizar la calculadora:



14. Desde un punto A en la orilla de un río se ve un árbol justo enfrente. Si caminamos 100 metros río abajo, por la orilla recta del río, llegamos a un punto B desde el que se ve el pino formando un ángulo de 30º con nuestra orilla. calcular la anchura del río.



15. Cuando un avión está directamente sobre un pueblo A, el ángulo de depresión de la ciudad B, distante 4'5 kilómetros de A, es 30º. Halla la altura del aparato.

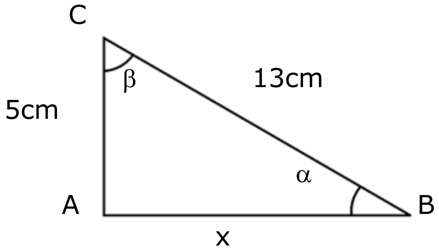


16. La longitud del hilo que sujeta una cometa es de 15 metros. Si el ángulo de elevación de la cometa es de 30º, ¿qué altura alcanza la cometa?

7. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Un triángulo queda determinado si se conocen tres de sus seis elementos (salvo en el caso de que sean los tres ángulos)

7.1. Se conocen un cateto y la hipotenusa



Para calcular el otro cateto utilizamos Pitágoras:

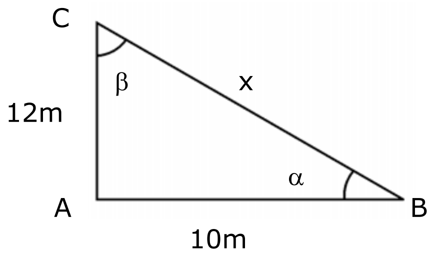
$h^2 = c_1^2 + c_2^2 \Rightarrow 13^2 = x^2 + 5^2 \Rightarrow 169 = x^2 + 25 \Rightarrow x^2 = 169 - 25 \Rightarrow x^2 = 144$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{144} \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$

Para calcular los ángulos utilizamos la definición del seno:

$$\text{sen}\alpha = \frac{5}{13} = 0'3846 \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}0'3846 \Rightarrow \alpha = 22^\circ\, 37'\, 12''$$

$$\beta = 90^\circ - 22^\circ\, 37'\, 12'' = 67^\circ\, 22'\, 48''$$

7.2. *Se conocen los dos catetos*



Para calcular el otro cateto utilizamos Pitágoras:

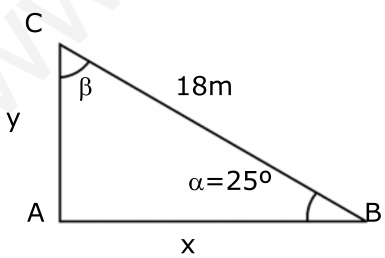
$h^2 = c_1^2 + c_2^2 \Rightarrow x^2 = 12^2 + 10^2 \Rightarrow x^2 = 144 + 100 \Rightarrow x^2 = 244 \Rightarrow x = \pm\sqrt{244}$
$\Rightarrow x = 15'62 \text{ m}$

Para calcular los ángulos utilizamos la definición de la tangente:

$$\text{tg}\alpha = \frac{12}{10} = 1'2 \Rightarrow \alpha = \text{arctg}1'2 \Rightarrow \alpha = 50^\circ\, 11'\, 39''$$

$$\beta = 90^\circ - 50^\circ\, 11'\, 39'' = 39^\circ\, 48'\, 20''$$

7.3. *Se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo*



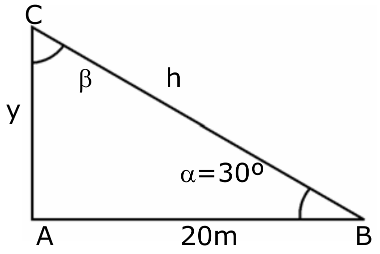
$\beta = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$

Para calcular los catetos utilizamos las definiciones del seno y el coseno:

$$\text{sen}25º=\frac{y}{18}\Rightarrow y=18\cdot \text{sen}25º\Rightarrow y=18\cdot 0'423\Rightarrow y=7'614\text{ m}$$

$$\cos25º=\frac{x}{18}\Rightarrow x=18\cdot \cos25º\Rightarrow y=18\cdot 0'906\Rightarrow y=16'308\text{ m}$$

7.4. Se conocen un cateto y un ángulo agudo



β=90º - 30º = 60º

Para calcular los catetos utilizamos las definiciones del coseno y el tangente:

$$\cos30º=\frac{20}{h}\Rightarrow h=\frac{20}{\cos30º}\Rightarrow h=\frac{20}{\sqrt{3}/2}\Rightarrow h=\frac{40}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{40\cdot\sqrt{3}}{3}\text{ m}$$

$$\text{tg}30º=\frac{y}{20}\Rightarrow y=20\cdot \text{tg}30º\Rightarrow y=20\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y=\frac{20\sqrt{3}}{3}\text{ m}$$

Actividad:

17. Una persona de 175 cm de altura, situada a una distancia de 12m de un árbol, mira al extremo superior de éste formando un ángulo de 30º con la horizontal. ¿Cuál es la altura del árbol?

18. Un poste de 15m de altura se sostiene verticalmente atando su extremo superior con unos cables de 25m que se sujetan al suelo. ¿Qué ángulos forman los cables con el poste?

19. En un triángulo isósceles, los dos ángulos iguales miden 37º y los lados iguales miden 18cm. Calcula la base, la altura y el área del triángulo.

20. Un poste de 6m de altura proyecta una sombra de 8m. Si se unen el extremo superior del poste y el extremo de la sombra, calcula los elementos del triángulo formado.

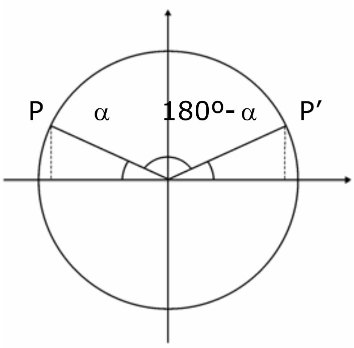
21. Una escalera de 5m de longitud tiene su extremo superior apoyado sobre una tapia a 2’5m de altura. ¿Qué ángulos forma la escalera con la tapia y el suelo?

8. REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Vamos a estudiar las relaciones entre las razones trigonométricas de algunos ángulos. Para ello vamos a considerar la circunferencia goniométrica, es decir, la circunferencia de radio 1. Vamos a calcular las razones de cualquier ángulo conociendo las razones de los ángulos del primer cuadrante, incluso podemos relacionarlos con los ángulos comprendidos entre 0º y 45º.

8.1. Ángulos que pertenecen al 2º cuadrante

Ángulos suplementarios, suman 180º



Como P y P' son simétricos se verifica, que tienen el mismo seno, pero coseno y tangente opuestas.

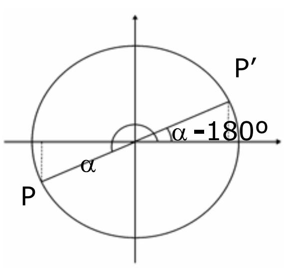
$$\text{sen}\alpha = \text{sen}(180º - \alpha)$$
$$\cos\alpha = -\cos(180º - \alpha)$$
$$\text{tg}\alpha = -\text{tg}(180º - \alpha)$$

Ejemplo:
Si cos 25º= 0'906 y sen25º=0'423. Calcular las razones trigonométricas de 155º
155º es un ángulo del 2º cuadrante, 180º-155º=25º $\Rightarrow$ 155º y 25º son ángulos suplementarios y se tiene:
sen155º=sen25º=0'423
cos155º= - cos25º= - 0'906

$$\text{tg}155º = \frac{\text{sen}155º}{\cos 155º} = \frac{0'423}{-0'906} = -0'467$$

8.2. Ángulos que pertenecen al 3º cuadrante

Ángulos que difieren en 180º



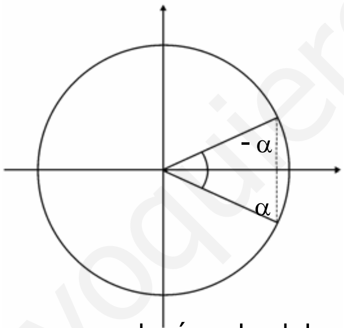
Se compara cada ángulo del tercer cuadrante con el ángulo del primer cuadrante que excede en 180º de forma que tienen la misma tangente, pero seno y coseno opuestos.

$$\text{sen}\alpha = -\text{sen}(\alpha - 180º)$$
$$\cos\alpha = -\cos(\alpha - 180º)$$
$$\text{tg}\alpha = \text{tg}(\alpha - 180º)$$

Ejemplo:
Si cos 25º= 0’906 y sen25º=0’423. Calcular las razones trigonométricas de 205º
205º es un ángulo del 3º cuadrante, 205º-180º=25º$\Rightarrow$ 205º y 25º son ángulos que difieren en 180º y se tiene:
sen205º= - sen25º= - 0’423
cos155º= - cos25º= - 0’906
$$\text{tg}205º = \frac{\text{sen}205º}{\cos 205º} = \frac{-0'423}{-0'906} = 0'467$$

8.3. <u>Ángulos que pertenecen al 4º cuadrante</u>

Ángulos opuestos, suman 360º

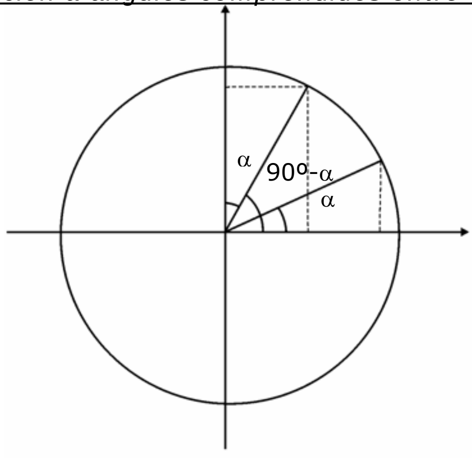


Se compara cada ángulo del cuarto cuadrante con el ángulo del primer cuadrante que será su opuesto de forma que tienen el mismo coseno, pero seno y tangente opuestos

$$\text{sen}\alpha = -\text{sen}(-\alpha)$$
$$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$$
$$\text{tg}\alpha = -\text{tg}(-\alpha)$$

Ejemplo:
Si cos 25º= 0’906 y sen25º=0’423. Calcular las razones trigonométricas de 335º
335º es un ángulo del 4º cuadrante, 360º-335º=25º$\Rightarrow$ 335º y 25º son ángulos opuestos y se tiene:
sen335º= - sen25º= - 0’423
cos335º= cos25º= 0’906
$$\text{tg}335º = \frac{\text{sen}335º}{\cos 335º} = \frac{-0'423}{0'906} = -0'467$$

8.4. Reducción a ángulos comprendidos entre 0º y 45



Se observa que:

$\text{sen}(90º-\alpha) = a = \cos\alpha$
$\cos(90º-\alpha = b = \text{sen}\alpha$
$\text{tg}(90º-\alpha) = \cot g\alpha$

Los ángulos que suman 90º se llaman complementarios.

Ejemplo:
Si cos 25º= 0’906 y sen25º=0’423. Calcular las razones trigonométricas de 65º
65º es un ángulo del 1º cuadrante, 90º-65º=25º$\Rightarrow$65º y 25º son ángulos complementarios y se tiene:
sen65º= cos25º= 0’906
cos65º= sen25º= 0’423
$$\text{tg}65º = \frac{\text{sen}65º}{\cos 65º} = \frac{0'906}{0'423} = 2'142$$

IMPORTANTE:
Para hallar las razones trigonométricas de cualquier ángulo a través de uno del primer cuadrante, son necesarios:

- Identificar en que cuadrante está.
- Asignar el ángulo del 1º cuadrante que le corresponde:
  - 1º cuadrante 90º-α
  - 2º cuadrante 180º-α
  - 3º cuadrante α-180º
  - 4º cuadrante 360º-α, o bien -α
- Asignar el signo del cuadrante correspondiente.

Ejemplo:

Calcula sen150º, cos225º y tg330º:

- 150º está en el 2º cuadrante $\Rightarrow 180º–150º = 30º$, es decir 150º y 30º son suplementarios y el signo del seno es positivo$\Rightarrow$
$$\text{sen}150º = \text{sen}30º = \frac{1}{2}$$
- 225º está en el 3º cuadrante $\Rightarrow 225º–180º = 45º$, es decir 225º y 45º son ángulos que difieren en 180º y el signo del coseno es negativo $\Rightarrow$
$$\cos 225º = -\cos 45º = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$
- 330º está en el 4º cuadrante $\Rightarrow 360º–330º = 30º$, es decir 330º y 30º son ángulos opuestos y el signo de la tangente es negativa $\Rightarrow$
$$\text{tg}330º = -\text{tg}30º = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

8.5. Ángulos mayores que 360º

Los ángulos mayores que 360º siempre se pueden reducir a un ángulo comprendido entre 0º y 360º. Para ello dividimos el ángulo entre 360º para saber cuál es el número de vueltas completas (cociente) y nos quedamos con el resto, que será el ángulo equivalente. Las razones trigonométricas del ángulo serán iguales a las razones trigonométricas del ángulo equivalente (resto de la división)

En las divisiones **no** se pueden simplificar ceros por tratarse de un sistema sexagesimal.

Ejemplo:

Consideramos el ángulo 935º, será equivalente a 215º ya que: $935º = 2 \cdot 360º + 215º$, es decir 2 de cociente y 215º de resto, 2 vueltas completas y 215º de la tercera vuelta. Se tiene:

$$\text{sen}935º = \text{sen}215º$$
$$\cos 935º = \cos 215º$$
$$\text{tg}935º = \text{tg}215º$$

Actividad:

22. Conociendo sen30º y cos30º, calcula el seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos:

a) $\alpha = 150º$ **b)** $\alpha = 330º$ **c)** $\alpha = 300º$
d) $\alpha = 480º$ **e)** $\alpha = 600º$

23. Si conocemos sen45º y cos45º, halla el seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos:

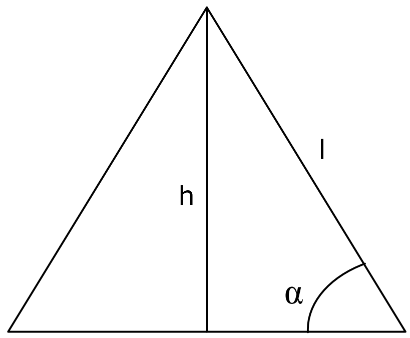
a) $\alpha = 225º$ **b)** $\alpha = 405º$ **c)** $\alpha = 585º$

24. Halla el valor de las siguientes razones trigonométricas relacionando cada ángulo con uno del primer cuadrante:

a) tg150º **c)** tg240º **e)** sen225º **g)** cotg180º **i)** cosec810º
b) sec120º **d)** sec315º **f)** tg330º **h)** sec420º **j)** cosec330º

9. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS E ISÓSCELES

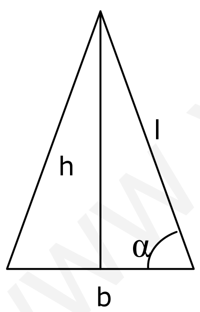
a) Triángulo equilátero



Son conocidos sus ángulos: α = 60º
Al trazar la altura tenemos dos triángulos rectángulos, con:
Hipotenusa = l
Catetos = h, l/2
Conocidos h ó l puedo hallar el que no conozca a través de la relación

$$\text{sen}60º = \frac{h}{l}$$

b) Triángulo isósceles



$$2\alpha+\beta=180º$$

Al trazar la altura tenemos dos triángulos rectángulos con:
Hipotenusa = l
Catetos = h, b/2
Basta saber que:

$$\text{sen}\alpha=\frac{h}{l}$$

$$\cos\alpha=\frac{b/2}{l}$$

Actividad:

25. Resuelve un triángulo equilátero de 10cm de lado.

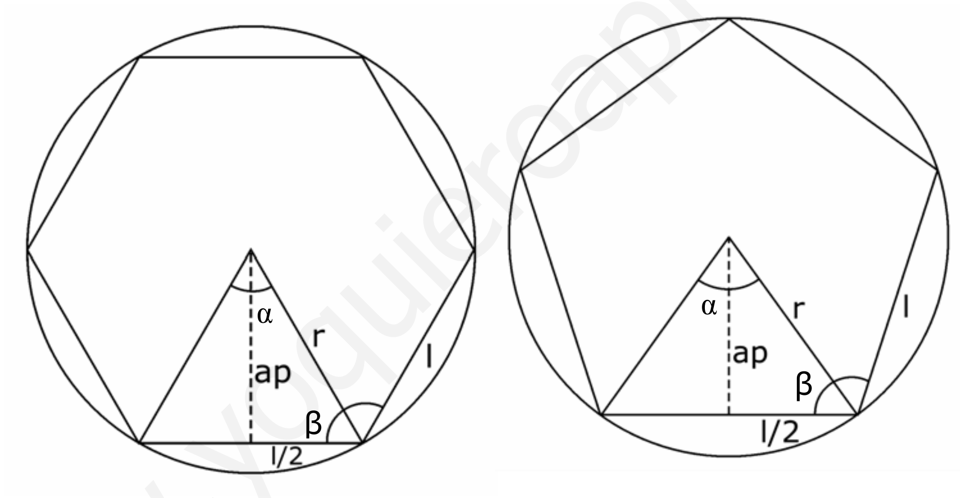
26. Soluciona un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8cm y los ángulos iguales 35º.

27. Resuelve el triángulo isósceles cuya base mide 24cm y su altura 28cm.

28. Determina el triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 16cm y el ángulo desigual 72º.

10. RESOLUCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES

El estudio y resolución de polígonos regulares se reduce al estudio de triángulos rectángulos, trazando la apotema y el radio.



Si n = número de lados:

$$\alpha = \frac{360º}{n} \text{ (ángulo central)}$$

$$\beta = 180º\frac{n-2}{n} \text{(ángulo interior)}$$

Radio = hipotenusa
Catetos = apotema, l/2

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{l/2}{r}$$

$$\text{sen}\frac{\beta}{2} = \frac{ap}{r}$$

$$\text{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{ap}{l/2}$$

Actividad:

29. Resuelve un pentágono regular de 16cm de lado.

30. Averigua el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de diámetro 30cm.

31. El lado de un pentágono regular inscrito es 6’8m. Halla el radio de la circunferencia circunscrita.

TRIGONOMETRÍA

Estudia en los triángulos

- Relaciones entre las longitudes de sus lados
- Amplitudes de los ángulos

A través de

Razones trigonométricas

Se definen para

Ángulos agudos

Seno | Coseno | Tangente

Nos sirven para

Resolver triángulos rectángulos

Se relacionan con las expresiones

$$\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{tg}x = \frac{\mathrm{sen}x}{\cos x}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Cualquier ángulo

Seno | Coseno | Tangente

En la circunferencia goniométrica se convierten en

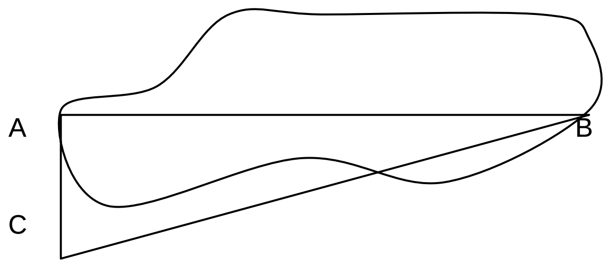
Lineas

Se utilizan para

- Reducir un ángulo al primer giro
- Reducir un ángulo al primer cuadrante

EJERCICIOS

1. Para hallar la distancia AB a través de una laguna, un agrimensor traza la recta AC perpendicular a AB. El segmento AC mide 101m. La medida del ángulo ACB es de 81º. ¿Qué longitud tiene AB?

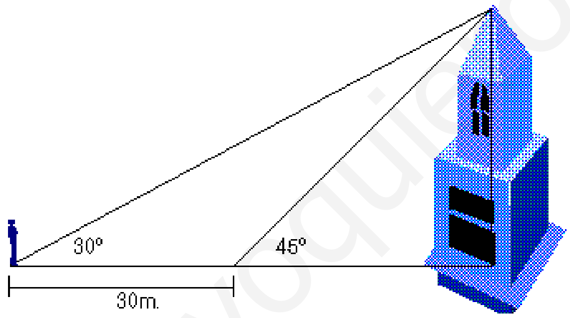


2. Si las dos ramas de un compás forman un ángulo de 45º y su longitud es 12cm, halla la distancia entre las puntas de las ramas.

3. En un trozo de una carretera la inclinación es de 6º. ¿Cuánto sube la carretera en 42m, medidos sobre el plano inclinado?

4. ¿Cuál es el ángulo de elevación de una carretera que sube 0'90 metros en una distancia de 16 metros, medidos sobre el plano inclinado?

5. Desde un punto se observa un edificio cuya parte más alta forma con el suelo un ángulo de 30º, si avanzamos 30 metros, el ángulo pasa a ser de 45º. Calcular la altura del edificio.



6. Si las puntas de las ramas de un compás distan 6'25 cm, y cada rama mide 11'5 cm, ¿qué ángulo forman?

7. Di si es verdadera o falsa cada una e las siguientes expresiones, justificando las respuestas:

a) $\text{tg}\,\alpha = -20$
b) $\cos\alpha = -2$
c) $\sec\alpha = -5$
d) $\text{cosec}\,\alpha = -0'75$
e) $\text{cotg}\,\alpha = 0'01$
f) $\cos\alpha = -1'001$

8. ¿Cómo son entre sí (iguales, opuestas o no hay relación entre ellas) las razones trigonométricas que se indican? Justifica tu respuesta:

a) sen22º y cos68º
b) sen45º y cos225º
c) tg73º y tg253º
d) sec110º y cosec70º
e) sen395º y sen35º
f) tg25º y cotg225º

9. Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$, averigua el seno, el coseno y la tangente de los ángulos complementario, suplementario y opuesto de α. Halla también las razones trigonométricas del ángulo que se diferencia de α en 180º.

10. Expresa las siguientes razones trigonométricas en función de la razón de un ángulo menor de 45º:

a) cos340º
b) tg250º

11. Conociendo sen11º= 0'19 y cos11º = 0'98, calcula el seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos:

a) α =101º
b) α = 191º
c) α = 349º

12. Si conocemos sen37º=0'6 y cos37º=0'8, halla el seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos:

a) α =127º
b) α = 143º
c) α = 323º

13. Calcula los siguientes triángulos isósceles ($\hat{A}$ y $\hat{C}$ son los ángulos iguales, b es la base, l cada uno de los lados iguales y h la altura):

a) $\hat{A}$ = 68º 57' y l = 35m
b) b = 14m y h = 15m

14. Halla las razones trigonométricas de los ángulos 150º, 315º, 120º, 210º, 75º y 330º relacionando dichos ángulos con un ángulo comprendido entre 0º y 45º.

15. Halla el resto de las razones trigonométricas, sabiendo que senα=2/3 y $90^\circ<\alpha<180^\circ$.

16. Halla el resto de las razones trigonométricas, sabiendo que cosα=3/5 y $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

17. Halla el resto de las razones trigonométricas, sabiendo que tgα=4/5 y $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

18. La longitud del hilo que sujeta una cometa es de 15 metros. Si el ángulo de elevación de la cometa es de 30º, ¿qué altura alcanza la cometa?

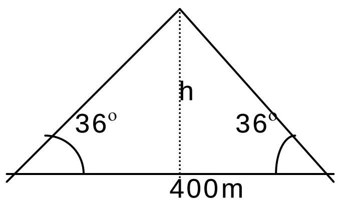
19. Pasar de radianes a grados o viceversa los siguientes ángulos:

a) $\alpha = (2\pi)/5$ rad
b) $\alpha = (9\pi)/8$ rad
c) $\alpha = 185^\circ$
d) $\alpha = 356^\circ$

20. Un avión vuela a 350 metros de altura, y el piloto observa que el ángulo de depresión de un aeropuerto próximo es de 15º. ¿Qué distancia le separa del mismo en ese instante?

21. ¿Cuánto medirá la sombra que proyecta un árbol de 10 metros de alto si el Sol tiene una inclinación de 40º respecto a la línea horizontal trazada por el pie del árbol?

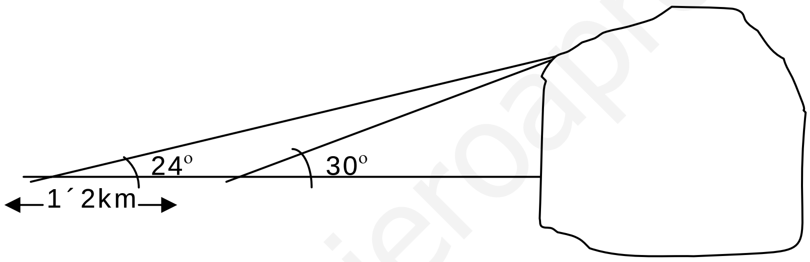
22. Encuentra la altura a la que se encuentra el avión de la figura:



23. Desde un acantilado, situado a 32 metros sobre el nivel del mar, se divisan dos embarcaciones. Halla la distancia entre las mismas si los ángulos de depresión respectivos son de 36º 16´ y 25º 20´.

24. Sabiendo las razones trigonométricas de 30º, calcula las de 60º, 150º y 330º.

25. Para medir la altura de una montaña se obtuvieron las medidas de la figura adjunta. Si los dos puntos de observación están situados a 1200 metros sobre el nivel del mar, ¿qué altura alcanza dicha montaña?



26. Dos edificios distan entre sí 150 m. Desde un punto que está entre los dos edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de éstos forman con la horizontal ángulos de 35º y 20º. ¿Cuál es la altura de los edificios, si sabemos que miden lo mismo?

27. Se desea calcular la altura de una torre de televisión. Para ello se hacen dos observaciones desde los puntos A y B, obteniendo como ángulos de elevación 60º y 45º respectivamente. Sabiendo que la distancia entre A y B es de 126 m y que la torre está situada entre los dos puntos, halla la altura de la torre.

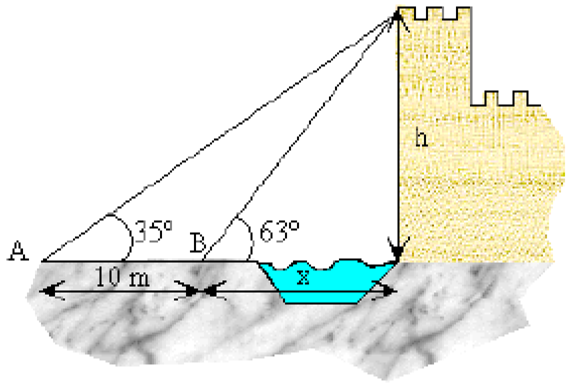
28. Una escultura está colocada sobre un pedestal de 1'5m de altura. Desde un punto del suelo se ve la escultura bajo un ángulo de 42º y el pedestal bajo un ángulo de 18º. Calcula la altura de la escultura.

29. Un tobogán tiene una altura máxima de 3 y una longitud de 5 ¿Cuál es su inclinación?

30. Un turista observa un monumento desde cierta distancia bajo un ángulo de 70º. ¿Bajo qué ángulo lo verá si se aleja cuatro veces dicha distancia?

31. Calcula la altura de un árbol sabiendo que proyecta una sombra de 8m, cuando los rayos del sol inciden sobre la tierra un ángulo cuya tangente es 1'6351.

32. Se desea calcular la altura de la torre, para ello se miden los ángulos de elevación desde los puntos A y B. Calcula la altura de la torre.



33. A una cierta distancia, una antena de telefonía se ve bajo un ángulo de 60º, si me alejo 20m se ve bajo un ángulo de 45º. ¿Qué altura tiene la antena? ¿A qué distancia estoy de la antena inicialmente?

34. Desde el punto más alto de un faro, que se encuentra a 32 m sobre el nivel del mar, se observa un barco con un ángulo de 80º. ¿A qué distancia de la costa está el barco?

35. La torre Eiffel proyecta una sombra de 77m de largo cuando la inclinación de los rayos del Sol respecto al horizonte es de 78º. ¿Qué altura tiene la torre?

36. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ cm. Halla el área del triángulo y el perímetro sabiendo que es un triángulo isósceles.

37. Calcula la altura de un semáforo, sabiendo que desde un cierto punto A, se ve bajo un ángulo de 60º y si nos alejamos 40 m se ve bajo un ángulo de 30º.

38. Desde un puesto de caza, un cazador apunta con su escopeta a una tórtola, que se encuentra posada en la copa de un árbol, con un ángulo de 50º. Cuando iba a disparar la tórtola salió volando y se posó en una rama 4m más abajo; la apunta cuidadosamente con un ángulo de 40º y cuando fue a disparar decidió no hacerlo; se acordó del pesado de su profesor de “mate” de 4º y se hizo las siguientes preguntas: ¿Qué altura tiene el árbol?, ¿Qué distancia me separa de él?

39. La distancia de un barco a un faro es de 137 m, y a la orilla 211 m. El ángulo bajo el cual se ve desde el barco el segmento cuyos extremos son el faro y la orilla es de 43º. ¿Qué distancia hay entre el faro y la orilla?

40. Calcula, reduciendo al primer cuadrante el seno y el coseno de los ángulos:

- **a)** 150º
- **b)** 240º
- **c)** 315º

41. Sabiendo que $\text{tg}\alpha = \sqrt{3}$ y que $180º \le \alpha \le 270º$, calcula todas las razones trigonométricas que faltan.

42. Sabiendo que $\cos A = \frac{-1}{2}$, obtener las demás razones trigonométricas de A, si A es un ángulo del segundo cuadrante.

43. Si sen55º=0'819:

a) Calcula el valor de las demás razones trigonométricas.
b) Obtén, las razones de 125º, 235º y 305º.

44. Si cos25º=0'906:

a) Calcula el valor de las demás razones trigonométricas.
b) Obtén, las razones de 155º, 205º y 335º.

44. Sabiendo que $\text{sen}\alpha = 0'4$ halla razonadamente las siguientes razones trigonométricas:

a) $\text{tg}(90º - \alpha) =$
b) $\text{tg}(\pi - \alpha) =$
c) $\text{sen}(-\alpha) =$
d) $\text{sen}(\pi + \alpha) =$
e) $\cos(\pi + \alpha) =$
f) $\cos(\pi - \alpha) =$

45. Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α, que pertenece al segundo cuadrante, y sabiendo que $\cot g\alpha = -3$

46. Sabiendo que $\cos\alpha = 0'4$ halla razonadamente las siguientes razones trigonométricas:

a) $\text{tg}(90º + \alpha) =$
b) $\text{tg}(\pi + \alpha) =$
c) $\cos(-\alpha) =$
d) $\text{sen}(\pi - \alpha) =$
e) $\cos(\pi - \alpha) =$
f) $\text{sen}(\pi - \alpha) =$

47. De un ángulo sabemos que $\text{tg}\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. Calcula el resto de las razones trigonométricas, sabiendo que el ángulo pertenece al 2º cuadrante.

48. Sabiendo que $\text{sen}\alpha = \frac{2}{3}$ y que α pertenece al primer cuadrante, calcula las siguientes razones trigonométricas:

a) $\cos\alpha =$
b) $\text{sen}(180º - \alpha) =$
c) $\cos(180º + \alpha) =$
d) $\text{tg}(360º - \alpha) =$

49. Sabiendo que $\text{tg}\alpha = -3$ y que $270º \le \alpha \le 360º$, calcula todas las razones trigonométricas que faltan.

50. Sabiendo que $\text{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ y que α pertenece al primer cuadrante, calcula las siguientes razones trigonométricas:

a) $tg(90º-\alpha) =$
b) $tg(180º-\alpha) =$
c) $sen(-\alpha) =$
d) $sen(90º+\alpha) =$
e) $sen(180º+\alpha) =$

51. Sabiendo que el $sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

a) Calcula las demás razones trigonométricas sabiendo que todas son positivas.

b) Calcula el valor de:

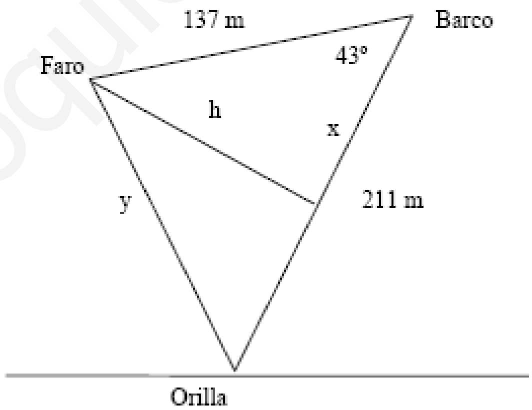
i. $tg(90º+\alpha) =$
ii. $tg(180º+\alpha) =$
iii. $cos(-\alpha) =$
iv. $sen(180º-\alpha) =$
v. $cos(180º-\alpha) =$

52. Calcular las restantes razones trigonométricas, conocidas:

a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $0 \le \alpha \le 90º$

b) $sen\alpha = \frac{3}{5}$, $90º \le \alpha \le 180º$

53. Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α, que pertenece al tercer cuadrante, y sabiendo que $\sec\alpha = -3$.



54. Si tu sombra es la mitad de tu altura, ¿qué ángulo forman los rayos del Sol con el horizonte?

55. Dos jugadores de un equipo de fútbol ensayan un “tiro a puerta” desde un punto situado a 5 m y a 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7m. ¿Bajo qué ángulo ven la portería?

56. Un avión que vuela a 3000 metros de altura, ve un pueblo A bajo un ángulo de 40º con respecto a la horizontal de vuelo (ángulo de depresión) y otro pueblo B bajo un ángulo de 15º ¿Qué distancia hay entre A y B?

57. Desde los puntos A y B situados en la misma orilla de un río, se observa un punto P de la orilla opuesta y se toman los siguientes datos: PAB = 60º, PBA = 45º, AB = 50 m. Calcular las distancias PA y PB.

58. Desde una altura de 6000 metros, el piloto de un avión observa la luz de un aeropuerto bajo un ángulo de depresión de 30º. Calcula la distancia entre el avión y el foco.

59. Si las ramas de un compás forman un ángulo de 75º y miden 12 cm, ¿cuál será la distancia entre sus puntas?

60. Halla la altura de un poste, sabiendo que desde cierto punto del suelo se ve bajo un ángulo de 14º, y si nos acercamos 20 m al pie del poste lo vemos bajo un ángulo de 18º.

61. Calcula la altura de una torre situada en un terreno horizontal, sabiendo que con un aparato de 1'20 m de altura, colocado a 20 m de ella, se ha medido el ángulo que forma con la horizontal la visual dirigida al punto más elevado, y se ha obtenido 48º 30'.

62. Para hallar la altura de una montaña, medimos el ángulo que forma la horizontal con la visual a su cima, obteniendo 65º. Nos alejamos 100 m, medimos de nuevo y obtenemos 58º, ¿cuál es la altura de la montaña?

63. Una antena está situada sobre un montículo. Un camino de 20 m de longitud y que forma un ángulo de 18º con la horizontal conduce a pie de esta. Calcula la altura de la antena si desde el punto de inicio del camino se ve el punto más alto de ella bajo un ángulo de 80º.

64. Un avión vuela en línea horizontal. Desde un punto situado en el suelo se ve bajo un ángulo, con respecto a la horizontal, de 45º. Cuando el avión ha recorrido 1000 metros y desde el mismo punto se observa de nuevo el avión, que no ha perdido ni ganado altura, y el ángulo que resulta, con respecto a la horizontal, es de 30º. ¿A qué altura vuela el avión?

65. Desde el lugar donde me encuentro, se ve la veleta de la torre de una iglesia formando un ángulo de 52º con la horizontal. Si me alejo 25 m, el ángulo es de 34º. ¿Cuál es la altura de la torre?

66. Epi y Blas ven pasar un avión con ángulos respectivos de 30º y 45º. Si la distancia que les separa es de 2 km, calcula la altura a la que vuela el avión.

CUESTIONES

1. Simplifica las siguientes expresiones, utilizando las relaciones trigonométricas que conoces:

a) $\dfrac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha} =$

b) $\text{sen}^3\alpha + \text{sen}\alpha \cdot \cos^2\alpha =$

c) $\dfrac{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sec^2\alpha - \cos^2\alpha} =$

2. Simplifica:

a) $\dfrac{\cos^2\alpha \cdot \left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)}{\cot g\alpha} =$

b) $\left(\mathrm{sen}\alpha + \cos\alpha\right)^2 + \left(\mathrm{sen}\alpha - \cos\alpha\right)^2 =$

3. Reduce al primer giro los siguientes ángulos:

a) 390º
b) 2500º
c) 1720º
d) 835º
e) 482

4. Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de los siguientes ángulos identificando el cuadrante en que se encuentran:

a) 66º
b) 175º
c) 342º
d) -18º
e) 135º
f) -120º

5. Calcula los ángulos agudos que cumplen:

a) $\mathrm{sen}\alpha = 1$

b) $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{3}$

c) $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$

6. Completa la siguiente tabla:

Grados	105º		320º		35º
Radianes		$\dfrac{4\pi}{9}$		$\dfrac{7\pi}{5}$	

7. Si $\cos\alpha = \sqrt{2}$ ¿qué se puede asegurar del ángulo x?

8. Prueba que si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 60º, entonces la hipotenusa es igual al doble del cateto menor.

9. Dibuja en la circunferencia goniométrica el menor ángulo positivo cuyo seno sea -3/5.

10. Una ventada rectangular mide 100 cm de alta por 75 cm de ancha. ¿Cuál es la longitud de su diagonal?

a) 150 cm
b) 75 cm
c) 125 cm
d) 110 cm

11. Si $\mathrm{sen}\alpha = \dfrac{1}{2}$, el producto $\mathrm{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$ es:

a) $\dfrac{1}{3}$ **b)** $\dfrac{1}{2}$ **c)** 2 **d)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El seno de un ángulo puede ser mayor que 1.
b) El seno de un ángulo es siempre menor que 1.
c) El seno de un ángulo puede ser igual a 1.
d) El seno de un ángulo siempre es mayor que 0.

13. ¿Cuánto vale el coseno del ángulo cuyo seno es igual a su tangente?

14. ¿Puede existir un ángulo cuyo seno valga 2? ¿Y cuyo coseno sea 3/2? Razona las respuestas.

15. ¿Qué ángulo del cuarto cuadrante tiene el mismo coseno que 28º?

UNIDAD 7

VECTORES Y ECUACIONES DE LA RECTA

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1. (**) Representar vectores.
2. (**) Realizar operaciones con vectores analítica y gráficamente.
3. (**) Expresar la ecuación de la recta en todas sus formas.
4. Hallar la ecuación paralela o perpendicular a una dada.

** Indica objetivo mínimo

Esquema:

1. Introducción.

2. Vectores.
   - 2.1. Definición
   - 2.2. Elementos de un vector
     - 2.2.1. Módulo
     - 2.2.2. Dirección
     - 2.2.3. Sentido
   - 2.3. Componentes de un vector
   - 2.4. Vectores equipolentes
   - 2.5. Vector libre
   - 2.6. Módulo de un vector

3. Operaciones con vectores
   - 3.1. Suma y resta de vectores
   - 3.2. Producto de un vector por un número real
   - 3.3. Producto escalar

4. Ecuaciones de la recta
   - 4.1. Ecuación vectorial.
   - 4.2. Ecuaciones paramétricas
   - 4.3. Ecuación continua
   - 4.4. Ecuación general
   - 4.5. Ecuación punto-pendiente
   - 4.6. Ecuación explícita

5. Ecuación paralela y perpendicular a una dada
   - 5.1. Ecuación de la recta paralela a una dada.
   - 5.2. Ecuación de la recta perpendicular a una dada.

1. Introducción

Sabemos que hay conceptos físicos que se pueden determinar por una única magnitud como son la presión, temperatura,..., esas magnitudes son las llamadas escalares. Sin embargo hay otras magnitudes que necesitan de una dirección y un sentido además del valor asignado para que quede perfectamente determinado, entre ellos la posición de un objeto respecto a otro, la velocidad, la aceleración, la fuerza,... Esto es lo que llamamos magnitudes vectoriales que quedan representadas por vectores.

Luego, dentro de las Matemáticas, el álgebra vectorial es uno de los campos con más aplicaciones físicas, desde la cinemática hasta la mecánica cuántica.

2. Vectores

2.1. Definición

Se llama vector $\overrightarrow{AB}$ al segmento orientado desde el punto A (origen) hasta el punto B (extremo).

2.2. Elementos de un vector

Además de origen y extremo un vector consta de:

2.2.1 Módulo:
Longitud del segmento $\overline{AB}$. Se escribe $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

2.2.2. Dirección:
La de la recta que lo contiene o cualquiera de sus paralelas.

2.2.3. Sentido:
El del recorrido desde A hasta B. (El sentido de $\overline{AB}$ es opuesto al de $\overline{BA}$)

Actividad:

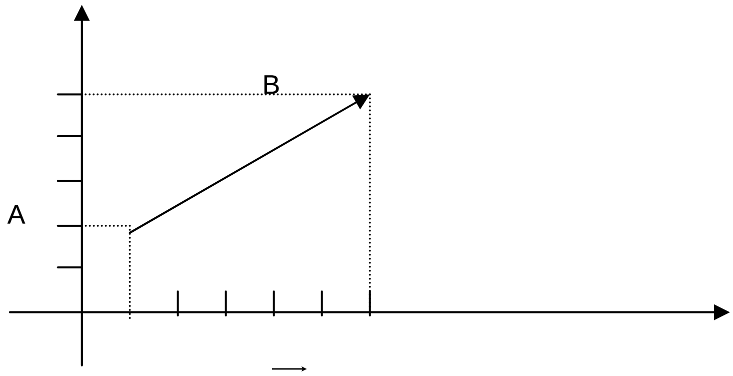
1. Dibuja dos vectores que tengan el mismo módulo, dirección y sentido.
2. Dibuja dos vectores que tengan el mismo módulo, dirección y distinto sentido.
3. Dibuja dos vectores que tengan la misma dirección, sentido contrario y distinto módulo.

2.3. Componentes de un vector

Se llaman componentes de un vector a las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen. Es decir, dado el vector $\overrightarrow{AB}$, con $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, entonces las componentes del vector serán:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)}$$

Gráficamente será, la primera componente lo que me tengo que desplazar respecto a la x para ir de A hasta B y la segunda componente lo que me desplazo respecto a la y para ir desde A hasta B.



A=(1,2) B=(6,5) y $\overrightarrow{AB} = (6-1, 5-2) = (5,3)$

Gráficamente nos tenemos que desplazar 5 unidades respecto a x, para ir de A hasta B y 3 unidades respecto a y para ir desde A hasta B.

Actividad:

4. ¿Cuáles son las componentes del vector que tiene por origen el punto A(-3,-2) y como extremo el punto B(2,4)?

2.4. Vectores equipolentes

Dos vectores son equipolentes cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

Si tienen el mismo módulo y dirección pero distinto sentido entonces son vectores opuestos.

Si pensamos en todos los vectores equipolentes a uno dado y los consideramos un solo vector que puede desplazarse paralelamente a si mismo, estaremos ante lo que llamamos vector libre.

a. Vector libre

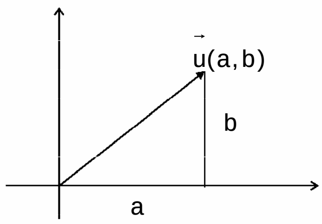
Se llama vector libre al conjunto formado por un vector y todos sus equipolentes. Al representante de un vector libre que tiene su origen en el origen de coordenadas lo llamamos representante canónico o vector de posición.

b. Módulo de un vector

Se llama **módulo** de un vector $\vec{u}=(a,b)$ a su longitud. Se escribe $|\vec{u}|$ y se calcula

$$\boxed{|\vec{u}| = +\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Evidentemente, la fórmula se debe al teorema de Pitágoras.



Cuando no nos dicen cual es el origen del vector, hablamos del representante canónico o vector de posición.

Ejemplo:
Dado el vector $\vec{u}$ = (2,2), entonces su módulo será:
$|\vec{u}| = +\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Actividad:

5. Si $\vec{u}$ es un vector de componentes (1,2), halla su módulo.

6. Dados los puntos A(-2,-5) y B(3,7), halla el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

7. Dado el vector $\vec{u}$ de componentes (2,4) con origen el punto A(2,1).

a) Halla las coordenadas del extremo B.
b) Halla el módulo del vector.
c) Representa gráficamente.

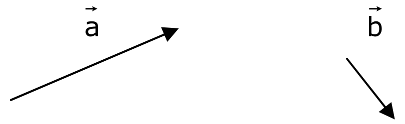
3. Operaciones con vectores

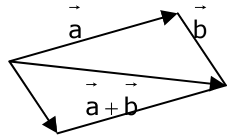
3.1. Suma y resta de vectores

Dados los vectores $\vec{u}$ (a,b) y $\vec{v}$ (c,d), se define su suma como el vector $\vec{u}+\vec{v}$ = (a+c , b+d) e, igualmente se puede definir su resta como el vector $\vec{u}-\vec{v}$ = (a-c , b-d).

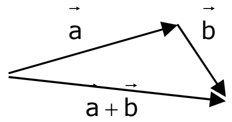
Ejemplo:
Si $\vec{u}$ = (-3,6) y $\vec{v}$ = (1,-2) entonces $\vec{u}+\vec{v}$ = (-2,4)
y $\vec{u}-\vec{v}$ = (-4, 8)

Los vectores pueden sumarse también gráficamente a través de la regla del paralelogramo. Para ello, se dibujan los dos vectores con el mismo origen y se traza el paralelogramo que forman. El vector suma será la diagonal de dicho paralelogramo, teniendo como origen, el mismo que los vectores sumados, es decir, dados los vectores:





Para simplificar este proceso, se puede colocar el origen del segundo vector en el extremo del primero de la siguiente manera:



La operación resta $\vec{a}-\vec{b}$ se realiza sumando al vector $\vec{a}$ el opuesto de $\vec{b}$ que es el vector de igual módulo y dirección que $\vec{b}$ y sentido opuesto.

3.2. <u>Producto de un vector por un número real</u>

Dados el vector $\vec{u}(a,b)$ y el nº real k, se define $k\cdot\vec{u}$ como el vector $k\cdot\vec{u}=(ka,kb)$

> **Ejemplo**:
> Si $\vec{a}=(-3,1)$ $2\cdot\vec{a}=(-6,2)$

Podemos deducir de la definición que:

1) El **módulo:**
$|k\cdot\vec{u}| = |k|\cdot|\vec{u}|$.

2) La **dirección:** de $k\cdot\vec{u}$ es la misma que la de $\vec{u}$

3) El **sentido** de $k\cdot\vec{u}$ es :
- Si k>0 entonces $k\cdot\vec{u}$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}$
- Si k<0 entonces $k\cdot\vec{u}$ tiene sentido contrario al de $\vec{u}$
- Si k=0, entonces $0\cdot\vec{u}=\vec{0}=(0,0)$ (vector nulo, origen y extremo coinciden)

> **Actividad:**
>
> **8.** Dibuja un vector cualquiera y multiplícalo por 2 y por -2. Analiza de ellos el módulo, dirección y sentido.

3.3. Producto escalar

- Se llama producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al nº real resultante de multiplicar sus módulos y el coseno del ángulo que forman, es decir,

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})}$$

- Se entiende por ángulo entre dos vectores, el que va del primero al segundo por el camino más corto.

- $$\vec{u}\cdot\vec{v}\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{u}\right| \neq 0 \\ \left|\vec{v}\right| \neq 0 \\ \alpha = \left(\vec{u},\vec{v}\right) \neq 90º \text{ y } 270º \end{cases}$$

- Otra forma de expresar el producto escalar es mediante sus componentes:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2$$

- Una condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares (ortogonales) es que su producto escalar sea cero.

- Ángulo de dos vectores:
  De la definición de producto escalar se tiene:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$, luego:

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}}$$

- Propiedades del producto escalar:
  - Conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
  - Asociativa mixta: $k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) = \left(k\cdot\vec{u}\right)\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\left(k\cdot\vec{v}\right)$
  - Distributiva: $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
  - $\vec{u}\cdot\vec{u} = \left|\vec{u}\right|^2 \neq 0$

Ejemplo:

Sean los vectores $\vec{u} = (2,4)$ y $\vec{v} = (-2,3)$, entonces:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = -4 + 12 = 8$$

y si quisiéramos calcular el ángulo que forman los dos vectores:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{8}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{8}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right) = 60^{\circ}\,15'\,18''$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Actividad:

9. Dados los vectores $\vec{u}\,(2,3)$ y $\vec{v}\,(-3,2)$, halla:
- **a)** La suma. Represéntala.
- **b)** La resta. Represéntala.
- **c)** El opuesto de cada uno de ellos. Represéntalos.
- **d)** Halla el producto escalar.

10. Dados los vectores $\vec{u}\,(4,5)$, $\vec{v}\,(2,3)$ y $\vec{w}\,(1,-7)$, calcular:
- **a)** $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- **b)** $2\vec{u} - 3\vec{v} + 4\vec{w}$
- **c)** $2(\vec{u} + \vec{v}) - 3\vec{w}$
- **d)** Halla el producto escalar de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$ y $\vec{w} \cdot \vec{v}$

11. Sean $\vec{u}\,(4,-3)$ y $\vec{v}\,(4,3)$. Halla el producto escalar y el ángulo que forman.

12. Consideramos un triángulo de vértices A(3,2), B(5,1) y C(1,-2):
- **a)** Halla las componentes de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$. .
- **b)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- **c)** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
- **d)** $|\overrightarrow{CA}|$
- **e)** Ángulos del triángulo.
- **f)** Área del triángulo

13. Dados los vectores $\vec{u}\,(2,5)$, $\vec{v}\,(-6,3)$ y $\vec{w}\,(5,6)$:
- **a)** Represéntalos.
- **b)** Calcula: $\vec{u} + \vec{v}$ // $\vec{u} - \vec{w}$ // $3\vec{u} + 5\vec{v}$ // $\vec{u} \cdot \vec{v}$ // $\vec{v} \cdot \vec{w}$
- **c)** Representa $-\vec{u}$ // $\vec{u} + \vec{w}$ // $\vec{v} - \vec{u}$

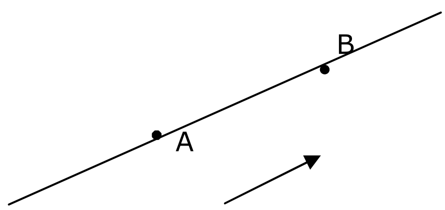
14. Sean $\vec{u}\,(1,-1)$ y $\vec{v}\,(3,h)$ halla h para que sean perpendiculares.

4. Ecuaciones de la recta

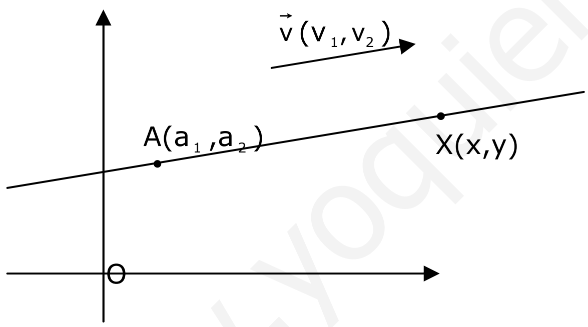
Vamos a estudiar como determinamos una recta, es decir conocer todos los puntos que componen una recta; como una recta pasa por infinitos puntos y es imposible escribirlos todo lo que vamos a buscar es una característica que cumplan todos ellos y así determinaremos la ecuación de la recta.

4.1. Ecuación vectorial

Sabemos que una recta queda determinada por completo si conocemos dos de sus puntos o, lo que es lo mismo, si conocemos un solo punto y un vector de su misma dirección (aprovecharemos así, lo que hemos aprendido sobre vectores).

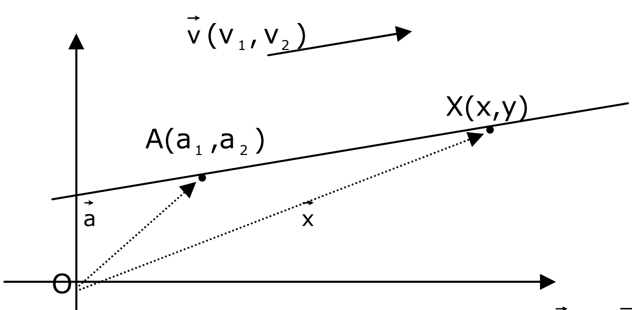


Supongamos que conocemos un punto A (a_1, a_2) de la recta y un vector de su misma dirección $\vec{v}$ (v_1, v_2).



Para determinar la ecuación de la recta es necesario conocer la condición que cumplen todos sus puntos. Por ello, elegimos un punto X(x,y) cualquiera de la curva y observamos su comportamiento.

Si trazamos los vectores de posición de A y X y los llamamos $\vec{a}$ y $\vec{x}$ respectivamente, tendremos:



Observa que se verifica una suma de vectores $\vec{a} + \overrightarrow{AX} = \vec{x}$.

Por tanto, al ser $\overrightarrow{AX}$ y $\vec{v}$ paralelos, se cumplirá que son proporcionales, es decir, existirá algún nº real t tal que $\overrightarrow{AX} = t\cdot\vec{v}$.

Si sustituimos en la igualdad $\vec{a} + \overrightarrow{AX} = \vec{x}$, obtenemos:

$\vec{x} = \vec{a} + t\cdot\vec{v}$

Y sabiendo que $\vec{x}(x,y)$, $\vec{a}(a_1,a_2)$, (por ser vectores de posición) y que $\vec{v}(v_1,v_2)$ tendremos finalmente:

$$\boxed{(x\ ,\ y) = (a_1,a_2) + t\cdot(v_1,v_2) \quad \text{donde } t\in R}$$

Esta expresión es la **ecuación vectorial** de la recta, dando los valores a t obtendremos diferentes puntos de la recta. El punto A lo obtenemos dando el valor t=0.

Ejemplo:

Halla la ecuación de la recta en su forma vectorial que pasa por el punto A(2,3) y tiene como vector director $\vec{v}$=(-1,2)

$(x,y)=(2,3) + t\,(-1,2) \qquad t \in \Re$

(x,y) es cualquier punto de la recta. Si queremos conocer otro punto por donde pase la recta además del punto A, damos valores a t:

$\{\text{Si } t = 1 \Rightarrow (x,y) = (2,3) + (-1,2) = (1,5)$

¿Pertenece el punto (3,-5) a la recta?

$$(3,-5) = (2,3) + t\ (-1,2) \Rightarrow \begin{cases} 3 = 2 - t \Rightarrow t = -1 \\ -5 = 3 + 2t \Rightarrow -8 = 2t \Rightarrow t = -4 \end{cases}$$

No pertenece ya que no ha salido la misma t

4.2 Ecuaciones paramétricas

Operando la ecuación vectorial, obtendremos otras ecuaciones de la recta con formatos distintos.

$(x,y) = (a_1,a_2) + t\cdot(v_1,v_2) \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (a_1,a_2) + (t\cdot v_1,t\cdot v_2) \Rightarrow$

$(x,y) = (a_1 + t\cdot v_1\ ,\ a_2 + t\cdot v_2) \quad \Rightarrow$

Ecuaciones paramétricas

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{x = a_1 + t\cdot v_1} \\ \mathbf{y = a_2 + t\cdot v_2} \end{cases} \quad \mathbf{t\in R}}$$

Ejemplo:

La ecuación anterior de la recta en su forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \qquad t \in R$$

Para obtener otros puntos de la recta daríamos valores a t

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - a_1}{v_1} \\ t = \dfrac{y - a_2}{v_2} \end{cases}$$

de donde se deduce que $\boxed{\dfrac{\mathbf{x - a_1}}{\mathbf{v_1}} = \dfrac{\mathbf{y - a_2}}{\mathbf{v_2}}}$

Ecuación continua de la recta.

Ejemplo:

La ecuación anterior de la recta en su forma continua será:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2}$$

En este caso para conseguir el resto de los puntos por los que pasa la recta hay que dar valores a "x" y despejar la "y".

Si $x = 1 \Rightarrow \dfrac{1-2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} \Rightarrow 1 = \dfrac{y-3}{2} \Rightarrow 2 = y - 3 \Rightarrow y = 5$ luego otro punto de la recta será: (1, 5)

De la ecuación continua pasamos a la ecuación general sin más que multiplicar "en cruz".

$\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2} \Rightarrow v_2(x - a_1) = v_1\ (y - a_2) \Rightarrow v_2 \cdot x - v_2 \cdot a_1 = v_1 \cdot y - v_1 \cdot a_2 \Rightarrow$

$v_2 \cdot x - v_1 \cdot y + v_1 \cdot a_2 - v_2 \cdot a_1 = 0$ expresión que incluye un término en x ($v_2 \cdot x$), un término en y ($v_1 \cdot y$) y un término independiente ($v_1 \cdot a_2 - v_2 \cdot a_1$).

Distinguiremos esto más claramente si llamamos A, B y C a dichos términos:

$$\boxed{A = v_2 \quad , \quad B = -v_1 \quad y \quad C = v_1 \cdot a_2 - v_2 \cdot a_1}$$

Entonces la ecuación queda expresada: $\boxed{\mathbf{Ax + By + C = 0}}$

Ecuación general de la recta

Ejemplo:

La ecuación de la recta en su forma general:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} \Rightarrow 2(x-2) = -1(y-3) \Rightarrow 2x - 4 = -y + 3 \Rightarrow 2x + y - 4 - 3 \Rightarrow$$

$$2x + y - 7 = 0$$

Otro punto lo podemos calcular dando valores a x:

Si x=1 entonces $2 \cdot 1 + y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7 - 2 \Rightarrow y = 5$

El punto será: (1,5)

A diferencia de las tres ecuaciones anteriores (vectorial, paramétricas y continua), en la ecuación general no son evidentes el punto y el vector director, pero se obtienen fácilmente.

El vector se obtiene recordando que en el paso anterior, $A = v_2$ y $B = -v_1$, es decir, $v_1 = -B$ y $v_2 = A$. Como el vector es $\vec{v} = (v_1, v_2)$, tendremos:

$$\boxed{\vec{v} = (-B,A) \quad \textbf{vector director de la recta}}$$

Ejemplo:

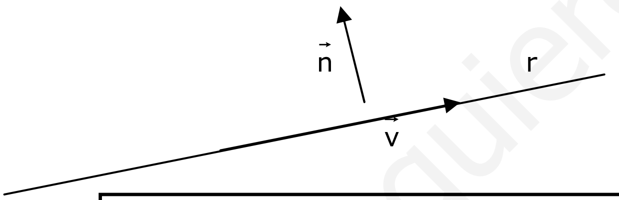
Dada la ecuación $2x - y + 3 = 0$ halla un punto y el vector director.

Si $x = 0 \Rightarrow -y + 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$ un punto será $(0,3)$

Como el vector tiene como componentes $(-B, A) \Rightarrow$ se tiene $\vec{v} = (1,2)$

Podemos sacar otra conclusión importante. Sabemos que la recta de ecuación $Ax+By+C=0$, tiene como vector director $\vec{v} = (-B,A)$. Si consideramos el vector $\vec{n} = (A,B)$, tendremos un **vector perpendicular** a la recta ya que el producto escalar de $\vec{v}$ y $\vec{n}$ es 0.

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (-B,A)\cdot(A,B) = -B\cdot A + A\cdot B = 0 \text{ , luego } \vec{v} \perp \vec{n}$$



El vector $\vec{n}$ recibe el nombre de **vector normal o vector asociado** de la recta.

Vectores de la recta:

$\vec{v}$ **= (-B,A)** vector director (de su misma dirección)

$\vec{n}$ **= (A,B)** vector normal (dirección perpendicular)

4.5 Ecuación punto-pendiente

La siguiente ecuación que vamos a estudiar no depende de un punto y del vector director de la recta, sino de un punto y de la pendiente de dicha recta que designaremos con la letra m, entendiendo por pendiente la mayor o menor inclinación de la recta.

Definimos pendiente de la recta como:

$$\boxed{m = \frac{v_2}{v_1}}$$

A partir de la ecuación de la recta en su forma continua, vamos a definir la ecuación en forma punto-pendiente:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1}(x - a_1) = y - a_2 \Rightarrow m\cdot(x - a_1) = y - a_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{y - a_2 = m\cdot(x - a_1)}$$ **Ecuación punto-pendiente**

En su expresión se observa que depende de m y de (a_1, a_2), que son la pendiente y un punto cualquiera de la recta.

Ejemplo:

De la ecuación de la recta anterior, vamos a hallar la ecuación de la recta en su forma punto pendiente:

$$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow y - 3 = -2 \cdot (x - 2)$$

Observa que si operas esta ecuación se llega a la forma general:
$y - 3 = -2 \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 3 = -2x + 4 \Rightarrow 2x + y - 7 = 0$

4.6 Ecuación explícita

Puede deducirse tanto de la ecuación general como de la punto-pendiente, sin más que despejar y.

$$y - a_2 = m\cdot(x - a_1) \Rightarrow y = m\cdot(x - a_1) + a_2 \Rightarrow y = mx - ma_1 + a_2$$

Como $(- ma_1 + a_2)$ es un término independiente, podemos referirnos a él llamándole b. De esta forma la ecuación quedaría:

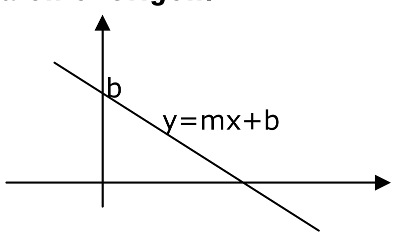
$$\boxed{y = mx + b}$$ **Ecuación explícita**

Queda a la vista que el coeficiente de x representará siempre la pendiente de la recta.

¿Qué representa b? Veámoslo.

Si damos a x el valor 0 (x=0), tendremos: y = m·0+b , es decir si x=0, y = b . Eso significa que la recta pasa por el punto (0,b) que, por su forma, es un punto del eje Y.

Luego "b", (en realidad (0,b)), es el punto donde la recta corta al eje Y y recibe el nombre de **ordenada en el origen.**



Ejemplo:

Si consideramos la ecuación general o en su forma punto-pendiente llegamos a la forma explícita.

De la ecuación general $2x + y - 7 = 0 \Rightarrow y = -2x + 7$

De la ecuación punto - pendiente $y - 3 = -2 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 3 - 2x + 4 \Rightarrow y = -2x + 7$

Actividad:

15. Escribe de todas las formas posibles la recta que pasa por P(1,1) y tiene como vector director $\vec{u}(3,2)$.

16. Encuentra la ecuación de la recta que:

a) Pasa por (3,1) y (7,5).
b) Pasa por (-4,7) y m = -1/2
c) Pasa por (2,5) y $\vec{u}(-1,6)$
d) De pendiente 3 y ordenada en el origen 2
e) De pendiente – 3 y ordenada en el origen – 4

17. Halla la pendiente, vector director y un punto de las siguientes rectas:

a) $3x + y - 2 = 0$
b) $y = 2x + 3$
c) $(x,y) = (3,0) + t\,(7,-1)$
d) $\frac{x-4}{7} = \frac{y}{-2}$
e) $\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$

5. <u>Ecuación paralela y perpendicular a una dada</u>

5.1 <u>Ecuación paralela a una dada</u>

Hemos visto que dada la ecuación de la recta en su forma general $Ax + By + C = 0$, un vector en su misma dirección es (-B,A), como dos rectas que sean paralelas tienen la misma pendiente, se tiene:

$$m = \frac{A}{-B} = \frac{-A}{B}$$

donde m será la pendiente de la recta paralela a una dada.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta paralela a 2x-3y+2=0 y que pasa por el punto A(1,0)

$m = \frac{-A}{B} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ que será la pendiente de la recta paralela y como pasa por el punto A(1,0), calculamos la ecuación de la recta en su forma punto pendiente:

$$\mathbf{y - a_2 = m \cdot (x - a_1)} \Rightarrow y - 0 = \frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow 3y = 2x - 2 \Rightarrow 2x - 3y - 2 = 0$$

5.2. Ecuación perpendicular a una dada.

Hemos visto que dada la ecuación de la recta en su forma general $Ax + By + C = 0$, el vector normal, asociado o perpendicular es (A,B), podemos calcular la pendiente:

$$m' = \frac{B}{A}$$

Se verifica que $m \cdot m' = -1$, vamos a demostrarlo:

$$m \cdot m' = \frac{-A}{B} \cdot \frac{B}{A} = \frac{-A \cdot B}{B \cdot A} = -1$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta perpendicular a 2x-3y+2=0 y que pasa por el punto A(1,0)

$m' = \frac{-1}{m} = \frac{-3}{2}$ ya que $m = \frac{2}{3}$ que será la pendiente de la recta paralela y como pasa por el punto A(1,0), calculamos la ecuación de la recta en su forma punto pendiente:

$$\mathbf{y - a_2 = m \cdot (x - a_1)} \Rightarrow y - 0 = \frac{-3}{2}(x-1) \Rightarrow 2y = -3x + 3 \Rightarrow -3x - 2y + 3 = 0$$

Actividad:

18. Dadas las siguientes rectas di cuáles son paralelas:

a) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{0}$

c) $x + y + 4 = 0$ $2x - 3y + 4 = 0$

d) $5x - y + 6 = 0$ $5x - y + 2 = 0$

19. Escribe la ecuación de la recta paralela a $y = 2x + 3$ en los siguientes casos:

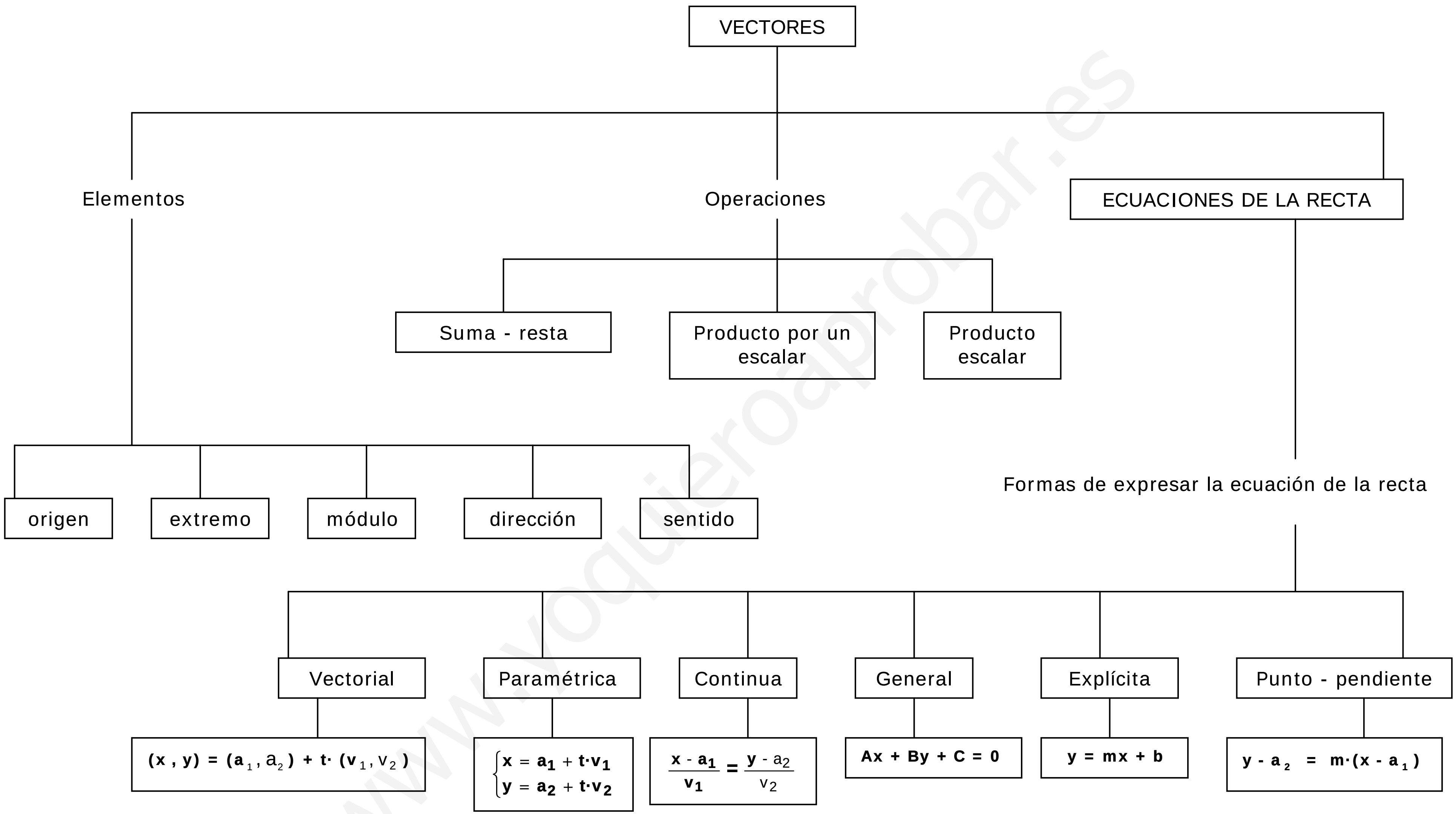
a) Pasa por (0,5)

b) Pasa por (3,2)

20.a) Obtener la pendiente, la ordenada en el origen y la representación gráfica de la recta que pasa por los puntos A(1,2) y B(5,-1).

b) Obtener la ecuación explícita y la general de la recta paralela a la recta anterior que pasa por (0,-1).

c) Obtener la ecuación vectorial y continua de la recta perpendicular a la recta del apartado a) que pasa por (0,-1).


VECTORES
Elementos
Operaciones
ECUACIONES DE LA RECTA
Suma - resta
Producto por un escalar
Producto escalar
origen
extremo
módulo
dirección
sentido
Formas de expresar la ecuación de la recta
Vectorial
Paramétrica
Continua
General
Explícita
Punto - pendiente
$(x, y) = (a_1, a_2) + t\cdot(v_1, v_2)$
$\begin{cases} x = a_1 + t\cdot v_1 \\ y = a_2 + t\cdot v_2 \end{cases}$
$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$
$Ax + By + C = 0$
$y = mx + b$
$y - a_2 = m\cdot(x - a_1)$

EJERCICIOS

1. Sea $\vec{u}$ un vector de componentes (5,3) y origen en A(1,1). Halla el extremo B y el módulo de $\vec{u}$.

2. Conociendo los puntos A(3,4) y C(5,3), halla las coordenadas del punto B de modo que $\overrightarrow{CA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

3. Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2$ y $\vec{u}\cdot\vec{w} = 3$, calcula los siguientes productos escalares:

a) $\vec{u}(3\vec{v} - 2\vec{w})$

b) $(-2\vec{u})(-\vec{v} + \vec{w})$

c) $(3\vec{u})(-2\vec{v} - 3\vec{w})$

4. Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 11$, $\vec{u} + \vec{v} = (4,6)$ y $v_2 = 2u_2$. Halla $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

5. Halla los módulos de los siguientes vectores:

a) $\vec{u}$ (12,-5)

b) $\vec{u}$ (5,12)

c) $\vec{u}$ (8,15)

6. Dados los vectores $\vec{u}$ (2,-3), $\vec{v}$ (6,1), $\vec{w}$ (-3,5) y $\vec{r}(4,2)$ efectúa las siguientes operaciones:

a) Calcula los módulos de cada vector.

b) Representa los opuestos.

c) Realiza: $\vec{u} + \vec{v}$ // $\vec{v} - \vec{w}$ // $\vec{w} + \vec{r}$

7. Dados los vectores (1,2) y (0,-3). Halla la suma y la resta analítica y gráficamente.

8. Calcula la siguiente operación de vectores: $3\{(1,2) - 2(2,-1)\} - 5(-1,1) + 4(2,-1)$

9. Calcula las componentes del vector $\vec{u}(u_1, u_2)$ sabiendo que se verifica simultáneamente $\vec{v}\cdot\vec{u} = 0$ y $\vec{w}\cdot\vec{u} = 2$, siendo $\vec{v}(2,-3)$ y $\vec{w}(-1,0)$.

10. Dados los vectores $\vec{u}(-1,4)$, $\vec{v}(2,-3)$ y $\vec{w}(2,-1)$. Calcula:

a) Los productos escalares $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$ y $\vec{w}\cdot\vec{v}$

b) El módulo de cada uno de los vectores.

c) Los ángulos que forman entre sí dos a dos.

11. ¿Cuáles son las componentes del vector que tiene por origen el punto A(-3,-2) y como extremo el punto B(2,4)?

12. Halla el módulo de los vectores siguientes:

a) $\vec{u}$ (3,-5)

b) $\vec{v}$ (10,6)

c) $\overrightarrow{AB}$, siendo A(2,-3) y B(-2,7)

d) Halla el producto escalar de $\vec{u}\cdot\vec{v}$

13. Dado el vector $\vec{u}$ de componentes (-1,-2) con origen el punto A(-3,4).

a) Halla las coordenadas del extremo B.
b) Halla el módulo del vector.
c) Representa gráficamente.

14. Escribe de todas las formas posibles :

a) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}$

b) $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5 + 4t \end{cases}$

c) (x,y) = (2,4) + t(5,1)
d) y = 5x – 4
e) 3x – y + 2 = 0

15. Representa las siguientes rectas:

a) (x,y) = (1,1) + t(-2,5)

b) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$

c) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{-2}$

16. Halla dos puntos y un vector director de las rectas (indica en que forma está cada una de ellas:

a) $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-4}{7}$

b) $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -5 - 3t \end{cases}$

c) (x,y) = (2,7) + t(-3,5)

17. Halla las ecuaciones de la recta paralela a x – y + 1 = 0 y cuya ordenada en el origen es 5.

18. Ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de 3x + 5y = 13 y 4x – 3y = - 2 y es paralela a 5x – 8y + 12 = 0.

19. Dados el punto P(1,-2) y el vector $\vec{u} = (-1,3)$, calcula:

a) Las ecuaciones de la recta en todas sus formas.
b) Tres puntos distintos de la recta.
c) Representa la recta.

20. Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(-3,-6) y B(3,-2).

21. Halla la pendiente de las rectas:

a) $y = -3x + 1$
b) $y = 2 - x$
c) $3x - 2y - 4 = 0$
d) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3}$

22. Dados los puntos A(1,-3), B(2,0) y C(-4,1) se pide:

a) Ecuación de la recta r que pasa por A y B.
b) Ecuación de la recta paralela a r que pasa por C.
c) Ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por C.

23. Encuentra la ecuación de la recta que tiene por dirección el vector $\vec{u} = (-1,3)$ y pasa por el punto de corte de las rectas de ecuaciones $x + y - 1 = 0$, $2x - 3y = 0$

24. Sean A(1,0), B(4,-3) y C(5,2) los tres vértices de un triángulo. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A y es paralela a la que pasa por B y C.

25. Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{a}$ y $s \equiv 2x - 3y + m = 0$

a) Halla a para que sean paralelas.
b) Halla m para que s pase por A(2,1)

26. Halla la ecuación de la recta en todas sus formas que pasa por A(1,-2) y tiene como vector director $\vec{u}\,(2,3)$.

27. **a)** Representa la recta 3x – 2y + 5 = 0.
b) Halla un vector director de la recta del apartado a).
c) Halla la pendiente de la recta del apartado a).

28. **a)** Pasa a la forma explícita la siguiente ecuación, indicando en que forma está:

$$x = 3 - 2t$$
$$y = -1 + 3t$$

b) Pasa a la forma punto pendiente la siguiente ecuación, indicando en que forma está:

$$(x,y) = (2,-3) + t\,(-5,6)$$

c) Pasa a la forma paramétrica la siguiente ecuación, indicando en que forma está:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+4}{-3+4}$$

29. Representa las siguientes ecuaciones:

a) 2x – 5y + 2 = 0
b) (x,y) = (1,6) + t (- 3,-1)
c) y – 2 = 2 (x + 1)

30. Dados los vectores: $\vec{u} = (-1,2)$, $\vec{v} = (0,-3)$ y $\vec{w} = (-2,3)$. Resuelve la siguiente ecuación: $2\vec{u} - 3\vec{w} + x = 3(\vec{u} + \vec{v})$.

31. Calcula las ecuaciones (explícita, general, punto pendiente y continua) de la recta paralela a $(x, y) = (-2,0) + t(3,-5)$.

32. Escribe las ecuaciones de una recta paralela a y = 4x – 1 y que pasa por A(3,0).

33. Dados los vectores $\vec{u} = (-1,3)$, $\vec{v} = (3,-3)$ y $\vec{w} = (5,-2)$; resuelve la siguiente ecuación: $-3\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{x} = 2\vec{w}$

34. Dados el punto P(1,-2) y el vector $\vec{v} = (-1,3)$ obtener:

- **a)** Las ecuaciones vectorial, continua, general y explicita de la recta r que pasa por P y tiene como dirección $\vec{v}$.
- **b)** Halla la pendiente de la recta.
- **c)** Calcula la ecuación de la recta paralela a r que pase por el origen de coordenadas.
- **d)** Representar la recta r.

35. Dados los vectores $\vec{u} = (0,-1)$, $\vec{v} = (7,-2)$ y $\vec{w} = (-5,6)$, calcular:

- **a)** $2\vec{u} - 3\vec{v} =$
- **b)** $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} =$

36. Escribir las ecuaciones de las rectas que contienen a cada uno de los lados del triángulo cuyos vértices son: (2,1), (0,2) y (-3,-4)

37. Dados los puntos A(1,-3), B(2,0) y C(-4,1) se pide:

- **a)** Ecuación de la recta r que pasa por A y B.
- **b)** Ecuación de la recta paralela a r que pasa por C.

38. Razona si las rectas $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3}$, $(x, y) = (0,2) + t(4,-6)$ son paralelas o se cortan. Calcula una recta paralela a cada una de ellas y que pasen por el origen de coordenadas.

39. Dados los puntos P(8,2) y Q(2,1); calcular la pendiente, la ordenada en el origen y la representación gráfica de la recta que los une. Obtener la ecuación explícita, general y punto pendiente de la recta paralela a r (definida por los puntos P y Q) que pasa por el punto R(0,-2)

<u>CUESTIONES</u>

1. Si dos vectores tienen la misma longitud, ¿podemos asegurar que son iguales? Razona la respuesta. Pon ejemplos.

2. Las componentes de un vector son 5 en el eje x y – 4 en el eje y. ¿Cuánto vale el módulo?

3. ¿Cuáles de los siguientes vectores tiene mayor módulo? $\vec{u} = (3,0)$, $\vec{u} = (2,1)$, $\vec{u} = (2,2)$ y $\vec{u} = (3,2)$

4. Demostrar que los puntos A(0,1), B(3,5), C(7,2) y D(4,-2) son los vértices de un cuadrado.

5. ¿Cuál es el vector opuesto a (1,2)? ¿Cómo son sus módulos? y ¿sus sentidos?

6. Dados los vectores $\vec{u} = (1,2)$ y $\vec{v} = (-2,1)$, ¿qué vector deberé sumar a $\vec{u} + \vec{v}$ para obtener el vector (0,0)?

7. ¿Pertenece el punto P(0,5) a la recta determinada por $\vec{u}$(-5,2) y A(5,3)?

8. Determina el valor de a para que las rectas sean paralelas:

$$ax + (a - 1)y - 2(a + 2) = 0$$
$$3ax - (3a+1)y - (5a+4) = 0$$

9. Dados A(1,2) y B(2,b), determina b para que la recta que pasa por A y B tenga pendiente 1.

10. Dados los puntos A(-2,3), B(4,1) y C(-1,-1); calcula un punto D de forma que los cuatro puntos formen un paralelogramo.

11. Calcular x para que los vectores $\vec{a} = (3, x)$ y $\vec{b}(5,2)$ formen un ángulo de 60º.

12. Si dos vectores tiene la misma longitud, ¿podemos asegurar que son iguales? Razona la respuesta.

13. **a)** ¿Cuántos sentidos pueden existir en una dirección dada?
b) ¿Es posible que dos vectores tengan la misma dirección, punto de aplicación e intensidad y que sean distintos?

14. Halla el valor de m de modo que la recta y = mx +3 pase por el punto de intersección de las rectas y = 2x + 1, y = x + 5

15. Un vector tiene módulo a = 5 y su primera componente es a_1 = 3, ¿cuál es la segunda componente?.

16. Un vector de módulo 5 tiene las dos componentes iguales, ¿cuánto valen?.

UNIDAD 8

FUNCIONES

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1. (**)Distinguir si una gráfica es función o no.
2. Hallar el dominio de una función dada su expresión analítica.
3. (**)Reconocer las características generales de una función.
4. Hallar la simetría de una función dada su expresión analítica.
5. Diferenciar función continua de discontinua, clasificando los diferentes tipos de discontinuidad.
6. (**)Estudiar las funciones polinómicas de grado 0, 1 y 2.
7. Estudiar las funciones de proporcionalidad inversa.
8. Estudiar las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Esquema:

1. Introducción.

2. Funciones reales de variable real.

3. Formas de encontrarnos la función.

4. Dominio y recorrido de una función.
   4.1. Dominio de una función
      - Analíticamente:
         4.1.1. Funciones polinómicas.
         4.1.2. Funciones racionales.
         4.1.3. Funciones irracionales.
      - Gráficamente.
   4.2. Recorrido de una función

5. Monotonía.
   5.1. Función creciente y estrictamente creciente.
   5.2. Función decreciente y estrictamente decreciente.

6. Extremos relativos y absolutos.
   6.1. Máximo relativo.
   6.2. Mínimo relativo.
   6.3. Máximo absoluto.
   6.4. Mínimo absoluto.
7. Continuidad
   a) Discontinuidad inevitable de salto finito.
   b) Discontinuidad inevitable de salto infinito.
   c) Discontinuidad evitable.

8. Funciones acotadas
   8.1. Acotada superiormente
   8.2. Acotada inferiormente

9. Funciones simétricas
   9.1. Simetría par
   9.2. Simetría impar

10. Funciones periódicas.

11. Puntos de corte.

12. Funciones polinómicas
   12.1. De grado cero: Funciones constantes
   12.2. De grado uno: Rectas
   12.3. De grado dos: Parábolas

13. Funciones de proporcionalidad inversa

14. Funciones trigonométricas

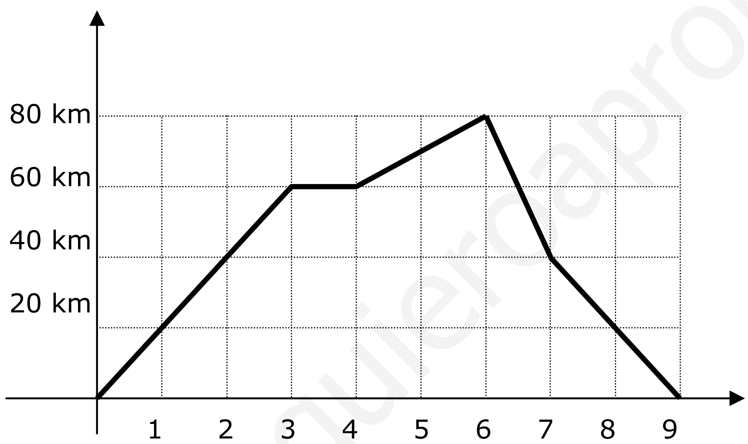
1. Introducción

En los medios de comunicación podemos encontrar situaciones en las que están relacionadas dos magnitudes denominadas variables:

- Consumo de gasolina de un coche en función de la velocidad.
- Factura del teléfono en función del tiempo hablado.
- Número de personas en paro en función del día del año en que nos encontramos.
- La temperatura en función de la hora del día.
- El espacio que recorre un ciclista en función del tiempo transcurrido.

Vamos a observar el último ejemplo: "Espacio que recorre un ciclista en función del tiempo transcurrido"

En este caso el espacio que recorre el ciclista **depende** del tiempo transcurrido, por eso denominamos **variable dependiente** al espacio transcurrido y **variable independiente** al tiempo transcurrido. Además para cada valor del tiempo tenemos un único valor del espacio recorrido.



(En el eje X se representa el tiempo transcurrido en horas y en el eje Y el espacio recorrido en kilómetros)

Cada valor de la variable independiente lo identificamos con la letra x y se representa en el eje de abcisas X, estos valores forman el conjunto origen llamado **dominio** que será siempre un subconjunto de R (conjunto de los números reales), se admite R como un subconjunto de si mismo. Y cada valor de la variable dependiente que le corresponde lo identificamos con la letra y, y se representa en el eje de ordenadas Y, estos valores forman el conjunto imagen llamado **recorrido o imagen**. Como y está en función de x, si llamamos f a la función podemos escribir $y = f(x)$.

Estos pares de valores (x,y) (x origen e y imagen) determinan los puntos en el plano y representan la gráfica de la función.

Se puede definir: Una función es una correspondencia entre dos variables de forma que a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente.

Actividad:

1. De los ejemplos antes expuestos ¿cuáles serán las variables independientes? y ¿cuáles las variables dependientes?

2. ¿Sabrías poner algún otro ejemplo de la vida real en la que una variable dependa de otra?

3. Observando la gráfica anterior, responde a las siguientes preguntas:
   a) ¿A cuántos kilómetros decide parar?
   b) ¿Cuánto tiempo había transcurrido?
   c) ¿Cuánto tiempo ha estado parado?
   d) ¿Cuánto tiempo tarda en volver a casa desde que decide regresar?
   e) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido en total?
   f) ¿Cuál sería el conjunto Imagen?
   g) ¿Cuánto tiempo ha durado la ruta que ha hecho?
   h) ¿Cuál sería el conjunto dominio?

2. Funciones reales de variable real

Una función es una relación entre dos variables a las que en general, llamamos x e y.

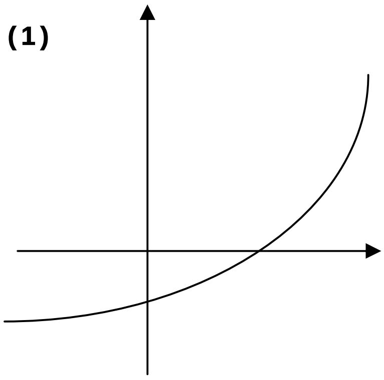
- x es la variable independiente (en el ejemplo de la gráfica sería el tiempo)
- y es la variable dependiente (en el ejemplo sería la distancia respecto al punto de partida)
- La función asocia a cada valor de x **un único** valor de y. Se dice que y está en función de x y se escribe $y = f(x)$.
- Sobre los ejes cartesianos se representan las dos variables:
  - La x en el eje de abcisas X
  - La y en el eje de ordenadas Y
- Los valores de x para los cuales hay valores de y forman el dominio de la función.
- Los valores de y correspondientes a esas x forman el recorrido o imagen de la función.

Una función real de variable real f es toda aplicación de un subconjunto $D \subseteq R$ en R, entendiendo por aplicación una correspondencia que asocia a cada elemento de D un único elemento de R. Se expresa:

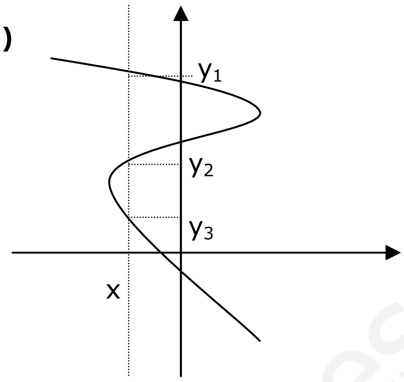
$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow R \\ x &\dashrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

o simplemente $y = f(x)$, donde x es el origen o variable independiente, e y es la imagen de x mediante f o variable dependiente.

(1)



(2)

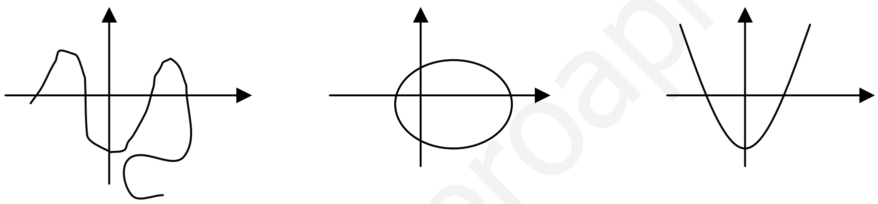


La gráfica (1) es función pues para cada valor de x existe un único valor de y.

La gráfica (2) no es función pues existen valores de x que le corresponden varios valores de y.

Actividad:

4. ¿Cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones?



3. <u>Formas de encontrarnos las funciones</u>

Las funciones pueden venir dadas mediante una fórmula matemática (lo que se denomina expresión analítica), mediante una tabla de valores, mediante una gráfica o bien mediante un enunciado.

a) Mediante una fórmula:

- Área del círculo: $A = \pi \cdot r^2$
- Espacio recorrido: $e = v \cdot t$
- Parábola: $y = ax^2 + bx + c$

b) Mediante una tabla de valores:

- Consumo de gasolina de un coche en función de la velocidad.

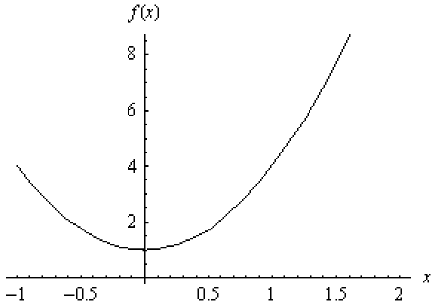
x (velocidad)	100	120	140	160
y (litros)	5'9	6'2	6'8	7'5

- Número aproximado de bacterias en función del tiempo:

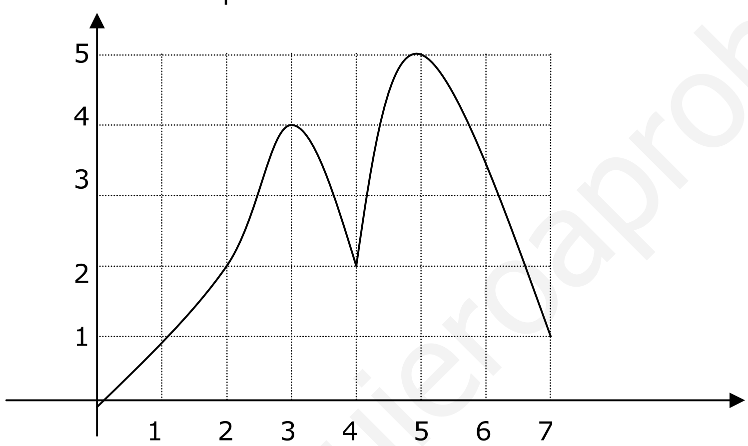
x (horas)	0	1	2	3	4	5	6
y (miles)	3	6	12	24	48	96	192

c) Mediante una gráfica:

- Gráfica de la parábola: $y = 3x^2 + 1$



- Gráfica: cotización en bolsa de un producto la primera semana que se sacó a bolsa.



d) Mediante un enunciado:

- El parking de unos grandes almacenes cobra 80 céntimos por aparcar la primera media hora y 50 céntimos por cada media hora siguiente que pase.
- La función que asocia a cada número real su cuadrado más dos unidades.

4. Dominio y recorrido de una función

4.1. Dominio de una función

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x, para los cuales existe un valor de la variable dependiente y, es decir, existe imagen mediante la función. Se escribe Dom(f).

Analíticamente:

4.1.1. Funciones polinómicas

$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ todos los valores reales de x admiten imagen.

Dom(f) = R

Ejemplo

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \Rightarrow \text{ por ser una función polinómica}$$

$$Dom(f)=R$$

4.1.2. Funciones racionales

Cocientes de polinomios: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. No pertenecen al dominio aquellas x que anulen el denominador (ya que no tiene sentido dividir entre cero)

Ejemplo

a)

$$f(x) = \frac{2x-5}{3x+6} \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$$

$$Dom(f) = R - \{-2\}$$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+4} \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$ imposible, no encontramos ninguna x que anule el denominador, de donde deducimos Dom(f)=R

4.1.3. Funciones irracionales

Sea $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ (la variable independiente viene bajo el signo radical)

- Si n es par: $g(x) \geq 0$

(puedes pensar en $\sqrt{-4}, \sqrt{0}, \sqrt{4}$)

Ejemplo

$$f(x) = \sqrt{2x-3} \Rightarrow 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$Dom(f) = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$$

- Si n es impar: Dom(f) = Dom(g)

(puedes pensar en $\sqrt[3]{-27}, \sqrt[3]{0}, \sqrt[3]{27}$)

Ejemplo

$$f(x) = \sqrt[3]{2x-3} \Rightarrow Dom(f) = Dom(2x - 3) = R,$$

por ser $2x - 3$ una función polinómica

Actividad:

5. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 5x + 6}$

c) $f(x) = \dfrac{7x - 1}{2x + 4}$ **d)** $f(x) = \dfrac{3x - 2}{5x - 7}$

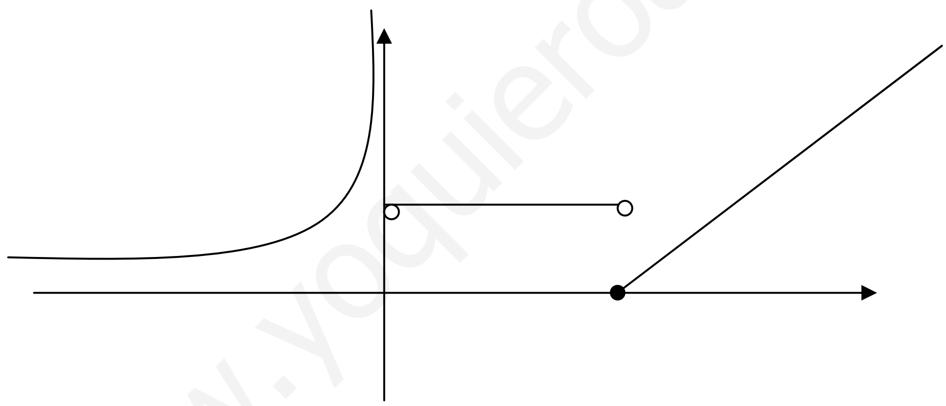
e) $f(x) = \sqrt{4x + 7}$ **f)** $f(x) = \sqrt{6x + 3}$

g) $f(x) = \sqrt{2x}$ **h)** $f(x) = \sqrt[3]{2x + 6}$

i) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{2x + 3}{x}}$ **j)** $f(x) = \sqrt[7]{\dfrac{3x^2 - 7}{2x + 1}}$

Gráficamente:

Cuando la función viene dada gráficamente para calcular el dominio, simplemente aplastamos la gráfica sobre el eje X. De esta forma, colocamos cada valor de la imagen **y** sobre su origen **x**, y así tendríamos señalados los **x** que tienen imagen, quedando huecos en los **x** que no tienen imagen.



En este caso el dominio sería lo que hemos dibujado debajo del eje de abcisas, es decir:

$$Dom(f) = R - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

4.2. Recorrido de una función

Es el conjunto de todas las imágenes de la función f, es decir:

$$Im(f) = \{f(x)/x \in Dom(f)\}$$

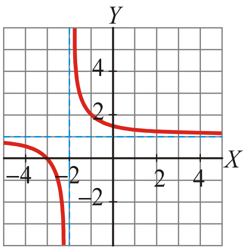
Cuando la función viene dada gráficamente para calcular la imagen, simplemente aplastamos la gráfica sobre el eje Y.

En la gráfica anterior $Im(f) = (0, \infty)$

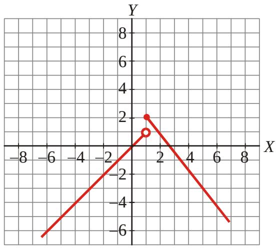
Actividad:

6. Calcula el dominio y la imagen de las siguiente funciones:

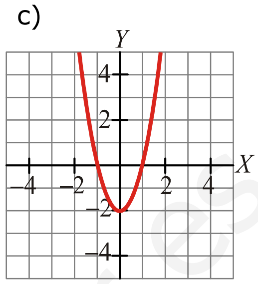
a)



b)



c)

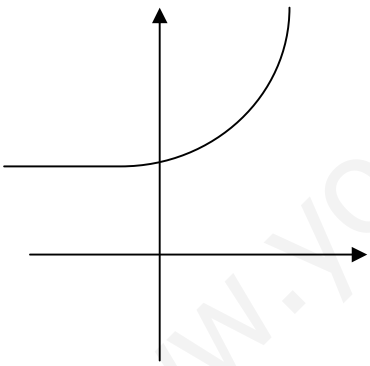


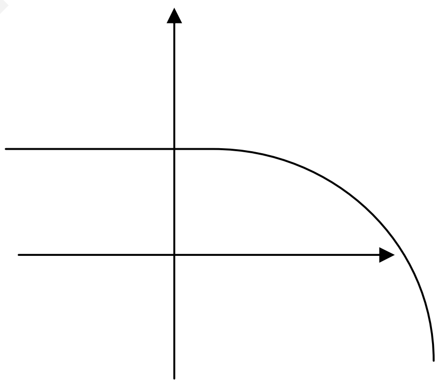
5. Monotonía

Cuando hablamos de crecimiento de una función enseguida lo asociamos a subir, y si nos referimos al decrecimiento pensamos en bajar.

Se dice que una función es creciente si al aumentar la variable x también aumenta la y, decimos que es decreciente si al aumentar la x disminuye la y.

Pero, nos preguntamos ¿qué pasa cuando al aumentar la variable x, la variable y se mantiene? Podemos encontrarnos gráficas de la siguiente forma:

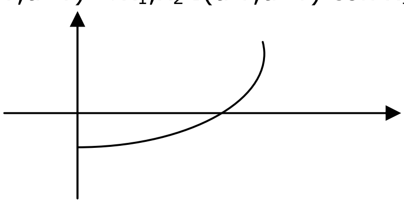




Al ver este tipo de gráficas debemos ampliar el concepto de crecimiento y decrecimiento.

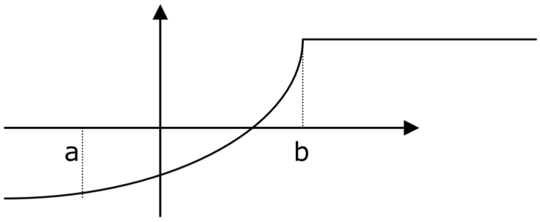
5.1. *Funciones estrictamente crecientes y crecientes*

a) Una función es estrictamente creciente en un punto a si existe un entorno de a, es decir, un intervalo (a-r,a+r) $\forall x_1, x_2 \in (a-r,a+r)$ con $x_1<x_2$ se cumple $f(x_1)< f(x_2)$



Es decir en un intervalo pequeño alrededor del punto a al aumentar la x aumenta la y.

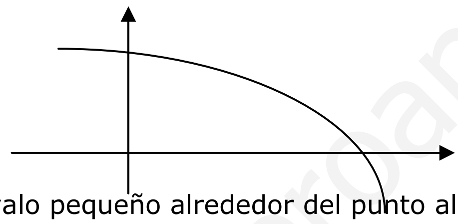
b) Una función es creciente en un punto a si existe un entorno de a, es decir, un intervalo (a-r,a+r) $\forall x_1,x_2 \in$(a-r,a+r) con $x_1<x_2$ se cumple $f(x_1) \leq f(x_2)$



En este caso en el punto x = a, la función es estrictamente creciente y en el punto x = b la función es creciente.

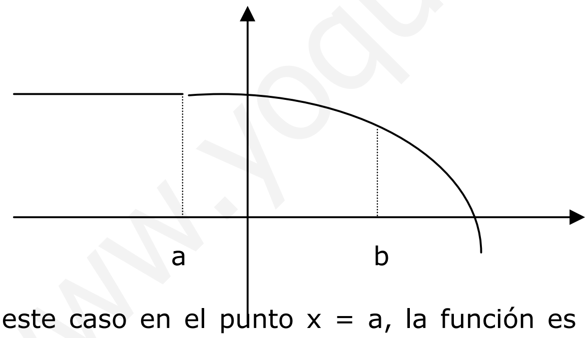
5.2. Funciones estrictamente decrecientes y decrecientes

a) Una función es estrictamente decreciente en un punto a si existe un intervalo (a-r,a+r) $\forall x_1,x_2 \in$(a-r,a+r) con $x_1<x_2$ se cumple $f(x_1)>f(x_2)$



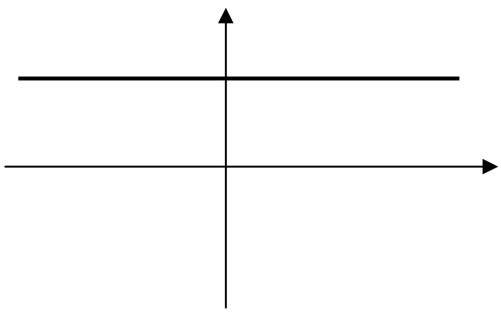
Es decir en un intervalo pequeño alrededor del punto al aumentar la x disminuye la y.

b) Una función es decreciente en un punto a si existe un intervalo (a-r,a+r) $\forall x_1,x_2 \in$(a-r,a+r) con $x_1<x_2$ se cumple $f(x_1) \geq f(x_2)$



En este caso en el punto x = a, la función es decreciente y en el punto x = b la función es estrictamente decreciente.

Las funciones constantes son crecientes y decrecientes a la vez ya que verifican ambas definiciones.



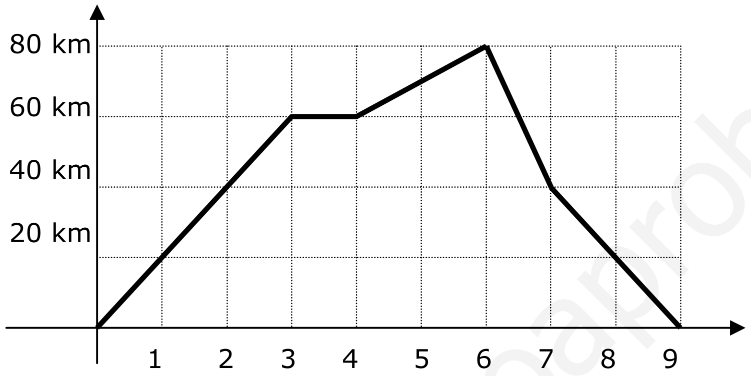
y = f(x) = cte

Una función será (estrictamente) creciente o (estrictamente) decreciente en un intervalo si lo es en cada punto del intervalo.

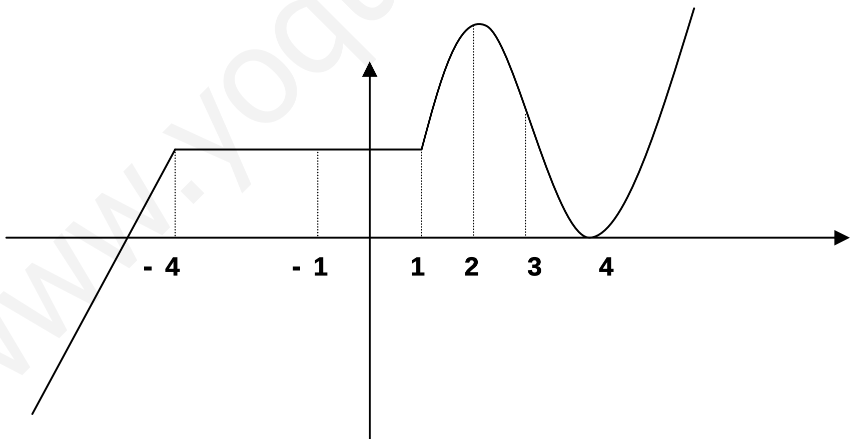
Ejemplo 1:

Si estudiamos la gráfica de la introducción:

Estrictamente creciente: $(0,3)\cup(4,6)$
Estrictamente decreciente: $(6,9)$
Creciente y decreciente: $(3,4)$ $x=3$, $x=4$ la función es creciente.

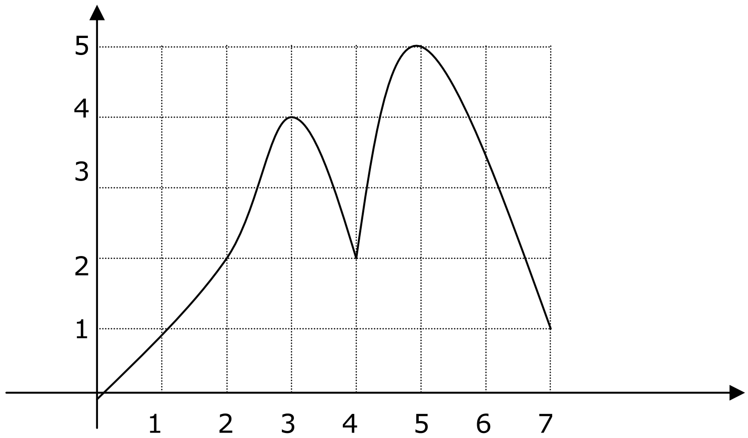


Ejemplo 2:



Estrictamente creciente: $(-\infty,-4)\cup(1,2)\cup(4,\infty)$
Estrictamente decreciente: $(2,4)$
Creciente y decreciente: $(-4,1)$
¿Cómo es la función en los puntos $x = -4$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$?

Ejemplo 3:



En este caso, ¿cuáles serían los intervalos de monotonía?

Actividad:

7. Calcula los intervalos de monotonía de la actividad 6.

6. Extremos relativos y absolutos

6.1. Máximo relativo

Una función f(x) alcanza un máximo relativo en x = a si su imagen f(a) es el mayor valor que toma la función en un intervalo alrededor del punto, es decir si existe un intervalo (a-r,a+r) : $\forall$ x$\in$ (a-r,a+r) f(x) < f(a)

6.2. Mínimo relativo

Una función f(x) alcanza un mínimo relativo en x = a si su imagen f(a) es el menor valor que toma la función en un intervalo alrededor del punto, es decir si existe un intervalo (a-r,a+r) : $\forall$ x $\in$ (a-r,a+r) f(x) > f(a)

6.3. Máximo absoluto

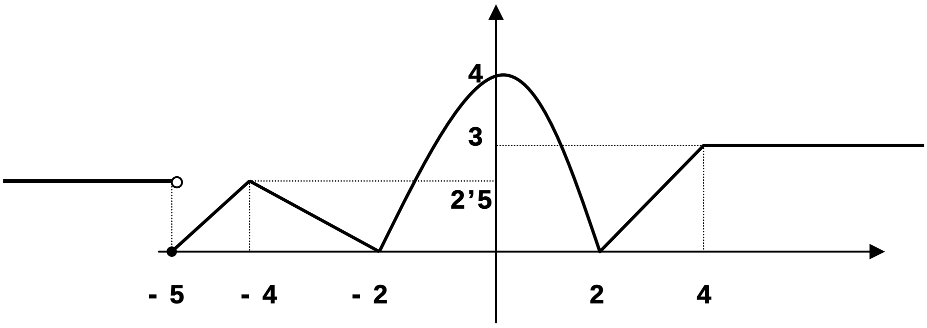
Una función f(x) alcanza un máximo absoluto en x = a si f(a) es el mayor valor que toma la función en todo su dominio.

6.4. Mínimo absoluto

Una función f(x) alcanza un mínimo absoluto en x = a si f(a) es el menor valor que toma la función en todo su dominio.

Los extremos absolutos son también extremos relativos.

Ejemplo:



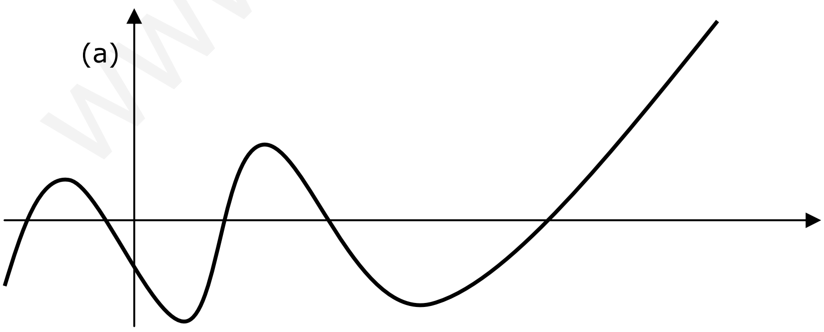
Dom(f)= R
Im(f)= $[0.4]$
Estrictamente creciente: $(-5,-4) \cup (-2,0) \cup (2,4)$
Estrictamente decreciente: $(-4,-2) \cup (0,2)$
Creciente y decreciente: $(-\infty,-5) \cup (4,\infty)$
Máximo relativo: (-4,2'5), (0,4) este último es también absoluto
Mínimo relativo: (-5,0), (-2,0), (2,0) los tres son también absolutos
x = 4 la función es creciente

Actividad:

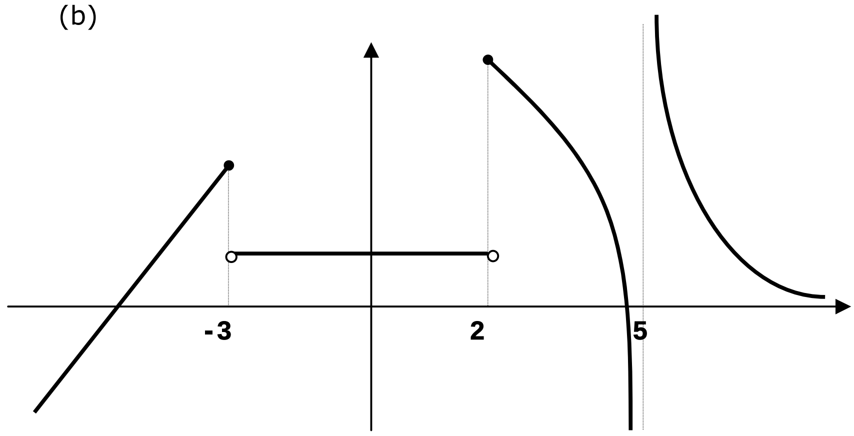
8. Analiza los extremos del ejemplo 3 del apartado 5 de teoría.

9. Calcula los extremos de la actividad 6.

7. <u>Continuidad</u>



(b)



Si nos fijamos en la gráfica (a), no presenta ningún salto y se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, en cambio en la gráfica (b) presenta tres saltos en x = -3, x = 2, x = 5

Una función diremos que es continua siempre y cuando la podamos dibujar sin levantar el lápiz del papel, es decir no presenta ningún salto. En caso contrario sería una función discontinua y los puntos donde no es continua son los puntos de discontinuidad.

Veamos los tipos de discontinuidad:

a) Discontinuidad inevitable de salto finito:

Cuando observamos en la gráfica un salto entre dos trozos de ella que puede medirse, diremos que es discontinua de salto finito en x = a

Si observamos la gráfica (b) en x = 2 es discontinua de salto finito ¿existe algún otro punto donde ocurra esto?

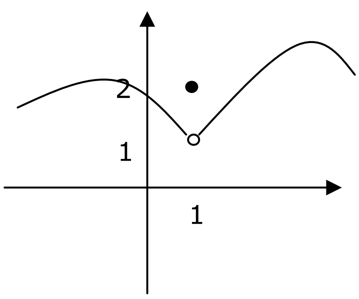
b) Discontinuidad inevitable de salto infinito:

Cuando observamos en la gráfica un salto entre dos trozos de ella que no puede medirse, es decir uno de los trozos (o ambos) se aleja en el infinito.

Si observamos la gráfica (b) en x = 5 es discontinua de salto infinito, en este caso los dos trozos de gráfica que se acercan a x = 5 sus imágenes se van a mas y menos infinito

c) Discontinuidad evitable:

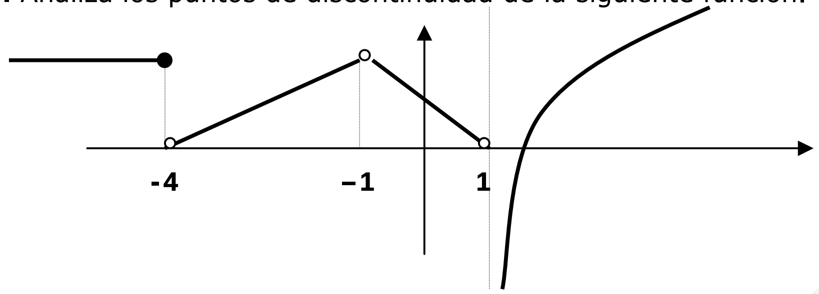
Cuando la gráfica de la función se interrumpe en un punto donde no hay imagen o la imagen está desplazada del resto de la gráfica, diremos que en el punto x = a es discontinua evitable



Esta gráfica presenta una discontinuidad evitable en x = 1

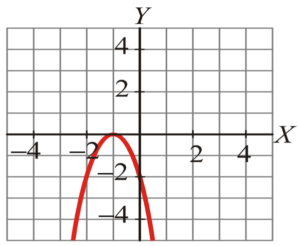
Actividad:

10. Analiza los puntos de discontinuidad de la siguiente función.



8. Funciones acotadas.

8.1. *Función acotada superiormente*

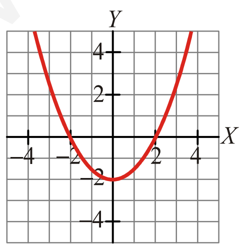


Si nos fijamos en esta gráfica, vemos que el mayor valor que puede tomar la función (es decir, la imagen mayor) es y = 0. Por ello podemos definir:

Una función f(x) está acotada superiormente si todas las imágenes son menores o iguales que un número real, es decir si y sólo si $\exists$ k$\in$R tal que f(x) $\leq$ k, $\forall$x$\in$Dom(f). K se llama cota superior y cualquier valor mayor que k también lo es.

En el ejemplo podemos decir que está acotada superiormente por k = 0.

8.2. *Función acotada inferiormente*



Si nos fijamos en esta gráfica, vemos que el menor valor que puede tomar la función (es decir, la imagen menor) es y = -2. Por ello podemos definir:

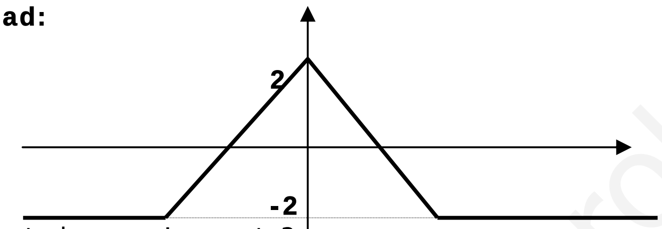
Una función f(x) está acotada inferiormente si todas las imágenes son mayores o iguales que un número real, es decir si y sólo si $\exists\ k' \in R$ tal que $f(x) \geq k'$, $\forall x \in Dom(f)$

En el ejemplo podemos decir que está acotada inferiormente por k'=-2

Una función está acotada si lo está superior e inferiormente. Gráficamente si la función es acotada está contenida por completo en una banda horizontal.

Actividad:

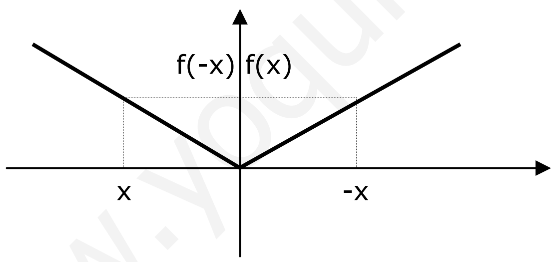
11.



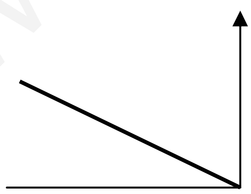
¿Está acotada superiormente?
¿Está acotada inferiormente?
¿Está acotada?

9. Funciones simétricas

9.1. Respecto al eje Y: simetría par



Si observamos la gráfica anterior y la doblamos por el eje Y la gráfica nos quedaría de la siguiente forma:

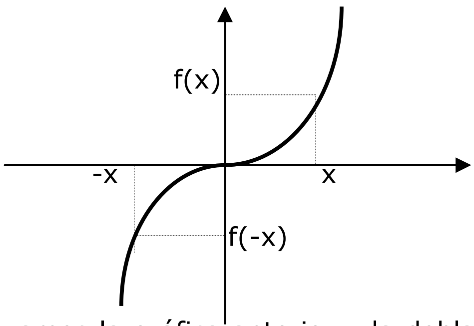


Se verifica que cada x y su opuesto tienen la misma imagen, es decir f(x) = f(-x) $\forall x \in Dom(f)$. Hablamos de función par.

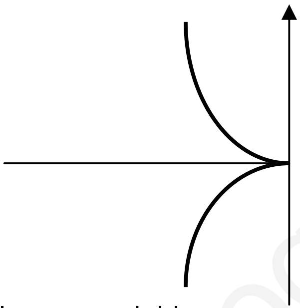
Ejemplo:
Dada la función $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$ veamos si presenta simetría par:

$f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 + 3 = x^4 + 2x^2 + 3 = f(x)$, como f(-x)=f(x) la función es par

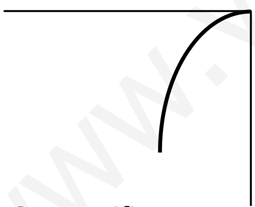
9.2. *Respecto al origen de coordenadas: simetría impar*



Si observamos la gráfica anterior y la doblamos por el eje Y la gráfica nos quedaría de la siguiente forma:



Si volvemos a doblar pero está vez por el eje X nos quedaría de la siguiente forma:



Se verifica que cada x y su opuesto tienen imágenes opuestas, es decir, $f(x) = -f(-x)\ \ \forall x \in Dom(f)$. Hablamos de funciones impares.

Ejemplo:
Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$ veamos si presenta simetría impar:

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x \neq f(x)$ la función no es par

$-f(-x) = -(-x^3 + 3x) = x^3 - 3x = f(x)$ como $f(x) = -f(-x)$ la función es impar

No puede existir simetría respecto al eje X puesto que se contradice con la definición de función al exigir que cada punto tenga dos imágenes.

Pueden existir otros ejes o puntos de simetría, de igual forma que no tiene porqué existir ningún tipo de simetrías.

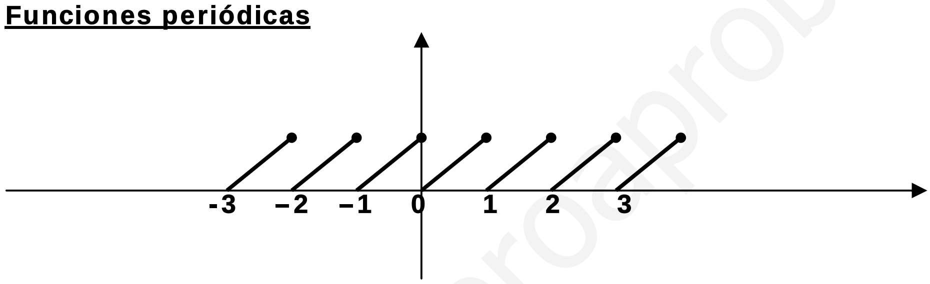
Actividad:

12. Halla las simetrías de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{4}$ **b)** $f(x) = 3x^2 - 5x^4$

c) $f(x) = \dfrac{2x}{x^3 - 5x^5}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 2x}$

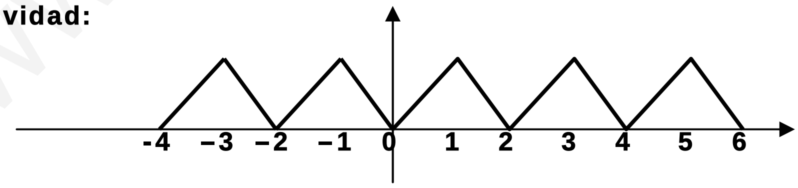
10. Funciones periódicas



Si observamos esta gráfica, cada 1 unidad se repite el dibujo es lo que llamamos funciones periódicas y el intervalo en que se repite periodo. Esta función sería periódica de periodo 1.

Una función es periódica de periodo T, si se repite parte de la gráfica en cada intervalo de amplitud T, es decir T es el menor número real que cumple $f(x) = f(x + T)\ \forall x \in Dom(f)$.

Actividad:



13. ¿Cuál es el periodo de esta función?

11. Puntos de corte

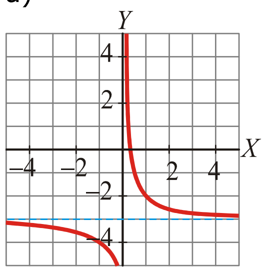
Los puntos de corte de una función con los ejes, son los puntos en los que la gráfica de la función corta a los ejes. Se calculan:

- Puntos de corte con el eje Y: x=0
- Puntos de corte con el eje X: y=0

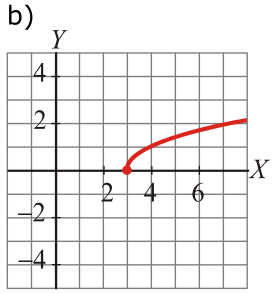
Actividad:

14. Analiza las siguientes funciones:

a)



b)

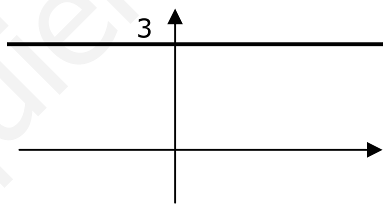


12. Funciones polinómicas

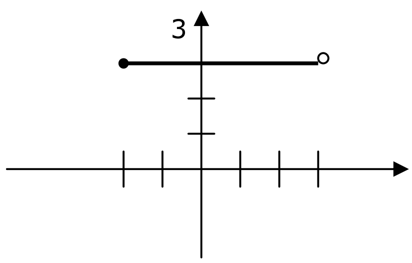
12.1. *De grado cero: Funciones constantes*

Son de la forma $f(x) = k$, donde k es un número real.

Ejemplo: Dibujamos f(x)=3



Dibujamos f(x)=3, pero en este caso Dom(f)= $[-2,3)$



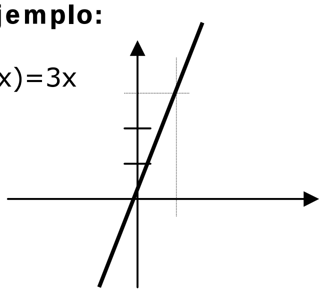
12.2. *De grado uno: Funciones afines y lineales (Rectas)*

a) Función lineal o de proporcionalidad directa:

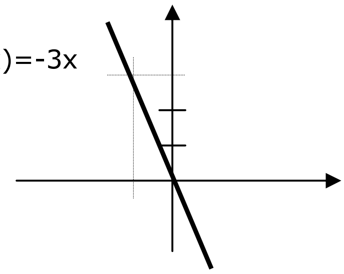
Gráficamente son rectas. Son de la forma f(x)=mx, donde m es la pendiente de la recta. Si m>0 es creciente y si m<0 es decreciente. Siempre pasan por (0,0)

Ejemplo:

f(x)=3x



f(x)=-3x

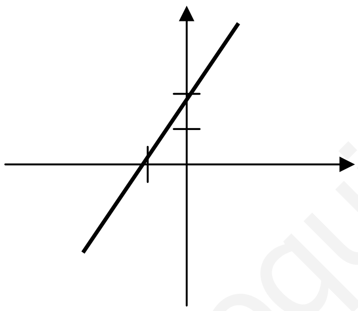


b) Función afín:

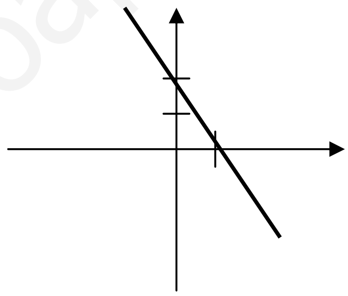
Gráficamente son rectas. Son de la forma f(x)=mx+n (ecuación de la recta en su forma explícita), donde m es la pendiente de la recta y n es la ordenada en el origen es decir pasa por (0,n). No pasan por (0,0)

Ejemplo:

f(x)=2x+2



f(x)=-2x+2



Actividad:

15. Representa la función $f(x) = -2x + 3$ en el intervalo $(-3,5]$.

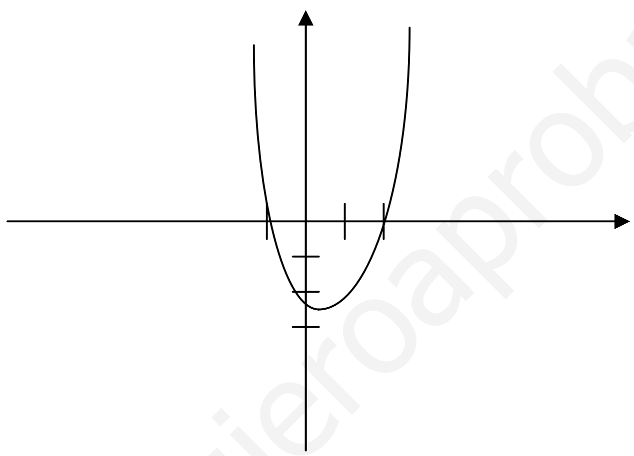
16. Una recta y = ax + b, pasa por los puntos A(1,3) y B(2,1). Halla a y b y represéntala.

12.3. De grado dos: Parábolas

Gráficamente son parábolas. Son de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Si a>0 la parábola está orientada hacia arriba y si a<0 está orientada hacia abajo. El vértice tiene como abscisa $x = \frac{-b}{2a}$

Ejemplo: $f(x) = x^2 - x - 2$

- $a=1>0 \Rightarrow$ parábola orientada hacia arriba.
- Vértice: $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{-9}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{4}\right)$
- Puntos de corte:
  $x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (0,-2)$
  $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\{\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (2,0) \\ (-1,0) \end{cases}$



Actividad:

17. Representa la función $f(x) = x^2 + x + 1$ en el intervalo $(-3,3]$

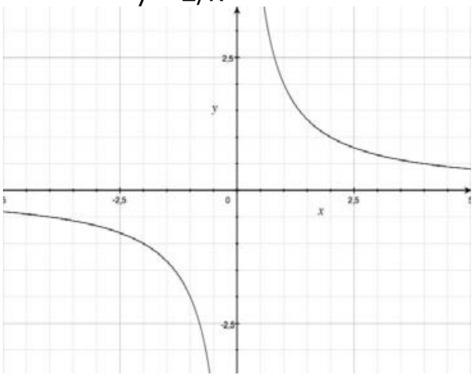
18. Una parábola pasa por los puntos A(0,1), B(2,1) y tiene como vértice el punto C(1,0). Halla su expresión analítica.

19. Representa gráficamente la función $f(x) = -4x^2 + 8x + 5$.

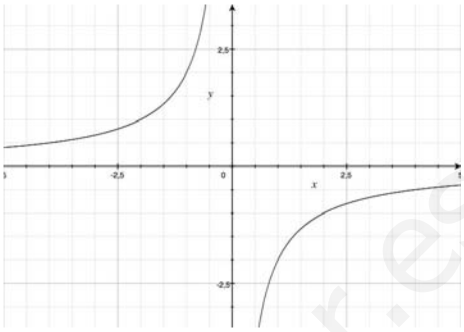
13. Funciones de proporcionalidad inversa

Gráficamente son hipérbolas. Son de la forma $f(x) = \frac{k}{x}$ donde k es un número real. No pasa por (0,0) ni corta a los ejes.

y= 2/x



y= -2/x



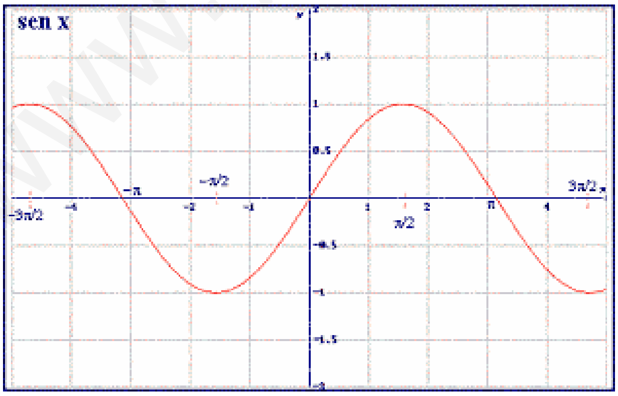
Actividad:

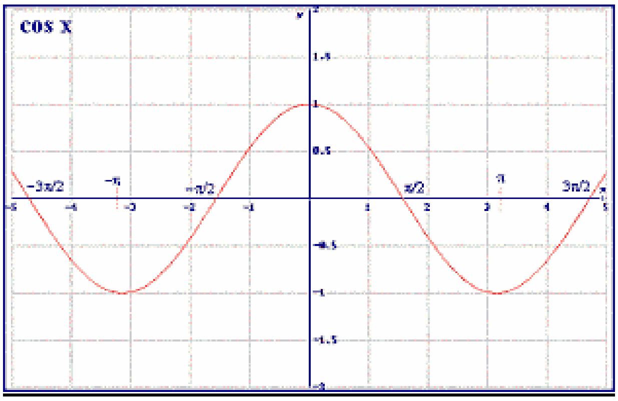
20. Analiza las funciones y = 2/x, y = -2/x

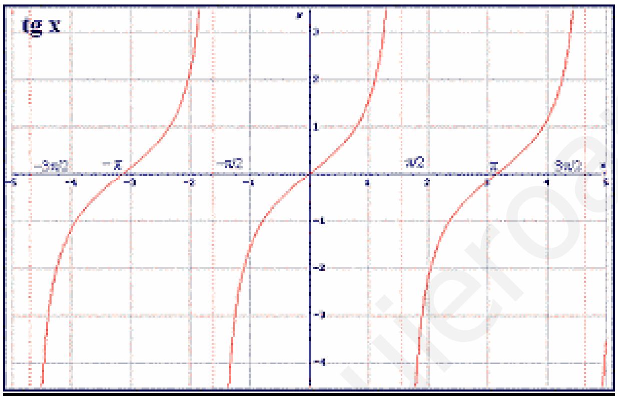
21. Representa la función $f(x) = \frac{3}{x}$ y $f(x) = \frac{-3}{x}$. ¿Qué diferencias observan en las gráficas?

14. Funciones trigonométricas

Son las funciones periódicas más conocidas siendo el periodo $T = 2\pi$ en el caso del f(x)=senx y f(x)=cosx, y de periodo $T = \pi$ en el caso de la tangente.







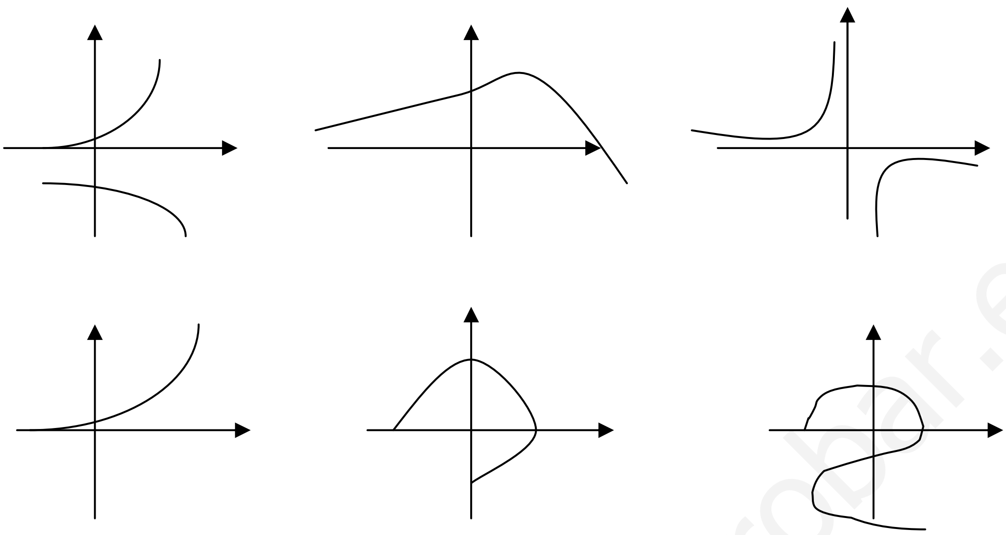
Actividad:

21. Analiza las funciones trigonométricas dibujadas anteriormente.

- FUNCIÓN
  - Características
    - Dominio
    - Imagen
    - Puntos de corte
    - Monotonía
    - Extremos
    - Continuidad
    - Periodicidad
    - Acotación
    - Simetría
  - La gráfica puede ser
    - Según su gráfica puede ser
      - Función lineal, afín, constante (recta)
      - Función cuadrática (parábola)
      - Función de proporcionalidad inversa
      - Funciones circulares
        - Seno
        - Coseno
        - Tangente

EJERCICIOS

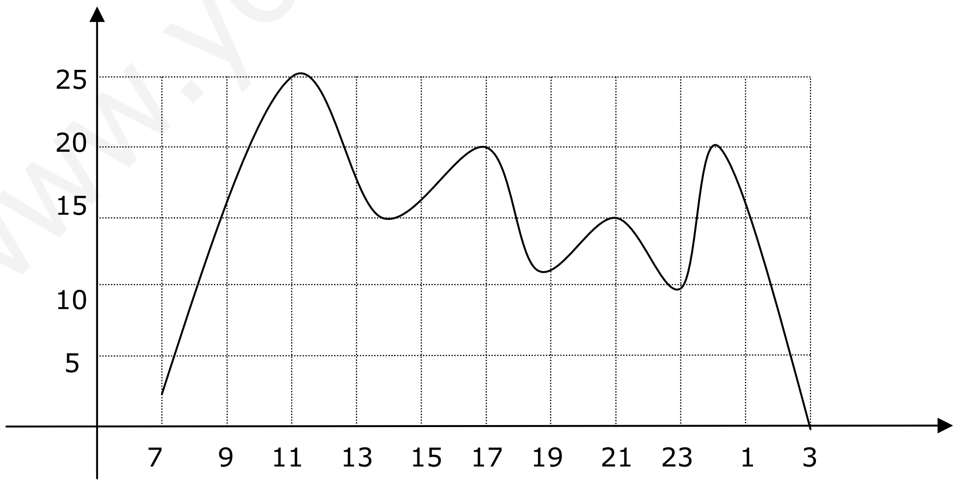
1. ¿Cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones?



2. Decide razonadamente si las siguientes correspondencias son funciones o no, en caso de que lo sean, indica cuál es la variable dependiente y la independiente:

a) A todo número natural le corresponde su número natural.
b) A todo número natural le corresponden sus divisores.
c) A todo número entero le corresponde su valor absoluto.
d) A cada día se le asocia la cotización del euro frente al dólar.
e) A todo número fraccionario se le asocia su inverso.
f) A todo número se le asocia su triple.
g) A cada fase de la luna le asociamos la fecha en que se dá.

3. La siguiente gráfica muestra la audiencia de una radio entre las siete de la mañana y las tres de la madrugada:



(Eje X el tiempo en horas, eje Y porcentaje de audiencia)

a) ¿Cuál es el dominio de esta función? ¿Qué significa en este caso?
b) ¿Cuál es la imagen de esta función? ¿Qué significa en este caso?
c) ¿En qué horas aumenta el porcentaje de audiencia? ¿En qué horas disminuye?
d) ¿En qué hora se produce la máxima audiencia?
e) ¿Cuál es la máxima audiencia en la tarde? Y ¿En la noche?
f) ¿Cuál es el porcentaje de oyentes a las 2 de la tarde? Y ¿a las 11 de la noche?

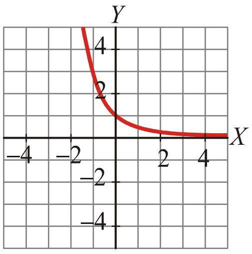
4. Un remonte de una pista de esquí funciona de 9 de la mañana hasta las cinco de la tarde y su recorrido es el siguiente:

Desde la salida hasta la pista, que se encuentra a 1300 metros, tarda 15 minutos. Se para en la pista 15 minutos. Baja hasta la base en 10 minutos. Está parado 20 minutos, y empieza de nuevo el recorrido.

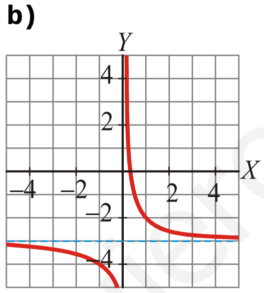
a) Dibuja la gráfica que representa el recorrido del remonte.
b) ¿Cuál es la posición del remonte a las 12h 30 min?
c) ¿Observas alguna característica especial en la gráfica?

5. Calcula el dominio y la imagen de las siguiente funciones:

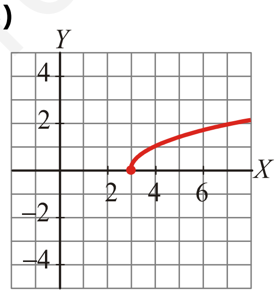
a)



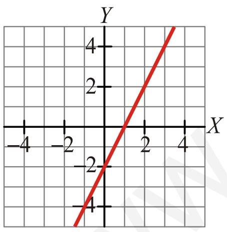
b)



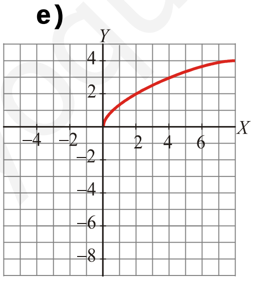
c)



d)



e)

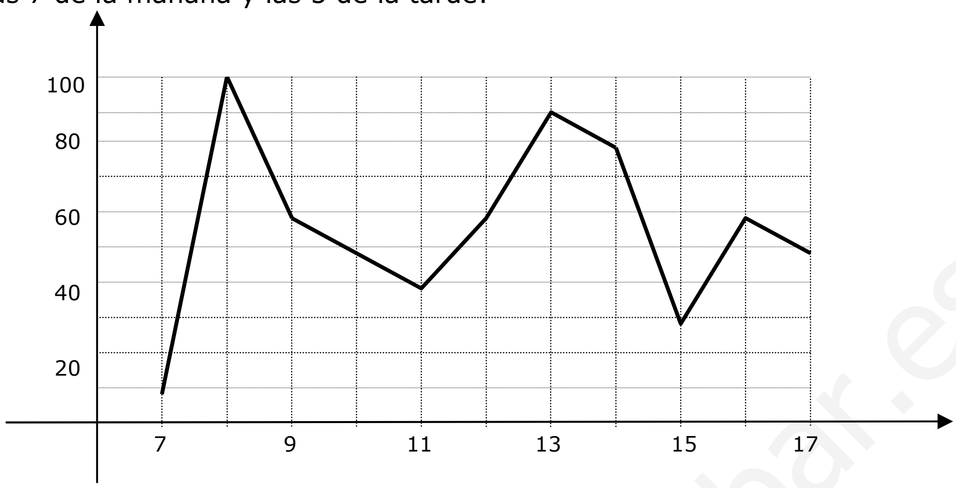


6. El día del libro (23 de abril) se aplica un descuento del 10% sobre el precio inicial de cada libro. Escribe una fórmula que exprese el precio de venta de los libros ese día.

7. El precio de una ventana cuadrada depende de su tamaño. El cristal vale a 3€ el metro cuadrado, y el marco a 6€ el metro. Escribe una fórmula que dé el precio de la ventana en función de la longitud x del lado.

8. Un grupo de amigos quiere comprar un balón que cuesta 30€. Lo que debe pagar cada chico, y, depende del número de amigos x, que intervengan. Escribe una fórmula que exprese esta situación.

9. En la siguiente gráfica se muestra el número de viajeros de un autobús entre las 7 de la mañana y las 5 de la tarde:

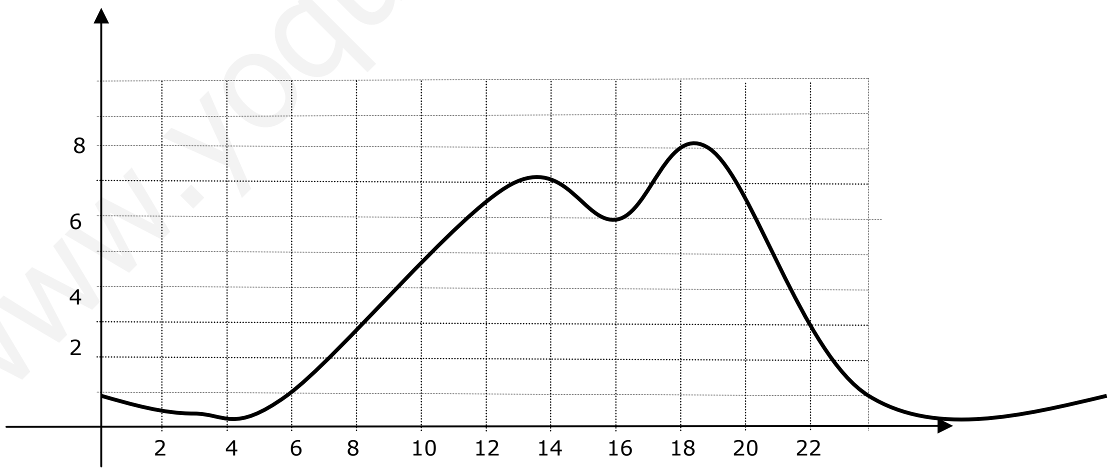


(Eje X el tiempo en horas, eje Y número de pasajeros)

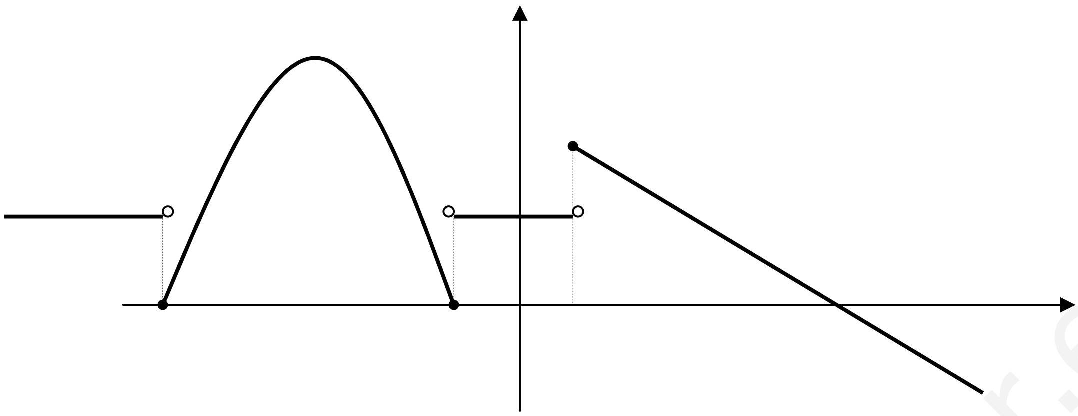
a) ¿A qué hora hay número máximo de pasajeros? ¿Cuántos lleva?
b) ¿En qué franjas horarias hay aumento de pasajeros? ¿en cuáles disminuye?
c) ¿A que hora hay número mínimo de pasajeros?

10. La siguiente gráfica muestra el nivel de ruido que se produce en una calle de una ciudad:

a) ¿Cuándo es máximo el nivel de ruido? Y ¿mínimo?
b) ¿Hay otros horas en el que el nivel de ruido es alto o bajo?
c) ¿En qué franjas horarias el ruido crece? ¿en cuáles decrece?



11. Analiza la siguiente función:



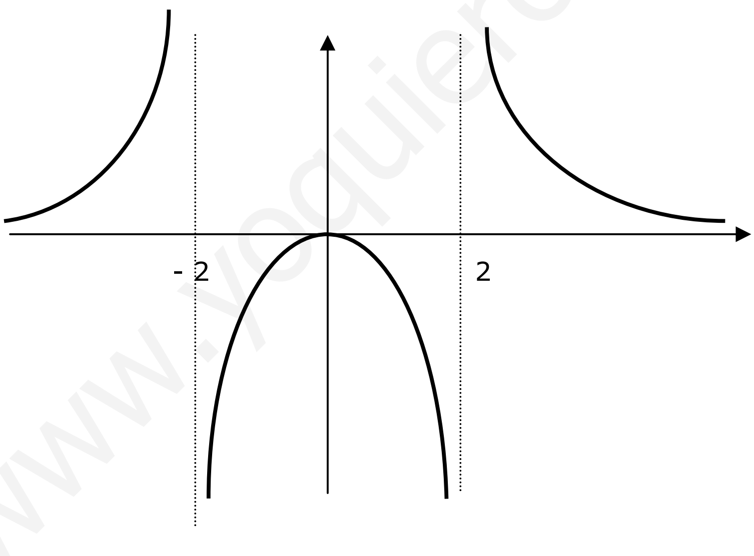
12. El recibo bimensual emitido por telefónica especifica:

- Cuota de abono por mes 7’5€
- Equipo 1’5€ por mes
- Servicio automático 0’03€

a) Obtén la función correspondiente sin IVA

b) Si el IVA es el 16% del total. Obtén la función que determina el importe del recibo.

13. Dada la función f(x), analízala:



14. La tabla adjunta relaciona la altura de un árbol y la longitud de su sombra a una hora determinada:

x (altura árbol)	0’5	1		2		8	9
y (longitud sombra)		1’5	1	3	9	12	

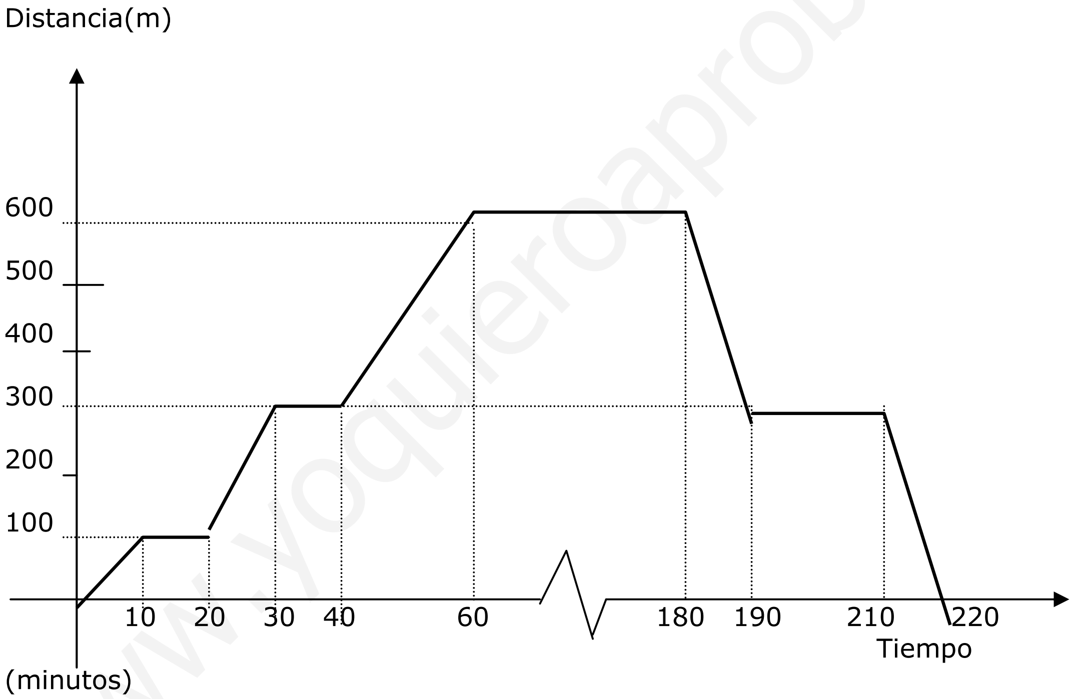
a) Completa la tabla. ¿Qué cumple el cociente x/y?

b) Da una fórmula que relacione y con x.

15. La tarifa de los taxis de una determinada ciudad es de 60 céntimos de euro por la bajada de bandera y 24 céntimos de euro por kilómetro recorrido. En otra ciudad la bajada de bandera cuesta 36 céntimos de euro y 30 céntimos de euro por cada kilómetro recorrido.

a) Haz una tabla que exprese el precio del viaje en función de los kilómetros recorridos para cada ciudad.
b) Encuentra la función que relaciona los kilómetros recorridos (x) con el precio del viaje (y) en cada caso.
c) Representa en los mismos ejes las dos funciones.
d) ¿Cuántos kilómetros hay que recorrer para que el precio del viaje sea menor en la primera ciudad?

16. Ana ha quedado con sus amigos para merendar en el campo. Sale de casa y tiene que entrar en la tienda a comprar coca cola; después va al lugar donde han quedado y espera a que llegue el resto de la panda. Por fin, ya están todos, y se van al río a merendar. Después de pasar la tarde, vuelve a casa haciendo un alto para despedirse de sus amigos

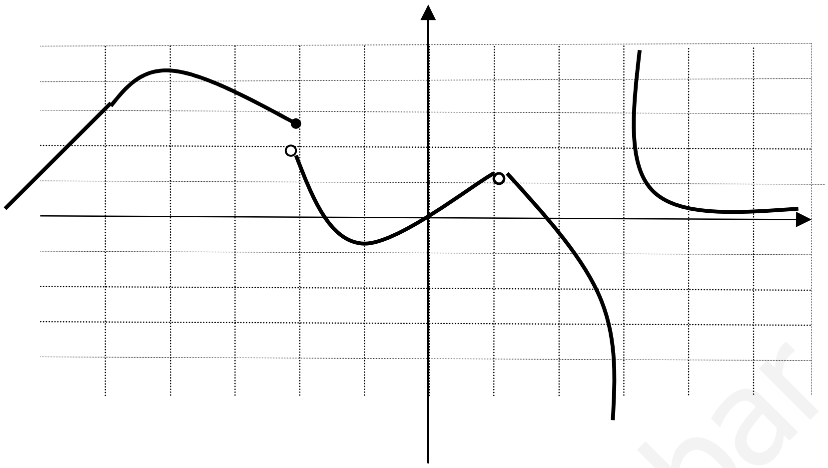


a) ¿Qué distancia hay de la casa de Ana a la tienda? ¿Y entre esta y el lugar de la cita? ¿A que distancia esta del rio?
b) ¿Cuánto tiempo pasa en la tienda? ¿Cuánto están en el río?

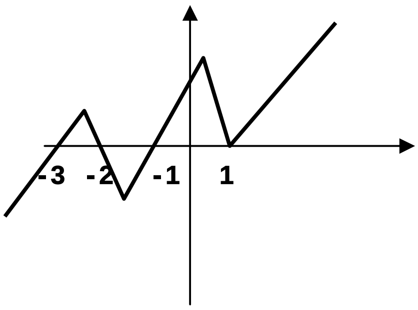
17. Un ciclista sale de excursión a un lugar que dista 20 km de su casa. A los quince minutos de salida, cuando se encuentra a seis km hace una parada de 10 minutos. Reanuda la marcha y llega a su destino una hora después de haber salido.

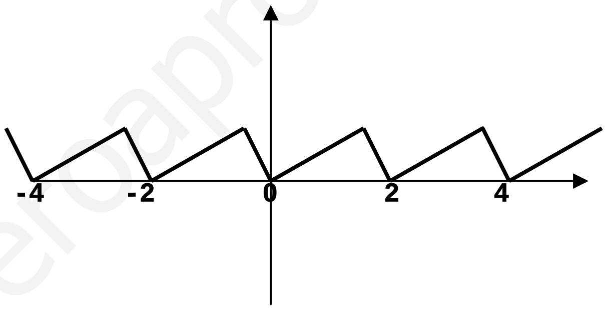
a) Representa la gráfica tiempo-distancia a su casa.
b) ¿Lleva la misma velocidad antes y después de la parada? Suponemos que la velocidad en cada etapa es constante.

18. Estudia los puntos de discontinuidad de la siguiente gráfica:



19. De las siguientes funciones, ¿cuáles son periódicas, hallando T?





20. Calcula los dominios de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{2x+6}$

b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-2x-8}$

c) $f(x)=x^2-3x$

d) $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{2x^2+8}$

e) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-x-6}$

f) $f(x)=\sqrt{x-3}$

g) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{5x-15}}$

h) $f(x)=\sqrt[5]{x^2+3}$

i) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-25}$

j) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

k) $f(x)=\sqrt[7]{\dfrac{2x+1}{x^2-6x}}$

21. Calcula si existe simetría en los apartados a, d, h, i del ejercicio anterior.

22. En un aparcamiento nos cobran por la primera hora 1 euro y por cada una de las horas siguientes 60 céntimos **.** Fíjate que es una función escalonada:

a) Haz una tabla de valores para las 6 primeras horas.
b) Represéntala gráficamente.
c) ¿En qué puntos la función es discontinua?

23. Halla las simetrías de las funciones:

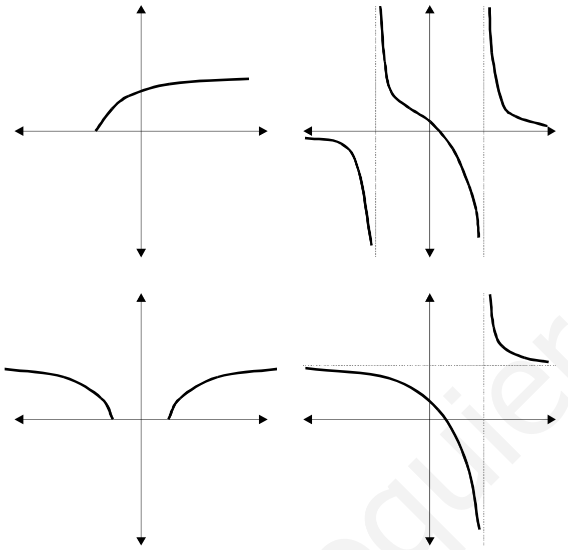
a) $f(x) = x$

b) $f(x) = x^6 + x^4 + x^2$

c) $f(x) = x^5 + x^3 + x$

d) $f(x)=\dfrac{6}{x}$

24. Analiza las funciones siguientes:



25. Representa las siguientes funciones a trozos:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x \geq 2 \\ x^2 & -2 < x < 2 \\ -4 & x \leq -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < -3 \\ -2 & -3 < x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$

26. Piensa en la pregunta " ¿Si dos personas realizan un trabajo en 4 horas, cuánto tardarán 4 personas?" Completa la tabla:

Nº de personas	2	4	1	8	3	6	5
Horas	4						

Llamando x al nº de personas e y al tiempo en horas, ¿qué cumple el producto $x \cdot y$. Da la fórmula que expresa y en función de x.

27. Para realizar una zanja 4 trabajadores tardan 15 días. Si en lugar de 4 personas trabajaran 6, ¿cuánto tardarían?. ¿Y si fueran 8? Completa la tabla:

x: nº de trabajadores	4	6	8	2	1	x
y: días que tardan	15					

a) ¿Qué tipo de función definen?
b) Expresión algebraica de la función.
c) Representación gráfica

28. Una persona tarda 12 horas en llevar todo el papel inservible de una clase al contenedor de reciclado.
a) ¿Cuánto tardarían en llevarlo 3 personas? Realiza una tabla de valores variando el número de personas.
b) Si se considera el tiempo en función del número de personas, ¿qué tipo de relación hay entre las variables?
c) Escribe la expresión algebraica.
d) Representa gráficamente.

29. Representa las siguientes funciones a trozos:

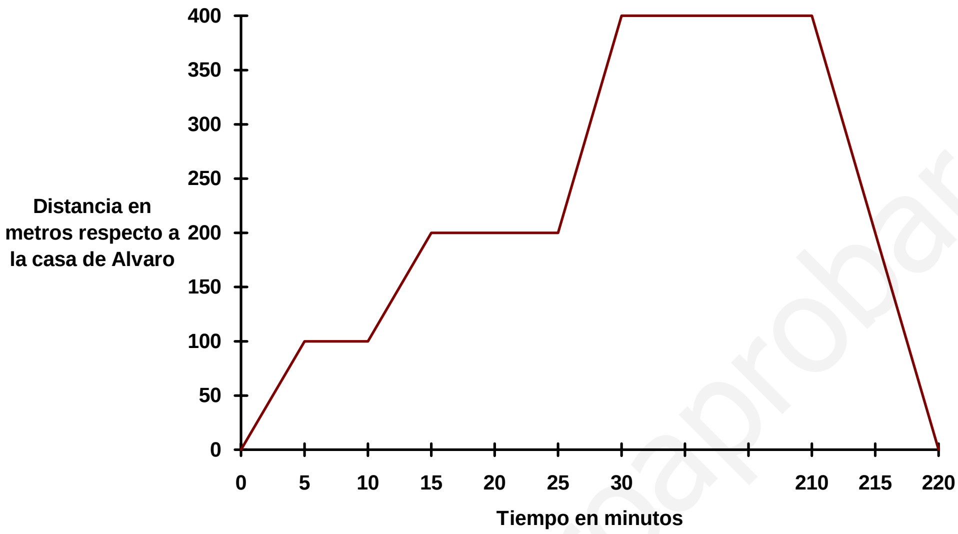
a) $f(x) = \begin{cases} 2 & x \le -5 \\ x^2 + x - 6 & -5 < x < 2 \\ 3x + 5 & x \ge 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & x < -4 \\ -2 & -2 < x \le 0 \\ \cos x & x > 0 \end{cases}$

30. Representa la función $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x$ e indica los parecidos y las diferencias con el senx.

31. Álvaro sale de su casa para ir al instituto. Primero pasa por una panadería para comprarse un bollo; luego se dirige a una esquina para esperar a su amigo Miguel con el que va a ir al instituto. Cuando llega Miguel, se dirigen al instituto y llegan a la hora en que comienzan las clases. Cuando acaban las clases Álvaro se vuelve a su casa.
Con ayuda de la gráfica que relaciona el tiempo con la distancia de Álvaro a su casa, contesta a las siguientes preguntas:
a) ¿Cuánto tiempo está en la panadería comprando el bollo?
b) ¿A qué distancia está la panadería de la casa de Álvaro?

c) ¿Cuánto tiempo espera al amigo?
d) ¿A qué distancia se encuentra el instituto de la casa de Álvaro?
e) ¿Cuánto duran las clases?
f) ¿Cuánto tiempo tarda en volver a casa?
g) Comenta las velocidades de los diversos trayectos.
h) Si las clases empiezan a las 10 h. ¿donde estaba a las 9h.37'?.¿Y a las 9h.43'? ¿y a las 9h.50'?



32. Una avioneta vuela entre Cádiz y Ceuta. Su altura de vuelo viene dada por la fórmula:
$h(t)=800t-30t^2$
donde h(t) es la altura de la avioneta en metros a los t minutos de haber despegado de Cádiz.
Representa la gráfica para determinar:
a) ¿En qué periodos de tiempo la avioneta asciende y en cuáles desciende?.
b) Cuál es la altura máxima que alcanza la avioneta y en qué tiempo.
c) ¿Cuánto dura el vuelo?.

CUESTIONES

1. Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:
a) ¿Qué función trigonométrica es siempre creciente?
b) Si una función trigonométrica sólo puede tomar valores comprendidos entre −1 y 1, ¿de qué función se trata?
c) ¿Qué función trigonométrica tiene un máximo en $x = \frac{\pi}{2}$? y ¿un mínimo en $x = \pi$?

2. Las parábolas siguientes:

$$f(x) = x^2 - 2x + 4;\ f(x) = 2x^2 - 4x + 8;\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

tienen el mismo vértice ¿En qué se diferencian?

3. Relaciona cada función con su respectivo dominio de definición:

1) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$	**1.** $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
2) $y=\dfrac{2+x}{x^2}$	**2.** $R-\{-2\}$
3) $y=\sqrt{x-2}$	**3.** $R-\{3\}$
4) $y=\dfrac{1}{3x-x^2}$	**4.** $[-1,+\infty)$
5) $y=\dfrac{2x}{(x-3)^2}$	**5.** $[-3,+\infty)$
6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$	**6.** $R-\{-3,+3\}$
7) $y=\sqrt{x^2-1}$	**7.** $R-\{0,\ 3\}$
8) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$	**8.** R
9) $y=\sqrt{3x-1}$	**9.** $[2,+\infty)$
10) $y=\dfrac{1}{x+2}$	**10.** $\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$
11) $y=\sqrt{x+1}$	**11.** $(2,+\infty)$
12) $y=\sqrt{x+3}$	**12.** $R-\{0\}$

4. ¿Existe alguna función par e impar a la vez? ¿Cuál?

5. Dibuja una función periódica que no sea trigonométrica.

6. Dada la función $g(x) = \dfrac{1}{x+5}$ ¿cuál es el dominio?

a) $[-5,\infty)$ **b)** $(-5,\infty)$ **c)** $R - \{5\}$ **d)** $R - \{-5\}$

7. Dadas las funciones $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = x^2 + x - 2$, se puede asegurar que:

a) f es una función impar

b) g es una función par

8. Indica, cuáles de las siguientes funciones son crecientes:

a) $y = 3x$ **b)** $y = -3x$ **c)** $y = 5x$ **d)** $y = -5x$

9. Si de una función $f(x) = k/x$ sabemos que es decreciente, podemos afirmar:

- [ ] k es positivo
- [ ] k es negativo
- [ ] Es simétrica

UNIDAD 9

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

1. (**)Representar gráficamente la función exponencial y logarítmica.
2. (**)Operar con logaritmos.
3. Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
4. Solucionar sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Esquema:

1. Introducción.

2. Funciones exponenciales.
    2.1. Propiedades.
    2.2. Representación gráfica

3. Logaritmos.
    3.1. Propiedades
    3.2. Representación gráfica.

4. Ecuaciones exponenciales.

5. Sistemas de ecuaciones exponenciales.

6. Ecuaciones logarítmicas.

7. Sistemas de ecuaciones logarítmicas

1. Introducción

En los fenómenos que observamos a nuestro alrededor están presentes las funciones elementales, entre ellas, la función exponencial, que aparece por ejemplo en la reproducción de una colonia de bacterias, algunos crecimientos demográficos, la variación de presión de la atmósfera con la altura... Al estudiar las características y propiedades de esta función podemos comprender mejor esos fenómenos.

Junto a la función exponencial aparece la función logarítmica, cuyas propiedades son muy útiles ya que podemos transformar productos en sumas y divisiones en restas.

El origen de los logaritmos data del siglo XVI por la necesidad de efectuar complejos cálculos. El matemático escocés John Neper después de trabajar veinte años en procedimientos para simplificar cálculos publicó sus ideas en el libro "Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos" en 1616, fue el primero en dar a conocer los logaritmos. Pero la primera tabla de logaritmos decimales fue escrita por el matemático inglés Henry Briggs y durante mucho tiempo fueron conocidos como logaritmos "vulgares".

2. Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales son aquellas en las que la variable aparece en el exponente de un número real positivo, es decir:

> $f(x) = a^x$ **donde a es un número real positivo y x es la variable.**

2.1. Propiedades

a) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

b) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

c) $\left(a^x\right)^m = a^{mx}$

d) $\sqrt[m]{a^x} = a^{\frac{x}{m}}$

e) $a^0 = 1$

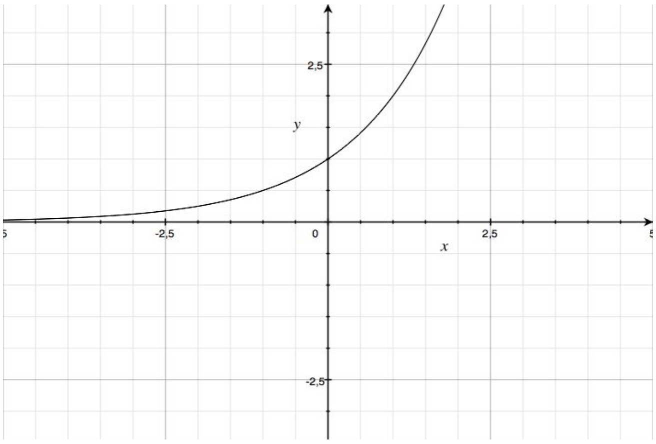
f) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

2.2. Representación gráfica

Vamos a diferenciar dos casos cuando a>1 y cuando a<1, para ello representaremos $f(x) = 2^x$ y $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

a) $f(x) = 2^x$

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8

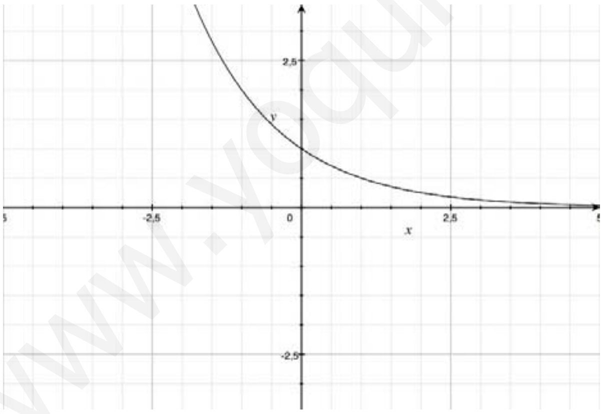


Analizamos la función:

- Domf=R
- Imf=$(0, \infty)$
- Puntos de corte: (0,1)
- Función estrictamente creciente.
- Acotada inferiormente por 0.

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8



Analizamos la función:

- Domf=R
- Imf=$(0, \infty)$
- Puntos de corte: (0,1)
- Función estrictamente decreciente.
- Acotada inferiormente por 0.

Actividad:

1. Representa las siguientes funciones exponenciales:

a) $f(x) = 3^x$ **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

3. Logaritmos

Si consideramos la ecuación $2^x = 8$, es fácil resolverla, basta expresar el 8 como potencia de 2, es decir $2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

Si considero la ecuación $2^x = 9$, nos resulta difícil despejar la x ya que el 9 no se puede poner como potencia de 2, podemos dar un valor aproximado de x que debe estar entre 2 y 3 ya que $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$

Debemos definir una herramienta matemática que nos permita halla exponentes:

- Si conocemos la base y el exponente sabemos calcular el resultado, estamos considerando la operación **potencia** $2^5 = ?$
- Si conocemos el exponente y la potencia sabemos calcular el resultado, estamos considerando la operación **radicación** $?^5 = 32$**,** normalmente aparecerá de la forma $\sqrt[5]{32} = ?$
- Si conocemos la base y el resultado de la potencia, necesitaríamos conocer el exponente $2^? = 32$. Esto se conoce con el nombre de **logaritmo**

LOGARITMO=EXPONENTE

El logaritmo presenta el siguiente formato:

$$\mathbf{2^? = 32 \Rightarrow \log_2 32 = ?}$$

Definimos:

Sea a un número positivo y distinto de 1, se llama logaritmo, en base a, de un número N, al número x al que hay que elevar la base a para obtener N:

$$\boxed{\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N}$$

Los logaritmos más utilizados son:

- Logaritmos decimales: son aquellos logaritmos en los que la base es el 10. Se representa $\log_{10} N = \log N$
- Logaritmos neperianos: son aquellos logaritmos en los que la base es el número e. Se representa $\log_e N = \ln N$

3.1. Propiedades

a) Los números negativos no tienen logaritmo, ya que cualquier potencia de base positiva es positiva.
b) $\log 1 = 0$
c) $\log_a a = 1$
d) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
e) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
f) $\log_a x^m = m\log_a x$
g) $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}$

Ejemplo 1:
Calcula: $\mathbf{\log_2(16 \cdot 4)}$

$$\underbrace{\log_2(16\cdot 4) = \log_2 16 + \log_2 4}_{\text{Propiedad d}} = \log_2 2^4 + \log_2 2^2 \underbrace{=}_{\text{Propiedad f}} 4\log_2 2 + 2\log_2 2 \underbrace{=}_{\text{Propiedad c}} 4 + 2 = 6$$

Ejemplo 2:
Calcula x en la siguiente igualdad: $\mathbf{\log_x 9 = 2}$

$\log_x 9 = 2$, aplicamos la definición de logaritmo:
$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow x = 3$ ya que la base tiene que ser un número positivo.

Ejemplo 3:

Calcula el resultado de la ecuación: $\mathbf{\log_3 9 - \log_3 27 + \log_2 8}$

$\log_3 9 - \log_3 27 + \log_2 8 = \log_3 3^2 - \log_3 3^3 + \log_2 2^3 = 2\log_3 3 - 3\log_3 3 + 3\log_2 2 = 2 - 3 + 3 = 2$

Ejemplo 4:

Resuelve $\mathbf{5^{x-3} = 2}$

Aparentemente es una ecuación exponencial, pero las bases son distintas, para resolverla utilizamos la definición de logaritmo:

$$5^{x-3} = 2 \Rightarrow \log_5 2 = x - 3 \Rightarrow x = 3 + \log_5 2$$

Actividad:

2. Calcula x en las siguientes igualdades:

a) $\log_2 \frac{1}{8} = x$ **b)** $\log_3 x = \frac{1}{2}$

3.Deduce el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 32 =$ **b)** $\log_3 \sqrt[3]{81} =$ **c)** $\log_4 \frac{1}{64} =$

4.Halla el resultado de las siguientes igualdades:

a) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_4 64 + \log_5 125 + \log_6 36 =$

b) $\log_2 8 + \log_2 16 + 5\log_2 64 - 3\log_2 32 - 4\log_2 128 =$

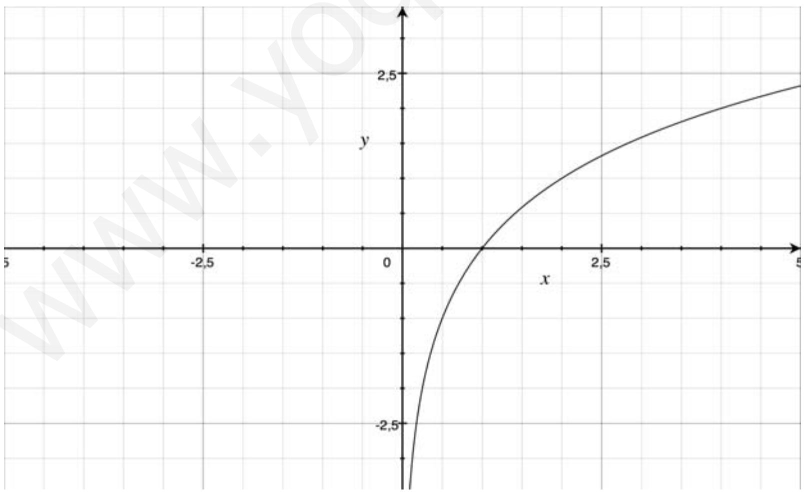
c) $\log_3 9 - \frac{1}{3}\log_3 27 + \frac{3}{5}\log_3 243 - 4\log_3 81 + \log_3 3 =$

3.2. *Representación gráfica*

Vamos a diferenciar dos casos cuando a>1 y cuando a<1, para ello representaremos $f(x) = \log_2 x$ y $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

a) $f(x) = \log_2 x$

x	1/4	1/2	1	2	4	8
$f(x) = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

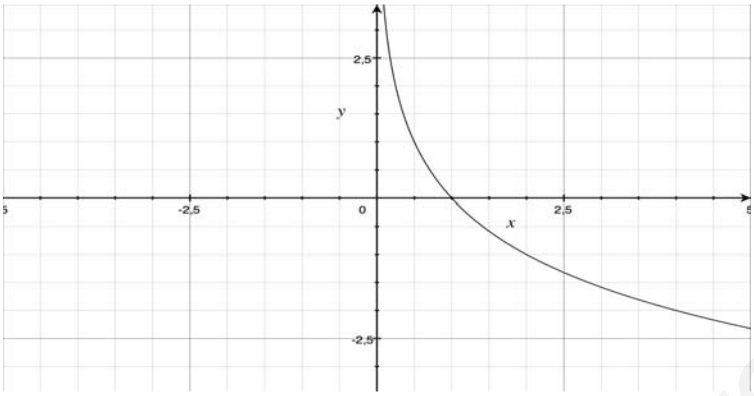


Analizamos la función:

- $\text{Domf} = (0, \infty)$
- Imf=R
- Puntos de corte: (1,0)
- Función estrictamente creciente.

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	1/4	1/2	1	2	4	8
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2	-3



Analizamos la función:

- Domf= $(0, \infty)$
- Imf=R
- Puntos de corte: (1,0)
- Función estrictamente decreciente.

Actividad:

5. Representa las siguientes funciones logarítmicas:

a) $f(x) = \log_3 x$ **b)** $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

4. Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es aquella en la que la incógnita aparece en el exponente.

Ejemplo 1:
Tenemos una igualdad y sólo hay un término en cada miembro:

$$\mathbf{3^{2x-1} = 9}$$

Descomponemos los números, en este caso sólo el $9 = 3^2$, se tiene:

$3^{2x-1} = 3^2$, y como son potencias de igual base que son iguales entonces los

exponentes tienen que ser iguales, 2x-1=2 ecuación de 1º grado:

$2x=2+1 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Ejemplo 2:

Tenemos una igualdad pero en cada miembro pueden aparecer varios términos y las bases son distintas (en este caso una es el cuadrado de la otra):

$$\mathbf{2^{x+3} + 4^{x+1} = 320}$$

- Primero separamos los exponentes utilizando las propiedades $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ $\quad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

$$2^x \cdot 2^3 + 4^x \cdot 4 = 320 \Rightarrow 2^x \cdot 8 + 4^x \cdot 4 = 320$$

- Como $4 = 2^2$ y $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$, hacemos el cambio de variable $t = 2^x \Rightarrow t^2 = \left(2^x\right)^2 = 2^{2x}$

$$2^x \cdot 8 + 4^x \cdot 4 = 320 \Rightarrow 8\,t + 4\,t^2 = 320$$

pasando todos los términos a un lado de la igualdad observamos que nos queda para resolver una ecuación de 2º grado:

$$8\,t + 4\,t^2 = 320 \Rightarrow 4\,t^2 + 8\,t - 320 = 0$$

esta ecuación se puede simplificar quedando $t^2 + 2\,t - 80 = 0$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+320}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{-2 \pm 18}{2} = \begin{cases} t = 8 \\ t = -10 \end{cases}$$

- Como $t = 2^x$ se tiene:

$$t = 8 = 2^3 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

$t = -10 \Rightarrow 2^x = -10$ imposible ya que cualquier número positivo elevado a una potencia su resultado será siempre positivo.

Ejemplo 3:

Tenemos una igualdad pero en cada miembro pueden aparecer varios términos y las bases son iguales:

$$\mathbf{3^{x} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 13}$$

- Primero separamos los exponentes utilizando las propiedades

$$a^{x+y} = a^{x} \cdot a^{y} \qquad a^{x-y} = \frac{a^{x}}{a^{y}}$$

$$3^{x} + \frac{3^{x}}{3} + \frac{3^{x}}{3^{2}} = 13$$

- Hacemos el cambio de variable $3^{x} = t$

$$t + \frac{t}{3} + \frac{t}{3^{2}} = 13$$

Ecuación de primer grado, llevamos a común denominador:

$$\frac{9t + 3t + t}{9} = \frac{13 \cdot 9}{9} \Rightarrow 13t = 13 \cdot 9 \Rightarrow t = 9$$

- Como $3^{x} = t$:

$$t = 9 = 3^{2} \Rightarrow 3^{x} = 3^{2} \Rightarrow x = 2$$

Actividad:

6. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{2x-3} = 27^{\frac{x+1}{3}}$ **b)** $2^{3x-1} = 16$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{x+1} + 2^{x} + 2^{x-1} = 28$

b) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^{x} + 3^{x-1} = 120$

c) $3^{2x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} = 3$

d) $9^{x} - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

5. Sistemas de ecuaciones exponenciales

Un sistema de ecuaciones es exponencial si, al menos una de las ecuaciones que lo componen es exponencial.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \mathbf{3^x \cdot 3^y = 27} \\ \mathbf{\dfrac{3^{2x}}{3^{3y}} = 3} \end{cases}$$

- $3^x \cdot 3^y = 27$ aplicando la propiedad de las potencias $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ y descomponiendo el 27 se tiene:

$$3^{x+y} = 3^3 \Rightarrow x + y = 3$$

- $\dfrac{3^{2x}}{3^{3y}} = 3$ aplicando la propiedad de las potencias $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ se tiene:

$$3^{2x-3y} = 3^1 \Rightarrow 2x - 3y = 1$$

- Luego, el sistema que debemos resolver será:

$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se puede resolver por el método de reducción, sustitución o igualación.

- Vamos a emplear el método de reducción multiplicando la primera ecuación por 3:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{como } x + y = 3 \Rightarrow 2 + y = 3 \Rightarrow y = 1$$

- Solución: $(x,y) = (2,1)$ comprobamos:

$$\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 27 \\ \dfrac{3^{2x}}{3^{3y}} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^2 \cdot 3^1 = 27 \\ \dfrac{3^{2\cdot 2}}{3^{3\cdot 1}} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 \cdot 3 = 27 \\ \dfrac{81}{27} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27 = 27 \\ 3 = 3 \end{cases}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} \mathbf{3 \cdot 5^{x} + 2 \cdot 6^{y+1} = 807} \\ \mathbf{15 \cdot 5^{x-1} - 6^{y} = 339} \end{cases}$$

- Vamos a aplicar las propiedades de potencias para separar los exponentes:

$$\begin{cases} 3 \cdot 5^{x} + 2 \cdot 6^{y} \cdot 6 = 807 \\ 15 \cdot \dfrac{5^{x}}{5} - 6^{y} = 339 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 5^{x} + 12 \cdot 6^{y} = 807 \\ 3 \cdot 5^{x} - 6^{y} = 339 \end{cases}$$

- Como las base de las exponenciales son distintas, hacemos un cambio de variable: $5^{x} = t, 6^{y} = z$ el sistema nos queda:

  $\begin{cases} 3t + 12z = 807 \\ 3t - z = 339 \end{cases}$ sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se puede resolver por el método de reducción, sustitución o igualación.

- Vamos a emplear el método de reducción multiplicando la segunda ecuación por -1:

$$\begin{cases} 3t + 12z = 807 \\ -3t + z = -339 \end{cases} \Rightarrow 13z = 468 \Rightarrow z = 36 \text{ como } 3t - z = 339 \Rightarrow 3t - 36 = 339 \Rightarrow$$

- Como $\begin{array}{l} 5^{x} = t,\ t = 125 \Rightarrow 5^{x} = 125 \Rightarrow 5^{x} = 5^{3} \Rightarrow x = 3 \\ 6^{y} = z, z = 36 \Rightarrow 6^{y} = 36 \Rightarrow 6^{y} = 6^{2} \Rightarrow y = 2 \end{array}$

Actividad:

8. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales:

a) $\begin{cases} 2^{x+y} = 80 \\ 3^{x} = 3^{\frac{y-1}{2}} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^{x} + 2^{y} = 24 \\ 2^{x+y} = 128 \end{cases}$

6. Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica es aquella en la que la incógnita aparece bajo el signo logarítmico:

Ejemplo 1:

$$\mathbf{\log x + \log(x+3) = 2\log(x+1)}$$

- Aplicamos en el primer miembro la propiedad $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, en el segundo miembro $\log_a x^m = m\log_a x$ se tiene:

$$\log[x(x+3)] = \log(x+1)^2$$

- Hemos llegado a una ecuación donde dos logaritmos de igual base son iguales de donde se tiene:
  $x(x+3) = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 3x = 2x + 1 \Rightarrow x = 1$
  - Comprobamos:

$$\log 1 + \log(1+3) = 2\log(1+1) \Rightarrow 0 + \log 4 = 2\log 2 \Rightarrow \log 4 = \log 2^2 \Rightarrow \log 4 = \log 4$$

Ejemplo 2:

$$\mathbf{\log(x+1) - \log x = 2}$$

- Aplicamos en el primer miembro la propiedad $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, en el segundo miembro como $2 = 2 \cdot 1$, $\log_a a = 1$

$$\log\frac{x+1}{x} = 2\log 10 \Rightarrow \log\frac{x+1}{x} = \log 10^2$$

- $\frac{x+1}{x} = 100 \Rightarrow x + 1 = 100x \Rightarrow 1 = 99x \Rightarrow x = \frac{1}{99}$

- Comprobamos $x = \frac{1}{99}$

$$\log\left(\frac{1}{99}+1\right) - \log\frac{1}{99} = 2 \Rightarrow \log\frac{100}{99} - \log\frac{1}{99} = 2 \Rightarrow (\log 100 - \log 99) - (\log 1 - \log 99) = 2$$

$$\log 10^2 - \log 99 - 0 + \log 99 = 2 \Rightarrow 2\log 10 = 2 \Rightarrow 2 = 2$$

Actividad:

9. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log x + \log 2 = 1$
b) $\log x - \log 3 = 1$
c) $\log(2 - x) + \log(-x - 3) = \log 6$
d) $\log(1 - 2x) + \log(x + 1) = 1$

7. SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Un sistema de ecuaciones es logarítmico si, al menos una de las ecuaciones que lo componen es logarítmica .

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \mathbf{x + 2y = 21} \\ \mathbf{\log x - \log y = -1} \end{cases}$$

- Consideramos la segunda ecuación la cual es una ecuación logarítmica y la tratamos como tal para quitar los logaritmos:
-

$$\log x - \log y = -1 \Rightarrow \log \frac{x}{y} = -1 \cdot 1 \Rightarrow \log \frac{x}{y} = -1 \log 10 \Rightarrow \log \frac{x}{y} = \log 10^{-1} \Rightarrow \frac{x}{y} = 10^{-1}$$

- El sistema a resolver sería:

$$\begin{cases} x + 2y = 21 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 21 \\ 10x = y \end{cases}$$

- Sistema de dos ecuaciones lineales, resolvemos por el método de sustitución:

$$x + 2 \cdot 10x = 21 \Rightarrow x + 20x = 21 \Rightarrow 21x = 21 \Rightarrow x = 1$$
$$y = 10x \Rightarrow y = 10 \cdot 1 \Rightarrow y = 10$$

- La solución será (1,10)

- Comprobamos:

$$\begin{cases} x + 2y = 21 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 \cdot 10 = 21 \\ \log 1 - \log 10 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 20 = 21 \\ 0 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21 = 21 \\ -1 = -1 \end{cases}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} \mathbf{\log x + 2\log y = 5} \\ \mathbf{3\log x - \log y = 1} \end{cases}$$

▪Consideramos cada ecuación logarítmica por separado.

▪ $\log x + 2\log y = 5 \Rightarrow \log x + \log y^2 = 5 \cdot 1 \Rightarrow \log x \cdot y^2 = 5\log 10 \Rightarrow \log x \cdot y^2 = \log 10^5$

$$x \cdot y^2 = 10^5$$

▪ $3\log x - \log y = 1 \Rightarrow \log x^3 - \log y = \log 10 \Rightarrow \log \frac{x^3}{y} = \log 10$

$$\frac{x^3}{y} = 10$$

▪El sistema que se debe resolver es:

$$\begin{cases} x \cdot y^2 = 10^5 \\ x^3 / y = 10 \end{cases}$$

▪Resolvemos por sustitución:

$$x = \frac{10^5}{y^2} \Rightarrow \left(\frac{10^5}{y^2}\right)^3 : y = 10 \Rightarrow \frac{10^{15}}{y^6} : y = 10 \Rightarrow \frac{10^{15}}{10} = y \cdot y^6 \Rightarrow 10^{14} = y^7$$

$$\Rightarrow y = 10^2 \Rightarrow y = 100 \Rightarrow x = \frac{10^5}{100^2} \Rightarrow x = 10$$

▪Solución: $(10,100)$

▪Comprobación:

$$\begin{cases} \log x + 2\log y = 5 \\ 3\log x - \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log 10 + 2\log 100 = 5 \\ 3\log 10 - \log 100 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 4 = 5 \\ 3 - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Actividad:

10. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

a) $\begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x^2 y) = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 22 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

FUNCIÓN

Función exponencial
$f(x) = a^x$

Según la base

a>1

Estrictamente creciente

O< a <1

Estrictamente decreciente

Función logarítmica
$f(x) = \log_a x$

Según la base

a>1

Estrictamente creciente

O< a <1

Estrictamente decreciente

Definición de logaritmo

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

Se aplican a la resolución de

- Ecuaciones.
- Sistemas de ecuaciones

EJERCICIOS

1. Representa las siguientes funciones exponenciales:

a) $f(x) = 4^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) Señala las diferencias y las semejanzas entre las funciones a) y b)

2. Representa las siguientes funciones logarítmicas:

a) $f(x) = \log_4 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

c) Señala las diferencias y las semejanzas entre las funciones a) y b)

3. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $7^{3x-2} = 2401$

b) $10^{\frac{2x-3}{5x}} = 1000$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $4^x + 4^{x-1} + 4^{x-2} = 336$

b) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 775$

5. Calcula las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^x \cdot 3^x = 216$

b) $4^x \cdot 5^{x-1} = 1600$

c) $4^{2x+3} = 2^{2x+5}$

d) $5^{x^2-5x+6} = 1$

6. Calcula las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{2x-1} - 6 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0$

b) $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$

c) $5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2} = 31$

d) $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$

e) $3 \cdot 2^{x-1} + 6 \cdot 2^{x-2} - 9 = 15$

f) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 1053$

g) $3 \cdot \frac{1}{4^x} + 2 \cdot 4^{-x} = 5$

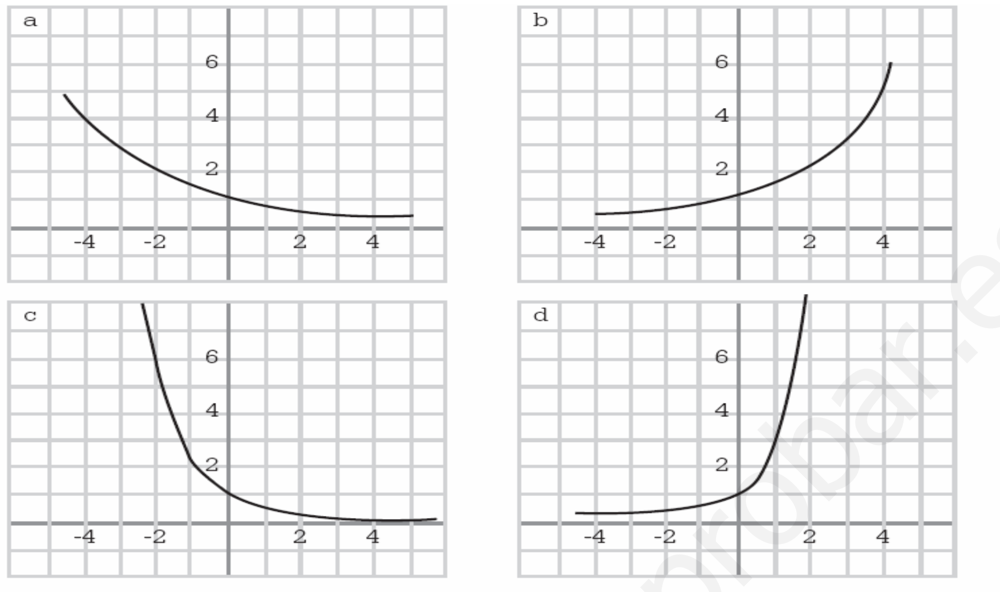
h) $2 \cdot 7^{x+3} - 7^{x+4} + 5 = 0$

i) $4 \cdot 2^{x+1} + 6 \cdot 2^{x-1} - 5 = 0$

j) $9 \cdot 3^{x-2} - 2 \cdot 3^{x+3} + 50 = 0$

7. Identifica cada función con su gráfica:

a) $f(x) = 3^x$ **b)** $f(x) = 1'5^x$ **c)** $f(x) = 0'4^x$ **d)** $f(x) = 0'7^x$



8. En un laboratorio se realiza un cultivo de bacterias. El número de estas se duplica cada minuto, y al comenzar el cultivo era de 1 millón. Construye una tabla de valores en la que figure el número de bacterias existente cuando han transcurrido 1, 2, 3, 4, 5 y 6 minutos. Expresa el número de bacterias en función del tiempo y representa gráficamente la función.

9. Un depósito de agua se está vaciando de manera que la cantidad de agua, en miles de litros, que queda a los t minutos de haberse abierto el desagüe viene dado por la función $f(x) = (1'1)^{-x}$

a) Halla e interpreta la imagen de 4.
b) ¿Cuánta agua queda a los 3 minutos?
c) ¿Qué cantidad de agua había en el momento de abrir el desagüe?
d) Representa la función en el intervalo $[0,7]$
e) ¿Qué ocurre cuando el tiempo va aumentando indefinidamente?

10. El precio de un coche (en miles de euros) a los t años de su compra viene dado por la función siguiente $f(x) = 24 \cdot 2^{-0'3t}$:

a) ¿Cuánto costo en el momento de la compra?
b) ¿Cuál es el valor a los 3 años?
c) Representa la función. Estudia e interpreta su crecimiento.
d) En los tres primeros años, ¿aumento o disminuyó su valor?

11. Un trabajador entra en una empresa con un sueldo anual de 21 miles de euros. En el convenio colectivo está estipulado que durante los próximos diez años, el salario que percibirá a los t años viene dado por la función $f(x) = 21 \cdot (1'03)^x$

a) Halla el sueldo que cobrará el segundo año.
b) Representa la función. Estudia e interpreta su crecimiento.

12. La función exponencial $f(x)=k\cdot a^x$ pasa por los puntos (0,2) y (2, 1’28). Calcula las constantes k y a. Representa la función.

13. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales:

a) $\begin{cases} 5^{x-1}=25^{y-1} \\ 4^x=2^{2y+2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4^x+5^y=126 \\ 25\cdot 4^x=5^{y-1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5\cdot 2^x-2\cdot 3^y=-34 \\ 2^{x+1}+3^y=35 \end{cases}$

14. Calcula x en las siguientes igualdades:

a) $\log_x 27=3$
b) $\log_x 0'125=-3$

15. Desarrolla los siguientes logaritmos:

a) $\log\left(\dfrac{x^3\cdot z^2}{y^3}\right)=$

b) $\log_3\left(\dfrac{\sqrt{a}\cdot b^3}{c^{-4}\cdot d^{-2}}\right)=$

c) $\log_2\left(\sqrt[4]{\dfrac{a^3\cdot b^{-3}}{\sqrt[3]{a^2}\cdot b^{-4}}}\right)=$

16. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_2\dfrac{\sqrt[5]{32\cdot 4^3}}{2^4\cdot\sqrt[6]{64}}=$

b) $\log_5\dfrac{25\cdot\sqrt[5]{625}}{125}=$

c) $\log_3\dfrac{27\cdot 9^4}{\sqrt[4]{279}\cdot 81^2}=$

17. Conociendo los valores de log2=0’301 y log3=0’477, calcula:

a) $\log 0'0048=$
b) $\log 5=$
c) $\log\dfrac{12'8}{\sqrt{5'76}}=$
d) $\log\sqrt{0'32}\cdot\sqrt[3]{2400}=$
e) $\log\dfrac{0'64\cdot 0'27}{100}=$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log\left(x^2+x+1\right)=\log(3x+1)$

b) $\frac{1}{2}\log x=\log x^2$

c) $\log x=4\log 2$

d) $2\log x=\log(-6+5x)$

e) $\log x^3-\log 40=\log\frac{x}{10}$

f) $5\log\frac{x}{2}+2\log\frac{x}{3}=3\log x-\log\frac{32}{9}$

19. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

a) $\begin{cases}\log x=\log\frac{y}{2}+1\\ \log x-\log y=-5\end{cases}$

b) $\begin{cases}3x-5y=0\\ \log x+\log y=1\end{cases}$

CUESTIONES

1. Determina la alternativa correcta:

Si log b = x, entonces log 100b = ?

a) 100 + x **b)** 100x **c)** 2x **d)** 2 + x **e)** x^2

2. Sabiendo que el $\log_2$ (a - b) = m, y $\log_2$ (a + b) = 8, obtener el $\log_2$ (a^2 - b^2) en función de **m.**

3. De la función $y=A\cdot b^x$ se sabe que $f(-2)=\frac{3}{4}$ y que $f(1)=6$. Halla A y b.

4. Señala qué afirmaciones o igualdades son correctas y corrige las falsas:

a) Toda función exponencial $y=a^x$ pasa por el punto (1,a)

b) Toda función exponencial es creciente.

c) Las funciones logarítmicas son crecientes.

d) El logaritmo de un número es siempre mayor que cero.

e) $\log 6-\log 5=\log 1$

f) $\log 9^3=3\log 9$

5. Indica los resultados que son ciertos y los que son falsos. Razona tu respuesta.

a) La gráfica de la función exponencial $y=2^x$ corta al eje de ordenadas en el punto (0,1).

b) El valor de la función $y=10^x$ para x = -2 es y = 0,1.

c) El logaritmo en base 2 de 2 es igual a 1.
d) El logaritmo de 1 en base 3 es igual a 1.
e) El logaritmo de 1 en base a es igual a 0.
f) La gráfica de la función $y = \log_4 x$ corta al eje de abscisas en el punto (0,1).
g) La gráfica de la función $y = -3^x$ pasa por el punto (0,-1)

6. La igualdad $100.000 = 10^5$, ¿cómo se escribe en forma logarítmica?
a) $\log_5 100.000 = 10$
b) $\log_5 10 = 100.000$
c) $\log 100.000 = 5$
d) $\log_{100.000} 5 = 10$

7. ¿Cuál es el valor de $\log_6 216$?
a) 2 **b)** 3 **c)** 6 **d)** 12

8. ¿A qué expresión se puede igualar log 45?
a) $\log 9 - \log 5$ **b)** $\log 9 \cdot \log 5$
c) $\log 9 : \log 5$ **d)** $\log 9 + \log 5$

9. Teniendo en cuenta que log 10 = 1, ¿cuál de las igualdades siguientes es falsa?
a) $\log 100 = 2$ **b)** $\log 200 = \log 2 + \log 100$
c) $\log 1000 = 3$