PÁGINA 36

PRACTICA

Números reales

1 **a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos números enteros?**

$$-2;\ 1{,}7;\ \sqrt{3};\ 4{,}\widehat{2};\ -3{,}7\widehat{5};\ 3\pi;\ -2\sqrt{5}$$

b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

c) ¿Cuáles son racionales?

a) No pueden expresarse como cociente: $\sqrt{3}$; 3π y $-2\sqrt{5}$.

b) $-2 = \dfrac{-4}{2}$; $1{,}7 = \dfrac{17}{10}$; $4{,}\widehat{2} = \dfrac{42-4}{9} = \dfrac{38}{9}$; $-3{,}7\widehat{5} = -\dfrac{375-37}{90} = -\dfrac{338}{90} = -\dfrac{169}{45}$

c) Son racionales: -2; $1{,}7$; $4{,}\widehat{2}$ y $-3{,}7\widehat{5}$.

2 **a) Clasifica en racionales o irracionales los siguientes números:**

$$\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0{,}8\widehat{7};\ -\sqrt{4};\ -\frac{7}{3};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\pi$$

b) Ordénalos de menor a mayor.

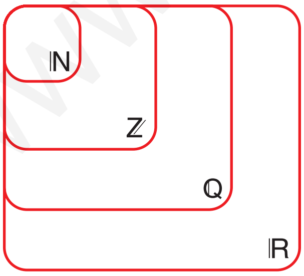
c) ¿Cuáles son números reales?

a) Racionales: $0{,}8\widehat{7}$; $-\sqrt{4}$; $-\dfrac{7}{3}$ Irracionales: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 2π

b) $-\dfrac{7}{3} < -\sqrt{4} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0{,}8\widehat{7} < 2\pi$

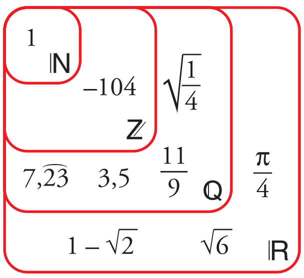
c) Todos son números reales.

3 **Sitúa los siguientes números en el diagrama adjunto:**



$$1;\ 7{,}\widehat{23};\ 1-\sqrt{2};\ 3{,}5$$

$$\frac{11}{9};\ \sqrt{\frac{1}{4}};\ \sqrt{6};\ \frac{\pi}{4};\ -104$$



4 ■■□ **Indica a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ pertenece cada uno de los siguientes números:**

$$-\frac{5}{4};\quad -3;\quad \frac{13}{6};\quad \sqrt{5};\quad \sqrt{16};\quad 152;\quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$\mathbb{N}$: $\sqrt{16}$; 152

$\mathbb{Z}$: $\sqrt{16}$, 152, –3

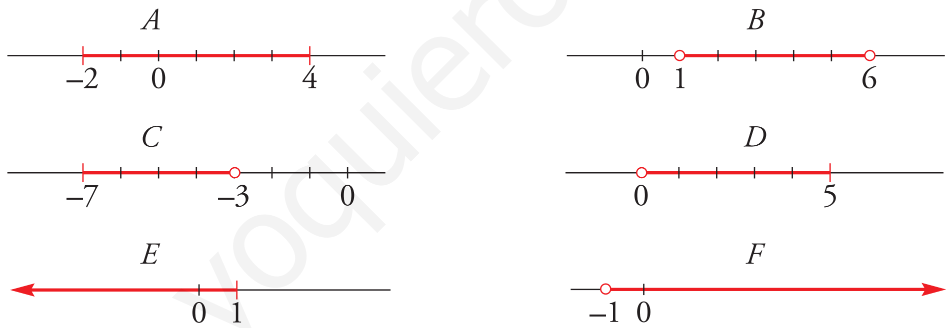
$\mathbb{Q}$: $\sqrt{16}$; 152; –3; $-\frac{5}{4}$; $\frac{13}{6}$

$\mathbb{R}$: $-\frac{5}{4}$; –3; $\frac{13}{6}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{16}$; 152 y $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

Intervalos y semirrectas

5 ■□□ **Representa en la recta real cada uno de los siguientes intervalos y semirrectas:**

$$A = [-2, 4]\qquad B = (1, 6)\qquad C = [-7, -3]$$
$$D = (0, 5]\qquad E = (-\infty, 1]\qquad F = (-1, +\infty)$$

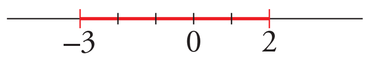


6 ■□□ **Escribe en forma de intervalo o semirrecta y representa en la recta real los números que cumplen la desigualdad indicada en cada caso:**

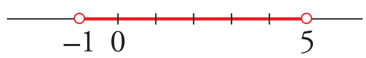
a) $-3 \le x \le 2$ **b)** $-1 < x < 5$

c) $0 < x \le 7$ **d)** $x > -5$

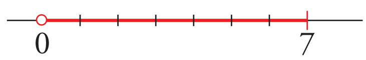
a) [–3, 2]



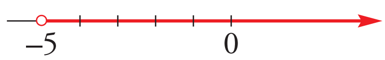
b) (–1, 5)



c) (0, 7]



d) (–5, +∞)



1 Soluciones a los ejercicios y problemas

7 □□□ **Expresa como intervalo o semirrecta y como una desigualdad cada uno de los conjuntos de números representados.**

a) $[-1, 3]$

$-1 \le x \le 3$

b) $(1, 5]$

$1 < x \le 5$

c) $[-2, +\infty)$

$x \ge -2$

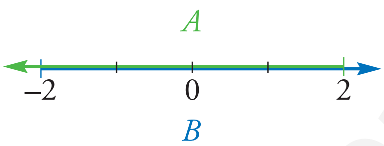
d) $(-\infty, 4)$

$x < 4$

8 □□□ **Representa en una misma recta las semirrectas:**

$$A = (-\infty, 2] \text{ y } B = [-2, +\infty)$$

¿Cuáles son los números que pertenecen a A y a B ($A \cap B$)? Exprésalo como un intervalo.



$A \cap B = [-2, 2]$

9 □□□ **Resuelto en el libro de texto.**

10 □□□ **Representa en la recta real:**

a) $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

b) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

a)

b)

Números aproximados. Notación científica

11 □□□ **Da una cota del error absoluto y una cota del error relativo de cada una de las aproximaciones siguientes sobre los presupuestos de algunos equipos deportivos:**

a) 128 mil euros

b) 25 millones de euros

c) 648 500 €

d) 3 200 €

a) Error absoluto < 500 €

Error relativo < 0,0039

b) Error absoluto < 500 000 €

Error relativo < 0,02

c) Error absoluto < 50 €

Error relativo < 0,000077

d) Error absoluto < 50 €

Error relativo < 0,0156

12 **Expresa con un número razonable de cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo de la aproximación que des.**

a) Oyentes de un programa de radio: 843 754

b) Precio de un coche: 28 782 €

c) Tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia: 0,0375 segundos.

d) Gastos de un ayuntamiento: 48 759 450 €

a) 840 000 oyentes $\begin{cases} \text{Error absoluto} < 5\,000 \\ \text{Error relativo} < 0{,}0059 \end{cases}$

b) 29 000 € $\begin{cases} \text{Error absoluto} < 500 \\ \text{Error relativo} < 0{,}017 \end{cases}$

c) 0,04 segundos $\begin{cases} \text{Error absoluto} < 0{,}005 \\ \text{Error relativo} < 0{,}13 \end{cases}$

d) 49 000 000 € $\begin{cases} \text{Error absoluto} < 500\,000 \\ \text{Error relativo} < 0{,}01 \end{cases}$

13 **Escribe en notación científica.**

a) 752 000 000 **b) 0,0000512**

c) 0,000007 **d) 15 000 000 000**

a) $7{,}52 \cdot 10^8$ b) $5{,}12 \cdot 10^{-5}$

c) $7 \cdot 10^{-6}$ d) $1{,}5 \cdot 10^{10}$

PÁGINA 37

14 **Expresa en notación científica.**

a) $32 \cdot 10^5$ **b)** $75 \cdot 10^{-4}$ **c)** $843 \cdot 10^7$

d) $458 \cdot 10^{-7}$ **e)** $0{,}03 \cdot 10^6$ **f)** $0{,}0025 \cdot 10^{-5}$

a) $3{,}2 \cdot 10^6$ b) $7{,}5 \cdot 10^{-3}$ c) $8{,}43 \cdot 10^9$

d) $4{,}58 \cdot 10^{-5}$ e) $3 \cdot 10^4$ f) $2{,}5 \cdot 10^{-8}$

15 **Da una cota del error absoluto de cada una de las siguientes aproximaciones y compara sus errores relativos.**

a) $8 \cdot 10^5$ **b)** $5{,}23 \cdot 10^6$ **c)** $1{,}372 \cdot 10^7$

d) $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ **e)** $1{,}7 \cdot 10^{-6}$ **f)** $4 \cdot 10^{-5}$

a) $5 \cdot 10^4$ b) $5 \cdot 10^3$ c) $5 \cdot 10^3$

d) $5 \cdot 10^{-6}$ e) $5 \cdot 10^{-8}$ f) $5 \cdot 10^{-6}$

El menor error relativo se da en c) y el mayor, en f).

16 ■□□ **Calcula mentalmente.**

a) $(1,5 \cdot 10^7) \cdot (2 \cdot 10^5)$ **b)** $(3 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{11})$

c) $(4 \cdot 10^{-7}) : (2 \cdot 10^{-12})$ **d)** $\sqrt{4 \cdot 10^8}$

a) $3 \cdot 10^{12}$ b) $1,5 \cdot 10^{-5}$

c) $2 \cdot 10^5$ d) $2 \cdot 10^4$

17 ■■□ **Calcula con lápiz y papel, expresa el resultado en notación científica y compruébalo con la calculadora.**

a) $(3,5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8)$ **b)** $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2,5 \cdot 10^5)$

c) $(1,2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6})$ **d)** $(6 \cdot 10^{-7})^2$

a) $14 \cdot 10^{15} = 1,4 \cdot 10^{16}$ b) $12,5 \cdot 10^{-3} = 1,25 \cdot 10^{-2}$

c) $0,24 \cdot 10^{13} = 2,4 \cdot 10^{12}$ d) $36 \cdot 10^{-14} = 3,6 \cdot 10^{-13}$

18 ■■□ **Efectúa a mano utilizando la notación científica y comprueba después con la calculadora.**

a) $5,3 \cdot 10^{12} - 3 \cdot 10^{11}$

b) $3 \cdot 10^{-5} + 8,2 \cdot 10^{-6}$

c) $6 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8}$

d) $7,2 \cdot 10^8 + 1,5 \cdot 10^{10}$

a) $53 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{11} = 50 \cdot 10^{11} = 5 \cdot 10^{12}$

b) $30 \cdot 10^{-6} + 8,2 \cdot 10^{-6} = 38,2 \cdot 10^{-6} = 3,82 \cdot 10^{-5}$

c) $6 \cdot 10^{-9} - 50 \cdot 10^{-9} = -44 \cdot 10^{-9} = -4,4 \cdot 10^{-8}$

d) $7,2 \cdot 10^8 + 150 \cdot 10^8 = 157,2 \cdot 10^8 = 1,572 \cdot 10^{10}$

19 ■□□ **Expresa el resultado de las siguientes operaciones en notación científica con 3 cifras significativas como máximo:**

a) $(2,8 \cdot 10^{-5}) : (6,2 \cdot 10^{-12})$

b) $(7,2 \cdot 10^{-6})^3 : (5,3 \cdot 10^{-9})$

c) $7,86 \cdot 10^5 - 1,4 \cdot 10^6 + 5,2 \cdot 10^4$

d) $(3 \cdot 10^{-10} + 7 \cdot 10^{-9}) : (7 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^5)$

a) $4,52 \cdot 10^6$ b) $7,04 \cdot 10^{-8}$

c) $-5,62 \cdot 10^5$ d) $1,12 \cdot 10^{-15}$

Potencias y raíces

20 ■□□ **Expresa en forma exponencial.**

a) $\sqrt[5]{x^2}$ **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt[3]{10^6}$ **d)** $\sqrt[4]{20^2}$

e) $\sqrt[5]{(-3)^3}$ **f)** $\sqrt[4]{a}$ **g)** $(\sqrt[5]{x^{-2}})^3$ **h)** $\sqrt[15]{a^5}$

a) $x^{2/5}$ b) $2^{1/2}$ c) 10^2 d) $20^{1/2}$

e) $(-3)^{3/5}$ f) $a^{1/4}$ g) $x^{-6/5}$ h) $a^{1/3}$

21 ■□□ **Pon en forma de raíz.**

a) $5^{1/2}$ **b)** $(-3)^{2/3}$ **c)** $\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}$

d) $(a^3)^{1/4}$ **e)** $(a^{1/2})^{1/3}$ **f)** $(a^{-1})^{3/5}$

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{(-3)^2}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}$

d) $\sqrt[4]{a^3}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ f) $\sqrt[5]{a^{-3}}$

22 ■□□ **Obtén con la calculadora.**

a) $\sqrt[3]{-127}$ **b)** $\sqrt[5]{0,2^{-3}}$ **c)** $\sqrt[4]{\left(\dfrac{13}{9}\right)^3}$

d) $12^{-2/3}$ **e)** $\sqrt[6]{3^{-5}}$ **f)** $\sqrt[5]{(-3)^{-2}}$

a) $\sqrt[3]{-127} \approx -5,03$ b) $\sqrt[5]{0,2^{-3}} \approx 2,63$ c) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{13}{9}\right)^3} \approx 1,32$

d) $12^{-2/3} \approx 0,19$ e) $\sqrt[6]{3^{-5}} \approx 0,4$ f) $\sqrt[5]{(-3)^{-2}} \approx 0,64$

23 ■■□ **Resuelto en el libro de texto.**

24 ■□□ **Expresa como potencia única.**

a) $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{4}$ **b)** $3\,\sqrt[3]{9}$ **c)** $\sqrt[3]{25} : \sqrt{5}$

d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^2}$ **e)** $\sqrt[5]{\sqrt{a}}$ **f)** $\sqrt[3]{m^2} : (m \cdot \sqrt{m})$

a) $2^{1/2} \cdot 2^{2/3} = 2^{7/6}$ b) $3 \cdot 3^{2/3} = 3^{5/3}$ c) $5^{2/3} : 5^{1/2} = 5^{1/6}$

d) $a^{1/2} \cdot a^{2/5} = a^{9/10}$ e) $a^{1/10}$ f) $m^{2/3} : (m \cdot m^{1/2}) = m^{-5/6}$

Radicales

25 ■□□ **Simplifica.**

a) $\sqrt[4]{3^2}$ **b)** $\sqrt[12]{a^8}$ **c)** $\sqrt[5]{a^{15}}$

d) $\sqrt[8]{a^2 b^4}$ **e)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^8}}$ **f)** $\sqrt[3]{a^6 b^9}$

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{a^2}$ c) a^3

d) $\sqrt[4]{ab^2}$ e) $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ f) $a^2 b^3$

26 ■□□ **Multiplica y simplifica.**

a) $\sqrt{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt{6}$ **b)** $\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{a^4}\,\sqrt[3]{a}$ **c)** $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$

a) $\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt[3]{a^6} = a^2$

c) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$

27 Extrae del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt[3]{16a^3}$ b) $\sqrt[4]{81a^5b^3}$ c) $\sqrt{8a^5}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{24}{a^4}}$ e) $\sqrt{\dfrac{162}{75}}$ f) $\sqrt[5]{\dfrac{9}{32}}$

a) $2a\sqrt[3]{2}$ b) $3a\sqrt[4]{ab^3}$ c) $2a^2\sqrt{2a}$

d) $\dfrac{2}{a}\sqrt[3]{\dfrac{3}{a}}$ e) $\dfrac{9}{5}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ f) $\dfrac{1}{2}\sqrt[5]{9}$

28 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los radicales siguientes:

$$\sqrt{7},\ \sqrt[3]{30},\ \sqrt[4]{40},\ \sqrt[6]{81}$$

mín.c.m. $(2, 3, 4, 6) = 12$

$\sqrt{7} = \sqrt[12]{7^6} = \sqrt[12]{117\,649}$

$\sqrt[3]{30} = \sqrt[12]{30^4} = \sqrt[12]{810\,000}$

$\sqrt[4]{40} = \sqrt[12]{40^3} = \sqrt[12]{64\,000}$

$\sqrt[6]{81} = \sqrt[12]{81^2} = \sqrt[12]{6\,561}$

$$\sqrt[6]{81} < \sqrt[4]{40} < \sqrt{7} < \sqrt[3]{30}$$

29 Introduce dentro de la raíz y simplifica.

a) $5\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ b) $\dfrac{\sqrt{18}}{3}$

c) $2\sqrt[3]{\dfrac{7}{4}}$ d) $2\sqrt[4]{\dfrac{5}{12}}$

e) $\dfrac{1}{2}\sqrt{12}$ f) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$

a) $\sqrt{\dfrac{5^2 \cdot 3}{5}} = \sqrt{15}$ b) $\sqrt{\dfrac{18}{3^2}} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{2^3 \cdot 7}{4}} = \sqrt[3]{14}$ d) $\sqrt[4]{\dfrac{2^4 \cdot 5}{12}} = \sqrt[4]{\dfrac{20}{3}}$

e) $\sqrt{\dfrac{12}{2^2}} = \sqrt{3}$ f) $\sqrt[3]{\dfrac{2^3 \cdot 9}{3^3 \cdot 4}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

PÁGINA 38

30 **Divide y simplifica.**

a) $\sqrt{7} : \sqrt{\dfrac{21}{5}}$ **b)** $\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}} : \sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}$ **c)** $\sqrt[3]{\dfrac{5}{6}} : \sqrt[3]{\dfrac{45}{2}}$

a) $\sqrt{7} : \sqrt{\dfrac{21}{5}} = \sqrt{7 : \dfrac{21}{5}} = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}} : \sqrt[4]{\dfrac{5}{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{3}{5} : \dfrac{5}{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{9}{25}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{6}} : \sqrt[3]{\dfrac{45}{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{6} : \dfrac{45}{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{1}{3}$

31 **Reduce a índice común y efectúa.**

a) $\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{4} : \sqrt{2}$

c) $\sqrt[6]{20} : \sqrt[4]{10}$ **d)** $(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}) : (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3})$

a) $\sqrt[10]{6^2 \cdot 3^5} = \sqrt[10]{8\,748}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$

c) $\sqrt[12]{20^2 : 10^3} = \sqrt[12]{\dfrac{4}{10}} = \sqrt[12]{\dfrac{2}{5}}$

d) $\sqrt[6]{(2^3 \cdot 3^2) : (2^2 \cdot 3^3)} = \sqrt[6]{\dfrac{2}{3}}$

32 **Resuelto en el libro de texto.**

33 **Efectúa.**

a) $\sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$

c) $\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{63}$

d) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt{108} - 2\sqrt{12} - \sqrt{28} + \sqrt{7/4}$

a) $\sqrt{2^4 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{2^2 \cdot 7} - \sqrt{7} + \sqrt{3^2 \cdot 7} = 2\sqrt{7} - \sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

d) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt{2^2 \cdot 3^3} - 2\sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 7} + \dfrac{\sqrt{7}}{2} = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{7} + \dfrac{\sqrt{7}}{2} = 2\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}\sqrt{7}$

34 **Efectúa.**

a) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ **b)** $(3\sqrt{2}+2)^2$

c) $(\sqrt{5}-2\sqrt{3})(\sqrt{5}+2\sqrt{3})$ **d)** $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$

a) $4-3=1$ b) $9\cdot 2+4+12\sqrt{2}=22+12\sqrt{2}$

c) $5-4\cdot 3=-7$ d) $4\cdot 5+3-4\sqrt{15}=23-4\sqrt{15}$

35 **Racionaliza y simplifica.**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

d) $\dfrac{4}{\sqrt{12}}$ **e)** $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}$ **f)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$

a) $\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$

c) $\dfrac{3\sqrt{15}}{15}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ d) $\dfrac{4\sqrt{12}}{12}=\dfrac{4\cdot 2\sqrt{3}}{12}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

e) $\dfrac{3\sqrt{6}}{12}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ f) $\dfrac{2\sqrt[3]{5^2}}{5}=\dfrac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

36 **Racionaliza y simplifica si es posible.**

a) $\dfrac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{3}{1+\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{14}{3-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ **e)** $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}$

g) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **h)** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **i)** $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{(1+\sqrt{6})\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{18}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$

b) $\dfrac{3(1-\sqrt{3})}{1-3}=\dfrac{3-3\sqrt{3}}{-2}=\dfrac{-3+3\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{14(3+\sqrt{2})}{9-2}=\dfrac{42+14\sqrt{2}}{7}=6+2\sqrt{2}$

d) $\dfrac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{1-2}=\dfrac{1+2+2\sqrt{2}}{-1}=-3-2\sqrt{2}$

e) $\dfrac{11(2\sqrt{5}-3)}{4\cdot 5-9}=2\sqrt{5}-3$

f) $\dfrac{\sqrt{2}(2\sqrt{2}+3)}{4 \cdot 2 - 9} = \dfrac{2 \cdot 2 + 3\sqrt{2}}{-1} = -4 - 3\sqrt{2}$

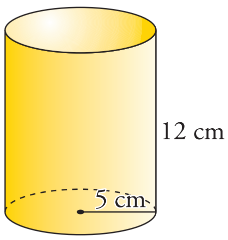
g) $\dfrac{10(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{4 \cdot 3 - 2} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3} = \dfrac{\sqrt{6}-3}{-1} = -\sqrt{6} + 3$

i) $\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \dfrac{5+3-2\sqrt{15}}{2} = \dfrac{8-2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}$

PIENSA Y RESUELVE

37 **Halla el área total y el volumen de un cilindro de 5 cm de radio y 12 cm de altura. Da su valor exacto en función de π.**



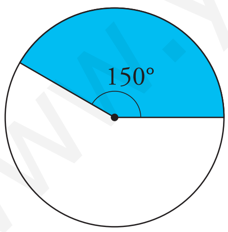
Área lateral $= 2\pi R h = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi$ cm^2

Área base $= \pi R^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ cm^2

Área total $= 120\pi + 2 \cdot 25\pi = 170\pi$ cm^2

Volumen $= \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 300\pi$ cm^3

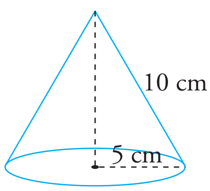
38 **En un círculo cuya circunferencia mide 30π m, cortamos un sector circular de 150° de amplitud. Halla el área de ese sector dando su valor exacto en función de π.**



Radio del círculo: $2\pi R = 30\pi \rightarrow R = 15$ m

$$\left.\begin{array}{l} 360° \rightarrow \pi \cdot 15^2 \\ 150° \rightarrow x \end{array}\right\} \text{Área} = \frac{150° \cdot 15^2\pi}{360°} = \frac{375\pi}{4} \text{ m}^2$$

39 **Calcula el área total y el volumen de un cono de 5 cm de radio y 10 cm de generatriz. Da el valor exacto.**



Altura $= \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm

Área lateral $= \pi R g = \pi \cdot 5 \cdot 10 = 50\pi$ cm^2

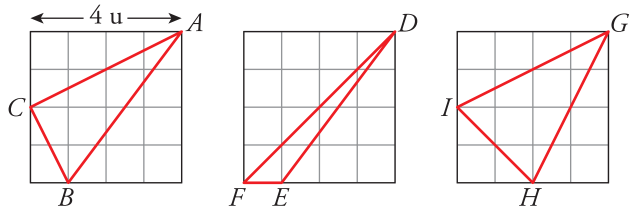
Área base $= \pi R^2 = 25\pi$ cm^2

Área total $= 50\pi + 25\pi = 75\pi$ cm^2

Volumen $= \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 5\sqrt{3} = \dfrac{125\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

40 ■■□ **Calcula el perímetro de los triángulos *ABC*, *DEF* y *GHI*. Expresa el resultado con radicales.**



ABC $\quad \overline{AC} = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; \ \overline{AB} = \sqrt{4^2+3^2} = 5; \ \overline{BC} = \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$

Perímetro de $ABC = 2\sqrt{5} + 5 + \sqrt{5} = 5 + 3\sqrt{5}$ u

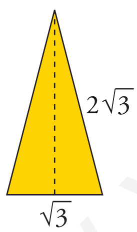
DFE $\quad \overline{DF} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}; \ \overline{DE} = \sqrt{4^2+3^2} = 5; \ \overline{FE} = 1$

Perímetro de $DFE = 4\sqrt{2} + 5 + 1 = 6 + 4\sqrt{2}$ u

GHI $\quad \overline{GH} = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; \ \overline{GI} = \overline{GH} = 2\sqrt{5}; \ \overline{HI} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

Perímetro de $GHI = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ u

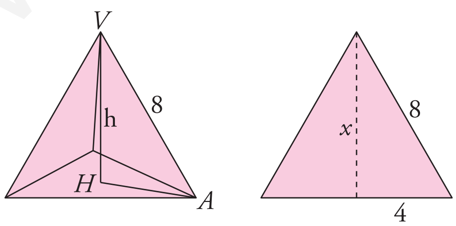
41 ■■□ **Halla el área de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden el doble de la base cuya longitud es $\sqrt{3}$ cm. Expresa el resultado con radicales.**



$$\text{Altura} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{12 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ cm}^2$$

42 ■□□ **Calcula la altura de un tetraedro regular de 8 cm de arista. Da su valor exacto.**



Altura de una cara:

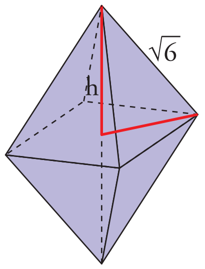
$x = \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm

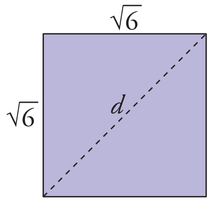
$\overline{AH} = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm

Altura del tetraedro:

$$h = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{128}{3}} = \sqrt{\frac{2^7}{3}} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

43 □□□ **Calcula el volumen de un octaedro regular cuya arista mide $\sqrt{6}$ cm. Da su valor exacto.**





$d = \sqrt{6 + 6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm

$\frac{d}{2} = \sqrt{3}$ cm

Altura de la pirámide $= \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$ cm

Volumen del octaedro $= 2\left(\frac{1}{3}(\sqrt{6})^2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$ cm^3

44 □□□ **Averigua para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces:**

a) $\sqrt{x - 7}$ **b)** $\sqrt{5 - x}$ **c)** $\sqrt{-x}$ **d)** $\sqrt{x^2 + 1}$

a) $x - 7 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq 7 \;\rightarrow\; x \in [7, +\infty)$

b) $5 - x \geq 0 \;\rightarrow\; -x \geq -5 \;\rightarrow\; x \leq 5 \;\rightarrow\; x \in (-\infty, 5]$

c) $-x \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq 0 \;\rightarrow\; x \in (-\infty, 0]$

d) $x^2 + 1 \geq 0 \;\rightarrow\; x \in (-\infty, +\infty)$

45 □□□ **Comprueba que los números $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$ son soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$.**

- $(3 + \sqrt{2})^2 - 6(3 + \sqrt{2}) + 7 = 9 + 2 + 6\sqrt{2} - 18 - 6\sqrt{2} + 7 = 0$
- $(3 - \sqrt{2})^2 - 6(3 - \sqrt{2}) + 7 = 9 + 2 - 6\sqrt{2} - 18 + 6\sqrt{2} + 7 = 0$

46 □□□ **¿Cuál de los números $1 - \sqrt{3}$ o $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ es solución de la ecuación $2x^2 - 2x - 1 = 0$?**

- $2(1 - \sqrt{3})^2 - 2(1 - \sqrt{3}) - 1 = 2(1 + 3 - 2\sqrt{3}) - 2 + 2\sqrt{3} - 1 =$

$$= 8 - 4\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3} - 1 \neq 0$$

El número $1 - \sqrt{3}$ no es solución de la ecuación.

- $2\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) - 1 = 2\left(\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}\right) - 1 - \sqrt{3} - 1 =$

$$= 2 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1 = 0$$

El número $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ sí es solución de la ecuación.

PÁGINA 39

47 ■■□ **Halla el valor exacto de las siguientes expresiones en el caso que $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$:**

a) $\frac{(1-2m)^2}{2}$ **b)** $\sqrt{1-m^2}$ **c)** $\frac{1+m}{1-m}$

a) $\dfrac{\left(1-2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} = \dfrac{1+3-2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

c) $\dfrac{1+\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{4-3} = \dfrac{4+3+4\sqrt{3}}{1} = 7+4\sqrt{3}$

48 ■■□ **Calcula utilizando la notación científica. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto cometido en cada caso:**

a) $(75\,800)^4 : (12\,000)^2$ **b)** $\dfrac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0{,}00015 - 0{,}00003}$

c) $(0{,}0073)^{-2} \cdot (0{,}0003)^{-3}$ **d)** $(4{,}5 \cdot 10^{12}) : (0{,}000837)$

a) $(3{,}30 \cdot 10^{19}) : (1{,}44 \cdot 10^8) = 2{,}29 \cdot 10^{11}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^8$

b) $\dfrac{2{,}70 \cdot 10^6 - 1{,}30 \cdot 10^7}{1{,}50 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-5}} = -8{,}58 \cdot 10^{10}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^7$

c) $(1{,}88 \cdot 10^4) \cdot (3{,}70 \cdot 10^{10}) = 6{,}96 \cdot 10^{14}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^{11}$

d) $(4{,}5 \cdot 10^{12}) : (8{,}37 \cdot 10^{-4}) = 5{,}38 \cdot 10^{15}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^{12}$

49 ■■□ **Simplifica las expresiones siguientes:**

a) $\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{3}-1} + \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}+1}$ **b)** $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)(3+2\sqrt{2})$

c) $\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{5}$

a) $\dfrac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{3-1} + \dfrac{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \dfrac{10+6\sqrt{3}}{2} + \dfrac{6\sqrt{3}-10}{2} =$

$= \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

b) $\left[\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6-3}\right]\cdot(3+2\sqrt{2}) = \dfrac{9-2\sqrt{18}}{3}\cdot(3+2\sqrt{2}) =$

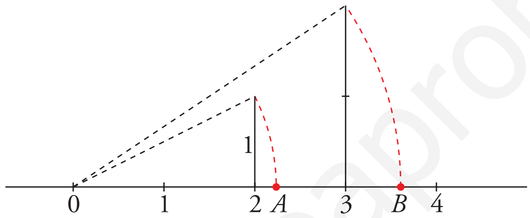
$$= \frac{27+18\sqrt{2}-6\sqrt{18}-4\cdot 6}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

c) $\dfrac{5+1+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{5} = \dfrac{(6+2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{5-1} - 3\sqrt{5} = \dfrac{8\sqrt{5}+16}{4} - 3\sqrt{5} =$

$$= 2\sqrt{5} + 4 - 3\sqrt{5} = 4 - \sqrt{5}$$

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

50 **¿Qué números representan los puntos *A* y *B*?**

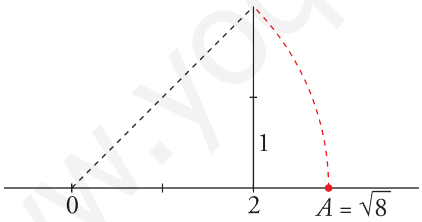


$A = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ $\qquad B = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

51 **Explica un procedimiento para construir un segmento que mida exactamente:**

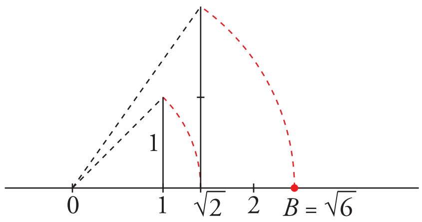
a) $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{6}$

a)



$A = \sqrt{8} = \sqrt{2^2+2^2}$

b)



$B = \sqrt{6} = \sqrt{\sqrt{2}^2+2^2}$

52 **¿Cuáles de las siguientes raíces no existen?**

$$\sqrt[3]{-20};\ \sqrt[6]{2^{-3}};\ \sqrt{-1};\ \sqrt[5]{0{,}001};\ \sqrt[4]{-81}$$

No existen ni $\sqrt{-1}$ ni $\sqrt[4]{-81}$.

53 **¿Cuántos números racionales hay entre $0{,}\widehat{7}$ y $0{,}\widehat{8}$? ¿Y cuántos irracionales? Pon ejemplos.**

Hay infinitos racionales e infinitos irracionales.

Racionales entre $0{,}\widehat{7}$ y $0{,}\widehat{8}$: 0,79; 0,78; 0,786;…

Irracionales: 0,791791179111…; 0,828228222…; $\dfrac{\sqrt{17}}{5}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;…

54 **¿Cuáles son los números que pertenecen a $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$?**

Todos los números reales excepto el 3.

55 **Escribe, en cada caso, un número racional y otro irracional comprendidos entre los dos que se dan:**

a) $\sqrt{2}$ **y** 2 **b)** $1,\widehat{3}$ **y** $1,\widehat{4}$

c) $1,\widehat{23}$ **y** $1,\widehat{24}$ **d)** $\sqrt{2}$ **y** $\sqrt{3}$

a) Racional: $1,5 = \dfrac{3}{2}$ Irracional: $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

b) Racional: 1,35 Irracional: $\sqrt{2}$

c) Racional: 1,235 Irracional: $\sqrt{1,54}$

d) Racional: 1,5 Irracional: $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

56 **Escribe dos números racionales uno mayor y otro menor que $\sqrt{2}$ que se diferencien de él en menos de una milésima.**

Menor que $\sqrt{2} \rightarrow 1,4141$ Mayor que $\sqrt{2} \rightarrow 1,4143$

57 **¿Cuáles de las siguientes ecuaciones de segundo grado tienen soluciones irracionales?**

a) $x^2 - 2 = 0$ **b)** $9x^2 - 25 = 0$

c) $x^2 + 4 = 0$ **d)** $x^2 - 18 = 0$

e) $x^2 - 2x - 2 = 0$ **f)** $\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2} = 0$

a) $x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$ son irracionales.

b) $x = \pm\dfrac{5}{3}$ son racionales.

c) No tiene solución.

d) $x = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$ son irracionales.

e) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$ son irracionales.

f) $x = \pm 2$ son racionales.

58 **Justifica que $\dfrac{\sqrt{18}}{3}$, $\dfrac{8}{\sqrt{32}}$, $\sqrt[4]{4}$ y $2^{1/2}$ representan el mismo número irracional. ¿Es posible que $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$ represente ese mismo número?**

$$\frac{\sqrt{18}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2};\quad \frac{8}{\sqrt{32}} = \frac{8\sqrt{32}}{32} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{2}}{32} = \sqrt{2};\quad \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2};\quad 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{27-4} = \frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{23} = \frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23} =$$

$$= \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}$$

59 **¿Cuáles de los siguientes números no están expresados en notación científica?**

$$\mathbf{3{,}14 \cdot 10^{-17};\ \ 1{,}32^{12};\ \ 437 \cdot 10^{7};\ \ 0{,}82 \cdot 10^{3}}$$

No están en notación científica: $1{,}32^{12}$; $437 \cdot 10^7$; $0{,}82 \cdot 10^3$

PROFUNDIZA

60 **Ordena de menor a mayor en el caso $a \in (0, 1)$ y en el caso $a \in (1, +\infty)$.**

$$\sqrt{a};\quad \frac{1}{a};\quad a^2;\quad a$$

Si $a \in (0, 1)$, $a^2 < a < \sqrt{a} < \dfrac{1}{a}$

Si $a \in (1, +\infty)$, $\dfrac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$

61 **Averigua para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces:**

a) $\sqrt{(x-3)(x+3)}$

b) $\sqrt{x(4-x)}$

c) $\sqrt{x^2+x-6}$

d) $\sqrt{(x+1)(x-5)}$

a) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

b) $[0, 4]$

c) $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

d) $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

62 **Prueba que $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.**

Elevamos al cuadrado.

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2-\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6+2-2\sqrt{12}}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$$

63 **Justifica que $\sqrt{\sqrt[4]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}} = \sqrt[3]{x}$.**

$$\sqrt{\sqrt[4]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}} = \sqrt[8]{x^2 \cdot x^{2/3}} = \sqrt[8]{\sqrt[3]{x^6 \cdot x^2}} = \sqrt[24]{x^8} = \sqrt[3]{x}$$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 53

PRACTICA

Operaciones con polinomios

1 **Opera y simplifica las siguientes expresiones:**

a) $3x(2x-1)-(x-3)(x+3)+(x-2)^2$

b) $(2x-1)^2+(x-1)(3-x)-3(x+5)^2$

c) $\frac{4}{3}(x-3)^2-\frac{1}{3}(3x-1)(3x+1)-\frac{1}{3}(4x^3+35)$

a) $6x^2-3x-x^2+9+x^2-4x+4=6x^2-7x+13$

b) $4x^2-4x+1-x^2+4x-3-3x^2-30x-75=-30x-77$

c) $\frac{4}{3}(x^2-6x+9)-\frac{1}{3}(9x^2-1)-\frac{1}{3}(4x^3+35)=$

$=\frac{4}{3}x^2-8x+12-3x^2+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x^3-\frac{35}{3}=-\frac{4}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2-8x+\frac{2}{3}$

2 **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:**

a) $(2y+x)(2y-x)+(x+y)^2-x(y+3)$

b) $3x(x+y)-(x-y)^2+(3x+y)y$

c) $(2y+x+1)(x-2y)-(x+2y)(x-2y)$

a) $4y^2-x^2+x^2+2xy+y^2-xy-3x=5y^2+xy-3x$

b) $3x^2+3xy-x^2+2xy-y^2+3xy+y^2=2x^2+8xy$

c) $2yx-4y^2+x^2+2xy+x-2y-x^2+4y^2=x-2y$

3 **Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica:**

a) $\frac{3x(x+5)}{5}-\frac{(2x+1)^2}{4}+\frac{(x-4)(x+4)}{2}$

b) $\frac{(8x^2-1)(x^2+2)}{10}-\frac{(3x^2+2)^2}{15}+\frac{(2x+3)(2x-3)}{6}$

a) $20\left[\frac{3x(x+5)}{5}-\frac{(2x+1)^2}{4}+\frac{(x-4)(x+4)}{2}\right]=$

$=12x^2+60x-5(4x^2+4x+1)+10(x^2-16)=$

$=12x^2+60x-20x^2-20x-5+10x^2-160=2x^2+40x-165$

b) $3(8x^4+15x^2-2)-2(9x^4+12x^2+4)+5(4x^2-9)=$

$=24x^4+45x^2-6-18x^4-24x^2-8+20x^2-45=6x^4+41x^2-59$

4 **Halla el cociente y el resto de cada una de estas divisiones:**

a) $(7x^2 - 5x + 3) : (x^2 - 2x + 1)$

b) $(2x^3 - 7x^2 + 5x - 3) : (x^2 - 2x)$

c) $(x^3 - 5x^2 + 2x + 4) : (x^2 - x + 1)$

a)
$$\begin{array}{rrr|l}
7x^2 & -\ 5x & +\ 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{4-4}
-7x^2 & +\ 14x & -\ 7 & 7 \\ \cline{1-3}
 & 9x & -\ 4 &
\end{array}$$

COCIENTE: 7

RESTO: $9x - 4$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\ 7x^2 & +\ 5x & -\ 3 & x^2 - 2x \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +\ 4x^2 & & & 2x - 3 \\ \cline{1-2}
 & -3x^2 & & & \\
 & 3x^2 & -\ 6x & & \\ \cline{2-4}
 & & -x & -\ 3 &
\end{array}$$

COCIENTE: $2x - 3$

RESTO $=$ $-x - 3$

c)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\ 5x^2 & +\ 2x & +\ 4 & x^2 - x + 1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\ x^2 & -\ x & & x - 4 \\ \cline{1-3}
 & -4x^2 & +\ x & & \\
 & 4x^2 & -\ 4x & +\ 4 & \\ \cline{2-4}
 & & -3x & +\ 8 &
\end{array}$$

COCIENTE: $x - 4$

RESTO: $-3x + 8$

5 **Calcula el cociente y el resto de las divisiones siguientes:**

a) $(3x^5 - 2x^3 + 4x - 1) : (x^3 - 2x + 1)$

b) $(x^4 - 5x^3 + 3x - 2) : (x^2 + 1)$

c) $(4x^5 + 3x^3 - 2x) : (x^2 - x + 1)$

a)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^5 & -\ 2x^3 & & +\ 4x & -\ 1 & x^3 - 2x + 1 \\ \cline{6-6}
-3x^5 & +\ 6x^3 & -\ 3x^2 & & & 3x^2 + 4 \\ \cline{1-3}
 & 4x^3 & -\ 3x^2 & & & \\
 & -4x^3 & & +\ 8x & -\ 4 & \\ \cline{2-5}
 & & -3x^2 & +\ 12x & -\ 5 &
\end{array}$$

COCIENTE: $3x^2 + 4$

RESTO: $-3x^2 + 12x - 5$

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\ 5x^3 & & +\ 3x & -\ 2 & x^2 + 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & -\ x^2 & & & x^2 - 5x - 1 \\ \cline{1-3}
 & -5x^3 & -\ x^2 & & & \\
 & 5x^3 & & +\ 5x & & \\ \cline{2-4}
 & & -x^2 & +\ 8x & & \\
 & & x^2 & & +\ 1 & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x & -\ 1 &
\end{array}$$

COCIENTE: $x^2 - 5x - 1$

RESTO: $8x - 1$

c)
$$\begin{array}{l|l}
4x^5 \qquad\quad + 3x^3 \qquad - 2x & x^2 - x + 1 \\
\underline{-4x^5 + 4x^4 - 4x^3} & 4x^3 + 4x^2 + 3x - 1 \\
\qquad 4x^4 - \ \ x^3 & \\
\quad \underline{-4x^4 + 4x^3 - 4x^2} & \\
\qquad\qquad 3x^3 - 4x^2 & \\
\qquad\quad \underline{-3x^3 + 3x^2 - 3x} & \\
\qquad\qquad\qquad -x^2 - 5x & \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^2 - \ \ x + 1} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad -6x + 1 &
\end{array}$$

COCIENTE: $4x^3 + 4x^2 + 3x - 1$

RESTO: $-6x + 1$

6 **Divide y comprueba que:**

Dividendo = divisor × cociente + resto

$(x^3 - 5x^2 + 3x + 1) : (x^2 - 5x + 1)$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 5x^2 + 3x + 1 & x^2 - 5x + 1 \\
\underline{-x^3 + 5x^2 - \ \ x \quad\ } & x \\
\qquad\qquad 2x + 1 &
\end{array}$$

$(x^2 - 5x + 1)x + 2x + 1 = x^3 - 5x^2 + x + 2x + 1 = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$

7 **Expresa las siguientes divisiones de la forma $D = d \cdot c + r$.**

a) $(6x^3 + 5x^2 - 9x) : (3x - 2)$

b) $(x^4 - 4x^2 + 12x - 9) : (x^2 - 2x + 3)$

c) $(4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5) : (-2x^3 + x - 5)$

a)
$$\begin{array}{l|l}
6x^3 + 5x^2 - 9x & 3x - 2 \\
\underline{-6x^3 + 4x^2} & 2x^2 + 3x - 1 \\
\qquad\quad 9x^2 & \\
\quad \underline{-9x^2 + 6x} & \\
\qquad\qquad -3x & \\
\qquad\qquad \underline{3x - 2} & \\
\qquad\qquad\quad -2 &
\end{array}$$

$6x^3 + 5x^2 - 9x = (3x - 2)(2x^2 + 3x - 1) - 2$

b)
$$\begin{array}{l|l}
x^4 \qquad\quad - 4x^2 + 12x - 9 & x^2 - 2x + 3 \\
\underline{-x^4 + 2x^3 - 3x^2} & x^2 + 2x - 3 \\
\qquad 2x^3 - 7x^2 & \\
\quad \underline{-2x^3 + 4x^2 - \ \ 6x} & \\
\qquad\qquad -3x^2 + \ \ 6x & \\
\qquad\qquad \underline{3x^2 - \ \ 6x + 9} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$

c)
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & +2x^3 & -2x^2 & +9x & +5 & -2x^3+x-5 \\
\cline{6-6}
-4x^4 & & +2x^2 & -10x & & -2x-1 \\
\cline{1-4}
 & 2x^3 & & -x & & \\
 & -2x^3 & & +x & -5 & \\
\cline{2-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

$4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5 = (-2x^3 + x - 5)(-2x - 1)$

Factor común e identidades notables

8 **Expresa como cuadrado de un binomio.**

a) $16x^2 + 1 - 8x$

b) $36x^2 + 25y^2 + 60xy$

c) $9x^4 + y^2 + 6x^2y$

d) $y^4 - 2y^2 + 1$

a) $(4x - 1)^2$

b) $(6x + 5y)^2$

c) $(3x^2 + y)^2$

d) $(y^2 - 1)^2$

9 **Expresa como producto de dos binomios.**

a) $49x^2 - 16$

b) $9x^4 - y^2$

c) $81x^4 - 64x^2$

d) $25x^2 - 3$

e) $2x^2 - 100$

f) $5x^2 - 2$

a) $(7x + 4)(7x - 4)$

b) $(3x^2 + y)(3x^2 - y)$

c) $(9x^2 + 8x)(0x^2 - 8x)$

d) $(5x + \sqrt{3})(5x - \sqrt{3})$

e) $(\sqrt{2}x + 10)(\sqrt{2}x - 10)$

f) $(\sqrt{5}x + \sqrt{2})(\sqrt{5}x - \sqrt{2})$

10 **Saca factor común e identifica los productos notables como en el ejemplo.**

- $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2$

a) $20x^3 - 60x^2 + 45x$

b) $27x^3 - 3xy^2$

c) $3x^3 + 6x^2y + 3y^2x$

d) $4x^4 - 81x^2y^2$

a) $5x(4x^2 - 12x + 9) = 5x(2x - 3)^2$

b) $3x(9x^2 - y^2) = 3x(3x + y)(3x - y)$

c) $3x(x^2 + 2xy + y^2) = 3x(x + y)^2$

d) $x^2(4x^2 - 81y^2) = x^2(2x + 9y)(2x - 9y)$

Regla de Ruffini. Aplicaciones

11 □□□ **Aplica la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:**

a) $(5x^3 - 3x^2 + x - 2) : (x - 2)$ **b)** $(x^4 - 5x^3 + 7x + 3) : (x + 1)$

c) $(-x^3 + 4x) : (x - 3)$ **d)** $(x^4 - 3x^3 + 5) : (x + 2)$

a)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 5 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & & 10 & 14 & 30 \\ \hline & 5 & 7 & 15 & 28 \end{array}$$

COCIENTE: $5x^2 + 7x + 15$

RESTO: 28

b)
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & -5 & 0 & 7 & 3 \\ -1 & & -1 & 6 & -6 & -1 \\ \hline & 1 & -6 & 6 & 1 & 2 \end{array}$$

COCIENTE: $x^3 - 6x^2 + 6x + 1$

RESTO: 2

c)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & & -3 & -9 & -15 \\ \hline & -1 & -3 & -5 & -15 \end{array}$$

COCIENTE: $-x^2 - 3x - 5$

RESTO: -15

d)
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & -3 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & & -2 & 10 & -20 & 40 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & -20 & 45 \end{array}$$

COCIENTE: $x^3 - 5x^2 + 10x - 20$

RESTO: 45

12 □□□ **Utiliza la regla de Ruffini para calcular $P(3)$, $P(-5)$ y $P(7)$ en los siguientes casos:**

a) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 3$ **b)** $P(x) = x^4 - 3x^2 + 7$

a)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & & 6 & 3 & 30 \\ \hline & 2 & 1 & 10 & 33 \end{array}$$

$P(3) = 33$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & 7 & 3 \\ -5 & & -10 & 75 & -410 \\ \hline & 2 & -15 & 82 & -407 \end{array}$$

$P(-5) = -407$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 7 & & 14 & 63 & 490 \\ \hline & 2 & 9 & 70 & 493 \end{array}$$

$P(7) = 493$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & 54 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & 61 \end{array}$$

$P(3) = 61$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ -5 & & -5 & 25 & -110 & 550 \\ \hline & 1 & -5 & 22 & -110 & 557 \end{array}$$

$P(-5) = 557$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ 7 & & 7 & 49 & 322 & 2\,254 \\ \hline & 1 & 7 & 46 & 322 & \lfloor 2\,261 \end{array} \quad P(7) = 2\,261$$

13 ■□□ **Averigua cuáles de los números 1, –1, 2, –2, 3, –3 son raíces de los polinomios siguientes:**

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ **b)** $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

☞ ***Recuerda que a es raíz de P(x) si P(a) = 0.***

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -1 & & -1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & \lfloor 8 \neq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & 0 & -10 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & \lfloor -4 \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -3 & & -3 & 15 & -30 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & \lfloor -24 \neq 0 \end{array}$$

Son raíces de $P(x)$: 1, –2 y 3.

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & & 1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \lfloor -4 \neq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \lfloor -8 \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & & -3 & 18 & -57 \\ \hline & 1 & -6 & 19 & \lfloor -60 \neq 0 \end{array}$$

3 es una raíz de $Q(x)$ (no probamos con 2 y –2 porque no son divisores de –3).

14 ■□□ **Comprueba si los polinomios siguientes son divisibles por $x - 3$ o $x + 1$.**

a) $P_1(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

b) $P_2(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$

c) $P_3(x) = x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 13$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \lfloor -8 \neq 0 \end{array}$$

P_1 es divisible por $x - 3$.

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & -11 & -30 \\ -1 & & -1 & -3 & 14 \\ \hline & 1 & 3 & -14 & \lfloor -16 \neq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & -11 & -30 \\ 3 & & 3 & 21 & 30 \\ \hline & 1 & 7 & 10 & \lfloor 0 \end{array}$$

P_2 es divisible por $x - 3$.

c)

	1	–7	5	0	–13
–1		–1	8	–13	13
	1	–8	13	–13	0

P_3 es divisible por $x + 1$. No puede ser divisible por $x - 3$ porque 13 no es múltiplo de 3.

PÁGINA 54

15 **El polinomio $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 2x - 24$ es divisible por $x - a$ para dos valores enteros de a. Búscalos y da el cociente en ambos casos.**

	1	–2	–23	–2	–24
–4		–4	24	–4	24
	1	–6	1	–6	0

Es divisible por $x + 4$.

COCIENTE: $x^3 - 6x^2 + x - 6$

	1	–2	–23	–2	–24
6		6	24	6	24
	1	4	1	4	0

Es divisible por $x - 6$.

COCIENTE: $x^3 + 4x^2 + x + 4$

16 **Prueba si el polinomio $-x^4 + 3x^2 - 16x + 6$ es divisible por $x - a$ para algún valor entero de a.**

	–1	0	3	–16	6
–3		3	–9	18	–6
	–1	3	–6	2	0

Es divisible por $x + 3$.

17 **Si $P(x) = 3x^3 - 11x^2 - 81x + 245$, halla los valores $P(8{,}75)$, $P(10{,}25)$ y $P(-7)$ con ayuda de la calculadora.**

Describe el proceso como en el ejemplo:

8.75 Min

3 × MR − 11 = × MR − 81 = × MR + 245 = 703.828

$P(8{,}75) = 703{,}828...$

10,25 Min 3 × MR − 11 = × MR − 81 = × MR + 245 = 1489.7347..

$P(10{,}25) = 1\,489{,}73$

7 +/− Min 3 × MR − 11 = × MR − 81 = × MR + 245 = -756

$P(-7) = -756$

Factorización de polinomios

18 **Factoriza los siguientes polinomios:**

a) $x^2 + 4x - 5$ **b)** $x^2 + 8x + 15$

c) $7x^2 - 21x - 280$ **d)** $3x^2 + 9x - 210$

a) $x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -5, \; x = 1$

$x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0 \rightarrow x = -5, \; x = -3$

$x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$

c) $7x^2 - 21x - 280 = 0 \rightarrow x = 8, \; x = -5$

$7x^2 - 21x - 280 = 7(x - 8)(x + 5)$

d) $3x^2 + 9x - 210 = 0 \rightarrow x = -10, \; x = 7$

$3x^2 + 9x - 210 = 3(x + 10)(x - 7)$

19 **Busca, en cada caso, una raíz entera y factoriza, después, el polinomio:**

a) $2x^2 - 9x - 5$ **b)** $3x^2 - 2x - 5$

c) $4x^2 + 17x + 15$ **d)** $-x^2 + 17x - 72$

a) $2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1)$

b) $3x^2 - 2x - 5 = (x + 1)(3x - 5)$

c) $4x^2 + 17x + 15 = (x + 3)(4x + 5)$

d) $-x^2 + 17x - 72 = -(x - 8)(x - 9)$

20 **Saca factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:**

a) $3x^3 - 12x$ **b)** $4x^3 - 24x^2 + 36x$

c) $45x^2 - 5x^4$ **d)** $x^4 + x^2 + 2x^3$

e) $x^6 - 16x^2$ **f)** $16x^4 - 9$

a) $3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2$

c) $45x^2 - 5x^4 = 5x^2(9 - x^2) = 5x^2(3 + x)(3 - x)$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3 = x^2(x^2 + 1 + 2x) = x^2(x + 1)^2$

e) $x^6 - 16x^2 = x^2(x^4 - 16) = x^2(x^2 + 4)(x^2 - 4) = x^2(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

f) $16x^4 - 9 = (4x^2 + 3)(4x^2 - 3) = (4x^2 + 3)(2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$

21 **Completa la descomposición en factores de los polinomios siguientes:**

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9)$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40)$

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9) = (x + 5)(x - 5)(x - 3)^2$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40) = x(x - 7)(x - 8)(x - 5)$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

22 □□□ **Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:**

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ **b)** $3x^3 - 15x^2 + 12x$

c) $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$ **d)** $x^4 - 13x^2 + 36$

a)

	1	2	–1	–2
1		1	3	2
	1	3	2	0
–1		–1	–2	
	1	2	0	

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

Sus raíces son 1, –1 y –2.

b)

	3	–15	12
1		3	–12
	3	–12	0
4		12	
	3	0	

$3x^3 - 15x^2 + 12x = 3x(x - 1)(x - 4)$

Sus raíces son 0, 1 y 4.

c)

	1	–9	15	–7
1		1	–8	7
	1	–8	7	0
1		1	–7	
	1	–7	0	

$x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = (x - 1)^2(x - 7)$

Sus raíces son 1 y 7.

d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow x = 2;\ x = -2;\ x = 3;\ x = -3$

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$

Sus raíces son 2, –2, 3 y –3.

23 □□□ **Factoriza los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:**

a) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ **b)** $2x^3 - 7x^2 - 19x + 60$

c) $x^3 - x - 6$ **d)** $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

a)

	1	–2	–2	–3
3		3	3	3
	1	1	1	0

$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x^2 + x + 1)$

Raíz: 3

b)

	2	–7	–19	60
–3		–6	39	–60
	2	–13	20	0
4		8	–20	
	2	–5	0	

$2x^3 - 7x^2 - 19x + 60 = (x + 3)(x - 4)(2x - 5)$

Raíces: –3, 4 y $\frac{5}{2}$

c)

	1	0	–1	–6
2		2	4	6
	1	2	3	0

$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$

Raíz: 2

d)

	4	4	−3	−4	−1
1		4	8	5	1
	4	8	5	1	0
−1		−4	−4	−1	
	4	4	1	0	

$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 =$

$= (x - 1)(x + 1)(4x^2 + 4x + 1) =$

$= (x - 1)(x + 1)(2x + 1)^2$

Raíces: $1, -1$ y $-\frac{1}{2}$

Fracciones algebraicas

24 **Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:**

a) $\dfrac{x-4}{3x-12}$ y $\dfrac{1}{3}$ **b)** $\dfrac{x^2+x}{2x}$ y $\dfrac{x}{2}$

c) $\dfrac{x+y}{x^2-y^2}$ y $\dfrac{1}{x-y}$ **d)** $\dfrac{x}{x^2-x}$ y $\dfrac{2}{2x-2}$

a) Sí son equivalentes, porque $3(x - 4) = 3x - 12$.

b) No son equivalentes, ya que $2(x^2 + x) \neq 2x^2$.

c) Sí son equivalentes, porque $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

d) Sí son equivalentes, porque $(2x - 2)x = 2x^2 - 2x$.

25 **Descompón en factores y simplifica.**

a) $\dfrac{x^2-9}{(x+3)^2}$ **b)** $\dfrac{x+2}{x^2-4}$

c) $\dfrac{x^2+25-10x}{x^2-25}$ **d)** $\dfrac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$

e) $\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$ **f)** $\dfrac{x^2y-3xy^2}{2xy^2}$

a) $\dfrac{x^2-9}{(x+3)^2} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+3)} = \dfrac{x-3}{x+3}$

b) $\dfrac{x+2}{x^2-4} = \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

c) $\dfrac{x^2+25-10x}{x^2-25} = \dfrac{(x-5)^2}{(x+5)(x-5)} = \dfrac{x-5}{x+5}$

d) $\dfrac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2} = \dfrac{x(x+y)}{(x+y)^2} = \dfrac{x}{x+y}$

e) $\dfrac{x-2}{x^2+x-6} = \dfrac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{1}{x+3}$

f) $\dfrac{x^2y-3xy^2}{2xy^2} = \dfrac{xy(x-3y)}{2xy^2} = \dfrac{x-3y}{2y}$

26 □□□ **Reduce a común denominador y opera.**

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x}$ **b)** $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ **d)** $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x} = \frac{2-1+4}{4x} = \frac{5}{4x}$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{6-x+3x}{3x^2} = \frac{2x+6}{3x^2}$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x-x+1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2-x}$

d) $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{2x+4+2x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x}{x^2-4}$

27 □□□ **Efectúa.**

a) $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1$ **b)** $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x}$

c) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x}$ **d)** $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3}$

a) $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1 = \frac{x^2+6-2x}{2x}$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x} = \frac{6-x(x+1)}{3x^2} = \frac{6-x^2-x}{3x^2}$

c) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x} = \frac{x^2-3(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x^2-3x+9}{x^2-3x}$

d) $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)-x(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{-9-x}{x^2+4x+3}$

28 □□□ **Opera.**

a) $\frac{x}{3} \cdot \frac{2x+1}{x-1}$ **b)** $\frac{2}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1}$

c) $\frac{1}{x-1} : \frac{x+1}{3x}$ **d)** $\frac{2x}{2x-3} : \frac{x+1}{2x+3}$

a) $\frac{x}{3} \cdot \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x^2+x}{3x-3}$ b) $\frac{2}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$

c) $\frac{1}{x-1} : \frac{x+1}{3x} = \frac{3x}{x^2-1}$ d) $\frac{2x}{2x-3} : \frac{x+1}{2x+3} = \frac{4x^2+6x}{2x^2-x-3}$

29 Opera y simplifica si es posible.

a) $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2}$

b) $\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{x-2}{x}$

a) $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{2} = \frac{(x+1)x}{2x} = \frac{x+1}{2}$

b) $\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{x-2}{x} = \left(\frac{2x+4-2x}{x(x+2)}\right) : \frac{x-2}{x} = \frac{4x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{4}{x^2-4}$

30 Descompón en factores el dividendo y el divisor, y, después, simplifica.

a) $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$

b) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2}$

c) $\frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6}$

d) $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7}$

a) $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6} = \frac{x(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x}{x-3}$

b) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2} = \frac{(x+1)(x-4)}{x^2(x+1)} = \frac{x-4}{x^2}$

c) $\frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6} = \frac{x(x^2-3x+2)}{3(x^2-3x+2)} = \frac{x}{3}$

d) $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7} = \frac{(x+6)(x-7)}{(x-1)(x-7)} = \frac{x+6}{x-1}$

PÁGINA 55

PIENSA Y RESUELVE

31 Sustituye, en cada caso, los puntos suspensivos por la expresión adecuada para que las fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{\dots}{x+1}$

b) $\frac{x}{2x+1} = \frac{x^2}{\dots}$

c) $\frac{x}{x-3} = \frac{\dots}{x^2-9}$

d) $\frac{2}{x+2} = \frac{\dots}{x^2+4x+4}$

a) $\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1}$

b) $\frac{x}{2x+1} = \frac{x^2}{x(2x+1)}$

c) $\frac{x}{x-3} = \frac{x(x+3)}{x^2-9}$

d) $\frac{2}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x^2+4x+4}$

32 □□□ **Halla, en cada caso, el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los polinomios siguientes:**

a) $x^2;\ \ x^2 - x;\ \ x^2 - 1$

b) $x - 3;\ \ x^2 - 9;\ \ x^2 - 6x + 9$

c) $x + 2;\ \ 3x + 6;\ \ x^2 + x - 2$

d) $2x;\ \ 2x + 1;\ \ 4x^2 - 1$

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 \\ x^2 - x = x(x-1) \\ x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = 1 \\ \text{mín.c.m. } [x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = x^2(x-1)(x+1) \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - 3 \\ x^2 - 9 = (x+3)(x-3) \\ x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [x-3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = x - 3 \\ \text{mín.c.m. } [x-3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = (x-3)^2(x+3) \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} x + 2 \\ 3x + 6 = 3(x+2) \\ x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [x+2, 3x+6, x^2 + x - 2] = x + 2 \\ \text{mín.c.m. } [x+2, 3x+6, x^2 + x - 2] = 3(x+2)(x-1) \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x \\ 2x + 1 \\ 4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [2x, 2x+1, 4x^2 - 1] = 1 \\ \text{mín.c.m. } [2x, 2x+1, 4x^2 - 1] = 2x(4x^2 - 1) \end{array}$

33 □□□ **Resuelto en el libro de texto.**

34 □□□ **Opera y simplifica.**

a) $\left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3}\right)$ **b)** $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{x}$

c) $\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right) : \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right] \cdot (x - 1)$ **d)** $\dfrac{2}{x} \cdot \left(\dfrac{1}{x} : \dfrac{1}{x-1}\right)$

a) $\left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{9 - x^2}{3x} : \dfrac{3 + x}{3x} = \dfrac{9 - x^2}{3x} = \dfrac{(3-x)(3+x)}{3+x} = 3 - x$

b) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{x} = \dfrac{(x+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)^2 \cdot x} = \dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

c) $\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right) : \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1) = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x} : \dfrac{x^2 - 1}{x}\right) \cdot (x - 1) =$

$$= \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot (x - 1) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$$

d) $\dfrac{2}{x} \cdot \left(\dfrac{1}{x} : \dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{2}{x} \cdot \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{2(x-1)}{x^2}$

35 **Efectúa.**

a) $\dfrac{x-2}{x^2}+\dfrac{x+2}{x^2-x}-\dfrac{1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{2x}{x^2+x-2}-\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{x-4}{3x+6}$

c) $\dfrac{x+2}{2x+1}-\dfrac{2}{4x^2-1}+\dfrac{x+1}{2x}$

a) $\dfrac{x-2}{x^2}+\dfrac{x+2}{x^2-x}-\dfrac{1}{x^2-1}=$

$$=\frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)}+\frac{(x+2)(x+1)x}{x^2(x-1)(x+1)}-\frac{x^2}{x^2(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{(x-2)(x^2-1)+(x+2)(x^2+x)-x^2}{x^2(x^2-1)}=$$

$$=\frac{x^3-2x^2-x+2+x^3+2x^2+x^2+2x-x^2}{x^2(x^2-1)}=$$

$$=\frac{2x^3+x+2}{x^2(x^2-1)}=\frac{2x^3+x+2}{x^4-x^2}$$

b) $\dfrac{2x}{x^2+x-2}-\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{x-4}{3x+6}=$

$$=\frac{6x}{3(x+2)(x-1)}-\frac{15(x-1)}{3(x+2)(x-1)}-\frac{(x-4)(x-1)}{3(x+2)(x-1)}=$$

$$=\frac{6x-15x+15-x^2+5x-4}{3(x+2)(x-1)}=\frac{-x^2-4x+11}{3(x+2)(x-1)}$$

c) $\dfrac{x+2}{2x+1}-\dfrac{2}{4x^2-1}+\dfrac{x+1}{2x}=$

$$=\frac{2x(x+2)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)}-\frac{4x}{2x(2x+1)(2x-1)}+\frac{(x+1)(2x+1)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)}=$$

$$=\frac{(2x^2+4x)(2x-1)-4x+(x+1)(4x^2-1)}{2x(4x^2-1)}=$$

$$=\frac{4x^3+8x^2-2x^2-4x-4x+4x^3+4x^2-x-1}{2x(4x^2-1)}=\frac{8x^3+10x^2-9x-1}{2x(4x^2-1)}$$

36 □□□ **Opera y simplifica.**

a) $\left(1-\frac{x-1}{x}\right)\frac{x^2}{x+3}-1$

b) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right):\frac{3}{x^2}$

c) $4-\frac{1}{2x-1}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

a) $\left(1-\frac{x-1}{x}\right)\frac{x^2}{x+3}-1=\left(\frac{x-x+1}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{x+3}-1=\frac{x^2}{x(x+3)}-1=$

$=\frac{x^2-x(x+3)}{x(x+3)}=\frac{x^2-x^2-3x}{x(x+3)}=\frac{-3x}{x(x+3)}=\frac{-3}{x+3}$

b) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right):\frac{3}{x^2}=\frac{x+3-x}{x(x+3)}:\frac{3}{x^2}=\frac{3}{x(x+3)}:\frac{3}{x^2}=\frac{x^2}{x(x+3)}=\frac{x}{x+3}$

c) $4-\frac{1}{2x-1}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=4-\frac{1}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2}=4-\frac{1}{x^2}=\frac{4x^2-1}{x^2}$

37 □□□ **Efectúa.**

a) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2}{x^2-2x+1}+\frac{2x+3}{x-1}-3$

c) $\frac{2x-3}{x^2-9}-\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+2}{x+3}$

a) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2}{x^2-1}+\frac{3(x-1)}{x^2-1}-\frac{x-2}{x^2-1}=$

$=\frac{x^2+2x+1+3x-3-x+2}{x^2-1}=\frac{x^2+4x}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2}{x^2-2x+1}+\frac{2x+3}{x-1}-3=\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)^2}-\frac{3(x-1)^2}{(x-1)^2}=$

$=\frac{x^2+2x^2+3x-2x-3-3(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{7x-6}{(x-1)^2}$

c) $\frac{2x-3}{x^2-9}-\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+2}{x+3}=\frac{2x-3}{x^2-9}-\frac{(x+1)(x+3)}{x^2-9}-\frac{(x+2)(x-3)}{x^2-9}=$

$=\frac{2x-3-x^2-4x-3-x^2+x+6}{x^2-9}=\frac{-2x^2-x}{x^2-9}$

38 □□□ **Resuelto en el libro de texto.**

39 **Calcula m para que el polinomio**

$$P(x) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$$

sea divisible por $x + 1$.

$P(x) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$ será divisible por $x + 1$ si $P(-1) = 0$.

$P(-1) = (-1)^3 - m(-1)^2 + 5(-1) - 2 = 0$

$-1 - m - 5 - 2 = 0 \rightarrow m = -8$

40 **El resto de la siguiente división es igual a –8:**

$$(2x^4 + kx^3 - 7x + 6) : (x - 2)$$

¿Cuánto vale k?

LLamamos $P(x) = 2x^4 + kx^3 - 7x + 6$.

El resto de la división $P(x) : (x - 2)$ es $P(2)$, luego:

$P(2) = -8 \rightarrow 2 \cdot 2^4 + k \cdot 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = -8 \rightarrow$

$\rightarrow 32 + 8k - 14 + 6 = -8 \rightarrow 8k = -32 \rightarrow k = -4$

41 **Halla el valor que debe tener m para que el polinomio**

$$mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$$

sea divisible por $x + 2$.

Llamamos $P(x) = mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$. Dicho polinomio ha de ser divisible por $x + 2$, luego el resto ha de ser 0:

$P(-2) = 0 \rightarrow m(-2)^3 - 3(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 9m = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -8m - 12 - 10 + 9m = 0 \rightarrow m = 22$

42 **Comprueba si existe alguna relación de divisibilidad entre los siguientes pares de polinomios:**

a) $P(x) = x^4 - 4x^2$ y $Q(x) = x^2 - 2x$

b) $P(x) = x^2 - 10x + 25$ y $Q(x) = x^2 - 5x$

c) $P(x) = x^3 + x^2 - 12x$ y $Q(x) = x - 3$

a) $\left.\begin{array}{l} P(x) = x^2(x-2)(x+2) \\ Q(x) = x(x-2) \end{array}\right\}$ $Q(x)$ es divisor de $P(x)$.

b) $\left.\begin{array}{l} P(x) = (x-5)^2 \\ Q(x) = x(x-5) \end{array}\right\}$ No hay relación de divisibilidad.

c) $\left.\begin{array}{l} P(x) = x(x-3)(x+4) \\ Q(x) = x - 3 \end{array}\right\}$ $Q(x)$ es divisor de $P(x)$.

PÁGINA 56

43 □□□ **Tenemos un polinomio $P(x) = (x-1)^2(x+3)$. Busca un polinomio de segundo grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:**

a) máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x - 1$

b) mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = (x-1)^2(x^2-9)$

$Q(x) = (x-1)(x-3)$

44 □□□ **Calcula el valor de k para que el polinomio**

$$P(x) = x^3 - x^2 + x + k$$

sea múltiplo de $Q(x) = x^2 + 1$.

$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 & -x^2 + x & + k & x^2+1 \\
\hline
-x^3 & \quad - x & & x-1 \\
\hline
 & -x^2 & + k & \\
 & x^2 & + 1 & \\
\hline
 & & k+1 &
\end{array}$$

Ha de ser $k + 1 = 0 \rightarrow k = -1$

Traducción al lenguaje algebraico

45 □□□ **Traduce a lenguaje algebraico empleando una sola incógnita:**

a) El cociente entre dos números pares consecutivos.

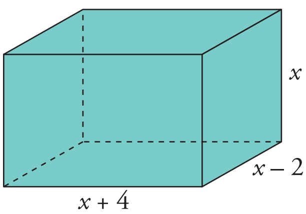
b) Un número menos su inverso.

c) El inverso de un número más el inverso del doble de ese número.

d) La suma de los inversos de dos números consecutivos.

a) $\dfrac{2x}{2x+2}$ b) $x - \dfrac{1}{x}$ c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x}$ d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$

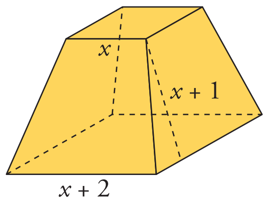
46 □□□ **Expresa mediante polinomios el área y el volumen de este ortoedro.**



Área $= 2[(x+4)(x-2) + x(x-2) + x(x+4)] = 6x^2 + 8x - 16$

Volumen $= (x+4)(x-2)x = x^3 + 2x^2 - 8x$

47 **Expresa, en función de x, el área total de este tronco de pirámide.**



Área lateral $= 4\left[\dfrac{(x+2+x)}{2} \cdot (x+1)\right] = 4(x+1)^2$

Área de las bases $= x^2 + (x+2)^2$

Área total $= 4(x+1)^2 + x^2 + (x+2)^2 = 6x^2 + 12x + 8$

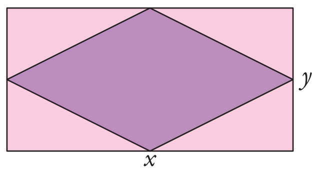
48 **Un grifo tarda x minutos en llenar un depósito. Otro grifo tarda 3 minutos menos en llenar el mismo depósito. Expresa en función de x la parte del depósito que llenan abriendo los dos durante un minuto.**

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-3}$

49 **Se mezclan x kg de pintura de 5 €/kg con y kg de otra de 3 €/kg. ¿Cuál será el precio de 1 kg de la mezcla? Exprésalo en función de x e y.**

$\dfrac{5x+3y}{x+y}$

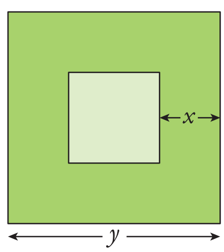
50 **En un rectángulo de lados x e y inscribimos un rombo. Escribe el perímetro del rombo en función de los lados del rectángulo.**



El lado del rombo es $l = \sqrt{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

Perímetro $= 4\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) = 2\sqrt{x^2+y^2}$

51 **Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada utilizando x e y.**



Área cuadrado grande $= y^2$

Área cuadrado pequeño $= (y-2x)^2$

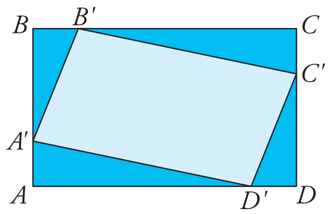
Área parte sombreada $= y^2 - (y-2x)^2 = 4xy - 4x^2$

52 **Dos pueblos, A y B, distan 60 km. De A sale un coche hacia B con velocidad v. Al mismo tiempo sale otro de B en dirección a A con velocidad $v + 3$. Expresa en función de v el tiempo que tardan en encontrarse.**

$$t = \frac{60}{2v + 3}$$

53 **En el rectángulo $ABCD$ de lados $AB = 3$ cm y $BC = 5$ cm, hemos inscrito el cuadrilátero $A'B'C'D'$ haciendo $AA' = BB' = CC' = DD' = x$.**

Escribe el área de $A'B'C'D'$ en función de x.



Sabiendo que $\overline{AD'} = \overline{B'C} = 5 - x$ y $\overline{A'B} = \overline{C'D} = 3 - x$, se tendrá:

El área del triángulo $B'CC'$ es $\dfrac{x(5-x)}{2}$.

El área del triángulo $A'AD'$ es $\dfrac{x(5-x)}{2}$.

El área del triángulo $B'BA'$ es $\dfrac{x(3-x)}{2}$.

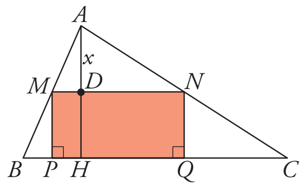
El área del triángulo $D'DC'$ es $\dfrac{x(3-x)}{2}$.

El área del rectángulo $ABCD$ es $3 \cdot 5 = 15$ cm^2.

$$A_{\text{PARALELOGRAMO}} = 15 - \left[2 \cdot \frac{x(5-x)}{2} + 2 \cdot \frac{x(3-x)}{2}\right] = 15 - [x(5-x) + x(3-x)] =$$

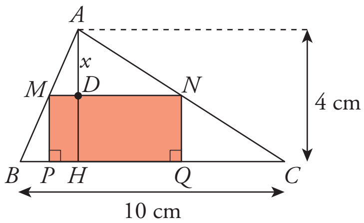
$$= 15 - (-2x^2 + 8x) = 2x^2 - 8x + 15$$

54 ■□□ **En el triángulo de la figura conocemos $\overline{BC}$ = 10 cm, $\overline{AH}$ = 4 cm. Por un punto D de la altura, tal que $\overline{AD}$ = x, se traza una paralela MN a BC. Desde M y N se trazan perpendiculares a BC.**



a) Expresa $\overline{MN}$ en función de x. (Utiliza la semejanza de los triángulos AMN y ABC).

b) Escribe el área del rectángulo $MNPQ$ mediante un polinomio en x.



a) Por la semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{MN}}{x} \to \overline{MN} = \frac{\overline{BC} \cdot x}{\overline{AH}} \to \overline{MN} = \frac{10 \cdot x}{4} \to \overline{MN} = \frac{5}{2}x$$

b) $\overline{MP} = 4 - x$

$$A_{\text{RECTÁNGULO}} = \overline{MN} \cdot \overline{MP} = \frac{5}{2}x(4 - x) = 10x - \frac{5}{2}x^2$$

PÁGINA 57

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

55 ■□□ **Escribe en cada caso un polinomio de segundo grado que tenga por raíces:**

a) 7 y –7 **b) 0 y 5** **c) –2 y –3** **d) 4 (doble)**

Por ejemplo:

a) $(x - 7)(x + 7) = x^2 - 49$

b) $x(x - 5) = x^2 - 5x$

c) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$

d) $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$

56 ■□□ **Escribe, en cada caso, un polinomio que cumpla la condición dada:**

a) De segundo grado sin raíces.

b) Que tenga por raíces –1, 0 y 3.

c) De tercer grado con una sola raíz.

Por ejemplo:

a) $x^2 + 1$

b) $x(x + 1)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 3x$

c) $x(x^2 + 1) = x^3 + x$

57 **Las raíces de $P(x)$ son 0, 2 y –3.**

a) Escribe tres divisores de $P(x)$ de primer grado.

b) Escribe un divisor de $P(x)$ de segundo grado.

a) x; $x-2$; $x+3$

b) Por ejemplo: $x(x-2)$

58 **Inventa dos polinomios de segundo grado que cumplan la condición indicada en cada caso:**

a) mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^2(x-3)(x+2)$

b) máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = 2x+1$

a) Por ejemplo: $P(x) = x^2$; $Q(x) = (x-3)(x+2)$

b) Por ejemplo: $P(x) = x(2x+1)$; $Q(x) = (2x+1)(x-2)$

59 **¿Cuál es el mín.c.m. de los monomios $A = 2b$; $B = a^2b^2$; $C = 5a^2$? Escribe otros tres monomios D, E, F tales que:**

$$\textbf{mín.c.m.}\ (A, B, C, D, E, F) = 10a^2b^2$$

$$\left.\begin{array}{l} A = 2b \\ B = a^2b^2 \\ C = 5a^2 \end{array}\right\} \text{mín.c.m.}\ (A, B, C) = 10a^2b^2$$

Tomamos, por ejemplo:

$$D = 2b^2 \qquad E = 5a \qquad F = 10ab$$

mín.c.m. $(A, B, C, D, E, F) = 10a^2b^2$

60 **a) Si la división $P(x) : (x-2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar del valor $P(2)$?**

b) Si –5 es una raíz del polinomio $P(x)$, ¿qué puedes afirmar de la división $P(x) : (x+5)$?

c) ¿En qué resultado te has basado para responder a las dos preguntas anteriores?

a) Si la división es exacta, el resto es 0, luego $P(2) = 0$.

b) La división $P(x) : (x+5)$ es exacta, el resto es 0.

c) En el teorema del resto.

61 **Prueba que el polinomio $x^2 + (a+b)x + ab$ es divisible por $x+a$ y por $x+b$ para cualquier valor de a y b. ¿Cuál será su descomposición factorial?**

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & a+b & ab \\ -a & & -a & -ab \\ \hline & 1 & b & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & a+b & ab \\ -b & & -b & -ab \\ \hline & 1 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

62 □□□ **En una división conocemos el dividendo, $D(x)$, el cociente, $C(x)$, y el resto, $R(x)$.**

$$D(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1; \ \ C(x) = x - 3; \ \ R(x) = 7x - 7$$

Calcula el divisor.

$$D = d \cdot c + R \to \frac{\text{Dividendo} - \text{Resto}}{\text{Cociente}} = \text{divisor}$$

$D - R = x^3 - 3x^2 + 5x - 1 - \ 7x + 7 = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & & 3 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

El divisor es $x^2 - 2$.

63 □□□ **¿Cuál es la fracción inversa de $\frac{3-x}{2x+1}$? Justifícalo.**

$\text{Inversa} = \frac{2x+1}{3-x}$

El producto de ambas debe ser igual a 1:

$$\frac{3-x}{2x+1} \cdot \frac{2x+1}{3-x} = 1$$

PROFUNDIZA

64 □□□ **Saca factor común en las siguientes expresiones:**

a) $3x(x-3) - (x+1)(x-3)$

b) $(x+5)(2x-1) + (x-5)(2x-1)$

c) $(3-y)(a+b) - (a-b)(3-y)$

☞ ***El factor común es un binomio.***

a) $(x-3)[3x - (x+1)] = (x-3)(2x-1)$

b) $(2x-1)[(x+5) + (x-5)] = (2x-1)(2x)$

c) $(3-y)[(a+b) - (a-b)] = (3-y)(2b)$

65 □□□ **Descompón en factores $x^3 - a^3$ y $x^3 + a^3$.**

☞ ***Prueba si son divisibles por $x - a$ o por $x + a$.***

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -a^3 \\ a & & a & a^2 & a^3 \\ \hline & 1 & a & a^2 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & a^3 \\ -a & & -a & a^2 & -a^3 \\ \hline & 1 & -a & a^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$

$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$

66 **Factoriza las siguientes expresiones como en el ejemplo.**

- $ax^2 - ay + bx^2 - by = a(x^2 - y) + b(x^2 - y) = (x^2 - y)(a + b)$

a) $ax - ay + bx - by$

b) $2x^2y + y + 2x^2 + 1$

c) $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2$

d) $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1$

a) $a(x - y) + b(x - y) = (x - y)(a + b)$

b) $y(2x^2 + 1) + (2x^2 + 1) = (2x^2 + 1)(y + 1)$

c) $xy(3x + 1) + y^2(3x + 1) = (3x + 1)(xy + y) = (3x + 1)(x + 1)y$

d) $ab(2b^2 - 1) + (2b^2 - 1) = (2b^2 - 1)(ab + 1)$

67 **Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:**

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$ **b)** $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$ **c)** $\dfrac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{2abx + 2a^2b + 4b^2}$

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \dfrac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \dfrac{xy}{5}$

b) $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \dfrac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \dfrac{b}{a}$

c) $\dfrac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{2abx + 2a^2b + 4b^2} = \dfrac{2a^2b(2b - x)}{2b(ax + a^2 + 2b)} = \dfrac{a^2(2b - x)}{ax + a^2 + 2b}$

68 **Efectúa y simplifica.**

a) $\dfrac{2x + y}{x^2 - xy}\left(\dfrac{3x}{2x + y} - 1\right)$

b) $\dfrac{a^2 - ab}{ab + b^2} : \dfrac{ab - b^2}{a^2 + ab}$

c) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{a}{b} - \dfrac{1 + (a + b)^2}{ab} + \dfrac{b}{a}$

a) $\dfrac{2x + y}{x^2 - xy}\left(\dfrac{3x}{2x + y} - 1\right) = \dfrac{2x + y}{x^2 - xy}\left(\dfrac{3x - 2x - y}{2x + y}\right) = \dfrac{(2x + y)(x - y)}{x(x - y)(2x + y)} = \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{a^2 - ab}{ab + b^2} : \dfrac{ab - b^2}{a^2 + ab} = \dfrac{(a^2 - ab)(a^2 + ab)}{(ab + b^2)(ab - b^2)} = \dfrac{a^4 - a^2b^2}{a^2b^2 - b^4} = \dfrac{a^2(a^2 - b^2)}{b^2(a^2 - b^2)} = \dfrac{a^2}{b^2}$

c) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{a}{b} - \dfrac{1 + (a + b)^2}{ab} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{1 + a^2 - 1 - (a + b)^2 + b^2}{ab} =$

$$= \dfrac{a^2 + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab}{ab} = \dfrac{-2ab}{ab} = -2$$

69 Opera y simplifica.

a) $\dfrac{2a}{a-3b}-\dfrac{3b}{a+3b}-\dfrac{a^2+3ab+18b^2}{a^2-9b^2}$

b) $\dfrac{bx-b}{x+1}+\dfrac{3bx}{x-1}+\dfrac{3bx^2+bx+2b}{1-x^2}$

c) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$

d) $\left(1-\dfrac{x-y}{x+y}\right):\left(\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}\right)$

a) $\dfrac{2a}{a-3b}-\dfrac{3b}{a+3b}-\dfrac{a^2+3ab+18b^2}{a^2-9b^2}=$

$=\dfrac{2a(a+3b)-3b(a-3b)-(a^2+3ab+18b^2)}{a^2-9b^2}=$

$=\dfrac{2a^2+6ab-3ab+9b^2-a^2-3ab-18b^2}{a^2-9b^2}=\dfrac{a^2-9b^2}{a^2-9b^2}=1$

b) $\dfrac{bx-b}{x+1}+\dfrac{3bx}{x-1}+\dfrac{3bx^2+bx+2b}{1-x^2}=$

$=\dfrac{b(x-1)(x-1)+3bx(x+1)-(3bx^2+bx+2b)}{x^2-1}=$

$=\dfrac{b(x^2-2x+1)+3bx^2+3bx-3bx^2-bx-2b}{x^2-1}=$

$=\dfrac{bx^2-2bx+b+2bx-2b}{x^2-1}=\dfrac{bx^2-b}{x^2-1}=\dfrac{b(x^2-1)}{x^2-1}=b$

c) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\dfrac{x^2-y^2}{2xy}=\left[\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2}\right]\cdot\dfrac{x^2-y^2}{2xy}=$

$=\dfrac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{2xy}=\dfrac{4xy}{2xy}=2$

d) $\left(1-\dfrac{x-y}{x+y}\right):\left(\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}\right)=\left(\dfrac{x+y-x+y}{x+y}\right):\left[\dfrac{(x-y)^2-(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}\right]=$

$=\dfrac{2y}{x+y}:\left[\dfrac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2}{(x+y)(x-y)}\right]=\dfrac{2y}{x+y}:\dfrac{-4xy}{(x+y)(x-y)}=$

$=\dfrac{2y(x+y)(x-y)}{-4xy(x+y)}=-\dfrac{x-y}{2x}=\dfrac{y-x}{2x}$

PÁGINA 74

PRACTICA

Ecuaciones de 1.º y 2.º grados

1 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(4x + 3)(4x - 3) - 4(3 - 2x)^2 = 3x$

b) $2x + 3(x - 4)^2 = 37 + (x - 3)(x + 3)$

c) $\frac{x+3}{5} - \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{5}{4}x - \left(\frac{x+2}{2}\right)^2$

d) $\frac{(x-1)(x+2)}{12} - \frac{x-3}{3} = 1 + \frac{(x+1)(x-2)}{6}$

a) $16x^2 - 9 - 4(9 + 4x^2 - 12x) = 3x$

$16x^2 - 9 - 36 - 16x^2 + 48x = 3x \rightarrow 48x - 3x = 45 \rightarrow 45x = 45 \rightarrow x = 1$

Solución: $x = 1$

b) $2x + 3(x^2 - 8x + 16) = 37 + x^2 - 9$

$2x + 3x^2 - 24x + 48 = 28 + x^2 \rightarrow 2x^2 - 22x + 20 = 0$

$x^2 - 11x + 10 = 0 \rightarrow x = \frac{11 \pm 9}{2} = \begin{cases} 10 \\ 1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 10,\ x_2 = 1$

c) $\frac{x+3}{5} - \frac{x^2 - 2x + 1}{4} = \frac{5x}{4} - \frac{x^2 + 4x + 4}{4}$

$4x + 12 - 5x^2 + 10x - 5 = 25x - 5x^2 - 20x - 20$

$9x + 27 = 0 \rightarrow x = -3$

Solución: $x = -3$

d) $(x - 1)(x + 2) - 4(x - 3) = 12 + 2(x + 1)(x - 2)$

$x^2 + x - 2 - 4x + 12 = 12 + 2x^2 - 2x - 4$

$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -2$

2 □□□ **Comprueba que las ecuaciones siguientes son de 2.º grado incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general.**

a) $\frac{x+7}{12} - \frac{x^2+1}{4} = 1 - \frac{x^2+2}{3}$

b) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$

c) $\frac{x(x-2)}{4} - \frac{x+1}{6} = \frac{x-3}{2} - \frac{x-4}{3}$

d) $x\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{x-2}{2} + \frac{x^2-1}{3} = 0$

a) $x + 7 - 3(x^2 + 1) = 12 - 4(x^2 + 2)$

$x + 7 - 3x^2 - 3 = 12 - 4x^2 - 8$

$x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \rightarrow x = 0;\ x = -1$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1$

b) $x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 = x^2 + 6x + 9 + x^2 - 20$

$2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2;\ x = -2$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

c) $3x(x-2) - 2(x+1) = 6(x-3) - 4(x-4)$

$3x^2 - 6x - 2x - 2 = 6x - 18 - 4x + 16$

$3x^2 - 10x = 0 \rightarrow x(3x - 10) = 0 \rightarrow x = 0;\ x = \frac{10}{3}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{10}{3}$

d) $x\left(\frac{2x+1}{2}\right) - \frac{x-2}{2} + \frac{x^2-1}{3} = 0$

$3x(2x+1) - 3(x-2) + 2(x^2-1) = 0$

$6x^2 + 3x - 3x + 6 + 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow 8x^2 + 4 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

3 □□□ **Averigua cuáles de las siguientes “ecuaciones” no tienen solución y cuáles tienen infinitas soluciones. (Recuerda que en realidad no son ecuaciones, porque no tienen término en x).**

a) $x - \frac{1-x}{2} = 2x - \frac{2x-7}{4}$

b) $(3x+2)^2 - (3x-2)^2 = 24x$

c) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$

d) $(3x+1)(2x-3) - (x-3)(6x+4) = 7x$

a) $4x - 2(1-x) = 8x - 2x + 7$

$4x - 2 + 2x = 6x + 7$

$6x - 6x = 9 \rightarrow 0x = 9 \rightarrow$ No tiene solución.

b) $9x^2 + 4 + 12x - 9x^2 - 4 + 12x = 24x$

$0x = 0 \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

c) $x^2 + 2x + 1 - 8(1 + x) = x^2 - 2x + 1 - 4(2 + x)$

$x^2 + 2x + 1 - 8 - 8x = x^2 - 2x + 1 - 8 - 4x$

$-6x - 7 = -6x - 7 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

d) $6x^2 - 7x - 3 - (6x^2 - 14x - 12) = 7x$

$6x^2 - 7x - 3 - 6x^2 + 14x + 12 = 7x$

$0x = -9 \rightarrow$ No tiene solución.

4 □□□ **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} = \frac{35}{16}$

b) $x + \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} = x^2 - 2$

c) $\frac{1}{2}(x-2)^2 = x - \frac{11}{4}$

d) $(x+1)^2 = \frac{x}{2}(5x+6) - (2x^2+1)$

e) $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25x}{2} = \left(\frac{1}{2} - x\right)(7x+1) - 4$

a) $4(x^2 - 6x + 9) - (4x^2 - 4x + 1) = 35$

$4x^2 - 24x + 36 - 4x^2 + 4x - 1 = 35$

$-20x = 0$

Solución: $x = 0$

b) $6x + 3(3x + 1) - 2(x - 2) = 6(x^2 - 2)$

$6x + 9x + 3 - 2x + 4 = 6x^2 - 12$

$6x^2 - 13x - 19 = 0 \rightarrow x = \frac{13 \pm 25}{12} = \begin{cases} 19/6 \\ -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = \frac{19}{6};\ x_2 = -1$

c) $2(x^2 - 4x + 4) = 4x - 11$

$2x^2 - 8x + 8 - 4x + 11 = 0$

$2x^2 - 12x + 19 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{-8}}{4} \rightarrow$ No tiene solución.

d) $2(x^2 + 2x + 1) = 5x^2 + 6x - 2(2x^2 + 1)$

$2x^2 + 4x + 2 = 5x^2 + 6x - 4x^2 - 2$

$x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

e) $4x^2 + 4x + 1 + 25x = 5x + 1 - 14x^2 - 8$

$18x^2 + 24x + 8 = 0 \rightarrow 9x^2 + 12x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-12 \pm 0}{18} = -\frac{2}{3}$

Solución: $x = -\frac{2}{3}$

Otras ecuaciones

5 **Resuelve.**

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

c) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ **d)** $x^4 - x^2 - 6 = 0$

a) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \to y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$x^2 = 4 \to x_1 = 2;\ x_2 = -2$

$x^2 = 1 \to x_3 = 1;\ x_4 = -1$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

b) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$4y^2 - 17y + 4 = 0 \to y = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8} = \begin{cases} 4 \\ 1/4 \end{cases}$$

$x^2 = 4 \to x_1 = 2;\ x_2 = -2$

$x^2 = \frac{1}{4} \to x_3 = \frac{1}{2};\ x_4 = -\frac{1}{2}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = -\frac{1}{2}$

c) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \to y = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} y = 4 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2 \\ y = -1 \to \text{No vale} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2;\ x_2 = -2$

d) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - y - 6 = 0 \to y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} y = 3 \to x^2 = 3 \to x = \pm\sqrt{3} \\ y = -2 \to \text{No vale.} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3}$

6 **Resuelve.**

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ **b)** $x^4 - 16 = 0$

c) $x^4 - 25x^2 = 0$ **d)** $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

e) $(x^2 + 1)^2 + 6 = 5(x^2 + 1)$ **f)** $(2x^2 + 1)^2 - 5 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$

a) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \to y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} y = 3 \to x = \pm\sqrt{3} \\ y = 1 \to x = \pm 1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3},\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

b) $x^4 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

c) $x^2(x^2 - 25) = 0$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = -5$

d) Cambio de variable: $x^2 = y$

$y^2 - 18y + 81 = 0 \rightarrow y = \dfrac{18 \pm \sqrt{0}}{2} = 9 \rightarrow x^2 = 9$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

e) $x^4 + 2x^2 + 1 + 6 = 5x^2 + 5$

$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$. Cambio de variable: $x^2 = y$

$y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} y = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ y = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

f) $4x^4 + 4x^2 + 1 - 5 = x^4 - 4$

$3x^4 + 4x^2 = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

$3x^2 + 4 = 0$ no tiene solución.

La solución de la ecuación es $x = 0$.

7 ■□□ **Resuelve.**

a) $\dfrac{x+2}{x} + 3x = \dfrac{5x+6}{2}$

b) $\dfrac{x-4}{x} - \dfrac{x-1}{4x} = -3x$

c) $\dfrac{x-3}{x} + \dfrac{x+3}{x^2} = \dfrac{2}{3}$

d) $x - \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{3x-1}{2}$

a) $2(x + 2) + 2x \cdot 3x = x(5x + 6)$

$2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$

Comprobamos sobre la ecuación inicial la validez de la solución.

Solución: $x = 2$.

b) $4(x - 4) - (x - 1) = -3x \cdot 4x$

$4x - 16 - x + 1 = -12x^2 \rightarrow 12x^2 + 3x - 15 = 0 \rightarrow 4x^2 + x - 5 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{81}}{8} = \dfrac{-1 \pm 9}{8} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -10/8 = -5/4 \end{cases}$

Se comprueba sobre la ecuación inicial que las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -\dfrac{5}{4}$

c) $3x(x-3) + 3(x+3) = 2x^2$

$3x^2 - 9x + 3x + 9 - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$

Se comprueba que la solución es válida.

Solución: $x = 3$

d) $2x(x+1) - 2(x-1) = (3x-1)(x+1)$

$2x^2 + 2x - 2x + 2 = 3x^2 + 2x - 1 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Se comprueba que las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$

8 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{x+1}{x-1} - 3 = \dfrac{2-x}{x}$

b) $\dfrac{3x+1}{4x+3} - \dfrac{1}{x} = 3$

c) $\dfrac{3x+4}{x+3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x+19}{4x+6}$

d) $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2-5x}{x^2+3x}$

a) $(x+1)x - 3x(x-1) = (2-x)(x-1)$

$x^2 + x - 3x^2 + 3x = -x^2 + 3x - 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Se comprueba la validez de las dos soluciones.

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

b) $x(3x+1) - (4x+3) = 3x(4x+3)$

$3x^2 + x - 4x - 3 = 12x^2 + 9x \rightarrow 9x^2 + 12x + 3 = 0 \rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 12}{6} = \begin{cases} -1 \\ -1/3 \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$

c) $2(3x+4) - (x+3) = x + 19$

$6x + 8 - 3 = x + 19 \rightarrow 4x = 14 \rightarrow x = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$

Solución: $x = \dfrac{7}{2}$

d) $x - 2(x+3) = 2 - 5x$

$x - 2x - 6 = 2 - 5x \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2$

Solución: $x = 2$

9 **Resuelve.**

a) $x + \sqrt{25 - x^2} = 2x + 1$

b) $3x + \sqrt{6x + 10} = 35$

c) $x + 1 - \sqrt{5x + 1} = 0$

d) $\sqrt{4x^2 + 7x - 2} = x + 2$

a) $\sqrt{25 - x^2} = x + 1 \rightarrow 25 - x^2 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0$

$x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \dfrac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 3 \rightarrow \sqrt{25 - 9} = 3 + 1 \rightarrow x = 3$ es solución.

$x = -4 \rightarrow \sqrt{25 - 16} \neq -4 + 1 \rightarrow x = -4$ no vale.

Solución: $x = 3$

b) $\sqrt{6x + 10} = 35 - 3x \rightarrow 6x + 10 = 1\,225 + 9x^2 - 210x$

$9x^2 - 216x + 1\,215 = 0 \rightarrow x^2 - 24x + 135 = 0$

$x = \dfrac{24 \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{24 \pm 6}{2} = \begin{cases} 15 \\ 9 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 15 \rightarrow \sqrt{6 \cdot 15 + 10} \neq 35 - 45$ no vale.

$x = 9 \rightarrow \sqrt{54 + 10} = 37 - 27 \rightarrow$ Válida.

Solución: $x = 9$

c) $\sqrt{5x + 1} = x + 1 \rightarrow 5x + 1 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 0 \rightarrow \sqrt{1} = 1 \rightarrow$ Válida.

$x = 3 \rightarrow \sqrt{15 + 1} = 3 + 1 \rightarrow$ Válida.

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 3$

d) $(\sqrt{4x^2 + 7x - 2})^2 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow 4x^2 + 7x - 2 - x^2 - 4x - 4 = 0$

$3x^2 + 3x - 6 = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 18}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 1 \rightarrow \sqrt{4 + 7 - 2} = 1 + 2 \rightarrow x = 1$ es solución.

$x = -2 \rightarrow \sqrt{16 - 14 - 2} = -2 + 2 \rightarrow x = -2$ es solución.

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -2$

10 **Dos de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Averigua cuáles son y resuelve las otras.**

a) $x - 17 = \sqrt{169 - x^2}$

b) $\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3 - x} = 0$

c) $\sqrt{5x - 7} - \sqrt{1 - x} = 0$

d) $2\sqrt{5 - 4x} + 4x = 5$

a) $x^2 - 34x + 289 = 169 - x^2$

$2x^2 - 34x + 120 = 0 \rightarrow x^2 - 17x + 60 = 0$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 12 \rightarrow 12 - 17 = \sqrt{169 - 289} \rightarrow$ No vale.

$x = 5 \rightarrow 5 - 17 = \sqrt{169 - 25} \rightarrow$ No vale.

No tiene solución.

b) $\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{3 - x} \rightarrow x^2 + 3 = 3 - x \rightarrow x^2 + x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 0 \rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3} \rightarrow$ Es solución.

$x = -1 \rightarrow \sqrt{4} = \sqrt{4} \rightarrow$ Es solución.

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1$

c) $\sqrt{5x - 7} = \sqrt{1 - x} \rightarrow 5x - 7 = 1 - x \rightarrow 6x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Comprobación:

$$\sqrt{5 \cdot \frac{4}{3} - 7} \neq \sqrt{1 - \frac{4}{3}} \rightarrow \text{No vale.}$$

La ecuación no tiene solución.

d) $4(5 - 4x) = (5 - 4x)^2 \rightarrow 20 - 16x = 25 + 16x^2 - 40x$

$$16x^2 - 24x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{24 \pm \sqrt{256}}{32} = \frac{24 \pm 16}{32} = \begin{cases} 5/4 \\ 1/4 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = \frac{5}{4} \rightarrow 2\sqrt{5 - \frac{5}{4} \cdot 4} + 4 \cdot \frac{5}{4} = 5 \rightarrow x = \frac{5}{4} \text{ es solución.}$$

$$x = \frac{1}{4} \rightarrow 2\sqrt{5 - 4 \cdot \frac{1}{4}} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 5 \rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ es solución.}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{5}{4},\ x_2 = \frac{1}{4}$

11 **Di cuáles son las soluciones de las siguientes ecuaciones:**

a) $(x-2)(2x-3)=0$ **b)** $x(x-3)(x+1)=0$

c) $(x+5)(x^2-4)=0$ **d)** $x(x^2+4)=0$

e) $(x-2)(x^2-2x-3)=0$ **f)** $x(x^2+3x+2)=0$

a) $x-2=0 \rightarrow x_1=2;\ 2x-3=0 \rightarrow x_2=\frac{3}{2}$

Soluciones: $x_1=2,\ x_2=\frac{3}{2}$

b) Soluciones: $x_1=0;\ x_2=3;\ x_3=-1$

c) $x_1=-5;\ x^2=4 \rightarrow x_2=2;\ x_3=-2$

Soluciones: $x_1=-5;\ x_2=2;\ x_3=-2$

d) $x=0;\ x^2+4\neq 0$

Solución: $x=0$

e) $x_1=2;\ x^2-2x-3=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2} \begin{cases} x_2=3 \\ x_3=-1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=2;\ x_2=3;\ x_3=-1$

f) $x_1=0;\ x^2+3x+2=0 \rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2} \begin{cases} x_2=-2 \\ x_3=-1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0;\ x_2=-2;\ x_3=-1$

12 **Descompón en factores y resuelve.**

a) $x^3-4x=0$ **b)** $x^3+x^2-6x=0$

c) $x^3+2x^2-x-2=0$ **d)** $x^3-x^2-5x-3=0$

a) $x(x^2-4)=0$

Soluciones: $x_1=0;\ x_2=2;\ x_3=-2$

b) $x(x^2+x-6)=0 \rightarrow x_1=0;\ x^2+x-6=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm 5}{2}= \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0;\ x_2=-3;\ x_3=2$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2+3x+2=0 \rightarrow x=\frac{-3\pm 1}{2}= \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=-2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2-2x-3=0 \rightarrow x=\frac{2\pm 4}{2}= \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-1$ (doble); $x_2=3$

PÁGINA 75

Sistemas de ecuaciones

13 □□□ **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y comprueba las soluciones:**

a) $\begin{cases} 5x + 3 = 20 - 9y \\ 2x - 3y = 5x - y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 30 \\ 6{,}5x + 3{,}2y = 158{,}7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 4 \\[2mm] \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} + y + 1 = 0 \\[2mm] \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y-1}{3} + 1 = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 5x + 9y = 17 \\ -3x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} 15x + 27y = 51 \\ -15x - 10y = 0 \\ \hline 17y = 51 \end{array} \rightarrow y = 3$

Si $y = 3 \rightarrow 5x + 27 = 17 \rightarrow 5x = -10 \rightarrow x = -2$

Solución: $x = -2$; $y = 3$

b) $\begin{cases} y = 30 - x \\ 6{,}5x + 3{,}2(30 - x) = 158{,}7 \rightarrow 6{,}5x + 96 - 3{,}2x = 158{,}7 \end{cases}$

$3{,}3x = 62{,}7 \rightarrow x = 19$

$y = 30 - 19 = 11$

Solución: $x = 19$; $y = 11$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 24 \\ 2x - \ \ y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} 2x - 3y = 24 \\ -2x + \ \ y = -8 \\ \hline -2y = 16 \end{array} \rightarrow y = -8$

$2x + 24 = 24 \rightarrow x = 0$

Solución: $x = 0$; $y = -8$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 3x + 3 + 2y - 2 + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} 2x + 3y = -3 \rightarrow \\ 3x + 2y = -7 \rightarrow \end{array} \begin{array}{r} -4x - 6y = 6 \\ 9x + 6y = -21 \\ \hline 5x \qquad = -15 \end{array} \rightarrow x = -3$

$2(-3) + 3y = -3 \rightarrow 3y = 3 \rightarrow y = 1$

Solución: $x = -3$; $y = 1$

14 **Resuelve los siguientes sistemas aplicando dos veces el método de reducción:**

a) $\begin{cases} 13x - 12y = 127 \\ 21x + 17y = 96 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8{,}6x + 5{,}4y = 11 \\ 25x - 12y = -245 \end{cases}$

a)
$$\begin{array}{rcl} 273x - 252y &=& 2\,667 \\ -273x - 221y &=& -1\,248 \\ \hline -473y &=& 1\,419 \end{array} \to y = -3$$

$$\begin{array}{rcl} 221x - 204y &=& 2\,159 \\ 252x + 204y &=& 1\,152 \\ \hline 473x &=& 3\,311 \end{array} \to x = 7$$

Solución: $x = 7$, $y = -3$

b)
$$\begin{array}{rcl} -215x - 135y &=& -275 \\ 215x - 103{,}2y &=& -2\,107 \\ \hline -238{,}2y &=& -2\,382 \end{array} \to y = 10$$

$$\begin{array}{rcl} 103{,}2x + 64{,}8y &=& 132 \\ 135x - 64{,}8y &=& -1\,323 \\ \hline 238{,}2x &=& -1\,191 \end{array} \to x = -5$$

Solución: $x = -5$, $y = 10$

15 **Averigua cuál de los siguientes sistemas no tiene solución y cuál tiene infinitas soluciones:**

a) $\begin{cases} x + y = 4 - y \\ 3x - 5 = 7 - 6y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5 + x = y \\ 7x - y + 17 = 3x + 3y \end{cases}$

a) $\left.\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}\right\}$ Tiene infinitas soluciones.

b) $\left.\begin{cases} x - y = -5 \\ 4x - 4y = -17 \end{cases}\right\}$ No tiene solución.

16 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+15}{8} + \dfrac{3(y+1)}{16} = 3 \\ \dfrac{7-x}{2} - \dfrac{1+y}{12} = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{5} - \dfrac{3y-1}{10} = \dfrac{-3}{10} \\ \dfrac{2x+3}{8} + \dfrac{y+7}{4} = \dfrac{19}{8} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2(x+15) + 3(y+1) = 48 \\ 6(7-x) - (1-y) = 36 \end{cases} \to \begin{cases} 2x + 30 - 3y + 3 = 48 \\ 42 - 6x - 1 - y = 36 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ -6x - y = -5 \end{cases}$ $\quad \begin{array}{r} 6x + 9y = 45 \\ -6x - y = -5 \\ \hline 8y = 40 \end{array} \to y = 5 \to 2x + 15 = 15 \to x = 0$

Solución: $x = 0$, $y = 5$

b) $\begin{cases} 2(x+2) - 3y + 1 = -3 \\ 2x + 3 + 2y + 14 = 19 \end{cases} \to \begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{array}{r} -2x + 3y = 8 \\ 2x + 2y = 2 \\ \hline 5y = 10 \end{array}$

$y = 2 \to 2x - 6 = -8 \to 2x = -2 \to x = -1$

Solución: $x = -1$, $y = 2$

17 Resuelve.

a) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x-y) = 2y^2 - 8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = y - 3 \\ (y-3)^2 + y^2 = 5 \to y^2 - 6y + 9 + y^2 - 5 = 0 \to 2y^2 - 6y + 4 = 0 \end{cases}$

$y^2 - 3y + 2 = 0 \to y = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \begin{cases} y_1 = 1 \to x_1 = 1 - 3 = 2 \\ y_2 = 2 \to x_2 = 2 - 3 = -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -1$, $y_2 = 2$

b) $\begin{cases} x = 1 - y \\ (1-y)y + 2y = 2 \to y - y^2 + 2y = 2 \to y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$

$y = \dfrac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} y_1 = 1 \to x_1 = 1 - 1 = 0 \\ y_2 = 2 \to x_2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0$, $y_1 = 1$; $x_2 = -1$, $y_2 = 2$

c) $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x(3-2x) - (3-2x)^2 = 0 \to 3x - 2x^2 - 9 - 4x^2 - 12x = 0 \end{cases}$

$-6x^2 + 15x - 9 = 0 \to 2x^2 - 5x + 3 = 0 \to x = \dfrac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Si $x_1 = 2 \to y_1 = 3 - 4 = 1$

Si $x_2 = 3 \to y_2 = 3 - 6 = -3$

Soluciones: $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = 3$, $y_2 = -3$

d) $\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x \\ x\left(x + \dfrac{3}{2}x\right) = 2\left(-\dfrac{3}{2}x\right)^2 - 8 \end{cases} \rightarrow \dfrac{5}{2}x^2 = \dfrac{9}{2}x^2 - 8 \rightarrow -2x^2 = -8$

$$x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow y_1 = -\dfrac{3}{2} \cdot 2 = -3 \\ x_2 = -2 \rightarrow y_2 = -\dfrac{3}{2}(-2) = 3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = -3;\ x_2 = -2,\ y_2 = 3$

18 **Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción y comprueba que tienen cuatro soluciones:**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 = 41} \\ \boldsymbol{x^2 - y^2 = 9} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{3x^2 + 2y^2 = 35} \\ \boldsymbol{x^2 - 2y^2 = 1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 + x + y = 32} \\ \boldsymbol{x^2 - y^2 + x - y = 28} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0} \\ \boldsymbol{x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$

$2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$

Si $x = 5 \rightarrow 25 + y^2 = 41 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4$

Si $x = -5 \rightarrow 25 + y^2 = 41 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4$

Soluciones: $x_1 = 5,\ y_1 = 4;\ x_2 = 5,\ y_2 = -4;\ x_3 = -5,\ y_3 = 4;\ x_4 = -5,\ y_4 = -4$

b) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 35 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$

$4x^2 = 36 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

Si $x = 3 \rightarrow 27 + 2y^2 = 35 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$

Si $x = -3 \rightarrow 27 + 2y^2 = 35 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$

Soluciones: $x_1 = 3,\ y_1 = 2;\ x_2 = 3,\ y_2 = -2;\ x_3 = -3,\ y_3 = 2;\ x_4 = -3,\ y_4 = -2$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ x^2 - y^2 + x - y = 28 \end{cases}$

$2x^2 + 2x = 60 \rightarrow x^2 + x = 30 \rightarrow x^2 + x - 30 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2} = \begin{cases} -6 \\ 5 \end{cases}$$

• Si $x = -6 \rightarrow 36 + y^2 - 6 + y = 32 \rightarrow y^2 + y - 2 = 0$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

• Si $x = 5 \rightarrow 25 + y^2 + 5 + y = 32 \rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \rightarrow y = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -6,\ y_1 = -2;\ x_2 = -6,\ y_2 = 1;\ x_3 = 5,\ y_3 = -2;\ x_4 = 5,\ y_4 = 1$

d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$

$2x^2 \qquad + 4x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 2x + 1 = 0 \;\rightarrow\; (x + 1)^2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$

Si $x = -1 \;\rightarrow\; 1 + 2y^2 - 1 + 1 = 0 \;\rightarrow\; 2y^2 = -1 \;\rightarrow$ No tiene solución.

Inecuaciones

19 □□□ **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $\mathbf{2x + 7 < 3}$ **b)** $\mathbf{3 - x \le 9}$

c) $\mathbf{3 \le 2x + 2}$ **d)** $\mathbf{3 - 2x \ge x - 9}$

a) $2x < -4 \;\rightarrow\; x < -2$

Solución: $(-\infty, -2)$

b) $3 - x \le 9 \;\rightarrow\; -x \le 6 \;\rightarrow\; x \ge -6$

Solución: $[-6, +\infty)$

c) $2x \ge 1 \;\rightarrow\; x \ge \dfrac{1}{2}$

Solución: $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $-2x - x \ge -9 - 3 \;\rightarrow\; -3x \ge -12 \;\rightarrow\; 3x \le 12 \;\rightarrow\; x \le 4$

Solución: $(-\infty, 4]$

20 □□□ **Resuelve.**

a) $\mathbf{\dfrac{7 - 3x}{2} < x + 1}$ **b)** $\mathbf{\dfrac{x + 4}{3} + 3 \ge \dfrac{x + 10}{6}}$

c) $\mathbf{2x - 2(3x - 5) < x}$ **d)** $\mathbf{x - 1 - \dfrac{x - 1}{2} < 0}$

a) $7 - 3x < 2x + 2 \;\rightarrow\; -5x < -5 \;\rightarrow\; 5x > 5 \;\rightarrow\; x > 1$

Solución: $(1, +\infty)$

b) $2x + 8 + 18 \ge x + 10 \;\rightarrow\; x \ge -16$

Solución: $[-16, +\infty)$

c) $2x - 6x + 10 < x \;\rightarrow\; -5x < -10 \;\rightarrow\; 5x > 10 \;\rightarrow\; x > 2$

Solución: $(2, +\infty)$

d) $2x - 2 - x + 1 < 0 \;\rightarrow\; x - 1 < 0 \;\rightarrow\; x < 1$

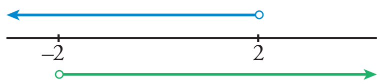
Solución: $(-\infty, 1)$

21 Halla las soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2 + x > 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 3 \le x + 1 \\ 2x + 6 \ge x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2x+5}{3} < x - 1 \\ \dfrac{x}{3} - 1 < \dfrac{2x-1}{5} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{x+13}{6} < \dfrac{39-2x}{18} \\ \dfrac{3x-5}{4} < -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2 - x > 0 \;\to\; -x > -2 \;\to\; x < 2 \\ 2 + x > 0 \;\to\; x > -2 \end{cases}$

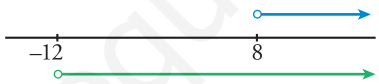


Solución: (–2, 2)

b) $\begin{cases} 5x - 3 \le x + 1 \;\to\; 4x \le 4 \;\to\; x \le 1 \\ 2x + 6 \ge x + 2 \;\to\; x \ge -4 \end{cases}$

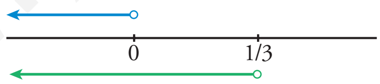
No tiene solución.

c) $\begin{cases} \dfrac{2x+5}{3} < x - 1 \;\to\; 2x + 5 < 3x - 3 \;\to\; -x < -8 \;\to\; x > 8 \\ \dfrac{x}{3} - 1 < \dfrac{2x-1}{5} \;\to\; 5x - 15 < 6x - 3 \;\to\; -x < 12 \;\to\; x > -12 \end{cases}$



Solución: (8, +∞)

d) $\begin{cases} 3x + 39 < 39 - 2x \;\to\; 5x < 0 \;\to\; x < 0 \\ 3x - 5 < -4 \;\to\; 3x < 1 \;\to\; x < 1/3 \end{cases}$



Solución: (–∞, 0)

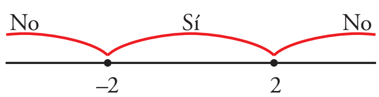
22 Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 4 \le 0$ **b)** $x^2 - 9 > 0$

c) $x^2 - 4x < 0$ **d)** $x^2 + 3x > 0$

a) $x^2 - 4 \le 0$

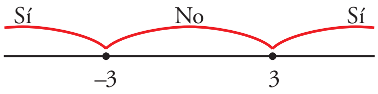
$$x^2 - 4 = 0 \;\to\; (x + 2)(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$



Solución: [–2, 2]

b) $x^2 - 9 > 0$

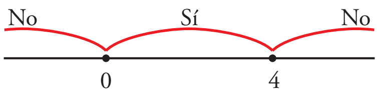
$x^2 - 9 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array} \right.$



Solución: $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

c) $x^2 - 4x < 0$

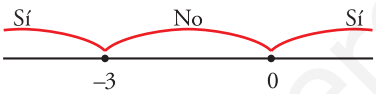
$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array} \right.$



Solución: $(0, 4)$

d) $x^2 + 3x > 0$

$x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x + 3) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array} \right.$



Solución: $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

23 ■■□ **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $(x - 1)(x - 5) < 0$

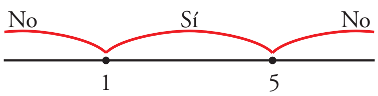
b) $(x + 2)(x - 3) > 0$

c) $(4 - x)(2 + x) \geq 0$

d) $2x(3 - x) \leq 0$

a) $(x - 1)(x - 5) < 0$

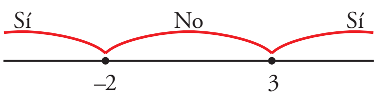
$(x - 1)(x - 5) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array} \right.$



Solución: $(1, 5)$

b) $(x + 2)(x - 3) > 0$

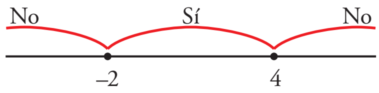
$(x + 2)(x - 3) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3 \end{array} \right.$



Solución: $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

c) $(4 - x)(2 + x) \geq 0$

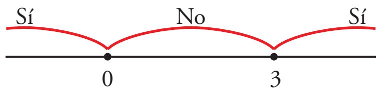
$$(4 - x)(2 + x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array} \right.$$



Solución: $[-2, 4]$

d) $2x(3 - x) \leq 0$

$$2x(3 - x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array} \right.$$



Solución: $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

24 **Traduce a lenguaje algebraico:**

a) La mitad de un número menos 10 unidades es menor que 7.

b) Si a los tres cuartos de un número le resto 2, obtengo más que si a su mitad le sumo 5.

c) El producto de dos números consecutivos no supera a 8.

d) El perímetro de un rectángulo cuya base mide 3 cm más que la altura es menor que 50 m.

a) $\dfrac{x}{2} - 10 < 7$ b) $\dfrac{3}{4}x - 2 > \dfrac{x}{2} + 5$

c) $x(x + 1) \leq 8$ d) $4x + 6 < 50$

PÁGINA 76

PIENSA Y RESUELVE

25 **Resuelve estas ecuaciones de grado superior a dos en las que puedes despejar la incógnita:**

a) $x^3 - 64 = 0$ **b)** $\dfrac{625}{x} - x^3 = 0$

c) $\dfrac{3x}{4} + \dfrac{16}{9x^2} = 0$ **d)** $\dfrac{x}{8} - \dfrac{2}{81x^3} = 0$

a) $x^3 - 64 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4.$

Solución: $x = 4$

b) $\dfrac{625}{x} - x^3 = 0 \rightarrow 625 - x^4 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{625} = \pm 5$

Soluciones: $x_1 = 5, \; x_2 = -5$

c) $\frac{3x}{4} + \frac{16}{9x^2} = 0 \rightarrow 27x^3 + 64 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{64}{27}} = -\frac{4}{3}$

Solución: $x = -\frac{4}{3}$

d) $\frac{x}{8} - \frac{2}{81x^3} = 0 \rightarrow 81x^4 - 16 = 0 \rightarrow x^4 = \frac{16}{81} \rightarrow x = \pm\frac{2}{3}$

Soluciones: $x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = -\frac{2}{3}$

26 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{2x}{x^2 - 1} = 2 + \frac{x}{x - 1}$

b) $1 = \frac{3x}{x^2 - 9} - \frac{x}{2x - 6}$

c) $\frac{4 - x}{x^2 + 2x + 1} - \frac{2 - x}{x + 1} = 2$

d) $\frac{2x + 4}{x^2 - 5x} + \frac{x + 4}{x} = \frac{1}{x - 5}$

a) $2x = 2(x^2 - 1) + x(x + 1)$

$2x = 2x^2 - 2 + x^2 + x \rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6} = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{No vale.} \\ -2/3 \end{cases}$

Solución: $x = -\frac{2}{3}$

b) $2(x^2 - 9) = 6x - x(x + 3) \rightarrow 2x^2 - 18 = 6x - x^2 - 3x \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 3 \rightarrow \text{No vale.} \\ x = -2 \end{cases}$

Solución: $x = -2$

c) $4 - x - (2 - x)(x + 1) = 2(x^2 + 2x + 1)$

$4 - x - 2x - 2 + x^2 + x = 2x^2 + 4x + 2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 2x + 2 = 2x^2 + 4x \rightarrow x^2 + 6x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -6$

d) $2x + 4 + (x + 4)(x - 5) = x \rightarrow 2x + 4 + x^2 - x - 20 = x \rightarrow x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm 4$

Soluciones: $x_1 = 4,\ x_2 = -4$

27 **Resuelve.**

a) $x + \sqrt{7 - 3x} = -1$ **b)** $\sqrt{x} + \sqrt{3x - 2} = 2$

c) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x - 6} = 4$ **d)** $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{x + 1} = 2$

☞ ***Mira los ejercicios resueltos de la página 64.***

a) $\sqrt{7 - 3x} = -1 - x \to 7 - 3x = 1 + x^2 + 2x \to x^2 + 5x - 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \begin{cases} -6 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = -6 \to -6 + \sqrt{7 - 18} = -1$

$x = 1 \to 1 + \sqrt{7 - 3} = 3 \neq -1 \to$ No vale.

Solución: $x = -6$

b) $\sqrt{3x - 2} = 2 - \sqrt{x} \to 3x - 2 = 4 + x - 4\sqrt{x} \to (4\sqrt{x})^2 = (6 - 2x)^2 \to$

$\to 16x = 36 + 4x^2 - 24x \to 4x^2 - 40x + 36 = 0 \to x^2 - 10x + 9 = 0$

$$x = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 9 \to \sqrt{25} + \sqrt{9} \neq 2 \to$ No vale.

$x = 1 \to \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$

Solución: $x = 1$

c) $\sqrt{5x - 6} = 4 - 2\sqrt{x} \to 5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x} \to (8\sqrt{2x})^2 = (22 - 3x)^2 \to$

$\to 128x = 484 + 9x^2 - 132x \to 9x^2 - 260x + 484 = 0$

$$x = \frac{260 \pm 224}{18} = \begin{cases} 242/9 \\ 2 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = \dfrac{242}{9} \to \sqrt{\dfrac{1\,156}{9}} + \sqrt{\dfrac{484}{9}} = \dfrac{34}{3} + \dfrac{22}{3} = \dfrac{56}{3} \neq 4 \to$ No vale.

$x = 2 \to \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$

Solución: $x = 2$

d) $\sqrt{5x + 1} = 2 + \sqrt{x + 1} \to 5x + 1 = 4 + x + 1 + 4\sqrt{x + 1} \to$

$\to 4x - 4 = 4\sqrt{x + 1} \to \sqrt{x + 1} = x - 1 \to x + 1 = x^2 - 2x + 1 \to$

$$\to x^2 - 3x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 0 \to \sqrt{1} - \sqrt{1} = 0 \neq 2 \to$ No vale.

$x = 3 \to \sqrt{16} - \sqrt{4} = 2$

Solución: $x = 3$

28 **Resuelve.**

a) $(9x^2 - 4)(2x - 3)^2$

b) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

c) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$

d) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$

a) $(9x^2 - 4)(2x - 3)^2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} 9x^2 - 4 = 0 \ \rightarrow \ x^2 = \dfrac{4}{9} \ \rightarrow \ x_1 = \dfrac{2}{3};\ x_2 = \dfrac{2}{3} \\ (2x - 3)^2 = 0 \ \rightarrow \ 2x - 3 = 0 \ \rightarrow \ x_3 = \dfrac{3}{2} \end{array} \right.$

Soluciones: $x_1 = \dfrac{2}{3},\ x_2 = -\dfrac{2}{3},\ x_3 = \dfrac{3}{2}$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 + x + 1 = 0 \ \rightarrow$ No tiene solución.

La solución es $x = 2$.

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -10 & 9 & -2 \\ 1 & & 3 & -7 & 2 \\ \hline & 3 & -7 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$3x^2 - 7x + 2 = 0 \ \rightarrow \ x = \dfrac{7 \pm 5}{6} \left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1/3 \end{array} \right.$

Soluciones: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = \dfrac{1}{3}$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -9 & 10 \\ 1 & & 2 & -1 & -10 \\ \hline & 2 & -1 & -10 & \boxed{0} \end{array}$$

$2x^2 - x - 10 = 0 \ \rightarrow \ x = \dfrac{1 + 9}{4} \left\langle \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 5/2 \end{array} \right.$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = \dfrac{5}{2}$

29 □□□ **Resuelve y comprueba las soluciones.**

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{20} \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 2 - x \\ 3y + 3x = -2xy \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2 - x \\ 3(2 - x) + 3x = -2x(2 - x) \end{cases}$

$6 - 3x + 3x = -4x + 2x^2 \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm 4}{2}$ < $x = -1 \rightarrow y = 2 + 1 = 3$; $x = 3 \rightarrow y = 2 - 3 = -1$

Soluciones: $x_1 = -1,\ y_1 = 3;\ x_2 = 3,\ y_2 = -1$

b) $\begin{cases} 20y + 20x = xy \rightarrow 20y + 20(3 - 2y) = (3 - 2y)y \\ x = 3 - 2y \end{cases}$

$20y + 60 - 40y = 3y - 2y^2 \rightarrow 2y^2 - 23y + 60 = 0 \rightarrow y = \dfrac{23 \pm 7}{4}$ < $x = 4$; $x = 15/2$

Si $y = 4 \rightarrow x = 3 - 8 = -5$

Si $y = \dfrac{15}{2} \rightarrow x = 3 - 2 \cdot \dfrac{15}{2} = -12$

Soluciones: $x_1 = -5,\ y_1 = 4;\ x_2 = -12,\ y_2 = \dfrac{15}{2}$

c) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \rightarrow \sqrt{y^2 - 2y + 1} + y = 5 \rightarrow \sqrt{(y-1)^2} + y = 5 \rightarrow \end{cases}$

$\rightarrow 2y = 6 \rightarrow y = 3 \rightarrow x = 9 - 6 + 1 = 4$

Solución: $x = 4,\ y = 3$

d) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \rightarrow y = \dfrac{2x - 1}{3}$

$2\sqrt{x+1} = \dfrac{2x-1}{3} + 1 \rightarrow 2\sqrt{x+1} = \dfrac{2x - 1 + 3}{3} \rightarrow$

$\rightarrow (2\sqrt{x+1})^2 = \left(\dfrac{2x+2}{3}\right)^2 \rightarrow 4(x+1) = \dfrac{4x^2 + 8x + 4}{9} \rightarrow$

$\rightarrow 36x + 36 = 4x^2 + 8x + 4 \rightarrow 4x^2 - 28x - 32 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 7x - 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{7 \pm 9}{2}$ < $x = -1$; $x = 8$

Si $x = -1 \rightarrow y = -1$

Si $x = 8 \rightarrow y = \dfrac{16 - 1}{3} = 5$

Soluciones: $x_1 = -1,\ y_1 = -1;\ x_2 = 8,\ y_2 = 5$

30 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} xy = 15 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy = 12 \\ x^2 - 5y^2 = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 4 \\ (x + y)^2 = 25 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{82}{9} \\ xy = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = \dfrac{15}{x} \\ x^2 + \left(\dfrac{15}{x}\right)^2 = 34 \rightarrow x^4 + 225 = 34x^2 \end{cases}$

Hacemos el cambio $x^2 = z \rightarrow z^2 - 34z + 225 = 0 \rightarrow z = \dfrac{34 \pm 16}{2} \begin{matrix} 25 \\ 9 \end{matrix}$

Si $z = 25$ $\begin{matrix} x = 5 \rightarrow y = 3 \\ x = -5 \rightarrow y = -3 \end{matrix}$

Si $z = 9$ $\begin{matrix} x = 3 \rightarrow y = 5 \\ x = -3 \rightarrow y = -5 \end{matrix}$

Soluciones: $x_1 = 5,\ y_1 = 3;\ x_2 = -5,\ y_2 = -3;\ x_3 = 3,\ y_3 = 5;\ x_4 = -3,\ y_4 = -5$

b) $\begin{cases} y = \dfrac{12}{x} \\ x^2 - 5\left(\dfrac{12}{x}\right)^2 = 16 \rightarrow x^2 - \dfrac{720}{x^2} = 16 \rightarrow x^4 - 16x^2 - 720 = 0 \end{cases}$

Cambio: $x^2 = z \rightarrow z^2 - 16z - 720 = 0 \rightarrow z = \dfrac{16 \pm 56}{2} = \begin{matrix} 36 \\ -20 \text{ (no vale)} \end{matrix}$

Si $z = 36$ $\begin{matrix} x = 6 \rightarrow y = 2 \\ x = -6 \rightarrow y = -2 \end{matrix}$

Soluciones: $x_1 = 6,\ y_1 = 2;\ x_2 = -6,\ y_2 = -2$

c) $\begin{cases} y = \dfrac{4}{x} \\ \left(x + \dfrac{4}{x}\right)^2 = 25 \rightarrow \left(\dfrac{x^2 + 4}{x}\right)^2 = 25 \rightarrow x^4 + 8x^2 + 16 = 25x^2 \rightarrow \end{cases}$

$\rightarrow x^4 - 17x^2 + 16 = 0$. Hacemos el cambio $x^2 = z$:

$z^2 - 17z + 16 = 0 \rightarrow z = \dfrac{17 \pm \sqrt{17^2 - 64}}{2} = \dfrac{17 \pm 15}{2} = \begin{matrix} 16 \\ 1 \end{matrix}$

Si $z = 16$ $\begin{matrix} x = 4 \rightarrow y = 1 \\ x = -4 \rightarrow y = -2 \end{matrix}$

Si $z = 1$ $\begin{matrix} x = 1 \rightarrow y = 4 \\ x = -1 \rightarrow y = -4 \end{matrix}$

Soluciones: $x_1 = 4,\ y_1 = 1;\ x_2 = -4,\ y_2 = -1;\ x_3 = 1,\ y_3 = 4;\ x_4 = -1,\ y_4 = -4$

d) $\begin{cases} x^2 + \left(-\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{82}{9} \to x^4 + 1 - \dfrac{82}{9}x^2 = 0 \to 9x^4 - 82x^2 + 9 = 0 \\ y = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

Cambio: $x^2 = z$

$9z^2 - 82z + 9 = 0 \to z = \dfrac{82 \pm \sqrt{6\,724 - 324}}{18} = \dfrac{82 \pm 80}{18} = \begin{cases} 9 \\ 1/9 \end{cases}$

Si $z = 9$ $\begin{cases} x = 3 \to y = -1/3 \\ x = -3 \to y = 1/3 \end{cases}$

Si $z = \dfrac{1}{9}$ $\begin{cases} x = 1/3 \to y = -3 \\ x = -1/3 \to y = 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\ y_1 = \dfrac{-1}{3};\ x_2 = -3,\ y_2 = \dfrac{1}{3};\ x_3 = \dfrac{1}{3},\ y_3 = -3;\ x_4 = \dfrac{-1}{3},\ y_4 = 3$

31 ■■□ **Resuelve.**

a) $\begin{cases} \sqrt{x} = 4 - y \\ y^2 = 4 + x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - y = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 4 - \sqrt{x} \\ (4 + \sqrt{x})^2 = 4 + x \to 16 + x - 8\sqrt{x} = 4 + x \to 8\sqrt{x} = 12 \to \end{cases}$

$\to 2\sqrt{x} = 3 \to x = \dfrac{9}{4}$

Si $x = \dfrac{9}{4} \to y = 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$

Solución: $x = \dfrac{9}{4},\ y = \dfrac{5}{2}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ -x^2 - y^2 + y = 0 \end{cases}$

$2x + y = 0 \to y = -2x$ (lo sustituimos en la 1.ª ecuación)

$x^2 + (-2x)^2 + 2x = 0 \to 5x^2 + 2x = 0 \to x(5x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2/5 \end{cases}$

Si $x = 0 \to y = 0$

Si $x = -\dfrac{2}{5} \to y = \dfrac{4}{5}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ y_1 = 0;\ x_2 = -\dfrac{2}{5},\ y_2 = \dfrac{4}{5}$

32 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $\dfrac{5x-16}{6}+\dfrac{x+8}{12}<\dfrac{x+1}{3}$ **b)** $\dfrac{2-x}{4}-\dfrac{2+x}{2}>\dfrac{2x+7}{4}-\dfrac{2x+5}{3}$

c) $(x+1)^2-(x-1)^2+12\geq 0$ **d)** $2(x-11)-3x(1-3x)\leq(3x+2)^2$

a) $2(5x-16)+(x+8)<4(x+1)$

$10x-32+x+8<4x+4 \;\rightarrow\; 7x<28 \;\rightarrow\; x<4$

Solución: $(-\infty, 4)$

b) $3(2-x)-6(2+x)>3(2x+7)-4(2x+5)$

$6-3x-12-6x>6x+21-8x-20$

$-7x>7 \;\rightarrow\; 7x<7 \;\rightarrow\; x<1$

Solución: $(-\infty, 1)$

c) $x^2+2x+1-x^2+2x-1+12\geq 0$

$4x+12\geq 0 \;\rightarrow\; 4x\geq -12 \;\rightarrow\; x\geq -3$

Solución: $[-3, +\infty)$

d) $2x-22-3x+9x^2\leq 9x^2+12x+4$

$-13x\leq 26 \;\rightarrow\; 13x\geq -26 \;\rightarrow\; x\geq -2$

Solución: $[-2, +\infty)$

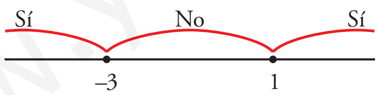
33 **Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:**

a) $x^2+2x-3>0$ **b)** $x^2-3x-10\leq 0$

c) $x^2-4x-5<0$ **d)** $2x^2+9x-5\geq 0$

a) $x^2+2x-3>0$

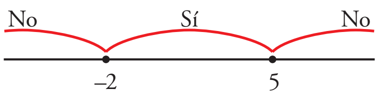
$$x^2+2x-3=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$$



Solución: $(-\infty, -3)\cup(1, +\infty)$

b) $x^2-3x-10\leq 0$

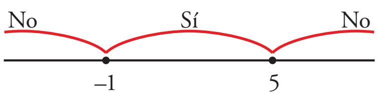
$$x^2-3x-10=0 \;\rightarrow\; x=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2}=\begin{cases}5\\-2\end{cases}$$



Solución: $[-2, 5]$

c) $x^2-4x-5<0$

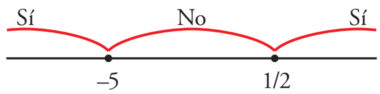
$$x^2-4x-5=0 \;\rightarrow\; x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases}5\\-1\end{cases}$$



Solución: $(-1, 5)$

d) $2x^2 + 9x - 5 \geq 0$

$$2x^2 + 9x - 5 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 40}}{4} = \frac{-9 \pm 11}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -5 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, -5] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

34 **Resuelve.**

a) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

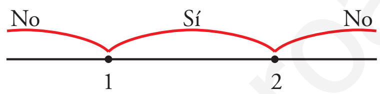
b) $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

c) $x^2 - 2x - 7 > 5 - x$

d) $x^2 < \dfrac{x + 7}{6}$

a) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

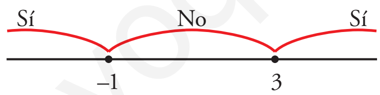
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$



Solución: $[1, 2]$

b) $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

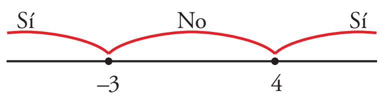
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

c) $x^2 - 2x - 7 > 5 - x \;\rightarrow\; x^2 - x - 12 > 0$

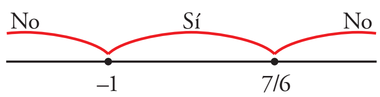
$$x^2 - x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$

d) $x^2 < \dfrac{x + 7}{6} \;\rightarrow\; 6x^2 < x + 7 \;\rightarrow\; 6x^2 - x - 7 < 0$

$$6x^2 - x - 7 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 168}}{12} = \frac{1 \pm 13}{12} = \begin{cases} 7/6 \\ -1 \end{cases}$$



Solución: $\left(-1, \frac{7}{6}\right)$

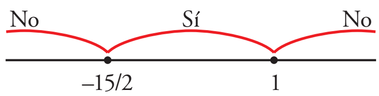
35 Resuelve las inecuaciones siguientes:

a) $3x(x + 4) - x(x - 1) < 15$ **b)** $2x(x + 3) - 2(3x + 5) + x > 0$

c) $\dfrac{x^2 - 9}{5} - \dfrac{x^2 - 4}{15} < \dfrac{1 - 2x}{3}$

a) $3x^2 + 12x - x^2 + x - 15 < 0 \to 2x^2 + 13x - 15 < 0$

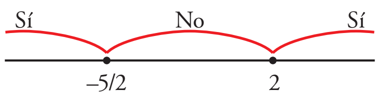
$$2x^2 + 13x - 15 = 0 \to x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 120}}{4} = \frac{-13 \pm 17}{4} = \begin{cases} -15/2 \\ 1 \end{cases}$$



Solución: $\left(-\dfrac{15}{2}, 1\right)$

b) $2x^2 + 6x - 6x - 10 + x > 0 \to 2x^2 + x - 10 > 0$

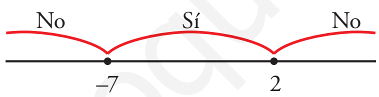
$$2x^2 + x - 10 = 0 \to x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4} = \begin{cases} 2 \\ -5/2 \end{cases}$$



Solución: $\left(-\infty, -\dfrac{5}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

c) $3x^2 - 27 - x^2 + 4 < 5 - 10x \to 2x^2 + 10x - 28 < 0 \to x^2 + 5x - 14 < 0$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \to x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} = \begin{cases} -7 \\ 2 \end{cases}$$



Solución: $(-7, 2)$

36 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{x + 2}{4} < \dfrac{x}{2} - 3 \\[2mm] \dfrac{8 - x}{3} < \dfrac{1 + x}{2} - 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{2} + \dfrac{2x + 2}{3} > \dfrac{3x - 7}{6} \\[2mm] \dfrac{2x - 1}{4} + 2x < \dfrac{2x - 9}{4} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 2 < 2x - 12 \to 14 < x \to x > 14 \\ 16 - 2x < 3 + 3x - 6 \to 19 < 5x \to x > 19/5 \end{cases}$

Solución: $(14, +\infty)$

b) $\begin{cases} 3x - 3 + 4x + 4 > 3x - 7 \to 4x > -8 \to x > -2 \\ 2x - 1 + 8x < 2x - 9 \to 8x < -8 \to x < -1 \end{cases}$

Solución: $(-2, -1)$

37 Algunas inecuaciones no tienen solución y otras tienen por solución cualquier número. Busca entre las siguientes las que son de estos tipos.

a) $x^2 + 4 > 3$ **b)** $x^2 + x + 2 < 0$

c) $x^2 + 7 < 5x$ **d)** $x^2 + 4x + 4 > 0$

a) $x^2 + 4 > 3 \rightarrow x^2 > -1$ Solución: $(-\infty, +\infty)$

b) $x^2 + x + 2 < 0$ No tiene solución.

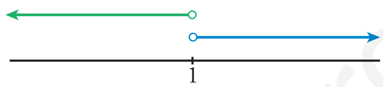
c) $x^2 + 7 < 5x \rightarrow x^2 - 5x + 7 < 0$ No tiene solución.

d) $x^2 + 4x + 4 > 0 \rightarrow (x + 2)^2 > 0$ Solución: $(-\infty, +\infty)$

38 Comprueba que estos dos sistemas de inecuaciones no tienen solución.

a) $\begin{cases} 8x + 7 < 16 - x \\ -3x + 5 < 2x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 5 < 2x - 3 \\ \dfrac{x + 3}{7} < x - 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 8x + 7 < 16 - x \rightarrow 9x < 9 \rightarrow x < 1 \\ -3x + 5 < 2x \rightarrow 5 < 5x \rightarrow x > 1 \end{cases}$



No tiene solución.

b) $\begin{cases} 3x + 5 < 2x - 3 \rightarrow x < -8 \\ x + 3 < 7x - 21 \rightarrow 24 < 6x \rightarrow x > 4 \end{cases}$

No tiene solución.

PÁGINA 77

Problemas de ecuaciones y sistemas de ecuaciones

39 Una empresa de alquiler de coches cobra por día y por kilómetros recorridos. Un cliente pagó 160 € por 3 días y 400 km, y otro pagó 175 € por 5 días y 300 km. Averigua cuánto cobran por día y por kilómetro.

$x \leftrightarrow$ días $\quad y \leftrightarrow$ kilómetros recorridos

$$\begin{cases} 3x + 400y = 160 \\ 5x + 300y = 175 \end{cases} \quad \begin{cases} 15x + 2\,000y = 800 \\ -15x - 900y = -525 \end{cases}$$

$$1\,100y = 275 \rightarrow y = 0{,}25$$

$3x + 0{,}25 \cdot 400 = 160 \rightarrow 3x = 60 \rightarrow x = 20$

La empresa cobra 20 € por día y 0,25 € por cada kilómetro recorrido.

40 **Un inversor compra dos cuadros por 2 650 €. Al cabo de dos años, los vende por 3 124 € ganando en uno de ellos un 20% y en el otro un 15%. ¿Cuánto le costó cada cuadro?**

$$\left.\begin{aligned} x + \quad y &= 2\,650 \\ 1{,}2x + 1{,}15y &= 3\,124 \end{aligned}\right\} \; x = 2\,650 - y$$

$1{,}2(2\,650 - y) + 1{,}15y = 3\,124 \;\rightarrow\; 3\,180 - 0{,}05y = 3\,124 \;\rightarrow\; y = 1\,120$

$x = 2\,650 - 1\,120 = 1\,530$

El valor de los cuadros es de 1 530 € y de 1 120 €.

41 **Un joyero tiene dos lingotes de oro, uno con un 80% de pureza y otro con un 95%. ¿Cuánto debe fundir de cada uno para obtener un lingote de 5 kg con un 86% de pureza?**

$$\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}95y = 0{,}86(x + y) \\ x + \quad y = 5 \;\rightarrow\; x = 5 - y \end{cases}$$

$0{,}8(5 - y) + 0{,}95y = 0{,}86(5 - y + y) \;\rightarrow\; 4 - 0{,}8y + 0{,}95y = 4{,}3 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 0{,}15y = 0{,}3 \;\rightarrow\; y = 2 \;\rightarrow\; x = 3$

Debe fundir 3 kg del de 80% de pureza con 2 kg del lingote que tiene un 95% de pureza.

42 **Un comerciante compra dos motocicletas por 3 000 € y las vende por 3 330 €. Calcula cuánto pagó por cada una si en la venta de la primera ganó un 25% y en la de la segunda perdió un 10%.**

$$\left.\begin{aligned} x + \quad y &= 3\,000 \\ 1{,}25x + 0{,}9y &= 3\,330 \end{aligned}\right\} \; \begin{aligned} &y = 3\,000 - x \\ &1{,}25x + 0{,}9(3\,000 - x) = 3\,330 \end{aligned}$$

$1{,}25x + 2\,700 - 0{,}9x = 3\,330 \;\rightarrow\; 0{,}35x = 630 \;\rightarrow\; x = 1\,800$

$y = 3\,000 - 1\,800 = 1\,200$

Por una pagó 1 800 €, y por la otra, 1 200 €.

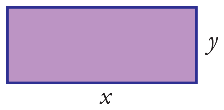
43 **Por la mezcla de 5 kg de pintura verde y 3 kg de pintura blanca he pagado 69 €. Calcula el precio de un kilogramo de pintura blanca y de pintura verde sabiendo que si mezclase un kilogramo de cada una el precio de la mezcla sería 15 €.**

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y &= 69 \\ x + \quad y &= 15 \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{r} 5x + 3y = 69 \\ -3x - 3y = -45 \\ \hline 2x \qquad = 24 \end{array} \;\rightarrow\; x = 12$$

$y = 15 - x \;\rightarrow\; y = 15 - 12 = 3$

La pintura verde cuesta 12 € el kilogramo, y la blanca, 3 €.

44 **Halla las dimensiones de un rectángulo del que conocemos su perímetro, 34 m, y su área, 60 m².**



$$\left.\begin{aligned} x + y &= 17 \\ xy &= 60 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y = 17 - x \\ &x(17 - x) = 60 \rightarrow 17x - x^2 - 60 = 0 \end{aligned}$$

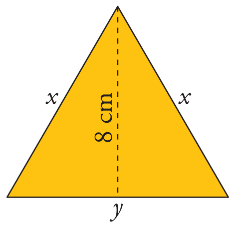
$$x^2 - 17x + 60 = 0 \rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$$

Si $x = 12 \rightarrow y = 5$

Si $x = 5 \rightarrow y = 12$

Las dimensiones del rectángulo son 5 m y 12 m.

45 **Un triángulo isósceles mide 32 cm de perímetro y la altura correspondiente al lado desigual mide 8 cm. Calcula los lados del triángulo.**



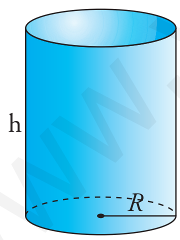
$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 32 \\ x^2 - \frac{y^2}{4} &= 64 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y = 32 - 2x \\ &4x^2 + (32 - 2x)^2 = 256 \end{aligned}$$

$4x^2 - 1\,024 + 128x - 4x^2 = 256 \rightarrow 128x = 1\,280 \rightarrow x = 10$ cm

$y = 32 - 2 \cdot 10 = 12$ cm

Los lados iguales miden 10 cm, y el lado desigual, 12 cm.

46 **El área total de un cilindro es 112π cm², y entre el radio y la altura suman 14 cm. Halla su volumen.**



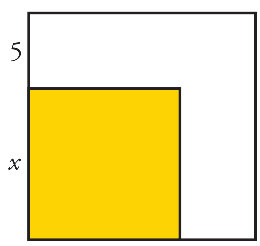
$$\left.\begin{aligned} 2\pi R\text{h} + 2\pi R^2 &= 112\pi \\ R + \text{h} &= 14 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\pi R\text{h} + \pi R^2 = 56\pi \rightarrow R\text{h} + R^2 = 56 \\ &\text{h} = 14 - R \end{aligned}$$

$R(14 - R) + R^2 = 56 \rightarrow 14R - R^2 + R^2 = 56 \rightarrow R = 4$ cm

$\text{h} = 14 - 4 = 10$ cm

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi R^2\text{h} = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 160\pi \text{ cm}^3$

47 **Si el lado de un cuadrado aumenta 5 cm, su área se multiplica por 4. ¿Cuál era el lado inicial del cuadrado?**



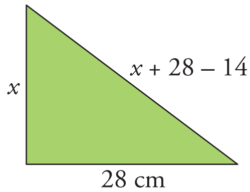
$(x + 5)^2 = 4x^2 \rightarrow x^2 + 10x + 25 - 4x^2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3x^2 - 10x - 25 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 300}}{6} = \frac{10 \pm 20}{6} = \begin{cases} 5 \\ -5/3 \text{ no vale} \end{cases}$$

La longitud del lado inicial es de 5 cm.

48 □□□ **Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 28 cm y la hipotenusa es 14 cm menor que la suma de los dos catetos. Calcula el cateto desconocido.**

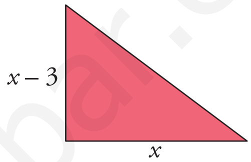


$(x+14)^2 = x^2 + 28^2 \rightarrow x^2 + 28x + 196 = x^2 + 784 \rightarrow$

$\rightarrow\ 28x = 588 \ \rightarrow\ x = 21$

Los catetos miden 21 cm y 28 cm, y la hipotenusa, 35 cm.

49 □□□ **El perímetro de un triángulo rectángulo es 36 m y un cateto mide 3 cm menos que el otro. Halla los lados del triángulo.**



$x + (x-3) + \sqrt{(x-3)^2 + x^2} = 36$

$2x + \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = 39 \ \rightarrow\ \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = 39 - 2x$

$2x^2 - 6x + 9 = 1\,521 + 4x^2 - 156x$

$2x^2 - 150x + 1\,512 = 0 \ \rightarrow\ x^2 - 75x + 756 = 0$

$x = \dfrac{75 \pm \sqrt{5\,625 - 3\,024}}{2} = \dfrac{75 \pm 51}{2} = \begin{cases} 63 \ \rightarrow \ \text{No vale.} \\ 12 \end{cases}$

Hipotenusa $= \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$

Los catetos miden 12 cm y 9 cm, y la hipotenusa, 15 cm.

50 □□□ **Una persona tarda 3 horas más que otra en hacer el mismo trabajo. Si lo hacen entre las dos, tardan 2 horas. ¿Cuánto tarda cada una por separado?**

☞ ***Si una tarda x horas en hacer todo el trabajo, en 1 hora hará 1/x de este.***

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ 2(x+3) + 2x = x(x+3) \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 2x + 6 + 2x = x^2 + 3x \ \rightarrow\ x^2 - x - 6 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \ \rightarrow \ \text{No vale.} \end{cases}$

Una tarda 3 h, y otra, 6 h.

51 □□□ **Un grifo tarda el doble de tiempo que otro en llenar un cubo de agua. Si abrimos los dos, el cubo se llena en 3 minutos. ¿Cuánto tarda cada uno por separado?**

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{3} \ \rightarrow\ 6 + 3 = 2x \ \rightarrow\ x = 4{,}5$

Uno tarda 4,5 minutos, y el otro, 9 minutos.

52 ■■□ **Un grupo de amigos alquila una furgoneta por 490 € para hacer un viaje. A última hora se apuntan dos más y así se devuelven 28 € a cada uno de los otros. ¿Cuántos fueron de excursión y cuánto pagó cada uno?**

$x \rightarrow$ número de amigos

$y \rightarrow$ cantidad que paga cada uno

$$\left.\begin{aligned} xy &= 490 \\ (x+2)(y-28) &= 490 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} xy &= 490 \\ xy - 28x + 2y - 56 &= 490 \end{aligned}\right\} \quad -28x + 2y - 56 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} xy &= 490 \\ y &= 28 + 14x \end{aligned}\right\} \quad x(28 + 14x) = 490 \rightarrow 28x + 14x^2 - 490 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 144}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} = \begin{cases} 5 \\ -7 \rightarrow \text{No vale.} \end{cases}$$

Al principio eran 5 amigos. Ahora son 7.

$490 : 7 = 70$ €

Son 7 amigos y cada uno paga 70 €.

53 ■■□ **Un comerciante quiere vender por 60 000 € los ordenadores que tiene en su almacén. Pero se le estropean dos y tiene que vender los otros 50 € más caros para recaudar lo mismo. ¿Cuántos ordenadores tenía y a qué precio los vendió?**

$x \rightarrow$ número de ordenadores

$y \rightarrow$ precio de cada ordenador

$$\left.\begin{aligned} xy &= 60\,000 \\ (x-2)(y+50) &= 60\,000 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} xy &= 60\,000 \\ xy + 50x - 2y - 100 &= 60\,000 \end{aligned}\right\} \quad 50x - 2y - 100 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} xy &= 60\,000 \\ 25x - y - 50 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x(25x - 50) - 60\,000 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 2\,400 = 0 \\ &y = 25x - 50 \end{aligned}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 9\,600}}{2} = \frac{2 \pm 98}{2} = \begin{cases} 50 \ \ \text{(Ahora serán 48 ordenadores).} \\ -48 \ \ \text{No vale.} \end{cases}$$

$60\,000 : 48 = 1\,250$

Vende 48 ordenadores a 1 250 € cada uno.

PÁGINA 78

54 ■■□ **Un transportista va a una ciudad que está a 300 km de distancia. Al volver, su velocidad media ha sido superior en 10 km/h a la velocidad de ida, y ha tardado una hora menos. Calcula las velocidades y los tiempos empleados a la ida y a la vuelta.**

$$\left.\begin{aligned} vt &= 300 \\ (v+10)(t-1) &= 300 \end{aligned}\right\} \quad vt + 10t - v - 10 = 300$$

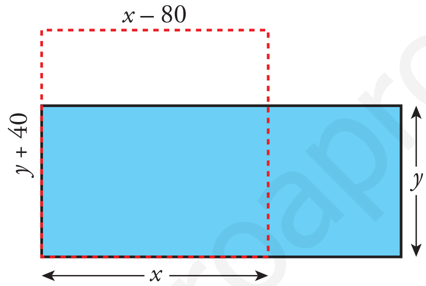
$$\left.\begin{array}{l} vt = 300 \\ 10t - v - 10 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (10t - 10)t = 300 \;\to\; 10t^2 - 10t - 300 = 0 \;\to\; t^2 - t - 30 = 0 \\ v = 10t - 10 \end{array}$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2} \begin{array}{l} \nearrow 6 \\ \searrow -5 \;\; \text{No vale.} \end{array}$$

$300 : 6 = 50;\;\; 300 : 5 = 60$

A la ida va a 50 km/h y tarda 6 horas. A la vuelta va a 60 km/h y tarda 5 horas.

55 **Tenemos una parcela rectangular. Si su base disminuye en 80 m y su altura aumenta en 40 m, se convierte en un cuadrado. Si disminuye en 60 m su base y su altura aumenta en 20 m, entonces su área disminuye en 400 m². ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?**



$$\left.\begin{array}{l} x - 80 = y + 40 \\ (x - 60)(y + 20) = xy - 400 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = y + 120 \\ xy - 60y + 20x - 1\,200 = xy - 400 \end{array}$$

$-60y + 20(y + 120) - 1\,200 = -400 \;\to\; -40y = -1\,600 \;\to\; y = 40$

$x = 40 + 120 = 160$

La parcela tiene 160 m de base y 40 m de altura.

56 **Halla las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 13 m, y su área, 60 m².**

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13^2 \\ xy = 60 \end{array}\right\} \; y = 60/x$$

$$x^2 + \frac{3\,600}{x^2} = 169 \;\to\; x^4 + 3\,600 - 169x^2 = 0$$

Cambio: $x^2 = z$

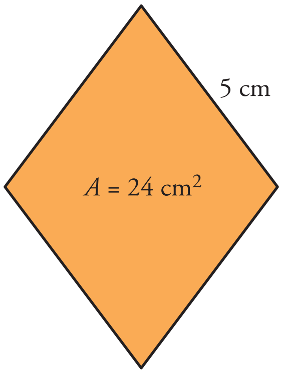
$$z^2 - 169z + 3\,600 = 0 \;\to\; z = \frac{169 \pm \sqrt{28\,561 - 14\,400}}{2} = \frac{169 \pm 119}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 144 \\ \searrow 25 \end{array}$$

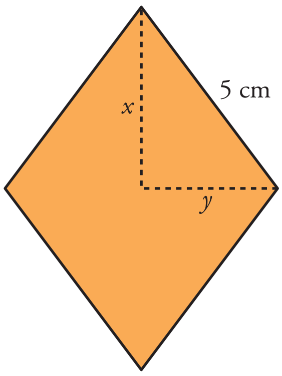
$z = 144 \;\to\; x = 12 \;\to\; y = 5$

$z = 25 \;\to\; x = 5 \;\to\; y = 12$

Las dimensiones del rectángulo son 5 m y 12 m.

57 **El lado de un rombo mide 5 cm, y su área, 24 cm². Calcula la longitud de sus diagonales.**





$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2x \cdot 2y}{2} = 24 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{12}{x} \\ x^2 + \dfrac{576}{x^2} = 25 \;\rightarrow \end{array}$$

$\rightarrow\; x^4 + 144 - 25x^2 = 0$ (cambio $x^2 = z$)

$z^2 - 25z + 144 = 0$

$$z = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \\ 9 \end{cases}$$

$z = 16 \;\rightarrow\; x = 4 \;\rightarrow\; y = 3$

$z = 9 \;\rightarrow\; x = 3 \;\rightarrow\; y = 4$

Las diagonales del rombo miden 6 cm y 8 cm.

58 **La suma de las dos cifras de un número es 8. Si al número se le añaden 18 unidades, el número resultante está formado por las mismas cifras en orden inverso. ¿Cuál es ese número?**

Número $\rightarrow$ $\boxed{x}\boxed{y}$ $\rightarrow\; y + 10x$

Número inverso $\rightarrow$ $\boxed{y}\boxed{x}$ $\rightarrow\; x + 10y$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 8 \\ y + 10x + 18 = x + 10y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 8 - y \\ -9y + 9(8 - y) + 18 = 0 \;\rightarrow\; -18y = -90 \;\rightarrow\; y = 5 \end{array}$$

$y = 5 \;\rightarrow\; x = 3$

El número es el 35.

59 □□□ **Las dos cifras de un número se diferencian en una unidad. Si dividimos dicho número entre el que resulta de invertir el orden de sus cifras, el cociente es 1,2. ¿Cuál es el número?**

Número $\rightarrow$ $\boxed{x}\boxed{y}$ $\rightarrow$ $y + 10x$

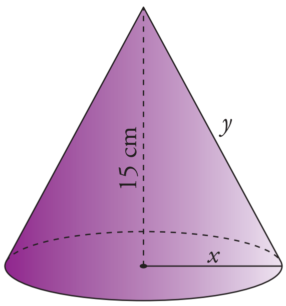
Número inverso $\rightarrow$ $x + 10y$

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ \dfrac{10x + y}{10y + x} = 1{,}2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = y + 1 \\ 10(y + 1) + y = 1{,}2(10y + y + 1) \end{array}$$

$10y + 10 + y = 12y + 1{,}2y + 1{,}2 \rightarrow 2{,}2y = 8{,}8 \rightarrow y = 4 \rightarrow x = 5$

El número buscado es el 54.

60 □□□ **Halla el radio y la generatriz de un cono que tiene 15 cm de altura y cuya área lateral es de 136π cm².**



$$\left.\begin{array}{l} y^2 - x^2 = 15^2 \\ \pi xy = 136\pi \end{array}\right\} y = \frac{136}{x}$$

$\dfrac{18\,496}{x^2} - x^2 = 225 \rightarrow 18\,496 - x^4 - 225x^2 = 0$

Cambio: $x^2 = z$

$z^2 + 225z - 18\,496 = 0$

$$z = \frac{-225 \pm \sqrt{50\,625 + 73\,984}}{2} = \frac{-225 \pm 353}{2} = \begin{cases} 64 \\ -280 \ \text{ No vale.} \end{cases}$$

$z = 64 \rightarrow x = 8 \rightarrow y = \dfrac{136}{8} = 17$

El radio del cono mide 8 cm, y la generatriz, 17 cm.

Problemas de inecuaciones

61 □□□ **En un examen de 40 preguntas te dan dos puntos por cada acierto y te restan 0,5 puntos por cada fallo. ¿Cuántas preguntas hay que contestar bien para obtener como mínimo 40 puntos, si es obligatorio responder a todas?**

Aciertos $\rightarrow$ x; fallos $\rightarrow$ $40 - x$

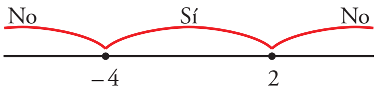
$2x - 0{,}5(40 - x) \geq 40 \rightarrow 2x - 20 + 0{,}5x \geq 40 \rightarrow 2{,}5x \geq 60 \rightarrow x \geq 24$

Hay que responder bien, como mínimo, a 24 preguntas.

62 □□□ **El producto de un número entero por otro, dos unidades mayor, es menor que 8. ¿Cuál puede ser ese número?**

$x(x-2) < 8 \;\rightarrow\; x^2 + 2x < 8 \;\rightarrow\; x^2 + 2x - 8 < 0$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$



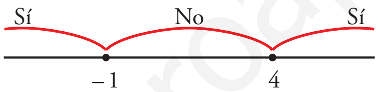
$(-4, 2)$

El número puede ser: –3, –2, –1, 0 ó 1.

63 □□□ **Si al cuadrado de un número le restamos su triple, obtenemos más de 4. ¿Qué podemos decir de ese número?**

$x^2 - 3x > 4 \;\rightarrow\; x^2 - 3x - 4 > 0$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$



El número está en $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$, es decir, puede ser menor que –1 o mayor que 4.

64 □□□ **Un grupo de amigos han reunido 50 € para ir a una discoteca. Si la entrada cuesta 6 €, les sobra dinero, pero si cuesta 7 €, les falta. ¿Cuántos amigos son?**

$$\left.\begin{array}{l} 6x < 50 \\ 7x > 50 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x < 8{,}33 \\ x > 7{,}14 \end{array}$$

El precio de la entrada está entre 7,14 € y 8,33 €. Puede ser 7,50 € u 8 €.

65 □□□ **¿Cuántos kilos de pintura de 3,5 €/kg debemos mezclar con 6 kg de otra de 5 €/kg para que el precio de la mezcla sea inferior a 4 €/kg?**

$$\frac{3{,}5x + 5 \cdot 6}{x+6} < 4 \;\rightarrow\; 3{,}5x + 30 < 4x + 24 \;\rightarrow\; 6 < 0{,}5x \;\rightarrow\; x > 12$$

Hay que mezclar más de 12 kg de la pintura de 3,5 €/kg.

66 ■■□ **Dos ciudades A y B distan 160 km. De cada una de ellas sale un coche a la misma hora. Si el que sale de A lleva una velocidad de 75 km/h, ¿qué velocidad puede llevar el otro para que tarden en encontrarse menos de una hora, respetando la limitación de 120 km/h que marca la ley?**

$t = \frac{e}{v}$. Se acercan, el uno al otro, a una velocidad $v + 75$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{160}{v+75} < 1 \\ v \le 120 \end{array}\right\} \begin{array}{r} 160 < v + 75 \;\rightarrow\; v > 85 \\ v \le 120 \end{array}$$

La velocidad debe ser mayor que 85 km/h y no superar los 120 km/h.

PÁGINA 79

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

67 ■□□ **¿Cómo se puede saber si una ecuación de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, tiene dos, una o ninguna solución, sin resolverla?**

Estudiando el signo del discriminante.

Si $b^2 - 4ac > 0$ tiene dos soluciones.

Si $b^2 - 4ac = 0$ tiene una solución.

Si $b^2 - 4ac < 0$ no tiene solución.

68 ■■□ **Determina para qué valores de k, la ecuación $9x^2 - 6x + k = 0$:**

a) Tiene solución única.

b) Tiene dos soluciones.

c) No tiene solución.

$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot k = 36 - 36k$

a) $36 - 36k = 0 \;\rightarrow\; k = 1$ (solución única)

b) $36 - 36k > 0 \;\rightarrow\; 36 > 36k \;\rightarrow\; k < 1$ (dos soluciones)

c) $36 - 36k < 0 \;\rightarrow\; 36 < 36k \;\rightarrow\; k > 1$ (no tiene solución)

69 ■□□ **Una de las soluciones de la ecuación $2x^2 + x + k = 0$ es $\frac{3}{2}$. Calcula k y la otra solución.**

$$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + k = 0 \;\rightarrow\; \frac{9}{2} + \frac{3}{2} + k = 0 \;\rightarrow\; k = -6$$

$$2x^2 + x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} = \begin{cases} 3/2 \\ -2 \end{cases}$$

La otra solución es -2, y $k = -6$.

70 □□□ **Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 2 y $\frac{1}{3}$.**

Por ejemplo:

$$(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0 \to x^2-2x-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=0 \to$$

$$\to x^2-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}=0 \to 3x^2-7x+2=0$$

71 □□□ **¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación bicuadrada? Comprueba tu respuesta resolviendo estas ecuaciones:**

a) $x^4-10x^2+9=0$

b) $x^4-4x^2=0$

c) $x^4-16=0$

d) $x^4+x^2=0$

e) $x^4+3x^2+2=0$

f) $x^4-4x^2+4=0$

Puede tener 4, 3, 2, 1 o ninguna soluciones.

a) $x^4-10x^2+9=0 \to$ Cambio $z=x^2$

$$z^2-10z+9=0 \to z=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}=\begin{cases}9\\1\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}z=9 &\to x=\pm 3\\ z=1 &\to x=\pm 1\end{aligned}\right\}\text{ Cuatro soluciones: } 1, -1, 3 \text{ y } -3$$

b) $x^4-4x^2=0 \to x^2(x^2-4)=0 \begin{cases}x=0\\ x^2=4 \to x=\pm 2\end{cases}$

Tiene tres soluciones: 0, 2 y –2

c) $x^4-16=0 \to x^4=16 \to x^2=4$ (–4 no vale) $\to x=\pm 2$

Tiene dos soluciones: 2 y –2

d) $x^4+x^2=0 \to x^2(x^2+1)=0 \begin{cases}x^2=0 \to x=0\\ x^2+1=0 \text{ No tiene solución.}\end{cases}$

Tiene una solución: $x=0$

e) $x^4+3x^2+2=0 \to$ Cambio $x^2=z$

$$z^2+3z+2=0 \to z=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}\begin{cases}-1 \text{ No vale.}\\ -2 \text{ No vale.}\end{cases}$$

No tiene ninguna solución.

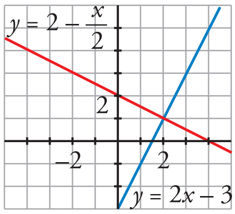
f) $x^4-4x^2+4=0 \to$ Cambio $x^2=z$

$$z^2-4z+4=0 \to z=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$z=2 \to x=\pm\sqrt{2}$$

Tiene dos soluciones: $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

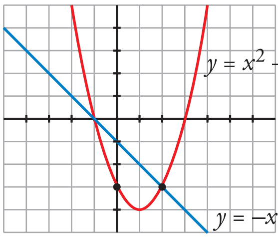
72 ■■□ **Observa la representación gráfica de las rectas** $y = 2 - \frac{x}{2}$ **e** $y = 2x - 3$.



Contesta sin hacer operaciones: ¿para qué valores de x **es** $2x - 3 \geq 2 - \frac{x}{2}$**?**

Para $x \geq 2$, es decir, en el intervalo $[2, +\infty)$.

73 ■■□ **Observa la representación de la recta** $y = -x - 1$ **y la de la parábola** $y = x^2 - 2x - 3$.



Responde sin hacer operaciones:

¿Para qué valores de x **es** $x^2 - 2x - 3 < -x - 1$**?**

Para $-1 < x < 2$, es decir, en el intervalo $(-1, 2)$.

PROFUNDIZA

74 ■■■ **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 6 \\ y + z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - z = 4 \\ 2x + y = 7 \\ x + y = 2z \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - 2z = 6 \\ y + z = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = y \\ y - 2z = 6 \\ y + z = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 6 + 2z \\ 6 + 2z + z = 3 \to 3z = -3 \to z = -1 \end{array}$

$y = 6 + 2 \cdot (-1) = 4;\ x = 4$

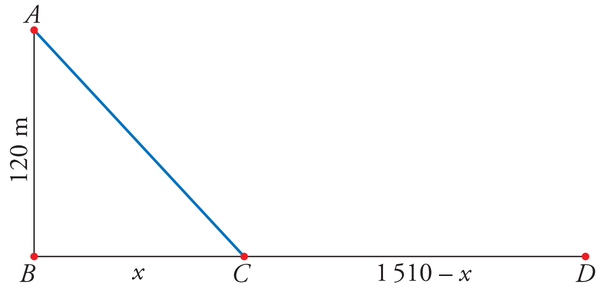
Solución: $x = 4,\ y = 4,\ z = -1$

b) $\left.\begin{array}{l} x - z = 4 \\ 2x + y = 7 \\ x + y = 2z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = z + 4 \\ 2z + 8 + y = 7 \\ z + 4 + y = 2z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -2z - 1 \\ -z + 4 - 2z - 1 = 0 \to -3z = -3 \to z = 1 \end{array}$

$y = -2z - 1 = -3;\ x = z + 4 = 5$

Solución: $x = 5,\ y = -3,\ z = 1$

75 ■■■ **Un deportista está en A, en el mar, a 120 m de la playa BD, que mide 1 510 m.**



Para ir hasta el extremo D, nada hasta C con una velocidad de 40 m/min y camina de C a D a 90 m/min. Calcula las distancias que recorrió nadando y andando, si el tiempo que empleó en total fue de 20 minutos.

$t = \frac{e}{v}$

Llamamos: tiempo andando $t_a = \frac{1\,510 - x}{90}$

tiempo nadando $t_n = \frac{\overline{AC}}{40} = \frac{\sqrt{120^2 + x^2}}{40}$

$t_a + t_n = 20$ minutos

$\frac{1\,510 - x}{90} + \frac{\sqrt{120^2 + x^2}}{40} = 20 \rightarrow 4(1\,510 - x) + 9\sqrt{120^2 + x^2} = 7\,200 \rightarrow$

$\rightarrow 9\sqrt{120^2 + x^2} = 1\,160 + 4x \rightarrow 81(14\,400 + x^2) = 1\,345\,600 + 16x^2 + 9\,280x \rightarrow$

$\rightarrow 65x^2 - 9\,280x - 179\,200 = 0 \rightarrow 13x^2 - 1\,856x - 35\,840 = 0$

$x = \frac{1\,856 \pm \sqrt{3\,444\,736 + 1\,863\,680}}{26} = \frac{1\,856 \pm 2\,304}{26} = \begin{cases} 160 \\ -224/13 \quad \text{No vale.} \end{cases}$

Andando: $1\,510 - 160 = 1\,350$ m

Nadando: $\sqrt{120^2 + 160^2} = \sqrt{14\,400 + 25\,600} = \sqrt{40\,000} = 200$ m

76 ■■□ **Un barco hace un servicio regular entre dos ciudades, A y B, situadas a la orilla de un río. Cuando va de A a B en sentido de la corriente del río tarda 3 horas y a la vuelta tarda 4 horas. ¿Cuánto tardará un objeto que flota en ir desde A hasta B?**

☞ ***Llama v a la velocidad del barco y v' a la de la corriente.***

	VELOCIDAD	DISTANCIA	TIEMPO
IDA	$v + v'$	d	3
VUELTA	$v - v'$	d	4
OBJETO QUE FLOTA	v'	d	t

$v + v' = \frac{d}{3}$

$v - v' = \frac{d}{4}$

$t = \frac{d}{v'}$

Elimina v entre las dos primeras ecuaciones y sustituye v' en la tercera. Así obtendrás t.

$$\left.\begin{array}{l} v + v' = \dfrac{d}{3} \\ v - v' = \dfrac{d}{4} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} v + v' = \dfrac{d}{3} \\ -v + v' = -\dfrac{d}{4} \\ \hline 2v' = \dfrac{d}{12} \end{array} \rightarrow v' = \dfrac{d}{24}$$

$$t = \frac{d}{v'} = \frac{d}{d/24} = 24$$

El objeto tardará 24 horas en ir desde A hasta B.

77 **Subo una colina a una velocidad de 4 km/h y pretendo que la velocidad media entre el ascenso y el descenso sea de 6 km/h. ¿A qué velocidad debo descender?**

SUBIDA: $v = \dfrac{e}{t} \rightarrow 4 = \dfrac{e}{t} \rightarrow t = \dfrac{e}{4}$

BAJADA: $v' = \dfrac{e}{t'} \rightarrow t' = \dfrac{e}{v'}$

$$V_{\text{MEDIA}} = 6 = \frac{2e}{t + t'} = \frac{2e}{\dfrac{e}{4} + \dfrac{e}{v'}} \rightarrow 6 = \frac{2e}{\dfrac{ev' + 4e}{4v'}} \rightarrow 6 = \frac{8ev'}{ev' + 4e} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3(ev' + 4e) = 4ev' \rightarrow 3ev' + 12e = 4ev' \rightarrow ev' = 12e \rightarrow v' = \frac{12e}{e} = 12$$

Debe descender a 12 km/h.

78 **Una ambulancia recibe el aviso de un accidente de tráfico y sale del hospital A hacia el punto B a una velocidad de 60 km/h. La vuelta al hospital la hace escoltada por la policía y consigue hacerla a 100 km/h. ¿Cuál fue la velocidad media del recorrido?**

IDA: $e = 60t \rightarrow t = \dfrac{e}{60}$

VUELTA: $e = 100t' \rightarrow t' = \dfrac{e}{100}$

$$V_{\text{MEDIA}} = \frac{2e}{t + t'} = \frac{2e}{\dfrac{e}{60} + \dfrac{e}{100}} = \frac{2e}{\dfrac{160e}{6\,000}} = \frac{1\,200e}{160e} = 75$$

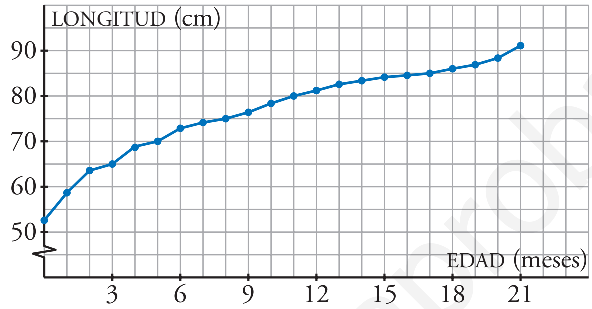
La velocidad media del recorrido fue de 75 km/h.

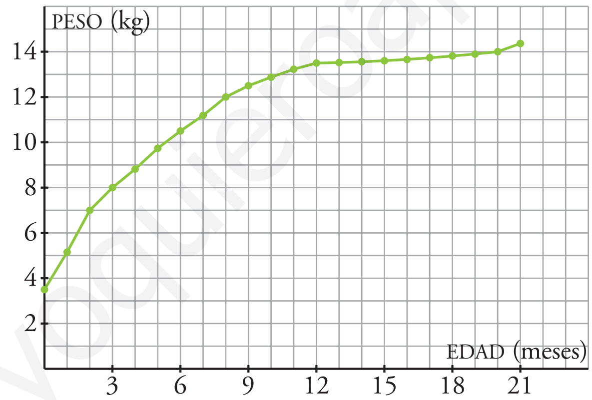
PÁGINA 96

PRACTICA

Interpretación de gráficas

1 Pepe y Susana han medido y pesado a su hijo, David, cada mes desde que nació hasta los 21 meses. Estas son las gráficas de la longitud y del peso de David en función de la edad:





a) ¿Cuánto medía y pesaba David cuando nació?

b) ¿Cuánto creció David los seis primeros meses? ¿Y de los seis a los veintiún meses? ¿En qué meses fue mayor su crecimiento?

c) ¿Cuánto aumentó de peso David los dos primeros meses? ¿Y del mes 12 al mes 18?

d) ¿Cuánto pesaba David cuando medía 80 cm? ¿Qué edad tenía entonces?

a) Al nacer, David medía 52 cm y pesaba 3,5 kg.

b) En los seis primeros meses creció, aproximadamente, 20 cm.

De los meses 6 a 21 creció, aproximadamente, 18 cm.

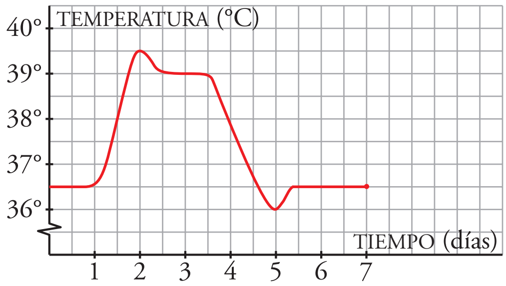
Su crecimiento fue mayor en los dos primeros meses.

c) Los dos primersos meses aumentó su peso 3,5 kg.

Del mes 12 al mes 18 aumentó su peso, aproximadamente, 400 gramos.

d) Cuando David medía 80 cm tenía 11 meses y a esa edad pesaba 13,2 kg.

2 ■□□ **Esta es la gráfica de la evolución de la temperatura de un enfermo:**



a) ¿Cuánto tiempo estuvo en observación?

b) ¿En qué día la temperatura alcanza un máximo? ¿Y un mínimo?

c) ¿En qué intervalos de tiempo crece la temperatura y en cuáles decrece?

d) ¿Qué tendencia tiene la temperatura?

e) Elabora un pequeño informe interpretando tus resultados.

a) Estuvo en observación 7 días.

b) El segundo día la temperatura alcanzó un máximo.

El quinto día la temperatura alcanzó un mínimo.

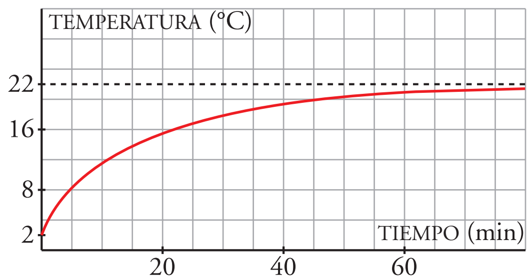
c) La temperatura crece en (1, 2) ∪ (5; 5,5).

La temperatura decrece en (2; 2,5) ∪ (3,5; 5).

d) La temperatura tiende a estabilizarse en torno a los 36,5 °C.

e) Durante el primer día de observación, la temperatura del paciente se mantiene constante en 36,5 °C. A lo largo del segundo día sube hasta alcanzar, al final del día, una temperatura máxima de 39,5 °C. El tercer día, comienza a bajar hasta situarse en 39 °C a la mitad del día. Permanece constante en esos 39 °C hasta mediodía del día siguiente (cuarto día de la observación). A partir de este momento baja paulatinamente hasta que se sitúa, al final del quinto día, en una temperatura mínima de 36 °C. En el inicio del día sexto, la temperatura sube medio grado y, a partir de ahí, se estabiliza en 36,5 °C hasta el final del séptimo día, momento en el que finaliza la observación.

3 ■□□ **Hemos sacado de la nevera un vaso con agua y lo hemos dejado sobre la mesa de la cocina. Esta gráfica muestra la temperatura del agua en grados centígrados al pasar el tiempo.**



a) ¿A qué temperatura está el interior de la nevera?

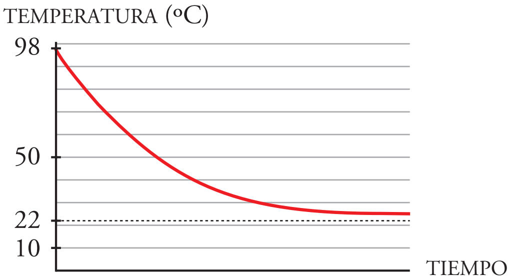
b) ¿A qué temperatura está la habitación?

c) Imagina que en ese mismo momento sacamos del microondas un vaso con agua a 98 °C y lo dejamos sobre la mesa. Dibuja una gráfica aproximada que muestre la temperatura del agua en este segundo vaso al pasar el tiempo.

a) El interior de la nevera está a 2 °C.

b) La habitación está a 22 °C.

c)



Gráficas, fórmulas y tablas

4 **Un nadador se deja caer desde un trampolín. Su entrenador ha medido el espacio que recorre cada cuatro décimas de segundo mediante un método fotográfico. Obtiene la siguiente tabla:**

TIEMPO (s)	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4
ESPACIO (m)	0	0,78	3,13	7,05	12,5	12,58	16,6

El nadador se ha detenido a los 17 metros.

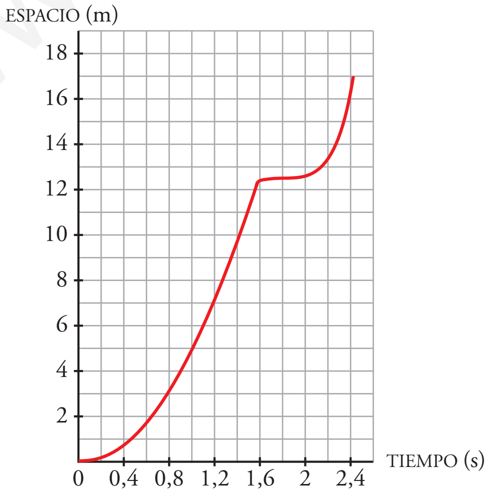
a) Representa la gráfica espacio-tiempo.

b) ¿Sabrías decir en qué momento entró en el agua?

c) ¿Qué velocidad estimas que llevaba en el momento de entrar en el agua?

d) ¿Qué altura tiene el trampolín?

a)



b) Entró en el agua a los 1,6 segundos de haber saltado.

c) Estimamos la velocidad calculando la T.V.M. en el intervalo [1,2; 1,6]:

$$\text{T.V.M. } [1{,}2;\ 1{,}6] = \frac{12{,}5 - 7{,}05}{1{,}6 - 1{,}2} = \frac{5{,}45}{0{,}4} = 13{,}625$$

Estimamos que la velocidad era de 13,625 m/s.

d) El trampolín tiene unos 12 m de altura.

PÁGINA 97

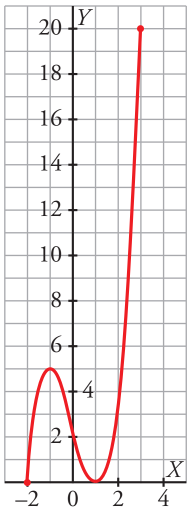
5 **Representa la función $y = x^3 - 3x + 2$ definida en [–2, 3]. Para ello, completa la tabla:**

x	–2	–1	0	1	2	3
y						

¿Cuál es el recorrido de la función?

x	–2	–1	0	1	2	3
y	0	4	2	0	4	20

Recorrido = [0, 20]



6 **Tres deportistas han estado nadando durante media hora. Su entrenador ha medido las distancias recorridas cada 5 minutos y ha obtenido los siguientes datos:**

TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA A (m)	95	235	425	650	875	1 100
DISTANCIA B (m)	250	500	750	1 000	1 250	1 500
DISTANCIA C (m)	360	710	1 020	1 300	1 490	1 600

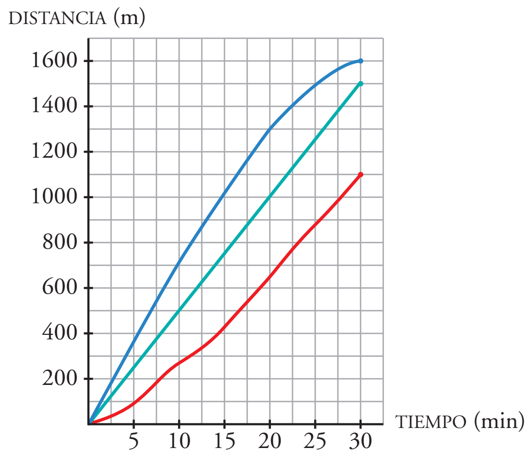
a) Dibuja la gráfica que relaciona la distancia y el tiempo de cada nadador y descríbelas.

b) ¿Ha habido algún adelantamiento durante la media hora?

c) Calcula la velocidad media de cada uno en todo el recorrido.

d) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de cada una de las tres funciones?

a)



b) No ha habido ningún adelantamiento.

c) $V_m\,(A) = \dfrac{1\,100}{30} = 36{,}67$ m/min

$V_m\,(B) = \dfrac{1\,500}{30} = 50$ m/min

$V_m\,(C) = \dfrac{1\,600}{30} = 53{,}3$ m/min

d) *Dom* A = *Dom* B = *Dom* C = [0, 30]

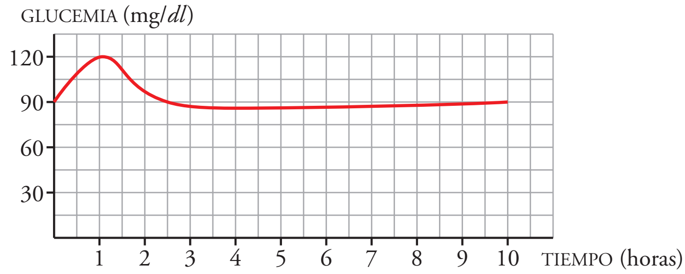
Rec A = [0, 1 100] *Rec* B = [0, 1 500] *Rec* C = [0, 1 600]

7 **Cuando una persona sana toma 50 g de glucosa en ayunas, su glucemia (% de glucosa en la sangre) se eleva, en una hora aproximadamente, desde 90 mg/*dl*, que es el nivel normal, hasta 120 mg/*dl*. Luego, en las 3 horas siguientes, disminuye hasta valores algo por debajo del nivel normal, y vuelve a la normalidad al cabo de 5 horas.**

a) Representa la curva de glucemia de una persona sana.

b) Di cuál es su máximo, su mínimo y explica su tendencia.

a)



b) El máximo es de 120 mg/*dl* al cabo de 1 h de iniciar la toma. El mínimo está ligeramente por debajo de 90 mg/*dl* y se alcanza a las 4 h de iniciar la toma.

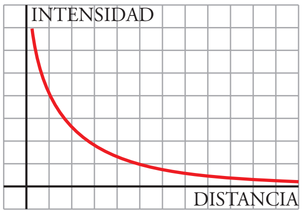
La tendencia de la función es 90 mg/*dl* (tener la glucemia en un nivel normal).

8 ■■□ **La intensidad del sonido de un foco sonoro es menor a medida que nos alejamos de él.**

a) Representa la intensidad del sonido en función de la distancia al foco sonoro.

b) ¿Cuál es la tendencia?

a) Una posible gráfica es:



b) La tendencia de la función es cero: la intensidad del sonido es prácticamente nula a medida que nos alejamos del foco.

PIENSA Y RESUELVE

9 ■□□ **Un triángulo isósceles tiene 20 cm de perímetro. Llama x al lado desigual e y a los lados iguales.**

a) Haz una tabla de valores y, a partir de ella, escribe la función que nos da el valor de y dependiendo de x.

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

c) Escribe la función que nos da el valor de x dependiendo de y.

a)

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1

$y = 10 - \dfrac{x}{2}$

b) $Dom\ y = (0, 20)$

c) $x + 2y = 20 \rightarrow x = 20 - 2y$

10 ■□□ **Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{1}{x-3}$ **b)** $y = \dfrac{-3x}{2x+10}$ **c)** $y = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$

d) $y = \dfrac{2}{-x}$ **e)** $y = \dfrac{x-1}{x^2+x-6}$ **f)** $y = \dfrac{1}{x^2-x}$

a) $x - 3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$

$Dom\ y = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $2x + 10 \neq 0 \rightarrow 2x \neq -10 \rightarrow x \neq -5$

$Dom\ y = (-\infty, -5) \cup (-5, +\infty) = \mathbb{R} - \{-5\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ para cualquier valor de x

$Dom\ y = \mathbb{R}$

d) $-x \neq 0 \;\rightarrow\; x \neq 0$

$Dom\ y = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \{0\}$

e) $x^2 + x - 6 \neq 0 \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

$Dom\ y = (-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, +\infty) = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

f) $x^2 - x \neq 0 \;\rightarrow\; x(x - 1) \neq 0 \;\rightarrow\; x \neq 0 \text{ y } x \neq 1$

$Dom\ y = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

11 ■□□ **Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x + 7}$ **b)** $y = \sqrt{1 - x}$

c) $y = \sqrt{3x - 9}$ **d)** $y = \sqrt{-x}$

e) $y = \sqrt[3]{3x - 4}$ **f)** $y = 1 - 5\sqrt{2x + 2}$

a) $x + 7 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq -7$

$Dom\ y = [-7, +\infty)$

b) $1 - x \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq 1$

$Dom\ y = (-\infty, 1]$

c) $3x - 9 \geq 0 \;\rightarrow\; 3x \geq 9 \;\rightarrow\; x \geq 3$

$Dom\ y = [3, +\infty)$

d) $-x \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq 0$

$Dom\ y = (-\infty, 0]$

e) $Dom\ y = \mathbb{R}$

f) $2x + 2 \geq 0 \;\rightarrow\; 2x \geq -2 \;\rightarrow\; x \geq -1$

$Dom\ y = [-1, +\infty)$

12 ■■□ **Resuelto en el libro de texto.**

PÁGINA 98

13 ■■□ **Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 + 6x - 7}$

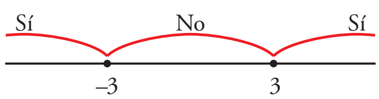
c) $y = \sqrt{x^2}$ **d)** $y = \sqrt{-x^2}$

e) $y = \sqrt{4 - x^2}$ **f)** $y = \sqrt{-x^2 - x + 2}$

a) $x^2 - 9 \geq 0$

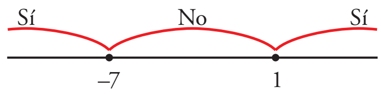
$x^2 - 9 = 0 \;\rightarrow\; (x + 3)(x - 3) = 0$

$Dom\ y = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$



b) $x^2 + 6x - 7 \geq 0 \quad x^2 + 6x - 7 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \dfrac{-6 \pm 8}{2} = \begin{cases} 1 \\ -7 \end{cases}$



$Dom\ y = (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$

c) $x^2 \geq 0$ para cualquier valor de x.

$Dom\ y = \mathbb{R}$

d) $-x^2 < 0$ para cualquier valor de $x \neq 0$.

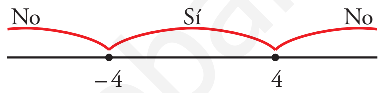
$\sqrt{-x^2}$ solo tiene sentido para $x = 0$.

$Dom\ y = \{0\}$

e) $4 - x^2 \geq 0$

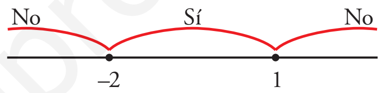
$(2 - x)(2 + x) \geq 0$

$Dom\ y = [-2, 2]$



f) $-x^2 - x + 2 \geq 0 \quad x^2 + x - 2 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

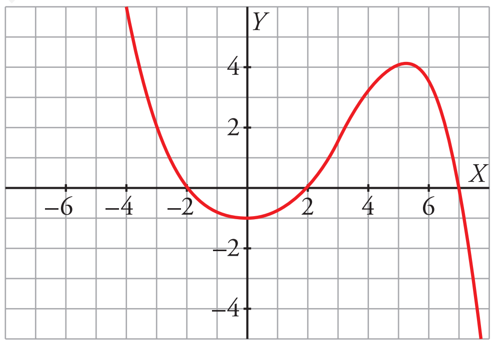


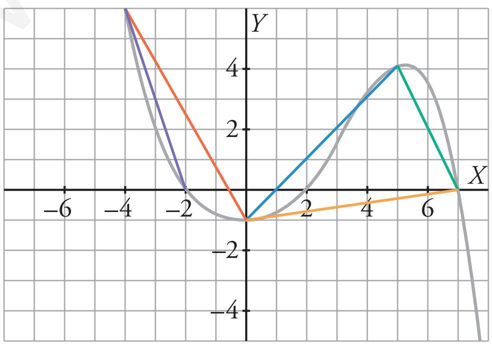
$Dom\ y = [-2, 1]$

14 **Observa esta función dada gráficamente:**

Calcula su T.V.M. en los intervalos [0, 4], [0, 5], [5, 7], [0, 7], [–4, 0] y [–4, –2].

Copia en tu cuaderno la gráfica y dibuja en cada caso el segmento del cual estás hallando la pendiente.





T.V.M. $[0, 4] = \dfrac{3 + 1}{4} = 1$

T.V.M. $[0, 5] = \dfrac{4 + 1}{5} = 1$

T.V.M. $[5, 7] = \dfrac{0 - 4}{7 - 5} = -2$

T.V.M. $[0, 7] = \dfrac{0 + 1}{7} = \dfrac{1}{7}$

T.V.M. $[-4, 0] = \dfrac{-1 - 6}{0 + 4} = \dfrac{-7}{4}$

T.V.M. $[-4, -2] = \dfrac{0 - 6}{-2 + 4} = -3$

15 □□□ **Halla la T.V.M. de la función:**

$$y = 3x^3 + 9x^2 - 3x - 9$$

en los intervalos [–2, 0], [–1, 0], [–3, –1], [0, 1].

T.V.M. $[-2, 0] = \frac{-9-9}{0+2} = -9$ T.V.M. $[-1, 0] = \frac{-9-0}{0+1} = -9$

T.V.M. $[-3, -1] = \frac{0-0}{-1+3} = 0$ T.V.M. $[0, 1] = \frac{0+9}{1} = 9$

16 □□□ **La posición de una partícula viene dada por la función:**

$$s = \frac{1}{2}(t^4 - 8t^3 + 18t^2)$$

Calcula la velocidad media de dicha partícula en los intervalos [2, 4], [1, 2], [1, 3], [2, 3].

T.V.M. $[2, 4] = \frac{16-12}{4-2} = 2$

T.V.M. $[1, 2] = \frac{12-11/2}{1} = \frac{13}{2}$

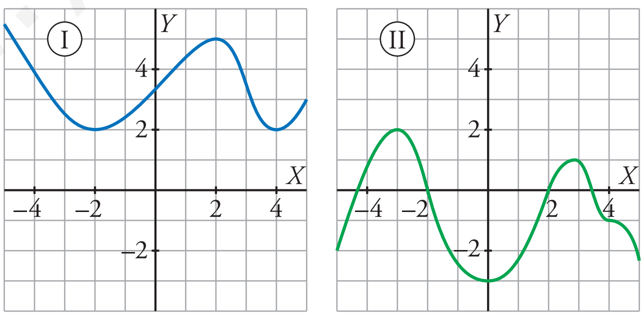
T.V.M. $[1, 3] = \frac{27/2-11/2}{2} = 4$

T.V.M. $[2, 3] = \frac{27/2-12}{1} = \frac{3}{2}$

17 □□□ **De cada una de las siguientes funciones di:**

a) En qué intervalos es creciente y en cuáles es decreciente.

b) Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos.



a) I crece en $(-2, 2) \cup (4, +\infty)$. Decrece en $(-\infty, -2) \cup (2, 4)$.

II crece en $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$. Decrece en $(-3, 0) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$.

b) I Mínimos relativos en los puntos $(-2, 2)$ y $(4, 2)$. Máximo relativo en el punto $(2, 5)$.

II Mínimo relativo en el punto $(0, -3)$. Máximos relativos en los puntos $(-3, 2)$ y $(3, 1)$.

18 **La gráfica adjunta describe el valor de una empresa desde que abrió. Responde:**

a) ¿Cuál era su valor en el momento de la apertura?

b) ¿A cuánto se redujo su valor después de 4 meses?

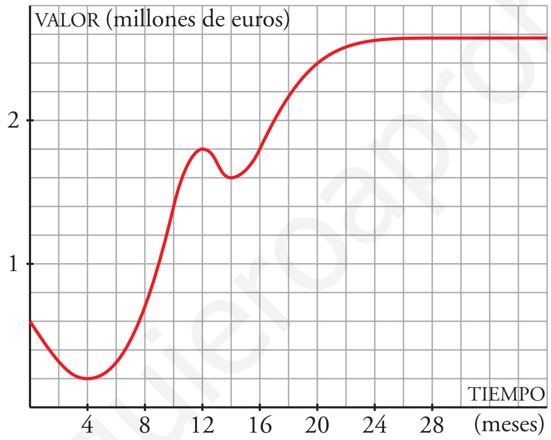
c) ¿Cuál es la T.V.M. en el intervalo [4, 12]? Da el resultado en miles de euros por mes.

d) ¿Cuál es la T.V.M. en [12, 14] y en [14, 20]?

e) Esta función tiene un máximo y dos mínimos relativos. Descríbelos.

f) ¿Cuál parece la tendencia de esta función para los próximos meses?

g) Haz una descripción global del valor de esta empresa en sus tres primeros años.



a) El valor de la empresa en el momento de la apertura era de 600 000 €.

b) Después de 4 meses su valor se redujo a 200 000 €.

c) T.V.M. [4, 12] = $\dfrac{1\,800\,000 - 200\,000}{12 - 4} = 200\,000$ €/mes

d) T.V.M. [12, 14] = $\dfrac{1\,600\,000 - 1\,800\,000}{14 - 12} = -100\,000$ €/mes

T.V.M. [14, 20] = $\dfrac{2\,400\,000 - 1\,600\,000}{20 - 14} = 133\,333$ €/mes

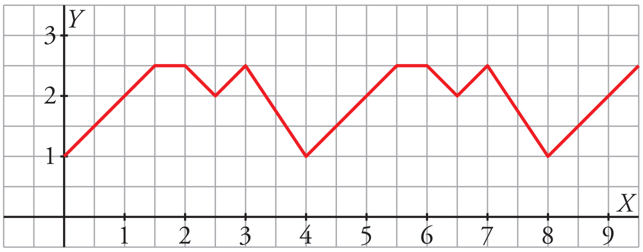
e) Máximo relativo en (12, 1 800 000)

Mínimos relativos en (4, 200 000) y (14, 1 600 000)

f) Parece que el valor de la empresa, para los próximos meses, tiende a 2 600 000 €.

g) El valor de la empresa tiene un brusco descenso en los cuatro primeros meses. A partir de aquí crece rápidamente durante 8 meses y tiene una ligera caída en los dos meses siguientes. A partir del mes 14.° crece rápidamente durante otros 6 meses y después cada vez más despacio. Su precio se aproxima a 2 600 000 €.

19 ■■□ **¿Es periódica esta función? ¿Cuál es su periodo?**

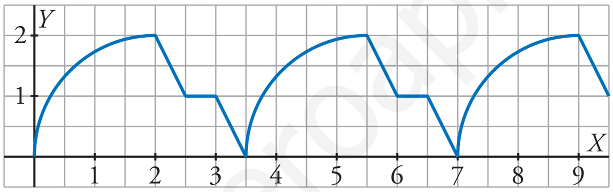


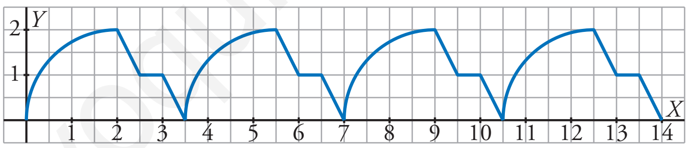
Averigua los valores de la función en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 3$, $x = 20$, $x = 23$ y $x = 42$.

La función es periódica de periodo 4.

$f(1) = 2$; $f(3) = 2,5$; $f(20) = f(0) = 1$; $f(23) = f(3) = 2,5$; $f(42) = f(2) = 2,5$

20 ■□□ **Continúa esta gráfica sabiendo que se trata de una función periódica. Di cuál es su periodo.**





Su periodo es 3,5.

PÁGINA 99

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

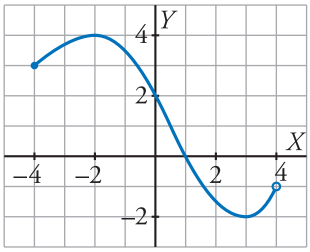
21 ■■□ **Calcula a, b y c para que los puntos $A(-12, a)$, $B(3/4, b)$ y $C(0, c)$ pertenezcan a la gráfica de la función $y = 3x^2 - x + 3$.**

$A(-12, a) \rightarrow a = 432 + 12 + 3 = 447$

$B\left(\frac{3}{4}, b\right) \rightarrow b = 3 \cdot \left(\frac{9}{16}\right) - \left(\frac{3}{4}\right) + 3 = \frac{63}{16}$

$C(0, c) \rightarrow c = 3$

22 □□□ **Observa la gráfica de la función y responde:**



a) ¿Cuáles son su dominio de definición y su recorrido?

b) ¿Tiene máximo y mínimo relativos? En caso afirmativo, ¿cuáles son?

c) ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

d) ¿En qué intervalos es la función creciente y en cuáles es decreciente?

a) Dominio = $[-4, 4)$

Recorrido = $[-2, 4]$

b) Tiene un máximo relativo en el punto $(-2, 4)$ y un mínimo relativo en $(3, -2)$.

c) Corta a los ejes en los puntos $(0, 2)$ y $(1, 0)$.

d) Crece en $(-4, -2) \cup (3, 4)$.

Decrece en $(-2, 3)$.

23 □□□ **a) Calcula la T.V.M. de la función $y = 2x - 3$ en los intervalos [0, 1], [5, 6], [1, 5], [0, 7].**

b) Observa que en todos los intervalos el valor obtenido es igual. ¿Con qué elemento característico de la recta coincide ese valor?

c) Generaliza completando la frase:

"En las funciones lineales, la T.V.M. en cualquier intervalo es igual a ....".

a) T.V.M. $[0, 1] = \frac{-1 + 3}{1} = 2$ T.V.M. $[5, 6] = \frac{9 - 7}{1} = 2$

T.V.M. $[1, 5] = \frac{7 + 1}{5 - 1} = 2$ T.V.M. $[0, 7] = \frac{11 + 3}{7} = 2$

b) Coincide con la pendiente de la recta $y = 2x - 3$.

c) En las funciones lineales, la T.V.M. en cualquier intervalo es igual a su pendiente.

24 □□□ **La expresión analítica de una función es de la forma $y = ax^3 + bx^2 + c$. Si sabemos que los puntos $A(0, -2)$, $B(1, 5)$ y $C(-2, -22)$ pertenecen a la gráfica, ¿cuáles serán los valores de a, b y c?**

$A(0, -2) \rightarrow -2 = c$

$$\left.\begin{array}{l} B(1, 5) \rightarrow 5 = a + b + c = a + b - 2 \\ C(-2, -22) \rightarrow -22 = -8a + 4b - 2 \end{array}\right\} a = 7 - b$$

$-22 = -8(7 - b) + 4b - 2 \rightarrow -22 = -56 + 8b + 4b - 2 \rightarrow 12b = 36 \rightarrow b = 3$

$a = 7 - b = 4$

Los valores buscados son: $a = 4$, $b = 3$, $c = -2$.

25 **Di, razonadamente, si las siguientes frases son verdaderas o falsas:**

a) Si una función es discontinua en un punto, dicho punto no pertenece al dominio de definición.

b) Si un punto no pertenece al dominio de definición de una función, esta no puede ser continua en ese punto.

c) Una función periódica podemos asegurar que es continua.

d) La pendiente de una recta es la T.V.M. de cualquier intervalo de esta.

a) Falsa. Una función discontinua por saltos puede estar definida en esos puntos (saltos) de discontinuidad.

b) Verdadera. Para que una función sea continua en un punto es necesario que esté definida en él.

c) Falsa. No es necesario que una función sea continua para que sea periódica.

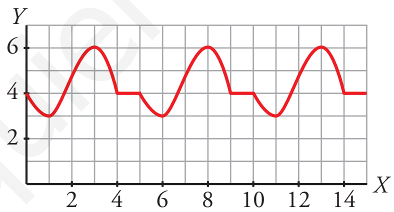
d) Verdadera.

Supongamos que la recta tiene una expresión $y = mx + n$. Su pendiente es m. Vamos a calcular la T.V.M. en un intervalo cualquiera $[a, b]$.

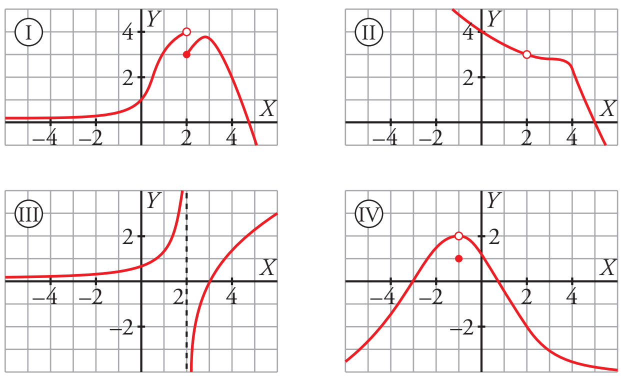
$$\text{T.V.M. } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(mb + n) - (ma + n)}{b - a} = \frac{mb - ma}{b - a} = \frac{m(b - a)}{b - a} = m$$

26 **Dibuja una función periódica de periodo 5 con un máximo relativo en $x = 3$ y con un mínimo relativo en $x = 6$.**

Por ejemplo:



27 **Las siguientes gráficas corresponden a funciones discontinuas. Relaciona cada función con el motivo de su discontinuidad.**



a) Presenta un salto en un punto.

b) Tiene un punto desplazado.

c) Tiene ramas infinitas.

d) Le falta un punto.

a) ↔ I

b) ↔ IV

c) ↔ III

d) ↔ II

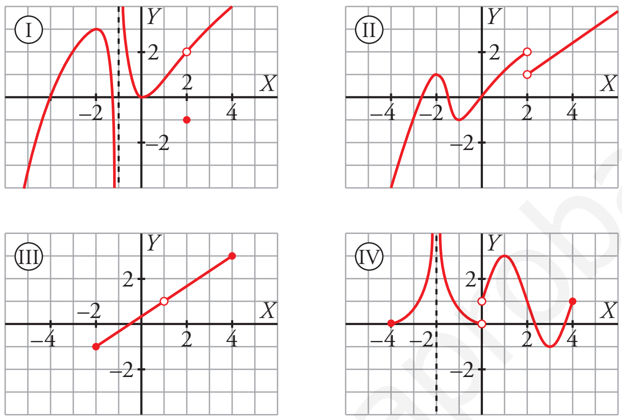
28 **Las cuatro gráficas siguientes corresponden a funciones discontinuas. Para cada una de ellas, di:**

a) Cuáles son los puntos de discontinuidad. Explica la razón de la discontinuidad en cada punto.

b) Cuál es su dominio de definición.

c) Indica si tiene máximos y mínimos relativos y di cuáles son.

d) En qué intervalos es creciente y en cuáles es decreciente.



a) I $\begin{cases} \text{Discontinua en } x = -1. \text{ Tiene ramas infinitas.} \\ \text{Discontinua en } x = 2. \text{ Tiene un punto desplazado.} \end{cases}$

II Discontinua en $x = 2$. No está definida en este punto y, además, en él da un salto.

III $\begin{cases} \text{Discontinua porque no está definida en } (-\infty, -2) \cup (4, +\infty). \\ \text{Discontinua en } x = 1 \text{ porque no está definida.} \end{cases}$

IV $\begin{cases} \text{Discontinua en } (-\infty, -4) \cup (4, +\infty). \text{ No está definida.} \\ \text{Discontinua en } x = -2. \text{ Tiene ramas infinitas.} \\ \text{Discontinua en } x = 0. \text{ No está definida y presenta un salto.} \end{cases}$

b) *Dom* (I) = $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Dom (II) = $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Dom (III) = $[-2, 1) \cup (1, 4]$

Dom (IV) = $[-4, 2) \cup (2, 0) \cup (0, 4]$

c) I Máximo relativo en $(-2, 3)$. Mínimo relativo en $(0, 0)$.

II Máximo relativo en $(-2, 1)$. Mínimo relativo en $(-1, -1)$.

III No tiene ni máximos ni mínimos relativos.

IV Máximo relativo en $(1, 3)$. Mínimo relativo en $(3, -1)$.

d) I Crece en $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$. Decrece en $(-2, -1) \cup (1, 0)$.

II Crece en $(-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$. Decrece en $(-2, -1)$.

III Crece en $(-2, 1) \cup (1, 4)$. No decrece.

IV Crece en $(-4, -2) \cup (0, 1) \cup (3, 4)$. Decrece en $(-2, 0) \cup (1, 3)$.

5 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 116

PRACTICA

Funciones lineales

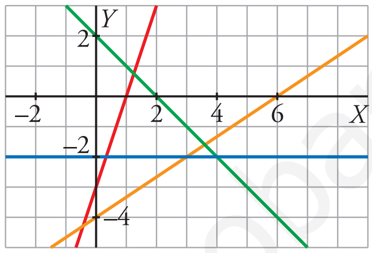
1 **Asocia a cada función su ecuación. Di, en cada caso, cuál es su pendiente.**

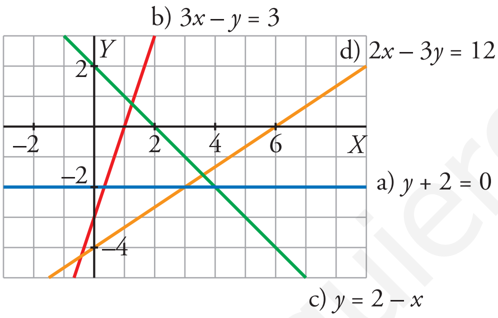
a) $y + 2 = 0$

b) $3x - y = 3$

c) $y = 2 - x$

d) $2x - 3y = 12$





Pendientes:

a) $m = 0$

b) $m = 3$

c) $m = -1$

d) $m = 2/3$

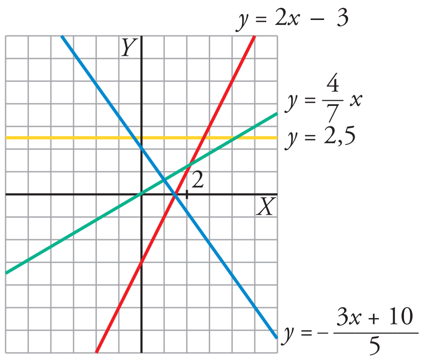
2 **Representa las siguientes funciones lineales:**

a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{4}{7}x$

c) $y = \frac{-3x + 10}{5}$

d) $y = 2{,}5$



3 **Resuelto en el libro de texto.**

5 Soluciones a los ejercicios y problemas

4 **Halla, en cada caso, la ecuación de las rectas que pasan por los puntos *A* y *B*.**

a) $A(3, 0)$, $B(5, 0)$ **b)** $A(-2, -4)$, $B(2, -3)$

c) $A(0, -3)$, $B(3, 0)$ **d)** $A(0, -5)$, $B(-3, 1)$

a) $y = 0$

b) $m = \dfrac{-3+4}{2+2} = \dfrac{1}{4}$; $y + 4 = \dfrac{1}{4}(x+2) \rightarrow y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{2}$

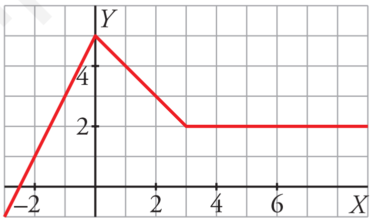
c) $m = \dfrac{3}{3} = 1$; $y + 3 = x \rightarrow y = x - 3$

d) $m = \dfrac{1+5}{-3} = -2$; $y + 5 = -2x \rightarrow y = -2x - 5$

5 **¿A cuál de las siguientes funciones corresponde la gráfica dibujada?**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } -3 \le x \le -1 \\ x + 5 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 2x & \text{si } 3 \le x \le 8 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } -3 \le x < 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 2 & \text{si } 3 \le x \le 8 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -3 < x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{si } 3 < x < 8 \end{cases}$$



Una de las otras dos funciones describe la pendiente de esta gráfica en cada punto. ¿Cuál es?

La gráfica corresponde a la función $g(x)$.

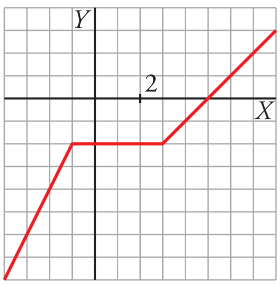
La función que describe la pendiente de la gráfica en cada punto es $h(x)$.

6 **Representa las siguientes funciones definidas a trozos:**

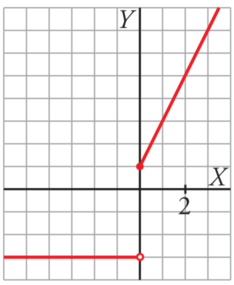
$$\text{a) } y = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le -1 \\ -2 & \text{si } -1 < x \le 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases} \qquad \text{b) } y = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

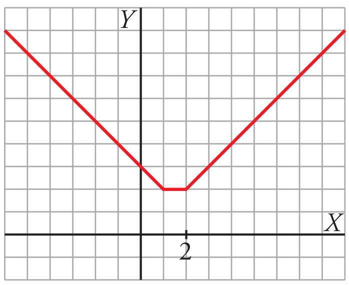
a)



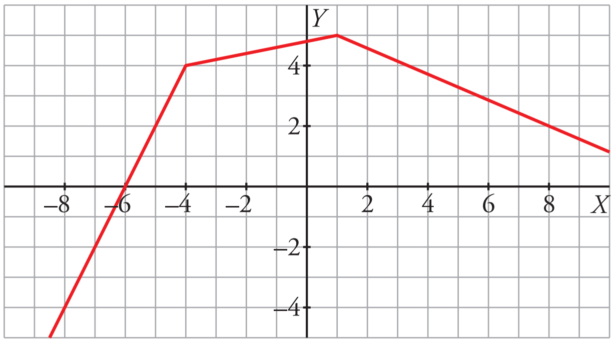
b)



c)



7 □□□ **Escribe la ecuación de la función que corresponde a esta gráfica:**



- El primer tramo pasa por (–6, 0) y (–4, 4):

$$m = \frac{4}{-4+6} = 2;\; y = 2(x+6) = 2x + 12$$

- El segundo tramo pasa por (–4, 4) y (1, 5):

$$m = \frac{5-4}{1+4} = \frac{1}{5};\; y - 4 = \frac{1}{5}(x+4) \;\rightarrow\; y = \frac{1}{5}x + \frac{24}{5}$$

- El tercer tramo pasa por (1, 5) y (8, 2):

$$m = \frac{2-5}{8-1} = -\frac{3}{7};\; y - 5 = -\frac{3}{7}(x-1) \;\rightarrow\; y = -\frac{3}{7}x + \frac{38}{7}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 12 & \text{si } x < -4 \\ \frac{1}{5}x + \frac{24}{5} & \text{si } -4 \le x \le 1 \\ -\frac{3}{7}x + \frac{38}{7} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

PÁGINA 117

Funciones cuadráticas

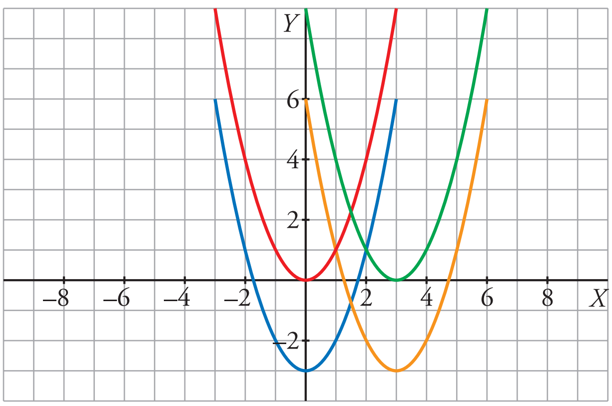
8 □□□ **Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:**

a) $y = x^2$

b) $y = (x-3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$



a) $y = x^2 \leftrightarrow$ roja

b) $y = (x-3)^2 \leftrightarrow$ verde

c) $y = x^2 - 3 \leftrightarrow$ azul

d) $y = x^2 - 6x + 6 \leftrightarrow$ amarilla

9 **Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes.**

a) $y = (x + 4)^2$

b) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$

c) $y = -3x^2 + 6x - 3$

d) $y = -x^2 + 5$

a) Vértice: $(-4, 0)$

Cortes con los ejes: $(-4, 0)$

Otros puntos$(-5, 1)$, $(-6, 4)$, $(-3, 1)$, $(-2, 4)$

b) Vértice: $(-3, -3)$

Cortes con los ejes: $(-6, 0)$, $(0, 0)$

Otros puntos: $\left(-5, -\frac{5}{3}\right)$, $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$

c) Vértice: $(1, 0)$

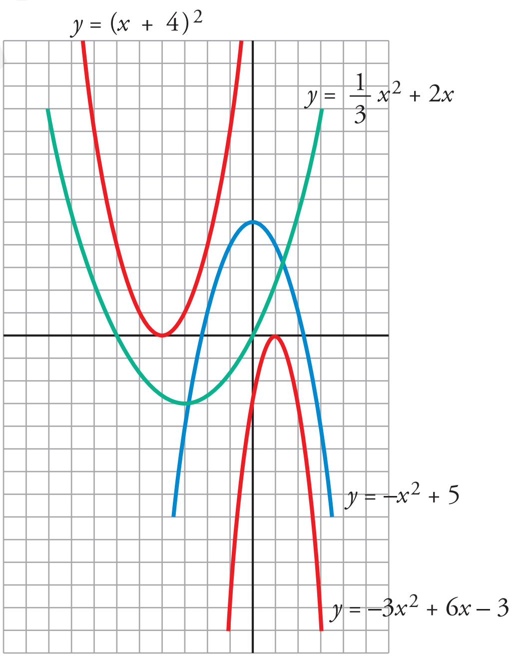
Cortes con los ejes: $(1, 0)$

Otros puntos: $(0, -3)$, $(2, -3)$, $(-1, -12)$, $(3, -12)$

d) Vértice: $(0, 5)$

Cortes con los ejes: $(0, 5)$, $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$

Otros puntos: $(-1, 4)$, $(-2, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$



10 **Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o un mínimo.**

a) $y = x^2 - 5$ **b)** $y = 3 - x^2$ **c)** $y = -2x^2 - 4x + 3$

d) $y = 3x^2 - 6x$ **e)** $y = 5x^2 + 20x + 20$ **f)** $y = -\frac{5}{2}x^2 + 5x - \frac{3}{2}$

a) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \\ x = 0 \rightarrow y = -5 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (0, –5). Es un mínimo.

b) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0 \\ x = 0 \rightarrow y = 3 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (0, 3). Es un máximo.

c) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-4} = -1 \\ x = -1 \rightarrow y = 5 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (–1, 5). Es un máximo.

d) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1 \\ x = 1 \rightarrow y = -3 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (1, –3). Es un mínimo.

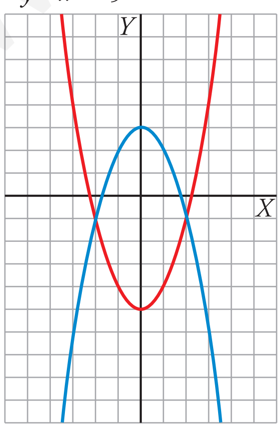
e) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{10} = -2 \\ x = -2 \rightarrow y = 0 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (–2, 0). Es un mínimo.

f) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{-5} = 1 \\ x = 1 \rightarrow y = 1 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (1, 1). Es un máximo

11 **Representa las parábolas del ejercicio anterior.**

a) y b)

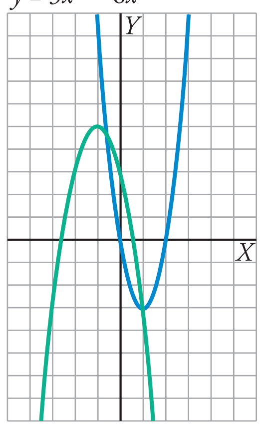
$y = x^2 - 5$



$y = 3 - x^2$

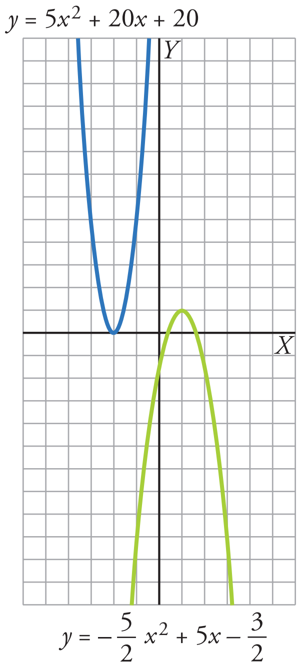
c) y d)

$y = 3x^2 - 6x$



$y = -2x^2 - 4x + 3$

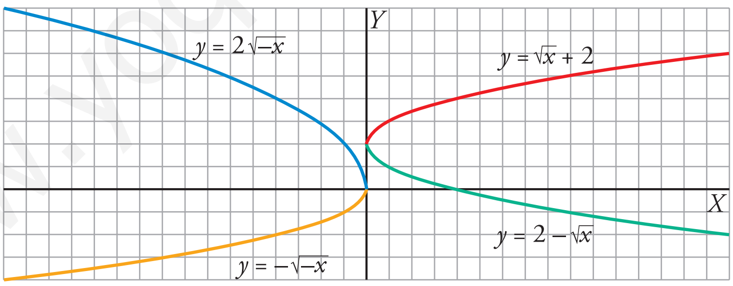
e) y f)



Otras funciones

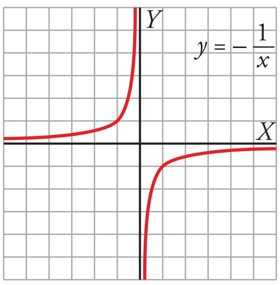
12 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

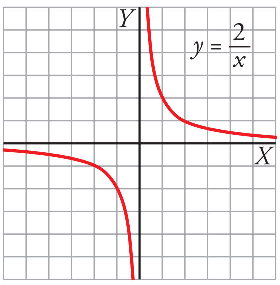
a) $y = \sqrt{x} + 2$ **b)** $y = 2 - \sqrt{x}$ **c)** $y = 2\sqrt{-x}$ **d)** $y = -\sqrt{-x}$

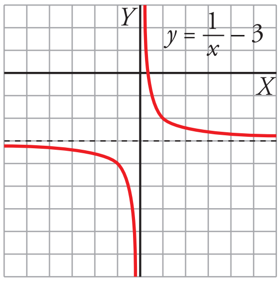


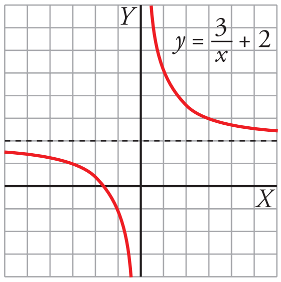
13 **Dibuja la gráfica de las funciones siguientes:**

a) $y = -\dfrac{1}{x}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x} - 3$ **d)** $y = \dfrac{3}{x} + 2$









14 □□□ **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores. (Ayúdate de la calculadora).**

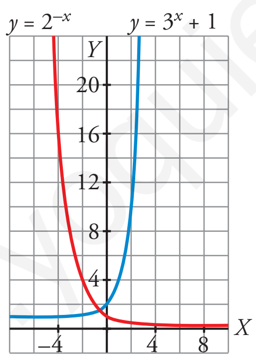
a) $y = 2^{-x}$ **b)** $y = 3^x + 1$ **c)** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$ **d)** $y = 0{,}75^{-x}$

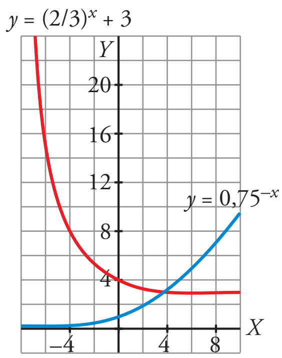
x	2^{-x}
–4	16
–2	4
0	1
2	0,25
4	0,06
6	0,16

x	$3^x + 1$
–4	1,01
–2	1,1
0	1
1	4
2	10
3	28

x	$(2/3)^x + 3$
–4	8,06
–2	5,25
0	4
2	3,4
4	3,2
6	3,1

x	$0{,}75^{-x}$
–4	0,32
–2	0,56
0	1
2	1,8
4	3,2
6	5,6



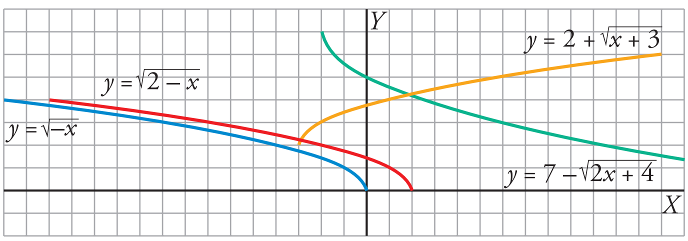


15 □□□ **Estudia el dominio de definición de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \sqrt{2 - x}$ **b)** $y = 7 - \sqrt{2x + 4}$ **c)** $y = \sqrt{-x}$ **d)** $y = 2 + \sqrt{x + 3}$

a) Dominio = $(-\infty, 2]$ b) Dominio = $[-2, +\infty)$

c) Dominio = $(-\infty, 0]$ d) Dominio = $[-3, +\infty)$

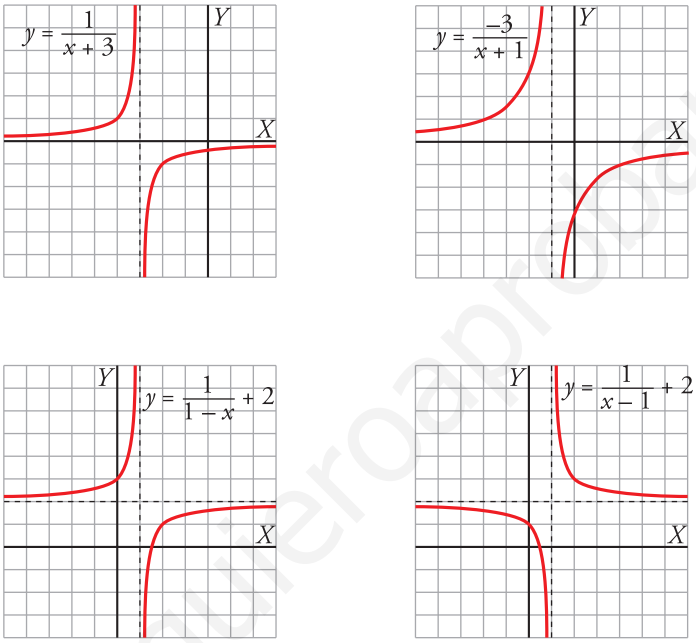


16 □□□ **Resuelto en el libro de texto.**

17 □□□ **Di cuál es el dominio de definición de las siguientes funciones y cuáles son sus asíntotas. Represéntalas gráficamente.**

a) $y = \dfrac{1}{x+3}$ **b)** $y = -\dfrac{3}{x+1}$

c) $y = \dfrac{1}{1-x} + 2$ **d)** $y = \dfrac{1}{x-1} + 2$



a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-3\}$
Asíntotas: $x = -3$, $y = 0$

b) Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$
Asíntotas: $x = -1$, $y = 0$

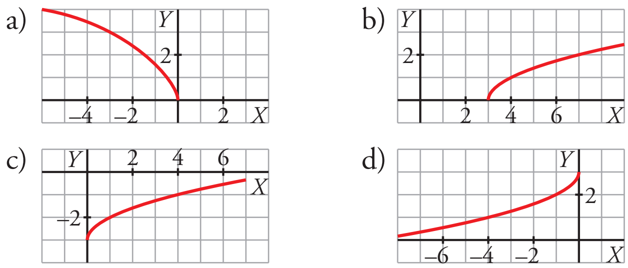
c) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$
Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$

d) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$
Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$

PÁGINA 118

18 □□□ **Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponde:**

I) $y = \sqrt{x-3}$ **II)** $y = \sqrt{x} - 3$ **III)** $y = 3 - \sqrt{-x}$ **IV)** $y = \sqrt{-3x}$

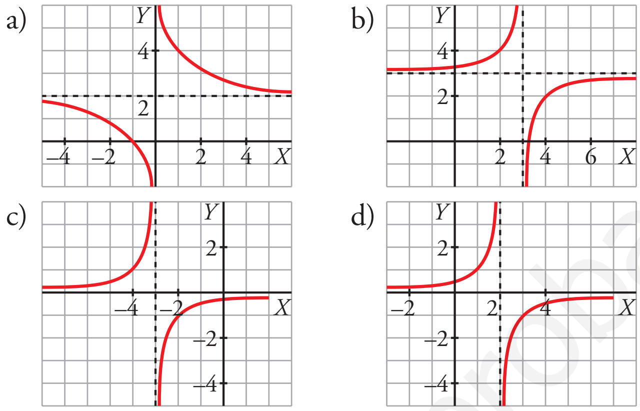


I ↔ b)
II ↔ c)
III ↔ d)
IV ↔ a)

19 Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:

I) $y = \dfrac{1}{2 - x}$ II) $y = 3 - \dfrac{1}{x - 3}$

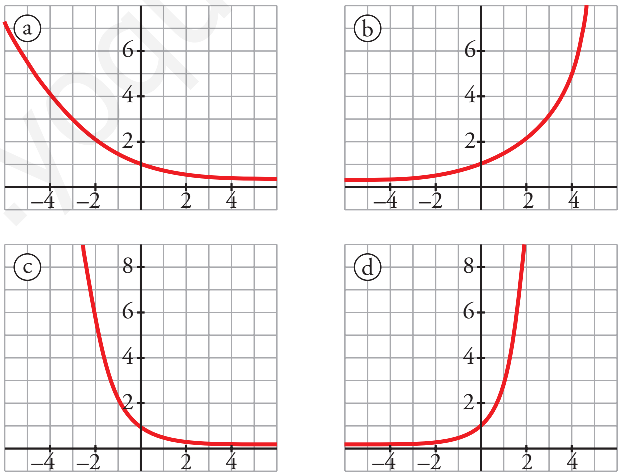
III) $y = 2 + \dfrac{2}{x}$ IV) $y = -\dfrac{1}{x + 3}$



I ↔ d) II ↔ b) III ↔ a) IV ↔ c)

20 Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:

I) $y = 3^x$ II) $y = 1{,}5^x$ III) $y = 0{,}4^x$ IV) $y = 0{,}7^x$



Di, de cada una de ellas, si es creciente o decreciente.

I ↔ d) Creciente

II ↔ b) Creciente

III ↔ c) Decreciente

IV ↔ a) Decreciente

21 **a) Representa las funciones $y = 3^x$ e $y = log_3\, x$.**

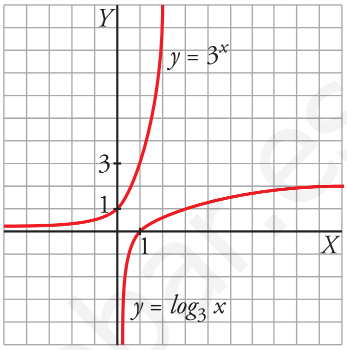
b) Comprueba si pertenecen a la gráfica de $y = log_3\, x$ los puntos siguientes:

$$(243, 5) \qquad \left(\frac{1}{27}, -3\right) \qquad (\sqrt{3}\,;\, 0{,}5) \qquad (-3, -1)$$

a) Una es la inversa de la otra.

x	–2	–1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$log_3\, x$	–2	–1	0	1	2



b) Se sabe que $y = log_3\, x \Leftrightarrow 3^y = x$. Luego:

$(243{,}5) \rightarrow 3^5 = 243 \rightarrow log_3\, 243 = 5 \rightarrow$ Sí pertenece.

$\left(\frac{1}{27}, -3\right) \rightarrow 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \rightarrow log_3 \frac{1}{27} = -3 \rightarrow$ Sí pertenece.

$(\sqrt{3}; 0{,}5) \rightarrow 3^{0{,}5} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \rightarrow log_3 \sqrt{3} = 0{,}5 \rightarrow$ Sí pertenece.

$(-3, -1) \rightarrow 3^{-1} = \frac{1}{3} \neq -3 \rightarrow (-3, -1)$ no pertenece a la gráfica de $y = log_3\, x$.

22 **Aplica la definición de logaritmo para hallar, sin calculadora:**

a) $log_2\, 64$ **b)** $log_2\, 16$

c) $log_2 \frac{1}{4}$ **d)** $log_2 \sqrt{2}$

e) $log_3\, 81$ **f)** $log_3 \frac{1}{3}$

g) $log_3 \sqrt{3}$ **h)** $log_4\, 16$

a) $log_2\, 64 = x \rightarrow 2^x = 64 = 2^6 \rightarrow x = 6$

b) $log_2\, 16 = x \rightarrow 2^x = 16 = 2^4 \rightarrow x = 4$

c) $log_2 \frac{1}{4} = x \rightarrow 2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2} \rightarrow x = -2$

d) $log_2 \sqrt{2} = x \rightarrow 2^x = \sqrt{2} = 2^{1/2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

e) $log_3\, 81 = x \rightarrow 3^x = 81 = 3^4 \rightarrow x = 4$

f) $log_3 \frac{1}{3} = x \rightarrow 3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow x = -1$

g) $log_3 \sqrt{3} = x \rightarrow 3^x = \sqrt{3} = 3^{1/2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

h) $log_4\, 16 = x \rightarrow 4^x = 16 = 4^2 \rightarrow x = 2$

23 **Calcula la base de los siguientes logaritmos:**

a) $\log_b 10\,000 = 2$ **b)** $\log_b 125 = 3$

c) $\log_b 4 = -1$ **d)** $\log_b 3 = \frac{1}{2}$

a) $\log_b 10\,000 = 2 \rightarrow b^2 = 10\,000 \rightarrow b = 100$

b) $\log_b 125 = 3 \rightarrow b^3 = 125 \rightarrow b = 5$

c) $\log_b 4 = -1 \rightarrow b^{-1} = 4 \rightarrow b = \frac{1}{4}$

d) $\log_b 3 = \frac{1}{2} \rightarrow b^{1/2} = 3 \rightarrow b = 9$

PIENSA Y RESUELVE

24 **Resuelto en el libro de texto.**

PÁGINA 119

25 **Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - (15/2) \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$

Analíticamente

Vemos los puntos de corte:

$2x^2 - 5x - 6 = 3x + 4 \rightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \begin{cases} x = 5 \rightarrow y = 19 \\ x = -1 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Hay dos puntos de corte: (5, 19), (–1, 1).

Gráficamente

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = 2x^2 - 5x - 6$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $2x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow$

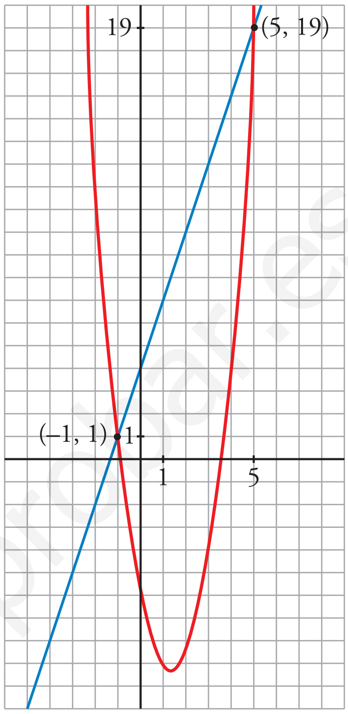
  $\rightarrow \; x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 48}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{73}}{4} \rightarrow$

  $x = \left(\dfrac{5 + \sqrt{73}}{4}, 0\right) \approx (3{,}38; 0)$

  $x = \left(\dfrac{5 - \sqrt{73}}{4}, 0\right) \approx (-0{,}88; 0)$

  Eje Y: $y = -6 \rightarrow (0, -6)$

  Vértice: $\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{73}{8}\right)$



- $y = 3x + 4$

  Hacemos una tabla de valores:

x	–1	5
y	1	19

b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

Analíticamente

Puntos de corte entre ambas:

$x^2 - 2x + 1 = -2x + 2 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow y = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$

Los puntos de corte son: (1, 0), (–1, 4).

Gráficamente

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = x^2 - 2x + 1$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1 \rightarrow$ raíz doble: (1, 0)

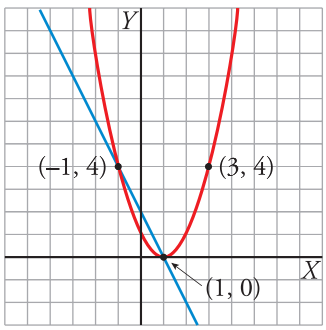
  Eje Y: $y = 1 \rightarrow (0, 1)$

  Vértice: (1, 0)

- $y = -2x + 2$

  Hacemos una tabla de valores:

x	1	–1
y	0	4



c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

Analíticamente

$2x^2 - 8x - 3 = x^2 - 2x - 3 \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x - 6) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{array} \right.$

Si $x_1 = 0 \rightarrow y_1 = -3$

Si $x_2 = 6 \rightarrow y_2 = 6^2 - 2 \cdot 6 - 3 = 21$

Solución: $x_1 = 0,\ y_1 = -3;\ x_2 = 6,\ y_2 = 21$

Gráficamente

Representamos cada una de las parábolas.

- $y = 2x^2 - 8x - 3$

  Cortes con los ejes:

  Eje X: $y = 0 \rightarrow 2x^2 - 8x - 3 = 0$

  $$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-3) \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{88}}{4} =$$

  $$= \frac{4 \pm \sqrt{22}}{2} \left\langle \begin{array}{l} (4{,}34;\ 0) \\ (-0{,}34;\ 0) \end{array} \right.$$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

  Vértice: $(2, -11)$

- $y = x^2 - 2x - 3$

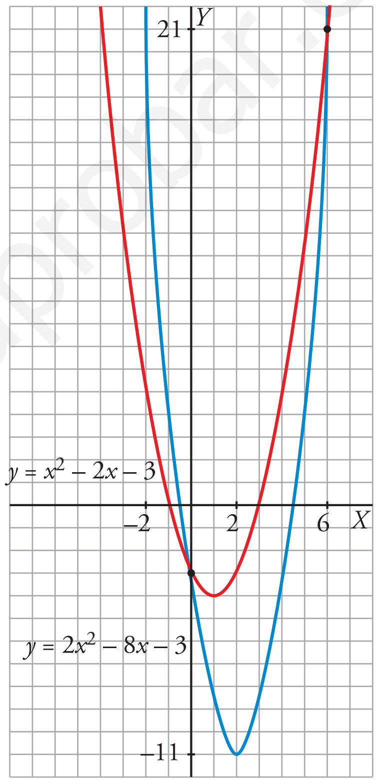
  Cortes con los ejes:

  Eje X: $y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

  $$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \left\langle \begin{array}{l} (3, 0) \\ (-1, 0) \end{array} \right.$$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

  Vértice: $(1, -4)$



d) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - (15/2) \end{cases}$

Analíticamente

$-x^2 + 5x = x^2 + 3x - 15/2 \rightarrow 2x^2 - 2x - 15/2 = 0 \rightarrow 4x^2 - 4x - 15 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{4 \pm 16}{8} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 5/2 \\ x_2 = -3/2 \end{array} \right.$$

Si $x_1 = \frac{5}{2} \rightarrow y_1 = \frac{25}{4}$

Si $x_2 = -\frac{3}{2} \rightarrow y_2 = -\frac{39}{4}$

Gráficamente

Representamos cada una de las parábolas.

• $y = -x^2 + 5x$

Cortes con los ejes:

Eje X: $y = 0 \;\rightarrow\; -x^2 + 5x = 0 \;\rightarrow\; x(-x + 5) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \;\rightarrow\; (0, 0) \\ x = 5 \;\rightarrow\; (5, 0) \end{array} \right.$

Eje Y: $x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$

Vértice: $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$

• $y = x^2 + 3x - 15/2$

Cortes con los ejes:

Eje X: $y = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 + 6x - 15 = 0$

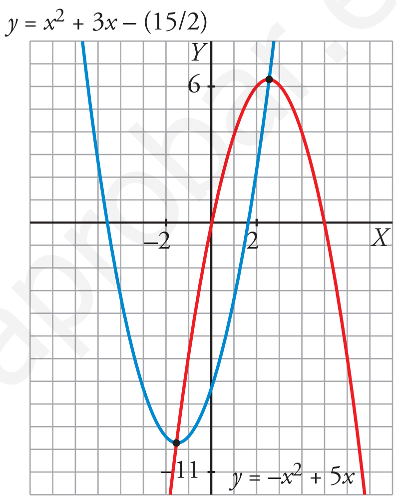
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 120}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{156}}{4} \;\rightarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} x_1 = 1{,}625 \;\rightarrow\; (1{,}625;\, 0) \\ x_2 = -4{,}625 \;\rightarrow\; (-4{,}625;\, 0) \end{array} \right.$$

Eje Y: $x = 0 \;\rightarrow\; y = -15/2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; (0, -15/2)$

Vértice: $\left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{-39}{4}\right)$



26 Comprueba analítica y gráficamente que estos dos sistemas no tienen solución:

a) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{x}{2} - 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x - 1} \\ y = -x + 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{x}{2} - 3 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Resolvemos el sistema:

$$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = \frac{x}{2} - 3 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 3 = x - 6 \;\rightarrow\; x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \;\rightarrow\; \text{No hay punto en común} \;\rightarrow\; \text{No hay solución.}$$

RESOLUCIÓN GRÁFICA

• Representamos $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

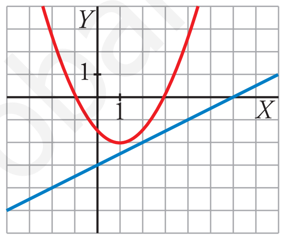
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \rightarrow (3, 0) \\ -1 \rightarrow (-1, 0) \end{cases}$$

Eje Y: $y = -\frac{3}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{3}{2}\right)$

Vértice: $(1, -2)$

• Representamos $y = \frac{x}{2} - 3$

x	0	2
y	–3	–2



b) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x - 1} \\ y = -x + 1 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Resolvemos el sistema:

$$\frac{1}{x - 1} = -x + 1 \rightarrow 1 = (-x + 1)(x - 1) \rightarrow 1 = -(x - 1)^2 \rightarrow 1 = -x^2 + 2x - 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

No hay puntos en común.

No hay solución.

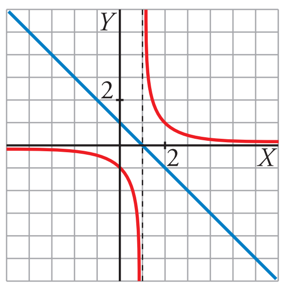
RESOLUCIÓN GRÁFICA

• Representamos $y = \frac{1}{x - 1}$

x	0	–1	2	3
y	–1	–1/2	1	1/2

• Representamos $y = -x + 1$

x	0	2
y	1	–1



27 **Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x+2} \\ y = 3x + 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = x - 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x+2} \\ y = 3x + 2 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Resolvemos el sistema:

$$\frac{2}{x+2} = 3x + 2 \rightarrow 3x^2 + 8x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 24}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{40}}{6} \begin{cases} x_1 \approx -0{,}28 \\ x_2 \approx -2{,}39 \end{cases}$$

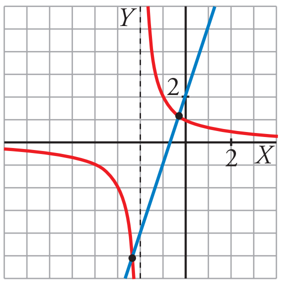
$x_1 \approx -0{,}28 \rightarrow y_1 \approx 1{,}16$

$x_2 \approx -2{,}39 \rightarrow y_2 \approx -5{,}17$

RESOLUCIÓN GRÁFICA

- Representamos la función $y = \dfrac{2}{x+2}$ que tiene una asíntota en $x = -2$ y otra en $y = 0$:

x	4	–1	0	1
y	–1	2	1	2/3



- Representamos la recta $y = 3x + 2$

x	–2	0
y	–4	2

b) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = x - 5 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Puntos de corte:

$$\sqrt{x+1} = x - 5 \rightarrow x + 1 = (x-5)^2 \rightarrow x + 1 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} =$$

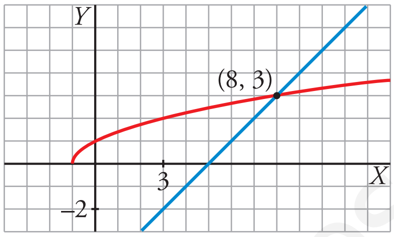
$$= \frac{11 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 8 \rightarrow y = 3 \\ x = 3 \rightarrow y = -2 \rightarrow \text{no pertenece a } y = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

Solución: (8, 3)

RESOLUCIÓN GRÁFICA

- Para representar $y = \sqrt{x + 1}$ damos valores:

x	–1	3	0	8
y	0	2	1	3



- Para representar $y = x - 5$, hacemos la tabla de valores:

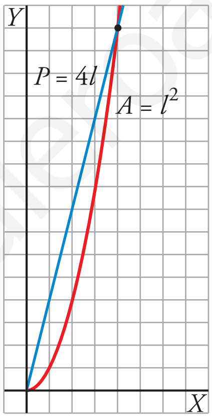
x	3	8
y	–2	3

28 **¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el perímetro de un cuadrado dependiendo de cuánto mida su lado? ¿Y la que nos da su área? Dibuja ambas funciones.**

Si l es el lado del cuadrado,

$P = 4l$

$A = l^2$



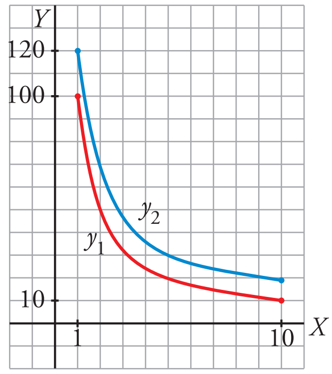
29 **Rocío ha comprado un regalo de cumpleaños para Paz que ha costado 100 €. Como el resto de los amigos del grupo no han comprado nada, deciden pagar el regalo entre todos. Construye una función que nos dé el dinero que debe poner cada uno dependiendo del número de personas que haya y dibújala.**

Si van a cenar a un restaurante en el que la comida vale 10 €, ¿cuál será la función del dinero que tiene que poner cada uno, sin incluir a Paz, dependiendo del número de personas que son? Dibújala en los mismos ejes. Di el dominio de definición de ambas funciones teniendo en cuenta que x solo toma valores naturales y suponiendo que el número de amigos no supera 10.

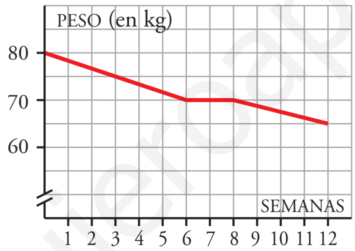
Si el número de amigos es x, $x \in \mathbb{N}$, la función que da lo que debe pagar cada uno es $y_1 = \dfrac{100}{x}$.

Si van a un restaurante, entonces la función es $y_2 = \dfrac{100 + 10(x + 1)}{x}$.

El dominio de definición de ambas funciones es $Dom = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$



30 **El médico ha puesto a Ricardo un régimen de adelgazamiento y le ha hecho esta gráfica para explicarle lo que espera conseguir en las 12 semanas que dure la dieta.**



a) ¿Cuál era su peso al comenzar el régimen?

b) ¿Cuánto tiene que adelgazar por semana en la primera etapa del régimen? ¿Y entre la 6.ª y la 8.ª semana?

c) Halla la expresión analítica de esa función.

a) Ricardo pesaba 80 kg al comenzar el régimen.

b) $\frac{5}{3} = 1{,}67$ kg por semana

Entre la sexta y octava semana no tiene que adelgazar nada.

c) Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos:

- Para $0 \le x \le 6$, la pendiente $m = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$ y $n = 80 \rightarrow$

  $\rightarrow\ y = -\frac{5}{3}x + 80$

- Para $6 < x \le 8$, $y = 70$

- Para $8 < x \le 12$, $m = -\frac{5}{4}$ y pasa por $(12, 65)$

  $y - 65 = -\frac{5}{4}(x - 12) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{5}{4}x + 80$

Luego, la expresión analítica de esta función será:

$$y = \begin{cases} -\dfrac{5}{3}x + 80 & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ 70 & \text{si } 6 < x \le 8 \\ -\dfrac{5}{4}x + 80 & \text{si } 8 < x \le 12 \end{cases}$$

31 **Los gastos anuales de una empresa por la fabricación de x ordenadores son:**

$$G(x) = 20\,000 + 250x \text{ en euros}$$

Y los ingresos que se obtienen por las ventas son:

$$I(x) = 600x - 0{,}1x^2 \text{ en euros}$$

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

La función beneficio es:

$B = I - G = 600x - 0{,}1x^2 - (20\,000 + 250x) \rightarrow B(x) = -0{,}1x^2 + 350x - 20\,000$

El vértice es el máximo: $V = \dfrac{-350}{-2 \cdot 0{,}1} = 1\,750$

Se deben fabricar 1 750 ordenadores para que el beneficio sea máximo.

32 **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a.

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\rightarrow 3 = ka^0 \rightarrow k = 3$

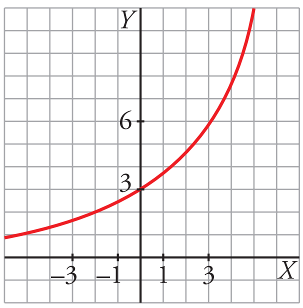
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\rightarrow 3{,}6 = ka^1 \rightarrow 3{,}6 = 3a \rightarrow a = 1{,}2$

Tenemos la función $y = 3 \cdot (1{,}2)^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



33 **La función exponencial $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 2) y (2; 1,28). Calcula k y a y representa la función.**

$y = ka^x$

Si pasa por el punto (0, 2), entonces:

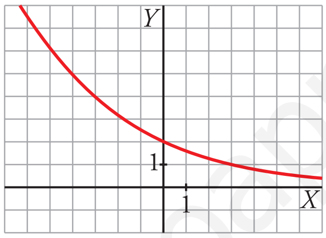
$$2 = k \cdot a^0 \;\rightarrow\; 2 = k$$

Si pasa por el punto (2; 1,28), entonces:

$$1{,}28 = k \cdot a^2 \;\rightarrow\; 1{,}28 = 2a^2 \;\rightarrow\; a^2 = 0{,}64 \;\rightarrow\; a = 0{,}8$$

La función es: $y = 2 \cdot (0{,}8)^x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	3,906	3,125	2,5	2	1,6	1,28	1,024



34 **El coste por unidad de fabricación de ciertos sobres disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función:**

$$y = \frac{0{,}3x + 1\,000}{x}$$

a) ¿Qué valores toma la función?

b) Calcula el coste por unidad y el coste total para 10 sobres. Haz lo mismo para 100 000 sobres.

c) ¿A cuánto crees que se acerca el coste por unidad cuando el número de sobres se hace muy grande?

a) x toma valores naturales.

b) • Para 10 sobres:

Coste por unidad $= \dfrac{1\,003}{10} = 100{,}3$

Coste total de 10 unidades = 1 003

• Para 100 000 sobres:

Coste por unidad $= \dfrac{30\,000 + 1\,000}{100\,000} = 0{,}31$

Coste total de 100 000 unidades = 31 000

c) El coste por unidad se acerca a 0,3.

PÁGINA 120

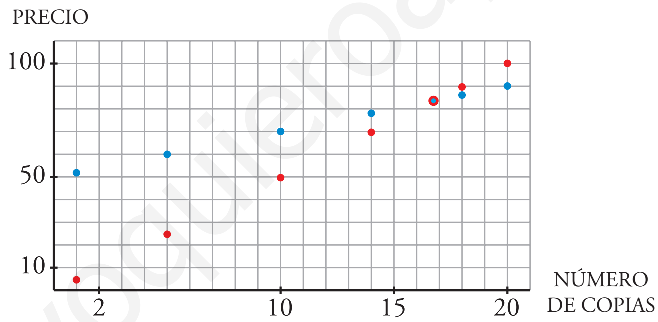
35 ■■□ **Una casa de reprografía cobra 5 cent. por cada fotocopia. Ofrece también un servicio de multicopia, por el que cobra 50 cent. fijos por el cliché y 2 cent. por cada copia de un mismo ejemplar.**

Haz, para cada caso, una tabla de valores que muestre lo que hay que pagar según el número de copias realizadas. Representa las funciones obtenidas.

¿Tiene sentido unir los puntos en cada una de ellas? Obtén la expresión analítica de cada función. ¿A partir de cuántas copias es más económico utilizar la multicopista?

FOTOCOPIAS	
UNIDADES	PRECIO
1	5
5	25
10	50
14	70
18	90
20	100

MULTICOPIA	
UNIDADES	PRECIO
1	52
5	60
10	70
14	78
18	86
20	90



No tiene sentido unir los puntos; solo se pueden dar valores naturales.

Expresiones analíticas:

Fotocopias: $y = 5x$

Multicopias: $y = 50 + 2x$

A partir de 17 copias, es más económico utilizar la multicopista.

36 ■■□ **La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, t, una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s es $h = 20t - 5t^2$.**

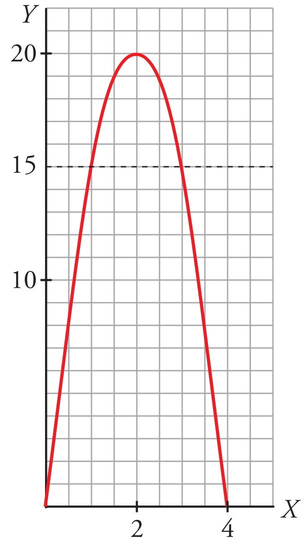
a) Haz una representación gráfica.

b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento cae la piedra al suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?

a) 

b) Dominio de definición = [0, 4]

c) La piedra alcanza la altura máxima a los 2 segundos de haberla lanzado, y es de 20 m.

d) A los 4 segundos.

e) $20t - 5t^2 = 15$

$5t^2 - 20t + 15 = 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$

$-5t^2 + 20t - 15 \geq 0 \;\rightarrow\; 1 \leq t \leq 3$

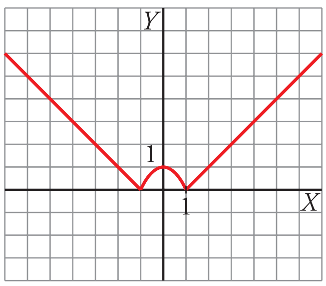
37 **Representa las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

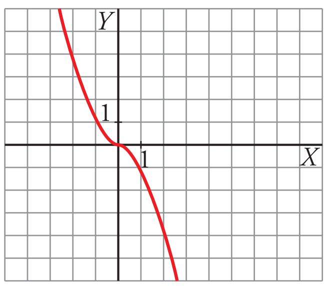
- La recta $y = -1 - x$ está definida para $x < -1$:

x	–2	–1,5
y	1	0,5



- La parábola $y = 1 - x^2$ definida si $-1 \leq x \leq 1$, corta al eje X en (–1, 0) y (1, 0), y al eje Y en (0, 1), vértice a su vez de la parábola.
- La recta $y = x - 1$ está definida para $x > 1$ y pasa por (2, 1) y (3, 2).

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



- La parábola $y = x^2$, definida para $x < 0$, pasa por (–1, 1) y (–2, 4).
- La parábola $y = -x^2$, definida para $x \geq 0$, tiene su vértice en (0, 0) y pasa por (1, –1) y (2, –4).

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

38 **Di cuál es la pendiente de cada una de las siguientes rectas y di si son crecientes o decrecientes:**

a) $y = \dfrac{5x - 8}{3}$

b) $3x - y + 4 = 0$

c) $\dfrac{y + 4}{2} = 1$

d) $y = 4 - \dfrac{3}{2}\left(x + \dfrac{2}{3}\right)$

¿Qué relación existe entre el crecimiento o decrecimiento de una recta y su pendiente?

a) $m = \dfrac{5}{3}$. Creciente

b) $m = 3$. Creciente.

c) $m = 0$. Ni crece ni decrece, es constante.

d) $m = -\dfrac{3}{2}$. Decrece

Si la pendiente es positiva, hay crecimiento.

Si la pendiente es negativa, hay decrecimiento.

39 **Resuelto en el libro de texto.**

40 **Utiliza el mismo razonamiento que hemos seguido en el ejercicio resuelto anterior y calcula las coordenadas del punto en el que se encuentra el vértice de la parábola $y = 3x^2 - 5x + 7$.**

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 - 5x + 7 \\ y = 7 \end{array}\right\} \; 3x^2 - 5x = 0 \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5/3 \end{array}\right.$$

$$p = \frac{5/3}{2} = \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{5}{6} \;\rightarrow\; y = 3 \cdot \frac{5^2}{6^2} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 7 = -\frac{59}{12}$$

El vértice está en el punto $\left(\dfrac{5}{6}, -\dfrac{59}{12}\right)$

41 **Construye y dibuja, en cada caso, parábolas que cumplan las siguientes condiciones:**

a) Su eje es $x = 2$ y tiene las ramas hacia abajo.

b) Tiene el vértice en el punto (3, –2) y tiene la misma forma que $y = x^2$.

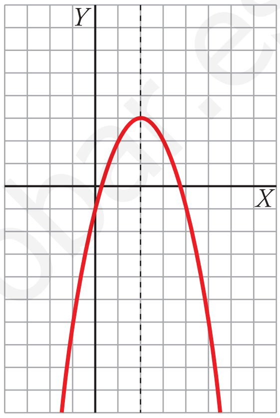
c) Tiene el vértice en el origen de coordenadas y pasa por el punto (–3, –18).

a) La abscisa del vértice es 2: $-\dfrac{b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a$

Si sus ramas van hacia abajo, el coeficiente de x^2 debe ser negativo.

Cualquier función cuadrática $y = ax^2 - 4ax + c$, con $a < 0$, cumple las condiciones.

Por ejemplo: $y = -x^2 + 4x - 1$



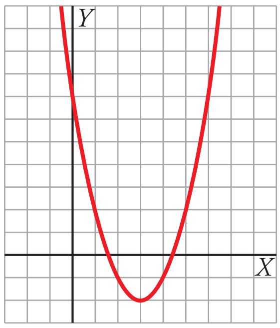
b) Vértice en (3, –2) $\rightarrow -\dfrac{b}{2a} = 3 \rightarrow b = -6a$

Tiene la misma forma que $y = x^2$, luego $a = 1$.

La función es de la forma $y = x^2 - 6x + c$.

Pasa por (3, –2) $\rightarrow 9 - 18 + c = -2 \rightarrow c = 7$

Por tanto, $y = x^2 - 6x + 7$.



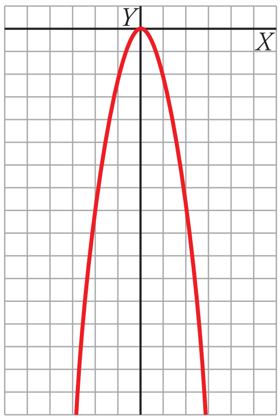
c) $y = ax^2 + bx + c$

$-\dfrac{b}{2a} = 0 \rightarrow b = 0$

Pasa por (0, 0), luego $c = 0$.

Pasa por (–3, –18) $\rightarrow 9a = -18 \rightarrow a = -2$

La parábola es $y = -2x^2$.



PÁGINA 121

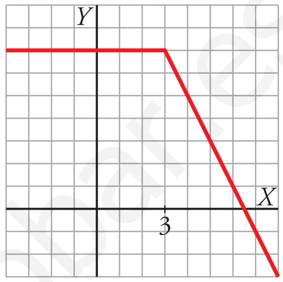
42 ■■□ **Construye funciones definidas a trozos que cumplan las siguientes condiciones y dibújalas.**

a) Es continua y está compuesta por dos trozos de rectas. Tiene pendiente 0 en $x = 1$ y pendiente –2 en $x = 4$. Tiene un máximo en (3, 7).

b) Es continua y está compuesta por un trozo de parábola y un trozo de recta. Tiene un mínimo en (0, 0) y un máximo en (2, 4).

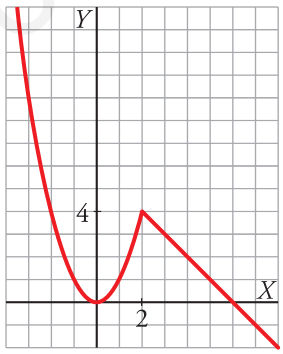
a) Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{si } x < 3 \\ -2x + 13 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



b) Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



43 ■□□ **Todas las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ pasan por un mismo punto. Di cuál es y justifícalo. ¿En qué casos la función es decreciente?**

Todas pasan por el punto (0, 1), ya que $a^0 = 1$.

Si $a < 1$, la función es decreciente.

44 ■■□ **Calcula b y c para que el vértice de la parábola $y = x^2 + bx + c$ esté en el punto (3, 1). ¿Cuál es su eje de simetría? ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?**

Vértice en $x = 3 \rightarrow -\dfrac{b}{2a} = 3 \rightarrow -b = 6a = 6 \rightarrow b = -6$

Pasa por (3, 1) $\rightarrow 1 = 9 - 18 + c \rightarrow c = 10$

$y = x^2 - 6x + 10$

Su eje de simetría es $x = 3$.

Cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 10 \rightarrow$ Punto (0, 10)

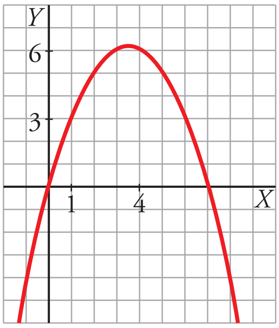
$x^2 - 6x + 10 = 0 \rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} \rightarrow$ No tiene solución, por tanto, no corta al eje X.

45 ■■□ **La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá c? Si, además, sabes que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 6), halla a y b y representa la parábola.**

$c = 0 \qquad y = ax^2 + bx$

$$\left.\begin{array}{l}(1, 3) \to 3 = a + b \\ (4, 6) \to 6 = 16a + 4b\end{array}\right\} \begin{array}{l}a = 3 - b \to a = -1/2 \\ 6 = 16(3 - b) + 4b \to b = 7/2\end{array}$$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$



46 ■□□ **Calcula a y b para que la función $y = \frac{a}{x - b}$ pase por los puntos (2, 2) y (–1, –1).**

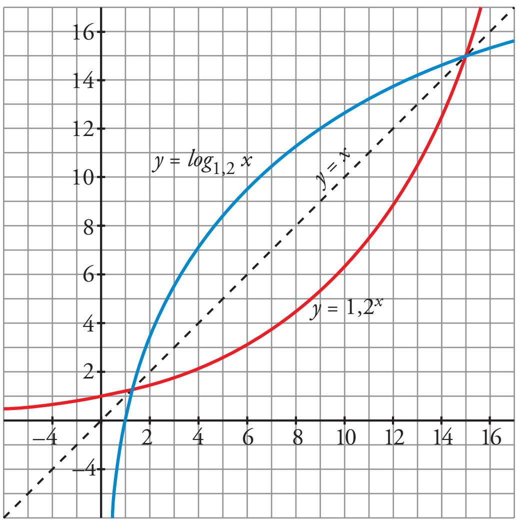
$$\left.\begin{array}{l}2 = \dfrac{a}{2 - b} \\ -1 = \dfrac{a}{-1 - b}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}a = 4 - 2b \\ a = 1 + b\end{array}\right\} \begin{array}{l}1 + b = 4 - 2b \to b = 1 \\ a = 2\end{array}$$

$y = \frac{2}{x - 1}$

47 ■■□ **Representa gráficamente la función exponencial $y = 1{,}2^x$ haciendo uso de una tabla de valores. ¿Cuál es la función inversa o recíproca de $y = 1{,}2^x$? Represéntala en los mismos ejes.**

La función inversa de $y = 1{,}2^x$ es $y = log_{1,2}\, x$.

X	Y
–4	0,48
0	1
1	1,2
2	1,44
4	2,07
8	4,3
10	6,2
12	8,9
16	18,5



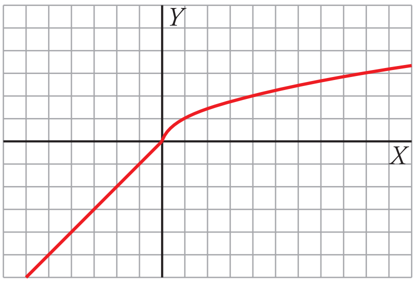
PROFUNDIZA

48 **Representa las siguientes funciones:**

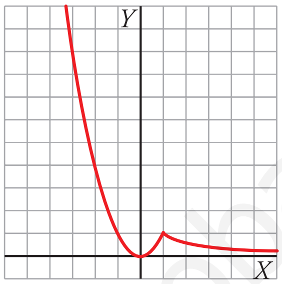
a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a)



b)

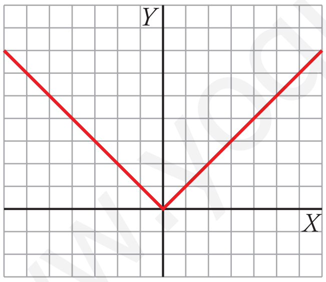


49 **a) Representa la función $y = |x|$, donde $|x|$ es el valor absoluto de x.**

b) Representa: $y = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Compara las dos gráficas, a) y b).

a) y b)



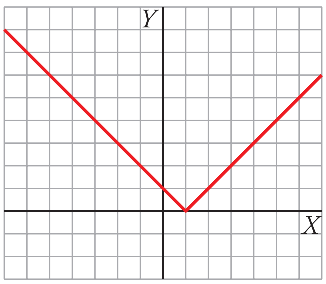
Son la misma gráfica.

50 **Haz la gráfica de las siguientes funciones:**

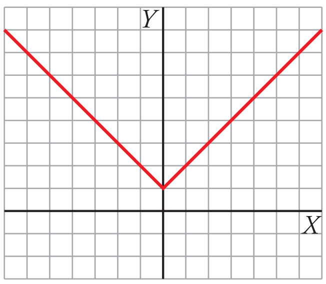
a) $y = |x - 1|$

b) $y = 1 + |x|$

a)



b)



51 ■■□ **Aplica la definición de logaritmo para calcular x en cada caso:**

a) $\log_2 (2x - 2) = 3$ **b)** $\log_2 (x - 1{,}5) = -1$

c) $\log_2 4x = 2$ **d)** $\log_2 (x^2 - 8) = 0$

a) $\log_2 (2x - 2) = 3 \rightarrow 2x - 2 = 2^3 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5$

b) $\log_2 (x - 1{,}5) = -1 \rightarrow x - 1{,}5 = 2^{-1} \rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

c) $\log_2 4x = 2 \rightarrow 4x = 2^2 \rightarrow x = 1$

d) $\log_2 (x^2 - 8) = 0 \rightarrow x^2 - 8 = 2^0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

52 ■■□ **Resuelto en el libro de texto.**

53 ■■□ **Resuelve estas ecuaciones exponenciales, expresando como potencia el segundo miembro:**

a) $3^{x^2 - 5} = 81$ **b)** $2^{2x - 3} = 1/8$

c) $2^{x + 1} = \sqrt[3]{4}$ **d)** $2^{x + 1} = 0{,}5^{3x - 2}$

a) $3^{x^2 - 5} = 81 \rightarrow 3^{x^2 - 5} = 3^4 \rightarrow x^2 - 5 = 4 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

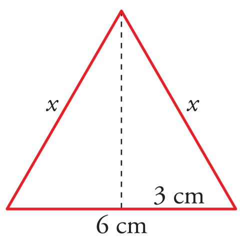
b) $2^{2x - 3} = \frac{1}{8} \rightarrow 2^{2x - 3} = 2^{-3} \rightarrow 2x - 3 = -3 \rightarrow x = 0$

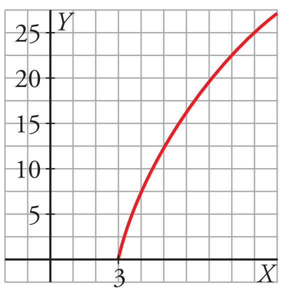
c) $2^{x + 1} = \sqrt[3]{4} \rightarrow 2^{x + 1} = 2^{2/3} \rightarrow x + 1 = \frac{2}{3} \rightarrow x = \frac{2}{3} - 1 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$

d) $2^{x + 1} = 0{,}5^{3x - 2} \rightarrow 2^{x + 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x - 2} \rightarrow 2^{x + 1} = 2^{-(3x - 2)} \rightarrow$

$\rightarrow x + 1 = -(3x - 2) \rightarrow 4x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

54 ■■□ **Sabemos que el lado desigual de un triángulo isósceles mide 6 cm. Llama x al otro lado y escribe la ecuación de la función que nos da su área. Represéntala.**



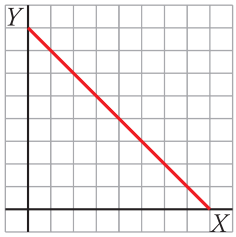


La altura del triángulo es $h = \sqrt{x^2 - 9}$.

$A(x) = 3\sqrt{x^2 - 9}$

55 **Un móvil que inicialmente llevaba una velocidad de 8 m/s frena con una aceleración de –1 m/s^2. Escribe la ecuación de la velocidad en función del tiempo y represéntala.**

$v = 8 - t$



56 **Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderían a 0,40 €/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg y el precio aumenta 0,01 €/kg. ¿Cuándo hemos de vender las naranjas para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?**

Sea t el tiempo, en días.

La función que da el precio de las naranjas según transcurren los días es (kilos de naranjas × precio de cada kilo):

$$P(t) = (200 - t)(0{,}40 + 0{,}01t)$$

$$P(t) = 80 + 2t - 0{,}40t - 0{,}01t^2 = -0{,}01t^2 + 1{,}60t + 80$$

El máximo de la función está en el punto de abscisa:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-1{,}60}{-0{,}02} = 80$$

Las naranjas se deben vender, para obtener el máximo beneficio, dentro de 80 días, y se venderán por 144 euros.

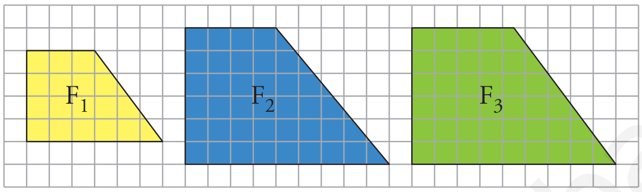
6 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 139

PRACTICA

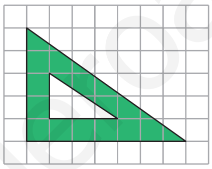
Figuras semejantes

1 **¿Cuáles de estas figuras son semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?**



F_1 es semejante a F_3. La razón de semejanza es $\frac{3}{2}$.

2 **a) ¿Son semejantes los triángulos interior y exterior?**



b) ¿Cuántas unidades medirán los catetos de un triángulo semejante al menor cuya razón de semejanza sea 2,5?

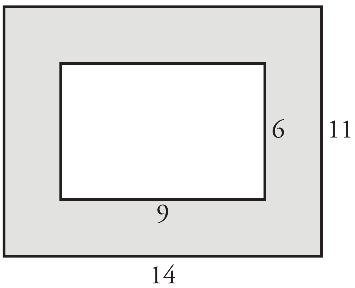
a) No. La razón entre los catetos es $\frac{2}{3}$ en el interior y $\frac{5}{7}$ en el exterior.

b) $2 \cdot 2{,}5 = 5$

$3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$

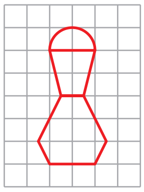
Los catetos medirán 5 y 7,5 unidades.

3 **Una fotografía de 9 cm de ancha y 6 cm de alta tiene alrededor un marco de 2,5 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.**



$\frac{14}{9} \neq \frac{11}{6} \rightarrow$ No son semejantes.

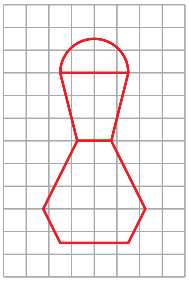
4 □□□ **Un joyero quiere reproducir un broche como el de la figura a escala 1,5.**



a) Haz un dibujo de la figura ampliada.

b) Calcula su superficie.

a)



b) $S_{\text{ORIGINAL}} = \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 + \left(\frac{1+2}{2} \cdot 2\right) + \left(\frac{1+3}{2} \cdot 2\right) + \left(\frac{2+3}{2} \cdot 1\right) =$

$= \frac{1}{2}\pi + 3 + 4 + \frac{5}{2} \approx 11{,}1 \text{ u}^2$

$S_{\text{AMPLIADA}} = 11{,}1 \cdot 1{,}5^2 \approx 24{,}91 \text{ u}^2$

5 □□□ **En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm.**

a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades A y B cuya distancia real es 360 km?

a) $\left.\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 1\,500\,000 \\ 2{,}5 & \rightarrow & x \end{array}\right\} x = 2{,}5 \cdot 1\,500\,000 = 3\,750\,000 \text{ cm} = 37{,}5 \text{ km}$

b) $\left.\begin{array}{ccc} 1\,500\,000 & \rightarrow & 1 \\ 36\,000\,000 & \rightarrow & x \end{array}\right\} x = \frac{36\,000\,000}{1\,500\,000} = 24 \text{ cm}$

6 □□□ **En el plano de un piso cuya escala es 1:200, el salón ocupa una superficie de 7 cm². ¿Cuál es la superficie real del salón?**

$7 \cdot 200^2 = 280\,000 \text{ cm}^2 = 28 \text{ m}^2$

7 □□□ **Un rombo cuyas diagonales miden 275 cm y 150 cm, ¿qué área ocupará en un plano de escala 1:25?**

Área $= \frac{275 \cdot 150}{2} = 20\,625 \text{ cm}^2$

En el plano ocupará $\frac{20\,625}{25^2} = 33 \text{ cm}^2$.

8 **Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcula:**

a) Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 cm de diámetro.

b) La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm².

c) El volumen de una piscina que en la maqueta contiene 20 cm³ de agua.

a) $\left.\begin{array}{lcc} 1 \text{ cm} & \rightarrow & 250 \text{ cm} \\ 6 \text{ cm} & \rightarrow & \text{h} \\ 4 \text{ cm} & \rightarrow & d \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{h} = 1\,500 \text{ cm} = 15 \text{ m} \\ d = 1\,000 \text{ cm} = 10 \text{ m} \end{array}$

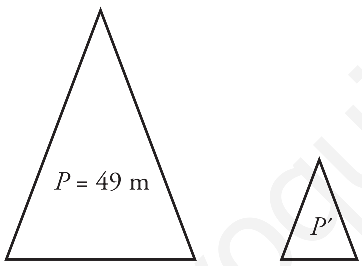
La torre cilíndrica mide 15 m de altura y 10 m de diámetro.

b) $40 \cdot 250^2 = 2\,500\,000 \text{ cm}^2 = 250 \text{ m}^2$

c) $20 \cdot 250^3 = 312\,500\,000 \text{ cm}^3 = 312{,}5 \text{ m}^3$

Semejanza de triángulos

9 **El perímetro de un triángulo isósceles es 49 m y su base mide 21 m. Halla el perímetro de otro triángulo semejante, cuya base mide 4 m. ¿Cuál es la razón de semejanza entre el triángulo mayor y el menor?**



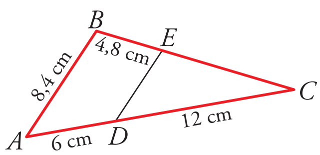
$\frac{21}{4} = 5{,}25$

Perímetro del triángulo semejante:

$$P' = \frac{49}{5{,}25} = 9{,}33 \text{ m}$$

La razón de semejanza es 5,25.

10 **En la figura, el segmento *DE* es paralelo a *AB*.**



Jusitifica que los triángulos *ABC* y *CDE* son semejantes y calcula *DE* y *EC*.

Los triángulos *ABC* y *CDE* son semejantes porque tienen un ángulo común, $\hat{C}$, y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos, $DE // AB$. Están en posición de Tales.

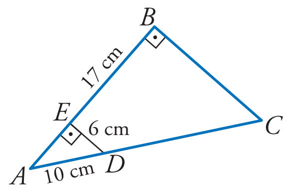
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{\overline{DE}}{8{,}4} = \frac{12}{18} \rightarrow \overline{DE} = \frac{12 \cdot 8{,}4}{18} = 5{,}6 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{x}{4{,}8 + x} = \frac{5{,}6}{8{,}4} \rightarrow 8{,}4x = 26{,}88 + 5{,}6x \rightarrow$$

$$\rightarrow 2{,}8x = 26{,}88 \rightarrow x = 9{,}6 \rightarrow \overline{EC} = 9{,}6 \text{ cm}$$

11 **¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *AED*?**

Halla el perímetro del trapecio *EBCD*.



Porque son rectángulos con un ángulo agudo común, $\hat{A}$. Tienen los tres ángulos iguales.

- Hallamos $\overline{EA}$ aplicando el teorema de Pitágoras:

  $\overline{EA} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm; $\overline{AB} = 8 + 17 = 25$ cm

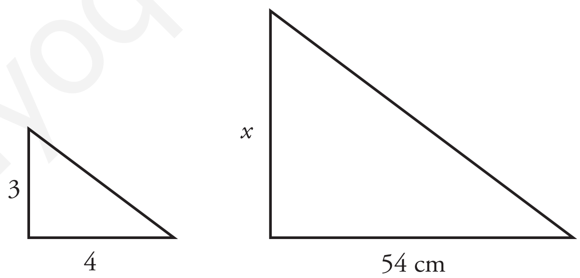
- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{EA}} \to \dfrac{10 + x}{10} = \dfrac{25}{8} \to 80 + 8x = 250 \to 8x = 170$

  $x = 21{,}25 \to \overline{DC} = 21{,}25$ cm

- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \to \dfrac{\overline{BC}}{6} = \dfrac{25}{8} \to \overline{BC} = \dfrac{150}{8} = 18{,}75$ cm

- Perímetro de *EBCD* $= 17 + 18{,}75 + 21{,}25 + 6 = 63$ cm

12 **En un triángulo rectángulo, la relación entre los catetos es 3/4. Halla el perímetro de otro triángulo semejante en el que el cateto menor mide 54 cm.**



$\dfrac{54}{x} = \dfrac{3}{4} \to x = \dfrac{54 \cdot 4}{3} = 72$ cm mide el cateto mayor.

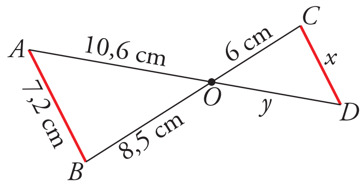
$h = \sqrt{54^2 + 72^2} = 90$ cm mide la hipotenusa.

Perímetro $= 54 + 72 + 90 = 216$ cm

13 **La razón de semejanza entre dos triángulos es 2/5. Si el área del mayor es 150 cm², ¿cuál es el área del menor?**

El área del menor es $15 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = 24$ cm^2.

14 □□□ **Observa esta figura, en la que el segmento** AB **es paralelo a** CD**.**



a) Di por qué son semejantes los triángulos OAB **y** ODC**.**

b) Calcula x **e** y**.**

a) Son semejantes porque tienen un ángulo igual, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ por ser opuestos por el vértice, y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos.

b) $\dfrac{x}{7{,}2} = \dfrac{6}{8{,}5} \to x = \dfrac{7{,}2 \cdot 6}{8{,}5} \approx 5{,}08$ cm

$\dfrac{6}{8{,}5} = \dfrac{y}{10{,}6} \to y = \dfrac{10{,}6 \cdot 6}{8{,}5} \approx 7{,}48$ cm

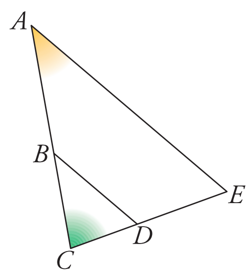
PÁGINA 140

15 □□□ **Si** BD **es paralelo a** AE**, y** $\overline{AC} = 15$ **cm,** $\overline{CE} = 11$ **cm y** $\overline{BC} = 6{,}4$ **cm:**

a) Calcula $\overline{CD}$**.**

b) ¿Podemos saber cuánto vale $\overline{AE}$ **sin medirlo directamente?**

c) Si $\hat{A} = 37°$ **y** $\hat{C} = 80°$**, calcula** $\hat{E}$**,** $\hat{B}$ **y** $\hat{D}$**.**



a) Los triángulos ACE y BCD son semejantes.

Por tanto: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \to \dfrac{15}{6{,}4} = \dfrac{11}{\overline{CD}} \to \overline{CD} = \dfrac{11 \cdot 6{,}4}{15} \approx 4{,}69$ cm

b) No podemos saber lo que mide AE porque no conocemos la medida del lado correspondiente, BD.

c) $\hat{E} = 180° - (37° + 80°) = 63°$; $\hat{B} = \hat{A} = 37°$; $\hat{D} = \hat{E} = 63°$

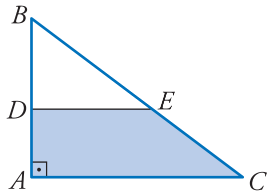
16 □□□ **Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del primero es 26 cm², ¿cuál es el área del segundo?**

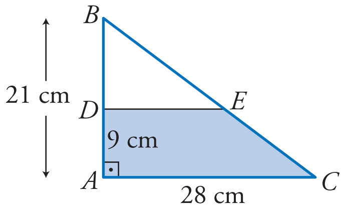
Razón de semejanza $= \dfrac{13{,}6}{8} = 1{,}7$

Área del segundo $= 26 \cdot 1{,}7^2 = 75{,}14$ cm^2

6 Soluciones a los ejercicios y problemas

17 ■■□ **Los catetos del triángulo *ABC* (*A* = 90°) miden *AB* = 21 cm, *AC* = 28 cm. Desde el punto *D*, tal que *AD* = 9 cm, se traza una paralela a *AC*. Halla el área y el perímetro del trapecio *ADEC*.**





Los triángulos *ABC* y *DBE* son semejantes.

Por ello:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} \to \frac{21}{12} = \frac{28}{\overline{DE}} \to \overline{DE} = \frac{12 \cdot 28}{21} = 16 \text{ cm}$$

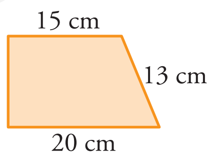
Calculamos la hipotenusa de cada uno de los triángulos:

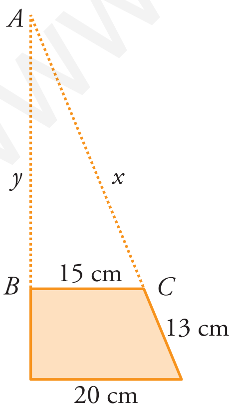
$$\left.\begin{array}{l} \overline{BC} = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35 \text{ cm} \\ \overline{BE} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ cm} \end{array}\right\} \quad \overline{EC} = 35 - 20 = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Área del trapecio} = \frac{28 + 16}{2} \cdot 9 = 198 \text{ cm}^2$$

Perímetro del trapecio *ADEC* = 9 + 16 + 15 + 28 = 68 cm

18 ■■□ **Calcula el perímetro del triángulo cuya base coincide con la base mayor de este trapecio y que se obtiene al prolongar los lados no paralelos hasta que se corten.**





$$\frac{20}{15} = \frac{13 + x}{x} \to 20x = 195 + 15x \to$$

$$\to 5x = 195 \to x = 39 \text{ cm}$$

Calculamos la medida del cateto *AB* en el triángulo *ABC*:

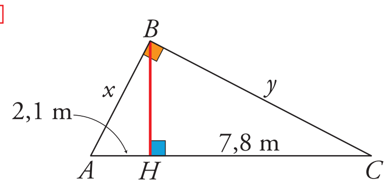
$$y = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36 \text{ cm}$$

Perímetro del triángulo = 36 + 15 + 39 = 90 cm

Teorema del cateto y de la altura

En cada uno de los siguientes triángulos rectángulos se ha trazado la altura *BH* sobre la hipotenusa. Halla, en cada caso, los segmentos *x* e *y*.

19

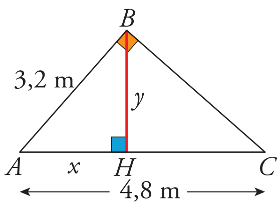


$\overline{BH}^2 = 2{,}1 \cdot 7{,}8 \to \overline{BH} \approx 4{,}05$ m

En el triángulo ABH, $x^2 = 2{,}1^2 + 4{,}05^2 \to x \approx 4{,}56$ m

En el triángulo BHC, $y^2 = 7{,}8^2 + 4{,}05^2 \to y \approx 8{,}79$ m

20

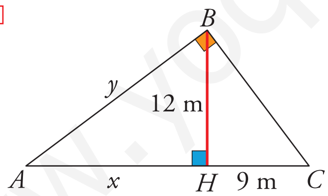


Por el teorema del cateto:

$3{,}2^2 = 4{,}8x \to x \approx 2{,}13$ m

En el triángulo ABH, $y^2 = 3{,}2^2 - 2{,}13^2 \to y \approx 2{,}39$ m

21



Por el teorema de la altura:

$12^2 = x \cdot 9 \to x = 16$ m

En el triángulo ABH, $y^2 = 12^2 + 16^2 \to y = 20$ m

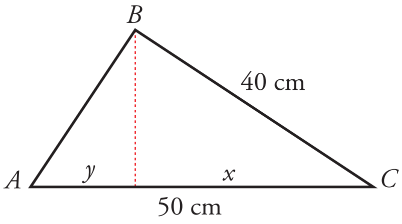
22 **Dibuja, en cada caso, un triángulo rectángulo y traza su altura sobre la hipotenusa.**

a) Calcula la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa si esta mide 50 cm y el cateto mayor 40 cm.

b) La hipotenusa mide 25 cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa 9 cm. Halla el cateto mayor.

c) La altura relativa a la hipotenusa mide 6 cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa, 4,5 cm. Halla la hipotenusa.

a)



$40^2 = 50 \cdot x \;\rightarrow\; x = 32$ cm

Proyección de AB sobre AC:

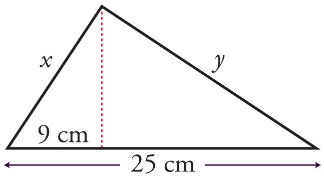
$50 - 32 = 18$ cm

O bien:

$\overline{AB} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30$ cm

$30^2 = 50 \cdot y \;\rightarrow\; y = 18$ cm

b)



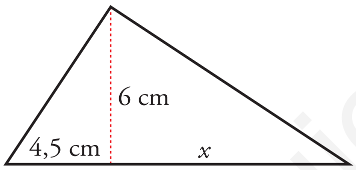
La proyección de y sobre la hipotenusa es:

$25 - 9 = 16$ cm

Por el teorema del cateto:

$y^2 = 25 \cdot 16 \;\rightarrow\; y = 20$ cm

c)



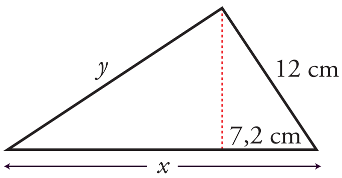
Por el teorema de la altura:

$6^2 = 4{,}5 \cdot x \;\rightarrow\; x = 8$ cm

Hipotenusa $= 4{,}5 + 8 = 12{,}5$ cm

23 ■■□ **Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 m y su proyección sobre la hipotenusa mide 7,2 m.**

Calcula el área y el perímetro del triángulo.



Por el teorema del cateto:

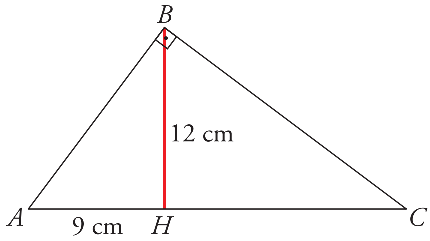
$12^2 = 7{,}2x \;\rightarrow\; x = 20$ m

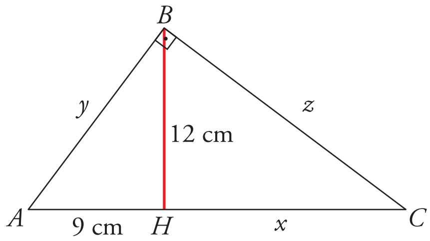
$y^2 = 20^2 - 12^2 \;\rightarrow\; y = 16$ m

Área $= \dfrac{16 \cdot 12}{2} = 96$ m^2

Perímetro $= 16 + 12 + 20 = 48$ m

24 **Halla el perímetro del triángulo ABC del que conocemos AH = 9 cm, BH = 12 cm.**





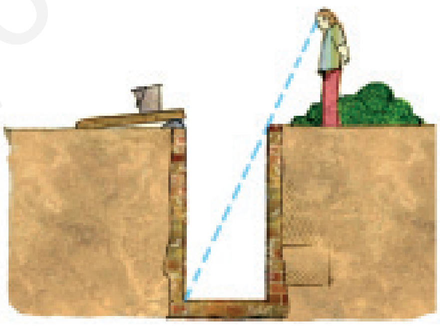
Por el teorema de la altura:

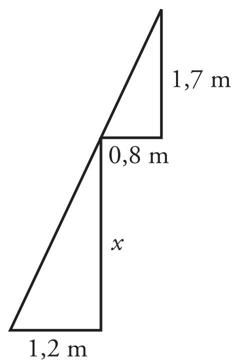
$12^2 = 9 \cdot x \rightarrow x = 16$

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow y = 15 \text{ cm} \\ z^2 = 12^2 + 16^2 \rightarrow z = 20 \text{ cm} \end{array}\right\} \text{Perímetro} = 15 + 20 + 25 = 60 \text{ cm}$$

PIENSA Y RESUELVE

25 **¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?**



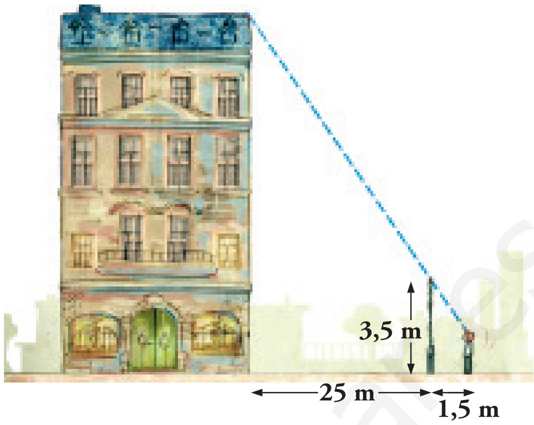


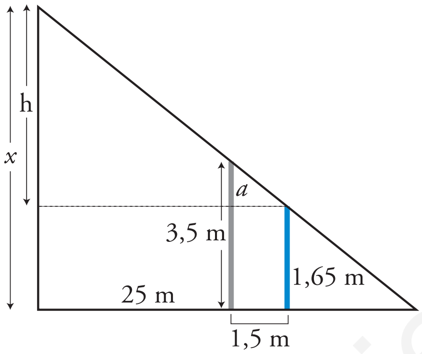
$$\frac{x}{1,7} = \frac{1,2}{0,8} \rightarrow x = \frac{1,2 \cdot 1,7}{0,8} \rightarrow x = 2,55 \text{ m}$$

La profundidad es de 2,55 m.

PÁGINA 141

26 **Para medir la altura de la casa, Álvaro, de 165 cm de altura, se situó a 1,5 m de la verja y tomó las medidas indicadas. ¿Cuánto mide la casa?**



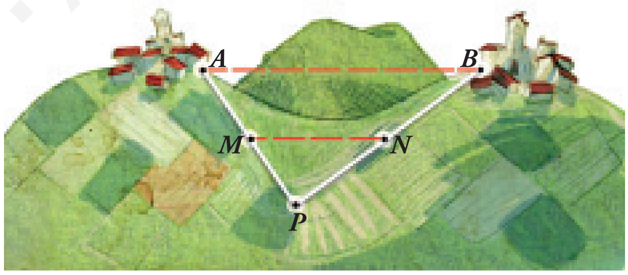


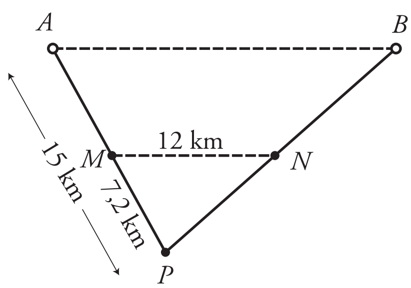
$a = 3{,}5 - 1{,}65 = 1{,}85$ m

$$\frac{25 + 1{,}5}{1{,}5} = \frac{h}{1{,}85} \rightarrow h = \frac{26{,}5 \cdot 1{,}85}{1{,}5} = 32{,}68 \text{ m}$$

Altura de la casa: $32{,}68 + 1{,}65 = 34{,}33$ m

27 **Entre dos pueblos A y B hay una colina. Para medir la distancia *AB* fijamos un punto *P* desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas *AP* = 15 km, *PM* = 7,2 km y *MN* = 12 km. (*MN* es paralela a *AB*). Halla la distancia *AB*.**

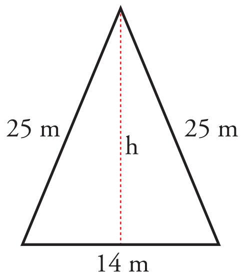




Los triángulos *APB* y *MPN* son semejantes. Por tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{12} = \frac{15}{7{,}2} \rightarrow \overline{AB} = \frac{15 \cdot 12}{7{,}2} = 25 \text{ km}$$

28 **El perímetro de un triángulo isósceles es 64 m, y el lado desigual mide 14 m. Calcula el área de un triángulo semejante cuyo perímetro es de 96 m.**



Altura del triángulo:

$h^2 = 25^2 - 7^2 \rightarrow h = 24$ m

$\text{Área} = \dfrac{14 \cdot 24}{2} = 168 \text{ m}^2$

$\text{Razón de semejanza} = \dfrac{96}{64} = \dfrac{3}{2}$

$\text{Área del triángulo semejante} = 168 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 378 \text{ cm}^2$

29 **Dos triángulos *ABC* y *PQR* son semejantes. Los lados del primero miden 24 m, 28 m y 34 m. Calcula la medida de los lados del segundo triángulo sabiendo que su perímetro es 129 m.**

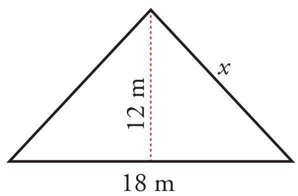
Perímetro del triángulo *ABC*: $24 + 28 + 34 = 86$ m

Razón de semejanza: $\dfrac{129}{86} = \dfrac{3}{2}$

Lados del triángulo *PQR*: $24 \cdot \dfrac{3}{2} = 36$ cm; $28 \cdot \dfrac{3}{2} = 42$ cm; $34 \cdot \dfrac{3}{2} = 51$ cm

30 **Las áreas de dos triángulos isósceles semejantes son 48 m^2 y 108 m^2. Si el lado desigual del primer triángulo es 12 m, ¿cuál es el perímetro del segundo?**

Razón de semejanza: $\sqrt{\dfrac{108}{48}} = 1,5$



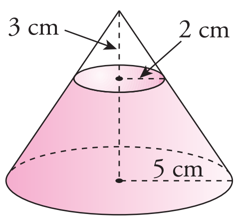
Lado desigual del segundo: $12 \cdot 1,5 = 18$ cm

Altura del segundo: $108 = \dfrac{18 \cdot h}{2} \rightarrow h = 12$ cm

Lados iguales del segundo: $x^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow x = 15$ cm

Perímetro del segundo: $18 + 15 + 15 = 48$ cm

31 **De un cono de radio 5 cm hemos cortado otro cono de radio 2 cm y altura 3 cm. Calcula el volumen del cono grande.**

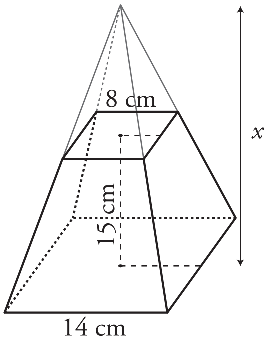


Calculamos la altura del cono grande, x:

$\dfrac{x}{3} = \dfrac{5}{2} \rightarrow x = \dfrac{15}{2} = 7,5$ cm

$\text{Volumen} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 7,5 = 62,5\pi \text{ cm}^3$

32 ■■□ **Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular en el que los lados de las bases miden 8 cm y 14 cm y su altura es 15 cm.**



Calculamos la altura de la pirámide menor, x:

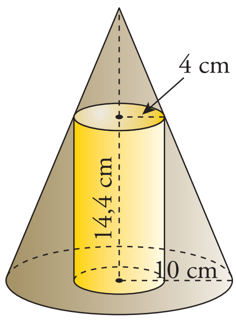
$\frac{x+15}{x} = \frac{7}{4} \rightarrow 4x + 60 = 7x \rightarrow 60 = 3x \rightarrow x = 20$ cm

Volumen de la pirámide grande $= \frac{1}{3} \cdot 14^2 \cdot (20 + 15) = 2\,286{,}67$ cm^3

Volumen de la pirámide pequeña $= \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 20 = 426{,}67$ cm^3

Volumen del tronco de pirámide $= 2\,286{,}67 - 426{,}67 = 1\,860$ cm^3

33 ■■□ **En un cono de 10 cm de radio hemos inscrito un cilindro de radio 4 cm y altura 14,4 cm. Halla la altura del cono.**

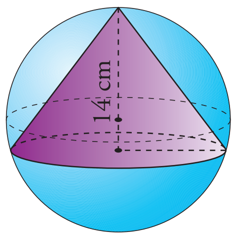


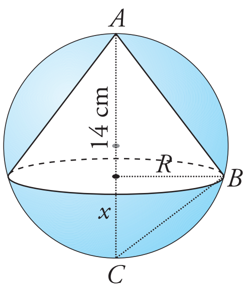
$\frac{x+14{,}4}{x} = \frac{10}{4} \rightarrow 4x + 57{,}6 = 10x \rightarrow$

$\rightarrow 6x = 57{,}6 \rightarrow x = 9{,}6$ cm

Altura del cono: $9{,}6 + 14{,}4 = 24$ cm

34 ■■□ **Tenemos un cono inscrito en una esfera de radio 11 cm. ¿Cuál será el radio de la base del cono si su altura es 14 cm?**



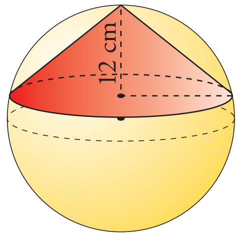


$x = 22 - 14 = 8$ cm

Por el teorema de la altura, en el triángulo rectángulo ABC se verifica:

$R^2 = 14 \cdot 8 = 112 \rightarrow R \approx 10{,}58$ cm

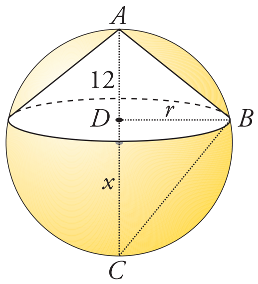
35 **En una esfera de 15 cm de radio hemos inscrito un cono de altura 12 cm. Calcula su área lateral.**



Radio de la esfera: 15 cm

$\overline{DC} = 30 - 12 = 18$ cm

Calculamos el radio del cono utilizando el teorema de la altura en el triángulo ABC:

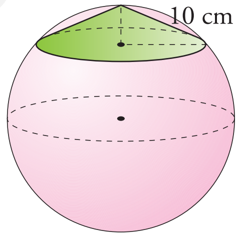


$r^2 = 12 \cdot 18 \rightarrow r \approx 14{,}7$ cm

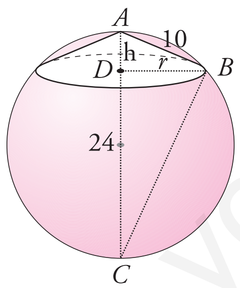
Generatriz del cono: $g^2 = 12^2 + 14{,}7^2 \rightarrow g \approx 18{,}98$ cm

Área lateral del cono: $\pi r g = \pi \cdot 14{,}7 \cdot 18{,}98 \approx 279\pi$ cm^2

36 **En una esfera de 24 cm de diámetro se inscribe un cono cuya generatriz mide 10 cm. Calcula el volumen del cono.**



Para calcular la altura del cono, aplicamos el teorema del cateto en el triángulo rectángulo ABC:

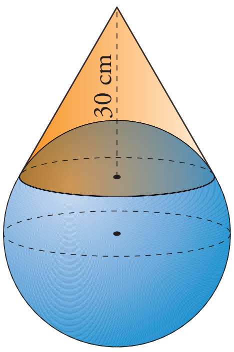


$10^2 = \text{h} \cdot 24 \rightarrow \text{h} \approx 4{,}17$ cm

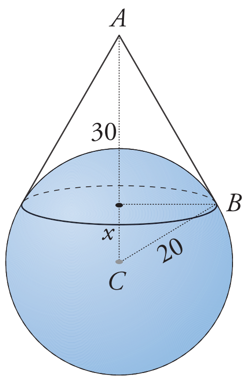
Radio del cono: $r^2 = 10^2 - 4{,}17^2 \rightarrow r \approx 9{,}09$ cm

$V_{\text{CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 9{,}09^2 \cdot 4{,}17 \approx 114{,}85\pi$ cm^3

37 **Sobre una esfera de 20 cm de radio se encaja un cono de30 cm de altura. Halla el área del casquete esférico que determina el cono.**



Para hallar x, aplicamos el teorema del cateto en el triángulo rectángulo ABC:



$20^2 = (30 + x)x \rightarrow 400 = 30x + x^2$

$x^2 + 30x - 400 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-30 \pm 50}{2} = \begin{cases} -40 & \text{No vale.} \\ 10 \text{ cm} \end{cases}$

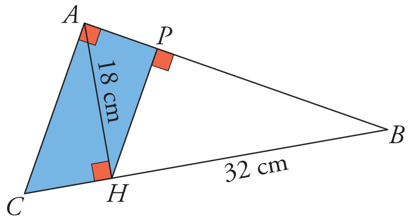
Altura del casquete $= 20 - 10 = 10$ cm

Área del casquete $= 2\pi R\text{h} = 2\pi \cdot 20 \cdot 10 = 400\pi$ cm^2

PÁGINA 142

38 ■■□ **Resuelto en el libro de texto.**

39 ■■□ **En el triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, conocemos $\overline{AH}$ = 18 cm y $\overline{HB}$ = 32 cm.**



a) Calcula $\overline{CH}$ en el triángulo *ABC*. Obtén $\overline{CB}$.

b) Con el teorema de Pitágoras, obtén $\overline{AC}$ en el triángulo *AHC* y $\overline{AB}$ en el triángulo *AHB*.

c) Aplica el teorema del cateto en el triángulo rectángulo *AHB* para obtener $\overline{AP}$. Calcula $\overline{PH}$.

d) Halla el área y el perímetro del trapecio *APHC*.

a) Por el teorema de la altura:

$\overline{AH}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{HB} \rightarrow 18^2 = \overline{CH} \cdot 32 \rightarrow \overline{CH} = 10{,}125$ cm

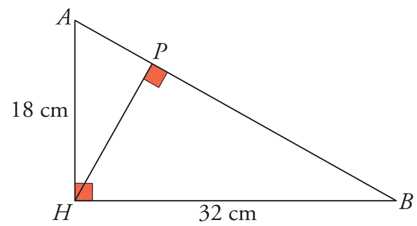
$\overline{CB} = \overline{CH} + \overline{HB} = 32 + 10{,}125 \rightarrow \overline{CB} = 42{,}125$ cm

b) $\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 \rightarrow$

$\rightarrow \overline{AC} = \sqrt{18^2 + 10{,}125^2} \rightarrow$

$\rightarrow \overline{AC} \approx 20{,}65$ cm

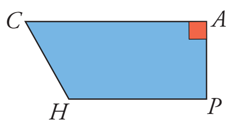
$\overline{AB} = \sqrt{18^2 + 32^2} \rightarrow \overline{AB} \approx 36{,}72$ cm



c) $\overline{AH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AP} \rightarrow \overline{AP} = \dfrac{\overline{AH}^2}{\overline{AB}} = \dfrac{18^2}{36{,}71} \approx 8{,}83$ cm

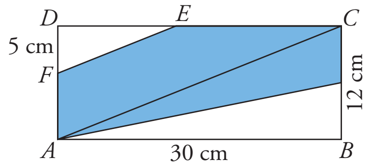
$\overline{HP} = \sqrt{\overline{HA}^2 - \overline{PA}^2} = \sqrt{18^2 - 8{,}83^2} \rightarrow \overline{HP} \approx 15{,}69$ cm

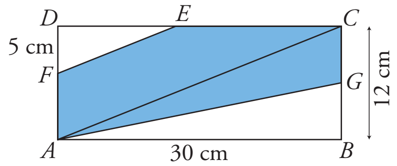
d) Perímetro (*APHC*) = $\overline{CH} + \overline{HP} + \overline{PA} + \overline{AC} = 55{,}295$ cm



Área (*APHC*) $= \dfrac{\overline{PH} + \overline{AC}}{2} \cdot \overline{AP} = \dfrac{15{,}69 + 20{,}65}{2} \cdot 8{,}83 \approx 160{,}44$ cm^2

40 **Si $\overline{DF} = 5$ cm, ¿cuál es el área y el perímetro del pentágono *FECGA*?**





$\overline{AC}^2 = 30^2 + 12^2 \rightarrow \overline{AC} \approx 32,31$ cm

Los triángulos *FDE* y *ADC* son semejantes. Por ello:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{5}{12} = \frac{\overline{FE}}{32,31} \rightarrow \overline{FE} \approx 13,46 \text{ cm}$$

En el triángulo *FDE*, $\overline{DE}^2 = \overline{FE}^2 - \overline{DF}^2 = 13,46^2 - 5^2 \rightarrow \overline{DE} \approx 12,5$ cm

$\overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE} = 30 - 12,5 = 17,5$ cm

$\overline{CG} = 6$ cm

$\overline{AG}^2 = 30^2 + 6^2 \rightarrow \overline{AG} \approx 30,59$ cm

$\overline{AF} = 7$ cm

Área del triángulo $FDE = \dfrac{12,5 \cdot 5}{2} = 31,25 \text{ cm}^2$

Área del triángulo $ABG = \dfrac{30 \cdot 6}{2} = 90 \text{ cm}^2$

Área del pentágono $\approx 30 \cdot 12 - 31,25 - 90 = 238,75 \text{ cm}^2$

Perímetro del pentágono:

$$\overline{FE} + \overline{EC} + \overline{CG} + \overline{GA} + \overline{AF} \approx 13,46 + 17,5 + 6 + 30,59 + 7 = 74,55 \text{ cm}$$

41 **Queremos construir un ortoedro de volumen 36 015 cm³ que sea semejante a otro de dimensiones 25 × 15 × 35 cm.**

¿Cuánto medirán sus aristas?

$V = 25 \cdot 15 \cdot 35 = 13\,125 \text{ cm}^3$

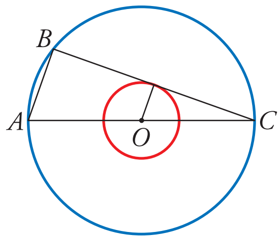
$k^3 = \dfrac{36\,015}{13\,125} = 2,744 \rightarrow k = 1,4$

$25 \cdot 1,4 = 35$ $\qquad 15 \cdot 1,4 = 21$ $\qquad 35 \cdot 1,4 = 49$

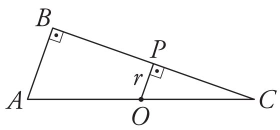
Las aristas del ortoedro deben medir: 35 cm, 21 cm y 49 cm.

42 **En estas dos circunferencias concéntricas, el radio de la mayor es el triple de la menor.**

Hemos trazado el diámetro *AC* y la cuerda *BC*, que es tangente a la circunferencia interior. Si *AB* = 10 cm, ¿cuánto miden los radios de cada circunferencia?



Los triángulos *ABC* y *OPC* son semejantes, por ser rectángulos con un ángulo agudo común.



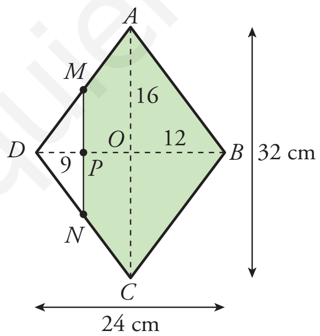
Si $\overline{OP} = r \to \overline{OC} = 3r \to \overline{AC} = 6r$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} \to \frac{10}{r} = \frac{6r}{3r} \to 10 = 2r \to r = 5$$

Los radios miden 5 cm y 15 cm.

43 **Las diagonales de un rombo miden $\overline{AC}$ = 32 cm y $\overline{BD}$ = 24 cm. Por un punto *P* de la diagonal menor, tal que $\overline{PD}$ = 9 cm, se traza una paralela a la diagonal *AC*, que corta en *M* y *N* a los lados *AD* y *CD*.**

Calcula el área y el perímetro del pentágono *MABCN*.



Los triángulos *AOD* y *MPD* son semejantes. Por ello:

$$\frac{16}{12} = \frac{\overline{MP}}{9} \to \overline{MP} = \frac{16 \cdot 9}{12} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ cm}$$

$$\overline{MD} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm} \to \overline{MA} = 20 - 15 = 5 \text{ cm}$$

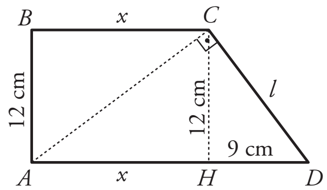
Perímetro $MABCN = 2(\overline{MA} + \overline{AB} + \overline{MP}) = 2(5 + 20 + 12) = 74$ cm

Área pentágono = Área rombo – Área triángulo *MND* =

$$= \frac{32 \cdot 24}{2} - \frac{9 \cdot 12}{2} \cdot 2 = 384 - 108 = 276 \text{ cm}^2$$

44 **En un trapecio rectángulo, la diagonal menor es perpendicular al lado oblicuo, la altura mide 12 cm y la diferencia entre las bases es de 9 cm.**

Calcula el perímetro y el área del trapecio.



En el triángulo *ACD*:

$12^2 = x \cdot 9 \rightarrow x = 16$ cm $\rightarrow \overline{AD} = 9 + 16 = 25$ cm

En el triángulo *CHD*:

$l^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow l = 15$ cm

Perímetro del trapecio: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 12 + 16 + 15 + 25 = 68$ cm

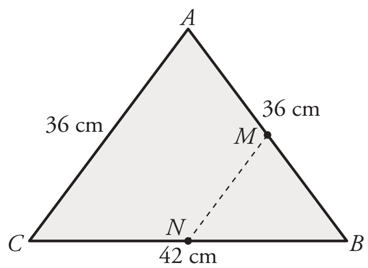
Área del trapecio: $\dfrac{16 + 25}{2} \cdot 12 = 246$ cm^2

45 **Los lados de un triángulo *ABC* miden:**

$$\overline{AC} = \overline{AB} = 36 \text{ cm}, \quad \overline{CB} = 42 \text{ cm}$$

Desde un punto *M* de *AB* se traza una paralela a *AC*, que corta al lado *BC* en un punto *N*.

¿Cuánto deben medir los lados del triángulo *MBN* para que su área sea 1/9 de la del triángulo *ABC*?

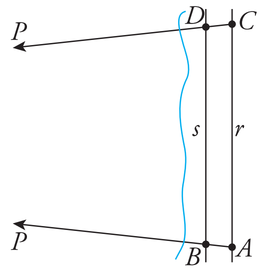


$\dfrac{\text{Área } MNB}{\text{Área } ABC} = \dfrac{1}{9} \rightarrow k^2 = \dfrac{1}{9} \rightarrow k = \dfrac{1}{3}$

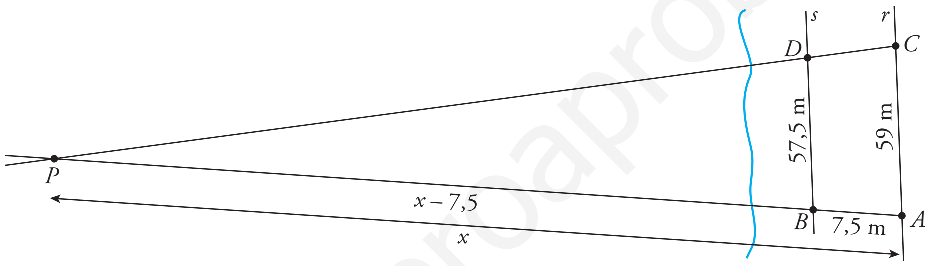
$36 \cdot \dfrac{1}{3} = 12$ cm; $42 \cdot \dfrac{1}{3} = 14$ cm

$\overline{MB} = \overline{MN} = 12$ cm; $\overline{NB} = 14$ cm

46 **Queremos calcular la distancia que hay desde un punto A de la playa a una piedra P que se ve a lo lejos. Para ello, trazamos una recta r que pase por A y una paralela a ella, s.**



Desde A observamos P en una línea que corta en B a s. Desde otro punto C de r, hacemos lo mismo y obtenemos D. Medimos: $\overline{AB} = 7{,}5$ m, $\overline{AC} = 59$ m, $\overline{BD} = 57{,}5$ m. ¿Cuál es la distancia de A a P?



$\frac{x}{x-7{,}5} = \frac{59}{57{,}5} \rightarrow 57{,}5x = 59x - 442{,}5 \rightarrow 1{,}5x = 442{,}5 \rightarrow x = 295$ m

Distancia de A a $P = 295$ m

PÁGINA 143

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

47 **Un triángulo rectángulo, ¿puede ser semejante a un triángulo isósceles? ¿Y a un triángulo equilátero?**

Un triángulo rectángulo puede ser semejante a uno isósceles, siempre que el triángulo rectángulo sea también isósceles.

Un triángulo rectángulo no puede ser semejante a un triángulo equilátero porque este tiene los tres ángulo iguales.

48 **Dos triángulos equiláteros cualesquiera, ¿son semejantes entre sí? ¿Y dos polígonos regulares con el mismo número de lados?**

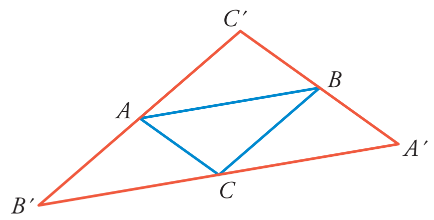
Dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes porque tienen los ángulos iguales.

También lo son dos polígonos regulares con el mismo número de lados, porque sus ángulos son iguales.

49 **Dibuja un triángulo y, desde cada vértice, traza una recta paralela al lado opuesto. Así obtendrás un nuevo triángulo más grande.**

a) Justifica por qué es semejante al inicial.

b) ¿Cuál es la razón entre las áreas?



a) $\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}'\end{array}\right\}$ porque tienen sus lados paralelos.

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes porque sus ángulos son iguales.

b) $\dfrac{\text{Área } A'B'C'}{\text{Área } ABC} = 4$

50 **Justifica en cuáles de los siguientes casos podemos asegurar que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes:**

a) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$, $\hat{C} = \hat{C}'$

b) $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{AB}{A'B'}$, $\hat{A} = \hat{A}'$

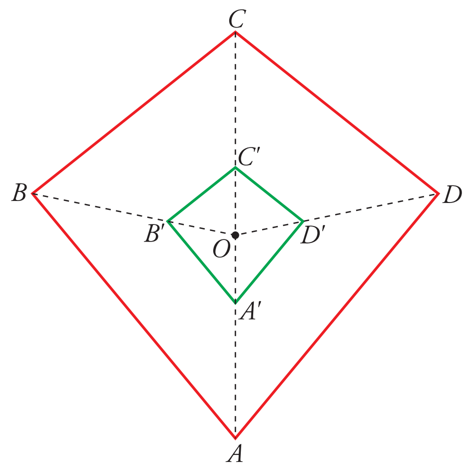
c) $\dfrac{AB}{A'B'} \neq \dfrac{BC}{B'C'}$, $\hat{B} = \hat{B}'$

d) $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$

En b), porque tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo que forman.

En d), porque tienen los tres ángulos iguales.

51 **Hemos aplicado una homotecia al cuadrilátero $ABCD$ para obtener el cuadrilátero $A'B'C'D'$.**



a) ¿Cuál es el centro y cuál es la razón?

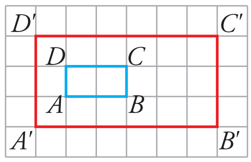
b) Justifica que *ABCD* y *A'B'C'D'* son semejantes.

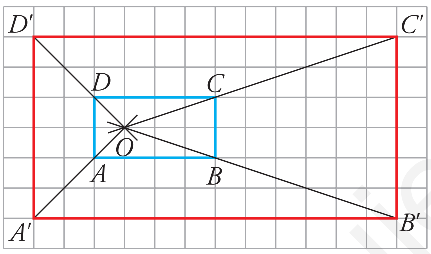
a) El centro es O. La razón es $\dfrac{OC'}{OC} = \dfrac{1}{3}$

b) Porque:

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OD}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3}$$

52 **Halla el centro y la razón de homotecia que transforma el rectángulo *ABCD* en *A'B'C'D'*.**





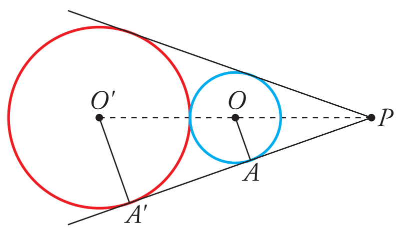
El centro de la homotecia es O, punto de corte de las rectas AA', BB', CC' y DD'.

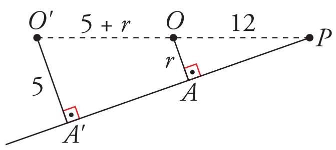
Razón: $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 2$

PROFUNDIZA

53 **Desde un punto P trazamos tangentes a dos circunferencias tangentes exteriores.**

Si $\overline{OP} = 12$ cm y $\overline{O'A'} = 5$ cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia menor?





Los triángulos OAP y $O'A'P'$ son semejantes por ser rectángulos con un ángulo agudo común.

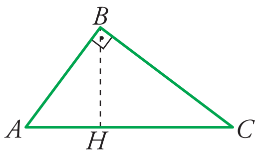
$$\frac{5}{r} = \frac{17 + r}{12} \rightarrow 60 = 17r + r^2 \rightarrow r^2 + 17r - 60 = 0$$

$$r = \frac{-17 \pm 23}{2} = \begin{cases} -20 \quad \text{(no vale)} \\ 3 \end{cases}$$

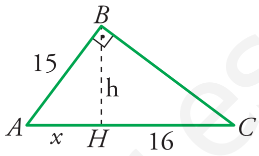
El radio de la circunferencia menor mide 3 cm.

6 Soluciones a los ejercicios y problemas

54 **En el triángulo rectángulo *ABC* hemos trazado la altura sobre la hipotenusa *BH*.**



Halla el área del triángulo en el que conocemos *AB* = 15 cm y *HC* = 16 cm.



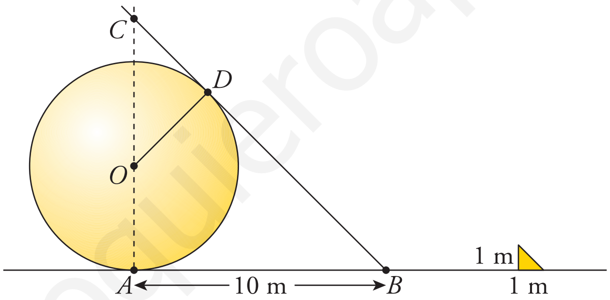
$$\left.\begin{array}{l} h^2 + x^2 = 15^2 \\ h^2 = 16 \cdot x \end{array}\right\} \; 16x + x^2 = 225 \;\rightarrow\; x^2 + 16x - 225 = 0$$

$$x = \frac{-16 \pm 34}{2} = \begin{cases} x = -25 \;\; \text{(no vale)} \\ x = 9 \end{cases}$$

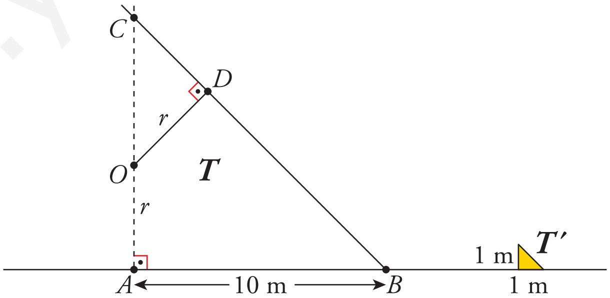
$$h^2 = 16 \cdot 9 \;\rightarrow\; h = 12 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{25 \cdot 12}{2} = 150 \text{ cm}^2$$

55 **Una esfera apoyada en el suelo proyecta una sombra que llega hasta 10 m del punto donde la esfera toca el suelo. En ese momento, un poste vertical de 1 m de alto produce una sombra de 1 m. Calcula el radio de la esfera.**



Los triángulos *T* y *T'* son semejantes.



$$\overline{AC} = \overline{AB} = 10 \text{ m}$$

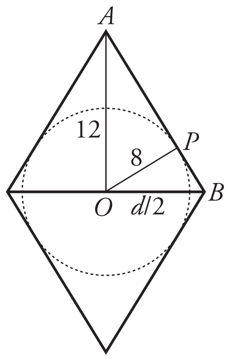
$$\overline{CB} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

Por la semejanza de *OCD* y *ABC*, tenemos:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CB}} \;\rightarrow\; \frac{r}{10} = \frac{10 - r}{10\sqrt{2}} \;\rightarrow\; \sqrt{2}r = 10 - r \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; r(\sqrt{2} + 1) = 10 \;\rightarrow\; r = \frac{10}{1 + \sqrt{2}} = 10(\sqrt{2} - 1) \approx 4{,}14 \text{ cm}$$

56 **Una de las diagonales de un rombo mide 24 cm y el radio del círculo inscrito en dicho rombo es 8 cm. Calcula el perímetro y el área del rombo.**



En el triángulo rectángulo OAP:

$\overline{AP}^2 = 12^2 - 8^2 \rightarrow \overline{AP} = \sqrt{80} \approx 8{,}94$ cm

En el triángulo rectángulo OAB:

$8^2 = \overline{AP} \cdot \overline{PB} \rightarrow \overline{PB} = \dfrac{64}{8{,}94} \approx 7{,}16$ cm

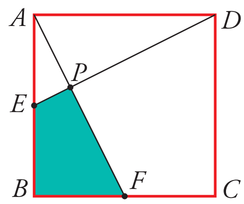
Lado del rombo: $8{,}94 + 7{,}16 = 16{,}1$ cm

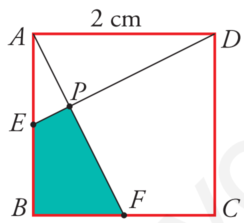
Perímetro del rombo: $4 \cdot 16{,}1 = 64{,}4$ cm

Diagonal: $\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = 16{,}1^2 - 12^2 \rightarrow \dfrac{d}{2} \approx 10{,}73 \rightarrow d \approx 21{,}46$ cm

Área: $\dfrac{24 \cdot 21{,}46}{2} = 257{,}52 \text{ cm}^2$

57 **En el cuadrado de la figura, *E* es el punto medio del lado *AB*, y *F*, el punto medio de *BC*. Si el lado del cuadrado mide 2 cm, ¿cuál es el área del cuadrilátero *EPFB*?**





Calcularemos el área de $EPFB$ como el área del triángulo ABF menos el área del triángulo AEP.

$\overline{ED} = \overline{AF} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$

Los triángulos ABF y AEP son semejantes porque:

$\begin{cases} \hat{A} \text{ es común.} \\ \widehat{AEP} = \widehat{AFB} \text{ por la igualdad de los triángulos } ADE \text{ y } AFB. \end{cases}$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{EP}}{\overline{BF}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{EP}}{1} \rightarrow \overline{EP} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{AP}}{2} \rightarrow \overline{AP} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$A_{EPFB} = A_{ABF} - A_{APE} = \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \text{ cm}^2$$

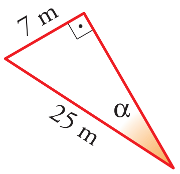
PÁGINA 161

PRACTICA

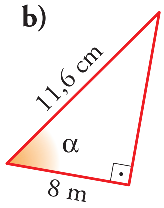
Razones trigonométricas de un ángulo agudo

1 □□□ **Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:**

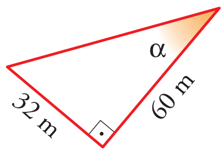
a)



b)



c)



a) $sen\ \alpha = \dfrac{7}{25} = 0{,}28;\ \ cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{25^2 - 7^2}}{25} = \dfrac{24}{25} = 0{,}96;\ \ tg\ \alpha = \dfrac{7}{24} \approx 0{,}29$

b) $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{11{,}6^2 - 8^2}}{11{,}6} = \dfrac{8{,}4}{11{,}6} \approx 0{,}724$

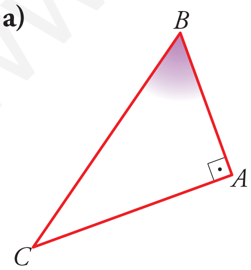
$cos\ \alpha = \dfrac{8}{11{,}6} \approx 0{,}69;\ \ tg\ \alpha = \dfrac{8{,}4}{8} = 1{,}05$

c) $sen\ \alpha = \dfrac{32}{\sqrt{32^2 + 60^2}} = \dfrac{32}{68} = \dfrac{8}{17} \approx 0{,}47$

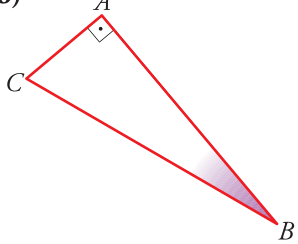
$cos\ \alpha = \dfrac{60}{68} = \dfrac{15}{17} \approx 0{,}88;\ \ tg\ \alpha = \dfrac{32}{60} = \dfrac{8}{15} \approx 0{,}53$

2 □□□ **Midiendo los lados, halla las razones trigonométricas de $\hat{B}$ en cada caso:**

a)



b)



a) $sen\ \hat{B} = \dfrac{2{,}8}{3{,}4} \approx 0{,}82;\ \ cos\ \hat{B} = \dfrac{2}{3{,}4} \approx 0{,}59;\ \ tg\ \hat{B} = \dfrac{2{,}8}{2} = 1{,}4$

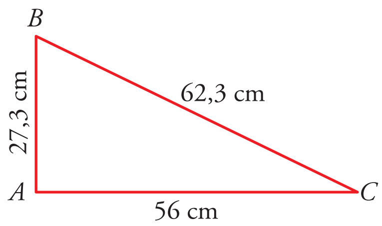
b) $sen\ \hat{B} = \dfrac{1{,}3}{3{,}8} \approx 0{,}34;\ \ cos\ \hat{B} = \dfrac{3{,}6}{3{,}8} \approx 0{,}95;\ \ tg\ \hat{B} = \dfrac{1{,}3}{3{,}6} \approx 0{,}36$

3 □□□ **Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90°$):**

a) $b = 56$ **cm;** $a = 62{,}3$ **cm** **b)** $b = 33{,}6$ **cm;** $c = 4{,}5$ **cm**

c) $c = 16$ **cm;** $a = 36$ **cm**

a)



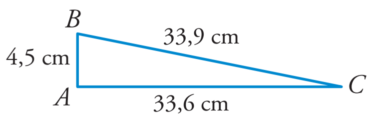
$$sen\ \hat{B} = \frac{56}{62{,}3} \approx 0{,}90$$

$$cos\ \hat{B} = \frac{\sqrt{62{,}3^2 - 56^2}}{62{,}3} = \frac{27{,}3}{62{,}3} \approx 0{,}438$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{56}{27{,}3} \approx 2{,}051$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{27{,}3}{62{,}3} \approx 0{,}438; \quad cos\ \hat{C} = \frac{56}{62{,}3} \approx 0{,}90; \quad tg\ \hat{C} = \frac{27{,}3}{56} = 0{,}4875$$

b)



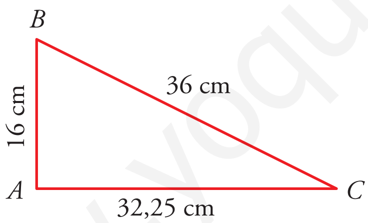
$$sen\ \hat{B} = \frac{33{,}6}{\sqrt{4{,}5^2 + 33{,}6^2}} = \frac{33{,}6}{33{,}9} \approx 0{,}991$$

$$cos\ \hat{B} = \frac{4{,}5}{33{,}9} \approx 0{,}133$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{33{,}6}{4{,}5} \approx 7{,}467$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{4{,}5}{33{,}9} \approx 0{,}133; \quad cos\ \hat{C} = \frac{33{,}6}{33{,}9} \approx 0{,}991; \quad tg\ \hat{C} = \frac{4{,}5}{33{,}6} \approx 9{,}955$$

c)



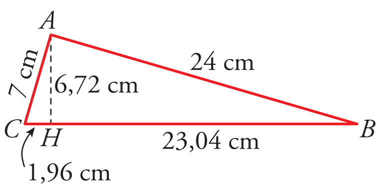
$$sen\ \hat{B} = \frac{\sqrt{36^2 - 16^2}}{36} \approx \frac{32{,}25}{36} \approx 0{,}896$$

$$cos\ \hat{B} = \frac{16}{36} = 0{,}\widehat{4}$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{32{,}25}{16} \approx 2{,}016$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{16}{36} = 0{,}\widehat{4}; \quad cos\ \hat{C} = \frac{32{,}25}{36} \approx 0{,}896; \quad tg\ \hat{C} = \frac{16}{32{,}25} \approx 0{,}496$$

4 □□□ **Comprueba, con el teorema de Pitágoras, que los triángulos** ABC **y** AHB **son rectángulos.**



Halla en cada uno las razones trigonométricas del ángulo B **y compara los resultados. ¿Qué observas?**

El triángulo ABC es rectángulo en A:

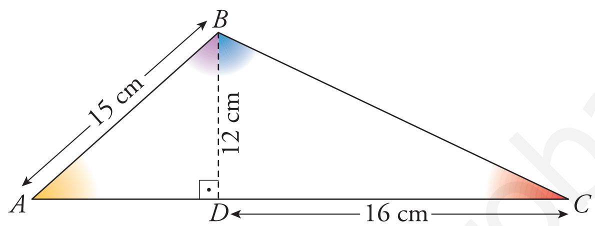
$$24^2 + 7^2 = 625 = (23{,}04 + 1{,}96)^2 = 25^2 = 625$$

El triángulo AHB es rectángulo en H:

$$23{,}04^2 + 6{,}72^2 = 576 = 24^2$$

	$sen\ \hat{B}$	$cos\ \hat{B}$	$tg\ \hat{B}$
en *ABC*	$\frac{7}{25} = 0{,}28$	$\frac{24}{25} = 0{,}96$	$\frac{7}{24} \approx 0{,}292$
en *AHB*	$\frac{6{,}72}{24} = 0{,}28$	$\frac{23{,}04}{24} = 0{,}96$	$\frac{6{,}72}{23{,}04} \approx 0{,}292$

5 ■□□ **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$.**



$\overline{AD} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$; $\overline{BC} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$

	$\hat{A}$	$\hat{C}$	$\widehat{ABD}$	$\widehat{CBD}$
sen	$\frac{12}{15} = 0{,}8$	$\frac{12}{20} = 0{,}6$	$\frac{9}{15} = 0{,}6$	$\frac{16}{20} = 0{,}8$
cos	$\frac{9}{15} = 0{,}6$	$\frac{16}{20} = 0{,}8$	$\frac{12}{15} = 0{,}8$	$\frac{12}{20} = 0{,}6$
tg	$\frac{12}{9} = 1{,}\widehat{3}$	$\frac{12}{16} = 0{,}75$	$\frac{9}{12} = 0{,}75$	$\frac{16}{12} = 1{,}\widehat{3}$

Relaciones fundamentales

6 ■□□ **Si *sen* α = 0,28, calcula *cos* α y *tg* α utilizando las relaciones fundamentales (α < 90°).**

$cos\ \alpha = \sqrt{1 - 0{,}28^2} = 0{,}96$; $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}28}{0{,}96} \approx 0{,}292$

7 ■□□ **Halla el valor exacto (con radicales) de *sen* α y *tg* α sabiendo que *cos* α = 2/3 (α < 90°).**

$$sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3};\quad tg\ \alpha = \frac{\sqrt{5}/3}{2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

8 Si $tg\ \alpha = \sqrt{5}$, calcula $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$ $(\alpha < 90°)$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \sqrt{5} \\ sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = \sqrt{5}c \\ (\sqrt{5}c)^2 + c^2 = 1 \to 6c^2 = 1 \to cos\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \end{array}$$

$$sen\ \alpha = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

9 Calcula y completa esta tabla con valores aproximados:

sen α	**0,92**		
cos α			**0,12**
tg α		**0,75**	

sen α	0,92	0,6	0,99
cos α	0,39	0,8	0,12
tg α	2,35	0,75	8,27

En todos los casos solo tomaremos valores positivos.

- $sen\ \alpha = 0{,}92 \to cos\ \alpha = \sqrt{1 - (0{,}92)^2} = 0{,}39$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}35$

- $tg\ \alpha = 0{,}75$

  $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 0{,}75 \to sen\ \alpha = 0{,}75 \cdot cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \to (0{,}75 \cdot cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \to$

  $\to (cos\ \alpha)^2 = 0{,}64 \to cos\ \alpha = 0{,}8$

  $sen\ \alpha = 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6$

- $cos\ \alpha = 0{,}12 \to sen\ \alpha = \sqrt{1 - (0{,}12)^2} = 0{,}99$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}99}{0{,}12} = 8{,}27$

10 Calcula el valor exacto (utilizando radicales) de las razones trigonométricas que faltan en la tabla siguiente $(\alpha < 90°)$:

sen α	**2/3**		
cos α		$\sqrt{2}/3$	
tg α			**2**

sen α	2/3	$\sqrt{7}/3$	$2\sqrt{5}/5$
cos α	$\sqrt{5}/3$	$\sqrt{2}/3$	$\sqrt{5}/5$
tg α	$2\sqrt{5}/5$	$\sqrt{7/2}$	2

Como $\alpha < 90° \rightarrow \begin{cases} sen\ \alpha > 0 \\ cos\ \alpha > 0 \end{cases}$

- $sen\ \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

  $tg\ \alpha = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

- $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

  $tg\ \alpha = \frac{\sqrt{7}/3}{\sqrt{2}/3} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

- $tg\ \alpha = 2 \rightarrow \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 2 \rightarrow sen\ \alpha = 2\ cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow 4(cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

  $sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Calculadora

11 **Completa la tabla siguiente, utilizando la calculadora:**

α	15°	55° 20'	72° 25' 40''	85,5°
sen α				
cos α				
tg α				

α	15°	55° 20'	72° 25' 40''	85,5°
sen α	0,26	0,82	0,95	0,997
cos α	0,97	0,57	0,30	0,078
tg α	0,27	1,45	3,16	12,71

12 **Halla el ángulo α en cada caso. Exprésalo en grados, minutos y segundos.**

a) $sen\ \alpha = 0{,}58$ **b)** $cos\ \alpha = 0{,}75$ **c)** $tg\ \alpha = 2{,}5$

d) $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ **e)** $cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **f)** $tg\ \alpha = 3\sqrt{2}$

a) α = 35° 27' 2'' b) α = 41° 24' 35'' c) α = 68° 11' 55''

d) α = 48° 11' 23'' e) α = 54° 44' 8'' f) α = 76° 44' 14''

13 □□□ **Halla, con la calculadora, las otras razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de los casos siguientes:**

a) $sen\ \alpha = 0,23$ **b)** $cos\ \alpha = 0,74$ **c)** $tg\ \alpha = 1,75$

d) $sen\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **e)** $tg\ \alpha = \sqrt{3}$ **f)** $cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

a) $cos\ \alpha = 0,97;\ \ tg\ \alpha = 0,24$

b) $sen\ \alpha = 0,67;\ \ tg\ \alpha = 0,91$

c) $sen\ \alpha = 0,87;\ \ cos\ \alpha = 0,5$

d) $cos\ \alpha = 0,71;\ \ tg\ \alpha = 1$

e) $sen\ \alpha = 0,87;\ \ cos\ \alpha = 0,5$

f) $sen\ \alpha = 0,5;\ \ tg\ \alpha = 0,58$

PÁGINA 162

Resolución de triángulos rectángulos

14 □□□ **Halla la medida de los lados y ángulos desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90°$):**

a) $b = 7$ cm $c = 18$ cm **b)** $a = 25$ cm $b = 7$ cm

c) $b = 18$ cm $\hat{B} = 40°$ **d)** $c = 12,7$ cm $\hat{B} = 65°$

e) $a = 35$ cm $\hat{C} = 36°$

a) $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{7^2 + 18^2} \approx 19,31$ cm

$tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{7}{18} = 0,3\widehat{8} \rightarrow \hat{B} \approx 21°\ 15'\ 2''$

$\hat{C} = 90° - 21°\ 15'\ 2'' = 68°\ 44'\ 58''$

b) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ cm

$sen\ \hat{B} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{7}{25} = 0,28 \rightarrow \hat{B} \approx 16°\ 15'\ 37''$

$\hat{C} = 90° - 16°\ 15'\ 37'' = 73°\ 44'\ 23''$

c) $\hat{C} = 90° - 40° = 50°$

$sen\ \hat{B} = \dfrac{b}{a} \rightarrow sen\ 40° = \dfrac{18}{a} \rightarrow a \approx 28$ cm

$tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{c} \rightarrow tg\ 40° = \dfrac{18}{c} \rightarrow c \approx 21,45$ cm

d) $\hat{C} = 90° - 65° = 25°$

$tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{c} \rightarrow tg\ 65° = \dfrac{b}{12,7} \rightarrow b \approx 27,23$ cm

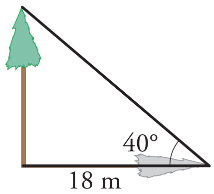
$cos\ \hat{B} = \dfrac{c}{a} \rightarrow cos\ 65° = \dfrac{12,7}{a} \rightarrow a \approx 30,05$ cm

e) $\hat{B} = 90° - 36° = 54°$

$sen\ \hat{C} = \dfrac{c}{a} \rightarrow sen\ 36° = \dfrac{c}{35} \rightarrow c \approx 20{,}57$ cm

$cos\ \hat{C} = \dfrac{b}{a} \rightarrow cos\ 36° = \dfrac{b}{35} \rightarrow b \approx 28{,}32$ cm

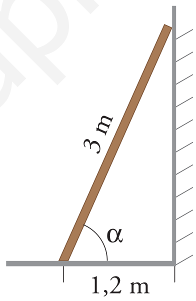
15 □□□ **Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?**



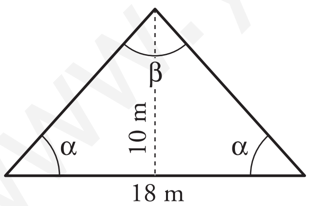
$tg\ 40° = \dfrac{x}{18} \rightarrow x = 15{,}1$ m mide el árbol.

16 □□□ **Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?**

$cos\ \alpha = \dfrac{1{,}2}{3} = 0{,}4 \rightarrow \alpha = 66°\ 25'\ 19''$



17 □□□ **De un triángulo isósceles conocemos su lado desigual, 18 m, y su altura, 10 m. ¿Cuánto miden sus ángulos?**

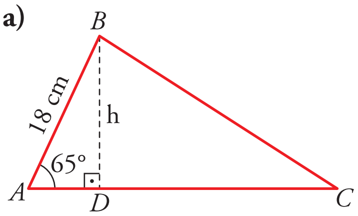


$tg\ \alpha = \dfrac{10}{9} = 1{,}\widehat{1} \rightarrow \alpha = 48°\ 46''$

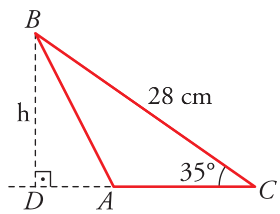
$\beta = 180° - 2\alpha = 83°\ 58'\ 28''$

18 □□□ **Calcula la altura, h, de los siguientes triángulos:**

a)



b)

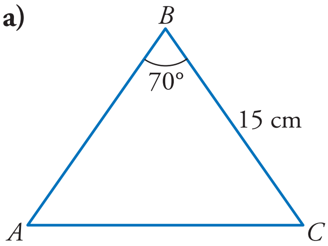


a) $sen\ 65° = \dfrac{h}{18} \rightarrow h \approx 16{,}3$ cm

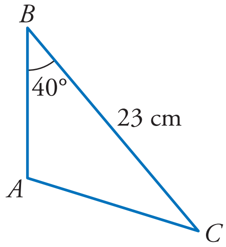
b) $sen\ 35° = \dfrac{h}{28} \rightarrow h \approx 16{,}1$ cm

19 **Calcula la altura sobre el lado *AB* en los siguientes triángulos:**

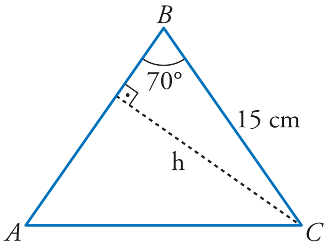
a)



b)

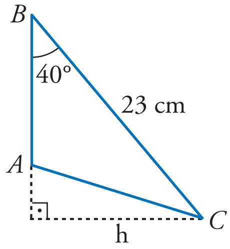


a)



$sen\ 70° = \frac{h}{15} \rightarrow h \approx 14{,}1$ cm

b)



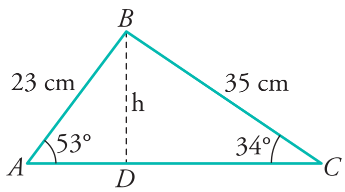
$sen\ 40° = \frac{h}{23} \rightarrow h \approx 14{,}8$ cm

20 **Halla:**

a) La longitud *AC*.

b) El área del triángulo *ABC*.

☞ ***Ten en cuenta que AC = AD + DC.***



$$\left.\begin{array}{l} \text{a) En } \widehat{ABD},\ cos\ 53° = \frac{\overline{AD}}{23} \rightarrow \overline{AD} \approx 13{,}84 \text{ cm} \\ \\ \text{En } \widehat{BDC},\ cos\ 34° = \frac{\overline{DC}}{35} \rightarrow \overline{DC} \approx 29 \text{ cm} \end{array}\right\} \overline{AC} \approx 13{,}84 + 29 = 42{,}84 \text{ cm}$$

b) Hallamos la altura h en el triángulo *ABD*:

$sen\ 53° = \frac{h}{23} \rightarrow h \approx 18{,}37$ cm

$$A_{ABC} = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} = \frac{42{,}84 \cdot 18{,}37}{2} \approx 393{,}49 \text{ cm}^2$$

Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

21 **Sitúa en la circunferencia goniométrica los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas.**

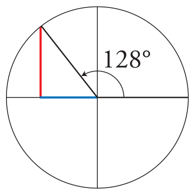
a) 128° **b)** 198°

c) 87° **d)** 98°

e) 285° **f)** 305°

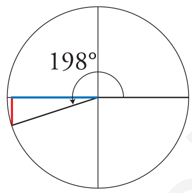
Compruébalo con la calculadora.

a)



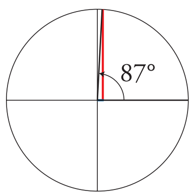
128°	
sen	+
cos	–
tg	–

b)



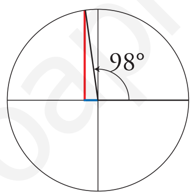
198°	
sen	–
cos	–
tg	+

c)



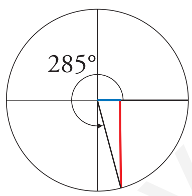
87°	
sen	+
cos	+
tg	+

d)



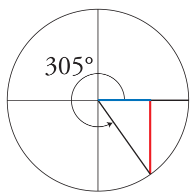
98°	
sen	+
cos	–
tg	–

e)



285°	
sen	–
cos	+
tg	–

f)



305°	
sen	–
cos	+
tg	–

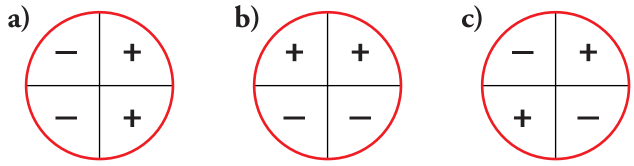
22 **Completa esta tabla sin usar la calculadora:**

	0°	90°	180°	270°	360°
sen		1			
cos		0			
tg		No tiene			

	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tg	0	No tiene	0	No tiene	0

7 Soluciones a los ejercicios y problemas

23 **En cada uno de estos círculos está indicado el signo de las razones trigonométricas de α, según el cuadrante en el que esté α. ¿Cuál corresponde a *sen* α. ¿Cuál a *cos* α? ¿Y cuál a *tg* α?**

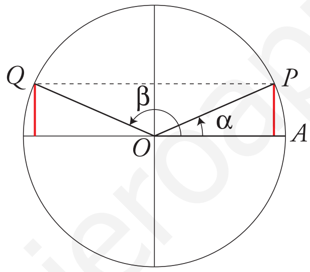


a) *cos* α b) *sen* α c) *tg* α

24 **Resuelto en el libro de texto.**

PÁGINA 163

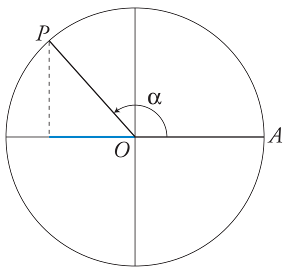
25 **Dibuja dos ángulos cuyo seno sea 2/5 y halla su coseno.**



$$sen\ \alpha = \frac{2}{5} \rightarrow cos\ \alpha = \pm\sqrt{1-\frac{4}{25}} = \pm\sqrt{\frac{21}{25}} = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$cos\ \widehat{AOP} = \frac{\sqrt{21}}{5};\ cos\ \widehat{AOQ} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

26 **Dibuja un ángulo menor que 180° cuyo coseno sea –2/3 y halla su seno y su tangente.**



El ángulo $\widehat{AOP}$ cumple las condiciones.

$$cos\ \alpha = -\frac{2}{3} \rightarrow sen\ \alpha = \pm\sqrt{1-\frac{4}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow sen\ \widehat{AOP} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$tg\ \widehat{AOP} = \frac{\sqrt{5}/3}{-2/3} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

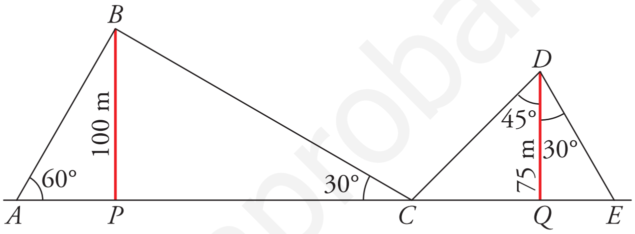
27 Sabiendo que $tg\,\alpha = -2$ y $\alpha < 180°$, halla $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = -2 \\ (sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = -2c \\ 4c^2 + c^2 = 1 \rightarrow 5c^2 = 1 \rightarrow c = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{array}$$

$$cos\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5};\quad sen\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

PIENSA Y RESUELVE

28 Dos antenas de radio están sujetas al suelo por cables tal como indica la figura. Calcula la longitud de cada uno de los tramos de cable y la distancia AE.



$$sen\,60° = \frac{100}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} \approx 115{,}47 \text{ m} \qquad tg\,60° = \frac{100}{\overline{AP}} \rightarrow \overline{AP} \approx 57{,}74 \text{ m}$$

$$sen\,30° = \frac{100}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = 200 \text{ m} \qquad tg\,30° = \frac{100}{\overline{PC}} \rightarrow \overline{PC} \approx 173{,}21 \text{ m}$$

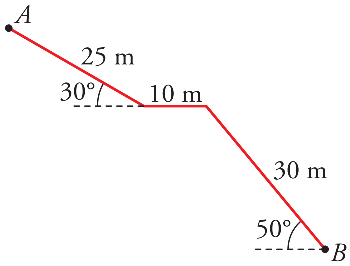
$$cos\,45° = \frac{75}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} \approx 106{,}07 \text{ m} \qquad tg\,45° = \frac{\overline{CQ}}{75} \rightarrow \overline{CQ} = 75 \text{ m}$$

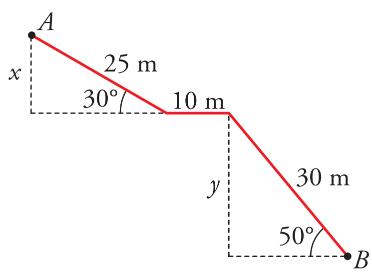
$$cos\,30° = \frac{75}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{DE} \approx 86{,}6 \text{ m} \qquad tg\,30° = \frac{\overline{QE}}{75} \rightarrow \overline{QE} \approx 43{,}3 \text{ m}$$

$$\overline{AE} = 57{,}74 + 173{,}21 + 75 + 43{,}3 = 349{,}25 \text{ m}$$

29 Una escalera para acceder a un túnel tiene la forma y las dimensiones de la figura.

Calcula la profundidad del punto B.



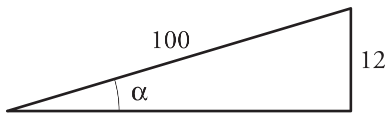


$$sen\,30° = \frac{x}{25} \rightarrow x = 12{,}5 \text{ m}$$

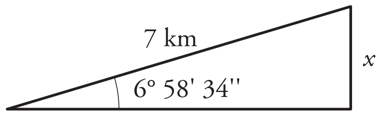
$$sen\,50° = \frac{y}{30} \rightarrow y \approx 22{,}98 \text{ m}$$

Profundidad: $12{,}5 + 22{,}98 = 35{,}48$ m

30 □□□ **Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?**

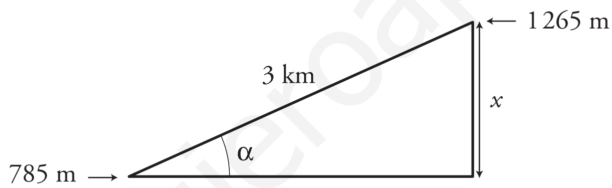


$$\textit{sen}\ \alpha = \frac{12}{100} = 0{,}12 \ \rightarrow\ \alpha = 6°\ 53'\ 32''$$



$$\textit{sen}\ \alpha = \frac{x}{7} \ \rightarrow\ x = 0{,}12 \cdot 7 = 0{,}84 \text{ km} = 840 \text{ m}$$

31 □□□ **En una ruta de montaña, una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1 265 m. Halla la pendiente media de esa ruta y el ángulo que forma con la horizontal.**



$x = 1\,265 - 785 = 480$ m

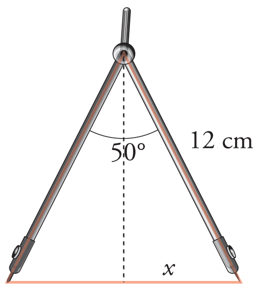
$$\textit{sen}\ \alpha = \frac{480}{3\,000} = 0{,}16 \ \rightarrow\ \alpha = 9°\ 12'\ 25''$$

Pendiente = $\textit{tg}\ \alpha = 0{,}162 \ \rightarrow\ 16{,}2\%$

32 □□□ **Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?**

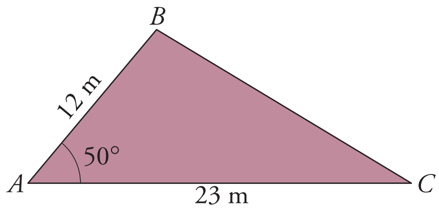
$$\textit{sen}\ 25° = \frac{x}{12} \ \rightarrow\ x \approx 5{,}07 \text{ cm}$$

Radio de la circunferencia ≈ 10,14 cm

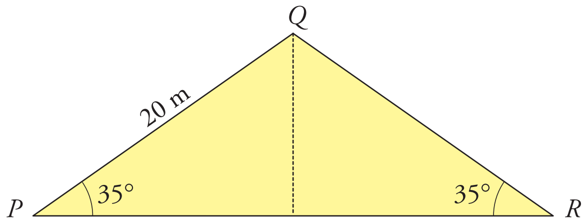


33 **Calcula el área de cada uno de estos triángulos:**

a)



b)



a) Calculamos la altura, h, sobre AC:

$$sen\ 50° = \frac{h}{12} \rightarrow h \approx 9,19 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{23 \cdot 9,19}{2} = 105,685 \text{ m}^2$$

b) Calculamos la altura, h, sobre PR:

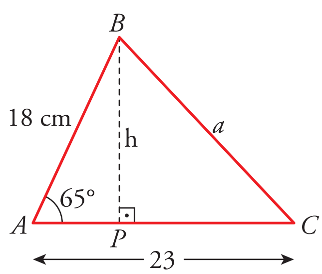
$$sen\ 35° = \frac{h}{20} \rightarrow h \approx 11,47 \text{ m}$$

Calculamos la base, $\overline{PR}$:

$$cos\ 35° = \frac{\overline{PR}/2}{20} \rightarrow \overline{PR} = 40 \cdot cos\ 35° \approx 32,77 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{32,77 \cdot 11,47}{2} \approx 188 \text{ m}^2$$

34 **En el triángulo *ABC* calcula h y *a*.**



- En el triángulo ABP:

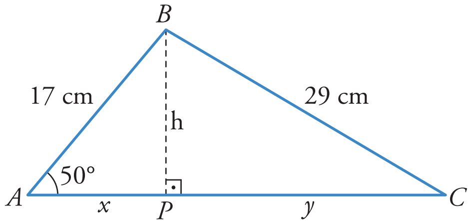
$$sen\ 65° = \frac{h}{18} \rightarrow h \approx 16,31 \text{ cm}$$

- $$cos\ 65° = \frac{\overline{AP}}{18} \rightarrow \overline{AP} \approx 7,61$$

$$\overline{PC} = \overline{AC} - \overline{AP} = 23 - 7,61 = 15,39$$

$$a = \sqrt{h^2 + \overline{PC}^2} = \sqrt{16,31^2 + 15,39^2} \approx 22,42 \text{ cm}$$

35 **En el triángulo ABC halla x, h e y.**



- En el triángulo ABP:

$cos\ 50° = \dfrac{x}{17} \rightarrow x \approx 10{,}93$ cm

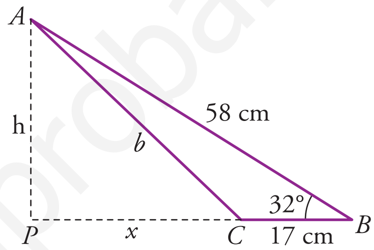
$sen\ 50° = \dfrac{h}{17} \rightarrow h \approx 13{,}02$ cm

- En el triángulo BCP:

$y = \sqrt{29^2 - h^2} = \sqrt{29^2 - 13{,}02^2} \approx 25{,}91$ cm

36 **Calcula h, x y b.**

En el triángulo PAB, $PB = x + 17$.

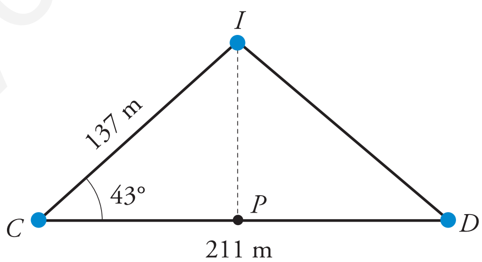


$sen\ 32° = \dfrac{h}{58} \rightarrow h \approx 30{,}74$ cm

$cos\ 32° = \dfrac{x + 17}{58} \rightarrow x \approx 32{,}19$ cm

$b = \sqrt{x^2 + h^2} \approx 44{,}51$ cm

37 **Conocemos la distancia de nuestra casa a la iglesia, 137 m; la distancia de nuestra casa al depósito de agua, 211 m, y el ángulo, 43°, bajo el cual se ve desde nuestra casa el segmento cuyos extremos son la iglesia y el depósito.**
¿Cuál es la distancia que hay de la iglesia al depósito de agua?



En el triángulo IPC:

$cos\ 43° = \dfrac{\overline{CP}}{137} \rightarrow \overline{CP} \approx 100{,}2$ m

$sen\ 43° = \dfrac{\overline{IP}}{137} \rightarrow \overline{IP} \approx 93{,}43$ m

$\overline{PD} = 211 - 100{,}2 = 110{,}8$ m

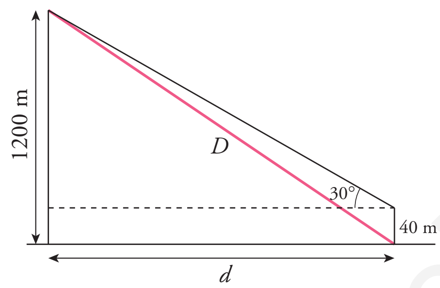
Distancia de la iglesia al depósito:

$\overline{ID} = \sqrt{\overline{PD}^2 + \overline{IP}^2} = \sqrt{110{,}8^2 + 93{,}43^2} \approx 144{,}93$ m

PÁGINA 164

38 ■■□ **Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento, el avión se encuentra a una altura de 1 200 metros y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de 30°.**

¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si esta mide 40 m de altura?



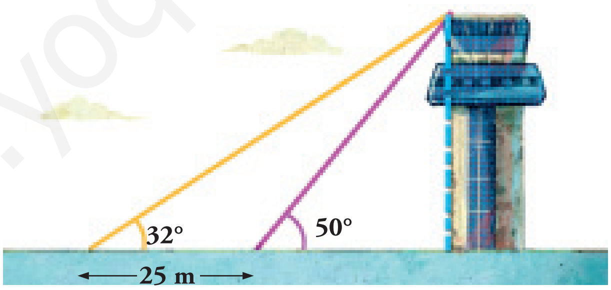
$tg\ 30° = \dfrac{1\,200 - 40}{d} \rightarrow d = \dfrac{1\,160}{tg\ 30°} = 2\,009{,}2$ m

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$D = \sqrt{(1\,200)^2 + (2\,009{,}2)^2} = 2\,340{,}3$ m

La distancia del avión al pie de la torre es de 2 340,3 m.

39 ■■□ **Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal.**



Si me acerco 25 m, el ángulo es de 50°. ¿Cuál es la altura de la torre?

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 32° = \dfrac{h}{25 + x} \\ tg\ 50° = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 25 tg\ 32° + x\ tg\ 32° = h \\ x \cdot tg\ 50° = h \end{array}\right\}$$

$25 tg\ 32° + x\ tg\ 32° = x\ tg\ 50°$

$25 tg\ 32° = x(tg\ 50° - tg\ 32°)$

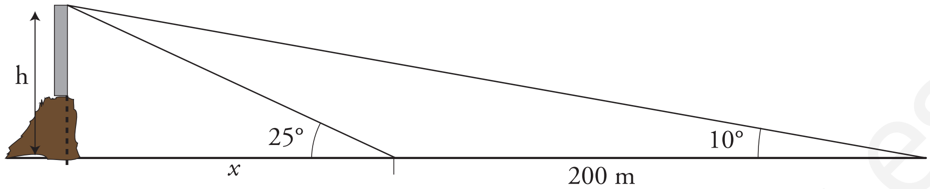
$x = \dfrac{25 tg\ 32°}{tg\ 50° - tg\ 32°} = 27{,}56$ m

La altura de la torre es $h = 27{,}56 \cdot tg\ 50° = 32{,}84$ m.

40 **Calcula la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas:**

— El ángulo que forma la visual hacia la luz con la línea de horizonte es de 25°.

— Nos alejamos 200 metros y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10°.



$tg\ 25° = \dfrac{h}{x} \rightarrow h = x\ tg\ 25°$

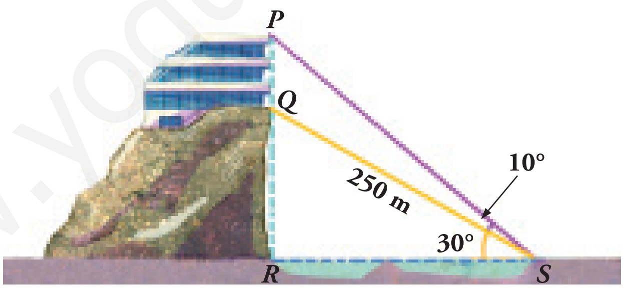
$tg\ 10° = \dfrac{h}{x + 200} \rightarrow h = (x + 200)tg\ 10°$

$x\ tg\ 25° = (x + 200)tg\ 10° \rightarrow x(tg\ 25° - tg\ 10°) = 200 \cdot tg\ 10° \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{200 \cdot tg\ 10°}{tg\ 25° - tg\ 10°} = 121{,}6$ m

$h = x\ tg\ 25° = 121{,}6 \cdot tg\ 25° = 56{,}7$ m

41 **Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q, cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$.**



Calculamos $\overline{SR}$ y $\overline{RQ}$ con el triángulo SQR:

$cos\ 30° = \dfrac{\overline{SR}}{250} \rightarrow \overline{SR} = 250 \cdot cos\ 30° \approx 216{,}5$ m

$sen\ 30° = \dfrac{\overline{RQ}}{250} \rightarrow \overline{RQ} = 250 \cdot sen\ 30° = 125$ m

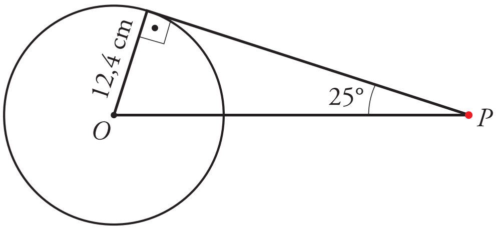
Calculamos $\overline{RP}$ con el triángulo SPR:

$tg\ 40° = \dfrac{\overline{RP}}{\overline{SR}} \rightarrow \overline{RP} = 216{,}5 \cdot tg\ 40° \approx 181{,}66$ m

Luego, $\overline{PQ} = \overline{RP} - \overline{RQ} = 181{,}66 - 125 = 56{,}66$ m

La altura del edificio es de 56,66 m.

42 □□□ **Las tangentes a una circunferencia de centro *O*, trazadas desde un punto exterior, *P*, forman un ángulo de 50°. Halla la distancia *PO* sabiendo que el radio de la circunferencia es 12,4 cm.**



$sen\ 25° = \dfrac{12,4}{\overline{PO}} \rightarrow$

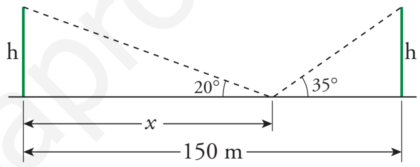
$\rightarrow \overline{PO} = \dfrac{12,4}{sen\ 25°} \approx 29,34$ cm

43 □□□ **Dos edificios distan entre sí 150 metros. Desde un punto del suelo que está entre los dos edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20°.**

¿Cuál es la altura de los edificios, si sabemos que los dos miden lo mismo?

$tg\ 20° = \dfrac{h}{x}$

$tg\ 35° = \dfrac{h}{150 - x}$



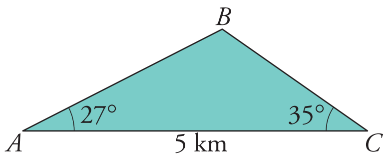
$$\left.\begin{array}{l} h = x\ tg\ 20° \\ h = (150 - x)\ tg\ 35° \end{array}\right\} (150 - x)\ tg\ 35° = x\ tg\ 20° \rightarrow x = \frac{150 \cdot tg\ 35°}{tg\ 20° + tg\ 35°} = 98,7 \text{ m}$$

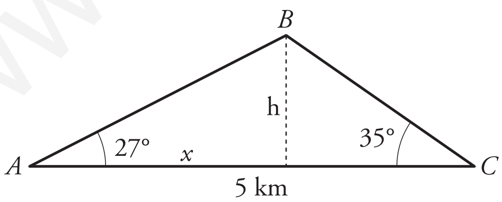
$h = 98,7 \cdot tg\ 20° = 35,92$ m

La altura de los dos edificios es de 35,92 m.

44 □□□ **En dos comisarías de policía, *A* y *C*, se escucha la alarma de un banco *B*.**

Con los datos de la figura, calcula la distancia del banco a cada una de las comisarías.





$$\left.\begin{array}{l} tg\ 27° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 35° = \dfrac{h}{5 - x} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} h = x\ tg\ 27° \\ h = (5 - x) tg\ 35° \end{array}\right\}$$

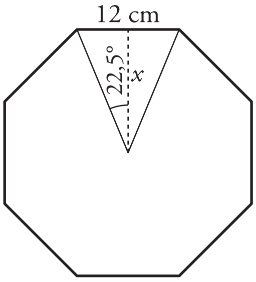
$(5 - x) tg\ 35° = x\ tg\ 27° \rightarrow 5 tg\ 35° = x\ tg\ 35° + x\ tg\ 27°$

$x = \dfrac{5 tg\ 35°}{tg\ 35° + tg\ 27°} = 2,89$ km $\rightarrow$ h = 1,47 km

$\overline{AB}^2 = x^2 + h^2 \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{2,89^2 + 1,47^2} = 3,24$ km

$\overline{BC}^2 = (5 - x)^2 + h^2 \rightarrow \overline{BC} = \sqrt{2,11^2 + 1,47^2} = 2,57$ km

45 **Halla el área de un octógono regular de 12 cm de lado.**

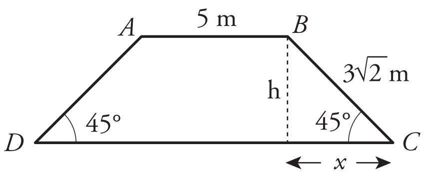


$$\frac{360°}{8} = 45°; \quad \frac{45°}{2} = 22{,}5°; \quad \text{apotema: } x$$

$$tg\ 22{,}5° = \frac{6}{x} \rightarrow x = 14{,}49 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{(12 \cdot 8) \cdot 14{,}49}{2} = 695{,}52 \text{ cm}^2$$

46 **En un trapecio isósceles de bases AB y DC, conocemos los lados $\overline{AB} = 5\text{m}$ y $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$ m, y los ángulos que forma la base mayor con los lados oblicuos, que son de 45°.**
Halla su área.



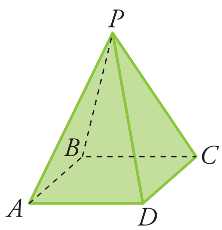
$$sen\ 45° = \frac{h}{3\sqrt{2}} \rightarrow h = 3 \text{ m}$$

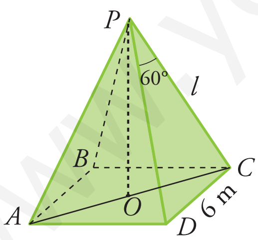
$$cos\ 45° = \frac{x}{3\sqrt{2}} \rightarrow x = 3 \text{ m}$$

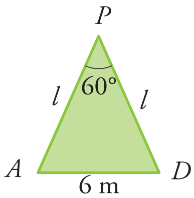
Base mayor: $5 + 3 + 3 = 11$ m

$$\text{Área} = \frac{(5 + 11) \cdot 3}{2} = 24 \text{ m}^2$$

47 **El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular mide 6 m y el ángulo $\widehat{APD} = 60°$. Halla su volumen.**

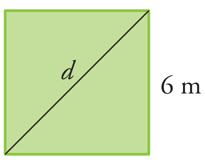






El triángulo APD es equilátero; $l = 6$ m

- Altura de la pirámide:



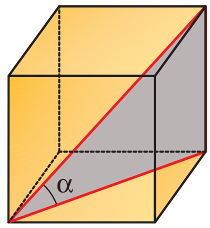
$$d^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ m}$$

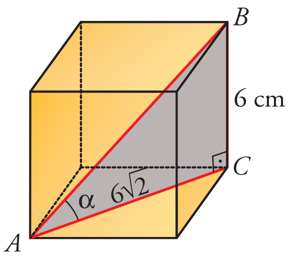
$$\overline{AO} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

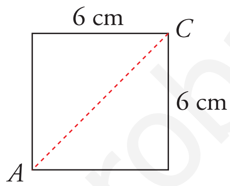
En el triángulo APO, $\overline{PO} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ m

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2} \text{ m}^3$$

48 ■■□ **Halla el ángulo que forma la diagonal de un cubo de arista 6 cm con la diagonal de la base.**





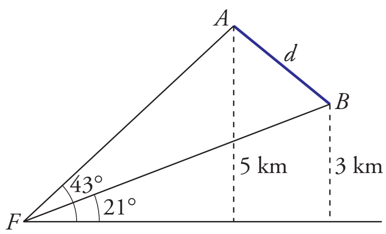


$\overline{AC}^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow \overline{AC} = 6\sqrt{2}$ cm

$tg\ \alpha = \dfrac{6}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = 35°\ 15'\ 52''$

49 ■■■ **Desde un faro F se observa un barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y unbarco B, bajo un ángulo de 21°. El barco A está a 5 km de la costa, y el B, a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.**

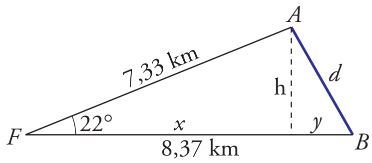
Calculamos $\overline{FA}$ y $\overline{FB}$:



$sen\ 43° = \dfrac{5}{\overline{FA}} \rightarrow \overline{FA} = \dfrac{5}{sen\ 43°} = 7,33$ km

$sen\ 21° = \dfrac{3}{\overline{FB}} \rightarrow \overline{FB} = \dfrac{3}{sen\ 21°} = 8,37$ km

Para calcular d utilizamos el triángulo de la derecha:



$sen\ 22° = \dfrac{5}{7,33}$

$h = 7,33 \cdot sen\ 22° = 2,74$ km

$cos\ 22° = \dfrac{x}{7,33} \rightarrow x = 7,33 \cdot cos\ 22° = 6,8$ km

$y = 8,37 - x \rightarrow y = 8,37 - 6,8 = 1,57$ km

Utilizando el teorema de Pitágoras:

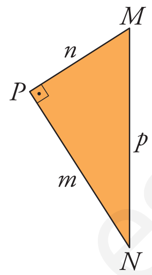
$d = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{2,74^2 + 1,57^2} = 3,16$ km

La distancia entre A y B es de 3,16 km.

PÁGINA 165

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

50 **Observa el triángulo rectángulo *MPN*, y en las siguientes igualdades, sustituye los puntos suspensivos por *sen*, *cos* o *tg*.**



a) $\ldots\ \hat{M} = \dfrac{m}{p}$ **b)** $\ldots\ \hat{N} = \dfrac{m}{p}$

c) $\ldots\ \hat{M} = \dfrac{m}{n}$ **d)** $\ldots\ \hat{N} = \dfrac{n}{p}$

a) $sen\ \hat{M} = \dfrac{m}{p}$ b) $cos\ \hat{N} = \dfrac{m}{p}$ c) $tg\ \hat{M} = \dfrac{m}{n}$ d) $sen\ \hat{N} = \dfrac{n}{p}$

51 **¿Existe algún ángulo α tal que $sen\ \alpha = 3/5$ y $tg\ \alpha = 1/4$?**

No, porque si $sen\ \alpha = \dfrac{3}{5}$, $cos\ \alpha = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$ y $tg\ \alpha = \dfrac{3/5}{4/5} = \dfrac{3}{4} \neq \dfrac{1}{4}$.

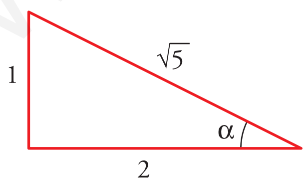
52 **¿Existe algún ángulo agudo cuyo seno sea mayor que la tangente? Justifica la respuesta.**

El seno es siempre menor que la tangente, porque

$$\text{seno} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{y} \quad \text{tangente} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto continguo}}$$

y la hipotenusa es, siempre, mayor que el cateto contiguo.

53 **En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide el doble que el otro. ¿Cuánto valen las razones trigonométricas del ángulo menor?**



$sen\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$; $cos\ \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; $tg\ \alpha = \dfrac{1}{2}$

54 **¿Puede existir un ángulo cuyo seno sea igual a 2? ¿Y uno cuyo coseno sea igual a 3/2? Razona las respuestas.**

No, porque el cateto opuesto es siempre menor que la hipotenusa y, por ello, el valor del seno de un ángulo agudo es siempre menor que 1.

El coseno es también menor que 1 por la misma razón. No puede ser igual a 3/2.

55 **Indica, en cada caso, en qué cuadrante está el ángulo α:**

a) $\boldsymbol{sen\ \alpha > 0,\ \ cos\ \alpha < 0}$

b) $\boldsymbol{tg\ \alpha > 0,\ \ cos\ \alpha > 0}$

c) $\boldsymbol{sen\ \alpha < 0,\ \ cos\ \alpha > 0}$

d) $\boldsymbol{sen\ \alpha < 0,\ \ cos\ \alpha < 0}$

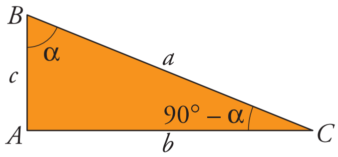
a) 2.° cuadrante.

b) 1.er cuadrante.

c) 4.° cuadrante.

d) 3.er cuadrante.

56 **Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se llaman complementarios porque su suma es uno recto. Observa la figura, completa la tabla y expresa simbólicamente lo que obtienes:**



	α	$90° - \alpha$
sen		
cos		
tg		

	α	$90° - \alpha$
sen	b/a	c/a
cos	c/a	b/a
tg	b/c	c/b

$sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha)$

$cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha)$

$tg\ \alpha = \dfrac{1}{tg(90° - \alpha)}$

57 **Usando las relaciones fundamentales, demuestra que:**

a) $\boldsymbol{(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 + (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 = 2}$

b) $\boldsymbol{\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{sen\ \alpha} = 1}$

c) $\boldsymbol{\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha}$

d) $\boldsymbol{1 + (tg\ \alpha)^2 = \dfrac{1}{(cos\ \alpha)^2}}$

a) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 + (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 =$

$= (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 + 2sen\ \alpha\ cos\ \alpha + (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 - 2sen\ \alpha\ cos\ \alpha = 1 + 1 = 2$

b) $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{sen\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha[(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2]}{sen\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha}{sen\ \alpha} = 1$

c) $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{cos\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha[(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2]}{cos\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

d) $1 + (tg\ \alpha)^2 = 1 + \dfrac{(sen\ \alpha)^2}{(cos\ \alpha)^2} = \dfrac{(cos\ \alpha)^2 + (sen\ \alpha)^2}{(cos\ \alpha)^2} = \dfrac{1}{(cos\ \alpha)^2}$

PROFUNDIZA

58 ■■□ **Sobre la circunferencia goniométrica señalamos un ángulo α en el primer cuadrante y a partir de él dibujamos los ángulos:**

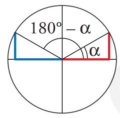
$$180° - \alpha \qquad 180° + \alpha \qquad 360° - \alpha$$

Busca la relación que existre entre:

a) $sen\ (180° - \alpha)$ **y** $sen\ \alpha$

$cos\ (180° - \alpha)$ **y** $cos\ \alpha$

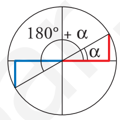
$tg\ (180° - \alpha)$ **y** $tg\ \alpha$



b) $sen\ (180° + \alpha)$ **y** $sen\ \alpha$

$cos\ (180° + \alpha)$ **y** $cos\ \alpha$

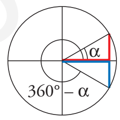
$tg\ (180° + \alpha)$ **y** $tg\ \alpha$



c) $sen\ (360° - \alpha)$ **y** $sen\ \alpha$

$cos\ (360° - \alpha)$ **y** $cos\ \alpha$

$tg\ (360° - \alpha)$ **y** $tg\ \alpha$



a) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha$

$cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha$

$tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha$

b) $sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha$

$cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha$

$tg\ (180° + \alpha) = tg\ \alpha$

c) $sen\ (360° - \alpha) = -sen\ \alpha$

$cos\ (360° - \alpha) = cos\ \alpha$

$tg\ (360° - \alpha) = -tg\ \alpha$

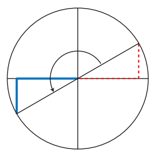
59 ■■□ **Sitúa el ángulo dado sobre la circunferencia goniométrica y expresa sus razones trigonométricas utilizando un ángulo agudo como en el ejemplo:**

Ejemplo: 215°

$sen\ 215° = -sen\ 35°$

$cos\ 215° = -cos\ 35°$

$tg\ 215° = tg\ 35°$



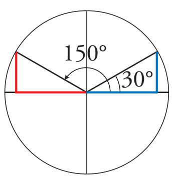
a) 150° **b)** 240° **c)** 300°

d) 225° **e)** 100° **f)** 320°

a) $sen\ 150° = sen\ 30°$

$cos\ 150° = -cos\ 30°$

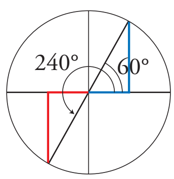
$tg\ 150° = -tg\ 30°$



b) $sen\ 240° = -sen\ 60°$

$cos\ 240° = -cos\ 60°$

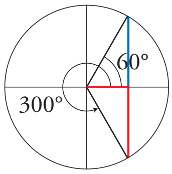
$tg\ 240° = tg\ 60°$



c) $sen\ 300° = -sen\ 60°$

$cos\ 300° = cos\ 60°$

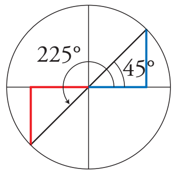
$tg\ 300° = -tg\ 60°$



d) $sen\ 225° = -sen\ 45°$

$cos\ 225° = -cos\ 45°$

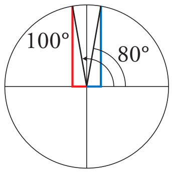
$tg\ 225° = tg\ 45°$



e) $sen\ 100° = sen\ 80°$

$cos\ 100° = -cos\ 80°$

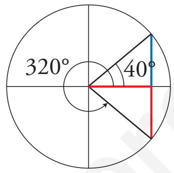
$tg\ 100° = -tg\ 80°$



f) $sen\ 320° = -sen\ 40°$

$cos\ 320° = cos\ 40°$

$tg\ 320° = -tg\ 40°$



60 **Resuelto en el libro de texto.**

61 **Resuelve las siguientes ecuaciones sabiendo que $0° \leq x \leq 360°$:**

a) $(sen\ x)^2 - sen\ x = 0$

b) $2(cos\ x)^2 - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$

c) $3\ tg\ x + 3 = 0$

d) $4(sen\ x)^2 - 1 = 0$

e) $2(cos\ x)^2 - cos\ x - 1 = 0$

a) $(sen\ x)^2 - sen\ x = 0$

$$sen\ x(sen\ x - 1) = 0 \quad \begin{cases} sen\ x = 0 & \begin{cases} x = 0 \\ x = 180° \end{cases} \\ sen\ x = 1 & \to\ x = 90° \end{cases}$$

b) $2(cos\ x)^2 - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$

$$cos\ x(2\ cos\ x - \sqrt{3}) = 0 \quad \begin{cases} cos\ x = 0 & \begin{cases} x = 90° \\ x = 270° \end{cases} \\ cos\ x = \sqrt{3}/2 & \begin{cases} x = 30° \\ x = 330° \end{cases} \end{cases}$$

c) $3\ tg\ x + 3 = 0 \ \to\ tg\ x = -1 \quad \begin{cases} x = 135° \\ x = 315° \end{cases}$

d) $4(sen\ x)^2 - 1 = 0 \rightarrow (sen\ x)^2 = \frac{1}{4}$

$$sen\ x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30°,\ x = 150°$$

$$sen\ x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 210°,\ x = 330°$$

e) $2(cos\ x)^2 - cos\ x - 1 = 0$

$$cos\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$cos\ x = 1 \rightarrow x = 0°$$

$$cos\ x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120°,\ x = 240°$$

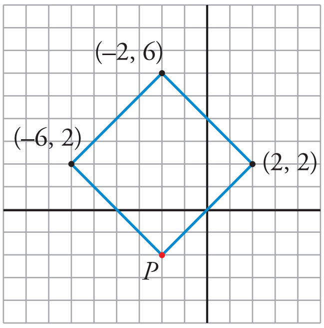
8 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 180

PRACTICA

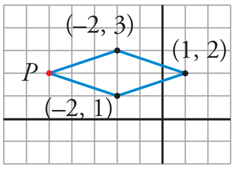
Puntos

1 □□□ **Si los puntos (–6, 2), (–2, 6) y (2, 2) son vértices de un cuadrado, ¿cuál es el cuarto vértice?**



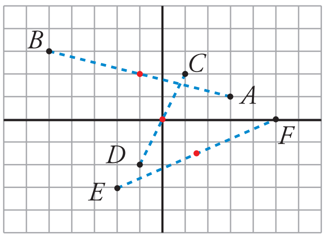
$P(-2, 2)$

2 □□□ **Los puntos (–2, 3), (1, 2) y (–2, 1) son vértices de un rombo. ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto vértice?**



$P(-5, 2)$

3 □□□ **Representa los puntos $A(3, 1)$, $B(-5, 3)$, $C(1, 2)$, $D(-1, -2)$, $E(-2, -3)$, $F(5, 0)$ y halla las coordenadas del punto medio de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$.**

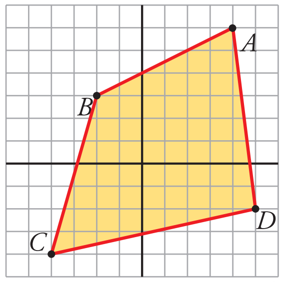


$$M_{AB} = \left(\frac{3-5}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (-1, 2)$$

$$M_{CD} = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = (0, 0)$$

$$M_{EF} = \left(\frac{-2+5}{2}, \frac{-3+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$$

4 □□□ **Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados y de las diagonales del cuadrilátero *ABCD*.**



$$A(4, 6),\ B(-2, 3),\ C(-4, -4),\ D(5, -2)$$

$$M_{AB} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+6}{2}\right) = \left(1, \frac{9}{2}\right) \qquad M_{BC} = \left(\frac{-2-4}{2}, \frac{3-4}{2}\right) = \left(-3, -\frac{1}{2}\right)$$

$$M_{CD} = \left(\frac{-4+5}{2}, \frac{-4-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -3\right) \qquad M_{AD} = \left(\frac{5+4}{2}, \frac{6-2}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 2\right)$$

$$M_{AC} = \left(\frac{4-4}{2}, \frac{6-4}{2}\right) = (0, 1) \qquad M_{BD} = \left(\frac{-2+5}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

5 □□□ **Halla, en cada caso, el punto simétrico de $A(-3, -5)$ respecto de:**

a) $P(-2, 0)$ **b)** $Q(2, -3)$ **c)** $O(0, 0)$

a) $\left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-5+y}{2}\right) = (-2, 0)$; $\left\{\begin{array}{l} \frac{-3+x}{2} = -2 \rightarrow x = -1 \\ \frac{-5+y}{2} = 0 \rightarrow y = 5 \end{array}\right\}$ $A'(-1, 5)$

b) $\left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-5+y}{2}\right) = (2, -3)$; $\left\{\begin{array}{l} \frac{-3+x}{2} = 2 \rightarrow x = 7 \\ \frac{-5+y}{2} = -3 \rightarrow y = -1 \end{array}\right\}$ $A'(7, -1)$

c) $\left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-5+y}{2}\right) = (0, 0)$; $\left\{\begin{array}{l} \frac{-3+x}{2} = 0 \rightarrow x = 3 \\ \frac{-5+y}{2} = 0 \rightarrow y = 5 \end{array}\right\}$ $A'(3, 5)$

6 □□□ **Si $M(-3, 5)$ es el punto medio del segmento *AB*, halla el punto *B* en cada uno de los siguientes casos:**

a) $A(-1, 5)$ **b)** $A(6, -4)$ **c)** $A(-4, -7)$

a) $\left(\frac{-1+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right) = (-3, 5) \rightarrow x = -5;\ y = 5 \rightarrow B(-5, 5)$

b) $\left(\frac{6+x}{2}, \frac{-4+y}{2}\right) = (-3, 5) \rightarrow x = -12;\ y = 14 \rightarrow B(-12, 14)$

c) $\left(\frac{-4+x}{2}, \frac{-7+y}{2}\right) = (-3, 5) \rightarrow x = -2;\ y = 17 \rightarrow B(-2, 17)$

7 □□□ **Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tienen el mismo punto medio. Halla las coordenadas del punto D, sabiendo que $A(-2, 3)$, $B(-3, -1)$, $C(4, -2)$.**

$$M_{AC} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$M_{BD} = \left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-1+y}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \quad \left.\begin{cases} \dfrac{-3+x}{2} = 1 \to x = 5 \\ \dfrac{-1+y}{2} = \dfrac{1}{2} \to y = 2 \end{cases}\right\} D(5, 2)$$

8 □□□ **Comprueba, en cada caso, que los puntos dados están alineados:**

a) $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(19, 8)$ **b)** $P(-2, -3)$, $Q(2, 0)$, $R(-26, -21)$

a) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \to \dfrac{3-2}{4-1} = \dfrac{8-3}{19-4} \to \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{15}$ Cierto.

b) $\dfrac{0+3}{2+2} = \dfrac{-21-0}{-26-2} \to \dfrac{3}{4} = \dfrac{21}{28}$ Cierto.

9 □□□ **Comprueba, en cada caso, si los puntos dados están alineados:**

a) $A(-1, 3)$, $B\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $C(-4, -2)$ **b)** $A(1, 0)$, $B(-3, -2)$, $C(5, 2)$

a) $\dfrac{1/2 - 3}{-5/2 + 1} = \dfrac{-2 - 1/2}{-4 + 5/2} \to \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$ Sí están alineados.

b) $\dfrac{-2-0}{-3-1} = \dfrac{2+2}{5+3} \to \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{4}{8}$ Sí están alineados.

10 □□□ **Calcula m para que los puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$ estén alineados.**

$$\frac{-2-1}{5+1} = \frac{m-1}{2+1} \to \frac{-1}{2} = \frac{m-1}{3} \to m = -\frac{3}{2} + 1 \to m = -\frac{1}{2}$$

Rectas

11 □□□ **Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:**

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$ **b)** $A(0, -2)$, $B(5, -2)$ **c)** $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$

a) $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \to \dfrac{y-0}{3-0} = \dfrac{x+1}{0+1} \to y = 3x + 3$

b) $\dfrac{y+2}{-2+2} = \dfrac{x-0}{5-0} \to \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{x}{5} \to y + 2 = 0 \to y = -2$

c) $\dfrac{y-3}{-1-3} = \dfrac{x+2}{4+2} \to 6(y-3) = -4(x+2) \to 6y - 18 = -4x - 8 \to$

$\to 4x + 6y - 10 = 0 \to 2x + 3y - 5 = 0$

12 **Escribe la ecuación de las siguientes rectas:**

a) Pasa por (–4, 2) y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por (1, 3) y su pendiente es –2.

c) Pasa por (5, –1) y su pendiente es 0.

a) $y = 2 + \frac{1}{2}(x + 4)$

b) $y = 3 - 2(x - 1)$

c) $y = -1 + 0(x - 5) \rightarrow y = -1$

13 **Halla la ecuación de las siguientes rectas:**

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por (4, 5).

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por (4, 0).

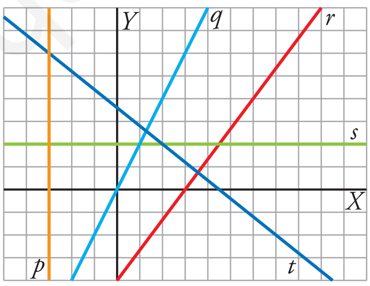
c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por (0, –3).

a) $m = -2;\ y = 5 - 2(x - 4)$

b) $m = \frac{1}{2};\ y = 0 + \frac{1}{2}(x - 4) \rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 4)$

c) $m = -\frac{3}{2};\ y = -3 - \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = -3 - \frac{3}{2}x$

14 **Escribe la ecuación de las rectas *p*, *q*, *r*, *s* y *t*.**



r: (0, –4) y (3, 0)

$$\frac{y + 4}{0 + 4} = \frac{x - 0}{3 - 0} \rightarrow 3y + 12 = 4x \rightarrow 4x - 3y - 12 = 0$$

s: $y = 2$

t: (2, 2) y (–3, 6)

$$\frac{y - 2}{6 - 2} = \frac{x - 2}{-3 - 2} \rightarrow -5y + 10 = 4x - 4 \rightarrow 4x + 5y - 14 = 0$$

p: $x = -3$

q: (0, 0) y (2, 4)

$$\frac{y - 0}{4 - 0} = \frac{x - 0}{2 - 0} \rightarrow 2y = 4x \rightarrow y = 2x$$

15 □□□ **Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y que pasa por el punto P en los siguientes casos:**

a) $r: y = -2x + 3$; $P(-3, 2)$

b) $r: 3x - 2y + 1 = 0$; $P(4, -1)$

c) $r: x = 3$; $P(0, 4)$

a) $m = \frac{1}{2}$; $y = 2 + \frac{1}{2}(x + 3)$

b) $m = -\frac{2}{3}$; $y = -1 - \frac{2}{3}(x - 4)$

c) $y = 4$

16 □□□ **Comprueba si los puntos $A(18, 15)$ y $B(-43, -5)$ pertenecen a la recta $x - 3y + 27 = 0$.**

A: $18 - 3 \cdot 15 + 27 = 0 \rightarrow A \in r$

B: $-43 - 3 \cdot (-5) + 27 \neq 0 \rightarrow B \notin r$

17 □□□ **Dados los puntos $A(-3, 2)$ y $B(5, 0)$, halla las ecuaciones de las rectas siguientes:**

r: pasa por A y es perpendicular a $\overline{AB}$.

s: pasa por B y es perpendicular a $\overline{AB}$.

$m_{AB} = \frac{0-2}{5+3} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$

r: pendiente $= 4$; $y = 2 + 4(x + 3) \rightarrow y = 4x + 14$

s: pendiente $= 4$; $y = 0 + 4(x - 5) \rightarrow y = 4x - 20$

18 □□□ **Calcula n y m para que las rectas**

$$r: 3x + my - 8 = 0 \qquad s: nx - 2y + 3 = 0$$

se corten en el punto $P(1, 5)$.

r: $3x + my - 8 = 0 \rightarrow 3 \cdot 1 + m \cdot 5 - 8 = 0 \rightarrow m = 1$

s: $nx - 2y + 3 = 0 \rightarrow n \cdot 1 - 10 + 3 = 0 \rightarrow n = 7$

PÁGINA 181

19 □□□ **Halla el punto de intersección de las rectas r y s en los casos siguientes:**

a) $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \\ s: 7x + 3y - 63 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r: 3x + 6 = 0 \\ s: 2y - 5 = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = -17 \\ 7x + 3y = 63 \end{array}\right\} \to \begin{array}{r} 9x - 15y = -51 \\ 35x + 15y = 315 \\ \hline 44x \qquad = 264 \end{array} \to x = 6$

$7 \cdot 6 + 3y = 63 \to 3y = 21 \to y = 7$

r y s se cortan en el punto $P(6, 7)$.

b) $\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 5/2 \end{array}\right\} \; P\left(-2, \dfrac{5}{2}\right)$

20 Estudia la posición relativa de las rectas:

$$\boldsymbol{r: 3x - 5y + 15 = 0 \quad \text{y} \quad s: \text{pasa por } (-2, -3) \text{ y } (8, 3)}$$

r: $3x - 5y + 15 = 0$

s: $m = \dfrac{3+3}{8+2} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$; $y = -3 + \dfrac{3}{5}(x + 2) \to$

$\to 5y = -15 + 3x + 6 \to 3x - 5y - 9 = 0$

Las rectas r y s son paralelas.

21 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{r: 2x - 5y + 3 = 0} \\ \boldsymbol{s: P(3, 1),\ Q(-2, 3)} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \boldsymbol{r: 5x - 4y + 8 = 0} \\ \boldsymbol{s: A(4, 7),\ B(0, 2)} \end{cases}$

a) • s: $P(3, 1)$, $Q(-2, 3)$

$m = \dfrac{3-1}{-2-3} = \dfrac{2}{-5} = -\dfrac{2}{5}$

$y = 1 - \dfrac{2}{5}(x - 3) \to 5y = 5 - 2x + 6 \to 2x + 5y - 11 = 0$

• $\begin{array}{l} r\text{: } 2x - 5y + 3 = 0 \\ s\text{: } 2x + 5y - 11 = 0 \\ \hline 4x \qquad - 8 = 0 \end{array} \to x = 2$

$2 \cdot 2 - 5y + 3 = 0 \to 5y = 7 \to y = \dfrac{7}{5}$

r y s se cortan en el punto $\left(2, \dfrac{7}{5}\right)$.

b) • s: $A(4, 7)$, $B(0, 2)$

$m = \dfrac{2-7}{-4} = \dfrac{5}{4}$; $y = 2 + \dfrac{5}{4}(x - 0) \to y = 2 + \dfrac{5}{4}x \to$

$\to 4y = 8 + 5x \to 5x - 4y + 8 = 0$

r: $5x - 4y + 8 = 0$

r y s son la misma recta.

22 □□□ **Halla la ecuación de la recta perpendicular a $\overline{AB}$ en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.**

$A(-5, 3),\ B(2, 7) \rightarrow m = \frac{7-3}{2+5} = \frac{4}{7};\ m' = -\frac{7}{4}$

$M_{AB} = \left(\frac{-5+2}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 5\right)$

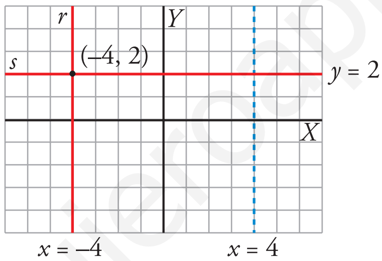
$y = 5 - \frac{7}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) \rightarrow y = 5 - \frac{7}{4}x - \frac{21}{8} \rightarrow 8y = 40 - 14x - 21 \rightarrow 14x + 8y - 19 = 0$

23 □□□ **Las rectas r y s pasan por el punto $(-4, 2)$; r es paralela a $3x - 12 = 0$ y s es perpendicular a ella. Representa r y s y halla su ecuación.**

$3x - 12 = 0 \rightarrow x = 4$

Paralela a $x = 4$ que pasa por $(-4, 2) \rightarrow r:\ x = -4$

Perpendicular a $x = 4$ que pasa por $(-4, 2) \rightarrow s:\ y = 2$



24 □□□ **La recta r es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, y la recta s es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto $(1, 3)$. Escribe las ecuaciones de las rectas r y s.**

$5x - 4y + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{5}{4}$

r es la recta de pendiente $\frac{5}{4}$ que pasa por $(1, 3)$:

$r:\ y = 3 + \frac{5}{4}(x - 1) \rightarrow 4y = 12 + 5x - 5 \rightarrow 5x - 4y + 7 = 0$

s es la recta de pendiente $-\frac{4}{5}$ que pasa por $(1, 3)$:

$s:\ y = 3 - \frac{4}{5}(x - 1) \rightarrow 5y = 15 - 4x + 4 \rightarrow 4x + 5y - 19 = 0$

Distancias y circunferencia

25 □□□ **Calcula la distancia entre P y Q:**

a) $P(3, 5),\ Q(3, -7)$ **b)** $P(-8, 3),\ Q(-6, 1)$

c) $P(0, -3),\ Q(-5, 1)$ **d)** $P(-3, 0),\ Q(15, 0)$

a) $d = \sqrt{(3-3)^2 + (5+7)^2} = \sqrt{12^2} = 12$

b) $d = \sqrt{(-8+6)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $d = \sqrt{5^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

d) $d = \sqrt{(-3-15)^2 + 0^2} = 18$

26 □□□ **a) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 0)$, $B(6, 4)$.**

b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.

a) $M\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (2, 2)$

b) $A(-2, 0) \rightarrow \overline{AM} = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$B(6, 4) \rightarrow \overline{MB} = \sqrt{(6-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

27 □□□ **Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?**

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \\ \overline{AC} = \sqrt{(-1-7)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} \\ \overline{BC} = \sqrt{(7-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{array}\right\} \overline{AB} = \overline{BC}$$

28 □□□ **Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 6)$ es rectángulo.**

$\overline{AB} = \sqrt{(-2-3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$\overline{AC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

$\overline{BC} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$\sqrt{58}^2 = \sqrt{29}^2 + \sqrt{29}^2$

29 □□□ **Escribe la ecuación de la circunferencia de centro C y radio r:**

a) $C(4, -3)$, $r = 3$ **b) $C(0, 5)$, $r = 6$**

c) $C(6, 0)$, $r = 2$ **d) $C(0, 0)$, $r = 5$**

a) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 9$ b) $x^2 + (y-5)^2 = 36$

c) $(x-6)^2 + y^2 = 4$ d) $x^2 + y^2 = 25$

30 □□□ **Di cuál es el centro y el radio de las circunferencias siguientes:**

a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ **b) $(x+1)^2 + y^2 = 81$** **c) $x^2 + y^2 = 10$**

a) $C(2, -3)$; $r = 4$ b) $C(-1, 0)$; $r = 9$ c) $C(0, 0)$; $r = \sqrt{10}$

31 **Halla la ecuación de las circunferencias siguientes:**

a) Centro $C(0, 0)$ y pasa por $(-3, 4)$.

b) Centro $C(1, 2)$ y pasa por $(5, 4)$.

a) radio: $\sqrt{(0+3)^2+(0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$x^2 + y^2 = 25$

b) $r = \sqrt{(1-5)^2+(2-4)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

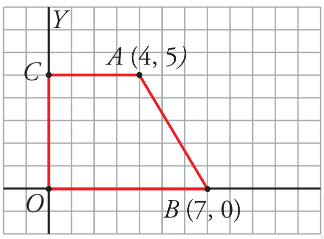
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$

PIENSA Y RESUELVE

32 **Los puntos $A(4, 5)$ y $B(7, 0)$ son vértices de un trapecio rectángulo que tiene dos lados sobre los ejes de coordenadas y otro lado paralelo al eje X. Dibuja el trapecio y halla:**

a) Las ecuaciones de sus lados. b) Su perímetro. c) Su área.

a)



OC: $x = 0$

OB: $y = 0$

AC: $y = 5$

AB: $\dfrac{y-0}{5-0} = \dfrac{x-7}{4-7} \rightarrow -3y = 5x - 35 \rightarrow 5x + 3y - 35 = 0$

b) $\overline{AC} = 4$; $\overline{OC} = 5$; $\overline{OB} = 7$; $\overline{AB} = \sqrt{(7-4)^2+(0-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$P = 4 + 5 + 7 + \sqrt{34} = 16\sqrt{34}$ u

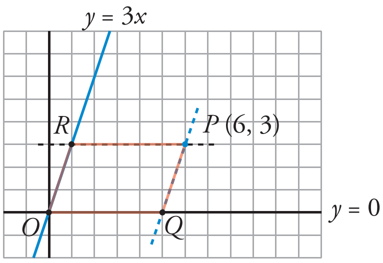
c) $A = \dfrac{7+4}{2} \cdot 5 = \dfrac{11}{2} \cdot 5 = \dfrac{55}{2}$ u^2

33 **Dibuja un paralelogramo que tenga dos de sus lados sobre las rectas $y = 3x$ e $y = 0$ y un vértice en el punto $P(6, 3)$.**

a) Halla las ecuaciones de los otros dos lados.

b) Di cuáles son las coordenadas de los otros vértices.

a)



OR: $y = 3x$

OQ: $y = 0$

PR: $y = 3$

PQ: $y = 3 + 3(x - 6) \rightarrow$

$\rightarrow y = 3 + 3x - 18 \rightarrow 3x - y - 15 = 0$

b) $O(0, 0)$, $Q(5, 0)$, $R(1, 3)$, $P(6, 3)$

34 □□□ **Determina los puntos que dividen al segmento de extremos $A(-5, -2)$, $B(7, 2)$ en cuatro partes iguales.**

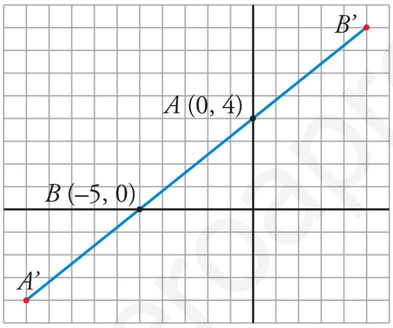
Punto medio de AB, $M\left(\frac{-5+7}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (1, 0)$

Punto medio de AM, $P\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = (-2, -1)$

Punto medio de BM, $Q\left(\frac{7+1}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (4, 1)$

Los puntos buscados son $M(1, 0)$, $P(-2, -1)$ y $Q(4, 1)$.

35 □□□ **Dados los puntos $A(0, 4)$ y $B(-5, 0)$, halla el punto simétrico de B respecto de A y el simétrico de A respecto de B.**



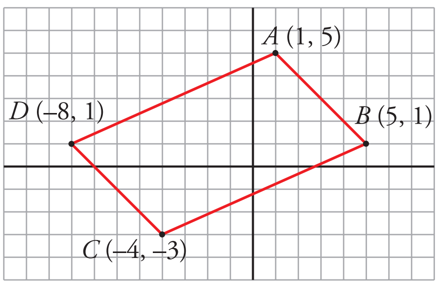
Simétrico de A respecto de B:

$$A'\left(\frac{0+x}{2}, \frac{4+y}{2}\right) = (-5, 0) \left\langle \begin{array}{l} \frac{x}{2} = -5 \rightarrow x = -10 \\ 4 + y = 0 \rightarrow y = -4 \end{array} \right\} A'(-10, -4)$$

Simétrico de B respecto de A:

$$B'\left(\frac{-5+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right) = (0, 4) \left\langle \begin{array}{l} -5 + x = 0 \rightarrow x = 5 \\ y = 8 \end{array} \right\} B'(5, 8)$$

36 □□□ **Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ y $D(-8, 1)$ es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.**



- Punto medio de AC:

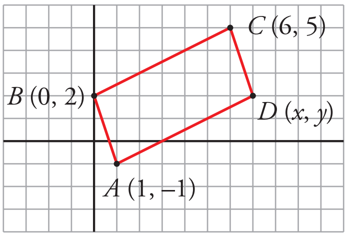
$$M_{AC} = \left(\frac{1-4}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

- Punto medio de BD:

$$M_{BD} = \left(\frac{5-8}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

Los puntos medios de las diagonales coinciden.

37 ■■□ **Halla las coordenadas del punto *D*, de modo que *ABCD* sea un paralelogramo, siendo $A(1, -1)$, $B(0, 2)$ y $C(6, 5)$.**



• Punto medio de AC:

$$M_{AC} = \left(\frac{6+1}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$$

• Punto medio de BD:

$$M_{BD} = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

Los puntos medios de las diagonales deben coincidir.

$\frac{x}{2} = \frac{7}{2} \rightarrow x = 7$

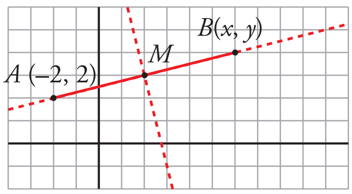
$\frac{y+2}{2} = 2 \rightarrow y = 4 - 2 = 2$

El punto D tiene coordenadas $D(7, 2)$.

38 ■■□ **El segmento AB está sobre la recta $x - 4y + 10 = 0$. Su mediatriz es la recta $4x + y - 11 = 0$. ¿Cuáles serán las coordenadas de B si las de A son $(-2, 2)$? Resuélvelo de forma gráfica y analítica.**

• Calculamos el punto de intersección de las rectas dadas:

$$\left.\begin{array}{r} x - 4y = -10 \\ 4x + y = 11 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} x - 4y = -10 \\ 16x + 4y = 44 \\ \hline 17x \quad = 34 \end{array} \rightarrow x = 2$$



$y = 11 - 4 \cdot 2 = 3$

El punto es $M(2, 3)$.

• El punto medio de AB es $(2, 3)$:

$$\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+2}{2}\right) = (2, 3) \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 4 \rightarrow x = 6 \\ y + 2 = 6 \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

El punto buscado es $B(6, 4)$.

PÁGINA 182

39 ■■□ **Resuelto en el libro de texto.**

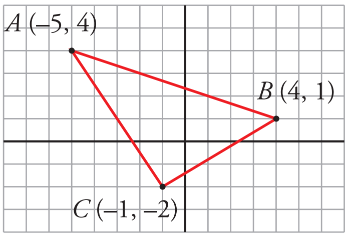
40 **Dado el triángulo de vértices $A(-5, 4)$, $B(4, 1)$, $C(-1, -2)$, halla:**

a) Las ecuaciones de los tres lados.

b) El punto medio del lado AC.

c) La ecuación de la mediana del vértice B.

a)



• Lado AB:

$$m = \frac{4-1}{-5-4} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$y = 1 - \frac{1}{3}(x-4) \rightarrow 3y = 3 - x + 4 \rightarrow$$
$$\rightarrow x + 3y - 7 = 0$$

• Lado AC:

$$m = \frac{4+2}{-5+1} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

$$y = -2 - \frac{3}{2}(x+1) \rightarrow 2y = -4 - 3x - 3 \rightarrow 3x + 2y + 7 = 0$$

• Lado BC:

$$m = \frac{1+2}{4+1} = \frac{3}{5}$$

$$y = 1 + \frac{3}{5}(x-4) \rightarrow 5y = 5 + 3x - 12 \rightarrow 3x - 5y - 7 = 0$$

b) $M_{AC} = \left(\dfrac{-5-1}{2}, \dfrac{4-2}{2}\right) = (-3, 1)$

c) La mediana que corresponde a B pasa, también, por el punto medio de AC, M_{AC}.

$$m = \frac{1-1}{4+3} = 0$$

$$y = 1 + 0(x+3) \rightarrow y = 1$$

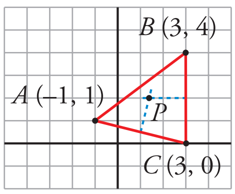
41 **En el triángulo de vértices $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$, y $C(3, 0)$, halla:**

a) La ecuación de la mediatriz de BC.

b) La ecuación de la mediatriz de AC.

c) El punto de intersección de las mediatrices (el circuncentro del triángulo).

a) La mediatriz de BC es la perpendicular a BC por su punto medio, M_{BC}.



$$M_{BC} = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (3, 2)$$

La recta que contiene a BC es $x = 3$. Su perpendicular por $(3, 2)$ es $y = 2$, mediatriz de BC.

b) $M_{AC} = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Pendiente de la recta que contiene a AC, $m = \frac{1-0}{-1-3} = -\frac{1}{4}$.

Pendiente de la perpendicular a AC, $m' = 4$.

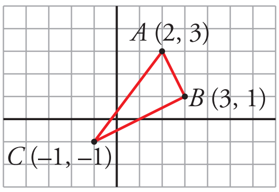
Mediatriz de AC: $y = \frac{1}{2} + 4(x-1) \rightarrow 2y = 1 + 8x - 8 \rightarrow 2y - 8x + 7 = 0$

c) Circuncentro, P:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ 2y - 8x + 7 = 0 \end{array}\right\} \ 4 - 8x + 7 = 0 \rightarrow 8x = 11 \rightarrow x = 11/8$$

Las coordenadas de P son $\left(\frac{11}{8}, 2\right)$.

42 ■■□ **Comprueba que el triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(3, 1)$ y $C(-1, -1)$ es rectángulo y halla su perímetro y su área.**



$\overline{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\overline{AC} = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$\overline{BC} = \sqrt{(3+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

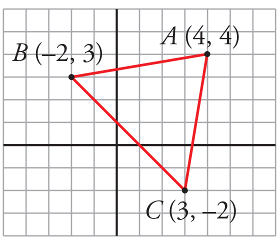
Comprobamos que el triángulo es rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras:

$5^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{20})^2 \rightarrow 25 = 5 + 20$

Perímetro $= \sqrt{5} + 5 + \sqrt{20} = 5 + 3\sqrt{5}$ u

Área $= \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5$ u^2

43 ■■■ **Comprueba que el triángulo de vértices $A(4, 4)$, $B(-2, 3)$ y $C(3, -2)$ es isósceles y calcula su área.**



$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \sqrt{(4+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37} \\ \overline{AC} = \sqrt{(4-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37} \end{array}\right\} \ \overline{AB} = \overline{AC}$$

$\overline{BC} = \sqrt{(3+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Calculamos la altura sobre el lado BC:

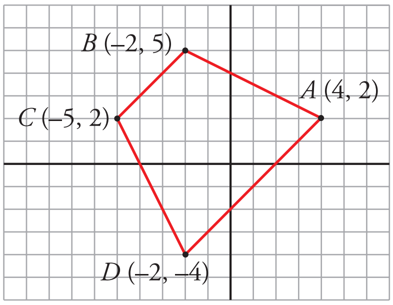
$$M_{BC} = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

La altura es la distancia entre A y el punto medio de BC:

$$h = \sqrt{\left(4-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(4-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} \cdot 2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{Área} = \frac{5\sqrt{2} \cdot (7/2)\sqrt{2}}{2} = \frac{35}{2}\ \text{u}^2$$

44 **Prueba que el cuadrilátero de vértices $A(4, 2)$, $B(-2, 5)$, $C(-5, 2)$ y $D(-2, -4)$ es un trapecio isósceles y calcula su perímetro.**



- Probamos que BC es paralelo a AD hallando las pendientes de las rectas que los contienen:

$$m_{BC} = \frac{5-2}{-2+5} = \frac{3}{3} = 1$$

$$m_{AD} = \frac{2+4}{4+2} = 1$$

- Probamos que $\overline{AB} = \overline{CD}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(-5+2)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Por tanto, el trapecio $ABCD$ es isósceles.

- Perímetro:

$$\overline{BC} = \sqrt{(-2+5)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(4+2)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$$

$$P = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 6\sqrt{5} + 9\sqrt{2}\ \text{u}$$

45 **Halla en cada caso la ecuación de la circunferencia concéntrica con la dada y cuyo radio mida la mitad:**

a) $x^2 + (y-5)^2 = 36$ **b)** $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 12$

a) Centro, $(0, 5)$; radio, 6.

La circunferencia con centro en $(0, 5)$ y radio 3 es: $x^2 + (y-5)^2 = 9$

b) Centro $(4, -3)$; radio, $\sqrt{12}$.

La circunferencia de centro $(4, -3)$ y radio $\frac{\sqrt{12}}{2}$ es:

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = \left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^2 \rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 3$$

46 ■■□ **Halla la ecuación de la circunferencia de diámetro *PQ*, siendo *P*(–5, 2) y *Q*(3, –6).**

El centro de la circunferencia es el punto medio de PQ, $M = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{2-6}{2}\right) = (-1, -2)$.

El radio es la mitad de $\overline{PQ}$:

$\overline{PQ} = \sqrt{(3+5)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2}$

Radio $= 4\sqrt{2}$

Ecuación: $(x+1)^2 + (y+2)^2 = (4\sqrt{2})^2$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 32$

47 ■■□ **Determina los puntos de corte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 50$ con la bisectriz del primer cuadrante.**

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 50 \\ x = y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 + x^2 = 50 \to 2x^2 = 50 \to x^2 = 25 \\ x = 5 \to y = 5 \\ x = -5 \to y = -5 \end{array}$$

Los puntos de corte son $P(5, 5)$ y $Q(-5, -5)$.

48 ■■□ **Calcula *k* para que el punto (–3, *k*) pertenezca a la circunferencia $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$.**

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$

$(-3-1)^2 + (k+2)^2 = 25 \to 16 + k^2 + 4k + 4 - 25 = 0 \to k^2 + 4k - 5 = 0$

$$k = \frac{-4 \pm 6}{2} \begin{cases} k = -5 \\ k = 1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones, $k = -5$, $k = 1$.

49 ■■□ **Dadas las rectas:**

$$r: 3x + by - 12 = 0 \qquad s: ax - y + 6 = 0$$

calcula el valor de *a* y *b* sabiendo que *r* y *s* son perpendiculares y que *r* pasa por el punto (9, –15/2).

- Como r: $3x + by - 12 = 0$ pasa por $\left(9, -\frac{15}{2}\right)$:

$3 \cdot 9 + b \cdot \left(-\frac{15}{2}\right) - 12 = 0 \to 27 - \frac{15b}{2} - 12 = 0 \to$

$\to 15 = \frac{15b}{2} \to \frac{2 \cdot 15}{15} = b \to b = 2$

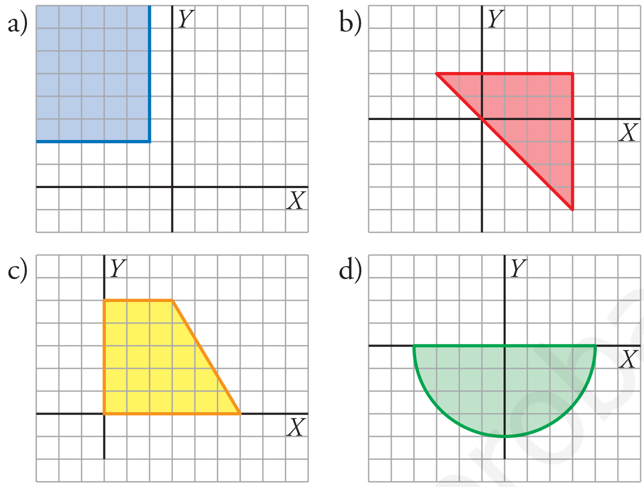
- r y s son perpendiculares:

$m_r = -\frac{3}{2} \to m_s = \frac{2}{3} = a \to a = \frac{2}{3}$

50 ■■□ **Resuelto en el libro de texto.**

PÁGINA 183

51 **Describe mediante inecuaciones o sistemas de inecuaciones, los siguientes recintos:**



a) $\left.\begin{array}{l} x \le -1 \\ y \ge 2 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x + 1 \le 0 \\ y - 2 \ge 0 \end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{l} y \le 2 \\ x \le 4 \\ x \ge -y \end{array}\right\} \to \begin{cases} y - 2 \le 0 \\ x - 4 \le 0 \\ x + y \ge 0 \end{cases}$

c) El lado oblicuo del trapecio pasa por (6, 0) y (3, 5). Su ecuación es:

$\dfrac{y-5}{0-5} = \dfrac{x-3}{6-3} \to 3y - 15 = -5x + 15 \to 5x + 3y = 30$

Probamos con el punto (1, 1) que está dentro del recinto:

$5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8 < 30$

Las ecuaciones del recinto son:

$\begin{cases} 5x + 3y \le 30 \\ x \ge 0 \\ 0 \le y \le 5 \end{cases}$

d) • El arco corresponde a una circunferencia de centro (0, 0) y radio 4. Su ecuación es $x^2 + y^2 = 16$.

Para el punto (0, –1), que está dentro de la región, $x^2 + y^2 \le 16$.

• El segmento recto corresponde a la recta de ecuación $y = 0$.

Para el punto (0, –1), que está dentro de la región, $y \le 0$.

Expresiones que representan la región: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16 \\ y \le 0 \end{cases}$

52 **Representa gráficamente los siguientes recintos:**

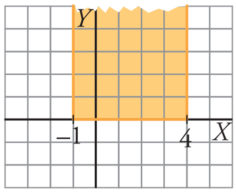
a) $\begin{cases} -1 \le x \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y \le 0 \\ x \le 3 \end{cases}$

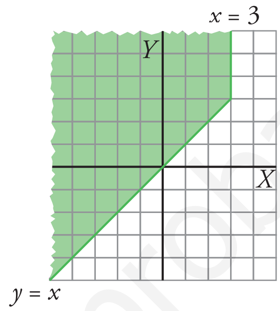
c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ y \ge 0 \\ x \le 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \le 0 \\ -5 \le y \le 0 \\ 5x - 2y \ge -10 \end{cases}$

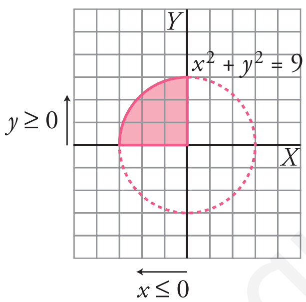
a)



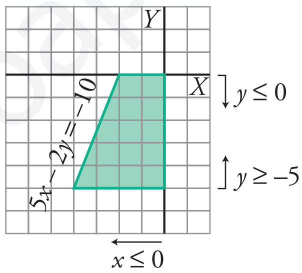
b)



c)



d)



REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

53 **Si dos rectas r_1 y r_2 son perpendiculares, ¿cuál de estas condiciones cumplirán sus pendientes?**

a) $m_1 = \frac{1}{m_2}$ **b)** $m_1 = -m_2$ **c)** $m_1 \cdot m_2 = -1$ **d)** $m_1 + m_2 = -1$

La c), $m_1 \cdot m_2 = -1$, que equivale a $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

54 **Sabes que la expresión $ax + by + c = 0$ es la ecuación de una recta. Di cómo es la recta en los siguientes casos:**

a) $a = 0$ **b)** $b = 0$ **c)** $c = 0$ **d)** $a = 0,\ c = 0$

a) $by + c = 0$ es paralela al eje OX.

b) $ax + c = 0$ es paralela al eje OY.

c) $ax + by = 0$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas, (0, 0).

d) $by = 0 \rightarrow y = 0$. Es el eje OX.

55 ■□□ **¿Cuál de las rectas**

$$r: y = 3x + 1 \qquad s: y = -\frac{1}{3}x \qquad t: y + 3x = 0$$

es perpendicular a $y = \frac{1}{3}x + 1$**?**

La pendiente de $y = \frac{1}{3}x + 1$ es $m = \frac{1}{3}$.

La pendiente de una recta perpendicular a ella debe ser –3.

$t: y + 3x = 0$ es perpendicular a la recta $y = \frac{1}{3}x + 1$.

56 ■■□ **¿Cuál de estas dos ecuaciones**

$$x^2 + (y + 1)^2 = \frac{4}{9} \qquad x^2 + y^2 + 25 = 0$$

representa una circunferencia? Di su centro y su radio.

$x^2 + (y + 1)^2 = \frac{4}{9}$ representa una circunferencia.

Su centro es el punto (0, –1), y su radio, $\frac{2}{3}$.

57 ■□□ **¿Cuál de estas expresiones nos da la distancia entre** $P(x_1, y_1)$ **y** $Q(x_2, y_2)$**?**

a) $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$

b) $\sqrt{(x_2 + x_1)^2 - (y_2 + y_1)^2}$

c) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

d) $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$

La c), $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

58 ■■■ **Si las rectas** $ax + by + c = 0$ **y** $a'x + b'y + c' = 0$ **son paralelas, ¿cuál de estas dos condiciones cumplen?**

a) $aa' + bb' = 0$

b) $ab' - a'b = 0$

¿Y si son perpendiculares?

Las pendientes de las rectas son, respectivamente:

$$m = -\frac{a}{b}, \quad m' = -\frac{a'}{b'}$$

Si las rectas son paralelas, sus pendientes son iguales:

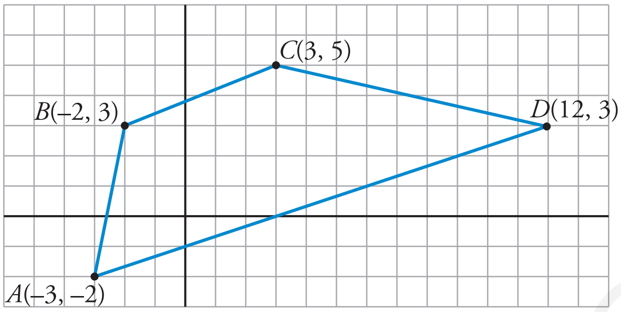
$$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \rightarrow ab' = a'b \rightarrow ab' - a'b = 0$$

Si las rectas son perpendiculares, $m = -\frac{1}{m'}$:

$$-\frac{a}{b} = \frac{b'}{a'} \rightarrow -aa' = bb' \rightarrow aa' + bb' = 0$$

PROFUNDIZA

59 **La figura adjunta parece un trapecio. Comprueba si realmente lo es. Si no lo es, rectifica las coordenadas del punto D para que sí lo sea.**



Veamos si BC es paralelo a AD, calculando sus pendientes:

$$\left.\begin{array}{l} m_{BC} = \dfrac{5-3}{3+2} = \dfrac{2}{5} \\ m_{AD} = \dfrac{3+2}{12+3} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} m_{BC} \neq m_{AD} \rightarrow ABCD \text{ no es un trapecio.}$$

Rectificamos el punto D para que las pendientes m_{BC} y m_{AD} sean iguales. Sea $D(a, b)$:

$$m_{AD} = \frac{b+2}{a+3} = m_{BC} = \frac{2}{5}$$

Si, por ejemplo, mantenemos la primera coordenada de $D(12, b)$:

$$\frac{b+2}{12+3} = \frac{2}{5} \rightarrow b + 2 = 6 \rightarrow b = 4$$

Podemos tomar $D(12, 4)$ (también es válido $D(7, 2)$).

60 **Halla un punto de la bisectriz del primer cuadrante que diste 5 unidades del punto (8, 7).**

Un punto de la bisectriz del primer cuadrante es de la forma (a, a), con $a \geq 0$.

$$dist = \sqrt{(8-a)^2 + (7-a)^2} = 5 \rightarrow a^2 + 64 - 16a + a^2 + 49 - 14a = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2a^2 - 30a + 88 = 0 \rightarrow a^2 - 15a + 44 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 176}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{15 \pm 7}{2} = \begin{cases} 11 \\ 4 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $P(4, 4)$, $Q(11, 11)$.

61 **Las rectas $r: x - y + 1 = 0$; $s: x + y + 9 = 0$; $t: 4x - y - 14 = 0$ forman un triángulo ABC.**

a) Calcula las coordenadas de A, B y C.

b) Halla el circuncentro del triángulo.

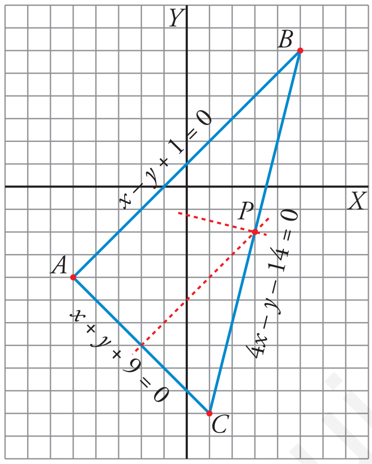
a) Los vértices del triángulo son los puntos donde se intersecan las rectas.

$$r \cap s \left\{ \begin{array}{l} x - y + \ \ 1 = 0 \\ x + y + \ \ 9 = 0 \\ \hline 2x \qquad + 10 = 0 \ \to \ x = -5, \ y = -4 \end{array} \right\} \ r \cap s\text{: } A(-5, -4)$$

$$r \cap t \left\{ \begin{array}{l} x - y + \ \ 1 = 0 \\ 4x - y - 14 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -x + y - 1 = 0 \\ 4x - y - 14 = 0 \\ \hline 3x \qquad - 15 = 0 \ \to \ x = 5, \ y = 6 \end{array} \left. \right\} \ r \cap t\text{: } B(5, 6)$$

$$s \cap t \left\{ \begin{array}{l} x + y + 9 = 0 \\ 4x - y - 14 = 0 \\ \hline 5x \qquad - \ \ 5 = 0 \ \to \ x = 1, \ y = -10 \end{array} \right\} \ s \cap t\text{: } C(1, -10)$$

b)



El circuncentro es el punto en el que se intersecan las mediatrices.

La mediatriz es la perpendicular por el punto medio.

- Mediatriz de AC:

  Pendiente de la recta que contiene a AC, $m_{AC} = \dfrac{-10 + 4}{1 + 5} = -1$.

  Pendiente de la mediatriz de AC, $m'_1 = 1$.

  Punto medio de AC, $M_{AC} = \left(\dfrac{-5 + 1}{2}, \dfrac{-4 - 10}{2}\right) = (-2, -7)$.

  Ecuación de la mediatriz de AC:

  $y = -7 + (x + 2) \ \to \ y = x - 5$

- Mediatriz de BC:

  Pendiente de la recta que contiene a BC, $m_{BC} = \dfrac{-10 - 6}{1 - 5} = 4$.

  Pendiente de la mediatriz de BC, $m'_2 = -\dfrac{1}{4}$.

  Punto medio de BC, $M_{BC} = \left(\dfrac{5 + 1}{2}, \dfrac{6 - 10}{2}\right) = (3, -2)$.

  Ecuación de la mediatriz de BC:

  $y = -2 - \dfrac{1}{4}(x - 3) \ \to \ 4y = -8 - x + 3 \ \to \ 4y + x + 5 = 0$

- Calculamos el circuncentro:

$$\left.\begin{array}{l} y = x - 5 \\ 4y + x + 5 = 0 \end{array}\right\} \; 4x - 20 + x + 5 = 0 \;\rightarrow\; 5x = 15 \;\rightarrow\; x = 3$$

$x = 3 \;\rightarrow\; y = -2$

El circuncentro es el punto $P(3, -2)$.

62 **Dada la recta $r: x - 2y + 1 = 0$ y el punto $A(-1, 5)$, calcula:**

a) La ecuación de la recta s perpendicular a r y que pasa por A.

b) El punto de intersección de r y s, M.

c) El simétrico de A respecto de M.

a) $m_r = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; m_s = -2$

$s: \; y = 5 - 2(x + 1) \;\rightarrow\; y = 3 - 2x$

b) $$\left.\begin{array}{l} x - 2y + 1 = 0 \\ y = 3 - 2x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x - 2(3 - 2x) + 1 = 0 \;\rightarrow \\ \rightarrow\; x - 6 + 4x + 1 = 0 \;\rightarrow\; 5x = 5 \;\rightarrow\; x = 1 \end{array}$$

$x = 1 \;\rightarrow\; y = 3 - 2 = 1$

Las coordenadas de M son $M(1, 1)$.

c) M es el punto medio de A y su simétrico $A'(x, y)$:

$$\left(\frac{-1 + x}{2}, \frac{5 + y}{2}\right) = (1, 1) \left\langle \begin{array}{l} -1 + x = 2 \;\rightarrow\; x = 3 \\ 5 + y = 2 \;\rightarrow\; y = -3 \end{array}\right.$$

Las coordenadas de A' son $A'(3, -3)$.

63 **La recta $y = 2x + 1$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto $A(-6, 4)$. Halla las coordenadas del otro extremo.**

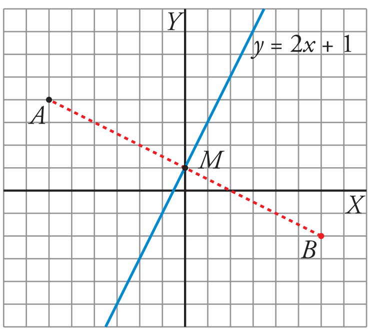
Sea B el otro extremo del segmento.

La pendiente de la mediatriz es $m = 2$.

La recta que contiene a AB tiene pendiente $-\dfrac{1}{2}$ y pasa por $A(-6, 4)$:

$r: \; y = 4 - \dfrac{1}{2}(x + 6) \;\rightarrow\; 2y = 8 - x - 6 \;\rightarrow\; x + 2y - 2 = 0$

El punto de corte de la mediatriz con esta recta r será el punto medio de AB. Lo calculamos:



$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ y = 2x + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 4x + 2 - 2 = 0 \;\rightarrow \\ \rightarrow\; 5x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \end{array}$$

$x = 0 \;\rightarrow\; y = 1; \; M(0, 1)$

$A(-6, 4), \; B(a, b), \; M(0, 1)$

$$\left(\frac{-6 + a}{2}, \frac{4 + b}{2}\right) = (0, 1) \left\langle \begin{array}{l} -6 + a = 0 \;\rightarrow\; a = 6 \\ 4 + b = 2 \;\rightarrow\; b = -2 \end{array}\right.$$

El otro extremo del segmento es $B(6, -2)$.

PÁGINA 201

PRACTICA

Tablas de frecuencias

1 **El número de faltas de ortografía que cometieron un grupo de estudiantes en un dictado fue:**

0	**3**	**1**	**2**	**0**	**2**	**1**	**3**	**0**	**4**
0	**1**	**1**	**4**	**3**	**5**	**3**	**2**	**4**	**1**
5	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**1**
2	**1**	**0**	**0**	**3**	**0**	**5**	**3**	**2**	**1**

a) Di cuál es la variable y de qué tipo es.

b) Haz una tabla de frecuencias y representa los datos en un diagrama adecuado.

a) Variable: "Número de faltas de ortografía"

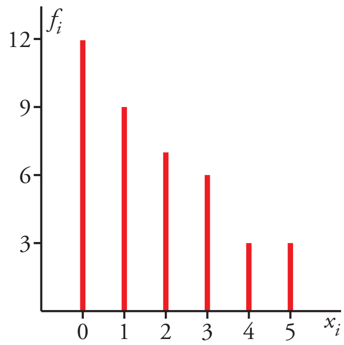
Es una variable cuantitativa discreta.

Llamamos x_i a dicha variable y sus valores son 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

b) Tabla de frecuencias:

x_i	f_i
0	12
1	9
2	7
3	6
4	3
5	3
	40

Diagrama de barras:



2 **Las urgencias atendidas durante un mes en un centro de salud fueron:**

1	**5**	**3**	**2**	**1**	**6**	**4**	**2**	**2**	**3**
4	**3**	**5**	**1**	**0**	**1**	**5**	**3**	**3**	**6**
2	**4**	**6**	**3**	**2**	**4**	**3**	**2**	**1**	**5**

a) ¿Cuál es la variable y de qué tipo es?

b) Haz una tabla de frecuencias y representa los datos.

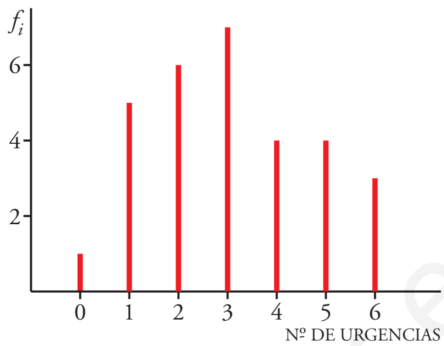
a) Variable: n.º de urgencias atendidas.

Tipo: cuantitativa discreta.

b)

x_i = URGENCIAS ATENDIDAS	f_i
0	1
1	5
2	6
3	7
4	4
5	4
6	3

Representamos los datos en un diagrama de barras:



3 **En una maternidad se han tomado los pesos (en kilogramos) de 50 recién nacidos:**

2,8	**3,2**	**3,8**	**2,5**	**2,7**	**3,7**	**1,9**	**2,6**	**3,5**	**2,3**
3,0	**2,6**	**1,8**	**3,3**	**2,9**	**2,1**	**3,4**	**2,8**	**3,1**	**3,9**
2,9	**3,5**	**3,0**	**3,1**	**2,2**	**3,4**	**2,5**	**1,9**	**3,0**	**2,9**
2,4	**3,4**	**2,0**	**2,6**	**3,1**	**2,3**	**3,5**	**2,9**	**3,0**	**2,7**
2,9	**2,8**	**2,7**	**3,1**	**3,0**	**3,1**	**2,8**	**2,6**	**2,9**	**3,3**

a) ¿Cuál es la variable y de qué tipo es?

b) Construye una tabla con los datos agrupados en 6 intervalos de 1,65 a 4,05.

c) Representa gráficamente esta distribución.

Localizamos los valores extremos: 1,8 y 3,9.

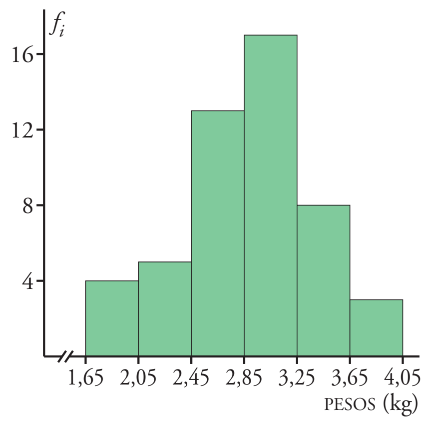
Recorrido = 3,9 – 1,8 = 2,1

a) Variable: peso de los recién nacidos.
Tipo: cuantitativa continua.

b)

INTERVALOS	MARCA DE CLASE (x_i)	f_i
1,65 - 2,05	1,85	4
2,05 - 2,45	2,25	5
2,45 - 2,85	2,65	13
2,85 - 3,25	3,05	17
3,25 - 3,65	3,45	8
3,65 - 4,05	3,85	3
		50

c) Representamos los datos en un histograma; al ser los intervalos de la misma amplitud, la altura de cada barra corresponde a la frecuencia (f_i) de cada intervalo.



4 □□□ **A un grupo de 30 personas se les ha tomado el número de pulsaciones por minuto (ritmo cardíaco) obteniéndose los siguientes resultados:**

87	**85**	**61**	**51**	**64**	**75**	**80**	**70**	**69**	**82**
80	**79**	**82**	**74**	**92**	**76**	**72**	**73**	**63**	**65**
67	**71**	**88**	**76**	**68**	**73**	**70**	**76**	**71**	**86**

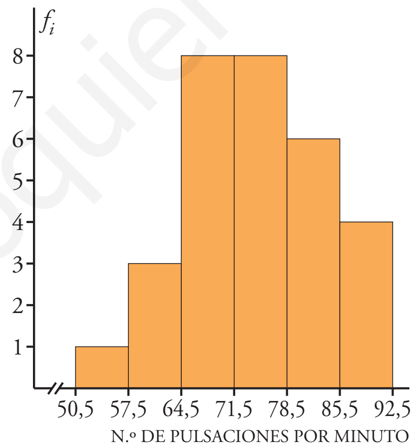
Representa gráficamente esta distribución agrupando los datos en 6 intervalos (desde 50,5 a 92,5).

Cada intervalo medirá $\frac{92{,}5 - 50{,}5}{6} = 7$.

Tabla de frecuencias:

INTERVALO	MARCAS DE CLASE	FRECUENCIA
50,5 - 57,5	54	1
57,5 - 64,5	61	3
64,5 - 71,5	68	8
71,5 - 78,5	75	8
78,5 - 85,5	82	6
85,5 - 92,5	89	4

Histograma:



Puesto que los intervalos son de la misma longitud, la altura de cada barra en este histograma coincide con la frecuencia.

Media, desviación típica y C.V.

Halla la media, la desviación típica y el coeficiente de variación en las siguientes distribuciones:

5

x_i	f_i
0	12
1	9
2	7
3	6
4	3
5	3

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	12	0	0
1	9	9	9
2	7	14	28
3	6	18	54
4	3	12	48
5	3	15	75
	40	68	214

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{68}{40} = 1{,}7$

VAR.: $\dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \dfrac{214}{40} - 1{,}7^2 = 2{,}46$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{2{,}46} = 1{,}57$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $\text{C.V.} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = 0{,}9235 \to 92{,}35\%$

6

x_i	f_i
0	1
1	5
2	6
3	7
4	4
5	4
6	3

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	1	1	0
1	5	5	5
2	6	12	24
3	7	21	63
4	4	16	64
5	4	20	100
6	3	18	108
	30	93	364

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{93}{30} = 3{,}1$

VAR.: $\dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \dfrac{364}{30} - 3{,}1^2 = 2{,}52$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{2{,}52} = 1{,}59$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $\text{C.V.} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = 0{,}5129 \to 51{,}29\%$

7

INTERVALO	f_i
1,65-2,05	4
2,05-2,45	5
2,45-2,85	13
2,85-3,25	17
3,25-3,65	8
3,65-4,05	3

INTERVALOS	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
1,65 - 2,05	1,85	4	7,4	13,69
2,05 - 2,45	2,25	5	11,25	25,31
2,45 - 2,85	2,65	13	34,45	91,29
2,85 - 3,25	3,05	17	51,85	158,14
3,25 - 3,65	3,45	8	27,6	95,22
3,65 - 4,05	3,85	3	11,55	44,47
		50	144,1	428,12

$$\bar{x} = \frac{144{,}1}{50} = 2{,}9$$

$$\text{VAR.} = \frac{428{,}12}{50} - 2{,}8^2 = 0{,}1524$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}1524} = 0{,}39$$

$$\text{C.V.} = \frac{0{,}39}{2{,}9} = 0{,}1345 \rightarrow 13{,}45\%$$

8

INTERVALO	f_i
50,5-57,5	1
57,5-64,5	3
64,5-71,5	8
71,5-78,5	8
78,5-85,5	6
85,5-92,5	4

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
50,5-57,5	54	1	54	2 916
57,5-64,5	61	3	183	11 163
64,5-71,5	68	8	544	36 992
71,5-78,5	75	8	600	45 000
78,5-85,5	82	6	492	40 344
85,5-92,5	89	4	356	31 684
		30	2 229	168 099

$$\bar{x} = \frac{2\,229}{30} = 74{,}3$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{168\,099}{30} - 74{,}3^2} = 9{,}1$$

$$\text{C.V.} = \frac{9{,}1}{74{,}3} = 0{,}1225 \rightarrow 12{,}25\%$$

9 **Los gastos mensuales de una empresa *A* tienen una media de 100 000 euros y una desviación típica de 12 500 euros. En otra empresa *B* la media es 15 000 euros, y la desviación típica, 2 500 euros. Calcula el coeficiente de variación y di cuál de las dos tiene más variación relativa.**

$$\text{Empresa } A: \left.\begin{array}{l} \bar{x} = 100\,000 \text{ €} \\ \sigma = 12\,500 \text{ €} \end{array}\right\} \text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{12\,500}{100\,000} = 0{,}125 \text{ o bien } 12{,}5\%$$

$$\text{Empresa } B: \left.\begin{array}{l} \bar{x} = 15\,000 \text{ €} \\ \sigma = 2\,500 \text{ €} \end{array}\right\} \text{C.V.} = \frac{2\,500}{15\,000} = 0{,}1\widehat{6} \text{ o bien } 16{,}67\%$$

Tiene mayor variación relativa la empresa *B*.

10 □□□ **El peso medio de los alumnos de una clase es de 58,2 kg, y su desviación típica, 3,1 kg. El de las alumnas de esa clase es 52,4 kg y su desviación típica es 5,2 kg. Calcula el coeficiente de variación y compara la dispersión de ambos grupos.**

Alumnos $\left\{\begin{array}{l}\bar{x} = 58{,}2 \text{ kg} \\ \sigma = \ \ 3{,}1 \text{ kg}\end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{3{,}1}{58{,}2} = 0{,}053 \ \rightarrow \ 5{,}3\%$

Alumnas $\left\{\begin{array}{l}\bar{x} = 52{,}4 \text{ kg} \\ \sigma = \ \ 5{,}2 \text{ kg}\end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{5{,}2}{52{,}4} = 0{,}099 \ \rightarrow \ 9{,}9\%$

El peso medio de las alumnas es más variable que el peso de los alumnos.

11 □□□ **Se han pedidos los pesos y las alturas de 6 personas, obteniéndose los siguientes datos:**

PESO (kg)	ALTURA (m)
65	**1,70**
60	**1,50**
63	**1,70**
63	**1,70**
68	**1,75**
68	**1,80**

Calcula el coeficiente de variación y di si están más dispersos los pesos o las alturas.

PESOS (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
60	1	60	3 600
63	2	126	7 938
65	1	65	4 225
68	2	136	9 248
	6	387	25 011

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{387}{6} = 64{,}5 \text{ kg}$$

$$\text{VAR.} = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{25\,011}{6} - 64{,}5^2 = 8{,}25 \ \rightarrow \ \sigma = \sqrt{8{,}25} = 2{,}87 \text{ kg}$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2{,}87}{64{,}5} = 0{,}044 \text{ o bien } 4{,}4\%$$

ALTURAS (y_i)	f_i	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
1,5	1	1,5	2,25
1,7	3	5,1	8,67
1,75	1	1,75	3,06
1,8	1	1,8	3,24
	6	10,15	17,22

$$\bar{y} = \frac{\Sigma f_i y_i}{\Sigma f_i} = \frac{10{,}15}{6} = 1{,}69 \text{ m}$$

$$\text{VAR.} = \frac{\Sigma f_i y_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{y}^2 = \frac{17{,}22}{6} - 1{,}69^2 = 0{,}0139 \ \rightarrow \ \sigma = \sqrt{20{,}0139} = 0{,}12 \text{ m}$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{y}} = \frac{0{,}12}{1{,}69} = 0{,}071 \text{ o bien } 7{,}1\%$$

Están más dispersas las alturas que los pesos.

PÁGINA 202

Medidas de posición

12 **La mediana y los cuartiles de la distribución de "Aptitud para la música" (escala 1-100) en un colectivo de personas son $Q_1 = 31$, $Me = 46$ y $Q_3 = 67$.**

Completa las siguientes afirmaciones:

a) El 75% tiene una aptitud superior o igual a ____.

b) El 25% tiene una aptitud superior o igual a ____.

c) El ____% tiene una aptitud igual o menor a 46 puntos.

d) El ____% tiene una aptitud superior o igual a 46 e inferior o igual a 67.

e) El ____% tiene una aptitud superior o igual a 31 e inferior o igual a 67.

a) $Q_1 = 31$ b) $Q_3 = 67$ c) 50%

d) 25% e) 50%

13 **La altura, en centímetros, de un grupo de alumnos y alumnas de una misma clase es:**

150	**169**	**171**	**172**	**172**	**175**	**181**
182	**183**	**177**	**179**	**176**	**184**	**158**

Calcula la mediana y los cuartiles y explica el significado de estos parámetros.

Colocamos los datos en orden creciente:

150 - 158 - 169 - 171 - 172 - 172 - 175 - 176 - 177 - 179 - 181 - 182 - 183 - 184

Hay 14 datos:

$\frac{14}{2} = 7 \rightarrow$ Mediana: valor intermedio de los dos centrales situados en séptima y octava posición:

$$Me = \frac{175 + 176}{2} = 175{,}5 \text{ cm}$$

Significa que la mitad de los alumnos tiene una estatura inferior a 175,5 cm.

$\frac{14}{4} = 3{,}5 \rightarrow$ $Q_1 = 171$ cm (4.° lugar)

El 25% de los alumnos mide menos de 171 cm de altura.

$14 \cdot \frac{3}{4} = 10{,}5 \rightarrow$ $Q_3 = 181$ cm (posición 11)

El 75% de los alumnos tiene una estatura inferior a 181 cm.

14 □□□ **Calcula la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:**

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	12	9	7	6	3	3

x_i	f_i	F_i	EN %
0	12	12	30
1	9	21	52,5
2	7	28	70
3	6	34	85
4	3	37	92,5
5	3	40	100

- $Me = 1$, porque para $x_i = 1$ la F_i supera el 50%
- $Q_1 = 0$, porque F_i supera el 25% para $x_i = 0$
- $Q_3 = 3$, porque F_i supera el 75% para $x_i = 3$

15 □□□ **Halla la mediana, los cuartiles y el percentil 60 en cada una de las siguientes distribuciones, correspondientes a las notas obtenidas en un test que han hecho dos grupos de estudiantes:**

A: 25 – 22 – 27 – 30 – 23 – 22 – 31 – 18
24 – 25 – 32 – 35 – 20 – 28 – 30

B: 27 – 32 – 19 – 22 – 25 – 30 – 21
29 – 23 – 31 – 21 – 20 – 18 – 27

Colocamos en orden creciente los datos:

A 18 - 20 - 22 - 22 - 23 - 24 - 25 - 25 - 27 - 28 - 30 - 30 - 31 - 32 - 35

Hay 15 datos:

- La mediana es el valor central (posición 8) $\rightarrow$ $Me = 25$
- $\frac{15}{4} = 3{,}75 \rightarrow Q_1 = 22$ (4.ª posición)
- $15 \cdot \frac{3}{4} = 11{,}25 \rightarrow Q_3 = 30$ (12.ª posición)
- $15 - \frac{60}{100} = 9 \rightarrow p_{60}$ será el valor intermedio de los datos situados en 9.ª y 10.ª posición, es decir:

$$p_{60} = \frac{27 + 28}{2} \rightarrow p_{60} = 27{,}5$$

B 18 - 19 - 20 - 21 - 21 - 22 - 23 - 25 - 27 - 27 - 29 - 30 - 31 - 32

Hay 14 datos:

- Los dos valores centrales son 23 y 25 $\rightarrow Me = \frac{23 + 25}{2} = 24$
- $\frac{14}{4} = 3{,}5 \rightarrow Q_1 = 21$ (4.ª posición)
- $14 \cdot \frac{3}{4} = 10{,}5 \rightarrow Q_3 = 29$ (11.ª posición)
- $14 \cdot \frac{60}{100} = 8{,}4 \rightarrow p_{60} = 27$ (9.ª posición)

16 □□□ **En la fabricación de cierto tipo de bombillas se han detectado algunas defectuosas. Se han estudiado 200 cajas de 100 bombillas cada una, obteniéndose la siguiente tabla:**

DEFECTUOSAS	1	2	3	4	5	6	7	8
N.° DE CAJAS	5	15	38	42	49	31	18	2

Calcula la mediana, los cuartiles y los percentiles p_{10}, p_{90} y p_{95}.

Hacemos la tabla de frecuencias acumuladas.

x_i	f_i	F_i	EN %
1	5	5	2,5
2	15	20	10
3	38	58	29
4	42	100	50
5	49	149	74,5
6	31	180	90
7	18	198	99
8	2	200	100

Para $x_i = 4$, F_i iguala el 50%, luego la mediana será el valor intermedio entre 4 y el siguiente, 5, esto es, $Me = 4{,}5$.

$Q_1 = p_{25} = 3$

$Q_3 = p_{75} = 6$

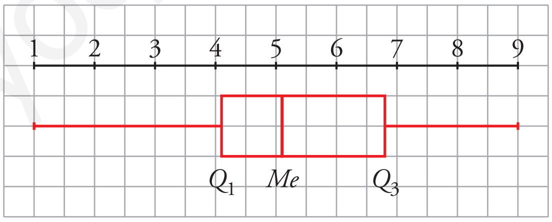
$p_{10} = 2{,}5$

$p_{90} = 6{,}5$

$p_{95} = 7$

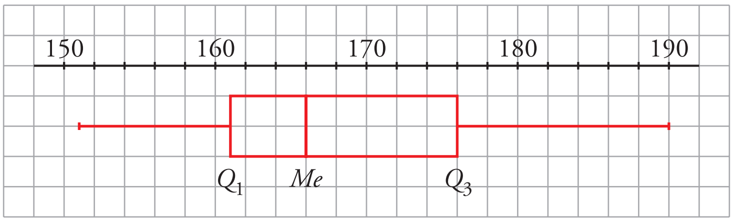
Diagramas de caja

17 □□□ **Las puntuaciones obtenidas por 87 personas tienen los siguientes parámetros de posición: $Q_1 = 4{,}1$; $Me = 5{,}1$ y $Q_3 = 6{,}8$. Todas las puntuaciones están en el intervalo 1 a 9. Haz el diagrama de caja.**



18 □□□ **Las estaturas de 35 alumnos de una clase están comprendidas entre 153 y 188. Los tres restantes miden 151, 152 y 190. Conocemos los siguientes parámetros: $Q_1 = 161$; $Me = 166$ y $Q_3 = 176$.**

Haz un diagrama de caja para esta distribución.

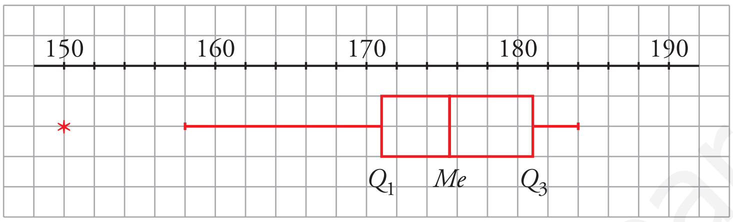


Haz el diagrama de caja correspondiente a las siguientes distribuciones.

19 **La misma que la del ejercicio 13 anterior.**

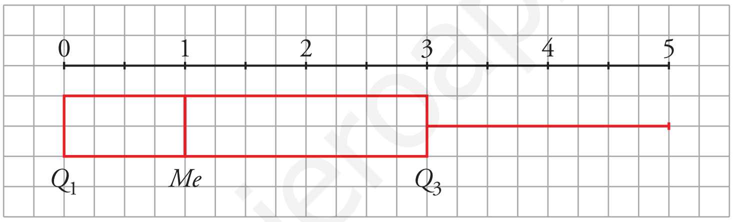
$Q_1 = 171;\ Me = 175{,}5;\ Q_3 = 181$

$(Q_3 - Q_1) \cdot 1{,}5 = (181 - 171) \cdot 1{,}5 = 10 \cdot 1{,}5 = 15 \begin{cases} 171 - 15 = 156 \\ 181 + 15 = 196 \end{cases}$



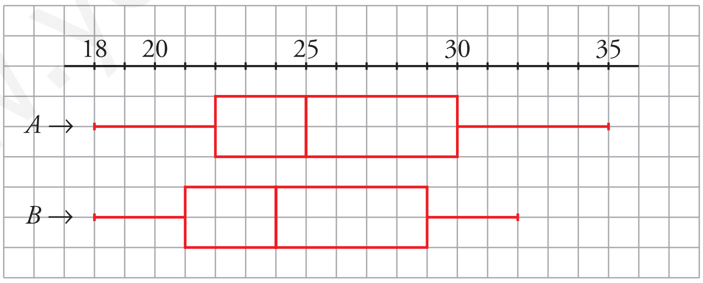
20 **La misma que la del ejercicio 14 anterior.**

$Q_1 = 0;\ Me = 1;\ Q_3 = 3$



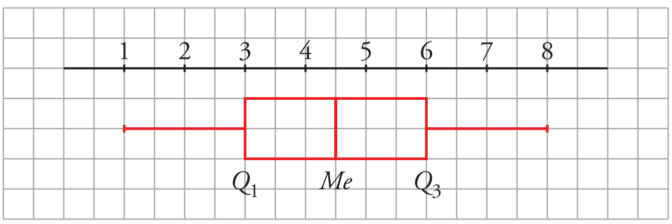
21 **La A y la B que se propusieron en el ejercicio 15 anterior.**

A: $Q_1 = 22;\ Me = 25;\ Q_3 = 30$ B: $Q_1 = 21;\ Me = 24;\ Q_3 = 29$



22 **La misma que la del ejercicio 16 anterior.**

$Q_1 = 3;\ Me = 4{,}5;\ Q_3 = 6$



Muestreo

23 ▪□□ Se quiere realizar los siguientes estudios:

I. Tipo de transporte que utilizan los vecinos de un barrio para acudir a su trabajo.

II. Estudios que piensan seguir los alumnos y alumnas de un centro escolar al terminar la ESO.

III. Edad de las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

IV. Número de horas diarias que ven la televisión los niños y niñas de tu comunidad autónoma con edades comprendidas entre 5 y 10 años.

a) Di en cada uno de estos casos cuál es la población.

b) ¿En cuáles de ellos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

a) I → Los vecinos del barrio.

II → Alumnos y alumnas de la ESO de un centro.

III → Personas que han visto la obra.

IV → Niños y niñas de mi comunidad autónoma de entre 5 y 10 años.

b) I → Dependiendo del número de vecinos del barrio: si son pocos, población; si son muchos, una muestra. Aunque teniendo en cuenta que es difícil cogerlos a todos y que todos contesten a la encuesta, quizás sería mejor una muestra.

II → Población. Con encuestas en clase en las que participan todos (obviamente, siempre falta alguno).

III → Muestra. Son muchas personas y sería inoportuno molestar a tanta gente, se formarían colas…

IV → Muestra. Son demasiadas personas.

PÁGINA 203

24 ▪▪□ ¿Cómo se puede contar el número aproximado de palabras que tiene un cierto libro?

— Se seleccionan, abriendo al azar, unas cuantas páginas y se cuentan las palabras en cada una.

— Se calcula el número medio de palabras por página.

— Se da un intervalo en el que pueda estar comprendido el número total de palabras.

Hazlo con algún libro. O si no, imagina que lo has hecho e inventa los resultados.

- En un libro de 200 páginas, seleccionamos al azar 5 páginas. Contamos el número de palabras de estas páginas: 537, 562, 548, 324, 600.

- Calculamos el número medio de palabras:

$$\frac{537 + 562 + 548 + 324 + 600}{5} = 514{,}2$$

En 200 páginas, habrá 102 840 palabras.

- El número de palabras del libro estará entre 100 000 y 105 000.

25 **Para hacer un sondeo electoral en un pueblo de 400 electores, aproximadamente, se va a elegir una muestra de 200 individuos. Di si te parece válido cada uno de los siguientes modos de seleccionarlos y explica por qué.**

a) Se le pregunta al alcalde, que conoce a todo el pueblo, qué individuos le parecen más representativos.

b) Se eligen 200 personas al azar entre las que acuden a la verbena el día del patrón.

c) Se seleccionan al azar en la guía telefónica y se les encuesta por teléfono.

d) Se acude a las listas electorales y se seleccionan al azar 200 de ellos.

a) No es válido. Se trata de una elección subjetiva.

b) No es válido. Probablemente haya grupos de edades mucho más representados que otros.

c) Sí es válido.

d) Sí es válido.

PIENSA Y RESUELVE

26 **Deseamos hacer una tabla con datos agrupados a partir de 384 datos, cuyos valores extremos son 19 y 187.**

a) Si queremos que sean 10 intervalos de amplitud 17, ¿cuáles serán esos intervalos?

b) Haz otra distribución en 12 intervalos de la amplitud que creas conveniente.

Recorrido: $r = 187 - 19 = 168$

a) Buscamos un número algo mayor que el recorrido y que sea múltiplo de 10. Por ejemplo, $r' = 170$. De este modo, cada intervalo tendrá una longitud de 17.

Los intervalos son:

[18, 35); [35, 52); [52, 69); [69, 86); [86, 103); [103, 120)

[120, 137); [137, 154); [154, 171); [171, 188)

b) Buscamos ahora un número que sea múltiplo de 12, que es el número de intervalos en este caso.

$168 = 12 \cdot 14 \;\rightarrow$ la amplitud de cada intervalo será 14.

Los intervalos son:

[19, 33); [33, 47); [47, 61); [61, 75); [75, 89); [89, 103)

[103, 117); [117, 131); [131, 145); [145, 159); [159, 173); [173, 187)

27 □□□ **En una urbanización de 25 familias se ha observado la variable "número de coches que tiene la familia" y se han obtenido los siguientes datos:**

0	**1**	**2**	**3**	**1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**4**	**0**	**1**	**1**	**1**	**4**
3	**2**	**2**	**1**	**1**					

a) Construye la tabla de frecuencias de la distribución.

b) Haz el diagrama de barras.

c) Calcula la media y la desviación típica.

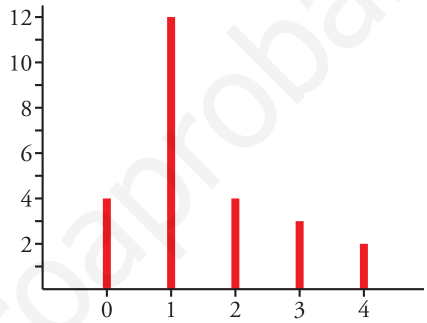
d) Halla la mediana y los cuartiles.

e) Haz el diagrama de caja.

a)

x_i	f_i
0	4
1	12
2	4
3	3
4	2

b)



c)

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	4	0	0
1	12	12	12
2	4	8	16
3	3	9	27
4	2	8	32
	25	37	87

$$\bar{x} = \frac{37}{25} = 1{,}48$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{87}{25} - 1{,}48^2} = 1{,}14$$

d)

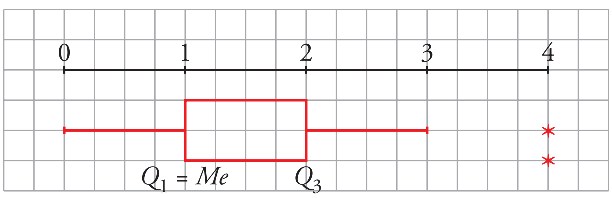
x_i	f_i	F_i	EN %
0	4	4	16
1	12	16	64
2	4	20	80
3	3	23	92
4	2	25	100

$Me = 1$

$Q_1 = 1$

$Q_3 = 2$

e)



28 **El número de personas que acudieron cada día a las clases de natación de una piscina municipal fueron:**

38	**31**	**54**	**47**	**50**	**56**	**52**	**48**	**55**	**60**
58	**46**	**47**	**55**	**60**	**53**	**43**	**52**	**46**	**55**
43	**60**	**45**	**48**	**40**	**56**	**54**	**48**	**39**	**50**
53	**59**	**48**	**39**	**48**					

a) Haz una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos.

b) Representa gráficamente la distribución.

c) Halla $\bar{x}$ y σ.

Localizamos los valores extremos: 31 y 60.

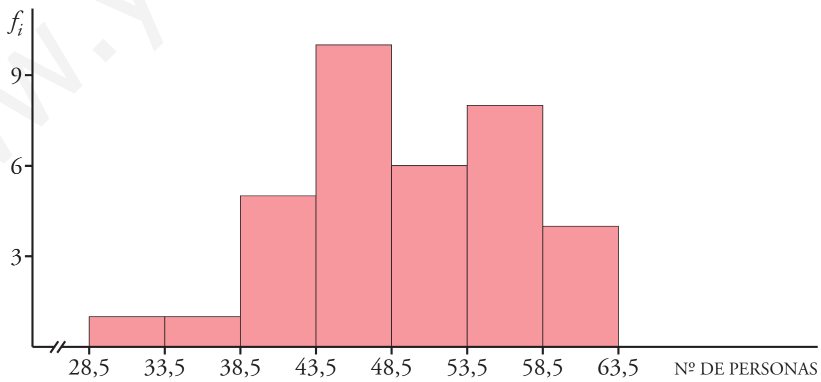
Recorrido = 60 – 31 = 29

Agrupamos los datos en 7 intervalos de longitud 5.

a)

INTERVALOS	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
28,5 - 33,5	31	1	31	961
33,5 - 38,5	36	1	36	1 296
38,5 - 43,5	41	5	205	8 405
43,5 - 48,5	46	10	460	21 160
48,5 - 53,5	51	6	306	15 606
53,5 - 58,5	56	8	448	25 088
58,5 - 63,5	61	4	244	14 884
		35	1 730	87 400

b) Representamos los datos en un histograma. La altura de cada rectángulo coincidirá con la frecuencia absoluta, por ser los intervalos de igual amplitud.



c) MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{1\,730}{35} \approx 49{,}43$

VAR. $= \dfrac{87\,400}{35} - 49{,}43^2 = 53{,}82$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{53{,}82} \approx 7{,}34$

29 **Un dentista observa el número de caries en cada uno de los 100 niños de un colegio y obtiene los resultados resumidos en esta tabla:**

N.° DE CARIES	F. ABSOLUTA	F. RELATIVA
0	25	0,25
1	20	0,2
2	y	z
3	15	0,15
4	x	0,05

a) Completa la tabla obteniendo x, y, z.

b) Calcula el número medio de caries.

a) La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de individuos (100, en nuestro caso).

$$0{,}05 = \frac{x}{100} \rightarrow x = 5$$

$$25 + 20 + y + 15 + 5 = 100 \rightarrow y = 35$$

$$z = \frac{y}{100} = \frac{35}{100} \rightarrow z = 0{,}35$$

b)

N.° DE CARIES (x_i)	f_i	$f_i x_i$
0	25	0
1	20	20
2	35	70
3	15	45
4	5	20
	100	155

$$\bar{x} = \frac{155}{100} = 1{,}55$$

El número medio de caries es de 1,55.

30 **El número de errores cometidos en un test por un grupo de personas viene reflejado en la siguiente tabla:**

NÚMERO DE ERRORES	0	1	2	3	4	5	6
NÚMERO DE PERSONAS	10	12	8	7	5	4	3

a) Halla la mediana y los cuartiles inferior y superior, y explica su significado.

b) ¿Cuál es el número medio de errores por persona?

Construimos la tabla de frecuencias acumuladas:

N.° DE ERRORES (x_i)	N.° DE PERSONAS (f_i)	$x_i f_i$	F_i	EN %
0	12	0	12	23,53
1	12	12	24	47,06
2	8	16	32	62,75
3	7	21	39	76,47
4	5	20	44	86,27
5	4	20	48	94,12
6	3	18	51	100
	51	107		

a) $Me = 2$. Significa que el 50% de las personas cometen 0, 1 ó 2 errores.

$Q_1 = 1$. El 25% de las personas comete 1 error o ninguno.

$Q_3 = 3$. El 75% de las personas comente 3 errores o menos de 3 errores.

b) $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{107}{51} \approx 2{,}1$

El número medio de errores por persona es ligeramente superior a 2.

31 □□□ **Al preguntar a un grupo de personas cuánto tiempo dedicaron a ver televisión durante un fin de semana, se obtuvieron estos resultados:**

TIEMPO EN HORAS	N.° DE PERSONAS
[0; 0,5)	10
[0,5; 1,5)	10
[1,5; 2,5)	18
[2,5; 4)	12
[4; 8)	12

Dibuja el histograma correspondiente y halla la media y la desviación típica.

Como los intervalos no son de la misma longitud, para representar la distribución mediante un histograma pondremos en cada barra una altura tal que el área sea proporcional a la frecuencia:

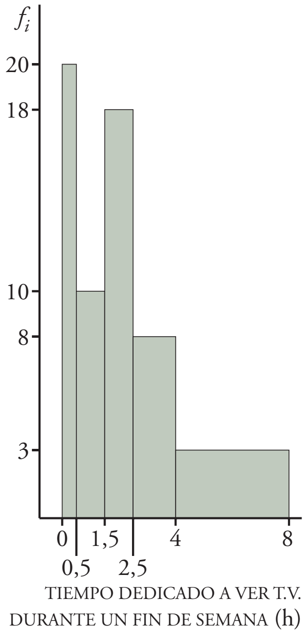
[0; 0,5) $\rightarrow$ $a_1 = 0{,}5$ $\quad f_1 = 10$ $\rightarrow$ $h_1 = \dfrac{10}{0{,}5} = 20$

[0,5; 1,5) $\rightarrow$ $a_2 = 1$ $\quad f_2 = 10$ $\rightarrow$ $h_2 = 10$

[1,5; 2,5) $\rightarrow$ $a_3 = 1$ $\quad f_3 = 18$ $\rightarrow$ $h_3 = 18$

[2,5; 4) $\rightarrow$ $a_4 = 1{,}5$ $\quad f_4 = 12$ $\rightarrow$ $h_4 = \dfrac{12}{1{,}5} = 8$

[4; 8) $\rightarrow$ $a_5 = 4$ $\quad f_5 = 12$ $\rightarrow$ $h_5 = \dfrac{12}{4} = 3$



TIEMPO	MARCA (x_i)	f_i	$x_i f_i$	$x_i f_i^2$
[0; 0,5)	0,25	10	2,5	0,625
[0,5; 1,5)	1	10	10	10
[1,5; 2,5)	2	18	36	72
[2,5; 4)	3,25	12	39	126,75
[4; 8)	6	12	72	432
		62	159,5	641,375

$$\bar{x} = \frac{159,5}{62} = 2,57$$

$$\sigma^2 = \frac{641,375}{62} - 2,57^2 = 3,74 \quad \rightarrow \quad \sigma = \sqrt{3,74} = 1,93$$

PÁGINA 204

32 **Estas tablas recogen la frecuencia de cada signo en las quinielas durante las 20 primeras jornadas:**

JORNADA	1	X	2
1.ª	4	4	6
2.ª	9	3	2
3.ª	11	2	1
4.ª	10	2	2
5.ª	8	4	2
6.ª	9	4	1
7.ª	10	4	0
8.ª	8	4	2
9.ª	9	5	0
10.ª	5	6	3

JORNADA	1	X	2
11.ª	9	3	2
12.ª	5	6	3
13.ª	7	5	2
14.ª	4	9	1
15.ª	7	3	4
16.ª	6	4	4
17.ª	8	2	4
18.ª	6	7	1
19.ª	7	4	3
20.ª	7	5	2

a) Haz una tabla de frecuencias para el número de veces que sale el “1” en cada una de las 20 jornadas:

x_i	4	5	6	7	8	9	10	11
f_i								

Halla su media y su desviación típica.

b) Haz lo mismo para la “X” y para el “2”.

c) Halla el C.V. en los tres casos y compáralos.

a) TABLA DE FRECUENCIAS PARA LOS UNOS

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
4	2	8	32
5	2	10	50
6	2	12	72
7	4	28	196
8	3	24	192
9	4	36	324
10	2	20	200
11	1	11	121
	20	149	1 187

$$\bar{x} = \frac{149}{20} = 7,45$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1\,187}{20} - 7,45^2} = \sqrt{3,8475} = 1,96$$

b) TABLA DE FRECUENCIAS PARA LAS EQUIS

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
2	3	6	12
3	3	9	27
4	7	28	112
5	3	15	75
6	2	12	72
7	1	7	49
9	1	9	81
	20	86	428

$$\bar{x} = \frac{86}{20} = 4,3$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{428}{20} - 4,3^2} = \sqrt{2,91} = 1,71$$

TABLA DE FRECUENCIAS PARA LOS DOSES

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	2	0	0
1	4	4	4
2	7	14	28
3	3	9	27
4	3	12	48
6	1	6	36
	20	45	143

$$\bar{x} = \frac{45}{20} = 2,25$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{143}{20} - 2,25^2} = \sqrt{2,0875} = 1,44$$

c) UNOS $\to$ $\text{C.V.} = \frac{1,96}{7,45} = 0,2631 \to 26,31\%$

EQUIS $\to$ $\text{C.V.} = \frac{1,71}{4,3} = 0,3977 \to 39,77\%$

DOSES $\to$ $\text{C.V.} = \frac{1,44}{2,25} = 0,64 \to 64\%$

33 ■■■ **Cada alumno de un grupo cuenta el número de personas y el número de perros que viven en su portal.**

Suman sus resultados y obtienen una muestra con la que se puede estimar el número de perros que hay en su ciudad.

Por ejemplo, supongamos que en su observación obtienen un total de 747 personas y 93 perros. Y saben que en su ciudad viven 75 000 personas.

a) ¿Cuántos perros estiman que habrá en la ciudad?

b) ¿Cómo es de fiable esta estimación?

c) ¿Es aleatoria la muestra que han utilizado?

a) $\frac{93}{747} = \frac{x}{75\,000} \rightarrow x = \frac{93 \cdot 75\,000}{747} = 9\,337{,}3$

Estiman que habrá unos 9 337 perros, aproximadamente.

b) No es fiable. La muestra estudiada no es representativa de la ciudad.

c) No es aleatoria.

34 ■■■ **Para hacer un estudio sobre los hábitos ecológicos de las familias de una ciudad, se han seleccionado por sorteo las direcciones, calle y número, que serán visitadas.**

Si en un portal vive más de una familia, se sorteará entre ellas la que será seleccionada.

¿Obtendremos con este procedimiento una muestra aleatoria?

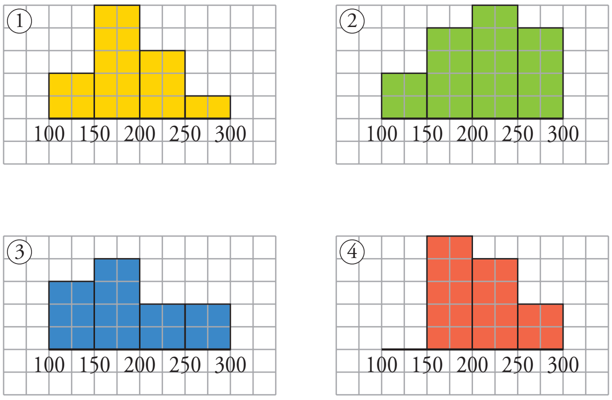
☞ ***Piensa si tiene la misma probabilidad de ser incluida en la muestra una familia que vive en una vivienda unifamiliar que otra que vive, por ejemplo, en un bloque de 32 viviendas.***

No se obtiene una muestra aleatoria, porque una familia que vive en una vivienda unifamiliar tiene más probabilidades de ser elegida que una familia que vive en un bloque de viviendas.

35 ■■■ **Se ha medido el nivel de colesterol en cuatro grupos de personas sometidas a diferentes dietas. Las medias y las desviaciones típicas son las que figuran en esta tabla:**

DIETA	A	B	C	D
$\bar{x}$	211,4	188,6	211,7	188,6
σ	37,5	52,6	49,9	43,1

Las gráficas son, no respectivamente:



Asocia a cada dieta la gráfica que le corresponde.

Fijándonos en las gráficas, se observa que los grupos 1 y 3 tienen una media inferior a 200, mientras que las medias de 2 y 4 son superiores a ese número. Luego podemos asociar:

$$\text{A y C} \;\rightarrow\; \text{2 y 4}$$
$$\text{B y D} \;\rightarrow\; \text{1 y 3}$$

Por otra parte, las personas de 2 tienen el nivel de colesterol más disperso que las de 4. Según esto, su desviación típica será mayor, por lo que C $\leftrightarrow$ 2 y A $\leftrightarrow$ 4. Análogamente, B $\leftrightarrow$ 3 y D $\leftrightarrow$ 1.

PÁGINA 205

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

36 **Justifica que la suma de las frecuencias relativas es siempre igual a 1.**

Supongamos que tenemos n datos:

$$fr_1 + fr_2 + \dots + fr_n = \frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n} + \dots + \frac{f_n}{n} = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Siendo f_i la frecuencia absoluta del dato x_i.

37 **Completa la tabla de esta distribución en la que sabemos que su media es 2,7.**

x_i	1	2	3	4
f_i	3	…	7	5

Llamamos z a la frecuencia absoluta del dato $x_i = 2$.

Aplicamos la definición de la media:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} \;\rightarrow\; 2{,}7 = \frac{3 + 2z + 21 + 20}{15 + z}$$

$$2{,}7 \cdot (15 + z) = 44 + 2z$$

$$40{,}5 + 2{,}7z = 44 + 2z \;\rightarrow\; 0{,}7z = 3{,}5 \;\rightarrow\; z = 5$$

38 **Si a todos los datos de una distribución le sumamos un mismo número, ¿qué le ocurre a la media? ¿Y a la desviación típica? ¿Y si multiplicamos todos los datos por un mismo número?**

Llamamos a al valor sumado a cada dato de la distribución:

- MEDIA

$$\frac{(x_1 + a)f_1 + (x_2 + a)f_2 + \ldots + (x_n + a)f_n}{n} =$$

$$= \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n + a(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)}{n} =$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{n} + a\frac{\Sigma f_i}{n} = \bar{x} + a, \text{ puesto que } \frac{\Sigma f_i}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

La nueva media es el valor de la media original más el valor que hemos sumado a cada dato.

- DESVIACIÓN TÍPICA:

$$\frac{\Sigma f_i (x_i + a)^2}{\Sigma f_i} - (\bar{x} + a)^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2 + \Sigma f_i a^2 + \Sigma f_i 2x_i a}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 - a^2 - 2\bar{x}a =$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} + a^2 + 2a\bar{x} - \bar{x}^2 - a^2 - 2\bar{x}a =$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2$$

La desviación típica no se ve alterada al sumar a todos los datos de la distribución un mismo número.

Supongamos ahora que todos los datos se multiplican por un mismo valor a:

- MEDIA $= \dfrac{ax_1 f_1 + ax_2 f_2 + \ldots + ax_n f_n}{n} = a\bar{x} \;\rightarrow\;$ la media queda multiplicada por dicho valor.

- DESVIACIÓN TÍPICA:

$$\frac{\Sigma f_i (x_i a)^2}{\Sigma f_i} - (\bar{x}a)^2 = \frac{a^2 \Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - a^2\bar{x}^2 = a^2\left(\frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2\right)$$

La varianza quedaría multiplicada por a^2, luego la desviación típica queda multiplicada por a.

39 **Dos distribuciones estadísticas, A y B, tienen la misma desviación típica.**

a) Si la media de A es mayor que la de B, ¿cuál tiene mayor coeficiente de variación?

b) Si la media de A es el doble que la de B, ¿cómo serán sus coeficientes de variación?

$\text{C.V.} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}}$

a) Si $\bar{x}_A > \bar{x}_B \;\rightarrow\; \dfrac{1}{\bar{x}_A} < \dfrac{1}{\bar{x}_B} \;\xrightarrow{\sigma > 0}\; \dfrac{\sigma}{\bar{x}_A} < \dfrac{\sigma}{\bar{x}_B} \;\rightarrow\;$ B tiene mayor coeficiente de variación.

b) Si $\bar{x}_A = 2\bar{x}_B$

$$\left.\begin{aligned} &\text{C.V. de } A \rightarrow \frac{\sigma}{\bar{x}_A} = \frac{\sigma}{2\bar{x}_B} \\ &\text{C.V. de } B \rightarrow \frac{\sigma}{\bar{x}_B} \end{aligned}\right\}$$

El coeficiente de variación de A es la mitad que el de B.

40 **La validez de la información que nos proporciona una encuesta depende, en gran medida, de la cuidadosa elaboración del cuestionario.**

Algunas características que deben tener las preguntas son:

— Ser cortas y con un lenguaje sencillo.

— Sus esquemas deben presentar opciones no ambiguas y equilibradas.

— Que no requieran esfuerzo de memoria.

— Que no levanten prejuicios en los encuestados.

Estudia si las siguientes preguntas son adecuadas para formar parte de una encuesta y corrige los errores que observes:

a) ¿Cuánto tiempo sueles estudiar cada día?

☐Mucho ☐Poco ☐Según el día

b) ¿Cuántas veces has ido al cine este año?

c) ¿Qué opinión tienes sobre la gestión del director?

☐Muy buena ☐Buena ☐Indiferente

d) ¿Pierden sus hijos el tiempo viendo la televisión?

☐Sí ☐No

e) ¿En qué grado cree usted que la instalación de la planta de reciclado afectaría al empleo y a las condiciones de salud de nuestra ciudad?

a) La pregunta es muy subjetiva: lo que para un alumno puede ser mucho tiempo de estudio, para otro puede ser poco.

Sería mejor dar opciones con horas determinadas:

☐Menos de 1 hora ☐Entre 1 y 2 horas ☐Más de 2 horas

b) La pregunta requiere un gran esfuerzo de memoria.

Sería mejor preguntar cuántas veces se ha ido al cine en el último mes.

c) Falta la opción de manifestar que la opinión sobre la gestión del director es mala.

d) La pregunta es subjetiva.

Sería mejor preguntar cuántas horas al día ven televisión los hijos de los encuestados:

☐Menos de 1 hora ☐Entre 1 y 2 horas ☐Más de 2 horas

e) La pregunta es demasiado larga y no ofrece opciones claras de respuesta.

Además, mezcla el "empleo" con las "condiciones de salud". Sería mejor hacer dos preguntas separadas dando una graduación adecuada en cada caso.

PROFUNDIZA

41 ■■■ **En una fábrica se ha medido la longitud de 1 000 piezas de las mismas características y se han obtenido los datos que puedes ver en esta tabla.**

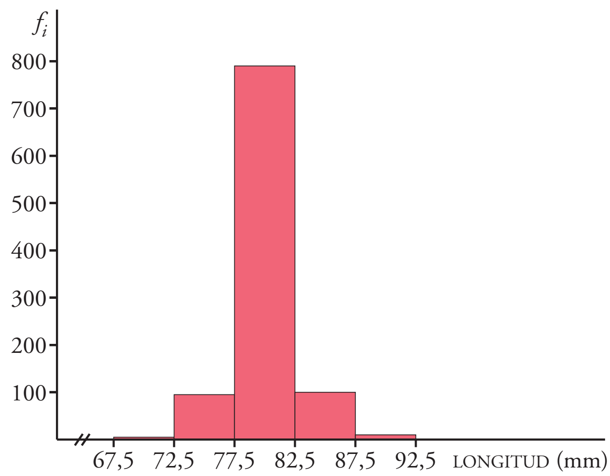
LONGITUD (EN mm)	N.° DE PIEZAS
67,5-72,5	5
72,5-77,5	95
77,5-82,5	790
82,5-87,5	100
87,5-92,5	10

a) Representa el histograma correspondiente.

b) Se consideran aceptables las piezas cuya longitud está en el intervalo [75, 86]. ¿Cuál es el porcentaje de piezas defectuosas?

☞ ***Del 2.° intervalo habrá que rechazar las que midan entre 72,5 y 75. Calcula qué tanto por ciento de la amplitud representa la diferencia 75 – 72,5 y halla el porcentaje de la frecuencia correspondiente. Procede análogamente en el 4.° intervalo.***

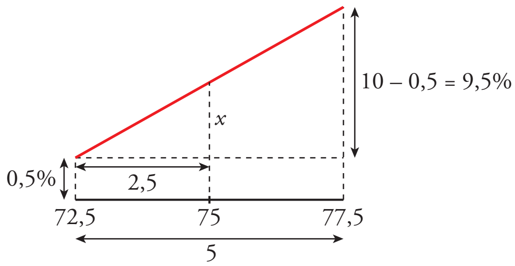
a) Por tener todos los intervalos la misma longitud, la altura de cada una de las barras coincidirá con la frecuencia de cada intervalo.



b) Construimos la tabla de frecuencias absolutas acumuladas:

INTERVALO	f_i	F_i	EN %
67,5 - 72,5	5	5	0,5
72,5 - 77,5	95	100	10
77,5 - 82,5	790	890	89
82,5 - 87,5	100	990	99
87,5 - 92,5	10	1 000	100

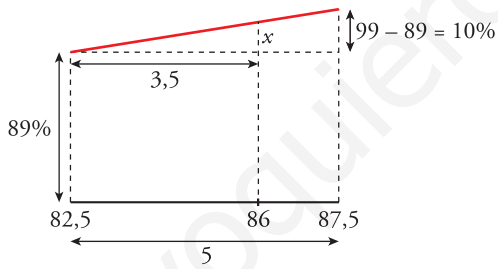
• Calculamos el porcentaje de piezas que hay por debajo de 75 mm:



$$\frac{9,5}{5} = \frac{x}{2,5} \rightarrow x = 4,75$$

Por debajo de 75 mm están el $4,75 + 0,5 = 5,25\%$ de las piezas.

• Calculamos el porcentaje de piezas que están por debajo de 86 mm:



$$\frac{10}{5} = \frac{x}{3,5} \rightarrow x = 7$$

Por debajo de 86 mm están el $89 + 7 = 96\%$ de las piezas.

El porcentaje de piezas que hay en el intervalo [75, 86] es:

$$96 - 5,25 = 90,75\%$$

Por tanto, el $100 - 90,75 = 9,25\%$ de las piezas serán defectuosas.

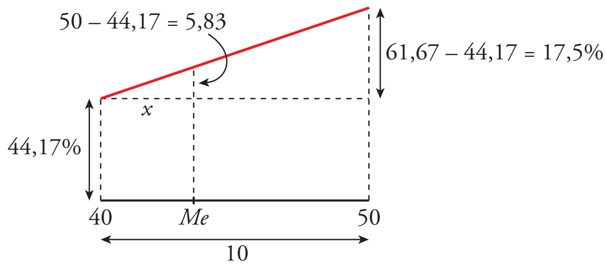
42 **Se ha pasado un test de 80 preguntas a 600 personas. Este es el número de respuestas correctas:**

RESPUESTAS CORRECTAS	[0-10)	[10-20)	[20-30)	[30-40)	[40-50)	[50-60)	[60-70)	[70-80)
NÚMERO DE PERSONAS	40	60	75	90	105	85	80	65

a) Comprueba que la mediana está en el intervalo [40-50). Asígnale un valor repartiendo homogéneamente los 105 individuos que hay en el intervalo.

b) Haz lo mismo para los cuartiles.

a) MEDIANA $\rightarrow$ El 50% se alcanza en el intervalo 40 - 50

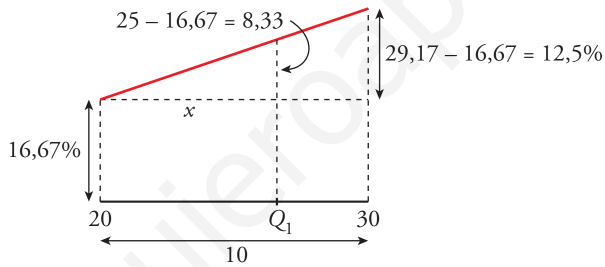


INTERVALO	f_i	F_i	EN %
[0, 10)	40	40	6,67
[10, 20)	60	100	16,67
[20, 30)	75	175	29,17
[30, 40)	90	265	44,17
[40, 50)	105	370	61,67
[50, 60)	85	455	75,83
[60, 70)	80	535	89,17
[70, 80)	65	600	100

$$\frac{10}{17,5} = \frac{x}{5,83} \rightarrow x = 3,33 \rightarrow \text{Luego } Me = 40 + 3,33 = 43,33$$

b) CUARTILES

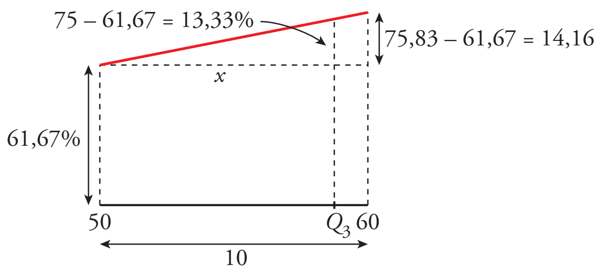
$Q_1 \rightarrow$ El 25% se alcanza en el intervalo 20 - 30.



$$\frac{10}{12,5} = \frac{x}{8,33} \rightarrow x = 6,66$$

$Q_1 = 20 + 6,66 = 26,66$

$Q_3 \rightarrow$ El 75% se alcanza en el intervalo 50 - 60.



$$\frac{10}{14,16} = \frac{10}{13,33} \rightarrow x = 9,41$$

$Q_3 = 50 + 9,41 = 59,41$

43 **a) Para estimar la estatura media de los 934 soldados de un regimiento, extraemos una muestra de 53 de ellos. La media de la muestra es 172,6 cm. Expresa este resultado sabiendo que en la ficha técnica se dice que el error máximo es de ±1,8 cm, con una probabilidad de 0,90.**

b) Si con el mismo estudio anterior admitimos que se cometa un error de ±2,6 cm, el nivel de confianza ¿será superior o inferior al 90%?

c) ¿Cómo podríamos aumentar el nivel de confianza manteniendo la cota de error en ±1,8 cm?

a) La altura media de los soldados está en el intervalo (170,8; 174,4) con un nivel de confianza del 90%.

b) El nivel de confianza, al aumentar la longitud del intervalo, también aumenta. Por tanto, será superior al 90%.

c) Tendríamos que aumentar el tamaño de la muestra. Es decir, habría que estudiar a más de 53 soldados.

PÁGINA 220

PRACTICA

Relaciones entre sucesos

1 ■□□ En un sorteo de lotería observamos la cifra en que termina el "gordo".

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe los sucesos: A = MENOR QUE 5; B = PAR.

c) Halla los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, A', B', $A' \cap B'$.

a) El espacio muestral es: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) A = "MENOR QUE 5" = $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

B = "PAR" = $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

$A \cap B = \{0, 2, 4\}$

$A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$A' \cap B' = \{5, 7, 9\}$

2 ■□□ Escribimos cada una de las letras de la palabra PREMIO en una ficha y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.

a) Escribe los sucesos elementales de este experimento. ¿Tienen todos la misma probabilidad?

b) Escribe el suceso "obtener vocal" y calcula su probabilidad.

c) Si la palabra elegida fuera SUERTE, ¿cómo responderías a los apartados a) y b)?

a) Los sucesos elementales son: {P}, {R}, {E}, {M}, {I}, {O}.

Todas tienen la misma probabilidad, porque todas aparecen una sola vez.

b) V = "obtener vocal" $\rightarrow$ V = {E, I, O}

$P[\text{V}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) Los sucesos elementales son: {S}, {U}, {E}, {R}, {T}

$P[\text{V}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

En este caso el suceso elemental {E} tiene más probabilidad que el resto, por aparecer dos veces.

3 ■□□ Lanzamos un dado rojo y otro verde. Anotamos el resultado. Por ejemplo, (3, 4) significa 3 en el rojo y 4 en el verde.

a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

b) Describe los siguientes sucesos:

A: la suma de puntos es 6; $A = \{(5, 1), (4, 2), \ldots\}$

B: En uno de los dados ha salido 4; $B = \{(4, 1), \ldots\}$

C: En los dados salió el mismo resultado.

c) Describe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$.

d) Calcula la probabilidad de los sucesos de los apartados b) y c).

e) Calcula la probabilidad de A', B' y C'.

a) Como tenemos dos dados, cada uno con 6 caras, tenemos 6 resultados en uno para cada uno de los 6 resultados del otro. Es decir, en total, 36 elementos en el espacio muestral.

b) $A = \{(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

$B = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

c) $A \cup B \rightarrow$ En uno de los dados ha salido un 4 o la suma de los dos es 6.

$A \cap B \rightarrow$ Habiendo salido un 4, la suma de los dos es 6, es decir, $\{(4, 2), (2, 4)\}$.

$A \cap C \rightarrow$ Habiendo salido dos números iguales, la suma es 6, es decir, $\{(3, 3)\}$.

d) $P[A] = \dfrac{5}{36}$ $\quad P[B] = \dfrac{11}{36}$ $\quad P[C] = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$P[A \cup B] = \dfrac{14}{36} = \dfrac{7}{18}$ $\quad P[A \cap B] = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$ $\quad P[A \cap C] = \dfrac{1}{36}$

e) $P[A'] = 1 - P[A] = \dfrac{31}{36}$

$P[B'] = 1 - P[B] = \dfrac{25}{36}$

$P[C'] = 1 - P[C] = \dfrac{5}{6}$

4 **El juego del dominó consta de 28 fichas. Sacamos una al azar y anotamos la suma (x) de las puntuaciones.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral? Di la probabilidad de cada uno de los 13 casos que pueden darse.

b) Describe los sucesos:

A: x es un número primo. $\quad$ B: x es mayor que 4. $\quad$ $A \cup B$, $A \cap B$, A'

c) Calcula las probabilidades de los sucesos descritos en el apartado b).

a) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11, 12\}$

$P[0] = \dfrac{1}{28}$; $P[1] = \dfrac{1}{28}$; $P[2] = \dfrac{2}{28}$

$P[3] = \dfrac{2}{28}$; $P[4] = \dfrac{3}{28}$; $P[5] = \dfrac{3}{28}$

$P[6] = \frac{4}{28}$; $P[7] = \frac{3}{28}$; $P[8] = \frac{3}{28}$

$P[9] = \frac{2}{28}$; $P[10] = \frac{2}{28}$; $P[11] = \frac{1}{28}$; $P[12] = \frac{1}{28}$

b) $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ $A \cap B = \{5, 7, 11\}$

$A' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

c) $P[A] = P[2] + P[3] + P[5] + P[7] + P[11] = \frac{11}{28}$

$P[B] = \frac{19}{28}$ $P[A \cup B] = \frac{23}{28}$

$P[A \cap B] = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ $P[A'] = 1 - P[A] = \frac{17}{28}$

Probabilidades sencillas

5 **En la lotería primitiva se extraen bolas numeradas del 1 al 49. Calcula la probabilidad de que la primera bola extraída :**

a) Sea un número de una sola cifra.

b) Sea un número múltiplo de 7.

c) Sea un número mayor que 25.

a) $P[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] = \frac{9}{49}$

b) $P[7, 14, 21, 28, 35, 42, 49] = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$

c) $P[26, 27, 28, \ldots, 49] = \frac{24}{49}$

6 **Se extrae una carta de una baraja española. Di cuál es la probabilidad de que sea:**

a) REY o AS. **b) FIGURA y OROS.** **c) NO SEA ESPADAS.**

a) $P[\text{REY O AS}] = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

b) $P[\text{FIGURA Y OROS}] = P[\text{FIGURA DE OROS}] = \frac{3}{40} = \frac{1}{10}$

c) $P[\text{NO SEA ESPADAS}] = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

7 **En una bolsa hay bolas de colores, pero no sabemos cuántas ni qué colores tienen. En 1 000 extracciones (devolviendo la bola cada vez) hemos obtenido bola blanca en 411 ocasiones, bola negra en 190, bola verde en 179 y bola azul en 220.**

Al hacer una nueva extracción, di qué probabilidad asignarías a:

a) Sacar bola blanca.

b) No sacar bola blanca.

c) Sacar bola verde o azul.

d) No sacar bola negra ni azul.

Si en la bolsa hay 22 bolas, ¿cuántas estimas que habrá de cada uno de los colores?

Como se han hecho 1 000 extracciones:

$P[\text{BOLA BLANCA}] = \dfrac{411}{1\,000} = 0{,}411$ $\quad$ $P[\text{BOLA VERDE}] = \dfrac{179}{1\,000} = 0{,}179$

$P[\text{BOLA NEGRA}] = \dfrac{190}{1\,000} = 0{,}19$ $\quad$ $P[\text{BOLA AZUL}] = \dfrac{220}{1\,000} = 0{,}22$

a) $P[\text{BOLA BLANCA}] = 0{,}411$

b) $P[\text{NO BOLA BLANCA}] = 1 - 0{,}411 = 0{,}589$

c) $P[\text{BOLA VERDE O AZUL}] = 0{,}179 + 0{,}22 = 0{,}399$

d) $P[\text{NO BOLA NEGRA NI AZUL}] = 1 - (0{,}19 + 0{,}22) = 0{,}59$

Si hay 22 bolas:

- El 41% son blancas $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}41 = 9$ bolas blancas.
- El 19% son negras $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}19 = 4$ bolas negras.
- El 18% son verdes $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}18 = 4$ bolas verdes.
- El 22% son azules $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}22 = 5$ bolas azules.

8 **Ana tira un dado y su hermana Eva lo tira después. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Eva sea superior a la de Ana?**

EVA \ ANA	1	2	3	4	5	6
1	1–1	1–2	1–3	1–4	1–5	1–6
2	2–1	2–2	2–3	2–4	2–5	2–6
3	3–1	3–2	3–3	3–4	3–5	3–6
4	4–1	4–2	4–3	4–4	4–5	4–6
5	5–1	5–2	5–3	5–4	5–5	5–6
6	6–1	6–2	6–3	6–4	6–5	6–6

$P[\text{PUNTUACIÓN DE EVA SUPERIOR A LA DE ANA}] = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

9 **Lanzamos dos dados y anotamos la puntuación del mayor (si coinciden, la de uno de ellos).**

a) Completa la tabla y di las probabilidades de los seis sucesos elementales 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

b) Halla la probabilidad de los sucesos:

***A*: n.° par, *B*: n.° menor que 4, $A \cap B$.**

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2				
⚁	2				5	
⚂						
⚃				4		6
⚄						
⚅		6				

a)

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁	2	2	3	4	5	6
⚂	3	3	3	4	5	6
⚃	4	4	4	4	5	6
⚄	5	5	5	5	5	6
⚅	6	6	6	6	6	6

$P[1] = \frac{1}{36}$; $P[2] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$; $P[3] = \frac{5}{36}$

$P[4] = \frac{7}{36}$; $P[5] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$; $P[6] = \frac{11}{36}$

b) $P[A] = \frac{3}{36} + \frac{7}{36} + \frac{11}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

$P[B] = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$P[A \cap B] = P[2] = \frac{1}{12}$

PÁGINA 221

Experiencias compuestas

10 **a) Tenemos dos barajas de 40 cartas. Sacamos una carta de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figuras (sota, caballo o rey)?**

b) Tenemos una baraja de 40 cartas. Sacamos dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean un 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figura?

a) $P[7 \text{ y } 7] = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$

$P[\text{FIGURA y FIGURA}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{9}{100}$

b) $P[7 \text{ y } 7] = \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{3}{39} = \dfrac{12}{1\,560} = \dfrac{1}{130}$

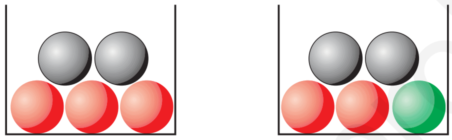
$P[\text{FIGURA y FIGURA}] = \dfrac{12}{40} \cdot \dfrac{11}{39} = \dfrac{132}{1\,560} = \dfrac{11}{130}$

11 **Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?**

$P[\text{las tres menores que 5}] = P[\text{menor que 5}] \cdot P[\text{menor que 5}] \cdot P[\text{menor que 5}] =$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{27}$$

12 **Sacamos una bola de cada urna. Calcula:**



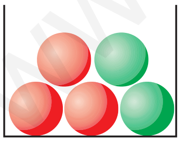
a) La probabilidad de que ambas sean rojas.
b) La probabilidad de que ambas sean negras.
c) La probabilidad de que alguna sea verde.

a) $P[\text{ROJA y ROJA}] = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{25}$

b) $P[\text{NEGRA y NEGRA}] = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{25}$

c) $P[\text{alguna VERDE}] = P[\text{VERDE}] + P[\text{VERDE}] = 0 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}$

13 **Sacamos dos bolas. Calcula:**



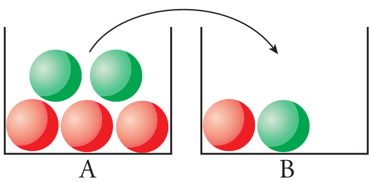
a) $P[2 \text{ rojas}]$

b) $P[2 \text{ verdes}]$

a) $P[2 \text{ ROJAS}] = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$

b) $P[2 \text{ VERDES}] = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$

14 **Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B. Calcula:**

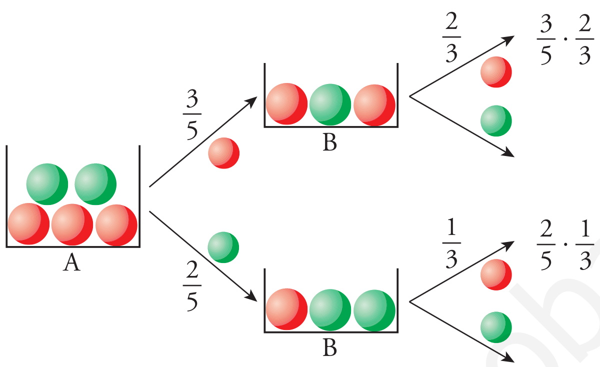


a) P**[1.ª roja y 2.ª roja]** **b)** P**[1.ª roja y 2.ª verde]**

c) P**[2.ª roja / 1.ª verde]** **d)** P**[2.ª roja / 1.ª roja]**

e) P**[2.ª roja]** **f)** P**[2.ª verde]**

☞ ***e) Para calcular esta probabilidad, ten en cuenta el diagrama.***



a) $P[1.^a \text{ roja y } 2.^a \text{ roja}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

b) $P[1.^a \text{ roja y } 2.^a \text{ verde}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

c) $P[2.^a \text{ roja / } 1.^a \text{ verde}] = \frac{1}{3}$

d) $P[2.^a \text{ roja / } 1.^a \text{ roja}] = \frac{2}{3}$

e) $P[2.^a \text{ roja}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

f) $P[2.^a \text{ verde}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$

Tablas de contingencia

15 **En un centro escolar hay 1 000 alumnos y alumnas repartidos así:**

	CHICOS	CHICAS
USAN GAFAS	147	135
NO USAN GAFAS	368	350

Llamamos: A ↔ chicas, O ↔ chicos, G ↔ tiene gafas, no G ↔ no tiene gafas. Calcula:

a) P**[A],** P**[O],** P**[G],** P**[no G]**

b) Describe los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades: A y G, O y no G, A/G, G/A, G/O.

a) $P[\text{A}] = \frac{135 + 350}{1\,000} = \frac{485}{1\,000} = 0{,}485$

$P[\text{O}] = 1 - P[\text{A}] = 1 - 0{,}485 = 0{,}515$

$P[\text{G}] = \frac{147 + 135}{1\,000} = \frac{282}{1\,000} = 0{,}282$

$P[\text{no G}] = 1 - P[\text{G}] = 1 - 0{,}282 = 0{,}718$

b) A y G $\rightarrow$ Chica con gafas.

$P[\text{A y G}] = \frac{135}{1\,000} = 0{,}135$

O y no G $\rightarrow$ Chico sin gafas

$P[\text{O y no G}] = \frac{368}{1\,000} = 0{,}368$

A/G $\rightarrow$ De los que llevan gafas, cuántas son chicas.

$P[\text{A/G}] = \frac{135}{282} = 0{,}479$

G/A $\rightarrow$ De todas las chicas, cuántas llevan gafas.

$P[\text{G/A}] = \frac{135}{485} = 0{,}278$

G/O $\rightarrow$ De todos los chicos, cuántos llevan gafas.

$P[\text{G/O}] = \frac{147}{515} = 0{,}285$

16 **En una empresa hay 200 empleados, 100 hombres y 100 mujeres. Los fumadores son 40 hombres y 35 mujeres.**

a) Haz con los datos una tabla de contingencia.

b) Si elegimos un empleado al azar, calcula la probabilidad de que sea hombre y no fume: $P[\text{H y no F}]$.

c) Calcula también: $P[\text{M y F}]$, $P[\text{M / F}]$, $P[\text{F / M}]$

a)

	HOMBRE	MUJER
FUMADOR	40	35
NO FUMADOR	60	65

b) $P[\text{H y no F}] = \frac{60}{200} = 0{,}3$

c) $P[\text{M y F}] = \frac{35}{200} = 0{,}175$

$P[\text{M/F}] = \frac{35}{75} = 0{,}467$

$P[\text{F/M}] = \frac{35}{100} = 0{,}35$

17 **Los 1000 socios de un club deportivo se distribuyen de la forma que se indica en la tabla.**

	HOMBRES	MUJERES
JUEGAN AL BALONCESTO	147	135
NO JUEGAN AL BALONCESTO	368	350

Si se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea un hombre.

b) Sea una mujer.

c) Juegue al baloncesto.

d) Sea una mujer que practique baloncesto.

e) Sea un hombre que no practique baloncesto.

f) Juegue al baloncesto, sabiendo que es hombre.

g) Sea mujer, sabiendo que no juega al baloncesto.

a) $P[\text{H}] = \dfrac{147 + 368}{1\,000} = \dfrac{515}{1\,000} = 0{,}515$

b) $P[\text{M}] = 1 - P[\text{H}] = 0{,}485$

c) $P[\text{B}] = \dfrac{147 + 135}{1\,000} = \dfrac{282}{1\,000} = 0{,}282$

d) $P[\text{M y B}] = \dfrac{135}{1\,000} = 0{,}135$

e) $P[\text{H y no B}] = \dfrac{368}{1\,000} = 0{,}368$

f) $P[\text{B/H}] = \dfrac{147}{515} = 0{,}285$

g) $P[\text{M/no B}] = \dfrac{350}{718} = 0{,}487$

PÁGINA 222

PIENSA Y RESUELVE

18 **Una urna contiene 100 bolas numeradas así: 00, 01, 02 … 99**

Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la cifra de las unidades del número que tiene cada bola. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) $x = 3$	**b)** $y = 3$	**c)** $x \neq 7$	**d)** $x > 5$
e) $x + y = 9$	**f)** $x < 3$	**g)** $y > 7$	**h)** $y < 7$

DECENAS \ UNIDADES	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

a) $x = 3 \rightarrow P[x = 3] = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

b) $y = 3 \rightarrow P[y = 3] = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

c) $x \neq 7 \rightarrow P[x \neq 7] = \dfrac{90}{100} = \dfrac{9}{10}$

d) $x > 5 \rightarrow P[x > 5] = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$

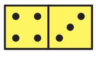
e) $x + y = 9 \rightarrow P[x + y = 9] = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

f) $x < 3 \rightarrow P[x < 3] = \dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{10}$

g) $y > 7 \rightarrow P[y > 7] = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$

h) $y < 7 \rightarrow P[y < 7] = \dfrac{7}{100} = \dfrac{7}{10}$

19 □□□ **Sacamos dos fichas de un dominó. ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas la suma de sus puntuaciones sea un número primo (2, 3, 5, 7 u 11)?**

 **4 + 3 = 7 es primo**

Tenemos:

$A = \{(1, 1), (2, 0), (1, 2), (3, 0), (1, 4), (2, 3), (5, 0), (6, 1), (5, 2), (3, 4), (5, 6)\}$

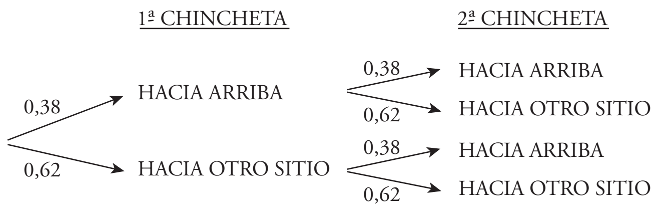
$P[A] = \dfrac{11}{28}$

Por tanto:

$P[\text{en ambas la suma es un primo}] = \dfrac{11}{28} \cdot \dfrac{10}{27} = \dfrac{110}{756} = 0{,}146$

20 Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38.

Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?



P[DISTINTA FORMA] $= 0{,}38 \cdot 0{,}62 + 0{,}62 \cdot 0{,}38 = 0{,}47$

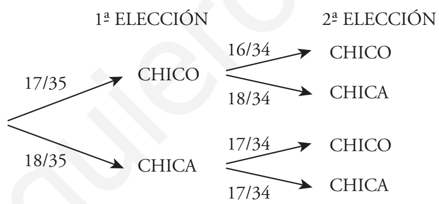
21 **En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase.**

Calcula la probabilidad de que:

a) Los dos sean chicos.

b) Sean dos chicas.

c) Sean un chico y una chica.



a) P[DOS CHICOS] $= \dfrac{17}{35} \cdot \dfrac{16}{34} = \dfrac{8}{35}$

b) P[DOS CHICAS] $= \dfrac{18}{35} \cdot \dfrac{17}{34} = \dfrac{9}{35}$

c) P[UN CHICO Y UNA CHICA] $= \dfrac{17}{35} \cdot \dfrac{18}{34} + \dfrac{18}{35} \cdot \dfrac{17}{34} = \dfrac{18}{35}$

22 **Extraemos una tarjeta de cada una de estas bolsas.**

a) Calcula la probabilidad de obtener una S y una I, “SI”.

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener “NO”?

c) ¿Son sucesos contrarios “SI” y “NO”?

Resuélvelo rellenando esta tabla.

	S	S	N
I	SI		
O			
O		SO	

	S	S	N
I	SI	SI	NI
O	SO	SO	NO
O	SO	SO	NO

a) $P[\text{SÍ}] = \frac{2}{9}$ b) $P[\text{NO}] = \frac{2}{9}$

c) No, no son sucesos contrarios, porque $P[\text{SÍ}] \neq 1 - P[\text{NO}]$.

23 **En un laboratorio se somete un nuevo medicamento a tres controles. La probabilidad de pasar el primero es 0,89, la de pasar el segundo es 0,93 y la de pasar el tercero es 0,85. ¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo producto pase las tres pruebas?**

Las tres pruebas son independientes una de otra.

$P[\text{PASAR EL PRIMER CONTROL}] = 0{,}89$

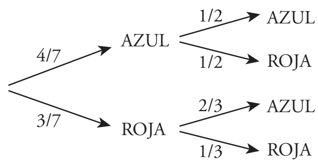
$P[\text{PASAR EL SEGUNDO CONTROL}] = 0{,}93$

$P[\text{PASAR EL TERCER CONTROL}] = 0{,}85$

$P[\text{PASAR LOS TRES CONTROLES}] = 0{,}89 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}85 = 0{,}703$

24 **Se extraen dos bolas de esta bolsa.**

Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.

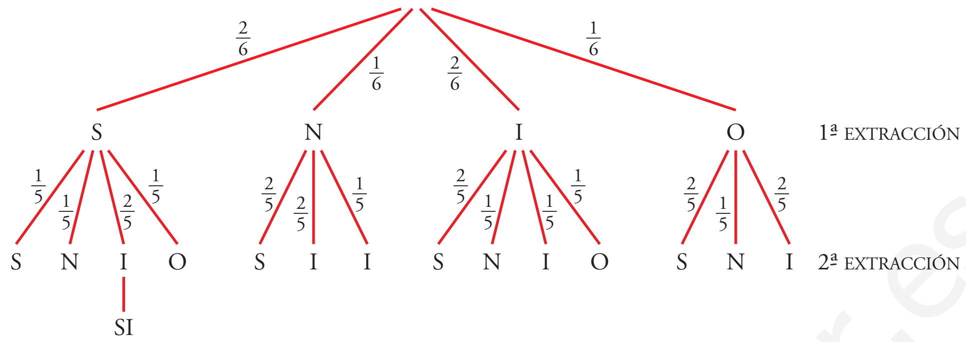


$P[\text{AZUL Y AZUL}] = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$

$P[\text{ROJA Y ROJA}] = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$

$P[\text{AMBAS DEL MISMO COLOR}] = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

25 **En una bolsa tenemos las letras S, S, N, I, I, O. Sacamos dos letras. ¿Cuál es la probabilidad de que con ellas se pueda escribir SI?**



$P[\text{“SI”}] = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

26 **Javier tiene en su monedero 4 monedas de cinco céntimos, 3 de veinte y 2 de un euro. Saca dos monedas al azar.**

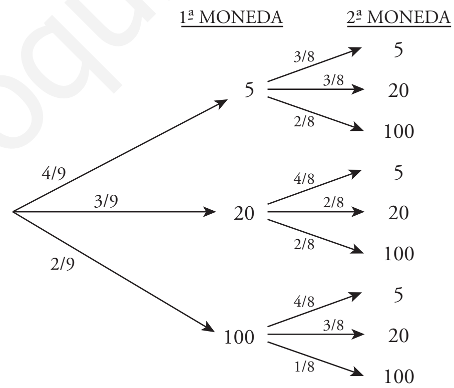
¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

a) Que las dos sean de cinco céntimos.

b) Que ninguna sea de un euro.

c) Que saque 1,20 €.

En el diagrama de árbol, las monedas aparecen en céntimos. 1 € = 100 cent.



a) $P[\text{DOS DE 5 CENT.}] = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{NINGUNA DE 1 €}] = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right) + \frac{3}{9}\left(\frac{4}{8} + \frac{2}{8}\right) = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{12}$

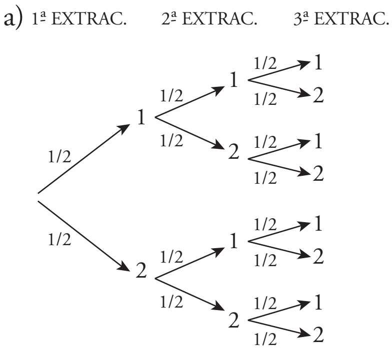
c) $P[\text{SACAR 1,20 €}] = \text{P}[100, 20] = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{6}$

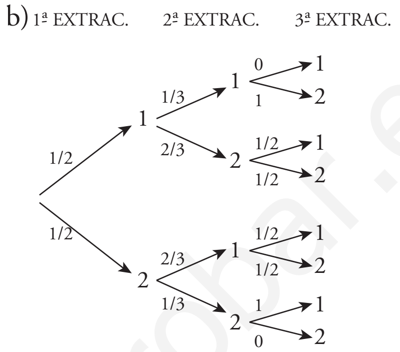
27 **En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones y se anotan los resultados en orden.**

Calcula la probabilidad de que el número formado sea el 121, suponiendo que:

a) La bola se reintegra a la bolsa.

b) La bola no se devuelve a la bolsa.





a) $P[121] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) $P[121] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

28 **Un jugador de baloncesto suele acertar el 75% de sus tiros desde el punto de lanzamiento de personales. Si acierta el primer tiro, puede tirar de nuevo.**

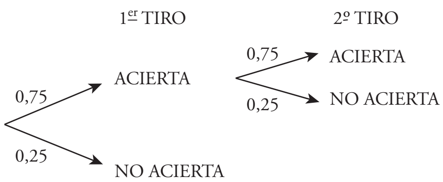
Calcula la probabilidad de que:

a) Haga dos puntos.

b) Haga un punto.

c) No haga ningún punto.

P[ACERTAR] = 0,75



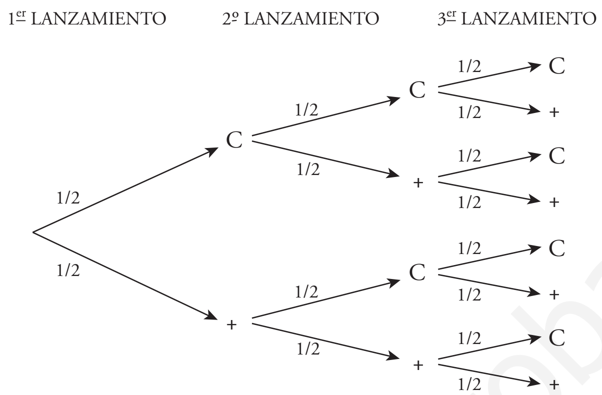
a) P[DOS PUNTOS] = 0,75 · 0,75 = 0,56

b) P[UN PUNTO] = 0,75 · 0,25 = 0,19

c) P[NO HAGA NINGÚN PUNTO] = 0,25

29 ■■□ **Matías y Elena juegan con una moneda. La lanzan tres veces y si sale dos veces cara y una vez cruz o dos veces cruz y una vez cara, gana Matías. Si sale tres veces cara o tres veces cruz, gana Elena.**

Calcula la probabilidad que tiene cada uno de ganar.



$P[\text{GANE MATÍAS}] = P[C, C, +] + P[C, +, C] + P[+, C, C] + P[+, +, C] +$

$+ P[+, C, +] + P[C, +, +] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$P[\text{GANE ELENA}] = P[C, C, C] + P[+, +, +] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

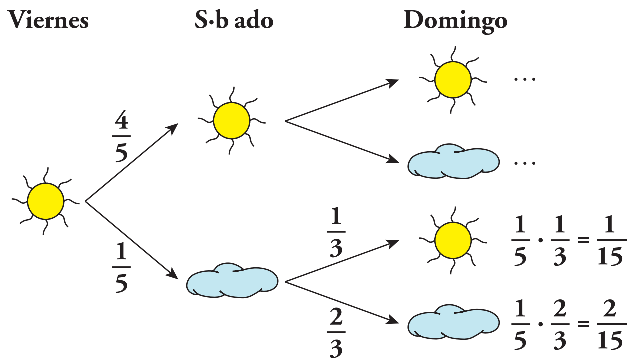
PÁGINA 223

PROFUNDIZA

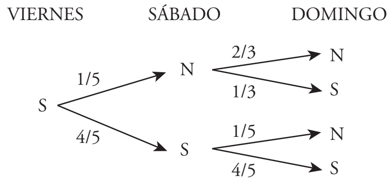
30 ■■■ **En cierto lugar se sabe que si hoy hace sol, la probabilidad de que mañana también lo haga es 4/5. Pero si hoy está nublado, la probabilidad de que mañana lo siga estando es 2/3.**

Si hoy es viernes y hace sol, ¿cuál es la probabilidad de que el domingo también haga sol?

Para resolverlo completa el diagrama y razona sobre él:



Hacemos un diagrama en árbol:

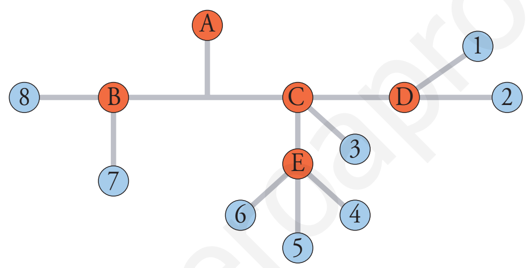


$$P[\text{DOMINGO SOL}] = P[\text{VIERNES S, SÁBADO N, DOMINGO S}] +$$

$$+ P[\text{VIERNES S, SÁBADO S, DOMINGO S}] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{15} + \frac{16}{25} = \frac{53}{75} = 0{,}7$$

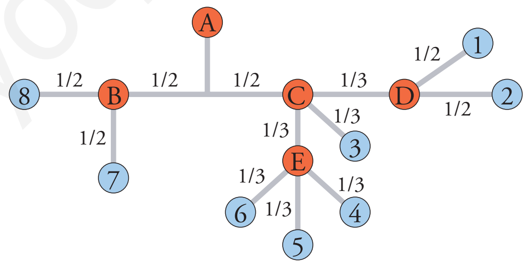
31 **Esto es un plano de parte de la red de cercanías de una ciudad. En cada nudo es igual de probable que el tren continúe por cualquiera de los caminos que salen de él.**



Un viajero sube a un tren en A sin saber adónde se dirige.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a la estación 5?

b) Calcula la probabilidad de llegar a cada una de las estaciones.



a) $P[5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

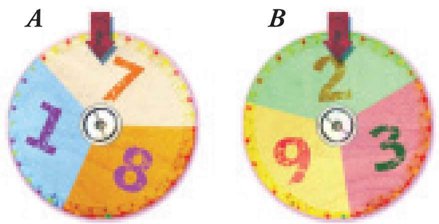
b) $P[1] = P[2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P[3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P[4] = P[5] = P[6] = \frac{1}{18}$

$P[7] = P[8] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

32 **Se hace girar la flecha en cada una de estas ruletas, y gana la que consiga la puntuación más alta.**



Calcula la probabilidad de que gane *A* y la de que gane *B*.

		A		
		1	7	8
B	2	1-2	7-2	8-2
	3	1-3	7-3	8-3
	9	1-9	7-9	8-9

$$P[\text{GANE A}] = \frac{4}{9}$$

$$P[\text{GANE B}] = \frac{5}{9}$$

33 **En una urna marcada con la letra A hay una bola roja y una negra. En otra urna, que lleva la letra B, hay una bola azul, una verde y una blanca.**

Se lanza un dado; si sale par, se saca una bola de la urna A, y si sale impar, de la urna B.

a) Escribe todos los resultados posibles de esta experiencia aleatoria.

b) ¿Tiene la misma probabilidad el suceso PAR y ROJA que el IMPAR y VERDE?

c) Calcula la probabilidad de todos los sucesos elementales y halla su suma. ¿Qué obtienes?

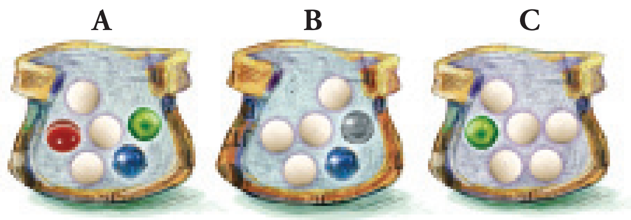
a) El espacio muestral es:

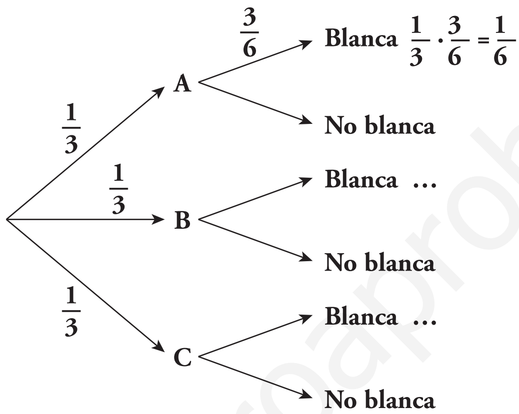
$E = \{(\text{PAR, ROJA}), (\text{PAR, NEGRA}), (\text{IMPAR, AZUL}), (\text{IMPAR, VERDE}), (\text{IMPAR, BLANCA})\}$

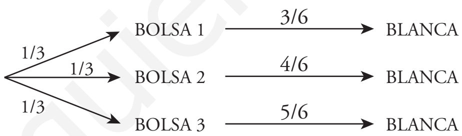
$$\left.\begin{aligned} &\text{b) } P[\text{PAR, ROJA}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ &P[\text{IMPAR, VERDE}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}\right\} \to \text{ Son distintas}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{c) } P[\text{PAR, ROJA}] = \frac{1}{4} \\ &P[\text{PAR, NEGRA}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ &P[\text{IMPAR, AZUL}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ &P[\text{IMPAR, VERDE}] = \frac{1}{6} \\ &P[\text{IMPAR, BLANCA}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ &\text{Se obtiene } P[E] = 1 \end{aligned}$$

34 **¿Cuál es la probabilidad de obtener bola blanca al elegir al azar una de estas bolsas y extraer de ella una bola?**







$$P\,[\text{BLANCA}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{5}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

35 **Lanzamos tres dados y anotamos la mayor puntuación. Calcula la probabilidad de que sea 5.**

Para que la mayor puntuación sea un 5, no tiene que salir ningún 6. Y en uno de ellos debe salir un 5. Es decir:

$$P[5] = P[\text{un } 5] \cdot P[\neq 6] \cdot P[\neq 6] = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$

36 **Lanzamos tres dados y anotamos la puntuación mediana. Calcula la probabilidad de que sea 5.**

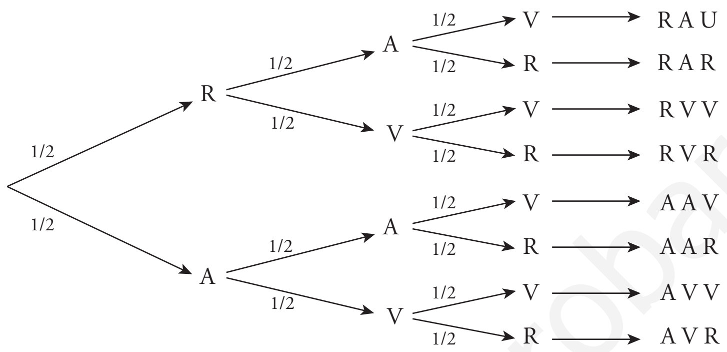
Para que la mediana sea un 5, deben salir un 6, un 5 y otro valor menor que 5. Es decir:

$$P[5] = P[\text{un } 6] + P[\text{un } 5] + P[< 5] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$$

37 **Tenemos tres cartulinas. La primera tiene una cara roja (R), y la otra, azul (A); la segunda A y verde (V), y la tercera, V y R.**

Las dejamos caer sobre una mesa. ¿Qué es más probable, que dos de ellas sean del mismo color o que sean de colores diferentes?

Hacemos un diagrama en árbol:



$P\,[2 \text{ iguales}] = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$P\,[\text{Todas distintas}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Es más probable que salgan dos colores iguales.

PÁGINA 240

PRACTICA

Formar agrupaciones

1 **a) En una urna hay una bola blanca, una roja y una negra. Las extraemos de una en una y anotamos ordenadamente los resultados. Escribe todos los posibles resultados que podemos obtener.**

b) Haz lo mismo para cuatro bolas distintas.

c) Lo mismo para ROJA, ROJA, BLANCA, NEGRA.

d) Lo mismo para ROJA, ROJA, NEGRA, NEGRA.

a) Llamando B → extracción de bola blanca

R → extracción de bola roja

N → extracción de bola negra

1ª EXTRACCIÓN	2ª EXTRACCIÓN	3ª EXTRACCIÓN	RESULTADO
B	R	N	BRN
	N	R	BNR
R	B	N	RBN
	N	B	RNB
N	B	R	NBR
	R	B	NRB

Tenemos 6 posibles resultados.

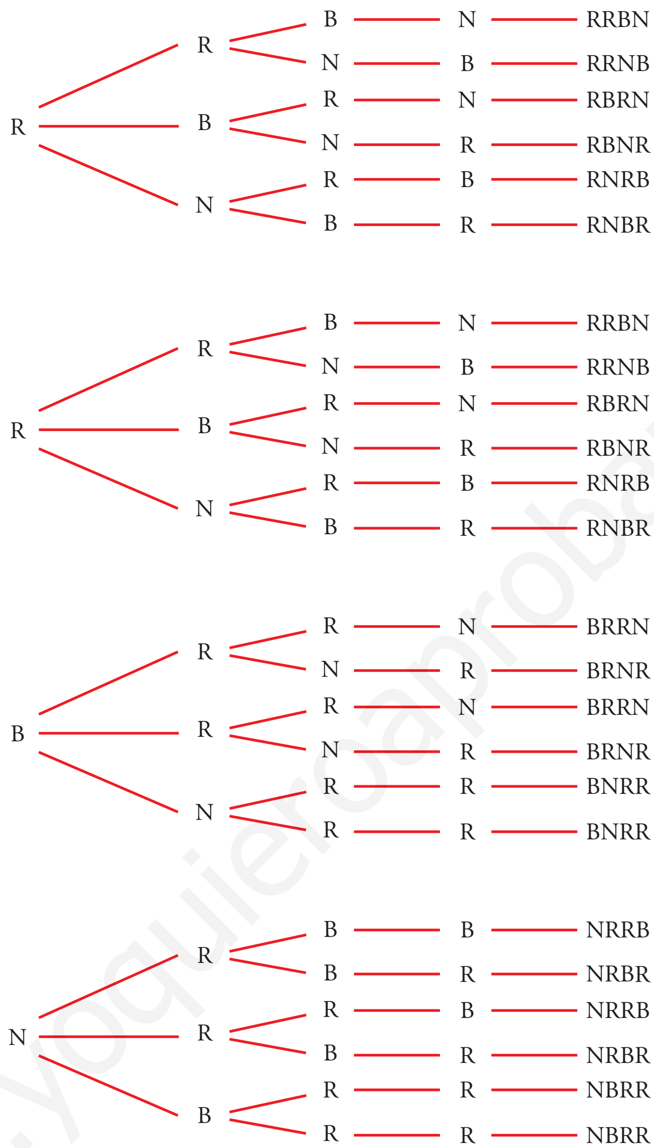
b) Añadimos, por ejemplo, una bola azul (A).

B	R	N	A	BRNA
		A	N	BRAN
	N	R	A	BNRA
		A	R	BNAR
	A	R	N	BARN
		N	R	BANR

Hacemos lo mismo empezando con R, con N y con A.

Al final tenemos 6 · 4 = 24 resultados posibles.

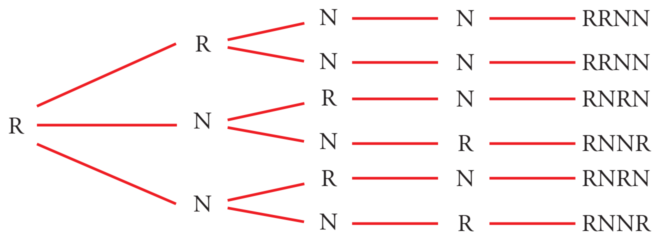
c)



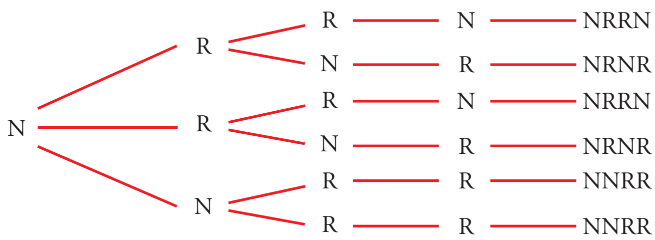
Como hay dos bolas del mismo color, ahora tenemos menos resultados que en el apartado b). En concreto:

6 + 3 + 3 = 12 resultados

d)



Para la segunda roja, igual.

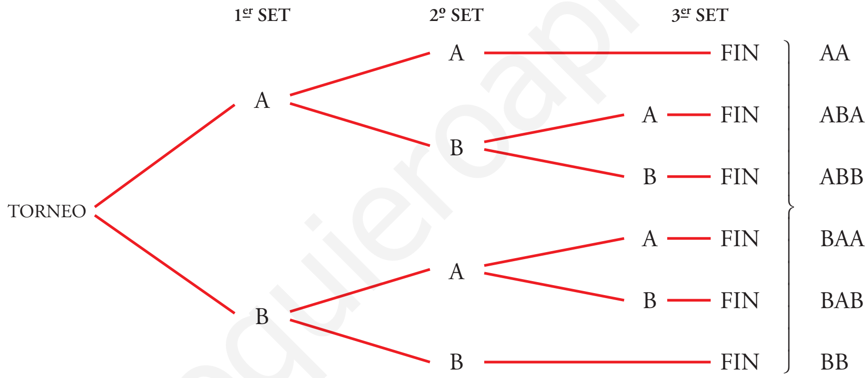


Ahora solo tenemos:

$$3 + 3 = 6 \text{ resultados}$$

2 □□□ **Dos amigos juegan al tenis y acuerdan que será vencedor el primero que logre ganar dos sets. Escribe todas las formas en que puede desarrollarse el partido.**

Hacemos un diagrama de árbol. En cada ramificación indicamos quién gana un set, el jugador A o el jugador B.

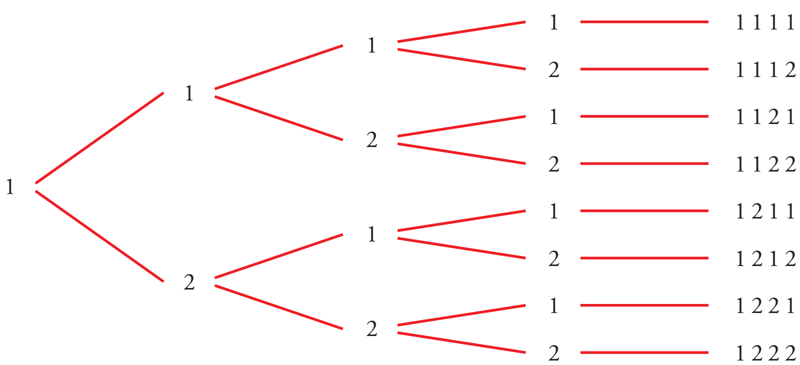


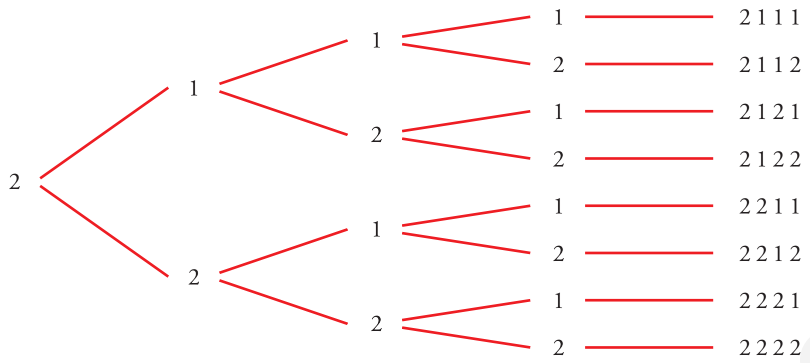
Hay 6 posibles desarrollos del torneo.

3 □□□ **a) Forma todos los números de cuatro cifras que se puedan hacer con los dígitos 1 y 2. ¿Cuántos son?**

b) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden hacer con los dígitos 0 y 1? Ten en cuenta que 01101 = 1 101 no es un número de cinco cifras.

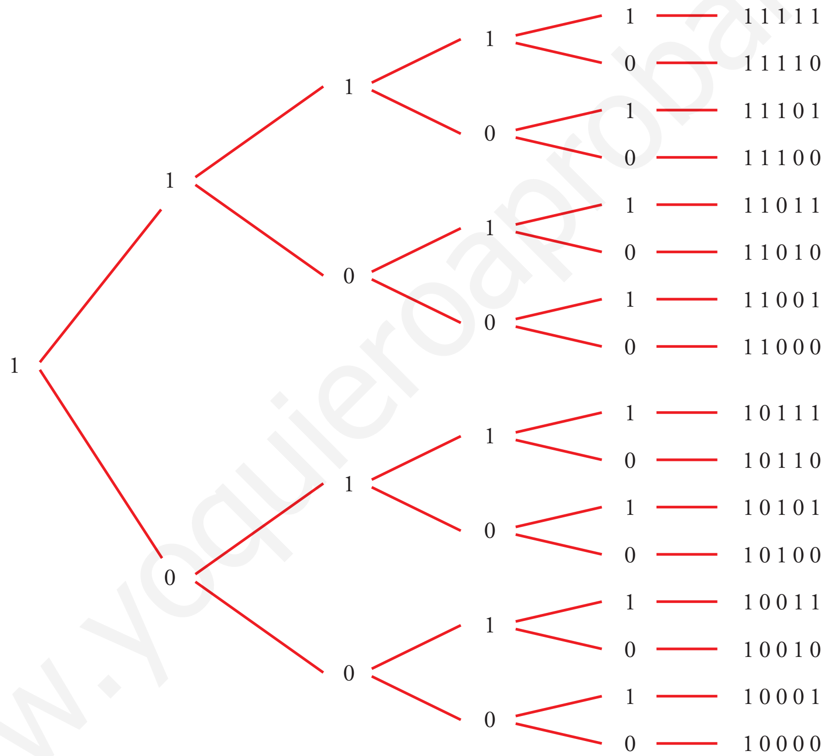
a) Hacemos un diagrama de árbol:





En total hay 16 números de cuatro cifras con los dígitos 1 y 2.

b)



Hay 16 números de 5 cifras compuestos solo por 0 y 1.

4 **Si queremos hacer lápices bicolores de doble punta y disponemos de los colores rojo, azul, negro, verde y amarillo, ¿cuántos modelos se pueden formar? Escríbelos todos.**

Llamamos: R - ROJO; A - AZUL; N - NEGRO, V - VERDE; M - AMARILLO

El lápiz bicolor de punta RA, por ejemplo, es el mismo que el de punta AR.

Los modelos de lápices bicolor son:

RA	AN	NV	VM
RN	AV	NM	
RV	AM		
RM			

En total hay 10 modelos.

5 □□□ **¿Qué números de dos cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5?**

Los números son:

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

6 □□□ **Queremos construir un dominó con los números 1, 2, 3, 4 y 5. Describe sus fichas.**

Cada ficha tiene dos números que podemos repetir, pero el orden no influye:

1 1	2 2	3 3	4 4	5 5	
1 2	2 3	3 4	4 5		
1 3	2 4	3 5			5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 fichas
1 4	2 5				
1 5					

7 □□□ **Describe todos los partidos que han de jugarse en una liguilla con cinco equipos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*.**

Suponemos que juegan a una sola vuelta.

Los partidos serán:

A-B	A-C	A-D	A-E	
B-C	B-D	B-E		10 partidos
C-D	C-E			
D-E				

Si la liguilla fuera a ida y vuelta, el número de partidos sería 20.

8 □□□ **Si tienes tres pantalones (AZUL, NEGRO, BLANCO) y cuatro camisetas (AZUL, ROJA, VERDE, BLANCA), describe todas las indumentarias que puedes vestir sin que coincidan el color de las dos prendas.**

Llamamos A, N y B a los pantalones, y A, R, V y B a las camisetas. Las posibles combinaciones son:

AA	AR	AV	AB	
NA	NR	NV	NB	Te puedes vestir de 12 formas diferentes.
BA	BR	BV	BB	

Utilizar las fórmulas

9 Calcula:

a) $VR_{4,3}$ b) $VR_{3,4}$ c) $V_{7,3}$ d) P_7

e) $C_{6,4}$ f) $V_{9,5}$ g) $\frac{P_{10}}{P_8}$ h) $C_{10,8}$

a) $VR_{4,3} = 4^3 = 64$

b) $VR_{3,4} = 3^4 = 81$

c) $V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

d) $P_7 = 7! = 5\,040$

e) $C_{6,4} = \frac{V_{6,4}}{P_4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$

f) $V_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$

g) $\frac{P_{10}}{P_8} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90$

h) $C_{10,8} = \frac{V_{10,8}}{P_8} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{90}{2} = 45$

10 Calcula:

a) $V_{5,2} - C_{5,3}$ b) $\frac{VR_{6,2}}{C_{4,2}}$ c) $\frac{P_4}{V_{4,3}}$

d) $\frac{P_5}{P_3}$ e) $\frac{P_{10}}{P_9}$ f) $\frac{P_{12}}{P_9}$

a) $V_{5,2} - C_{5,3} = 5 \cdot 4 - \frac{V_{5,3}}{P_3} = 20 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 - 10 = 10$

b) $\frac{VR_{6,2}}{C_{4,2}} = \frac{6^2}{\frac{V_{4,2}}{P_2}} = \frac{36}{\frac{12}{2}} = \frac{36}{6} = 6$

c) $\frac{P_4}{V_{4,3}} = \frac{4!}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1$

d) $\frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$

e) $\frac{P_{10}}{P_9} = \frac{10!}{9!} = 10$

f) $\frac{P_{12}}{P_9} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 1\,320$

11 **Las expresiones $VR_{8,2}$; P_8; $V_{8,2}$; $C_{8,2}$ son las soluciones de los siguientes apartados a), b), c), d), pero no en ese orden. Asigna a cada apartado su solución:**

a) Palabras de ocho letras, con o sin sentido, que se pueden hacer con las letras de PELÍCANO.

b) Posibles parejas que se pueden formar para jugar un torneo de ajedrez entre 8 personas.

c) Números de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

d) Posibles formas de dar el primer y segundo premios de un concurso literario en el que participan 8 personas.

a) P_5 b) $C_{8,2}$ c) $VR_{4,2}$ d) $V_{8,2}$

12 **Ocho problemas muy parecidos. En cada uno de los siguientes problemas la pregunta es: *¿De cuántas formas se puede hacer?***

a) 3 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 6 clases de polos.

b) 6 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 3 clases de polos.

c) Repartir 3 polos distintos entre 6 chicos.

d) Repartir 3 polos iguales entre 6 chicos.

e) Un chico escoge 3 polos entre 6 distintos.

f) Un chico escoge 3 polos entre 6 iguales.

g) Repartir 6 polos distintos entre 6 chicos.

h) Repartir 3 polos de fresa y 3 de vainilla entre 6 chicos.

Sus soluciones son: C_6^3, P_6, VR_6^3, 1, VR_3^6, V_6^3. Están dadas en otro orden y se pueden repetir.

a) $VR_6^3 = 6^3 = 216$ formas.

b) $VR_3^6 = 3^6 = 729$ formas.

c) $V_6^3 = 120$ formas.

d) $C_6^3 = 120$ formas.

e) $V_6^3 = 120$ formas.

f) 1 forma.

g) $P_6 = 720$ formas.

h) $C_6^3 = 20$ formas.

13 ■■□ **¿De cuántas formas pueden repartise 3 entradas para un concierto de rock entre 6 amigos y amigas sin que ninguno pueda llevarse más de una?**

Hay $V_6^3 = 120$ formas de repartirse las entradas.

PÁGINA 241

14 ■■□ **Para formar un equipo de baloncesto hacen falta 5 jugadores y el entrenador dispone de 10.**

a) ¿Cuántos equipos distintos puede formar?

b) Si elige a dos jugadores y los mantiene fijos, ¿cuántos equipos distintos podrá hacer con los ocho que le quedan?

a) Con 10 jugadores se quieren formar equipos de 5.

El orden no influye y no se pueden repetir.

$$C_{10,5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252 \text{ equipos distintos}$$

b) Si el entrenador decide mantener dos jugadores fijos, habrá:

$$C_{8,3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ equipos distintos}$$

15 ■■□ **Se van a celebrar elecciones en la Asociación de Padres y hay que elegir al presidente, al secretario y al tesorero. ¿De cuántas maneras se pueden elegir estos tres cargos, si se presentan ocho candidatos?**

No se pueden repetir y, además, influye el orden porque no es lo mismo ser presidente, que secretario, que tesorero.

Son variaciones ordinarias: $V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ formas distintas.

16 ■■□ **Se van a repartir tres regalos entre seis personas. Calcula de cuántas formas se pueden repartir en cada uno de los siguientes casos:**

a) Los regalos son distintos (una bicicleta, unos patines y un chándal) y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

b) Los regalos son iguales y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

c) Los regalos son distintos y puede tocarle más de uno a la misma persona.

a) No se pueden repetir los regalos y sí influye el orden porque no es lo mismo que toque una bicicleta, que unos patines, que un chándal.

Son variaciones ordinarias $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas

b) Ahora el orden no influye: $C_{6,3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ formas.

c) Pueden repetirse e influye el orden: $VR_{6,3} = 6^3 = 216$ formas.

17 ■■□ **Los participantes de un concurso tienen que ordenar a ciegas seis tarjetas en las que está escrita cada una de las letras de la palabra PREMIO.**

a) ¿Cuántas ordenaciones distintas pueden salir?

b) Les ofrecen fijar la P en el lugar que le corresponde y reducir el premio a la mitad. ¿Cuántas ordenaciones posibles se pueden obtener de esta forma?

a) Disponemos de las 6 letras de la palabra PREMIO para agruparlas; ninguna letra está repetida y el orden influye.

$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ ordenaciones distintas.

b) Como P está fija, ahora se disponen de 5 letras:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ordenaciones distintas.

18 ■■□ **¿De cuántas formas pueden sentarse tres personas en un banco de 5 asientos? ¿Y si el banco es de 3 asientos?**

No se pueden repetir y el orden influye:

Si el banco es de 5 asientos: $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas.

Si el banco es de 3 asientos: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas.

19 ■□□ **Estás haciendo la maleta para irte de vacaciones y quieres llevarte cuatro de las ocho camisetas que tienes.**

¿De cuántas formas las puedes seleccionar?

No puedes repetirlas y no influye el orden:

$C_{8,4} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ formas distintas.

20 ■□□ **El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencias de dígitos formados por ceros y unos. Un *byte* es una de estas secuencias y está formado por 8 dígitos.**

Por ejemplo: $\boxed{0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1}$

¿Cuántos *bytes* diferentes se pueden formar?

Disponemos de dos elementos y los agrupamos de 8 en 8:

$VR_{2,8} = 2^8 = 256$ bytes diferentes se pueden formar.

21 ■■□ **Las 28 fichas de un dominó se reparten entre cuatro jugadores. ¿Cuántos juegos distintos podrá tener cada jugador?**

Se reparten 7 fichas a cada uno. No se pueden repetir y no influye el orden:

$C_{28,7} = \dfrac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,184\,040$

22 ■□□ **a) ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra PALOTE?**

b) ¿Cuántas empiezan por P?

c) ¿En cuántas de ellas ocupan las consonantes los lugares impares y las vocales los pares? (Por ejemplo: PATELO).

d) ¿En cuántas están alternadas vocales y consonantes?

Las letras son distintas y el orden influye:

a) $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas.

b) Si empiezan por P, ahora disponemos de 5 letras y 5 lugares:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas.

c) Si las consonantes están en los lugares impares: $P_3 = 3 \cdot 2 = 6$ formas.

Las vocales están en los lugares pares: $P_3 = 3 \cdot 2 = 6$ formas.

Por cada forma de las consonantes hay 6 formas de las vocales.

En total hay: $6 \cdot 6 = 36$ formas.

d) Hay 72 formas, porque puede ser

C V C V C V (apartado c))

V C V C V C $\rightarrow$ otras 36 formas.

23 ■□□ **Seis amigos, 3 chicos y 3 chicas, van al cine. ¿De cuántas formas pueden sentarse si quieren estar alternados?**

Este problema es idéntico al apartado d) del problema 22. Por tanto, tienen 72 formas distintas de sentarse.

24 ■□□ **Señala 8 puntos en una circunferencia. Traza las cuerdas que unen cada punto con todos los demás.**

a) ¿Cuántas cuerdas tendrás que dibujar?

b) ¿Cuántas diagonales tiene un octógono?

a) Tomamos los puntos de dos en dos.

No se pueden repetir y no influye el orden: $C_{8,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ cuerdas

b) $C_{16,2} = \dfrac{16 \cdot 15}{2 \cdot 1} = 120$ cuerdas

25 ■□□ **En unos almacenes emplean el siguiente código para marcar los artículos:**

- **La primera cifra indica la sección correspondiente y es un número entre el 1 y el 9.**
- **Después, hay tres cifras, cada una de ellas del 0 al 9, que corresponden al número del proveedor.**

¿Cuántas marcas distintas se pueden hacer?

Por cada cifra correspondiente a la sección habrá $VR_{10,3} = 1\,000$ marcas distintas.

Como hay 9 cifras correspondientes a la sección, en total se podrán hacer $9 \cdot 1\,000 = 9\,000$ marcas distintas.

26 **Para matricularte en un curso, tienes que elegir dos asignaturas entre las siguientes:**

Música	**Tecnología**
Teatro	**Dibujo**
Informática	**Periodismo**

a) ¿De cuántas formas puedes hacer la elección?

b) Si en secretaría te advierten de que las seis asignaturas las escribas por orden de preferencia, ¿de cuántas formas las puedes escribir?

a) No influye el orden y no podemos repetirlas:

$$C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ formas distintas}$$

b) $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas diferentes

27 **El profesor de Matemáticas nos ha propuesto diez problemas de los que tenemos que resolver cinco.**

a) ¿Cuántas formas hay de seleccionarlos?

b) De los 10 problemas propuestos hay 2 de los que no tienes "ni idea". ¿Se reducen mucho las posibilidades de selección?

a) No podemos repetirlos y no influye el orden:

$$C_{10,5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252 \text{ formas}$$

b) En lugar de elegir entre 10, ahora elegimos entre 8:

$$C_{8,5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ formas}$$

Se reduce mucho la selección, aproximadamente en un 77,8%.

PÁGINA 242

28 **¿Cuántos grupos de 4 cartas distintas se pueden hacer con una baraja española? ¿Cuántos de ellos están formados por 4 FIGURAS?**

¿En cuántos serán OROS las 4 cartas?

La baraja tiene 40 cartas. Se hacen grupos de 4 cartas donde no se pueden repetir y no influye el orden:

$$C_{40,4} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 91\,390 \text{ grupos.}$$

Hay 16 figuras:

$$C_{16,4} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,820 \text{ grupos están formados solo por figuras.}$$

Hay 10 oros: $C_{10,4} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ grupos serán solo de oros.

29 ■■□ **Como sabes, una quiniela consta de 14 partidos, en cada uno de los cuales se puede poner 1, X o 2.**

¿Cuántas quinielas distintas se pueden rellenar?

Al hacer una quiniela es importante el orden y podemos repetir resultados. Por tanto:

$VR_{3,14} = 3^{14} = 478\,969$ quinielas distintas.

30 ■■□ **Las matrículas de los automóviles de cierto país llevan cuatro números y tres letras.**

Para ello, se utilizan los dígitos del 0 al 9 y 26 letras de nuestro alfabeto. ¿Cuántas matrículas pueden hacerse de esta forma?

- Con 10 dígitos, agrupados de 4 en 4, y teniendo en cuenta que se pueden repetir y que el orden influye, se pueden formar $VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000$ agrupaciones distintas.
- Con 26 letras, formando grupos de 3 y considerando que el orden influye y que las letras se pueden repetir, habrá:

  $VR_{26,3} = 26^3 = 17\,576$ grupos distintos

Por cada grupo de 4 dígitos habrá 17 576 formas de agrupar las letras.

En total habrá: $VR_{10,4} \cdot VR_{26,3} = 175\,760\,000$ matrículas.

31 ■■□ **Me van a regalar 3 libros y 2 discos por mi cumpleaños.**

He hecho una lista con los que me gustaría tener, y en ella anoté 5 libros y 8 discos.

¿De cuántas formas distintas pueden elegir mi regalo?

El número de formas que hay de elegir los tres libros de entre 5 es:

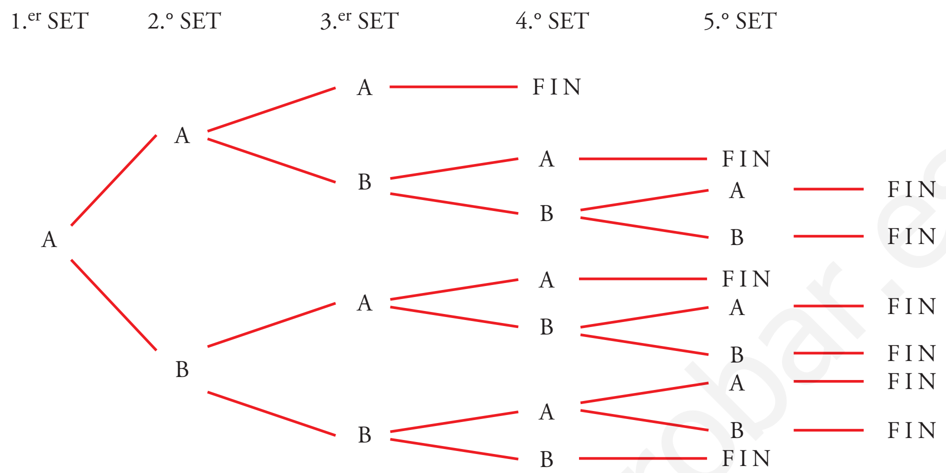
$$C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ formas}$$

El número de formas que hay de elegir los dos discos de entre 8 es:

$$C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ formas}$$

Para cada una de las formas que hay de elegir los tres libros tenemos 28 formas de elegir los discos, luego en total hay $28 \cdot 10 = 280$ formas de elegir los tres libros y los dos discos.

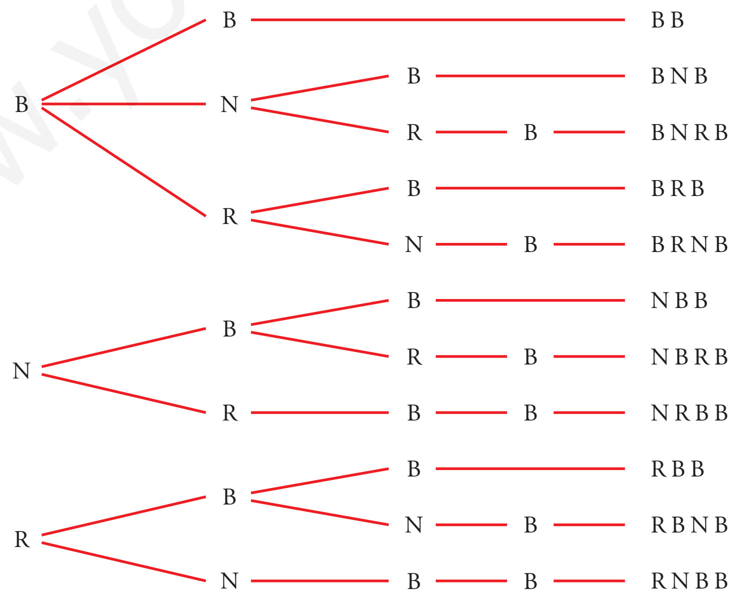
32 ■■□ **Dos amigos se enfrentan en un torneo de tenis, en el que será vecedor el primero que logre ganar tres sets. ¿De cuántas formas posibles puede desarrollarse el encuentro?**



Si el primer set lo gana el jugador B, tenemos un esquema análogo. Por tanto, hay 20 maneras distintas de acabar un partido.

33 ■■□ **En una urna hay dos bolas blancas, una negra y una roja. Extraemos sucesivamente una bola cada vez y paramos cuando tengamos las dos blancas. ¿Cuáles son los posibles resultados?**

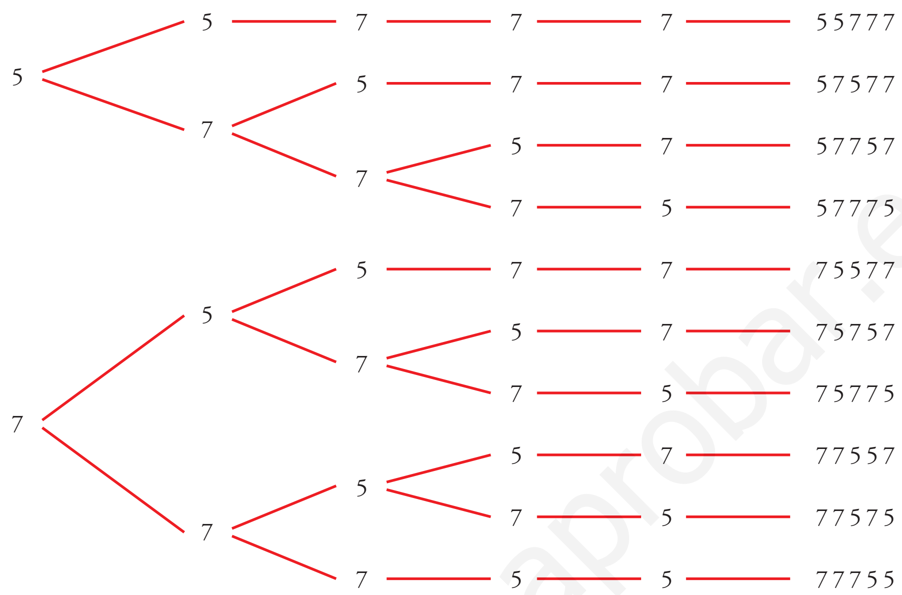
Anotamos en un diagrama de árbol la bola que se saca en cada extracción: blanca (B), negra (N), roja (R)



En total hay 11 posibles resultados.

34 ■■□ **El número 75775 está formado por dos cincos y tres sietes. ¿Cuáles son los números que podemos formar con dos cincos y tres sietes?**

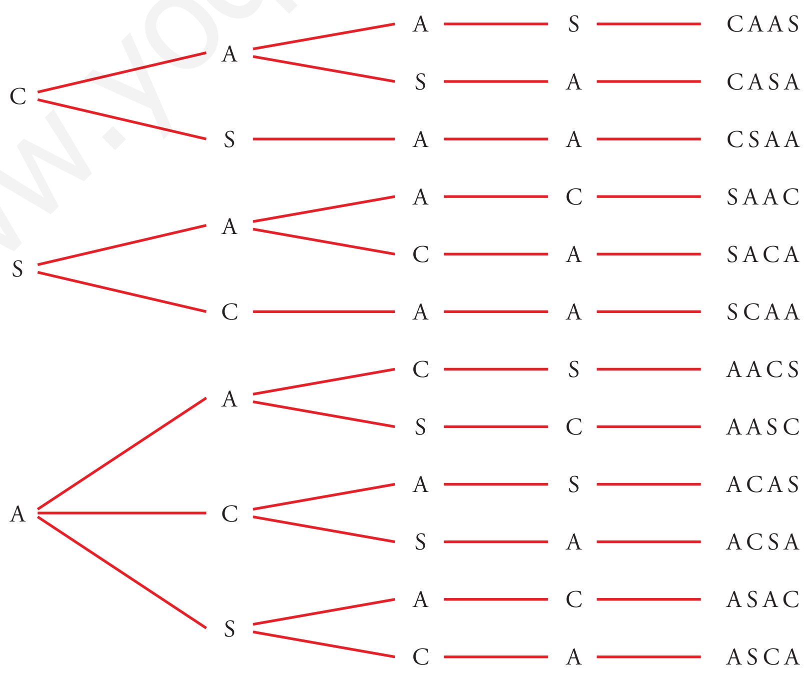
Anotamos, en un diagrama de árbol, las posibilidades de cada cifra del número:



En total hay 10 números formados por dos cincos y tres sietes.

35 ■■□ **Con las letras de la palabra CASA, ¿cuántas ordenaciones, con o sin sentido, podemos formar? Escríbelas todas.**

Anotamos en un diagrama de árbol las posibilidades de cada letra de la palabra:



En total, podemos formar 12 ordenaciones.

PROFUNDIZA

36 **Tenemos 5 pesas de 1 g, 2 g, 4 g, 8 g y 16 g. ¿Cuántas pesadas diferentes se pueden hacer tomando dos de ellas? ¿Y con tres?**

Calcula cuántas pesadas se pueden hacer, en total, tomando 1, 2, 3, 4 o las 5 pesas.

No influye el orden y no se pueden repetir:

$C_{5,2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ pesadas.

$C_{5,3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ pesadas también.

Tomando 1 pesa = 5 pesadas.

Tomando 2 pesas: $C_{5,2} = 10$ pesadas.

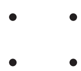
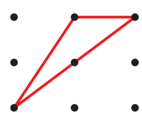
Tomando 3 pesas: $C_{5,3} = 10$ pesadas.

Tomando 4 pesas: $C_{5,4} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$ pesadas.

Tomando 5 pesas: 1 pesada

En total se podrán hacer: 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31 pesadas

37 **¿Cuántos triángulos se pueden hacer de modo que tengan los vértices en los puntos de estas redes?**

a)  b)  c) 

a) 

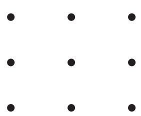
$C_{4,3} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$ triángulos

b) 

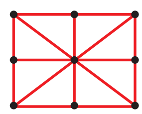
$C_{6,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

Necesitamos tres puntos no alineados para construir un triángulo.

En dos de los 20 casos los puntos están alineados, es decir, se pueden construir 20 – 2 = 18 triángulos.

c) 

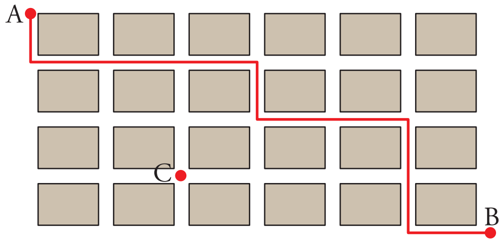
$C_{9,3} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$



En este caso nos encontramos con 8 casos que no son posibles.

En total podemos construir 84 – 8 = 76 triángulos.

38 **Esta cuadrícula representa el plano de un barrio de una ciudad.**



a) ¿Cuántos caminos de longitud mínima hay para ir de A a C?

b) ¿Cuántos caminos hay para ir de C a B?

c) ¿Cuántos caminos hay para ir de A a B, pasando por C?

d) ¿Cuántos caminos hay para ir de A a B?

a) Para ir de A a C solo puede irse dos veces a la derecha (D) y tres veces hacia abajo (I). Los caminos serán de la forma DDIID, por ejemplo. Se trata de colocar dos I en cinco lugares. Es decir:

$$C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ caminos}$$

b) Análogamente, hay:

$$C_{5,1} = \frac{5}{1} = 5 \text{ caminos}$$

c) Para ir de A a C, pasando por B, hay $10 \cdot 5 = 50$ caminos.

d) Para ir de A a B hay:

$$C_{10,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ caminos}$$

39 **En una pizzería preparan pizzas con, al menos, 4 ingredientes. Si disponen de 6 tipos de ingredientes, ¿cuántos tipos de pizza se pueden preparar? (Ten en cuenta que las pueden hacer de 4, 5 ó 6 ingredientes).**

Con 4 ingredientes: $C_{6,4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$ tipos

Con 5 ingredientes: $C_{6,5} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$ tipos

Con 6 ingredientes: $C_{6,6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$ tipo

En total se pueden hacer $15 + 6 + 1 = 22$ tipos de pizzas.

40 **Un secretario ha escrito cinco cartas distintas dirigidas a cinco personas. También escribe los cinco sobres correspondientes y mete al azar cada carta en un sobre.**

a) ¿De cuántas formas posibles se pueden meter las cartas en los sobres?

b) ¿En cuántos casos la carta del señor Pérez estará dentro de su sobre?

a) No puede repetirlas y sí influye el orden:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas posibles

b) Si fijamos la carta del señor Pérez en el sobre del señor Pérez, nos quedan libres cuatro cartas y cuatro sobres:

$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ casos habrá en que la carta del señor Pérez estará dentro del sobre del señor Pérez.

41 **Calcula cuántos productos de tres factores distintos podemos formar con estas cifras:**

1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7

No influye el orden ($3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$) y no podemos repetirlos:

$C_{7,3} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ productos.

PÁGINA 243

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

42 **En una bolsa tenemos 4 bolas rojas, 5 verdes y 1 azul. Extraemos 3 bolas. Calcula la probabilidad de que:**

a) Las tres sean rojas.

b) Las tres sean verdes.

c) Cada una de las tres sea roja o verde.

d) Una de las tres sea azul.

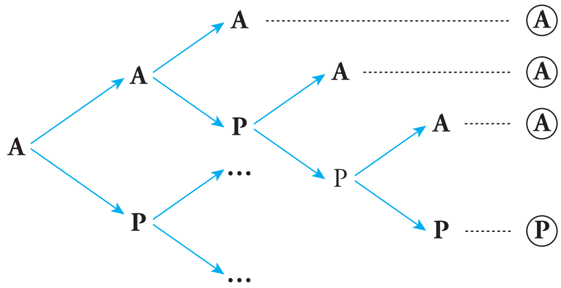
a) $P[3 \text{ ROJAS}] = P[\text{ROJA}] \cdot P[\text{ROJA}] \cdot P[\text{ROJA}] = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{2}{8} = \dfrac{3}{90} = \dfrac{1}{30}$

b) $P[3 \text{ VERDES}] = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{12}$

c) $P[\text{ROJAS o VERDES}] = \dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{8}{9} \cdot \dfrac{7}{8} = \dfrac{7}{10}$

d) $P[\text{una AZUL}] = P[1.^{a} \text{ AZUL}] + P[2.^{a} \text{ AZUL}] + P[3.^{a} \text{ AZUL}] = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{10}$

43 ■■□ **Andrés y Pablo están jugando al tenis. Ambos son igual de buenos. El partido es a cinco sets y el primero lo ha ganado Andrés. ¿Cuál es la probabilidad de que acabe ganando Pablo?**



Completa el diagrama y utilízalo para resolver el problema.

Si Andrés gana el primer set, se pueden dar estos resultados:

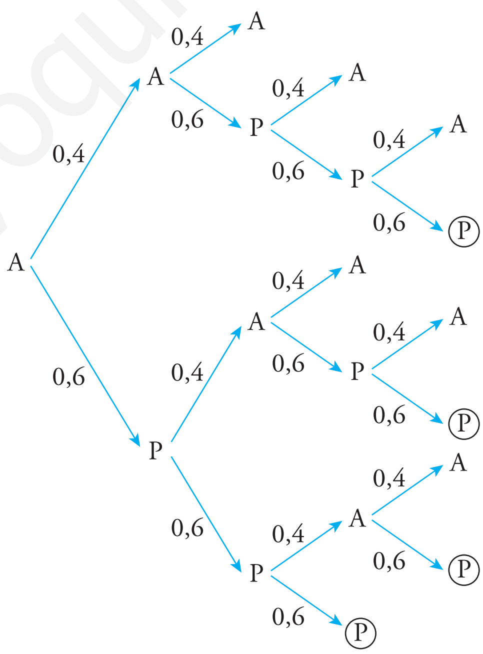
A A A   A A P A   A A P P A   **A A P P P**

A P A A   A P A P A   **A P A P P**

A P P A A   **A P P A P**   **A P P P**

Por tanto, $P[\text{gane Pablo}] = \dfrac{4}{10}$

44 ■■■ **Repite el problema anterior suponiendo que en cada set, la probabilidad de que lo gane Pablo es 0,6.**



$$\begin{aligned} P[\text{gane Pablo}] &= 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 + \\ &+ 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 + \\ &+ 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + \\ &+ 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}4752 \end{aligned}$$

45 **Cinco amigos y amigas van juntos al cine y se reparten los asientos (consecutivos) al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que Alberto quede junto a Julia?**

Hay $P_5 = 5! = 120$ formas en que pueden sentarse los cinco amigos en el cine. De ellas, hay 8 en las que Julia se sentará al lado de Alberto.

Por tanto, la probabilidad pedida es $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$.

46 **Tiramos tres dados. Calcula estas probabilidades:**

a) El valor mediano es 6.

b) La suma es 10.

c) El menor es 2.

d) La diferencia entre el mayor y el menor es 2.

a) Eso significa que los tres son 6.

$$P[\text{valor mediano } 6] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

b) Para que los tres dados sumen 10, debe darse alguna de estas combinaciones:

$$\left.\begin{array}{l}(1\ 3\ 6)\\(1\ 4\ 5)\\(2\ 2\ 6)\\(2\ 3\ 5)\\(2\ 4\ 4)\\(3\ 3\ 4)\end{array}\right\}\ \text{6 posibilidades}$$

Por tanto:

$$P[\text{sumen } 10] = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

c) $P[\text{menor es } 2] = P[\text{no sale ningún 1 y por lo menos un 2}] = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

d) • Si el menor es 1 → (1 1 3)
(1 2 3)
(1 3 3)

• Si el menor es 2 → (2 2 4)
(2 3 4)
(2 4 4)

• Si el menor es 3 → (3 3 5)
(3 4 5)
(3 5 5)

• Si el menor es 4 → (4 4 6)
(4 5 6)
(4 6 6)

Por tanto, $P[\text{diferencia de } 2] = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$

47 ■■□ **Si juegas un boleto de la Lotería Primitiva, ¿qué probabilidad tienes de ganar el primer premio? (En un boleto se marcan 6 números entre el 1 y el 49).**

En la Primitiva se pueden rellenar $C_{49,6} = 13\,983\,816$ boletos distintos, de los que solo gana el premio máximo uno. Así:

$$P[\text{ganar}] = \frac{1}{13\,983\,816}$$

48 ■■□ **¿Cuántas quinielas hay que hacer para asegurarse ocho resultados? Una persona que siga esa estrategia y rellena los restantes al azar, ¿qué probabilidad tiene de acertar los 14?**

a) Para asegurar 8, hay que hacer $VR_3^8 = 3^8 = 6\,561$ quinielas distintas.

b) Como quedan 6 casillas por rellenar, la probabilidad de acertar las 6 restantes será:

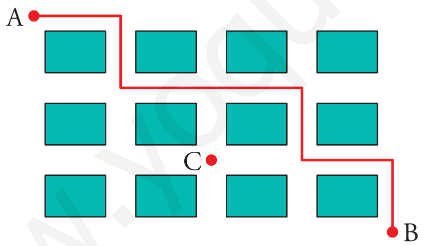
$$P[\text{acertar } 14] = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$$

49 ■■■ **Una oposición consta de 50 temas. Salen 3 de ellos al azar y se debe elegir uno de ellos. Un opositor sabe 30. ¿Cuál es la probabailidad de que salga uno de los que sabe?**

☞ ***Acaso te convenga calcular la probabilidad de que no salga ninguno que se sepa.***

$$P[\text{sabe}] = 1 - P[\text{no sabe}] = 1 - \frac{20}{50} \cdot \frac{19}{49} \cdot \frac{18}{48} = 1 - \frac{6\,840}{117\,600} = \frac{923}{980} = 0{,}94$$

50 ■■■



Para ir de A a B, hay que dar 7 pasos en cada uno de los cuales se puede escoger → o ↓. Por ejemplo, el recorrido marcado en rojo se puede describir así:

$$\rightarrow\ \downarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \downarrow\ \rightarrow\ \downarrow$$

Cada recorrido es una combinación de cuatro pasos así → y tres pasos así ↓. El número total de caminos es C_7^3.

a) ¿Cuántos posibles caminos hay para ir de A a C? ¿Cuántos para ir de C a B?

b) ¿Cuántos caminos hay para ir de A a B pasando por el punto C?

c) Una persona va de A a B decidiendo aleatoriamente el camino. ¿Cuál es la probabilidad de que pase por el punto C?

a) Para ir de A a C, hay:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ caminos}$$

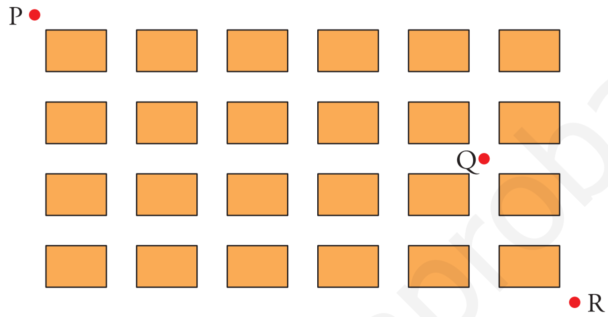
Para ir de C a B, hay:

$C_3^1 = \frac{3}{1} = 3$ caminos

b) Hay $6 \cdot 3 = 18$ caminos.

c) P[A a B, pasando por C] $= \frac{18}{C_7^3} = \frac{18}{35} = 0{,}51$

51 **Sergio sabe que Lupe va a ir de P a R. Decide esperarla en Q. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?**



Caminos totales para ir de P a R:

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ caminos}$$

Para ir de P a Q:

$$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \text{ caminos}$$

Para ir de Q a R:

$$C_3^1 = 3 \text{ caminos}$$

Para ir de P a R, pasando por Q:

$$21 \cdot 3 = 63 \text{ caminos}$$

P[encontrarse en Q] $= \frac{63}{210} = 0{,}3$