TRIGONOMETRIA

El origen de la palabra trigonometría proviene del griego. Es la composición de las palabras griegas trigonon: triángulo y metron: medida; trigonometría: medida de los triángulos.
Se considera a ***Hiparco*** *(180-125 a.C.) como el padre de la trigonometría debido principalmente por su hallazgo de algunas de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. También contribuyeron a la consolidación de la trigonometría* ***Claudio Ptolomeo*** *y* ***Aristarco de Samos*** *quienes la aplicaron en sus estudios astronómicos. En el año 1600, el profesor de matemáticas de Heidelberg (la universidad más antigua de Alemania)* ***Bartolomé Pitiscus*** *(1561-1613), publicó un texto con el título de Trigonometría, en el que desarrolla métodos para la resolución de triángulos. El matemático francés* ***François Viète*** *(1540-1603) hizo importantes aportes hallando fórmulas trigonométricas de ángulos múltiples. Los cálculos trigonométricos recibieron un gran impulso gracias al matemático escocés* ***John Neper*** *(1550-1617), quien inventó los logaritmos a principios del siglo XVII. En el siglo XVIII, el matemático suizo* ***Leonard Euler*** *(1707-1783) hizo de la trigonometría una ciencia aparte de la astronomía, para convertirla en una nueva rama de las matemáticas.*
Originalmente, la trigonometría es la ciencia cuyo objeto es la resolución numérica (algebraica) de los triángulos. Los seis elementos principales en todo triángulo son sus tres lados y sus tres ángulos. Cuando se conocen tres de estos elementos, con tal que al menos uno de ellos sea un lado, la trigonometría enseña a solucionar el triángulo, esto es, a encontrar los otros tres elementos. En este estado de la trigonometría se definen las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc.), de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, como las razones entre dos de los lados del triángulo; el dominio de definición de estas funciones es el conjunto de los valores que puede tomar el ángulo [0, 180].
Sinembargo, el estudio de la trigonometría no limita sus aplicaciones a los triángulos: geometría, navegación, agrimensura, astronomía; sino también, para el tratamiento matemático en el estudio del movimiento ondulatorio, las vibraciones, el sonido, la corriente alterna, termodinámica, investigación atómica, etc. Para lograr esto, se debe ampliar el concepto de función trigonométrica a una función de una variable real, en vez de limitarse a una función de ángulos.

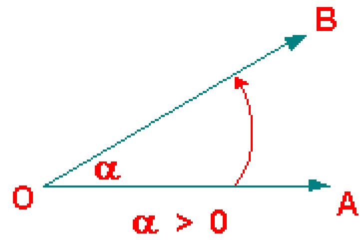
TRIGONOMETRIA

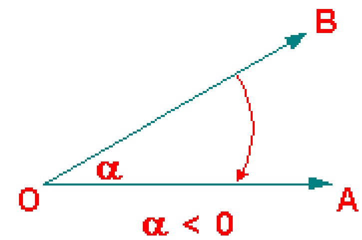
INTRODUCCION

En un sentido básico, se puede afirmar que la Trigonometría es el estudio de las relaciones numéricas entre los ángulos y lados del triángulo. Pero su desarrollo la ha llevado a tener un objetivo más amplio, como se verá más adelante.

MEDICION DE ANGULOS

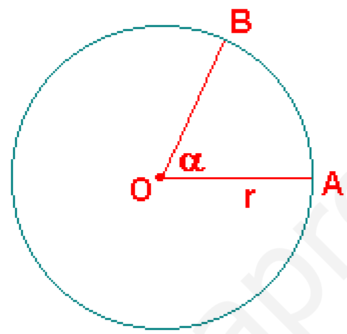
En Geometría los ángulos tienen medidas positivas solamente, en cambio, en Trigonometría un ángulo puede tener una medida positiva, nula o también negativa:





Observación: Cada ángulo de cualquier polígono se considera positivo.

*Además del sistema sexagesimal, que asigna al ángulo completo una medida de 360º , existe otro sistema para medir ángulos, llamado **sistema absoluto**, cuya unidad es el **radián (rad)**. Un ángulo del centro en una circunferencia tiene la magnitud de **1 rad** , si el arco que subtiende tiene una longitud igual al **radio** de ésta.*



$$\alpha = 1 \text{ rad} \iff \ell(\overset{\frown}{AB}) = r$$

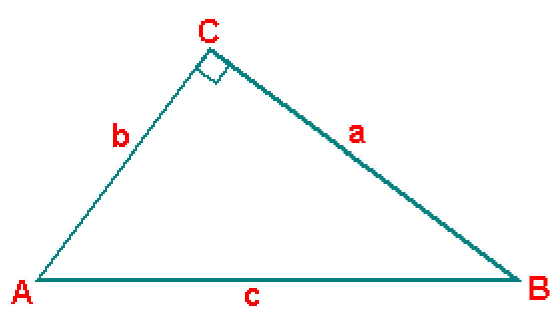
En este sistema el ángulo completo mide 2π rad , por lo tanto:

π rad equivalen a 180º

Observación: Generalmente no se utiliza " rad " , cuando se da la medida de un ángulo en sistema absoluto.

RAZONES TRIGONOMETRICAS EN EL TRIANGULO RECTANGULO

Dado el triángulo rectángulo en C :



Se definen:

Seno del ángulo en A (sen (A)): Cociente entre las longitudes del cateto opuesto al ángulo en A y de la hipotenusa:

$$\mathbf{sen}\,(\,A\,) \;=\; \frac{a}{c}$$

Coseno del ángulo en A (cos (A)): Cociente entre las longitudes del cateto adyacente al ángulo en A y de la hipotenusa:

$$\mathbf{cos}\,(\,A\,) \;=\; \frac{b}{c}$$

Tangente del ángulo en A (tg (A)): Cociente entre las longitudes del cateto opuesto y del cateto adyacente al ángulo en A:

$$\mathbf{tg}\,(\,A\,) \;=\; \frac{a}{b}$$

Cotangente del ángulo en A (ctg (A)): Cociente entre las longitudes del cateto adyacente y del cateto opuesto al ángulo en A:

$$\mathbf{ctg}\,(\,A\,) \;=\; \frac{b}{a}$$

Secante del ángulo en A (sec (A)): Cociente entre las longitudes de la hipotenusa y del cateto adyacente al ángulo en A:

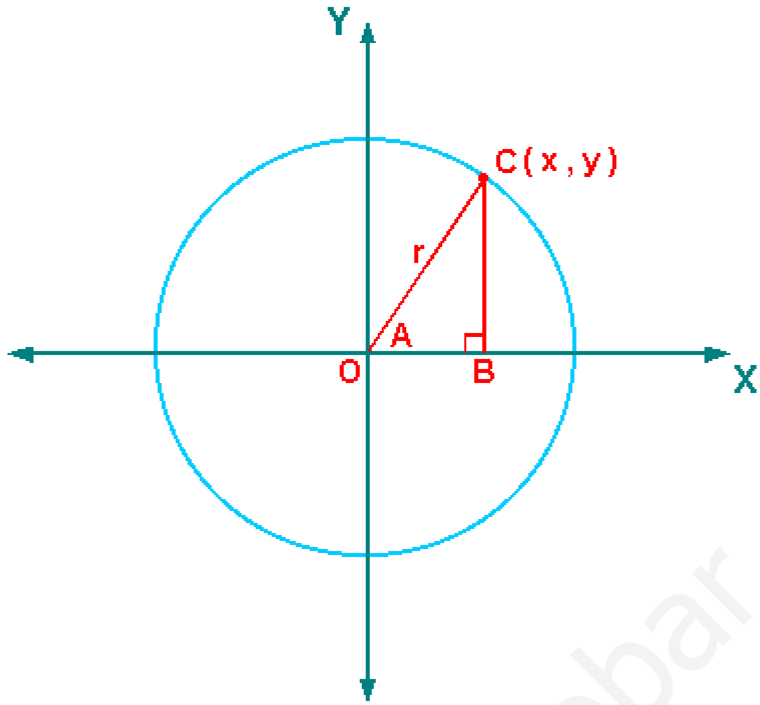
$$\mathbf{sec}\,(\,A\,) \;=\; \frac{c}{b}$$

Cosecante del ángulo en A (csc (A)): Cociente entre las longitudes de la hipotenusa y del cateto opuesto al ángulo en A:

$$\mathbf{csc}\,(\,A\,) \;=\; \frac{c}{a}$$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO DE CUALQUIER MEDIDA

Dada la siguiente figura:



Se definen:

$$\operatorname{sen}(A) = \frac{y}{r} \qquad \cos(A) = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}(A) = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \operatorname{ctg}(A) = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$\sec(A) = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \csc(A) = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0)$$

Teorema 1:* *Dado un ángulo, el valor de cualquier razón trigonométrica depende únicamente de la magnitud de dicho ángulo.

Teorema 2:* *Si $A + B = 90^{o}$, entonces:

$$\operatorname{sen}(A) = \cos(B) \qquad \cos(A) = \operatorname{sen}(B)$$

$$\operatorname{tg}(A) = \operatorname{ctg}(B) \qquad \operatorname{ctg}(A) = \operatorname{tg}(B)$$

$$\sec(A) = \csc(B) \qquad \csc(A) = \sec(B)$$

***Teorema 3:* Si $n \in Z$, entonces:**

$$sen(A + 360^o \times n) = sen(A)$$

$$cos(A + 360^o \times n) = cos(A)$$

$$tg(A + 180^o \times n) = tg(A)$$

TABLA DE RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ALGUNOS ANGULOS

A		sen (A)	cos (A)	tg (A)
0^o	0	0	1	0
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	1	0	indefinida
180^o	π	0	-1	0
270^o	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	indefinida

Razones trigonométricas

Debido a que un triángulo tiene tres lados, se pueden establecer seis razones, dos entre cada pareja de estos lados. Las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo son las siguientes:

Seno: *razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.*

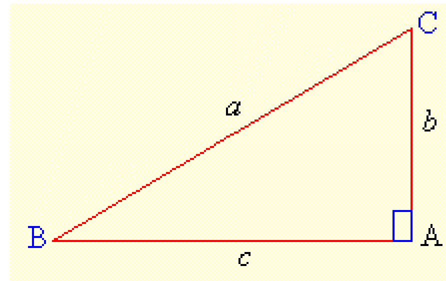
Coseno: *razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa.*

Tangente: *razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente.*

Cotangente: *razón entre el cateto adyacente al ángulo y el cateto opuesto.*

Secante: *razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo.*

Cosecante: *razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo.*



$\triangle ABC$, rectángulo en A
$\angle B$ y $\angle C$: ángulos agudos
a : hipotenusa
b : cateto, opuesto al $\angle B$ y adyacente al $\angle$
c : cateto, opuesto al $\angle C$ y adyacente al $\angle$

$$\operatorname{sen} B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{sen} C = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \qquad \cos C = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

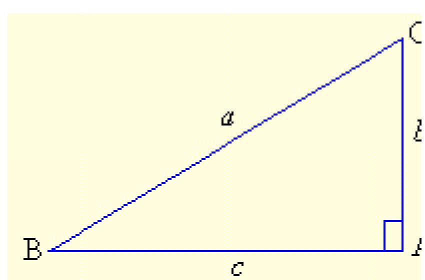
$$\tan B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c} \qquad \tan C = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\cot B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b} \qquad \cot C = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{c}$$

$$\sec B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{c} \qquad \sec C = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\csc B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b} \qquad \csc C = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{c}$$

Teorema de Pitágoras:
"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos". Y, "En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de uno de los catetos es igual a la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto".



$\triangle ABC$, rectángulo er
a : hipotenusa
b : cateto
c : cateto

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$

Ejercicios resueltos

1. Hallar las razones trigonométricas del ángulo a menor de un triángulo rectángulo si la hipoten mide 5 m. y uno de los catetos mide 3 m.

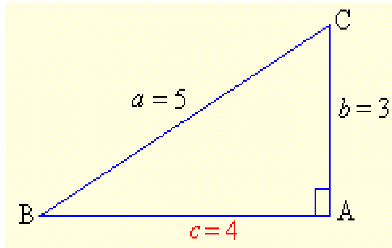
2. Se tiene un triángulo rectángulo cuyos catetos m 8 y 15 m., hallar las razones trigonométricas del ángulo agudo mayor.

Soluciones

1. *Para poder calcular las seis razones trigonométricas necesitamos hallar la medida del otro cateto; esto lo hacemos aplicando el [Teorema de Pitágoras](). Una vez hallado el valor de este cateto, procedemos a encontrar los valores de las razones por medio sus respectivas [definiciones]():*

$a = 5$: hipotenusa
$b = 3$: cateto
$c = ?$: cateto

$$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 =$$
$$\Rightarrow \quad c^2 = 16,$$
$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{16};$$
$$\therefore \quad c = 4.$$



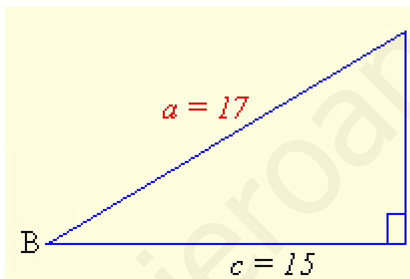
Como a menor lado se opone m
ángulo, es obvio, de acuerdo c
que se pide en el presente ejer
que debemos calcular las razon
trigonométricas del $\angle B$:

$$\operatorname{sen} B = \frac{3}{5} = 0.6 \qquad \cos B = \frac{4}{5}$$
$$\tan B = \frac{3}{4} = 0.75 \qquad \cot B = \frac{4}{3} =$$
$$\sec B = \frac{5}{4} = 1.25 \qquad \csc B = \frac{5}{3}$$

2. *Primero hallamos el valor de la hipotenusa, aplicando el [Teorema de Pitágoras](); luego, calculamos las razones trigonométricas, a partir de sus respectivas [definiciones]() y con los datos dados y obtenidos:*

$b = 8$: cateto
$c = 15$: cateto
$a = ?$: hipotenusa

$$a^2 = b^2 + c^2 = 8^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 = 64 + 225 = 2$$
$$\therefore \quad a = \sqrt{289} = 17$$



"A mayor lado se opone mayor ángul
por ende, debemos calcular las razon
trigonométricas del ángulo C:

$$\operatorname{sen} C = \frac{15}{17} \approx 0{,}88235$$
$$\cos C = \frac{8}{17} \approx 0{,}47059$$
$$\tan C = \frac{15}{8} = 1{,}875 \qquad \cot C = \frac{8}{15}$$
$$\sec C = \frac{17}{8} = 2{,}125 \qquad \csc C = \frac{17}{15}$$

Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo significa encontrar el valor númerico de cada uno de sus tres lados y sus tres ángulos. En esta clase de problemas siempre se nos dan los valores de tres elementos, uno de los cuales es uno de los lados, y se nos pide hallar los otros tres. De la geometría plana elemental sabemos que "la suma de las medidas de los tres ángulos interiores en cualquier triángulo es igual a 180 grados". Así, para encontrar el valor del tercer ángulo, conocidos los otros dos, basta con utilizar la siguiente fórmula:

$$A = 180^0 - (B + C)$$

Con lo poco que hemos estudiado hasta ahora, estamos capacitados para resolver triángulos rectángulos cuando nos dan el valor de uno de sus ángulos y el de uno de los lados. No obstante

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$sen(A)\,csc(A) = 1 \qquad (sen(A) \neq 0)$

$cos(A)\,sec(A) = 1 \qquad (cos(A) \neq 0)$

$tg(A)\,ctg(A) = 1 \qquad (sen(A)\,cos(A) \neq 0)$

$$tg(A) = \frac{sen(A)}{cos(A)} \qquad (cos(A) \neq 0)$$

$$ctg(A) = \frac{cos(A)}{sen(A)} \qquad (sen(A) \neq 0)$$

$sen^2(A) + cos^2(A) = 1$

$sec^2(A) = 1 + tg^2(A) \qquad (cos(A) \neq 0)$

$csc^2(A) = 1 + ctg^2(A) \qquad (sen(A) \neq 0)$

$sen(2A) = 2\,sen(A)\,cos(A)$

$sen(3A) = 3\,sen(A) - 4\,sen^3(A)$

$sen(4A) = 4\,sen(A)\,cos(A) - 8\,sen^3(A)\,cos(A)$

$cos(2A) = cos^2(A) - sen^2(A)$

$cos(3A) = 4\,cos^3(A) - 3\,cos(A)$

$cos(4A) = 8\,cos^4(A) - 8\,cos^2(A) + 1$

$$tg(2A) = \frac{2\,tg(A)}{1 - tg^2(A)} \qquad (tg(A) \neq \pm 1)$$

$$sen\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos(A)}{2}}$$

$$cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos(A)}{2}}$$

$$tg\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos(A)}{1 + cos(A)}} = \frac{1 - cos(A)}{sen(A)} = \frac{sen(A)}{1 + cos(A)} \qquad (sen(A) \neq 0)$$

$$sen(A+B) = sen(A)\cos(B) + sen(B)\cos(A)$$

$$sen(A-B) = sen(A)\cos(B) - sen(B)\cos(A)$$

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - sen(A)\,sen(B)$$

$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + sen(A)\,sen(B)$$

$$tg(A+B) = \frac{tg(A) + tg(B)}{1 - tg(A)\,tg(B)} \qquad (tg(A)\,tg(B) \neq 1)$$

$$tg(A-B) = \frac{tg(A) - tg(B)}{1 + tg(A)\,tg(B)} \qquad (tg(A)\,tg(B) \neq -1)$$

$$sen(A) + sen(B) = 2\,sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$sen(A) - sen(B) = 2\,sen\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos(A) - \cos(B) = -2\,sen\left(\frac{A+B}{2}\right)sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$tg(A) + tg(B) = \frac{sen(A+B)}{\cos(A)\cos(B)} \qquad (\cos(A)\cos(B) \neq 0)$$

$$tg(A) - tg(B) = \frac{sen(A-B)}{\cos(A)\cos(B)} \qquad (\cos(A)\cos(B) \neq 0)$$

$$sen^2(A) = \frac{1 - \cos(2A)}{2}$$

$$sen^3(A) = \frac{3\,sen(A) - sen(3A)}{4}$$

$$sen^4(A) = \frac{3 - 4\cos(2A) + \cos(4A)}{8}$$

$$\cos^2(A) = \frac{1 + \cos(2A)}{2}$$

$$\cos^3(A) = \frac{3\cos(A) + \cos(3A)}{4}$$

$$\cos^4(A) = \frac{3 + 4\cos(2A) + \cos(4A)}{8}$$

SIGNO DE CADA RAZON TRIGONOMETRICA EN CADA CUADRANTE

Cuadrante	sen (A)	cos (A)	tg (A)
1º	+	+	+
2º	+	–	–
3º	–	–	+
4º	–	+	–

FORMULAS DE REDUCCION

Sea $0^\circ < A < 90^\circ$, entonces:

2º Cuadrante

$\operatorname{sen}(180^\circ - A) = \operatorname{sen} A$

$\cos(180^\circ - A) = -\cos A$

$\operatorname{tg}(180^\circ - A) = -\operatorname{tg} A$

3er Cuadrante

$\operatorname{sen}(180^\circ + A) = -\operatorname{sen} A$

$\cos(180^\circ + A) = -\cos A$

$\operatorname{tg}(180^\circ + A) = \operatorname{tg} A$

4º Cuadrante

$\operatorname{sen}(360^\circ - A) = -\operatorname{sen} A$

$\cos(360^\circ - A) = \cos A$

$\operatorname{tg}(360^\circ - A) = -\operatorname{tg} A$

ANGULOS NEGATIVOS

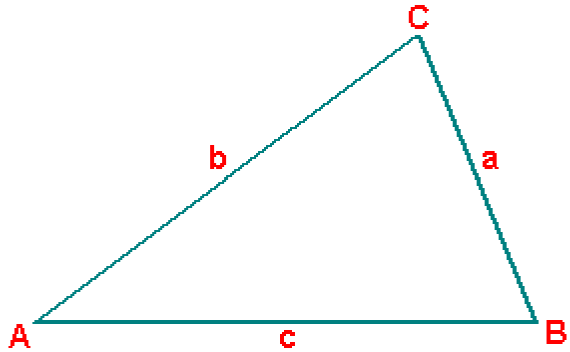
$\operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen}(A)$

$\cos(-A) = \cos(A)$

$\operatorname{tg}(-A) = -\operatorname{tg}(A)$

LEY DE LOS SENOS Y LEY DE LOS COSENOS

Dado un triángulo ABC cualquiera:



Siempre se cumple lo siguiente:

Ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}(A)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(B)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(C)}{c}$$

Se aplica cuando se conocen las medidas de:

a) Dos lados y uno de los ángulos opuestos a ellos.

b) Dos ángulos y un lado.

Ley de los cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos(B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(C)$$

Se aplica cuando se conocen las medidas de:

a) Los tres lados.

b) Dos lados y el ángulo comprendido por ellos.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

*También es posible definir la razón trigonométrica de un número real, por ejemplo, el seno del real **x** es **sen (x)** , en esta última expresión el ángulo está medido en radianes:*

$$\text{sen}\,(\pi/6) = 0{,}5$$

*De esa forma se define la **función seno (Sen):***

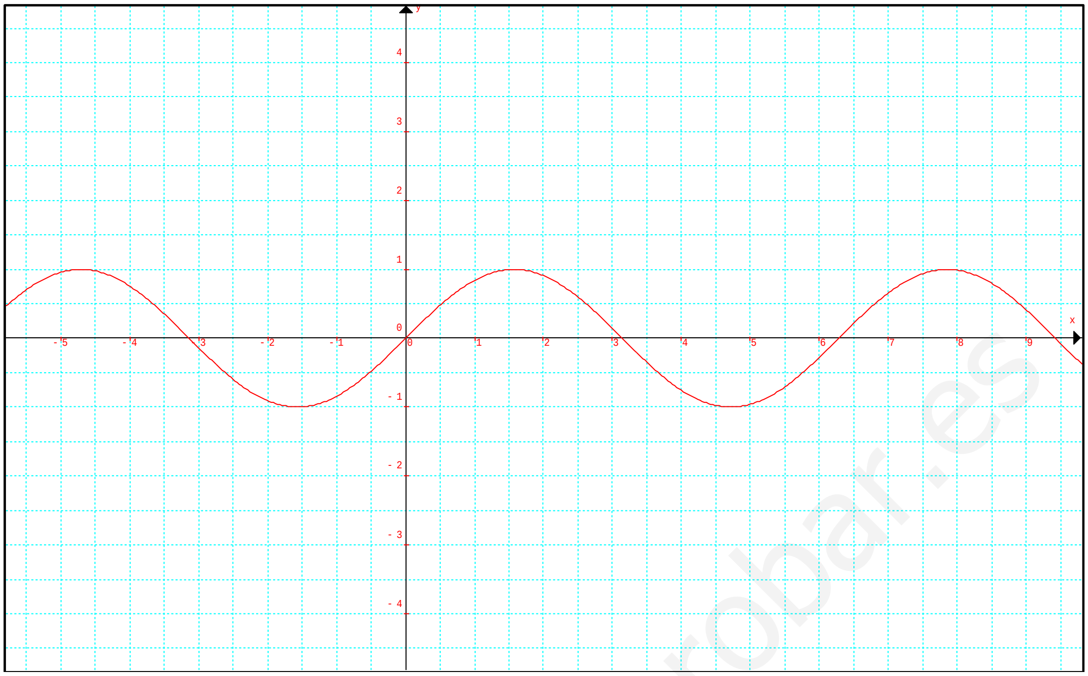
$$\mathbf{Sen} = \{(x, y) : y = \text{sen}(x)\}$$

*Análogamente se definen **función coseno (Cos)** y **función tangente (Tg)**.*

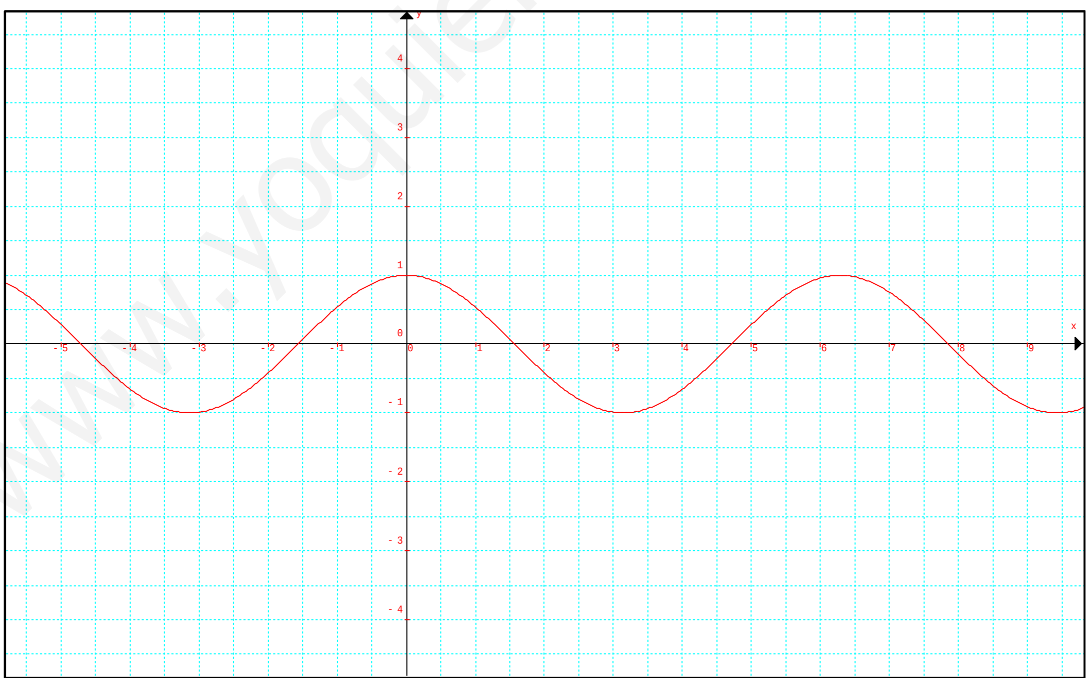
A continuación se da una tabla de funciones trigonométricas y sus inversas. Las restricciones al dominio que se imponen, tienen como propósito lograr que las funciones sean biyectivas. De esa forma sus inversas también son funciones.

FUNCION	DOMINIO	CODOMINIO	IMAGEN DE x
SENO	$\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$	$[-1\,;\,1]$	$f(x) = \text{sen}(x)$
COSENO	$[0\,;\,\pi]$	$[-1\,;\,1]$	$f(x) = \cos(x)$
TANGENTE	$\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$	R	$f(x) = \text{tg}(x)$
INVERSA DEL SENO	$[-1\,;\,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$	$f(x) = \text{sen}^{-1}(x)$
INVERSA DEL COSENO	$[-1\,;\,1]$	$[0\,;\,\pi]$	$f(x) = \cos^{-1}(x)$
INVERSA DE LA TANGENTE	R	$\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$	$f(x) = \text{tg}^{-1}(x)$

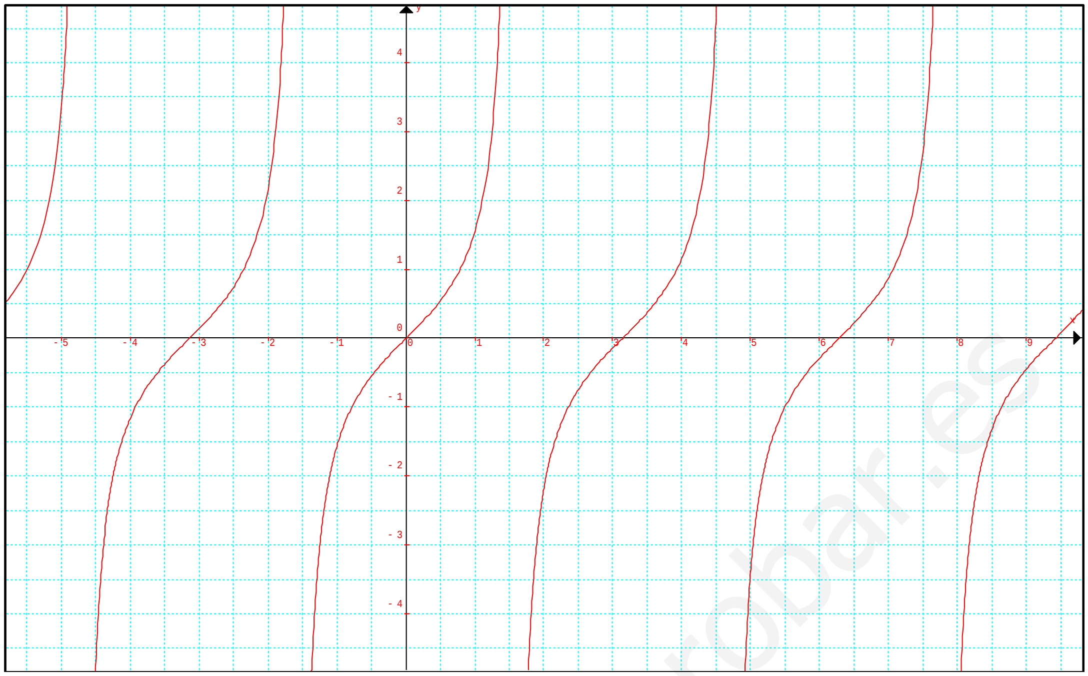
Función seno: f (x) = sen (x)



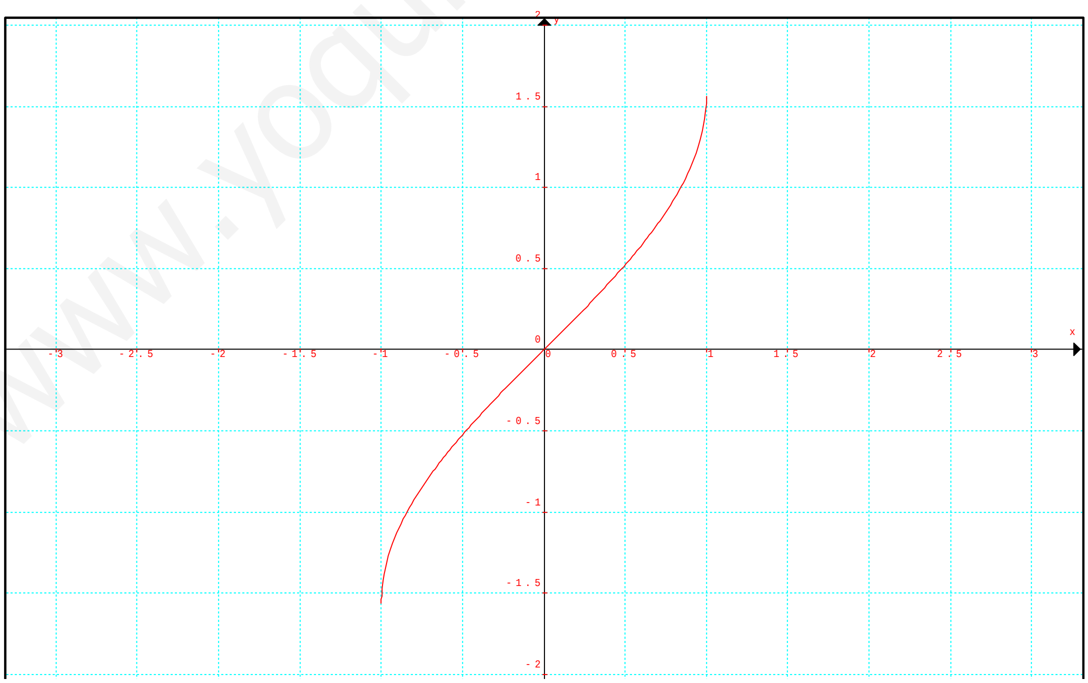
Función coseno: f (x) = cos (x)



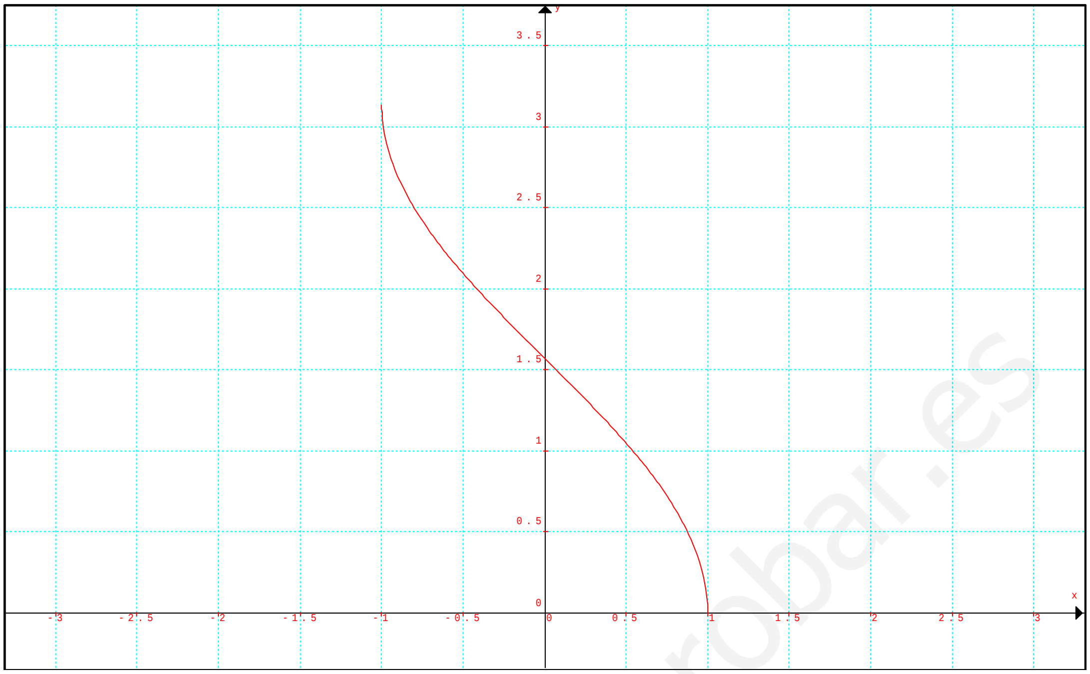
Función tangente: f (x) = tg (x)



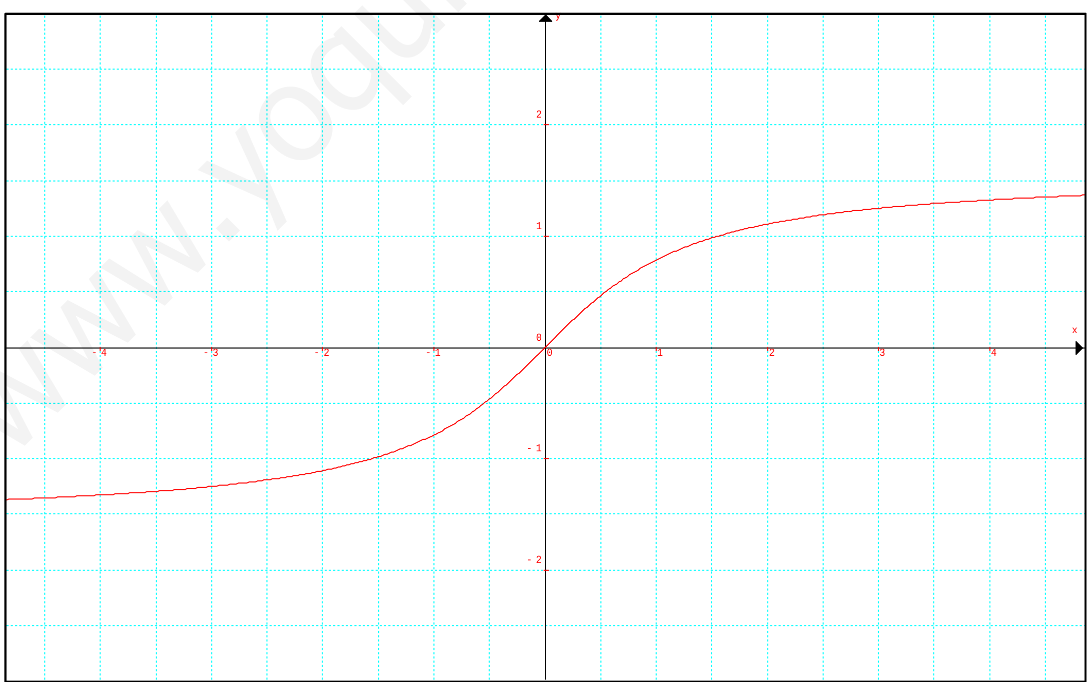
Función inversa del seno: f (x) = sen $^{-1}$ (x)



Función inversa del coseno: $f(x) = \cos^{-1}(x)$



Función inversa de la tangente: $f(x) = tg^{-1}(x)$



Trabajo Practico N°1

Manipulación de calculadoras.

1) *Averigua los ángulos* $\hat{A}$, $\hat{B}$ *y* $\hat{C}$ ***(en grados y en radianes)*** *sabiendo:*
   - a) *tg* $\hat{A}$ *= 2'5* *Sol: 68º 11' 55''*
   - b) *sen* $\hat{B}$ *= 0'3* *Sol: 17º 27' 27''*
   - c) *sen* $\hat{C}$ *= 0'6* *Sol: 36º 52' 12''*

2) *Utilizando la calculadora, halla las siguientes rezones trigonométricas redondeando a 4 decimales:*
   - a) *sen 34º 35' 57''* *Sol: 0,5678*
   - b) *cos 85º 7' 23''* *Sol: 0,0850*
   - c) *tg 87º 33''* *Sol: 19,1397*
   - d) *sen 43º 35'* *Sol: 0,6894*

3) *Utilizando la calculadora, halla los ángulos* ***(en grados y en radianes)*** *de las siguientes razones trigonométricas:*
   - a) *sen* α*= 0,3456* *Sol:* α*= 20º 13' 7''*
   - b) *cos* α*= 0,5555* *Sol:* α*= 56º 15' 17''*
   - c) *tg* α*= 1,4572* *Sol:* α*= 55º 32' 24''*
   - d) *cos* α*= 0,25* *Sol:* α*= 75º 31' 21''*
   - e) *sen* α*= 0,0525* *Sol:* α*= 3º 34''*

Grados y radianes.

4) *¿ ¿A cuántos radianes equivalen 115°38'27"?* *Rdo: 2,02 rad*

5) *¿A cuántos grados sexagesimales equivalen 2 radianes?* *Rdo: 114°35'29"*

6) *Ayúdate de la calculadora para completar la tabla siguiente:*

Medida de $\hat{A}$ *en grados, minutos y segundos*	*45º*		*30º*				*75º*
Medida de $\hat{A}$ *en radianes*				$\pi/3$		$\pi/6$	
tg $\hat{A}$		*2,3*			*0,6*		

Calculo del resto de razones trigonométricas conociendo una de ellas.

7) *Resuelve los siguientes apartados:*
   - a) *Si cos* $\hat{A}$ *= 1/2 ; calcula sen* $\hat{A}$ *y tg* $\hat{A}$
   - b) *Si sen* $\hat{A}$ *= 4/5; calcula cos* $\hat{A}$ *y tg* $\hat{A}$

8) *Sabiendo que* $sen\alpha = \frac{2}{3}$, *halla el resto de las razones trigonométricas.*

   Indicación: utiliza la fórmula $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ *en primer lugar para hallar el coseno y a partir de ahí te saldrá:* $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, tg\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

9) *Sabiendo que* $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, *halla el resto de las razones trigonométricas.*

solución: $sen\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}, tg\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

10) *Sabiendo que* $tg\alpha = \frac{5}{4}$, *halla el resto de las razones trigonométricas.*

solución: $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$.

11) *Completa en tu cuaderno la siguiente tabla, haciendo uso de las relaciones fundamentales:*

sen α	*0,94*		*4/5*			
cos α		*0,82*			$\sqrt{3}/2$	
tg α				*3,5*		*1*

12) *Calcula el valor exacto de las razones trigonométricas que faltan y el ángulo* α

sen α	*1/3*		
cos α		$\sqrt{2}/3$	
tg α			*2*
α			

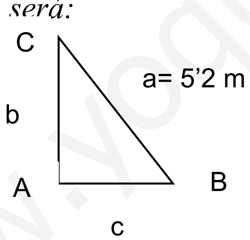
Resolución de triángulos rectángulos.

13) *Halla la altura de un edificio que proyecta una sombra de 56 m. a la misma hora que un árbol de 21 m. proyecta una sombra de 24 m.* *Sol: 49 m*

14) *Un poste vertical de 3 m proyecta una sombra de 2 m; ¿qué altura tiene un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 4,5 m?* *S: 6,75 m*

15) *Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conoce: uno de sus ángulos, B = 37º, y su hipotenusa, a = 5'2 m.*

Indicación: *Como es un triángulo rectángulo el ángulo A = 90º, luego B + C = 90º ⇒C = 53º.*
El dibujo del triángulo será:



Utilizando sen B, cos B, sen C o cos C, obtendrás que b = 3'13 m y c = 4'15 m.

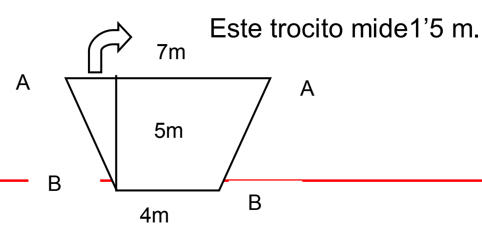
16) *Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conoce: uno de sus ángulos B = 29º, y el cateto opuesto, b = 4'5 m. Solución: C = 61º, a = 9'29 m, c = 8'12 m.*

17) *Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conoce: la hipotenusa, a = 5'7m, y un cateto, b = 4'6m.* *Indicación:* *Debes aplicar* $\cos C = \frac{b}{a} = \frac{4'6}{5'7} = 0'807$, luego $C = 36º11'40"$. *B = 53º48'19''. c = 3'37m.*

18) *Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conoce: los dos catetos, b = 3'5m y c = 2'8m.* *Indicación:* *Debes partir de* $\mathrm{tg}\,B = \frac{b}{c}$. ***Solución:*** *B = 51º20'24'', a = 4'48m, C = 38º39'35''.*

19) *Las bases de un trapecio isósceles miden 7 y 4 metros; su altura mide 5 metros. Halla los ángulos del trapecio.*

Indicación:



Aplicando $\text{tg} A = \frac{5}{1'5}$*, hallas A y como 2A + 2B = 360º,*

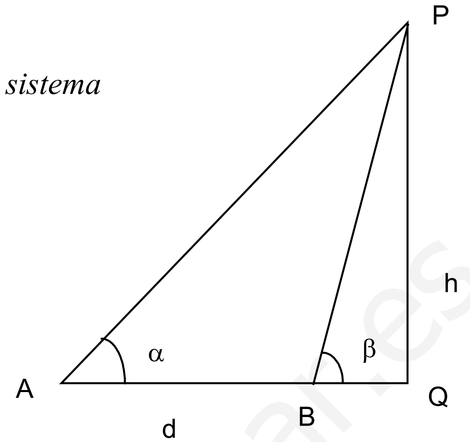
te debe salir: A = 73º18'27'' y B = 106º41'.

20) *Desde un punto A del suelo se observa una torre, PQ, y se la ve bajo un ángulo* α*= 31º. Se avanza 40 m. en dirección a la torre, se mira y se la ve, ahora, bajo un ángulo* β*= 58º. Halla la altura h de la torre y la distancia de A al pie, Q, de la torre.*

<u>Indicación:</u> Mirando el triángulo AQP aplica tg α

Mirando el triángulo BQP aplica tg β *Obtienes así un sistema y resolviéndolo obtendrás* $\overline{BQ}$ *= 24 m y h = 38'4m.*

Finalmente $\overline{AQ}$ *= 64 m.*



21) *Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conocen: uno de sus ángulos, B = 51º, y el cateto contiguo, c = 7'3m. Solución: C = 39º, b = 9'01m, a = 11'60m.*

22) *Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conocen: la hipotenusa, a = 4'6m, y un cateto, c = 3'1m. Solución: b = 3'40m, B = 47º37'24'', C = 42º22'35''.*

23) *De un rombo ABCD se conocen la diagonal* $\overline{AC}$ *= 4m. y el lado* $\overline{AB}$ *= 5m. Halla los ángulos del rombo y su otra diagonal. Solución: 132º48', 47º12', 9'2m.*

24) *Desde un cierto punto del terreno se mira a lo alto de una montaña y la visual forma un ángulo de 50º con el suelo. Al alejarse 200 m de la montaña, la visual forma 35º con el suelo. Halla la altura, h, de la montaña. Solución: 339'6 m.*

25) *El radio de un polígono regular mide 10 m. ¿Cuánto miden el lado y la apotema? Sol: a = 8,09 m l = 11,76 m*

26) *Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 14 cm y 8 cm. Sol: 120º 30' 36''; 59º 29' 23''*

27) *Desde un barco se ve el punto más alto de un acantilado con un ángulo de 74º. Sabiendo que la altura del acantilado es de 200 m, ¿a qué distancia se halla el barco del pie del acantilado? Sol: 57,35 m*

28) *Si la sombra de un poste es la mitad de su altura, ¿qué ángulo forman los rayos del sol con el horizonte? Sol: 63º 26' 6''*

29) *En un triángulo isósceles el lado correspondiente al ángulo desigual mide 7,4 m y uno de los ángulos iguales mide 63º. Halla la altura y el área. Sol: h = 7,26 m, S = 26,86* m^2

30) *Calcula el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 0'7. Sol: sen* α*= 0,57; cos* α*= 0,82*

31) *Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento el avión se encuentra a una altura de 1.200 m y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de 30º. ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si ésta mide 40 m de alto? 2.340 m*

Trabajo Practico N°2

1. Expresa en radianes los siguientes ángulos:

a) *102,34º* b) *80º 25'* c) *–45º* d) *22,5º*

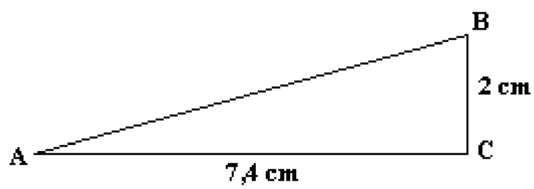
[sol] *a) 1,786 b) 1,4 c) $-\pi/4$ d) $\pi/8$*

2 Expresa en grados:

a) $7\pi/3$ rad *b) 3,35 rad* *c) –4,5 rad* *d) 8 rad*

[sol] *a) 420º b) 91,94º c) –257,83º d) 458,366º*

3. Calcula todas las razones trigonométricas de los ángulos agudos del siguiente triángulo rectángulo:



[sol] *sen A = 0,261; cos A = 0,965; tg A = 0,270; sen B = 0,965; cos B = 0,261; tg B = 3,7*

4. Calcula las siguientes razones trigonométricas utilizando la calculadora científica y expresando el resultado redondeado con tres decimales:

a) sen 32,85º *b) cos 23º 12' 50''* *c) sec 80º 45'* *d) tg 2,3*

e) cotag 0,95 *f) sen (–394,4º)* *g) cos 5,65* *h) sen $\pi/5$*

[sol] *a) 0,542 b) 0,919 c) 6,221 d) –1,119 e) 0,715 f) –0,565 g) 0,806 h) 0,588*

5. Sabiendo que cos $\alpha = 0,9$ y que $0º < \alpha < 90º$, halla el valor de sen α y el de tg α

[sol] *0,436 y 0,484*

6. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 m y 7 m. Halla la hipotenusa y los ángulos.

[sol] *8,60 m; 35,53º*

7. El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 12 m y la hipotenusa 35 m. Halla el otro cateto y los ángulos.

[sol] *32,88 m; 20,06º*

8. En un triángulo rectángulo sabemos que un ángulo mide 37º y el cateto contiguo 15,4 m. Halla los otros dos lados y el otro ángulo agudo.

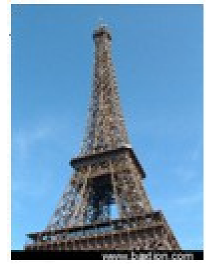
[sol] *53º, 19,28 m, 11,60 m*

9. Queremos medir la altura de una torre de comunicaciones situada sobre nuestro mismo plano. Para ello situamos un teodolito a 50 metros de su base para medir el ángulo de elevación de su extremo superior. Sabiendo que dicho ángulo es de 58º y que el teodolito está sobre un trípode de 1,5 m de alto, ¿cuál es la altura de la torre?

[sol] *81,52 m*

10. La torre de un castillo está situada al borde de un foso con agua. El ángulo de elevación de su extremo superior desde el otro borde del foso es de 62º. Si nos alejamos del foso 52 m, el ángulo de elevación es de 28º. Calcula la anchura del foso y la altura de la torre.
[sol] 20,50 m, 38,56 m

11. *Cuando los rayos del sol inciden con un ángulo de 78º la torre Eiffel proyecta una sombra de 69,5 m. Calcula su altura aproximada.*
[sol] 327 m



Trabajo Practico N°3

1 Ángulos de un triángulo. *En un triángulo se conocen dos de sus ángulos. Determina el valor del tercero:*

- b) *A = 36º 0' 12''; B = 48º 36' 54''.*
- c) *A = 43º 29' 39''; B = 49º 30' 21''.*
- d) *A = 108º 45' 37''; B = 94º 37' 12''.*
- e) *A = π/3 rad; B = 3π/8 rad.*

2- Ángulos de un triángulo rectángulo. *En un triángulo rectángulo se conoce uno de sus ángulos agudos. Determina el valor del otro ángulo agudo:*

- f) *B = 37º 45' 45''.*
- g) *B = 49º 12' 37''.*
- h) *B = 5/3 de ángulo recto.*
- i) *B = π/3 rad.*

3- Teoremas del cateto y de Pitágoras.

- j) *Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos miden 156 cm y 65 cm.*
- k) *Halla las longitudes de las proyecciones sobre la hipotenusa de los catetos del triángulo del ejercicio anterior.*
- l) *Halla la altura relativa a la hipotenusa del triángulo del ejercicio anterior.*
- m) *En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 64 m y 225 m respectivamente. Halla la longitud de los tres lados del triángulo.*
- n) *Halla la altura de un trapecio isósceles, sabiendo que sus bases miden 6 m y 16 m y los lados oblicuos 13 m cada uno de ellos.*
- o) *En un triángulo rectángulo se conoce un cateto, ($7\sqrt{2}$), y la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa, ($2\sqrt{2}$). Halla la hipotenusa y el otro cateto.*
- p) *Determinar el radio del círculo inscrito en un triángulo isósceles de base 32 cm y altura 30 cm.*

4- Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. *En los siguientes ejercicios los lados de un triángulo rectángulo se representan con las letras a, b y c, siendo siempre a la hipotenusa. Los lados del triángulo se representan con las letras A, B y C, siendo siempre A el ángulo recto, B el ángulo opuesto a b y C el ángulo opuesto a c. Usando exclusivamente la definición de las razones trigonométricas involucradas en cada caso, calcula el lado que se pide:*

- q) *a = 40 m; B = 30º. Hallar b.*
- r) *a = 40 cm; B = 30º. Hallar c.*
- s) *a = 12 dm; C = 60º. Hallar b.*
- t) *a = 12 Hm; C = 60º. Hallar c.*
- u) *b = 20 m; B = 30º. Hallar a.*
- v) *b = 20 mm; B = 45º. Hallar c.*

w) $c = 20$ m; $B = 30º$. Hallar a.
x) $b = 20$ Km; $C = 45º$. Hallar c.

5.- Halla la altura de una antena de radio si su sombra mide 100 m cuando los rayos del Sol forman un ángulo de 30º con la horizontal

6.- Averigua la distancia a la que se encuentra un castillo que está situado en la orilla opuesta de un río, sabiendo que la torre más alta del mismo se ve desde nuestra orilla bajo un ángulo de 40º y alejándonos 100 m del río el ángulo es de 25º.

8.- Calcula el área de un decágono regular de 5 cm de lado.

9- En una circunferencia de 7 cm de radio trazamos una cuerda de 9 cm. ¿Cuánto mide el ángulo central que abarca dicha cuerda?

10- Halla los ángulos de un triángulo isósceles cuya base mide 50 cm y los lados iguales 40 cm cada uno.

11- Si vemos una chimenea bajo un ángulo de 30º, ¿bajo qué ángulo la veríamos si la distancia a la que nos encontramos de la misma fuese el doble? ¿Y si fuese el triple?

12- Calcula el ángulo que forman las tangentes a una circunferencia de 5 cm de radio, trazadas desde un punto situado a 7 cm del centro.

13- La resultante de dos fuerzas de 20 N y de 30 N es de 40 N. ¿Qué ángulo forman entre sí dichas fuerzas? ¿Qué ángulo forma cada una de ellas con la resultante?

14- Halla los lados de un paralelogramo cuyas diagonales miden 20 cm y 15 cm respectivamente y forman un ángulo de 42º.

15- Julia y María caminan juntas, llegan a un cruce de caminos rectos que forman entre sí un ángulo de 50º y cada una toma un camino. A partir de ese momento, Julia camina a 4 km/h y María a 6km/h ¿A qué distancia estará Julia de María al cabo de una hora y media?

16.- Dos de los lados de un paralelogramo miden 6 cm y 8 cm, y forman un ángulo de 32º. ¿Cuánto miden las diagonales?

17.- Kepler pensaba que las órbitas de los planetas estaban relacionadas con los radios de 6 esferas concéntricas inscritas y circunscritas alternativamente en los poliedros regulares. Si el radio de la esfera inscrita en un cubo mide 1 m, ¿cuánto mide la arista del cubo? ¿Y el radio de la esfera circunscrita a él?

18.- En la pirámide de Keops, de base cuadrada, el lado de la base mide 230 m y el ángulo que forma una cara con la base es de 52º. Calcula:

y) *La altura de la pirámide.*
z) *La altura de una cara.*
aa) *La longitud de una arista.*
bb) *El ángulo que forma la arista con la base del triángulo.*
cc) *El ángulo superior de cada cara.*
dd) *El volumen de la pirámide.*