Página 37

PRACTICA

Aproximación y errores

1 **Expresa con un número adecuado de cifras significativas:**

a) Audiencia de un programa de televisión: 3 017 849 espectadores.

b) Tamaño de un virus: 0,008375 mm.

c) Resultado de 15^7.

d) Fuerza de atracción entre dos cuerpos: 18 753 N.

e) Presupuesto de un ayuntamiento: 987 245 €.

f) Porcentaje de votos de un candidato a delegado: 37,285%.

g) Capacidad de un pantano: 3 733 827 000 *l*.

a) 3 000 000 espectadores

b) 0,008 mm

c) $15^7 = 170\,859\,375 \rightarrow 170\,000\,000$

d) 19 000 N

e) 1 000 000 €

f) 37%

g) 3 750 000 000 *l*

2 **Calcula, en cada uno de los apartados del ejercicio anterior, el error absoluto y el error relativo de las cantidades dadas como aproximaciones.**

Dado que:

Error absoluto = |Valor real – Valor de la medición|

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}},$$

obtendríamos:

a) Error absoluto = 17 849

$$\text{Error relativo} = \frac{17\,849}{3\,017\,849} \approx 0{,}006$$

b) Error absoluto = 0,000375

$$\text{Error relativo} = \frac{0{,}000375}{0{,}008375} \approx 0{,}04$$

c) Error absoluto = 859 375

Error relativo = $\frac{859\,375}{170\,859\,375} \approx 0{,}005$

d) Error absoluto = 247

Error relativo = $\frac{247}{18\,753} \approx 0{,}013$

e) Error absoluto = 12 755

Error relativo = $\frac{12\,755}{987\,245} \approx 0{,}013$

f) Error absoluto = 0,285

Error relativo = $\frac{0{,}285}{37{,}285} \approx 0{,}007$

g) Error absoluto = 16 173 000

Error relativo = $\frac{16\,173\,000}{3\,733\,827\,000} \approx 0{,}004$

3 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

4 Da una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes aproximaciones:

a) Radio de la Tierra: 6 400 km.

b) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km.

c) Habitantes de España: 41 millones.

d) Tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia: 0,007 segundos.

e) Volumen de una gota de agua: 0,4 mm^3.

a) Cota del error absoluto: $\frac{100}{2} = 50$

Cota del error relativo: $\frac{50}{6\,400} \approx 0{,}008$

b) Cota del error absoluto: $\frac{10\,000\,000}{2} = 5\,000\,000$

Cota del error relativo: $\frac{5\,000\,000}{150\,000\,000} \approx 0{,}03$

c) Cota del error absoluto: 500 000

Cota del error relativo: $\frac{500\,000}{40\,000\,000} \approx 0{,}12$

d) Cota del error absoluto: $\frac{0{,}001}{2} = 0{,}0005$

Cota del error relativo: $\frac{0{,}0005}{0{,}007} \approx 0{,}07$

e) Cota del error absoluto: $\frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$

Cota del error relativo: $\frac{0{,}05}{0{,}4} \approx 0{,}125$

Notación científica

5 Expresa con todas las cifras:

a) $6{,}25 \cdot 10^8$ **b)** $2{,}7 \cdot 10^{-4}$ **c)** $3 \cdot 10^{-6}$

d) $5{,}18 \cdot 10^{14}$ **e)** $3{,}215 \cdot 10^{-9}$ **f)** $-4 \cdot 10^{-7}$

a) 625 000 000 b) 0,00027 c) 0,000003

d) 518 000 000 000 000 e) 0,000000003215 f) –0,0000004

6 Escribe en notación científica:

a) **4 230 000 000** **b)** **0,00000004**

c) **84 300** **d)** **–0,000572**

a) $4{,}23 \cdot 10^9$ b) $4 \cdot 10^{-8}$ c) $8{,}43 \cdot 10^4$ d) $-5{,}72 \cdot 10^{-4}$

7 Expresa en notación científica:

a) Recaudación de las quinielas en una jornada de liga de fútbol: 1 628 000 €.

b) Toneladas de CO_2 que se emitieron a la atmósfera en 1995 en Estados Unidos: 5 228,5 miles de millones.

c) Radio del átomo de oxígeno: 0,000000000066 m

a) $1\,628\,000\,000 = 1{,}628 \cdot 10^9$

b) 5 228,5 miles de millones = $5{,}2285 \cdot 10^{12}$

c) 0,000000000066 m = $6{,}6 \cdot 10^{-11}$

8 Halla una cota del error absoluto y otra del error relativo de los siguientes redondeos dados en notación científica:

a) $9{,}254 \cdot 10^5$ **b)** $3{,}7 \cdot 10^8$ **c)** $5{,}28 \cdot 10^{-6}$

d) $8{,}4 \cdot 10^{-3}$ **e)** $1{,}95 \cdot 10^6$ **f)** $2{,}185 \cdot 10^{-8}$

a) $9{,}254 \cdot 10^5 = 9\,254 \cdot 10^2$ → Cota del error absoluto: $\frac{100}{2} = 50$

Cota del error relativo: $\frac{50}{9{,}254 \cdot 10^5} \approx$

$\approx 0{,}00005$

b) $3{,}7 \cdot 10^8 = 37 \cdot 10^7 \rightarrow$ Cota del error absoluto: $\frac{10\,000\,000}{2} = 5\,000\,000$

Cota del error relativo: $\frac{5\,000\,000}{3{,}7 \cdot 10^8} \approx 0{,}0135$

c) Cota del error absoluto: $\frac{0{,}000001}{2} = 0{,}0000005$

Cota del error relativo: $\frac{0{,}0000005}{5{,}28 \cdot 10^{-6}} \approx 0{,}095$

d) Cota del error absoluto: $\frac{0{,}001}{2} = 0{,}0005$

Cota del error relativo: $\frac{0{,}0005}{8{,}4 \cdot 10^{-3}} \approx 0{,}06$

e) $1{,}95 \cdot 10^6 = 195 \cdot 10^4 \rightarrow$ Cota del error absoluto: $\frac{10\,000}{2} = 5\,000$

Cota del error relativo: $\frac{5\,000}{1{,}95 \cdot 10^6} \approx 0{,}0025$

f) Cota del error absoluto: $\frac{0{,}00000001}{2} = 0{,}000000005$

Cota del error relativo: $\frac{0{,}000000005}{2{,}185 \cdot 10^{-8}} \approx 0{,}23$

9 **Calcula con lápiz y papel y comprueba después el resultado con la calculadora:**

a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (1{,}5 \cdot 10^7)$ **b)** $(3 \cdot 10^{-8}) \cdot (2{,}1 \cdot 10^4)$

c) $(1{,}25 \cdot 10^{-17}) \cdot (4 \cdot 10^{13})$ **d)** $(2{,}4 \cdot 10^{-7}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})$

a) $(2 \cdot 1{,}5) \cdot 10^{5+7} = 3 \cdot 10^{12}$

b) $(3 \cdot 2{,}1) \cdot 10^{-8+4} = 6{,}3 \cdot 10^{-4}$

c) $(1{,}25 \cdot 4) \cdot 10^{-17+13} = 5 \cdot 10^{-4}$

d) $(2{,}4 \cdot 5) \cdot 10^{-7-6} = 12 \cdot 10^{-13} = 1{,}2 \cdot 10^{-12}$

Página 38

10 **Efectúa y expresa el resultado en notación científica, sin utilizar la calculadora:**

a) $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$ **b)** $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$

c) $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$ **d)** $(5 \cdot 10^9)^2$

e) $(4 \cdot 10^5)^{-2}$ **f)** $3{,}1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$

a) $(3 \cdot 8) \cdot 10^{-7+18} = 24 \cdot 10^{11} = 2{,}4 \cdot 10^{12}$

b) $(4 \cdot 5) \cdot 10^{-15} = 20 \cdot 10^{-15} = 2 \cdot 10^{-14}$

c) $\dfrac{5}{2} \cdot 10^{15} = 2{,}5 \cdot 10^{15}$

d) $25 \cdot 10^{18} = 2{,}5 \cdot 10^{19}$

e) $4^{-2} \cdot 10^{-10} = \dfrac{1}{16} \cdot 10^{-10} = 0{,}0625 \cdot 10^{-10} = 6{,}25 \cdot 10^{-12}$

f) $310 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^{10} = 312 \cdot 10^{10} = 3{,}12 \cdot 10^{12}$

11 Expresa en notación científica y calcula:

a) $(0{,}0073)^2 \cdot (0{,}0003)^3$ **b)** $(75\,800)^4 : (12\,000)^2$

c) $\dfrac{0{,}000541 \cdot 10\,318\,000}{1\,520\,000 \cdot 0{,}00302}$ **d)** $\dfrac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0{,}00003 - 0{,}00015}$

a) $(7{,}3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (3 \cdot 10^{-4})^3 = (7{,}3^2 \cdot 3^3) \cdot 10^{-6-12} =$

$= 1\,438{,}83 \cdot 10^{-18} = 1{,}43883 \cdot 10^{-15}$

b) $(7{,}58 \cdot 10^4)^4 : (1{,}2 \cdot 10^4)^2 = \dfrac{7{,}58^4}{1{,}2^2} \cdot 10^{16-8} =$

$= 2\,292{,}52632 \cdot 10^8 \approx 2{,}3 \cdot 10^{11}$

c) $\dfrac{5{,}41 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}0318 \cdot 10^7}{1{,}52 \cdot 10^6 \cdot 3{,}02 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{5{,}582038 \cdot 10^3}{4{,}5904 \cdot 10^3} \approx 1{,}2$

d) $\dfrac{2{,}7 \cdot 10^6 - 1{,}3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{-5} - 1{,}5 \cdot 10^{-4}} = \dfrac{(2{,}7 - 13) \cdot 10^6}{(0{,}3 - 1{,}5) \cdot 10^{-4}} = \dfrac{-10{,}3 \cdot 10^6}{-1{,}2 \cdot 10^{-4}} \approx 8{,}58 \cdot 10^{10}$

12 Utiliza la calculadora para efectuar las siguientes operaciones y expresa el resultado con dos y con tres cifras significativas.

a) $(4{,}5 \cdot 10^{12}) \cdot (8{,}37 \cdot 10^{-4})$ **b)** $(5{,}2 \cdot 10^{-4}) \cdot (3{,}25 \cdot 10^{-9})$

c) $(8{,}4 \cdot 10^{11}) : (3{,}2 \cdot 10^{-6})$ **d)** $(7{,}8 \cdot 10^{-7})^3$

a) $(4{,}5 \cdot 8{,}37) \cdot 10^8 = 37{,}665 \cdot 10^8 = 3{,}7665 \cdot 10^9$

Con dos cifras significativas será $3{,}8 \cdot 10^9$ y con tres, $3{,}77 \cdot 10^9$.

b) $(5{,}2 \cdot 3{,}25) \cdot 10^{-13} = 16{,}9 \cdot 10^{-13} = 1{,}69 \cdot 10^{-12}$ resultado con tres cifras significativas; con dos cifras será $1{,}7 \cdot 10^{-12}$.

c) $(8{,}4 : 3{,}2) \cdot 10^{17} = 2{,}625 \cdot 10^{17}$; tomando $2{,}6 \cdot 10^{17}$ y $2{,}63 \cdot 10^{17}$, tendremos el resultado con dos y tres cifras significativas, respectivamente.

d) $7{,}8^3 \cdot 10^{-21} = 474{,}552 \cdot 10^{-21} = 4{,}74552 \cdot 10^{-19}$

El resultado con dos cifras significativas será $4{,}7 \cdot 10^{-19}$, y con tres cifras será $4{,}75 \cdot 10^{-19}$.

13 **Efectúa y expresa el resultado en notación científica:**

a) $\dfrac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$ **b)** $\dfrac{7{,}35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3{,}2 \cdot 10^7$

c) $(4{,}3 \cdot 10^3 - 7{,}2 \cdot 10^5)^2$

a) $\dfrac{(0{,}3 + 7) \cdot 10^{-4}}{(10 - 5) \cdot 10^5} = \dfrac{7{,}3}{5} \cdot 10^{-9} = 1{,}46 \cdot 10^{-9}$

b) $\dfrac{7{,}35}{5} \cdot 10^7 + 3{,}2 \cdot 10^7 = 1{,}47 \cdot 10^7 + 3{,}2 \cdot 10^7 = 4{,}67 \cdot 10^7$

c) $(4{,}3 \cdot 10^3 - 720 \cdot 10^3)^2 = (-715{,}7 \cdot 10^3)^2 = 512\,226{,}49 \cdot 10^6 =$

$= 5{,}1222649 \cdot 10^{11} \approx 5{,}12 \cdot 10^{11}$

Números reales

14 **a) Clasifica los siguientes números racionales o irracionales:**

$$\frac{41}{13}; \quad -\sqrt{49}; \quad 53{,}\widehat{7}; \quad 3{,}2 \cdot 10^{-10}; \quad \sqrt{12}; \quad \sqrt[3]{5}$$

b) ¿Alguno de ellos es entero?

c) Ordénalos de menor a mayor.

a) Racionales: $\dfrac{41}{13}$; $-\sqrt{49}$; $53{,}\widehat{7}$; $3{,}2 \cdot 10^{-10}$

Irracionales: $\sqrt{12}$; $\sqrt[3]{5}$

b) Entero: $-\sqrt{49} = -7$

c) $-\sqrt{49} < 3{,}2 \cdot 10^{-10} < \sqrt[3]{5} < \dfrac{41}{13} < \sqrt{12} < 53{,}\widehat{7}$

15 **Di cuáles de los siguientes números son irracionales:**

$$-\frac{3}{4}; \quad 1{,}7\widehat{3}; \quad \sqrt{3}; \quad \pi; \quad \sqrt{9}; \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

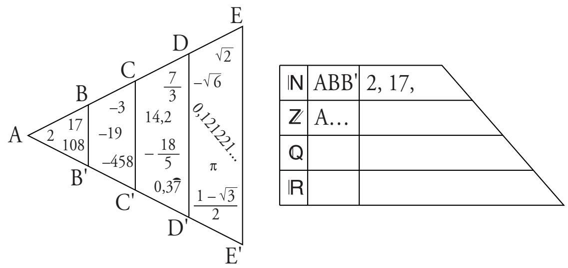
Son irracionales $\sqrt{3}$, π y $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

16 **Ordena de menor a mayor:**

a) $1{,}45$; $1{,}\widehat{4}$; $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\dfrac{13}{9}$

a) $\sqrt{2} < 1{,}\widehat{4} < 1{,}45$ b) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \dfrac{13}{9}$

17 **a) Observa el diagrama y completa en tu cuaderno el cuadro adjunto.**



b) Sitúa los siguientes números en el lugar que les corresponda en el diagrama y en el cuadro:

$$3{,}\widehat{28}\ ;\quad \frac{14}{7};\quad \sqrt{8}\ ;\quad -\sqrt{9}$$

c) ¿Cómo se llaman los números de DEE'D'?

a)

$\mathbb{N}$: *ABB'*	2; 17; 108
$\mathbb{Z}$: *ACC'*	2; 17; 108; –3; –19; –458
$\mathbb{Q}$: *ADD'*	2; 17; 108; –3; –19; –458; $\frac{7}{3}$; 14,2; $-\frac{18}{5}$; $0{,}3\widehat{7}$
$\mathbb{R}$: *AEE'*	2; 17; 108; –3; –19; –458; $\frac{7}{3}$; 14,2; $-\frac{18}{5}$; $0{,}3\widehat{7}$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{6}$; 0,121221…; π; $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

b) $3{,}\widehat{28} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R} \ \rightarrow\ 3{,}\widehat{28} \in CDD'C'$

$\frac{14}{7} \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \ \rightarrow\ \frac{14}{7} \in ABB'$

$\sqrt{8} \in \mathbb{R} \ \rightarrow\ \sqrt{8} \in DEE'D'$

$-\sqrt{9} \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \ \rightarrow\ -\sqrt{9} \in BCC'B'$

c) Números irracionales.

18 **Clasifica estos números según pertenezcan a los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.**

3	–3/4	$\sqrt{2}$	7,23	–2
π	0	–4	1/3	$\sqrt[3]{-1}$
11/9	$\sqrt{-5}$	2	2,48	18
$1 + \sqrt{2}$	–1	$\sqrt[4]{-5}$	1	1,010203…

$\mathbb{N} \rightarrow 3;\ 0;\ 2;\ 18;\ 1$

$\mathbb{Z} \rightarrow 3;\ 0;\ 2;\ 18;\ 1;\ -2;\ -4;\ -1;\ \sqrt[3]{-1}$

$\mathbb{Q} \rightarrow 3;\ 0;\ 2;\ 18;\ 1;\ -2;\ -4;\ -1;\ \sqrt[3]{-1};\ -\frac{3}{4};\ 7{,}23;\ \frac{1}{3};\ \frac{11}{9};\ 2{,}48$

$\mathbb{R} \rightarrow 3;\ 0;\ 2;\ 18;\ 1;\ -2;\ -4;\ -1;\ \sqrt[3]{-1};\ -\frac{3}{4};\ 7{,}23;\ \frac{1}{3};\ \frac{11}{9};\ 2{,}48;$

$\sqrt{2};\ \pi;\ 1+\sqrt{2};\ 1{,}010203\ldots$

Página 39

Intervalos

19 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

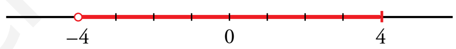
20 **Escribe simbólicamente y representa los siguientes intervalos:**

$A = \{x \mid -6 \le x \le 3\}$ $\quad B = \{x \mid -4 < x \le 4\}$ $\quad C = \{x \mid 3 \le x\}$

$D = \{x \mid 0 < x < 5\}$ $\quad E = \{x \mid x > -2\}$ $\quad F = \{x \mid 10 \ge x\}$

$A = [-6, 3]$

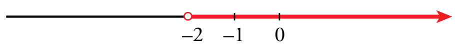
$B = (-4, 4]$



$C = [3, +\infty)$

$D = (0, 5)$

$E = (-2, +\infty)$



$F = (-\infty, 10]$

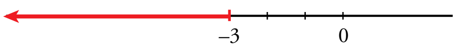
21 **Escribe en forma de intervalo y representa los números que cumplen la desigualdad indicada en cada caso:**

a) $0 < x < 1$ $\quad$ b) $x \le -3$ $\quad$ c) $x > 0$

d) $-5 \le x \le 5$ $\quad$ e) $-5 < x$ $\quad$ f) $1 \le x < 3$

a) $(0, 1)$

b) $(-\infty, -3]$



c) $(0, +\infty)$

d) $[-5, 5]$

e) $(-5, +\infty)$

f) $[1, 3)$

22 **Escribe en forma de desigualdad y representa los siguientes intervalos:**

$P = (1;\ 2{,}5)$ $\quad Q = [-2,\ 3]$ $\quad R = [-7,\ 0]$

$S = [-3,\ +\infty)$ $\quad T = (2,\ +\infty)$ $\quad I = (-5,\ 2]$

$P = \{x \,/\, 1 < x < 2{,}5\}$

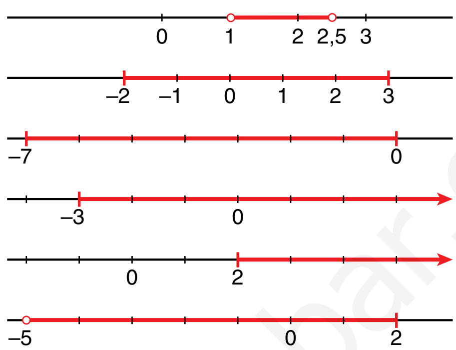
$Q = \{x \,/\, -2 \le x \le 3\}$

$R = \{x \,/\, -7 \le x \le 0\}$

$S = \{x \,/\, -3 \le x\}$

$T = \{x \,/\, x > 2\}$

$I = \{x \,/\, -5 < x \le 2\}$



Potencias y raíces

23 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

24 **Expresa como potencia única:**

a) $\sqrt{3}\,\sqrt[3]{3}$ $\quad$ b) $2\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ $\quad$ c) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ $\quad$ e) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}$ $\quad$ f) $a\sqrt{\dfrac{1}{a}}$

a) $\sqrt{3}\ \sqrt[3]{3} = 3^{1/2} \cdot 3^{1/3} = 3^{5/6}$

b) $2\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{1}{2^2}} = 2\,\dfrac{1}{2^{2/3}} = \dfrac{2}{2^{2/3}} = 2^{1/3}$

c) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{8^{1/2}}{4^{1/3}} = \dfrac{2^{3/2}}{2^{2/3}} = 2^{5/6}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2} = \dfrac{a^{8/3}}{a^2} = a^{2/3}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{a^{2/3}} = a^{-2/3}$

f) $a\sqrt{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{a^{1/2}} = a^{1/2}$

25 **Obtén con la calculadora:**

a) $\sqrt[5]{9{,}5^2}$ b) $\sqrt[3]{-173}$ c) $\sqrt[4]{\left(\frac{14}{9}\right)^3}$ d) $\sqrt[4]{5^{-9}}$

e) $28^{3/4}$ f) $8^{-1/3}$ g) $0{,}03^{-3/2}$ h) $(\sqrt[5]{0{,}0025})^{-1}$

a) $\sqrt[5]{9{,}5^2} = 9{,}5^{2/5} \approx 2{,}46$

b) $\sqrt[3]{-173} \approx -5{,}57$

c) $\sqrt[4]{\left(\frac{14}{9}\right)^3} = \left(\frac{14}{9}\right)^{3/4} \approx 1{,}39$

d) $\sqrt[4]{5^{-9}} = 5^{-9/4} \approx 0{,}027$

e) $28^{3/4} \approx 12{,}17$

f) $8^{-1/3} = 0{,}5$

g) $0{,}03^{-3/2} \approx 192{,}45$

h) $(\sqrt[5]{0{,}0025})^{-1} = (0{,}0025)^{-1/5} \approx 3{,}31$

26 **Expresa en forma exponencial:**

a) $\sqrt[3]{x^2}$ b) $(\sqrt[5]{a^2})^3$ c) $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$

e) $(\sqrt{a})^{-3}$ f) $\sqrt[6]{a^3}$ g) $(\sqrt[4]{a^2})^2$ h) $\sqrt[5]{a^{10}}$

a) $x^{2/3}$

b) $(a^{2/5})^3 = a^{6/5}$

c) $\sqrt[8]{a^7} = a^{7/8}$

d) $\sqrt[12]{x} = x^{1/12}$

e) $(a^{1/2})^{-3} = a^{-3/2}$

f) $a^{3/6} = a^{1/2}$

g) $(a^{2/4})^2 = a$

h) $a^{10/5} = a^2$

27 **Expresa como una raíz:**

a) $15^{1/2}$ b) $(a^2)^{1/3}$ c) $(x^{-1})^{5/4}$ d) $(a^{1/5})^{-4}$

e) $(a^{2/3})^{1/2}$ f) $a^2 \cdot a^{1/2}$ g) $(3^{-2/5})^{10/3}$

a) $\sqrt{15}$

b) $\sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt[4]{x^{-5}}$

d) $\sqrt[5]{a^{-4}}$

e) $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$

f) $a^{2+1/2} = a^{5/2} = \sqrt{a^5}$

g) $3^{(-2/5)\cdot(10/3)} = 3^{-4/3} = \sqrt[3]{3^{-4}}$

28 **Expresa como potencia única:**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}}{a^4}$ b) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{a}}$ c) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$

d) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt{a}}$ f) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2} \cdot \dfrac{a^3}{\sqrt{a}}$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}}{a^4} = \dfrac{a^{7/3}}{a^4} = a^{-5/3}$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{a}} = \sqrt[4]{a^{-1}} = a^{-1/4}$

c) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}} = \dfrac{\sqrt{5^3}}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{5^{3/2}}{5^{2/3}} = 5^{5/6}$

d) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{2^2 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}\,2^{3/4} = \dfrac{2^{3/4}}{2} = 2^{-1/4}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt{a}} = \dfrac{a^{2/3}}{a \cdot a^{1/2}} = \dfrac{a^{2/3}}{a^{3/2}} = a^{-5/6}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2} \cdot \dfrac{a^3}{\sqrt{a}} = \dfrac{a^{2/3} \cdot a^3}{a^2 \cdot a^{1/2}} = \dfrac{a^{11/3}}{a^{5/2}} = a^{7/6}$

Radicales

29 **Multiplica y simplifica el resultado:**

a) $\sqrt{2a}\;\sqrt{3a}\;\sqrt{6a}$

b) $\sqrt[3]{a}\;\sqrt[3]{a^2}\;\sqrt[3]{b^4}\;\sqrt[3]{b^2}$

c) $\sqrt{5a}\;\sqrt{10ab}\;\sqrt{8a^3b}\;\sqrt{a}$

a) $\sqrt{2a}\;\sqrt{3a}\;\sqrt{6a} = \sqrt{36a^3} = 6a\sqrt{a}$

b) $\sqrt[3]{a}\;\sqrt[3]{a^2}\;\sqrt[3]{b^4}\;\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{a^3b^6} = ab^2$

c) $\sqrt{5a}\;\sqrt{10ab}\;\sqrt{8a^3b}\;\sqrt{a} = \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 8 \cdot a^6b^2} =$

$= \sqrt{5^2 \cdot 2^4 \cdot a^6b^2} = 5 \cdot 4 \cdot a^3b = 20a^3b$

30 **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[6]{5^3}$ **b)** $\sqrt[15]{2^{12}}$ **c)** $\sqrt[10]{a^8}$

d) $\sqrt[12]{a^4 \cdot b^8}$ **e)** $\sqrt[8]{(x^2y^2)^2}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5 \cdot x^7}}$

a) $\sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$

b) $\sqrt[15]{2^{12}} = \sqrt[5]{2^4}$

c) $\sqrt[10]{a^8} = \sqrt[5]{a^4}$

d) $\sqrt[12]{a^4b^8} = \sqrt[3]{a \cdot b^2}$

e) $\sqrt[8]{(x^2 \cdot y^2)^2} = \sqrt[4]{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x \cdot y}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5x^7}} = \sqrt[12]{x^5x^7} = \sqrt[12]{x^{12}} = x$

31 **Extrae factores de los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[3]{16x^6}$ b) $\sqrt{\dfrac{28x^5}{75y^3}}$ c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$

d) $\sqrt{\dfrac{8a^5}{b^4}}$ e) $\sqrt[4]{\dfrac{25a^2b}{c^6}}$ f) $\sqrt{\dfrac{32a^3}{45b^4}}$

a) $\sqrt[3]{16x^6} = \sqrt[3]{2^4x^6} = 2\sqrt[3]{2} \cdot x^2$

b) $\sqrt{\dfrac{28x^5}{75y^3}} = \sqrt{\dfrac{2^2 \cdot 7x^5}{5^2 \cdot 3y^3}} = \dfrac{2x^2}{5y} \cdot \sqrt{\dfrac{7x}{3y}}$

c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10} = \sqrt[4]{2^{10}} = 2^2\sqrt[4]{2^2} = 4\sqrt{2}$

d) $\sqrt{\dfrac{8a^5}{b^4}} = \sqrt{\dfrac{2^3a^5}{b^4}} = \dfrac{2a^2}{b^2} \cdot \sqrt{2a}$

e) $\sqrt[4]{\dfrac{25a^2b}{c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{5^2a^2b}{c^6}} = \dfrac{1}{c} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{5^2a^2b}{c^2}} = \dfrac{1}{c} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{25a^2b}{c^2}}$

f) $\sqrt{\dfrac{32a^3}{45b^4}} = \sqrt{\dfrac{2^5 \cdot a^3}{3^2 \cdot 5 \cdot b^4}} = \dfrac{2^2a}{3b^2}\sqrt{\dfrac{2a}{5}} = \dfrac{4a}{3b^2}\sqrt{\dfrac{2a}{5}}$

32 **Reduce a índice común y ordena de menor a mayor:**

a) $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5},\ \sqrt[6]{6}$ b) $\sqrt[3]{2^4},\ \sqrt[4]{5^3},\ \sqrt[6]{3^5}$

a) $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5},\ \sqrt[6]{6} \rightarrow \sqrt[60]{2^{30}},\ \sqrt[60]{3^{20}},\ \sqrt[60]{4^{15}},\ \sqrt[60]{5^{12}},\ \sqrt[60]{6^{10}}$

Se observa que $2^{30} = 4^{15} \rightarrow \sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$

Comparamos los radicandos $\rightarrow 6^{10} < 5^{12} < 2^{30} < 3^{20}$

Luego, $\sqrt[6]{6} < \sqrt[5]{5} < \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$.

b) $\sqrt[3]{2^4},\ \sqrt[4]{5^3},\ \sqrt[6]{3^5} \rightarrow \sqrt[12]{2^{16}},\ \sqrt[12]{5^9},\ \sqrt[12]{3^{10}}$

Comparamos los radicandos $\rightarrow 3^{10} < 2^{16} < 5^9$

Luego, $\sqrt[6]{3^5} < \sqrt[3]{2^4} < \sqrt[4]{5^3}$.

Página 40

33 **Introduce dentro de la raíz y simplifica:**

a) $2\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ b) $3\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ c) $2\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$

d) $2\sqrt[4]{\dfrac{5}{12}}$ e) $\dfrac{1}{2}\sqrt{12}$ f) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$

a) $2\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \sqrt{\dfrac{2^2 \cdot 3}{2}} = \sqrt{6}$

b) $3\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{3^2 \cdot 2}{3}} = \sqrt{6}$

c) $2\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3}{4}} = \sqrt[3]{2}$

d) $2\sqrt[4]{\dfrac{5}{12}} = \sqrt[4]{\dfrac{2^4 \cdot 5}{12}} = \sqrt[4]{\dfrac{2^2 \cdot 5}{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{20}{3}}$

e) $\dfrac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{\dfrac{12}{2^2}} = \sqrt{3}$

f) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3}{3^3} \cdot \dfrac{9}{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

34 **Divide y simplifica el resultado:**

a) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt[4]{\dfrac{5}{12}} : \sqrt[4]{\dfrac{20}{3}}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{ab}}$ e) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} : \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$

a) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{5}{12}} : \sqrt[4]{\dfrac{20}{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{5}{12} : \dfrac{20}{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{5 \cdot 3}{12 \cdot 20}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{ab}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{ab}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{b}}$

e) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} : \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{3}{2} : \dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{3^2}{2^2}} = \dfrac{3}{2}$

f) $\dfrac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}} = \dfrac{\sqrt[12]{20^2}}{\sqrt[12]{10^3}} = \sqrt[12]{\dfrac{400}{1\,000}} = \sqrt[12]{\dfrac{4}{10}}$

35 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

36 **Suma:**

a) $\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{3}$

b) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$

c) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$

d) $5\sqrt{12} + \sqrt{27} - 8\sqrt{75} + \sqrt{48}$

a) $\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \left(1 + \frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right)\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

b) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18} = 4\sqrt{2} + 4 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} - 7 \cdot 3\sqrt{2} =$

$= (4 + 24 - 21)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} =$

$= (3 + 8 - 4 + 5)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

d) $5\sqrt{12} + \sqrt{27} - 8\sqrt{75} + \sqrt{48} = 10\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 40\sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$

$= (10 + 3 - 40 + 4)\sqrt{3} = -23\sqrt{3}$

37 **Efectúa:**

a) $\sqrt{320} + \sqrt{80} - \sqrt{500}$

b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{\frac{7}{64}} + \sqrt{\frac{7}{4}}$

d) $\sqrt[5]{96} - \sqrt[5]{\frac{3}{32}}$

e) $\sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{24}$

f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}} - \sqrt[3]{\frac{5}{8}}$

a) $\sqrt{320} + \sqrt{80} - \sqrt{500} = \sqrt{2^6 \cdot 5} + \sqrt{2^4 \cdot 5} - \sqrt{2^2 \cdot 5^3} =$

$= 2^3 \cdot \sqrt{5} + 2^2 \cdot \sqrt{5} - 10\sqrt{5} =$

$= 8\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 10\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{\frac{7}{64}} + \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{1}{8}\sqrt{7} + \frac{1}{2}\sqrt{7} = \frac{5}{8}\sqrt{7}$

d) $\sqrt[5]{96} - \sqrt[5]{\frac{3}{32}} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3} - \frac{1}{2}\sqrt[5]{3} = 2\sqrt[5]{3} - \frac{1}{2}\sqrt[5]{3} = \frac{3}{2}\sqrt[5]{3}$

e) $\sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{24} = \sqrt{5^2 \cdot 2 \cdot 3} + \sqrt{2 \cdot 3^3} - \sqrt{2^3 \cdot 3} =$

$= 5\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}} - \sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 5}{2^3}} - \sqrt[3]{\frac{5}{2^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = \sqrt{5}$

38 **Racionaliza y simplifica:**

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{12}}$ d) $\frac{3}{\sqrt{15}}$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

b) $\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{6}{\sqrt{12}} = \frac{6\sqrt{12}}{12} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

d) $\frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

39 **Racionaliza:** a) $\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ b) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

a) Multiplicamos el numerador y denominador por $\sqrt{3}$.

$$\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{6})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\ \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{18}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$$

b) Multiplicamos numerador y denominador por $3\sqrt{3} - 2$.

$$\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2} = \frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)} = \frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{(3\sqrt{3})^2-2^2} =$$

$$= \frac{9\sqrt{18}-4\sqrt{2}}{27-4} = \frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23} = \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}$$

40 **Racionaliza:**

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[8]{a^5}}$ c) $\frac{8}{\sqrt{5}-1}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{5}$

b) $\frac{1}{\sqrt[8]{a^5}} = \frac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^5}\sqrt[8]{a^3}} = \frac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^8}} = \frac{\sqrt[8]{a^3}}{a}$

c) $\frac{8}{\sqrt{5}-1} = \frac{8(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{8(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5^2}-1^2} = \frac{8(\sqrt{5}+1)}{5-1} =$

$= \frac{8(\sqrt{5}+1)}{4} = 2(\sqrt{5}+1)$

d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6}-3}{2-3} = 3-\sqrt{6}$

41 **Racionaliza y simplifica:**

a) $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{14}{3-\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{23}{5-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$

g) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ h) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}$ i) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{2(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})\,(1-\sqrt{2})} = \dfrac{2(1-\sqrt{2})}{1-2} = \dfrac{2(1-\sqrt{2})}{-1} = 2(\sqrt{2}-1)$

b) $\dfrac{4}{3-\sqrt{2}} = \dfrac{14(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\,(3+\sqrt{2})} = \dfrac{4(3+\sqrt{2})}{9-2} = 2(3+\sqrt{2})$

c) $\dfrac{23}{5-\sqrt{2}} = \dfrac{23(5+\sqrt{2})}{(5-\sqrt{2})\,(5+\sqrt{2})} = \dfrac{23(5+\sqrt{2})}{25-2} = 5+\sqrt{2}$

d) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})} = \dfrac{1+3+2\sqrt{3}}{1-3} = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$

e) $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3} = \dfrac{11(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)\,(2\sqrt{5}-3)} = \dfrac{11(2\sqrt{5}-3)}{20-9} = \dfrac{11(2\sqrt{5}-3)}{11} = 2\sqrt{5}-3$

f) $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{3}+2\sqrt{2})\,(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-2\sqrt{2})\,(\sqrt{3}+2\sqrt{2})} = \dfrac{3+8+4\sqrt{6}}{3-8} =$

$= \dfrac{11+4\sqrt{6}}{-5} = -\dfrac{11+4\sqrt{6}}{5}$

g) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{10(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\,(2\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{10(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{12-2} =$

$= \dfrac{10(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{10} = 2\sqrt{3}+\sqrt{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3} = \dfrac{\sqrt{2}(2\sqrt{2}-3)}{(2\sqrt{2}+3)\,(2\sqrt{2}+3)} = \dfrac{4-3\sqrt{2}}{8-9} = 3\sqrt{2}-4$

i) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\,(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\,(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \dfrac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{5}\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} =$

$= \dfrac{5+3-2\sqrt{15}}{5-3} = \dfrac{8-2\sqrt{15}}{2} = 4-\sqrt{15}$

PIENSA Y RESUELVE

42 **La masa del Sol es 330 000 veces la de la Tierra, aproximadamente, y esta es $5{,}98 \cdot 10^{21}$ t. Expresa en notación científica la masa del Sol en kilos.**

$M_{Sol} = 330\,000 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{21} = 33 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{25} = 1{,}9734 \cdot 10^{27}$ t

$M_{Sol} = 1{,}9734 \cdot 10^{30}$ kg

43 **El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de una ballena?**

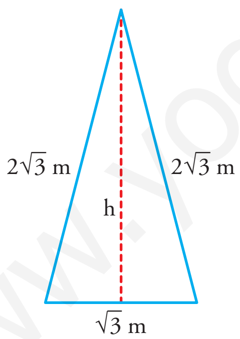
1 t tiene 10^6 g; por tanto, 138 t tendrán $1{,}38 \cdot 10^8$ g.

Como un virus pesa 10^{-18} g, entonces la ballena azul necesita:

$\dfrac{1{,}38 \cdot 10^8}{10^{-18}} = 1{,}38 \cdot 10^{26}$ virus para conseguir su peso.

Página 41

44 **Los lados iguales de un triángulo isósceles miden el doble que la base, cuya longitud es $\sqrt{3}$ m. Calcula el perímetro del triángulo, su altura y su área. Expresa el resultado con radicales.**



$$P = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{ m}$$

$$h = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{4 \cdot 3 - \frac{3}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \text{ m}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3/2 \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ m}^2$$

45 **En un cubo cuya arista mide $\sqrt{3}$ cm, halla:**

a) La diagonal de una cara.

b) La diagonal del cubo.

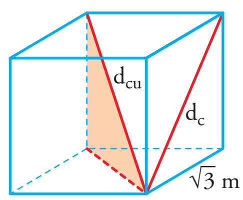
c) El volumen del cubo.

Expresa los resultados en forma radical.

a) $d_c = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{6}$ cm

b) $d_{cu} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{9} = 3$ cm

c) $V = \sqrt{3}^3 = 3\sqrt{3}$ cm^3



46 **Reduce a un solo radical:**

a) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5}$ c) $\dfrac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{2}}$

a) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^8} \cdot \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{2^{11}}$

b) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{a^9} \cdot \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[12]{a^{19}} = a\sqrt[12]{a^7}$

c) $\dfrac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{3}\,\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt[8]{2^3}}{\sqrt[8]{3^2}\,\sqrt[8]{2^4}} = \dfrac{1}{\sqrt[8]{3^2 \cdot 2}} = \dfrac{1}{\sqrt[8]{18}}$

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

47 **¿Cuáles de las siguientes raíces no existen?**

$$\sqrt[3]{-20}\ ,\ \sqrt[6]{0{,}12}\ ,\ \sqrt{-1}\ ,\ \sqrt[5]{241}\ ,\ \sqrt[4]{-16}$$

No existe $\sqrt{-1}$ ni $\sqrt[4]{-16}$, por ser par el índice de la raíz y negativo el radicando.

48 **Escribe un número racional y otro irracional comprendidos entre los números dados:**

a) $3{,}\overset{\frown}{7}$ y $3{,}78$ b) $\dfrac{71}{50}$ y $\dfrac{64}{45}$ c) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ d) $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[4]{3}$

a) Racional → 3,778

Irracional → 3,778777877778…

b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{71}{50} = 1{,}42 \\ \dfrac{64}{45} = 1{,}4\overset{\frown}{2} \end{array}\right\}$ Racional → 1,421
Irracional → 1,421442144421…

c) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots \\ \sqrt{3} = 1{,}732050808\ldots \end{array}\right\}$ Racional → 1,5
Irracional → 1,51511511151111…

d) $\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{2} = 1{,}25992105\ldots \\ \sqrt[4]{3} = 1{,}31607401\ldots \end{array}\right\}$ Racional → 1,26
Irracional → 1,2616116111…

49 **¿Cuántos números racionales hay entre $0{,}\overset{\frown}{8}$ y $0{,}\overset{\frown}{9}$? Pon ejemplos y razona tu respuesta.**

Entre $0{,}\overset{\frown}{8}$ y $0{,}\overset{\frown}{9}$ hay infinitos números racionales. Basta con introducir nueves entre la parte entera y el primer decimal de $0{,}\overset{\frown}{8}$. Por ejemplo, 0,98 está entre $0{,}\overset{\frown}{8}$ y $0{,}\overset{\frown}{9}$.

Lo mismo ocurre con $0{,}99\overset{\frown}{8}$; $0{,}999\overset{\frown}{8}$; $0{,}9999\overset{\frown}{8}$, y así, sucesivamente, vemos que podemos incluir infinitos números racionales entre $0{,}\overset{\frown}{8}$ y $0{,}\overset{\frown}{9}$.

50 **Escribe dos números racionales, uno mayor que $\sqrt{2}$ y otro menor que $\sqrt{2}$, que se diferencien de él en menos de una milésima.**

$\sqrt{2} = 1,414213562...$

— El número menor que $\sqrt{2}$ puede ser: $x = 1,413313562$.

Si hacemos la resta $\sqrt{2} - x = 0,0009 < 0,001$.

— El número mayor que $\sqrt{2}$ puede ser: $y = 1,415213562$.

Si hacemos la resta, $y - \sqrt{2} = 0,0009 < 0,001$.

51 **Justifica si, en cada caso, los dos radicales son iguales o distintos:**

a) $\sqrt[6]{8}$ y $\sqrt[8]{16}$ b) $\sqrt[3]{27}$ y $\sqrt[5]{32}$ c) $\sqrt[6]{9}$ y $\sqrt[12]{16}$ d) $\sqrt[4]{25}$ y $\sqrt[6]{125}$

a) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2} \\ \sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}\end{array}\right\} \rightarrow$ son iguales.

b) $\sqrt[3]{27} = 3$ y $\sqrt[5]{32} = 2 \rightarrow$ no son iguales.

c) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3} \\ \sqrt[12]{16} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2}\end{array}\right\} \rightarrow$ son distintos.

d) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} \\ \sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}\end{array}\right\} \rightarrow$ son iguales.

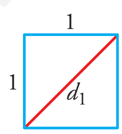
52 **Explica un procedimiento para construir un segmento que mida exactamente $\sqrt{7}$ cm.**

Con un rectángulo 2×1 construimos $\sqrt{5}$ (su diagonal).

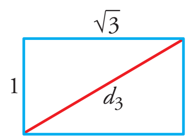
Con un rectángulo de dimensiones $\sqrt{5}$ y 1 construimos $\sqrt{6}$ (su diagonal).

Con un rectángulo de dimensiones $\sqrt{6}$ y 1 construimos $\sqrt{7}$ (su diagonal).

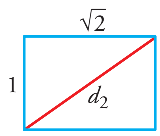
53 **Calcula el valor de la diagonal en cada caso:**



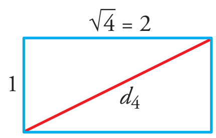
$\rightarrow d_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



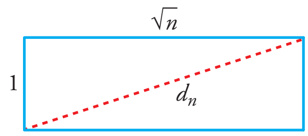
$\rightarrow d_3 = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$



$\rightarrow d_2 = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$



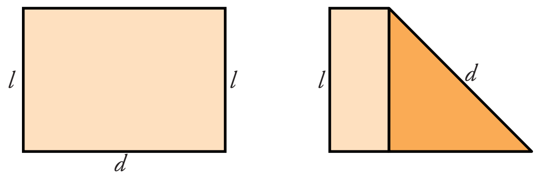
$\rightarrow d_4 = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$



$\rightarrow d_n = \sqrt{n + 1}$

PROFUNDIZA

54 Dobla una hoja DIN A-4 formando un cuadrado y expresa la diagonal de ese cuadrado en función del lado menor, *l*. Comprueba, con otra hoja igual, que el lado mayor mide lo mismo que la diagonal del cuadrado. ¿Cuál es la razón entre las dimensiones de la hoja DIN A-4?



Expresamos d en función de l: $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$

Por tanto, la razón, R, entre las dimensiones de la hoja DIN A-4 es:

$$\frac{l\sqrt{2}}{l} = \sqrt{2} \quad \to \quad R = \sqrt{2}$$

55 Racionaliza y simplifica:

a) $\dfrac{2 - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$ c) $\dfrac{4\sqrt{15} - 2\sqrt{21}}{2\sqrt{5} - \sqrt{7}}$ d) $\dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

a) $\dfrac{2 - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{(2 - \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2^2} - 2}{2} = \sqrt[3]{4} - 1$

b) $\dfrac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2} = \dfrac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{3} - 2)}{(3\sqrt{3} + 2)\,(3\sqrt{3} - 2)} = \dfrac{9\sqrt{18} + 6\sqrt{6} - 6\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{27 - 4} =$

$= \dfrac{27\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{23} = \dfrac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}$

c) $\dfrac{4\sqrt{15} - 2\sqrt{21}}{2\sqrt{5} - \sqrt{7}} = \dfrac{(4\sqrt{15} - 2\sqrt{21}) \cdot (2\sqrt{5} + \sqrt{7})}{(2\sqrt{5} - \sqrt{7})\,(2\sqrt{5} + \sqrt{7})} =$

$= \dfrac{8\sqrt{75} - 4\sqrt{105} + 4\sqrt{105} - 2\sqrt{147}}{20 - 7} =$

$= \dfrac{8\sqrt{5^2 \cdot 3} - 2\sqrt{7^2 \cdot 3}}{13} = \dfrac{40\sqrt{3} - 14\sqrt{3}}{13} = \dfrac{26\sqrt{3}}{13} = 2\sqrt{3}$

d) $\dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{(x + \sqrt{x^2 - 1})\,(x - \sqrt{x^2 - 1})} = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - x^2 + 1} = x - \sqrt{x^2 - 1}$

56 **Efectúa y simplifica:**

a) $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)(3+2\sqrt{2})$ b) $\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{5}$

c) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right):\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)$

a) Comenzamos por racionalizar $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$:

$$\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\frac{6+3-2\sqrt{18}}{6+3}=\frac{9-6\sqrt{2}}{3}=3-2\sqrt{2}$$

Así:

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)\cdot(3+2\sqrt{2})=(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=9-8=1$$

b) Racionalizamos la expresión $\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}$:

$$\frac{(\sqrt{5}+1)^2\cdot(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{(5+1+2\sqrt{5})\cdot(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{(6+2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{4}=$$

$$=\frac{6\sqrt{5}+10+6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{16+8\sqrt{5}}{4}=4+2\sqrt{5}$$

Así:

$$\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{5}=4+2\sqrt{5}-3\sqrt{5}=4-\sqrt{5}$$

c) $$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right):\left(1+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right):\left(\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{3}}:\frac{1}{1-\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{1+3-2\sqrt{3}}{1-3}=$$

$$=\frac{4-2\sqrt{3}}{-2}=-2+\sqrt{3}$$

57 **¿Para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces?**

a) $\sqrt{x-2}$ b) $\sqrt{-x}$ c) $\sqrt[4]{8-x}$ d) $\sqrt{x^2+1}$

a) Para $x\geq 2$ b) $x\leq 0$ c) $x\leq 8$ d) $\mathbb{R}$

58 **Si sabes que $a > 1$, ¿cómo ordenarías los siguientes números de menor a mayor?**

$$a, \ \frac{1}{a}, \ -\frac{1}{a}, \ \frac{1}{a+1}, \ -\frac{1}{a+1}$$

$$-\frac{1}{a} < -\frac{1}{a+1} < \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a} < a$$

Página 56

PRACTICA

1 **Escribe los seis primeros términos de las siguientes sucesiones:**

a) Cada término se obtiene sumando 3 al anterior. El primero es –8.

b) El primer término es 16. Los demás se obtienen multiplicando el anterior por 0,5.

c) El primer término es 36, el segundo, 12 y los siguientes, la semisuma de los dos anteriores.

d) El primero es 2. Cada uno de los siguientes se obtiene invirtiendo el anterior.

a) –8, –5, –2, 1, 4, 7

b) 16; 8; 4; 2; 1; 0,5

c) 36; 12; 24; 18; 21; 19,5

d) $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}$

2 **Escribe los términos a_{10}, a_{25} y a_{100} de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = 2n - 3$ b) $a_n = \frac{n+1}{2}$ c) $a_n = 1 - n^2$ d) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

a) $a_{10} = 2 \cdot 10 - 3 = 20 - 3 = 17$

$a_{25} = 2 \cdot 25 - 3 = 50 - 3 = 47$

$a_{100} = 2 \cdot 100 - 3 = 200 - 3 = 197$

b) $a_{10} = \frac{10+1}{2} = \frac{11}{2}$

$a_{25} = \frac{25+1}{2} = \frac{26}{2} = 13$

$a_{100} = \frac{100+1}{2} = \frac{101}{2}$

c) $a_{10} = 1 - 10^2 = 1 - 100 = -99$

$a_{25} = 1 - 25^2 = 1 - 625 = -624$

$a_{100} = 1 - 100^2 = 1 - 10\,000 = -9\,999$

d) $a_{10} = 1 + \frac{(-1)^{10}}{10} = 1,1$

$a_{25} = 1 + \frac{(-1)^{25}}{25} = \frac{24}{25} = 0,96$

$a_{100} = 1 + \frac{(-1)^{100}}{100} = 1,01$

3 Comprueba si esta sucesión es una progresión aritmética o geométrica y escribe los tres términos siguientes: 8; 12; 18; 27; 40,5; …

$$\left.\begin{array}{l} a_2 - a_1 = 12 - 8 = 4 \\ a_3 - a_2 = 18 - 12 = 6 \end{array}\right\} \text{No es una progresión aritmética.}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{8} = 1{,}5; \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{12} = 1{,}5; \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{27}{18} = 1{,}5; \quad \frac{a_5}{a_4} = \frac{40{,}5}{27} = 1{,}5$$

Es una progresión geométrica de razón $r = 1{,}5$. Los tres términos siguientes son: 60,75; 91,125; 136,6875.

4 Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

a) $a_n = 10 - 5n$ **b)** $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$ **c)** $c_n = 3^{n-2}$ **d)** $d_n = \dfrac{2n - 1}{n + 1}$

Entre ellas hay una progresión aritmética y otra geométrica. ¿Cuáles son?

a) 5, 0, –5, –10, –15

b) $0, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{4}, \frac{24}{5}$

c) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27$

d) $\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}$

a_n es una progresión aritmética de diferencia $d = -5$.

c_n es una progresión geométrica de razón $r = 3$.

5 Averigua el criterio con el que se han formado las siguientes sucesiones. Escribe tres términos más en cada una de ellas y di cuáles son progresiones aritméticas y cuáles geométricas:

a) 7, 5, 3, 1, … **b)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ **c)** 1,5; 1,9; 2,3; 2,7; …

d) 2, 5, 10, 17, … **e)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ **f)** 1, 3, 6, 10, …

a) Cada término se obtiene restando 2 (o sumando –2) al anterior. Es una progresión aritmética de diferencia $d = -2$. Los tres términos siguientes son: –1, –3, –5.

b) Cada término se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ el anterior. Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$.

Los tres términos siguientes son: $\frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$.

c) Cada término se obtiene sumando 0,4 al anterior. Es una progresión aritmética de diferencia $d = 0{,}4$. Los tres términos siguientes son: 3,1; 3,5; 3,9.

d) Cada término se obtiene sumándole 1 al cuadrado del lugar que ocupa. Los tres términos siguientes son: 26, 37, 50.

e) Cada término es el inverso del lugar que ocupa.

Los tres términos siguientes son: $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$.

f) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole al lugar que ocupa el término anterior. Los tres términos siguientes son: 15, 21, 28.

6 **a) Esta es la tabla de multiplicar. Observa en ella cada fila o columna. ¿Qué tipos de sucesiones son? Escribe el término general de cada una.**

b) Obtén el término general de la diagonal principal 1, 4, 9, 16, …

c) La diagonal 2, 6, 12, 20, … se formó multiplicando cada número por su siguiente. ¿Cuál es el término general?

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

a) Son progresiones aritméticas. Términos generales:

Fila 1 $\rightarrow$ $a_n = n$ Fila 2 $\rightarrow$ $a_n = 2n$ Fila 3 $\rightarrow$ $a_n = 3n$

Fila 4 $\rightarrow$ $a_n = 4n$ Fila 5 $\rightarrow$ $a_n = 5n$ Fila 6 $\rightarrow$ $a_n = 6n$

Fila 7 $\rightarrow$ $a_n = 7n$ Fila 8 $\rightarrow$ $a_n = 8n$ Fila 9 $\rightarrow$ $a_n = 9n$

Fila 10 $\rightarrow$ $a_n = 10n$

b) $a_n = n^2$

c) $a_n = n(n + 1)$

7 **Halla la diferencia, escribe el término general y calcula la suma de los 20 primeros términos en las siguientes progresiones aritméticas:**

a) 1; 1,5; 2; 2,5; … **b) 5, 3, 1, –1, …**

c) 3,3; 4,4; 5,5; 6,6; … **d)** $\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}, \ldots$

a) • $d = 0,5$

• $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 1 + (n - 1) \cdot 0,5 = 1 + 0,5n - 0,5 = 0,5n + 0,5$

$a_n = 0,5n + 0,5$

• $a_{20} = 0,5 \cdot 20 + 0,5 = 10,5$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(1 + 10,5) \cdot 20}{2} = 115$$

b) • $d = -2$

• $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 5 + (n - 1) \cdot (-2) = 5 - 2n + 2 = 7 - 2n$

$a_n = 7 - 2n$

• $a_{20} = 7 - 2 \cdot 20 = 7 - 40 = -33$

$S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \dfrac{(5 - 33) \cdot 20}{2} = -280$

c) • $d = 1,1$

• $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 3,3 + (n - 1) \cdot 1,1 = 3,3 + 1,1n - 1,1 = 1,1n + 2,2$

$a_n = 1,1n + 2,2$

• $a_{20} = 1,1 \cdot 20 + 2,2 = 24,2$

$S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \dfrac{(3,3 + 24,2) \cdot 20}{2} = 275$

d) • $d = 1$

• $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = \dfrac{1}{4} + (n - 1) \cdot 1 = \dfrac{1}{4} + n - 1 = n - \dfrac{3}{4}$

$a_n = n - \dfrac{3}{4}$

• $a_{20} = 20 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{77}{4}$

$S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \dfrac{(1/4 + 77/4) \cdot 20}{2} = 195$

8 **Halla la razón, escribe el término general y calcula la suma de los 10 primeros términos en las siguientes progresiones geométricas:**

a) 0,25; 0,75; 2,25; 6,75; … **b) 3, –6, 12, –24, …**

c) 4; 6; 9; 13,5; … **d) 8, 4, 2, 1, …**

a) • $r = 3$

• $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 0,25 \cdot 3^{n-1} \rightarrow a_n = 0,25 \cdot 3^{n-1}$

• $a_{10} = 0,25 \cdot 3^9 = 4\,920,75$

$S_{10} = \dfrac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{14\,762,25 - 0,25}{2} = 7\,381$

b) • $r = -2$

• $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot (-2)^{n-1} \rightarrow a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

• $a_{10} = 3 \cdot (-2)^9 = 3 \cdot (-512) = -1\,536$

$S_{10} = \dfrac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{3\,072 - 3}{-3} = -1\,023$

c) • $r = 1{,}5$

• $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 4 \cdot (1{,}5)^{n-1} \rightarrow a_n = 4 \cdot (1{,}5)^{n-1}$

• $a_{10} = 4 \cdot 1{,}5^9 \approx 153{,}77$

$S_{10} = \dfrac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} \approx 453{,}32$

d) • $r = \dfrac{1}{2}$

• $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 8 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^3 \cdot \dfrac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{2^3}{2^{n-1}} = 2^{3-(n-1)} =$

$= 2^{3-n+1} = 2^{4-n} \rightarrow a_n = 2^{4-n}$

• $a_{10} = 2^{-6} = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{64}$

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{\dfrac{1}{128} - 8}{-\dfrac{1}{2}} = \frac{1\,023}{64} \simeq 15{,}98$$

9 **Calcula el término general y la suma de los 15 primeros términos de las sucesiones siguientes:**

a) 8, 5, 2, –1, … **b)** $\dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{3}, \ldots$

a) Es una progresión aritmética de diferencia $d = -3$.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 8 + (n-1) \cdot (-3) = 8 - 3n + 3 = 11 - 3n$

$a_n = 11 - 3n$

$a_{15} = 11 - 3 \cdot 15 = 11 - 45 = -34$

$S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \dfrac{(8 - 34) \cdot 15}{2} = -195$

b) Es una progresión geométrica de razón $r = 3$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \dfrac{1}{81} \cdot 3^{n-1} = \dfrac{1}{3^4} \cdot 3^{n-1} = \dfrac{3^{n-1}}{3^4} = 3^{n-1-4} = 3^{n-5}$

$a_n = 3^{n-5}$

$a_{15} = 3^{10} = 59\,049$

$S_{15} = \dfrac{a_{15} \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{177\,147 - 1/81}{2} = \dfrac{7\,174\,453}{81} \approx 88\,573{,}494$

10 Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:

a) $5, 6, 1, -5, \dots$ **b)** $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

c) $0, 1, 1, 0, -1, -1, \dots$ **d)** $1, 3, 5, 11, 21, 43, \dots$

a) $a_1 = 5,\ a_2 = 6,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n > 2$

b) $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$, para $n > 2$

c) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n > 2$

d) $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_n = a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$, para $n > 2$
También, $a_1 = 1,\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + (-1)^n$, para $n > 1$

Página 57

11 Halla el término general de estas sucesiones:

a) $2, 4, 6, 8, 10, \dots$ **b)** $32, 25, 18, 11, \dots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ **d)** $7{,}7;\ 6{,}6;\ 5{,}5;\ 4{,}4;\ \dots$

e) $-7, -4, -1, 2, \dots$ **f)** $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$

g) $0{,}2;\ 0{,}02;\ 0{,}002;\ \dots$ **h)** $0, 3, 8, 15, 24, \dots$

a) $a_n = 2n$

b) $b_n = 32 + (n-1) \cdot (-7) = 32 - 7n + 7 = 39 - 7n$

c) $c_n = \dfrac{n}{n+1}$

d) $d_n = 7{,}7 + (n-1) \cdot (-1{,}1) = 7{,}7 - 1{,}1n + 1{,}1 = 8{,}8 - 1{,}1n$

e) $e_n = -7 + (n-1) \cdot 3 = -7 + 3n - 3 = 3n - 10$

f) $f_n = 2^{n-5}$

g) $g_n = 0{,}2 \cdot (0{,}1)^{n-1}$

h) $h_n = n^2 - 1$

12 Identifica las progresiones aritméticas, las geométricas y las que no sean de estos tipos. Obtén el término general de cada una:

a) $1, 1, 1, 1, \dots$ **b)** $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \dots$ **c)** $\frac{7}{8}, 1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \dots$

d) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$ **e)** $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$ **f)** $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$

a) $a_n = 1$. Es una progresión aritmética de diferencia $d = 0$. También es una progresión geométrica de razón $r = 1$.

b) Es una progresión aritmética de diferencia $d = \sqrt{2}$, $a_n = n\sqrt{2}$.

c) Es una progresión aritmética de diferencia $d = \dfrac{1}{8}$, $a_n = \dfrac{n+6}{8}$.

d) $a_n = \sqrt{n}$. No es ni progresión aritmética ni geométrica.

e) Es una progresión geométrica de razón $r = \sqrt{2}$, $a_n = (\sqrt{2})^n$.

f) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$. No es ni progresión aritmética ni geométrica.

13 **Halla la suma de todos los términos de la progresión geométrica con: $a_1 = 10$ y $r = \dfrac{1}{10}$.**

$$S_\infty = \frac{a_1}{r-1} = \frac{10}{1-1/10} = \frac{10}{9/10} = \frac{100}{9}$$

14 **Escribe el término a_{63} de esta sucesión: 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, …**

El término a_n es igual al resto que se obtiene al dividir n entre 4.

$63 = 4 \cdot 15 + 3$. Por tanto, $a_{63} = 3$.

PIENSA Y RESUELVE

15 **Escribe el término general de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $a_4 = 40$.**

☛ *$a_4 = a_1 + 3d$, sustituye y halla d.*

$a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 40 = 7 + 3d \rightarrow 33 = 3d \rightarrow d = 11$

Término general: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 7 + (n-1) \cdot 11 = 7 + 11n - 11 =$

$= 11n - 4 \rightarrow a_n = 11n - 4$

16 **En una progresión aritmética, $a_8 = 4$ y la diferencia es –5. Calcula el primer término y la suma de los veinticinco primeros términos.**

☛ *$a_8 = a_1 + 7d$, sustituye y halla a_1.*

$a_1 = a_8 - 7d = 4 + 35 = 39 \rightarrow a_1 = 39$

$a_{25} = a_1 + 24d = 39 - 120 = -81$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(39-81) \cdot 25}{2} = -525 \rightarrow S_{25} = -525$$

17 **En una progresión geométrica, $a_1 = 64$ y $r = 0,25$.**

a) Calcula el primer término no entero.

b) Expresa, de forma indicada, a_{25}.

a) $a_1 = 64,\ a_2 = 16,\ a_3 = 4,\ a_4 = 1,\ a_5 = 0,25.$

El primer término no entero es $a_5 = 0,25$.

b) $$a_{25} = a_1 \cdot r^{24} = 64 \cdot 0,25^{24} = 64 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{24} = 64 \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)^{24} =$$

$$= 2^6 \cdot \frac{1}{2^{48}} = \frac{2^6}{2^{48}} = \frac{1}{2^{42}} = 2^{-42}$$

$a_{25} = 64 \cdot 0,25^{24} = 2^{-42}$

18 **En una progresión geométrica, $a_1 = 1\,000$ y $a_4 = 8$. Calcula la suma de los cinco primeros términos.**

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 \to 8 = 1\,000 \cdot r^3 \to r^3 = \frac{8}{1\,000} \to r = \sqrt[3]{\frac{8}{1\,000}} = \frac{2}{10} = 0,2$$

$r = 0,2$

$a_5 = a_4 \cdot r = 8 \cdot 0,2 = 1,6$

$$S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{0,32 - 1\,000}{0,2 - 1} = \frac{-999,68}{-0,8} = 1\,249,6 = S_5$$

19 **Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y el menor mide 36°. ¿Cuánto miden los otros?**

$a_1 = 36°,\ a_2 = 36° + d,\ a_3 = 36° + 2d$

$a_1 + a_2 + a_3 = 36° + 36° + d + 36° + 2d = 180°$

$108° + 3d = 180° \to 3d = 72° \to d = 24°$

Los ángulos miden: $a_1 = 36°,\ a_2 = 60°,\ a_3 = 84°$

20 **En una sala de cine, la primera fila dista de la pantalla 5,5 m, y la sexta, 8,75 m. ¿En qué fila está una persona si su distancia a la pantalla es 13,3 m?**

- Con $a_1 = 5,5$ y $a_6 = 8,75$, calculamos d:

  $a_6 = a_1 + 5d \to 8,75 = 5,5 + 5d \to d = 0,65$

- ¿Qué lugar ocupa el término 13,3?

  $a_n = 5,5 + (n - 1)\ 0,65$

  $13,3 = 5,5 + (n - 1)\ 0,65 \to 7,8 = (n - 1) \cdot 0,65$

  $$n - 1 = \frac{7,8}{0,65} \to n - 1 = 12 \to n = 13$$

  Está en la fila 13.

21 **Un vendedor de coches cobra al mes un tanto fijo más una comisión por cada coche que venda. En enero vendió 14 coches y cobró 2 460 €. En febrero vendió 23 y cobró 3 630 €. ¿Cuánto cobrará en marzo si ha vendido 17 coches?**

Tenemos que calcular a_{17}, sabiendo que $a_{14} = 2\,460$ € y que $a_{23} = 3\,630$ €.

$a_{23} = a_{14} + 9d \rightarrow 3\,630 = 2\,460 + 9d \rightarrow 1\,170 = 9d \rightarrow d = 130$

$a_{17} = a_{14} + 3d = 2\,460 + 3 \cdot 130 = 2\,850$ €.

Vendiendo 17 coches, cobrará 2 850 €.

22 **Una persona que estaba de vacaciones gastó 100 € el primer día, y en cada uno de los siguientes, 5 € menos que el anterior. El dinero le duró 20 días. ¿Cuánto dinero llevó para sus vacaciones?**

Tenemos que $a_1 = 100$ €, $d = -5$. Así:

$a_{20} = 100 - 19 \cdot 5 = 5$ € gastó el día 20º de sus vacaciones. En total llevó:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(100 + 5) \cdot 20}{2} = 1\,050 \text{ €}.$$

23 **Calcula la suma de los doce primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_3 = 24$ y $a_{10} = 66$.**

$a_{10} = a_3 + 7d \rightarrow 66 = 24 + 7d \rightarrow 42 = 7d \rightarrow d = 6$

$a_1 = a_3 - 2d = 24 - 12 = 12$

$a_{12} = a_{10} + 2d = 66 + 12 = 78$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(12 + 78) \cdot 12}{2} = 540 \rightarrow S_{12} = 540$$

24 **Halla el primer término y la diferencia de una progresión aritmética en la que el término $a_4 = 13$ y $a_2 + a_{11} = 41$.**

$$\left.\begin{array}{l} a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 13 = a_1 + 3d \rightarrow a_1 = 13 - 3d \\ a_2 + a_{11} = a_1 + d + a_1 + 10d = 2a_1 + 11d \rightarrow 2a_1 + 11d = 41 \end{array}\right\}$$

$2(13 - 3d) + 11d = 41 \rightarrow 26 - 6d + 11d = 41 \rightarrow 5d = 15 \rightarrow d = 3$

$a_1 = 13 - 9 = 4 \rightarrow a_1 = 4$

25 **Un tipo de bacterias se reproduce por bipartición cada 10 minutos. ¿Cuántas bacterias habrá después de 8 horas?**

8 horas = 480 minutos = 48 · 10 minutos. Así, al cabo de 8 horas habrá:

$$2^{48} \simeq 2{,}81 \cdot 10^{14} \text{ bacterias}$$

26 **¿En cuánto se convertirá un euro al 10% de interés anual compuesto durante un siglo?**

1 € colocado durante 100 años al 10% de interés anual compuesto, se convertirá en: $1 \cdot (1{,}1)^{100} = 13\,780{,}61$ €

27 **La tasa anual de crecimiento demográfico de un país es del 18‰ (18 por mil). Si al finalizar el año 2000 tiene una población de 16 millones de habitantes, ¿qué población tendrá en el año 2025, si se mantiene esa tasa?**

Si al finalizar el año 2000 tenía 16 millones de habitantes, al cabo de un año tendrá: $16\,000\,000 \cdot 1{,}018 = 16\,288\,000$ habitantes

Es una progresión geométrica de razón $r = 1{,}018$.

• A principios del año 2025 (al cabo de 24 años) tendrá:

$$16\,000\,000 \cdot 1{,}018^{24} = 24\,550\,857 \simeq 24{,}5 \text{ millones de habitantes}$$

• Al final del año 2025 (al cabo de 25 años) tendrá:

$$16\,000\,000 \cdot 1{,}018^{25} = 24\,992\,772 \simeq 25 \text{ millones de habitantes}$$

Página 58

28 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

29 **Calcula la fracción generatriz de estos números utilizando el método del ejercicio anterior:**

a) $7,\widehat{3}$ **b)** $3,5\widehat{4}$ **c)** $0,\widehat{23}$

a) $7,\widehat{3} = 7{,}3333\ldots = 7 + 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots$

Hallamos la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica: $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1\,000}, \ldots$, de razón $\frac{1}{10}$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Por tanto: $7,\widehat{3} = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$

b) $3,5\widehat{4} = 3 + 0{,}5 + 0{,}04 + 0{,}004 + 0{,}0004 + \ldots$

Expresamos 0,5 en forma de fracción $\rightarrow$ $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Hallamos la suma de los infinitos términos de la progresión $\frac{4}{100}, \frac{4}{1\,000}, \frac{4}{10\,000}, \ldots$, de razón $\frac{1}{10}$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\dfrac{4}{100}}{1-\dfrac{1}{10}} = \frac{\dfrac{4}{100}}{\dfrac{9}{10}} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$$

Por tanto: $3{,}5\widehat{4} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{2}{45} = \frac{270}{90} + \frac{45}{90} + \frac{4}{90} = \frac{319}{90}$

c) $0{,}\widehat{23} = 0{,}23 + 0{,}0023 + 0{,}000023 + \dots$

Hallamos la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica:

$\frac{23}{100}, \frac{23}{10\,000}, \frac{23}{100\,000}, \dots$, de razón $\frac{1}{100}$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\dfrac{23}{100}}{1-\dfrac{1}{100}} = \frac{\dfrac{23}{100}}{\dfrac{99}{100}} = \frac{23}{99}$$

Por tanto: $0{,}\widehat{23} = \frac{23}{99}$

30 Dejamos caer una pelota desde una cierta altura y tras cada rebote, la altura alcanzada se reduce a la mitad de la altura anterior. Si en el cuarto rebote alcanzó 30 cm, ¿desde qué altura se dejó caer?

Llamamos a_1 a la altura desde la que se dejó caer. En el primer rebote, su altura será: $a_2 = \frac{1}{2}a_1$. En el segundo rebote, $a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_1$, etc.

Es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$, en la que sabemos que en el cuarto rebote alcanzó 30 cm; es decir: $a_5 = 30$.

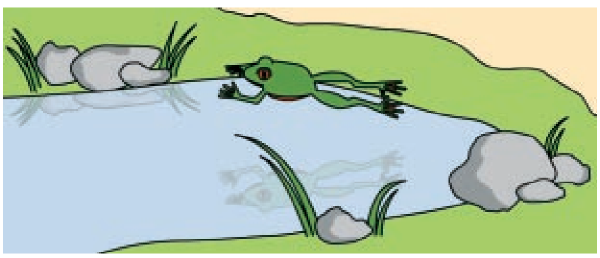
Por tanto:

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = a_1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{a_1}{16} = 30 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad a_1 = 16 \cdot 30 = 480 \text{ cm}$$

Se dejó caer desde una altura de 480 cm = 4,8 m.

31 Una rana da saltos en línea recta hacia adelante, y cada vez salta los 2/3 del salto anterior. Quiere atravesar una charca circular de 5 m de radio, y el primer salto es de 2 m.

¿Llegará al centro de la charca? ¿Llegará al otro lado de la charca siguiendo el diámetro?



En cada uno de sus saltos recorre:

– Primer salto $\rightarrow$ $a_1 = 2$ m.

– Segundo salto $\rightarrow$ $a_2 = \frac{2}{3}a_1 = \frac{4}{3}$ m.

– …

Es una progresión geométrica de razón $\frac{2}{3} < 1$. Lo que recorre en total es:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6 \text{ m}$$

Como el radio de la charca son 5 m, sí llegará al centro de la charca (y un metro más); pero no llegará al otro lado, pues tendría que recorrer 10 m.

32 **En el año 1986 fue visto el cometa Halley desde la Tierra, a la que se acerca cada 76 años. Esta era la cuarta vez que nos visitaba desde que el astrónomo Halley lo descubrió.**

a) ¿En qué año fue descubierto?

b) ¿Cuándo será visto en el siglo XXI?

Tenemos una progresión aritmética en la que $a_4 = 1986$ y $d = 76$.

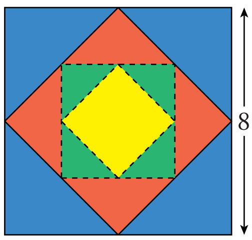
a) $a_1 = a_4 - 3d = 1986 - 3 \cdot 76 = 1986 - 228 = 1\,758$

Fue descubierto en 1758.

b) $a_5 = 1986 + 76 = 2062$

Será visto por quinta vez en el año 2062.

33 **Observa los diferentes cuadrados que hay en esta figura. Se han obtenido uniendo los puntos medios de dos lados contiguos.**



a) Halla las áreas de los seis primeros cuadrados de esta sucesión. ¿Cuál será su término general?

b) Escribe la sucesión formada por las longitudes de los lados.

c) Calcula la suma de las áreas de los infinitos cuadrados generados de esa forma.

a) Observamos que el área de cada cuadrado es la mitad del área del cuadrado anterior. Por tanto, la sucesión de las áreas es:

$a_1 = 64 \text{ cm}^2, a_2 = 32 \text{ cm}^2, a_3 = 16 \text{ cm}^2, a_4 = 8 \text{ cm}^2, a_5 = 4 \text{ cm}^2, a_6 = 2 \text{ cm}^2, \ldots$

Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. El término general es:

$$a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^6 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^6}{2^{n-1}} = 2^{6-(n-1)} = 2^{6-n+1} = 2^{7-n}$$

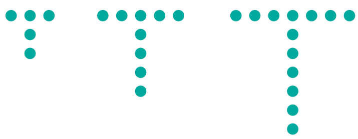
$a_n = 2^{7-n}$

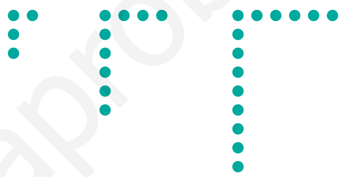
b) El lado de un cuadrado es igual a la raíz cuadrada de su área. Por tanto, la sucesión de las longitudes de los lados será: $\sqrt{64}, \sqrt{32}, \sqrt{16}, \sqrt{8}, \sqrt{4}, \sqrt{2}, \ldots$

Es decir: $8, 4\sqrt{2}, 4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, \ldots$

c) Como $a_1 = 64$ y $r = \frac{1}{2}$, tenemos que: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{64}{1-\frac{1}{2}} = \frac{64}{\frac{1}{2}} = 128 \text{ cm}^2$

34 **Observa las figuras en cada caso y busca la fórmula que permita saber cuántos puntos tendrá una figura sabiendo el lugar que ocupa en la serie:**

a) 

b) 

a) $a_1 = 5, a_2 = 9, a_3 = 13, \ldots$

Es una progresión aritmética con diferencia $d = 4$. Por tanto:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 5 + (n-1) \cdot 4 = 5 + 4n - 4 = 4n + 1$

$a_n = 4n + 1$

b) $a_1 = 4, \; a_2 = 9, \; a_3 = 14, \ldots$

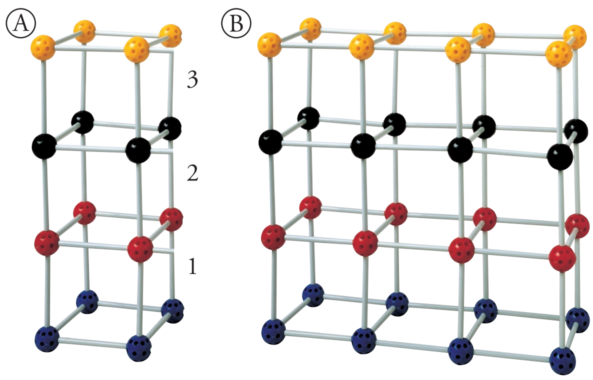
Es una progresión aritmética con diferencia $d = 5$. Por tanto:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 4 + (n-1) \cdot 5 = 4 + 5n - 5 = 5n - 1$

$a_n = 5n - 1$

35 **Averigua cuántos palos y cuántas bolas son necesarios para hacer una estructura como la de la figura A, pero de n pisos.**

¿Y para la figura B?



A) BOLAS: $b_1 = 8, \; b_2 = 12, \; b_3 = 16, \ldots$

Es una progresión aritmética con $d = 4$. Para que tenga n pisos, necesitaremos:

$b_n = 8 + (n-1) \cdot 4 = 8 + 4n - 4 = 4n + 4 \;\rightarrow\; b_n = 4n + 4$ bolas

PALOS: $p_1 = 12,\ p_2 = 20,\ p_3 = 28, \dots$

Es una progresión aritmética con $d = 8$. Para que tenga n pisos, necesitaremos:

$p_n = 12 + (n-1) \cdot 8 = 12 + 8n - 8 = 8n + 4 \ \rightarrow\ p_n = 8n + 4$ palos

B) BOLAS: $b_1 = 16,\ b_2 = 24,\ b_3 = 32, \dots$

Es una progresión aritmética con $d = 8$. Para que tenga n pisos, necesitaremos:

$b_n = 16 + (n-1) \cdot 8 = 16 + 8n - 8 = 8n + 8 \ \rightarrow\ b_n = 8n + 8$ bolas

PALOS: $p_1 = 28,\ p_2 = 46,\ p_3 = 64, \dots$

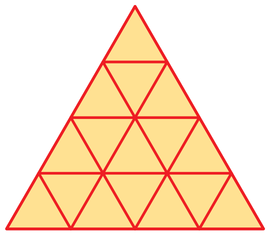
Es una progresión aritmética con $d = 18$. Para que tenga n pisos, necesitaremos:

$p_n = 28 + (n-1) \cdot 18 = 28 + 18n - 18 = 18n + 10 \ \rightarrow\ p_n = 18n + 10$ palos

Página 59

36 Dibuja un triángulo equilátero de 16 cm de lado. Une los puntos medios de sus lados. ¿Cuántos triángulos obtienes? ¿Cuánto miden sus lados?

En estos triángulos vuelve a unir los puntos medios, y así sucesivamente. Escribe las siguientes sucesiones:



a) Número de triángulos que tienes cada vez.

b) Longitudes de los lados de esos triángulos.

c) Áreas de los triángulos.

d) Si multiplicas cada término de la sucesión obtenida en a) por el correspondiente de la sucesión obtenida en c), ¿qué obtienes?

a) $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 16,\ a_4 = 64,\ a_5 = 256, \dots$

Es una progresión geométrica de razón $r = 4$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 1 \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1} \ \rightarrow\ a_n = 4^{n-1}$

b) $b_1 = 16,\ b_2 = 8,\ b_3 = 4,\ b_4 = 2,\ b_5 = 1, \dots$

Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$.

$$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^4 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^4}{2^{n-1}} = 2^{4-(n-1)} =$$

$$= 2^{4-n+1} = 2^{5-n}$$

$b_n = 2^{5-n}$

c) $c_1 = 64\sqrt{3},\ c_2 = 16\sqrt{3},\ c_3 = 4\sqrt{3},\ c_4 = \sqrt{3},\ c_5 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \dots$

Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{4}$.

$$c_n = c_1 \cdot r^{n-1} = 64\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^6 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)^{n-1} = 2^6 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{2^6}{2^{2n-2}} = \sqrt{3} \cdot 2^{6-(2n-2)} =$$

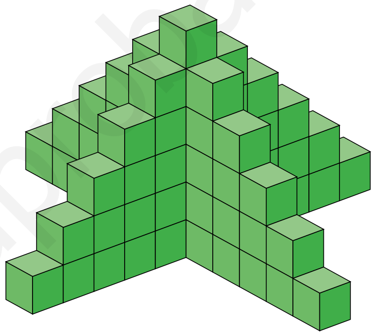
$$= \sqrt{3} \cdot 2^{6-2n+2} = \sqrt{3} \cdot 2^{8-2n}$$

$$c_n = 2^{8-2n} \cdot \sqrt{3}$$

d) El área del triángulo original $= 64\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

PROFUNDIZA

37 Calcula el número de bloques necesarios para construir una torre como la de la figura, pero de 50 pisos.



- El número de bloques que hay en cada piso es:

  $a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_3 = 9,\ a_4 = 13, \dots$

- Forman una progresión aritmética con $d = 4$:

  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 1 + (n-1) \cdot 4 = 1 + 4n - 4 = 4n - 3$

  $a_{50} = 4 \cdot 50 - 3 = 197$

  En el piso 50 hay 197 bloques.

- Para construir una torre de 50 pisos necesitaremos:

  $$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1 + 197) \cdot 50}{2} = 4\,950 \text{ bloques}$$

38 Un hortelano debe echar un cubo de agua a cada uno de los veinte árboles que tiene. Estos están alineados a distancias regulares de 6 metros, a lo largo de un camino, y la distancia del primer árbol a la fuente es de 12 metros.

a) Si cada vez lleva un cubo, ¿qué distancia habrá recorrido hasta regar los veinte árboles, considerando que deja el cubo en su posición inicial junto a la fuente?

b) ¿Y si llevara dos cubos en cada viaje?

a) • Para regar el primero y dejar el cubo donde estaba, recorre 12 metros de ida y 12 metros de vuelta $\rightarrow$ $a_1 = 24$.

  • Para regar el segundo y dejar el cubo en la fuente, recorre 36 metros $\rightarrow$ $a_2 = 36$.

- Para regar el tercero y dejar el cubo en la fuente, recorre 48 metros $\to$ $a_3 = 48$.

  …

Es una progresión aritmética con $d = 12$.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 24 + (n - 1) \cdot 12 = 24 + 12n - 12 = 12n + 12$

$a_n = 12n + 12$

$a_{20} = 12 \cdot 20 + 12 = 252$

- En total recorrerá:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(24 + 252) \cdot 20}{2} = 2\,760 \text{ m}$$

b) • Para regar los árboles 1º y 2º, recorre (dejando el cubo en la fuente) 36 metros: $b_1 = 36$.

- Para regar los árboles 3º y 4º, recorre 60 m $\to$ $b_2 = 60$.

Es una progresión aritmética con $d = 24$.

$b_n = 36 + (n - 1) \cdot 24 = 36 + 24n - 24 = 24n + 12$

$b_{10} = 240 + 12 = 252$

En total recorrerá:

$$S_{10} = \frac{(b_1 + b_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(36 + 252) \cdot 10}{2} = 1\,440 \text{ m}$$

39 Un ahorrador inicia un plan de pensiones a los 45 años, con cuotas anuales de 1 200 € que paga al principio de cada año. Su contrato con el banco le asegura un 8% fijo de interés compuesto anual. ¿De qué capital dispondrá a los 65 años?

Cada cuota anual produce intereses durante el periodo que está en el banco, del siguiente modo:

1ª cuota $\to$ $1\,200 \cdot 1{,}08^{20} = 5\,593{,}15$

2ª cuota $\to$ $1\,200 \cdot 1{,}08^{19} = 5\,178{,}84$

…

Penúltima cuota $\to$ $1\,200 \cdot 1{,}08^2 = 1\,399{,}68$

Última cuota $\to$ $1\,200 \cdot 1{,}08 = 1\,296$

Las cantidades al final de cada año forman una progresión geométrica de razón 1,08, cuyo primer término es 1 296.

$a_1 = 1\,296$; $a_2 = 1\,399{,}68$; …; $a_{20} \approx 5\,593{,}15$ forman una progresión geométrica de razón $r = 1{,}08$. Su suma es:

$$S_{20} = \frac{a_{20} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{5\,593{,}15 \cdot 1{,}08 - 1\,296}{1{,}08 - 1} \approx 59\,307{,}525 \text{ €}$$

40 **Una persona deposita todos los años 900 € en una cuenta bancaria que le produce un 6% de interés compuesto anual. ¿Qué cantidad tendrá al cabo de 5 años? ¿Y al cabo de 10 años?**

- *Al cabo de 5 años:*

  1ª cuota $\rightarrow$ $900 \cdot 1{,}06^5 \approx 1\,204{,}4$ €

  2ª cuota $\rightarrow$ $900 \cdot 1{,}06^4 \approx 1\,136{,}23$ €

  …

  5ª cuota $\rightarrow$ $900 \cdot 1{,}06 = 954$ €

  $a_1 = 954; \ldots; a_4 = 1\,136{,}23; a_5 = 1\,204{,}4$ forman una progresión geométrica de razón $r = 1{,}06$. Su suma es:

  $$S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{900 \cdot 1{,}06^5 \cdot 1{,}06 - 954}{1{,}06 - 1} \approx 5\,377{,}79 \text{ €}$$

- *Al cabo de 10 años:*

  1ª cuota $\rightarrow$ $900 \cdot 1{,}06^{10}$

  2ª cuota $\rightarrow$ $900 \cdot 1{,}06^9$

  …

  Penúltima cuota $\rightarrow$ $900 \cdot 1{,}06^2$

  Última cuota $\rightarrow$ $900 \cdot 1{,}06$

  $a_1 = 900 \cdot 1{,}06; a_2 = 900 \cdot 1{,}06^2; \ldots; a_{10} = 900 \cdot 1{,}06^{10}$ forman una progresión geométrica de razón $r = 1{,}06$. Su suma es:

  $$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{900 \cdot 1{,}06^{10} \cdot 1{,}06 - 900 \cdot 1{,}06}{1{,}06 - 1} \approx 12\,574{,}48 \text{ €}$$

41 **En una progresión geométrica, la suma de sus infinitos términos es 2, y la diferencia entre el primero y el segundo, $a_1 - a_2$, es 2/9. Halla el primer término y la razón.**

☛ ***De las dos soluciones que obtienes, solo una es válida.***

$$\left.\begin{array}{l} S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r} = 2 \;\rightarrow\; a_1 = 2(1 - r) \\[2ex] a_1 - a_2 = a_1 - a_1 \cdot r = a_1(1 - r) = \dfrac{2}{9} \end{array}\right\}$$

$$2(1 - r)(1 - r) = \frac{2}{9} \;\rightarrow\; (1 - r)(1 - r) = \frac{1}{9}$$

$$r^2 - 2r + 1 = \frac{1}{9} \;\rightarrow\; 9r^2 - 18r + 9 = 1$$

$$9r^2 - 18r + 8 = 0$$

$$r = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{18} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{18} = \frac{18 \pm 6}{18} = \begin{cases} r = \dfrac{24}{18} = \dfrac{4}{3} > 1 \\ r = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3} < 1 \end{cases}$$

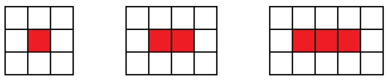
Solo es válida $r = \frac{2}{3}$ (hemos sumado los infinitos términos de la sucesión, luego $r < 1$).

$$a_1 = 2(1 - r) = 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

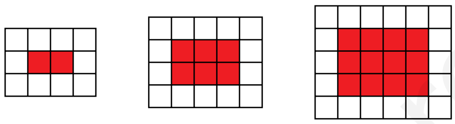
Por tanto, $a_1 = \frac{2}{3}$ y $r = \frac{2}{3}$.

42 **Observa las series de rectángulos en a) y en b).**

a)



b)



¿Cuántos cuadrados rojos tiene cada figura? ¿Y blancos? ¿Cuántos cuadrados rojos y cuántos blancos tendrá la figura que ocupa el lugar n en cada caso?

a) • **Rojos:** 1, 2, 3, 4, … $\to$ $a_n = n$
• **Blancos:** 8, 10, 12, 14, … $\to$ $a_n = 2n + 6$

b) • **Rojos:** 2, 6, 12, … $\to$ $a_n = n(n + 1)$
• **Blancos:** 10, 14, 18, … $\to$ $a_n = 4n + 6$

Página 75

PRACTICA

Operaciones con polinomios

1 **Efectúa las operaciones y simplifica las siguientes expresiones:**

a) $x(x^2 + 1) - 3x(-x + 3) + 2(x^2 - x)^2$

b) $2(x^2 + 3) - 2x(x - 3) + 6(x^2 - x - 1)$

c) $-4x(x - 4)^2 + 3(x^2 - 2x + 3) - 2x(-x^2 + 5)$

a) $x(x^2 + 1) - 3x(-x + 3) + 2(x^2 - x)^2 =$

$= x^3 + x + 3x^2 - 9x + 2(x^4 - 2x^3 + x^2) =$

$= x^3 + x + 3x^2 - 9x + 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 8x$

b) $2(x^2 + 3) - 2x(x - 3) + 6(x^2 - x - 1) =$

$= 2x^2 + 6 - 2x^2 + 6x + 6x^2 - 6x - 6 = 6x^2$

c) $-4x(x - 4)^2 + 3(x^2 - 2x + 3) - 2x(-x^2 + 5) =$

$= -4x(x^2 - 8x + 16) + 3x^2 - 6x + 9 + 2x^3 - 10x =$

$= -4x^3 + 32x^2 - 64x + 3x^2 - 6x + 9 + 2x^3 - 10x = -2x^3 + 35x^2 - 80x + 9$

2 **Multiplica y simplifica las siguientes expresiones:**

a) $-3x(x + 7)^2 + (2x - 1)(-3x + 2)$

b) $(2a^2 + a - 1)(a - 3) - (2a - 1)(2a + 1)$

c) $(3b - 1)(3b + 1) - (4b - 3)^2 - 2(2b^2 + 16b - 16)$

a) $-3x(x + 7)^2 + (2x - 1)(-3x + 2) =$

$= -3x(x^2 + 14x + 49) - 6x^2 + 4x + 3x - 2 =$

$= -3x^3 - 42x^2 - 147x - 6x^2 + 7x - 2 = -3x^3 - 48x^2 - 140x - 2$

b) $(2a^2 + a - 1)(a - 3) - (2a - 1)(2a + 1) =$

$= 2a^3 + a^2 - a - 6a^2 - 3a + 3 - 4a^2 + 1 = 2a^3 - 9a^2 - 4a + 4$

c) $(3b - 1)(3b + 1) - (4b - 3)^2 - 2(2b^2 + 16b - 16) =$

$= 9b^2 - 1 - (16b^2 - 24b + 9) - 4b^2 - 32b + 32 =$

$= 9b^2 - 1 - 16b^2 + 24b - 9 - 4b^2 - 32b + 32 = -11b^2 - 8b + 22$

3 **Expresa como un cuadrado o como producto de dos binomios cada uno de los siguientes polinomios:**

a) $25x^2 + 40x + 16$ **b)** $64x^2 - 160x + 100$ **c)** $4x^2 - 25$

a) $25x^2 + 40x + 16 = (5x + 4)^2$

b) $64x^2 - 160x + 100 = (8x - 10)^2$

c) $4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5)$

4 **Expresa como un cuadrado o como producto de dos binomios cada uno de los siguientes polinomios:**

a) $x^4 + 4x^2 + 4$ **b)** $x^4 - 16$ **c)** $9x^2 - 6x^3 + x^4$ **d)** $2x^2 + 4x + 2$

a) $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$

b) $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$

c) $9x^2 - 6x^3 + x^4 = x^2(x - 3)^2$

d) $2x^2 + 4x + 2 = 2(x + 1)^2$

5 **Saca factor común e identifica productos notables en cada caso:**

a) $12x^3 - 3x$ **b)** $2x^4 + 12x^3 + 18x^2$ **c)** $45x^2 - 120x + 80$ **d)** $3x^3 - 15x$

a) $12x^3 - 3x = 3x(4x^2 - 1) = 3x(2x - 1)(2x + 1)$

b) $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2$

c) $45x^2 - 120x + 80 = 5(9x^2 - 24x + 16) = 5(3x - 4)^2$

d) $3x^3 - 15x = 3x(x^2 - 5) = 3x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

6 **Halla el cociente y el resto en cada una de estas divisiones:**

a) $(3x^2 - 7x + 5) : (x^2 - x + 1)$

b) $(x^3 - x) : (x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 3x^2 - 2) : (x^2 + 1)$

a)
$$\begin{array}{rl} 3x^2 - 7x + 5 & \underline{|\, x^2 - x + 1} \\ \underline{-3x^2 + 3x - 3} & \ 3 \\ -4x + 2 & \end{array}$$

Cociente: 3

Resto: $-4x + 2$

b) $(x^3 - x) : (x^2 - 1)$

Observamos que $x^3 - x = x(x^2 - 1)$, luego $(x^3 - x) : (x^2 - 1) = x$

Cociente: x

Resto: 0

c)
$$\begin{array}{rl} x^3 - 3x^2 \qquad - 2 & \underline{|\, x^2 + 1} \\ \underline{-x^3 \qquad\quad - x} & \ x - 3 \\ - 3x^2 - x \quad & \\ \underline{3x^2 \qquad + 3} & \\ - x + 3 & \end{array}$$

Cociente: $x - 3$

Resto: $-x + 3$

7 **Calcula el cociente y el resto en cada una de estas divisiones:**

a) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : (x^3 + 2x)$ **b)** $(x^3 - 5x^2 + x) : (x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 5x^2 + x) : (2x^2 - 1)$

a) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : (x^3 + 2x)$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^5 & +7x^3 & -5x & +1 & x^3 + 2x \\ \cline{5-5} -x^5 & -2x^3 & & & x^2 + 5 \\ \cline{1-4} & 5x^3 & & & \\ & -5x^3 & -10x & & \\ \cline{2-4} & & -15x & +1 & \end{array}$$

Cociente: $x^2 + 5$

Resto: $-15x + 1$

b) $(x^3 - 5x^2 + x) : (x^2 - 1)$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -5x^2 & +x & & x^2 - 1 \\ \cline{5-5} -x^3 & & +x & & x - 5 \\ \cline{1-3} & -5x^2 & +2x & & \\ & 5x^2 & & -5 & \\ \cline{2-4} & & 2x & -5 & \end{array}$$

Cociente: $x - 5$

Resto: $2x - 5$

c) $(x^3 - 5x^2 + x) : (2x^2 - 1)$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -5x^2 & +x & & 2x^2 - 1 \\ \cline{5-5} -x^3 & & +(1/2)x & & (1/2)x - 5/2 \\ \cline{1-3} & -5x^2 & +(3/2)x & & \\ & 5x^2 & & -5/2 & \\ \cline{2-4} & & (3/2)x & -5/2 & \end{array}$$

Cociente: $(1/2)x - 5/2$

Resto: $(3/2)x - 5/2$

8 **Halla el cociente y el resto en las siguientes divisiones:**

a) $(6a^3 + 5a^2 - 9a) : (3a - 2)$ **b)** $(3b^4 - 8b^3 + 9b^2 - 2b - 7) : (b^2 - b - 1)$

c) $(4c^5 - 2c^3 + 3c) : (c^2 - c + 2)$

a)

$$\begin{array}{rrrr|l} 6a^3 & +5a^2 & -9a & & 3a - 2 \\ \cline{5-5} -6a^3 & +4a^2 & & & 2a^2 + 3a - 1 \\ \cline{1-2} & 9a^2 & & & \\ & -9a^2 & +6a & & \\ \cline{2-3} & & -3a & & \\ & & 3a & -2 & \\ \cline{3-4} & & & -2 & \end{array}$$

Cociente: $2a^2 + 3a - 1$

Resto: -2

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
3b^4 & -8b^3 & +9b^2 & -2b & -7 & b^2-b-1 \\ \cline{6-6}
-3b^4 & +3b^3 & +3b^2 & & & 3b^2-5b+7 \\ \cline{1-3}
 & -5b^3 & +12b^2 & & & \\
 & 5b^3 & -5b^2 & -5b & & \\ \cline{2-4}
 & & 7b^2 & -7b & & \\
 & & -7b^2 & +7b & +7 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Cociente: $3b^2 - 5b + 7$

Resto: 0

c)
$$\begin{array}{rrrrrr|l}
4c^5 & & -2c^3 & & +3c & & c^2-c+2 \\ \cline{7-7}
-4c^5 & +4c^4 & -8c^3 & & & & 4c^3+4c^2-6c-7 \\ \cline{1-3}
 & 4c^4 & -10c^3 & & & & \\
 & -4c^4 & +4c^3 & -8c^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -6c^3 & -8c^2 & & & \\
 & & 6c^3 & -6c^2 & +12c & & \\ \cline{3-5}
 & & & -14c^2 & +15c & & \\
 & & & 14c^2 & -7c & +14 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 8c & +14 &
\end{array}$$

Cociente: $4c^3 + 4c^2 - 6c - 7$

Resto: $8c + 14$

Regla de Ruffini. Teorema del resto

9 **Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:**

a) $(2x^3 - x^2 + 5x - 3) : (x - 2)$ **b)** $(-x^4 + 3x^2 - 2x + 1) : (x + 1)$

c) $(3x^3 + 5x^2 - x) : (x + 2)$ **d)** $(x^3 - 27) : (x - 3)$

e) $(x^4 - x^2) : (x + 1)$ **f)** $(x^5 - 2x^4 + x - 2) : (x - 1)$

a) $(2x^3 - x^2 + 5x - 3) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -1 & 5 & -3 \\
2 & & 4 & 6 & 22 \\ \hline
 & 2 & 3 & 11 & \boxed{19}
\end{array}$$

Cociente: $2x^2 + 3x + 11$

Resto: 19

b) $(-x^4 + 3x^2 - 2x + 1) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & -1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\
-1 & & 1 & -1 & -2 & 4 \\ \hline
 & -1 & 1 & 2 & -4 & \boxed{5}
\end{array}$$

Cociente: $-x^3 + x^2 + 2x - 4$

Resto: 5

c) $(3x^3 + 5x^2 - x) : (x + 2)$

	3	5	–1	0
–2		–6	2	–2
	3	–1	1	–2

Cociente: $3x^2 - x + 1$
Resto: –2

d) $(x^3 - 27) : (x - 3)$

	1	0	0	–27
3		3	9	27
	1	3	9	0

Cociente: $x^2 + 3x + 9$
Resto: 0

e) $(x^4 - x^2) : (x + 1)$

	1	0	–1	0	0
–1		–1	1	0	0
	1	–1	0	0	0

Cociente: $x^3 - x^2$
Resto: 0

f) $(x^5 - 2x^4 + x - 2) : (x - 1)$

	1	–2	0	0	1	–2
1		1	–1	–1	–1	0
	1	–1	–1	–1	0	–2

Cociente: $x^4 - x^3 - x^2 - x$
Resto: –2

10 **Averigua cuáles de los números 1, –1, 2, –2, 3 y –3 son raíces de los polinomios siguientes:**

$P(x) = x^3 - 7x - 6$

$Q(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$

$R(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$

$S(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$

Descomponemos en factores cada uno de los polinomios:

$P(x) = x^3 - 7x - 6$

	1	0	–7	–6
–2		–2	4	6
	1	–2	–3	0
3		3	3	
	1	1	0	

$P(x) = (x + 2)(x - 3)(x + 1)$

$Q(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$

	1	–6	–4	24
2		2	–8	–24
	1	–4	–12	0
–2		–2	12	
	1	–6	0	

$Q(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 6)$

$R(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x = x(x^3 - 2x^2 - 11x + 12)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -11 & 12 \\ 1 & & 1 & -1 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & \lfloor 0 \\ -3 & & -3 & 12 & \\ \hline & 1 & -4 & \lfloor 0 & \end{array}$$

$R(x) = x(x-1)(x+3)(x-4)$

$S(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6 = 2(x^3 - x^2 - 5x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \lfloor 0 \\ -1 & & -1 & 3 & \\ \hline & 1 & -3 & \lfloor 0 & \end{array}$$

$S(x) = 2(x+1)^2(x-3)$

Así, 1 es raíz de $R(x)$; -1 es raíz de $P(x)$ y de $S(x)$; 2 es raíz de $Q(x)$; -2 es raíz de $P(x)$ y de $Q(x)$; 3 es raíz de $P(x)$ y de $S(x)$; -3 es raíz de $R(x)$.

11 Aplica la regla de Ruffini para calcular el valor del polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 8$$

para $x = 2$, $x = -1$ y $x = -2$.

El valor de $P(x)$ cuando hacemos $x = a$ coincidirá con el resto de la división $P(x) : (x - a)$, según el teorema del resto.

$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 8$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 5 & -8 \\ 2 & & 4 & -6 & -2 \\ \hline & 2 & -3 & -1 & \lfloor -10 \end{array} \quad \rightarrow \quad P(2) = -10$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 5 & -8 \\ -1 & & -2 & 9 & -14 \\ \hline & 2 & -9 & 14 & \lfloor -22 \end{array} \quad \rightarrow \quad P(-1) = -22$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 5 & -8 \\ -2 & & -4 & 22 & -54 \\ \hline & 2 & -11 & 27 & \lfloor -62 \end{array} \quad \rightarrow \quad P(-2) = -62$$

12 Comprueba si los siguientes polinomios son divisibles por $x - 2$ y/o por $x + 1$:

a) $x^3 + 3x^2 - 10x$

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

c) $2x^3 - 5x^2 - x + 6$

d) $-x^4 + 3x^3 - 2x^2$

e) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

Para que un polinomio, $P(x)$, sea divisible por $x - 2$, el resto de la división de $P(x) : (x - 2)$ ha de ser 0, es decir, $P(2) = 0$. Análogamente, para que sea divisible por $x + 1$, debe ser $P(-1) = 0$.

a) $x^3 + 3x^2 - 10x$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -10 & 0 \\ 2 & & 2 & 10 & 0 \\ \hline & 1 & 5 & 0 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -10 & 0 \\ -1 & & -1 & -2 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & -12 & \boxed{12} \end{array}$$

$x^3 + 3x^2 - 10x$ es divisible por $x - 2$, pero no por $x + 1$.

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 8 & 14 \\ \hline & 1 & 4 & 7 & \boxed{12} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 + 2x^2 - x - 2$ es divisible por $x + 1$, pero no por $x - 2$.

c) $2x^3 - 5x^2 - x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -1 & 6 \\ 2 & & 4 & -2 & -6 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & \boxed{0} \\ -1 & & -2 & 3 & \\ \hline & 2 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$2x^3 - 5x^2 - x + 6$ es divisible por $x + 1$ y por $x - 2$.

d) $-x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(-x^2 + 3x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 3 & -2 \\ 2 & & -2 & 2 \\ \hline & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$-x^4 + 3x^3 - 2x^2$ es divisible por $x - 2$, pero no por $x + 1$.

e) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ -1 & & -1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \lfloor 0 \\ 2 & & 2 & 12 & \\ \hline & 1 & 6 & \lfloor 16 & \end{array}$$

$x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ es divisible por $x + 1$, pero no por $x - 2$.

Página 76

Factorización de polinomios

13 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

14 **Factoriza los siguientes polinomios:**

a) $x^2 - 6x - 7$

b) $x^2 + 12x + 35$

c) $4x^2 + 8x - 12$

d) $2x^3 + 2x^2 - 24x$

e) $x^4 + 9x^3 - 10x^2$

f) $3x^3 - 9x^2 - 30x$

☛ *En c) d) e) y f), saca factor común.*

a) $x^2 - 6x - 7$

Buscamos las raíces de $x^2 - 6x - 7$:

$$x^2 - 6x - 7 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} = \begin{cases} 7 \\ -1 \end{cases}$$

Por tanto, $x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1)$.

b) $x^2 + 12x + 35$

$$x^2 + 12x + 35 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2} = \frac{-12 \pm 2}{2} = \begin{cases} -7 \\ -5 \end{cases}$$

Así: $x^2 + 12x + 35 = (x + 7)(x + 5)$

c) $4x^2 + 8x - 12 = 4(x^2 + 2x - 3)$

Buscamos las raíces de $x^2 + 2x - 3$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

Por tanto, $4x^2 + 8x - 12 = 4(x + 3)(x - 1)$.

d) $2x^3 + 2x^2 - 24x = 2x(x^2 + x - 12)$

Buscamos las raíces de $x^2 + x - 12$:

$$x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

Luego, $2x^3 + 2x^2 - 24x = 2x(x-3)(x+4)$.

e) $x^4 + 9x^3 - 10x^2 = x^2(x^2 + 9x - 10)$

$$x^2 + 9x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-9 \pm 11}{2} = \begin{cases} 1 \\ -10 \end{cases}$$

Así, $x^4 + 9x^3 - 10x^2 = x^2(x-1)(x+10)$.

f) $3x^3 - 9x^2 - 30x = 3x(x^2 - 3x - 10)$

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$

Luego, $3x^3 - 9x^2 - 30x = 3x(x+2)(x-5)$.

15 **Saca factor común y utiliza los productos notables para descomponer en factores los siguientes polinomios. Di cuáles son sus raíces:**

a) $x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $x^3 - x$ **c)** $4x^4 - 81x^2$

d) $x^3 + 2x^2 + x$ **e)** $12x^3 - 27x$ **f)** $3x^2 + 30x + 75$

a) $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2$

Las raíces son: $x = 0$, $x = 3$ (raíz doble)

b) $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

Las raíces son: $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$

c) $4x^4 - 81x^2 = x^2(4x^2 - 81) = x^2(2x - 9)(2x + 9)$

Las raíces son: $x = 0$ (raíz doble), $x = \frac{9}{2}$, $x = -\frac{9}{2}$

d) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$

Las raíces son: $x = 0$, $x = -1$ (raíz doble)

e) $12x^3 - 27x = 3x(4x^2 - 9) = 3x(2x-3)(2x+3)$

Las raíces son: $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$

f) $3x^2 + 30x + 75 = 3(x^2 + 10x + 25) = 3(x+5)^2$

La raíz es: $x = -5$ (raíz doble)

16 **Descompón en factores y di cuáles son sus raíces:**

a) $x^4 - x^2$ b) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$ c) $2x^3 - 3x^2$

d) $x^3 - x^2 - 12x$ e) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ f) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$

a) $x^4 - x^2 = 0$

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \text{ (raíz doble)} \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

b) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 4 & 12 \\ -3 & & -3 & 0 & -12 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = (x + 3)(x^2 + 4) = 0 \;\rightarrow\; x = -3 \text{ es su raíz}$$

c) $2x^3 - 3x^2 = 0$

$$x^2(2x - 3) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \text{ (raíz doble)} \\ x = 3/2 \end{cases}$$

d) $x^3 - x^2 - 12x = 0$

$$x^3 - x^2 - 12x = x(x^2 - x - 12) = x(x - 4)(x + 3) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

e) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 14 & -8 \\ 2 & & 2 & -10 & 8 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & -4 & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x - 2)(x - 1)(x - 4) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

f) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 4 & -4 & 3 \\ 1 & & 1 & -3 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ 3 & & 3 & 0 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)(x^2 + 1) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

17 **Factoriza los polinomios siguientes:**

a) $3x^2 + 2x - 8$

b) $4x^2 + 17x + 15$

c) $2x^2 - 9x - 5$

d) $-x^2 + 17x - 72$

a) $3x^2 + 2x - 8$

$$3x^2 + 2x - 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{6} =$$

$$= \frac{-2 \pm 10}{2} = \begin{cases} -2 \\ \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Luego, $3x^2 + 2x - 8 = 3\left(x - \dfrac{4}{3}\right) \cdot (x + 2) = (3x - 4)(x + 2)$.

b) $4x^2 + 17x + 15$

$$4x^2 + 17x + 15 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 240}}{8} = \frac{-17 \pm \sqrt{49}}{8} =$$

$$= \frac{-17 \pm 7}{8} = \begin{cases} -3 \\ \dfrac{-10}{8} = \dfrac{-5}{4} \end{cases}$$

Luego, $4x^2 + 17x + 15 = 4(x + 3)\left(x + \dfrac{5}{4}\right) = (x + 3)(4x + 5)$.

c) $2x^2 - 9x - 5$

$$2x^2 - 9x - 5 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{4} =$$

$$= \frac{9 \pm 11}{4} = \begin{cases} 5 \\ \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, $2x^2 - 9x - 5 = 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x - 5) = (2x + 1)(x - 5)$.

d) $-x^2 + 17x - 72$

$$-x^2 + 17x - 72 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 288}}{-2} = \frac{-17 \pm 1}{-2} = \begin{cases} 9 \\ 8 \end{cases}$$

Así, $-x^2 + 17x - 72 = -(x - 9)(x - 8) = (9 - x)(x - 8)$

18 **Descompón en factores:**

a) $x^3 - x^2 + 4x - 4$ b) $x^3 - x - 6$ c) $3x^4 + 15x^2$ d) $x^4 - 1$

a) $$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + 4x - 4 & x - 1 \\ x^2 + 4 & x^2 + 4 \\ 1 & \end{array}$$ $x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x^2 + 4)$

b) $$\begin{array}{r|l} x^3 - x - 6 & x - 2 \\ x^2 + 2x + 3 & x^2 + 2x + 3 \\ 1 & \end{array}$$ $x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$

c) $$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 15x^2 & 3x^2 \\ x^2 + 5 & x^2 + 5 \\ 1 & \end{array}$$ $3x^4 + 15x^2 = 3x^2(x^2 + 5)$

d) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

Fracciones algebraicas

19 **Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:**

a) $\dfrac{x-3}{2x-6}$ y $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{x^2}{x^2+x}$ y $\dfrac{1}{x}$

c) $\dfrac{x}{x^2-x}$ y $\dfrac{2}{2x-2}$ d) $\dfrac{3x-2}{9x^2-4}$ y $\dfrac{1}{3x+2}$

a) $\dfrac{x-3}{2x-6}$ y $\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{x-3}{2x-6} = \dfrac{x-3}{2(x-3)} = \dfrac{1}{2}$ → Las fracciones son equivalentes.

b) $\dfrac{x^2}{x^2+x}$ y $\dfrac{1}{x}$

$\dfrac{x^2}{x^2+x} = \dfrac{x^2}{x(x+1)} = \dfrac{x}{x+1}$ → No son equivalentes.

c) $\dfrac{x}{x^2-x}$ y $\dfrac{2}{2x-2}$

$\dfrac{x}{x^2-x} = \dfrac{x}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$

$\dfrac{2}{2x-2} = \dfrac{2}{2(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$

Ambas fracciones son equivalentes.

d) $\frac{3x-2}{9x^2-4}$ y $\frac{1}{3x+2}$

$\frac{3x-2}{9x^2-4} = \frac{3x-2}{(3x+2)(3x-2)} = \frac{1}{3x+2}$ → Ambas fracciones son equivalentes.

20 Calcula:

a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x}$

b) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$

c) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$

d) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} = \frac{6}{6x} - \frac{3}{6x} - \frac{2}{6x} = \frac{1}{6x}$

b) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{2}{2x^2} - \frac{2x}{2x^2} + \frac{x}{2x^2} = \frac{2-x}{2x^2}$

c) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}$

d) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{(x-2)(x+2)}$

21 Saca factor común y luego simplifica:

a) $\frac{15x+15}{10x+10}$

b) $\frac{x+3}{2x+6}$

c) $\frac{x^2-x}{x^2}$

a) $\frac{15x+15}{10x+10} = \frac{15(x+1)}{10(x+1)} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

b) $\frac{x+3}{2x+6} = \frac{x+3}{2(x+3)} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{x^2-x}{x^2} = \frac{x(x-1)}{x^2} = \frac{x-1}{x}$

22 Recuerda los productos notables, descompón en factores y simplifica:

a) $\frac{x^2-1}{x+1}$

b) $\frac{x^2-4}{(x+2)^2}$

c) $\frac{9x^2-4}{3x-2}$

d) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$

e) $\frac{x^2-25}{x^2+25-10x}$

f) $\frac{x(x+1)}{x^2+2x+1}$

g) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

h) $\frac{x^2-1}{x^4-1}$

a) $\dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$

b) $\dfrac{x^2-4}{(x+2)^2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2} = \dfrac{x-2}{x+2}$

c) $\dfrac{9x^2-4}{3x-2} = \dfrac{(3x+2)(3x-2)}{3x-2} = 3x+2$

d) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9} = \dfrac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{x+3}{x-3}$

e) $\dfrac{x^2-25}{x^2+25-10x} = \dfrac{(x+5)(x-5)}{(x-5)^2} = \dfrac{x+5}{x-5}$

f) $\dfrac{x(x+1)}{x^2+2x+1} = \dfrac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x}{x+1}$

g) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x-3}{x+2}$

h) $\dfrac{x^2-1}{x^4-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{x^2+1}$

23 **a) Simplifica las fracciones:** $A = \dfrac{x-2}{x^2+x-6}$ $\quad B = \dfrac{x^2-3x}{2x}$

b) Calcula $A - B$ **después de simplificar.**

a) $\dfrac{x-2}{x^2+x-6} = \dfrac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{1}{x+3}$

$\dfrac{x^2-3x}{2x} = \dfrac{x(x-3)}{2x} = \dfrac{x-3}{2}$

b) $A-B = \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{2}{2(x+3)} - \dfrac{(x-3)(x+3)}{2(x+3)} =$

$= \dfrac{2-x^2+9}{2(x+3)} = \dfrac{11-x^2}{2(x+3)}$

24 **Efectúa:**

a) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{x} + 1$

b) $\dfrac{x-2}{3} \cdot \dfrac{x+2}{3}$

c) $\dfrac{1}{x-1} : \dfrac{x+1}{x}$

d) $\dfrac{x+2}{3x^2} - \dfrac{1}{6x}$

a) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{x} + 1 = \dfrac{x^2}{3x} - \dfrac{6}{3x} + \dfrac{3x}{3x} = \dfrac{x^2+3x-6}{3x}$

b) $\dfrac{x-2}{3} \cdot \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{9} = \dfrac{x^2-4}{9}$

c) $\dfrac{1}{x-1} : \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x}{x^2-1}$

d) $\dfrac{x+2}{3x^2} - \dfrac{1}{6x} = \dfrac{2(x+2)}{6x^2} - \dfrac{x}{6x^2} = \dfrac{2x+4-x}{6x^2} = \dfrac{x+4}{6x^2}$

25 **Efectúa:**

a) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{3}{x}$ b) $\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{x+2}{5x}$ c) $\dfrac{x-2}{x+3} - \dfrac{2}{3x}$ d) $\dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3x-1}{x+1}$

a) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{x^2}{x(x-1)} + \dfrac{3(x-1)}{x(x-1)} = \dfrac{x^2+3x-3}{x^2-x}$

b) $\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{x+2}{5x} = \dfrac{15}{5x^2} - \dfrac{x(x+2)}{5x^2} = \dfrac{15-x^2-2x}{5x^2}$

c) $\dfrac{x-2}{x+3} - \dfrac{2}{3x} = \dfrac{3x(x-2)}{3x(x+3)} - \dfrac{2(x+3)}{3x(x+3)} = \dfrac{3x^2-6x-2x-6}{3x(x+3)} = \dfrac{3x^2-8x-6}{3x^2+9x}$

d) $\dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3x-1}{x+1} = \dfrac{5(x+1)}{x^2(x+1)} - \dfrac{(3x-1)x^2}{x^2(x+1)} = \dfrac{5x+5-3x^3+x^2}{x^2(x+1)} =$

$= \dfrac{-3x^3+x^2+5x+5}{x^3+x^2}$

Página 77

PIENSA Y RESUELVE

26 **Di cuáles son las raíces de los polinomios siguientes:**

a) $P(x) = (x+5)^2(2x-3)x$ b) $R(x) = 3x(x^2+5)$

c) $Q(x) = (x-2)(x^2+1)$ d) $S(x) = 2x^2(x-7)$

a) $P(x) = (x+5)^2(2x-3)x$

$x = -5$ (raíz doble), $x = \dfrac{3}{2}$, $x = 0$

b) $R(x) = 3x(x^2+5)$

$x = 0$

c) $Q(x) = (x-2)(x^2+1)$

$x = 2$

d) $S(x) = 2x^2(x-7)$

$x = 0$ (raíz doble), $x = 7$

27 **Descompón en factores el dividendo y el divisor, y después simplifica:**

a) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$ b) $\dfrac{x^2-3x+4}{x^3+x^2}$ c) $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6}$ d) $\dfrac{x^2-x+48}{x^2-8x+7}$

a) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}=\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{x}{x-3}$

b) $\dfrac{x^2-3x+4}{x^3+x^2}$ $\to$ No se puede simplificar, ya que el numerador no se puede descomponer en factores de menor grado.

c) $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6}=\dfrac{x(x-2)(x-1)}{3(x-2)(x-1)}=\dfrac{x}{3}$

d) $\dfrac{x^2-x+48}{x^2-8x+7}$ $\to$ No se puede simplificar, ya que el numerador no se puede descomponer en factores de menor grado.

28 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

29 **Opera y simplifica:**

a) $\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{3}\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\right)$ b) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{x^2-1}{x}$ c) $\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right):\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)$

d) $\dfrac{2}{x}\cdot\left(\dfrac{1}{x}:\dfrac{1}{x-1}\right)$ e) $\left(\dfrac{x-1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x-4}\right)\cdot 2x^2$

a) $\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{3}\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{9-x^2}{3x}:\dfrac{3+x}{3x}=\dfrac{9-x^2}{3+x}=\dfrac{(3-x)(3+x)}{3+x}=3-x$

b) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{(x+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)^2\cdot x}=\dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

c) $\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right):\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=\left(\dfrac{x^2+1}{x}:\dfrac{x^2-1}{x}\right)\cdot(x-1)=$

$=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\cdot(x-1)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

d) $\dfrac{2}{x}\cdot\left(\dfrac{1}{x}:\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{2(x-1)}{x^2}$

e) $\left(\dfrac{x-1}{x^2}+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x-4}\right)\cdot 2x^2=\dfrac{(x-1)(x-4)+3(x-4)x-5x^2}{x^2(x-4)}\cdot 2x^2=$

$=\dfrac{x^2-5x+4+3x^2-12x-5x^2}{(x-4)}\cdot 2=$

$=\dfrac{2(-x^2-17x+4)}{(x-4)}$

30 **Sustituye, en cada caso, los puntos suspensivos por la expresión adecuada para que las fracciones sean equivalentes:**

a) $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \dfrac{\dots}{x + 1}$ b) $\dfrac{x}{2x + 1} = \dfrac{x^2}{\dots}$

c) $\dfrac{x}{x - 3} = \dfrac{\dots}{x^2 - 9}$ d) $\dfrac{2}{x + 2} = \dfrac{\dots}{x^2 + 4x + 4}$

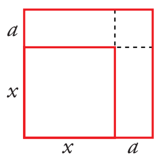
a) $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \dfrac{x(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \dfrac{x}{x + 1}$

b) $\dfrac{x}{2x + 1} = \dfrac{x^2}{2x^2 + x}$

c) $\dfrac{x}{x - 3} = \dfrac{x(x + 3)}{x^2 - 9} = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$

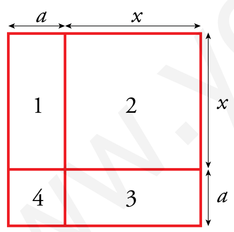
d) $\dfrac{2}{x + 2} = \dfrac{2(x + 2)}{x^2 + 4x + 4} = \dfrac{2x + 4}{x^2 + 4x + 4}$

31 **El lado x de un cuadrado aumenta en a cm y formamos un nuevo cuadrado.**



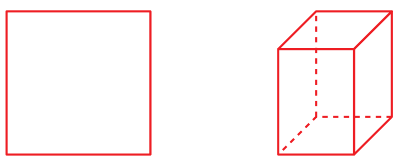
Suma las áreas de los rectángulos y cuadrados de la figura y comprueba que obtienes el área del cuadrado de lado $x + a$.

Área del cuadrado de lado $(x + a) = (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = A$



$$\left.\begin{array}{l} A_1 = a \cdot x \\ A_2 = x^2 \\ A_3 = a \cdot x \\ A_4 = a^2 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \\ = ax + x^2 + ax + a^2 = 2ax + a^2 + x^2 = A \end{array}$$

32 **Con un cuadrado de lado x formamos un prisma de base cuadrada, pero sin bases.**

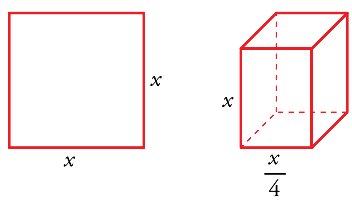


a) Escribe el área total del prisma en función de x.

b) Escribe su volumen en función de x.

a) $A_p = 4 \cdot x \cdot \dfrac{x}{4} = x^2$

b) $V_p = x \cdot \dfrac{x}{4} \cdot \dfrac{x}{4} = \dfrac{x^3}{16}$



33 **Traduce a lenguaje algebraico empleando una sola incógnita:**

a) El cociente entre un número y su siguiente.

b) El cociente entre dos números pares consecutivos.

c) Un número menos su inverso.

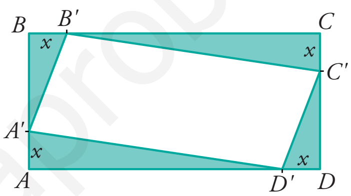
d) El inverso de un número más el inverso del doble de ese número.

e) La suma de los inversos de dos números consecutivos.

a) $\frac{x}{x+1}$ b) $\frac{2x}{2x+2}$ c) $x - \frac{1}{x}$ d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$ e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$

34 **En el rectángulo $ABCD$ hemos señalado los puntos A', B', C', D', de modo que: $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = x$**

Expresa el área del cuadrilátero $A'B'C'D'$ mediante un polinomio en x, sabiendo que $\overline{AB} = 3$ cm y $\overline{BC} = 5$ cm.



Sabiendo que $\overline{AD'} = \overline{B'C} = 5 - x$ y $\overline{A'B} = \overline{C'D} = 3 - x$, se tendrá:

El área del triángulo $B'CC'$ es $\frac{x(5-x)}{2}$.

El área del triángulo $A'AD'$ es $\frac{x(5-x)}{2}$.

El área del triángulo $B'BA'$ es $\frac{x(3-x)}{2}$.

El área del triángulo $D'DC'$ es $\frac{x(3-x)}{2}$.

El área del rectángulo $ABCD$ es $3 \cdot 5 = 15$ cm^2.

$$A_{\text{paralelogramo}} = 15 - \left[2 \cdot \frac{x(5-x)}{2} + 2 \cdot \frac{x(3-x)}{2}\right] =$$

$$= 15 - [x(5-x) + x(3-x)] = 15 - (-2x^2 + 8x) = 2x^2 - 8x + 15$$

35 **Comprueba que al reducir la expresión $\frac{m+1}{2m} + \frac{m+4}{4m} - \frac{2m+9}{6m}$ obtienes una fracción numérica.**

$$\frac{m+1}{2m} + \frac{m+4}{4m} - \frac{2m+9}{6m} = \frac{6(m+1)}{12m} + \frac{3(m+4)}{12m} - \frac{2(2m+9)}{12m} =$$

$$= \frac{6m + 6 + 3m + 12 - 4m - 18}{12m} = \frac{5m}{12m} = \frac{5}{12}$$

Página 78

36 **Halla, en cada caso, el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los polinomios siguientes:**

a) x^2 ; $x^2 - x$; $x^2 - 1$

b) $x - 3$; $x^2 - 9$; $x^2 - 6x + 9$

c) $x + 2$; $3x + 6$; $x^2 + x - 2$

d) $2x$; $2x + 1$; $4x^2 - 1$

a) $$\left.\begin{array}{l} x^2 \\ x^2 - x = x(x-1) \\ x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \end{array}\right\}$$

M.C.D. $[x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = 1$

m.c.m. $[x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = x^2(x-1)(x+1)$

b) $$\left.\begin{array}{l} x - 3 \\ x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \\ x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \end{array}\right\}$$

M.C.D. $[x - 3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = x - 3$

m.c.m. $[x - 3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = (x-3)^2(x+3)$

c) $$\left.\begin{array}{l} x + 2 \\ 3x + 6 = 3(x+2) \\ x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) \end{array}\right\}$$

M.C.D. $[x + 2, 3x + 6, x^2 + x - 2] = x + 2$

m.c.m. $[x + 2, 3x + 6, x^2 + x - 2] = 3(x+2)(x-1)$

d) $$\left.\begin{array}{l} 2x \\ 2x + 1 \\ 4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1) \end{array}\right\}$$

M.C.D. $[2x, 2x + 1, 4x^2 - 1] = 1$

m.c.m. $[2x, 2x + 1, 4x^2 - 1] = 2x(4x^2 - 1)$

37 **Efectúa:**

a) $\dfrac{x-2}{x^2} + \dfrac{x+2}{x^2 - x} - \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{x+1}{x^2-9} + \dfrac{2}{x^2 - 6x + 9}$

c) $\dfrac{2x}{x^2 + x - 2} - \dfrac{5}{x+2} - \dfrac{x-4}{3x+6}$

d) $\dfrac{x+2}{2x+1} - \dfrac{2}{4x^2 - 1} + \dfrac{x+1}{2x}$

En todos los apartados, el mínimo común múltiplo de los denominadores ha sido calculado en el ejercicio anterior.

a) $\dfrac{x-2}{x^2} + \dfrac{x+2}{x^2-x} - \dfrac{1}{x^2-1} =$

$= \dfrac{(x-2)(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)} + \dfrac{(x+2)(x+1)x}{x^2(x-1)(x+1)} - \dfrac{x^2}{x^2(x-1)(x+1)} =$

$= \dfrac{(x-2)(x^2-1) + (x+2)(x^2+x) - x^2}{x^2(x^2-1)} =$

$= \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2 + x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x - x^2}{x^2(x^2-1)} = \dfrac{2x^3 + x + 2}{x^2(x^2-1)} = \dfrac{2x^3+x+2}{x^4-x^2}$

b) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{x+1}{x^2-9} + \dfrac{2}{x^2-6x+9} =$

$= \dfrac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)} - \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} - \dfrac{2(x+3)}{(x-3)^2(x+3)} =$

$= \dfrac{x(x^2-9) - (x+1)(x-3) - 2(x+3)}{(x-3)^2(x+3)} = \dfrac{x^3 - 9x - x^2 + 2x + 3 - 2x - 6}{(x-3)^2(x+3)} =$

$= \dfrac{x^3 - x^2 - 9x - 3}{(x-3)^2(x+3)}$

c) $\dfrac{2x}{x^2+x-2} - \dfrac{5}{x+2} - \dfrac{x-4}{3x+6} =$

$= \dfrac{6x}{3(x+2)(x-1)} - \dfrac{15(x-1)}{3(x+2)(x-1)} - \dfrac{(x-4)(x-1)}{3(x+2)(x-1)} =$

$= \dfrac{6x - 15x + 15 - x^2 + 5x - 4}{3(x+2)(x-1)} = \dfrac{-x^2 - 4x + 11}{3(x+2)(x-1)}$

d) $\dfrac{x+2}{2x+1} - \dfrac{2}{4x^2-1} + \dfrac{x+1}{2x} =$

$= \dfrac{2x(x+2)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} - \dfrac{4x}{2x(2x+1)(2x-1)} + \dfrac{(x+1)(2x+1)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} =$

$= \dfrac{(2x^2+4x)(2x-1) - 4x + (x+1)(4x^2-1)}{2x(4x^2-1)} =$

$= \dfrac{4x^3 + 8x^2 - 2x^2 - 4x - 4x + 4x^3 + 4x^2 - x - 1}{2x(4x^2-1)} = \dfrac{8x^3 + 10x^2 - 9x - 1}{2x(4x^2-1)}$

38 **Opera y simplifica:**

a) $\left(1 - \dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{x^2}{x+3} - 1$ b) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+3}\right) : \dfrac{3}{x^2}$ c) $4 - \dfrac{1}{2x-1}\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

a) $\left(1 - \dfrac{x-1}{x}\right) \cdot \dfrac{x^2}{x+3} - 1 = \left(\dfrac{x-x+1}{x}\right) \cdot \dfrac{x^2}{x+3} - 1 = \dfrac{x^2}{x(x+3)} - 1 =$

$= \dfrac{x^2 - x(x+3)}{x(x+3)} = \dfrac{x^2 - x^2 - 3x}{x(x+3)} = \dfrac{-3x}{x(x+3)} = \dfrac{-3x}{x+3}$

b) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+3}\right) : \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{x+3-x}{x(x+3)} : \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{3}{x(x+3)} : \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{x^2}{x(x+3)} = \dfrac{x}{x+3}$

c) $4 - \dfrac{1}{2x-1} \cdot \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = 4 - \dfrac{1}{2x-1} \cdot \dfrac{2x-1}{x^2} = 4 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{4x^2-1}{x^2}$

39 Efectúa:

a) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{x-2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2}{x^2-2x+1} + \dfrac{2x+3}{x-1} - 3$

c) $\dfrac{2x-3}{x^2-9} - \dfrac{x+1}{x-3} - \dfrac{x+2}{x+3}$

a) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{x-2}{x^2-1} = \dfrac{(x+1)^2}{x^2-1} + \dfrac{3(x-1)}{x^2-1} - \dfrac{x-2}{x^2-1} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x + 1 + 3x - 3 - x + 2}{x^2-1} = \dfrac{x^2+4x}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2}{x^2-2x+1} + \dfrac{2x+3}{x-1} - 3 = \dfrac{x^2}{(x-1)^2} + \dfrac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)^2} - \dfrac{3(x-1)^2}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x^2 + 3x - 2x - 3 - 3(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{7x-6}{(x-1)^2}$

c) $\dfrac{2x-3}{x^2-9} - \dfrac{x+1}{x-3} - \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{2x-3}{x^2-9} - \dfrac{(x+1)(x+3)}{x^2-9} - \dfrac{(x+2)(x-3)}{x^2-9} =$

$= \dfrac{2x - 3 - x^2 - 4x - 3 - x^2 + x + 6}{x^2-9} = \dfrac{-2x^2-x}{x^2-9}$

40 Factoriza los polinomios siguientes:

a) $2x^2 - 5x + 2$

b) $3x^2 + x - 2$

c) $4x^2 + 11x - 3$

a) $2x^2 - 5x + 2$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Así, $2x^2 - 5x + 2 = 2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x-1)$.

b) $3x^2 + x - 2$

$$3x^2 + x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} = \begin{cases} -1 \\ \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Por tanto, $3x^2 + x - 2 = 3(x+1)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x+1)(3x-2)$.

c) $4x^2 + 11x - 3$

$$4x^2 + 11x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-11 \pm \sqrt{121+48}}{8} = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{8} =$$

$$= \frac{-11 \pm 13}{8} = \begin{cases} -3 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

Luego, $4x^2 + 11x - 3 = 4(x+3)\left(x - \frac{1}{4}\right) = (x+3)(4x-1)$.

41 **En una división conocemos el divisor, $D(x)$, el cociente, $C(x)$, y el resto, $R(x)$: $D(x) = x^2 - 3x$; $C(x) = 3x + 2$; $R(x) = -5x$. Calcula el dividendo.**

$D(x) = x^2 - 3x$ $\quad C(x) = 3x + 2$ $\quad R(x) = -5x$

Llamamos $P(x)$ al polinomio dividendo; se ha de cumplir, pues:

$$P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$P(x) = (x^2 - 3x) \cdot (3x + 2) - 5x = 3x^3 + 2x^2 - 9x^2 - 6x - 5x$

$P(x) = 3x^3 - 7x^2 - 11x$

42 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

43 **Calcula m para que el polinomio $P(x) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$ sea divisible por $x + 1$.**

$P(x) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$ será divisible por $x + 1$ si $P(-1) = 0$.

$P(-1) = (-1)^3 - m(-1)^2 + 5(-1) - 2 = 0$

$-1 - m - 5 - 2 = 0 \;\rightarrow\; m = -8$

44 El resto de la siguiente división es igual a –8:

$$(2x^4 + kx^3 - 7x + 6) : (x - 2)$$

¿Cuánto vale k?

Llamamos $P(x) = 2x^4 + kx^3 - 7x + 6$

El resto de la división $P(x) : (x - 2)$ es $P(2)$, luego:

$P(2) = -8 \;\to\; 2 \cdot 2^4 + k \cdot 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = -8 \;\to$

$\to\; 32 + 8k - 14 + 6 = -8 \;\to\; 8k = -32 \;\to\; k = -4$

45 Halla el valor que debe tener m para que el polinomio $mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$ sea divisible por $x + 2$.

Llamamos $P(x) = mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$; dicho polinomio ha de ser divisible por $x + 2$, luego el resto ha de ser 0:

$P(-2) = 0 \;\to\; m(-2)^3 - 3(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 9m = 0 \;\to$

$\to\; -8m - 12 - 10 + 9m = 0 \;\to\; m = 22$

46 Calcula el valor de k para que el cociente de la división:

$$(x^3 - x^2 + kx - 1) : (x - 1)$$

sea igual a $x^2 + 1$. ¿Cuál será el resto?

Por Ruffini, calculamos el cociente:

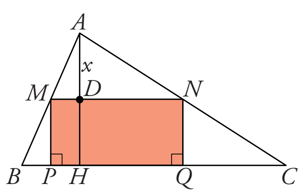
	1	–1	k	–1
1		1	0	k
	1	0	k	$k - 1$

El cociente de la división es $x^2 + k$, que ha de ser igual a $x^2 + 1 \;\to\; k = 1$

El resto será $k - 1 = 0$.

47 En el triángulo de la figura conocemos:

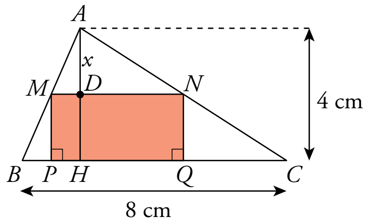
$$\overline{BC} = 8 \text{ cm} \qquad \overline{AH} = 4 \text{ cm}$$



Por un punto D de la altura, tal que $\overline{AD} = x$, se traza una paralela MN a BC. Desde M y N se trazan perpendiculares a BC.

a) Expresa $\overline{MN}$ en función de x. (Utiliza la semejanza de los triángulos AMN y ABC).

b) Escribe el área del rectángulo $MNPQ$ mediante un polinomio en x.



a) Por la semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BD}}{x} \;\rightarrow\; \overline{MN} = \frac{\overline{BC} \cdot x}{\overline{AH}} \;\rightarrow\; \overline{MN} = \frac{8 \cdot x}{4} \;\rightarrow\; \overline{MN} = 2x$$

b) $\overline{MP} = 4 - x$

$$A_{\text{rectángulo}} = \overline{MN} \cdot \overline{MP} = 2x(4 - x) = 8x - 2x^2$$

48 **Simplifica esta expresión:** $\left(1 - \dfrac{a}{a-b}\right) \dfrac{a-b}{b^2}$

$$\left(1 - \frac{a}{a-b}\right) \cdot \frac{a-b}{b^2} = \frac{a-b-a}{a-b} \cdot \frac{a-b}{b^2} = \frac{-b(a-b)}{(a-b)\,b^2} = \frac{-1}{b}$$

Página 79

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

49 **Escribe, en cada caso, un polinomio de segundo grado que tenga por raíces los números dados:**

a) 5 y –5 **b)** 0 y 4 **c)** 2 y 3 **d)** –6 y 1

a) $P(x) = (x-5)(x+5) \;\rightarrow\; P(x) = x^2 - 25$

b) $Q(x) = x(x-4) \;\rightarrow\; Q(x) = x^2 - 4x$

c) $R(x) = (x-2)(x-3) \;\rightarrow\; R(x) = x^2 - 5x + 6$

d) $S(x) = (x+6)(x-1) \;\rightarrow\; S(x) = x^2 + 5x - 6$

50 **Escribe un polinomio de segundo grado que tenga solo la raíz 3.**

Para que un polinomio de 2º grado tenga solo la raíz 3, esta ha de ser doble, luego: $P(x) = (x-3)^2 \;\rightarrow\; P(x) = x^2 - 6x + 9$

51 **Escribe un polinomio de segundo grado que no tenga raíces.**

Por ejemplo, $P(x) = 5x^2 + x + 3$ o $P(x) = x^2 + 4$

52 **Escribe un polinomio que tenga por raíces los números 2, 3 y –1.**

$P(x) = (x-2)(x-3)(x+1) \;\rightarrow\; P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

53 **Escribe un polinomio de tercer grado que solo tenga una raíz.**

Tomamos un polinomio de segundo grando que no tenga raíces y lo multiplicamos por otro de grado uno, $x - a$. Por ejemplo: $x^2 + 1$ y $x - 8$.

$P(x) = (x^2 + 1)(x - 8) = x^3 - 8x^2 + x - 8$

54 **Inventa dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, que verifiquen la siguiente condición: m.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^2(x - 3)(x + 2)$**

Para que el m.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^2(x - 3)(x + 2)$, basta tomar $P(x) = x(x - 3)$ y $Q(x) = x^2(x + 2)$, por ejemplo.

55 **Inventa dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, que verifiquen la siguiente condición: M.C.D. $[P(x), Q(x)] = x^2 - 4$**

Para que el M.C.D. $[P(x), Q(x)] = x^2 - 4$, se pueden considerar, por ejemplo, $P(x) = (x - 2)^2(x + 2)$ y $Q(x) = x(x - 2)(x + 2)$.

56 **Escribe tres polinomios de segundo grado que verifiquen, en cada caso, las condiciones que aparecen:**

$P(3) = 0$ [3 es raíz de $P(x)$]; $P(5) = 6$

$Q(-4) = 0$ [-4 es raíz de $Q(x)$]; $Q(-2) = -8$

$S(-2) = 0$ [-2 es raíz de $S(x)$]; $S(0) = -2$

$P(x) = (x - 3)(x + a)$ por ser 3 raíz de $P(x)$

$P(5) = (5 - 3)(5 + a) = 6 \rightarrow 2(5 + a) = 6 \rightarrow 5 + a = 3 \rightarrow a = -2$

$P(x) = (x - 3)(x - 2) = x^2 - 5x + 6$

$Q(x) = (x + 4)(x + b)$ por ser -4 raíz de $Q(x)$

$Q(-2) = (-2 + 4)(-2 + b) = -8 \rightarrow 2(b - 2) = -8 \rightarrow b - 2 = -4 \rightarrow b = -2$

$Q(x) = (x + 4)(x - 2) = x^2 + 2x - 8$

De la misma manera, por ser -2 raíz de $S(x)$, este polinomio ha de ser de la forma $S(x) = (x + 2)(x + c)$:

$S(0) = -2 \rightarrow 2c = -2 \rightarrow c = -1 \rightarrow S(x) = (x + 2)(x - 1) \rightarrow$

$\rightarrow S(x) = x^2 + x - 2$

57 **a) Si la división $P(x) : (x - 2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar del valor $P(2)$?**

b) Si -5 es una raíz del polinomio $P(x)$, ¿qué puedes afirmar de la división $P(x) : (x + 5)$?

c) ¿En qué resultado te has basado para responder a las dos preguntas anteriores?

a) Si la división es exacta, el resto es 0, luego $P(2) = 0$.

b) La división $P(x) : (x + 5)$ es exacta, el resto es 0.

c) En el teorema del resto.

58 **El polinomio $x^2 - 3x + 4$, ¿se puede descomponer en factores? Responde razonadamente.**

Buscamos las raíces del polinomio $x^2 - 3x + 4$ resolviendo la ecuación:

$x^2 - 3x + 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$ no tiene solución real.

El polinomio $x^2 - 3x + 4$ es irreducible, no se puede descomponer en factores.

PROFUNDIZA

59 **Prueba que la siguiente igualdad es verdadera:**

$$\frac{1}{ab} + \frac{a}{b} - \frac{1 + (a+b)^2}{ab} + \frac{b}{a} = -2$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{a}{b} - \frac{1 + (a+b)^2}{ab} + \frac{b}{a} = \frac{1 + a^2 - 1 - (a+b)^2 + b^2}{ab} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab}{ab} = \frac{-2ab}{ab} = -2$$

60 **Efectúa y simplifica:**

a) $\dfrac{x - 2y}{y} + \dfrac{y + 3x}{x} - 3$ b) $\dfrac{x^2 + y^2}{2xy} - \dfrac{x + y}{x} - \dfrac{x - y}{y} + \dfrac{x}{2y}$

a) $\dfrac{x - 2y}{y} + \dfrac{y + 3x}{x} - 3 = \dfrac{x(x - 2y) + y(y + 3x) - 3xy}{xy} =$

$$= \frac{x^2 - 2xy + y^2 + 3xy - 3xy}{xy} =$$

$$= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} = \frac{(x - y)^2}{xy}$$

b) $\dfrac{x^2 + y^2}{2xy} - \dfrac{x + y}{x} - \dfrac{x - y}{y} + \dfrac{x}{2y} = \dfrac{x^2 + y^2 - 2y(x + y) - 2x(x - y) + x^2}{2xy} =$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 2yx - 2y^2 - 2x^2 + 2xy + x^2}{2xy} =$$

$$= \frac{-y^2}{2xy} = \frac{-y}{2x}$$

61 **Saca factor común en las siguientes expresiones:**

a) $(x + 5)(2x - 1) + (x - 5)(2x - 1)$ b) $(3 - y)(a + b) - (a - b)(3 - y)$

☛ *El factor común es un binomio.*

a) $(x + 5)(2x - 1) + (x - 5)(2x - 1) = (2x - 1)(x + 5 + x - 5) = (2x - 1) \cdot 2x$

b) $(3 - y)(a + b) - (a - b)(3 - y) = (3 - y)[(a + b) - (a - b)] =$
$= (3 - y)(a + b - a + b) = 2b(3 - y)$

62 **Factoriza las siguientes expresiones:**

a) $ax - ay + bx - by$

b) $2x^2y + y + 2x^2 + 1$

c) $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2$

d) $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1$

a) $ax - ay + bx - by = a(x - y) + b(x - y) = (a + b)(x - y)$

b) $2x^2y + y + 2x^2 + 1 = 2x^2(y + 1) + (y + 1) = (2x^2 + 1)(y + 1)$

c) $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2 = 3x^2y + 3xy^2 + xy + y^2 = 3xy(x + y) + y(x + y) =$
$= (3xy + y)(x + y) = y(3x + 1)(x + y)$

d) $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1 = 2ab^3 + 2b^2 - (ab + 1) = 2b^2(ab + 1) - (ab + 1) =$
$= (2b^2 - 1)(ab + 1) = (\sqrt{2}\, b - 1)(\sqrt{2}\, b + 1)(ab + 1)$

63 **Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:**

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$

b) $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$

c) $\dfrac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{2abx + 2a^2b + 4b^2}$

d) $\dfrac{x^3 + 2x^2y - 2x^2 - 4xy + y^2x - 2y^2}{y^3 + 2xy^2 + 3y^2 + 6xy + x^2y + 3x^2}$

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \dfrac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \dfrac{xy}{5}$

b) $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \dfrac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \dfrac{b}{a}$

c) $\dfrac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{2abx + 2a^2b + 4b^2} = \dfrac{2a^2b(2b - x)}{2b(ax + a^2 + 2b)} = \dfrac{a^2(2b - x)}{ax + a^2 + 2b}$

d) $\dfrac{x^3 + 2x^2y - 2x^2 - 4xy + y^2x - 2y^2}{y^3 + 2xy^2 + 3y^2 + 6xy + x^2y + 3x^2} = \dfrac{x^3 + 2x^2y + y^2x - 2(x^2 + 2xy + y^2)}{y^3 + 2xy^2 + x^2y + 3(x^2 + 2xy + y^2)} =$

$= \dfrac{x(x^2 + 2xy + y^2) - 2(x^2 + 2xy + y^2)}{y(y^2 + 2xy + x^2) + 3(x^2 + 2xy + y^2)} =$

$= \dfrac{(x - 2)(x^2 + 2xy + y^2)}{(y + 3)(x^2 + 2xy + y^2)} = \dfrac{x - 2}{y + 3}$

64 **Opera y simplifica:**

a) $\dfrac{2a}{a-3b} - \dfrac{3b}{a+3b} - \dfrac{a^2+3ab+18b^2}{a^2-9b^2}$

b) $\dfrac{bx-b}{x+1} + \dfrac{3bx}{x-1} + \dfrac{3bx^2+bx+2b}{1-x^2}$

c) $\left(\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}\right)\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$

d) $\left(1-\dfrac{x-y}{x+y}\right) : \left(\dfrac{x-y}{x+y} - \dfrac{x+y}{x-y}\right)$

a) $\dfrac{2a}{a-3b} - \dfrac{3b}{a+3b} - \dfrac{a^2+3ab+18b^2}{a^2-9b^2} =$

$= \dfrac{2a(a+3b)-3b(a-3b)-(a^2+3ab+18b^2)}{a^2-9b^2} =$

$= \dfrac{2a^2+6ab-3ab+9b^2-a^2-3ab-18b^2}{a^2-9b^2} = \dfrac{a^2-9b^2}{a^2-9b^2} = 1$

b) $\dfrac{bx-b}{x+1} + \dfrac{3bx}{x-1} + \dfrac{3bx^2+bx+2b}{1-x^2} =$

$= \dfrac{b(x-1)(x-1)+3bx(x+1)-(3bx^2+bx+2b)}{x^2-1} =$

$= \dfrac{b(x^2-2x+1)+3bx^2+3bx-3bx^2-bx-2b}{x^2-1} =$

$= \dfrac{bx^2-2bx+b+2bx-2b}{x^2-1} = \dfrac{bx^2-b}{x^2-1} = \dfrac{b(x^2-1)}{x^2-1} = b$

c) $\left(\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}\right)\dfrac{x^2-y^2}{2xy} = \left[\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2}\right] \cdot \dfrac{x^2-y^2}{2xy} =$

$= \dfrac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{x^2-y^2} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{2xy} = \dfrac{4xy}{2xy}$

d) $\left(1-\dfrac{x-y}{x+y}\right) : \left(\dfrac{x-y}{x+y} - \dfrac{x+y}{x-y}\right) = \left(\dfrac{x+y-x+y}{x+y}\right) : \left[\dfrac{(x-y)^2-(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}\right] =$

$= \dfrac{2y}{x+y} : \left[\dfrac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy+y^2}{(x+y)(x-y)}\right] =$

$= \dfrac{2y}{x+y} : \dfrac{-4xy}{(x+y)(x-y)} = \dfrac{2y(x+y)(x-y)}{-4xy(x+y)} =$

$= -\dfrac{x-y}{2x} = \dfrac{y-x}{2x}$

Página 95

PRACTICA

Ecuaciones de 1^er^ y 2º grados

1 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\dfrac{3x+2}{5} - \dfrac{4x-1}{10} + \dfrac{5x-2}{8} = \dfrac{x+1}{4}$

b) $(3x+2)^2 + 3(1-3x)x = 2(x-11)$

c) $(2x-3)^2 + (x-2)^2 = 3(x+1) + 5x(x-1)$

a) $\dfrac{3x+2}{5} - \dfrac{4x-1}{10} + \dfrac{5x-2}{8} = \dfrac{x+1}{4}$

Multiplicamos toda la ecuación por 40:

$8(3x+2) - 4(4x-1) + 5(5x-2) = 10(x+1)$

$24x + 16 - 16x + 4 + 25x - 10 = 10x + 10 \;\rightarrow\; 23x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

b) $(3x+2)^2 + 3(1-3x)x = 2(x-11)$

$9x^2 + 4 + 12x + 3x - 9x^2 = 2x - 22 \;\rightarrow\; 13x + 26 = 0 \;\rightarrow\; x = -2$

c) $(2x-3)^2 + (x-2)^2 = 3(x+1) + 5x(x-1)$

$4x^2 + 9 - 12x + x^2 + 4 - 4x = 3x + 3 + 5x^2 - 5x \;\rightarrow\; 14x = 10 \;\rightarrow\; x = \dfrac{5}{7}$

2 **Las siguientes ecuaciones son de primer grado. Compruébalo y resuélvelas:**

a) $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(2x-1)^2}{16} = \dfrac{35}{16}$

b) $\dfrac{x+3}{5} - \dfrac{(x-1)^2}{4} = -\dfrac{1}{4}x^2 - \left(\dfrac{x}{2} + 2\right)$

c) $\dfrac{1}{2}\left[1 - (x+2)^2\right] = -x - \dfrac{x^2-1}{2}$

Para comprobar que son ecuaciones de primer grado, simplificamos las ecuaciones al máximo antes de resolverlas:

a) $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(2x-1)^2}{16} = \dfrac{35}{16}$

$4(x^2 + 9 - 6x) - (4x^2 + 1 - 4x) = 35 \;\rightarrow\; 4x^2 + 36 - 24x - 4x^2 - 1 + 4x = 35$

$-20x = 0 \;\rightarrow\;$ Ecuación de primer grado

$20x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

b) $\frac{x+3}{5} - \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{-1}{4}x^2 - \left(\frac{x}{2} + 2\right)$

$4(x+3) - 5(x^2 + 1 - 2x) = -5x^2 - 10x - 40$

$4x + 12 - 5x^2 - 5 + 10x = -5x^2 - 10x - 40 \rightarrow 24x = -47 \rightarrow x = -\frac{47}{24}$

c) $\frac{1}{2}[1 - (x+2)^2] = -x - \frac{x^2 - 1}{2}$

$1 - (x^2 + 4 + 4x) = -2x - x^2 + 1 \rightarrow 1 - x^2 - 4 - 4x = -2x - x^2 + 1$

$-3 - 4x = -2x + 1 \rightarrow$ Ecuación de primer grado

$-3 - 4x = -2x + 1 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2$

3 **Las siguientes ecuaciones son de segundo grado e incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general:**

a) $(3x+1)(3x-1) + \frac{1}{2}(x-2)^2 = 1 - 2x$

b) $\frac{x^2+2}{3} - \frac{x^2+1}{4} = 1 - \frac{x+7}{12}$

c) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{3} + \frac{(x-2)^2}{4} = \frac{3x+4}{6} + \frac{x^2}{3}$

a) $(3x+1)(3x-1) + \frac{1}{2}(x-2)^2 = 1 - 2x$

$9x^2 - 1 + \frac{x^2 - 4x + 4}{2} = 1 - 2x \rightarrow 18x^2 - 2 + x^2 - 4x + 4 = 2 - 4x$

$19x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

b) $\frac{x^2+2}{3} - \frac{x^2+1}{4} = 1 - \frac{x+7}{12}$

$4x^2 + 8 - 3x^2 - 3 = 12 - x - 7 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x(x+1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

c) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{3} + \frac{(x-2)^2}{4} = \frac{3x+4}{6} + \frac{x^2}{3}$

$\frac{4x^2 - 1}{3} + \frac{x^2 - 4x + 4}{4} = \frac{3x + 4 + 2x^2}{6} \rightarrow 16x^2 - 4 + 3x^2 - 12x + 12 =$

$= 6x + 8 + 4x^2 \rightarrow 15x^2 - 18x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x(15x - 18) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{6}{5} \end{cases}$

4 **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:**

a) $(x+1)^2 - 3x = 3$

b) $(2x+1)^2 = 1 + (x-1)(x+1)$

c) $\frac{(x+1)(x-3)}{2} + x = \frac{x}{4}$

d) $x + \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} = x^2 - 2$

a) $(x+1)^2 - 3x = 3$

$x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

b) $(2x+1)^2 = 1 + (x-1)(x+1)$

$4x^2 + 1 + 4x = 1 + x^2 - 1 \rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6}$ $x_1 = -1/3$, $x_2 = -1$

c) $\frac{(x+1)(x-3)}{2} + x = \frac{x}{4}$

$\frac{x^2 - 2x - 3}{2} + x = \frac{x}{4} \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 + 4x = x \rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$ $x_1 = 2$, $x_2 = -3/2$

d) $x + \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} = x^2 - 2$

$6x + 9x + 3 - 2x + 4 = 6x^2 - 12 \rightarrow 6x^2 - 13x - 19 = 0$

$x = \frac{13 \pm \sqrt{169+456}}{12} = \frac{13 \pm 25}{12}$ $x_1 = 19/6$, $x_2 = -1$

5 **Tres de estas ecuaciones no tienen solución. Averigua cuáles son:**

a) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

b) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2} = 0$

c) $(x+3)^2 - 2(3x+6) = 0$

d) $\frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4}$

a) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

$25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x \rightarrow 9 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

b) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2} = 0$

$x^2 - 4x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

c) $(x + 3)^2 - 2(3x + 6) = 0$

$x^2 + 6x + 9 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ $\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases}$

d) $\frac{x + 1}{2} = x - \frac{2x + 3}{4}$

$2x + 2 = 4x - 2x - 3 \rightarrow 2 = -3 \rightarrow$ No tiene solución.

Otras ecuaciones

6 Resuelve:

a) $\mathbf{x^4 - 3x^2 - 4 = 0}$ **b)** $\mathbf{x^4 - 5x^2 + 6 = 0}$

c) $\mathbf{x^4 - 5x^2 + 4 = 0}$ **d)** $\mathbf{36x^4 - 13x^2 + 1 = 0}$

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$

$y^2 - 3y - 4 = 0 \rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2 \\ x^2 = -1 \rightarrow \text{no hay solución} \end{array}\right\} \rightarrow$ Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$

$y^2 - 5y + 6 = 0 \rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $\begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right\}$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3},\ x_3 = \sqrt{2},\ x_4 = -\sqrt{2}$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$

$y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

d) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$

$$36y^2 - 13y + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{72} = \frac{13 \pm 5}{72} \begin{cases} y_1 = \frac{18}{72} = \frac{1}{4} \\ y_2 = \frac{8}{72} = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

$x^2 = \frac{1}{9} \rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$

Soluciones: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3},\ x_4 = -\frac{1}{3}$

7 Resuelve:

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ **b)** $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ **c)** $25x^4 - 26x^2 + 1 = 0$

d) $x^4 - 81 = 0$ **e)** $x^4 - 9x^2 = 0$ **f)** $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$

$$y^2 - 5y - 36 = 0 \rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ x^2 = -4 \rightarrow \text{no hay solución} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } x_1 = 3,\ x_2 = -3$$

b) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3},\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$$

c) $25x^4 - 26x^2 + 1 = 0$

$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$

$$25y^2 - 26y + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{50} = \frac{26 \pm 24}{50} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{1}{25} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 = \frac{1}{25} \rightarrow x = \pm\frac{1}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{1}{5},\ x_4 = -\frac{1}{5}$$

d) $x^4 - 81 = 0$

$x^4 = 81 \rightarrow x = \sqrt[4]{81} = \pm 3 \rightarrow$ Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

e) $x^4 - 9x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 9) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -3$

f) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$

$9y^2 - 10y + 1 = 0 \rightarrow y = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2 \cdot 9} = \dfrac{10 \pm 8}{18} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \dfrac{1}{9} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 = \dfrac{1}{9} \rightarrow x = \pm\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \rightarrow$ Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = \dfrac{1}{3},\ x_4 = -\dfrac{1}{3}$

8 Resuelve:

a) $x - \sqrt{x} = 2$

b) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

c) $x - \sqrt{169 - x^2} = 17$

d) $x + \sqrt{5x + 10} = 8$

a) $x - \sqrt{x} = 2$

$(x - 2) = \sqrt{x} \rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2 - 4x + 4 = x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Comprobación: $x_1 = 4 \rightarrow 4 - \sqrt{4} = 2$

$x_2 = 1 \rightarrow 1 - \sqrt{4} = 0 \neq 2$

Solución: $x = 4$

b) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

$(x - 1) = \sqrt{25 - x^2} \rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2 - 2x + 1 = 25 - x^2 \rightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0 \rightarrow x^2 - x - 12 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$

Comprobación: $x_1 = 4 \rightarrow 4 - \sqrt{25 - 16} = 4 - 3 = 1$

$x_2 = -3 \rightarrow -3 - \sqrt{25 - 9} = -3 - 4 = -7 \neq 1$

Solución: $x = 4$

c) $x - \sqrt{169 - x^2} = 17$

$(x - 17)^2 = \sqrt{169 - x^2} \to$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2 + 289 - 34x = 169 - x^2 \to 2x^2 - 34x + 120 = 0 \to x^2 - 17x + 60 = 0$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Comprobación: $x_1 = 12 \to 12 - \sqrt{169 - 144} = 12 - 5 = 7 \neq 17$

$x_2 = 5 \to 5 - \sqrt{169 - 25} = 5 - 12 = -7 \neq 17$

No tiene solución.

d) $x + \sqrt{5x + 10} = 8$

$\sqrt{5x + 10} = (8 - x)^2 \to$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$5x + 10 = 64 + x^2 - 16x \to x^2 - 21x + 54 = 0$

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 216}}{2} = \frac{21 \pm 15}{2} \begin{cases} x_1 = 18 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Comprobación: $x_1 = 18 \to 18 + \sqrt{5 \cdot 18 + 10} = 18 + 10 = 28 \neq 8$

$x_2 = 3 \to 3 + \sqrt{5 \cdot 3 + 10} = 3 + 5 = 8$

Solución: $x = 3$

9 Resuelve:

a) $\dfrac{x - 1}{x} + x = 1$

b) $\dfrac{x - 3}{x} + \dfrac{x + 3}{x^2} = \dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{x - 1}{x + 1} + \dfrac{1}{4} = 1$

d) $\dfrac{3x - 1}{x + 2} - 1 = \dfrac{x}{2x + 4}$

a) $\dfrac{x - 1}{x} + x = 1$ Multiplicamos los dos miembros por x:

$$x - 1 + x^2 = x \to x^2 - 1 = 0 \to x^2 = 1 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Comprobación: $x_1 = 1 \to \dfrac{1 - 1}{1} + 1 = 0 + 1 = 1$

$x_2 = -1 \to \dfrac{-1 - 1}{-1} - 1 = 2 - 1 = 1$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

b) $\dfrac{x - 3}{x} + \dfrac{x + 3}{x^2} = \dfrac{2}{3}$ Multiplicamos los dos miembros por $3x^2$:

$3x^2 - 9x + 3x + 9 = 2x^2 \to x^2 - 6x + 9 = 0 \to (x - 3)^2 = 0$

$x = 3 \to$ Solución doble.

Comprobación: $x = 3 \rightarrow \frac{3-3}{3} + \frac{3+3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Solución: $x = 3$

c) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{4} = 1$ Multiplicamos los dos miembros por $4(x+1)$:

$4(x-1) + x + 1 = 4(x+1) \rightarrow 4x - 4 + x + 1 = 4x + 4 \rightarrow x = 7$

Comprobación: $x = 7 \rightarrow \frac{7-1}{7+1} + \frac{1}{4} = \frac{6}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

Solución: $x = 7$

d) $\frac{3x-1}{x+2} - 1 = \frac{x}{2x+4}$ Multiplicamos los dos miembros por $2(x+2)$:

$2(3x-1) - 2(x+2) = x \rightarrow 6x - 2 - 2x - 4 = x \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$

Comprobación: $x = 2 \rightarrow \frac{6-1}{2+2} - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}; \quad \frac{2}{4+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Solución: $x = 2$

10 Resuelve:

a) $\sqrt{3x+4} = 4 - 2x$ **b)** $2x + \sqrt{x+4} = 2$

c) $x + 1 - \sqrt{5x+1} = 0$ **d)** $x + \sqrt{7-3x} = 1$

a) $\sqrt{3x+4} = 4 - 2x$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$3x + 4 = (4-2x)^2 \rightarrow 3x + 4 = 16 - 16x + 4x^2 \rightarrow 4x^2 - 19x + 12 = 0$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 192}}{8} = \frac{19 \pm 13}{8} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Comprobación:

$$x_1 = 4 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4 \\ 4 - 2 \cdot 4 = 4 - 8 = -4 \end{array}\right\} x_1 = 4 \text{ no es solución.}$$

$$x_2 = \frac{3}{4} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \\ 4 - 2 \cdot \frac{3}{4} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{array}\right\} x_2 = \frac{3}{4} \text{ sí es solución.}$$

Solución: $x = \frac{3}{4}$

b) $2x + \sqrt{x+4} = 2$

$\sqrt{x+4} = 2 - 2x$ Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$x + 4 = (2 - 2x)^2 \rightarrow x + 4 = 4 + 4x^2 - 8x \rightarrow 4x^2 - 9x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x(4x - 9) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

Comprobación:

$x_1 = 0 \rightarrow \sqrt{4} = 2 \rightarrow x_1 = 0$ sí es solución.

$x_2 = \dfrac{9}{4} \rightarrow 2 \cdot \dfrac{9}{4} + \sqrt{\dfrac{9}{4} + 4} = \dfrac{9}{2} + \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{9}{2} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{14}{2} = 7 \neq 2 \rightarrow$

$\rightarrow x_2 = \dfrac{9}{4}$ no es solución.

Solución: $x = 0$

c) $x + 1 - \sqrt{5x+1} = 0$

$x + 1 = \sqrt{5x+1}$ Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$(x+1)^2 = 5x + 1 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 5x + 1 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x(x - 3) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Comprobación: $x_1 = 0 \rightarrow 1 - \sqrt{0+1} = 1 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 0$ sí es solución.

$x_2 = 3 \rightarrow 3 + 1 - \sqrt{15+1} = 4 - \sqrt{16} = 4 - 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x_2 = 3$ sí es solución.

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

d) $x + \sqrt{7 - 3x} = 1$

$\sqrt{7 - 3x} = 1 - x$ Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$7 - 3x = (1 - x)^2 \rightarrow 7 - 3x = 1 - 2x + x^2 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Comprobación:

$x_1 = 2 \rightarrow 2 + \sqrt{7 - 6} = 2 + 1 = 3 \neq 1 \rightarrow x_1 = 2$ no es solución.

$x_2 = -3 \rightarrow -3 + \sqrt{7 + 9} = -3 + 4 = 1 \rightarrow x_2 = -3$ sí es solución.

Solución: $x = -3$

11 **Resuelve:**

a) $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2-5x}{x^2+3x}$ b) $\dfrac{2x+3}{2x-1} - \dfrac{1}{x} = 4$ c) $\dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{2x}{x+2} + 2 = 0$

a) $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2-5x}{x^2+3x}$

Multiplicamos ambos miembros por $x(x+3)$ que es el m.c.m. de los denominadores:

$x - 2(x+3) = 2 - 5x \;\rightarrow\; x - 2x - 6 = 2 - 5x \;\rightarrow\; 4x = 8 \;\rightarrow\; x = 2$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2+3} - \dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{5} - 1 = \dfrac{-4}{5} \\ \dfrac{2-10}{4+6} = \dfrac{-8}{10} = \dfrac{-4}{5} \end{array}\right\} \text{ La solución es } x = 2.$$

b) $\dfrac{2x+3}{2x-1} - \dfrac{1}{x} = 4$

m.c.m. $[2x-1, x] = (2x-1) \cdot x$

Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por la expresión anterior:

$x(2x+3) - (2x-1) = 4x(2x-1)$

$2x^2 + 3x - 2x + 1 = 8x^2 - 4x \;\rightarrow\; 6x^2 - 5x - 1 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{12} = \frac{5 \pm 7}{12} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Comprobación:

$\dfrac{2+3}{2-1} - \dfrac{1}{1} = 5 - 1 = 4 \;\rightarrow\; x_1 = 1$ es solución.

$\dfrac{-\dfrac{1}{3}+3}{-\dfrac{1}{3}-1} - \dfrac{1}{-\dfrac{1}{6}} = -\dfrac{8}{4} + 6 = -2 + 6 = 4 \;\rightarrow\; x_2 = -\dfrac{1}{6}$ es solución.

Soluciones: $x_1 = 1,\; x_2 = -\dfrac{1}{6}$

c) $\dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{2x}{x+2} + 2 = 0$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $(x-2)(x+2)$, que es el m.c.m. de los denominadores:

$(x+1)(x+2) + 2x(x-2) + 2(x^2-4) = 0$

$x^2 + 3x + 2 + 2x^2 - 4x + 2x^2 - 8 = 0 \;\rightarrow\; 5x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{10} = \frac{1 \pm 11}{10} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Comprobación:

$x_1 = -1 \rightarrow 0 + \dfrac{-2}{-1 + 2} + 2 = -2 + 2 = 0 \rightarrow x_1 = -1$ es solución.

$$x_2 = \frac{6}{5} \rightarrow \frac{\frac{6}{5} + 1}{\frac{6}{5} - 2} + \frac{\frac{12}{5}}{\frac{6}{5} + 2} + 2 = \frac{11}{-4} + \frac{12}{16} + 2 = -\frac{11}{4} + \frac{3}{4} + \frac{8}{4} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow x_2 = \dfrac{6}{5}$ es solución.

Soluciones: $x_1 = -1,\ x_2 = \dfrac{6}{5}$

12 **¿Cuáles son las soluciones de las ecuaciones siguientes?**

a) $(x + 3)(x^2 - 4) = 0$

b) $(x - 5)(x^2 + 4) = 0$

c) $x(x - 1)(2x - 3) = 0$

d) $3x^2(x + 1)^2 = 0$

a) $(x + 3)(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -3,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$

b) $(x - 5)(x^2 + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \text{ es la solución.} \\ x^2 + 4 > 0 \text{ siempre} \end{cases}$

c) $x(x - 1)(2x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = \dfrac{3}{2}$

d) $3x^2(x + 1)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ (x + 1)^2 = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1$

13 Factoriza y resuelve:

a) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ **b)** $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

c) $2x^4 + 6x^3 = 0$ **d)** $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$

a) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

Factorizamos el polinomio $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2)$ aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$ es el polinomio factorizado.

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \;\to\; x(x-1)(x-2) = 0 \;\to\; \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \;\to\; x = 1 \\ x - 2 = 0 \;\to\; x = 2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

Factorizamos el polinomio $x^3 + 2x^2 - x - 2$ aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & -2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Luego: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$

Resolver $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ equivale a resolver $(x-1)(x+1)(x+2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 = 0 \;\to\; x = 1 \\ x + 1 = 0 \;\to\; x = -1 \\ x + 2 = 0 \;\to\; x = -2 \end{array}\right\} \text{Soluciones: } x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -2$$

c) $2x^4 + 6x^3 = 0$

$$2x^4 + 6x^3 = 2x^3(x+3) = 0 \;\begin{cases} x^3 = 0 \;\to\; x = 0 \\ x + 3 = 0 \;\to\; x = -3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -3$

d) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$

Factorizamos: $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2(x^2 - 6x + 9) = x^2(x-3)^2$

Resolver $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$ equivale a resolver

$$x^2(x-3)^2 = 0 \;\to\; \begin{cases} x^2 = 0 \;\to\; x = 0 \\ (x-3)^2 = 0 \;\to\; x - 3 = 0 \;\to\; x = 3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 3$

Página 96

Sistemas de ecuaciones

14 **Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes, y comprueba la solución que obtengas:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1{,}25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$

Por reducción, multiplicamos la 1ª ecuación por (–2) y sumamos:

$$\begin{array}{l} -4x + 2y = -8 \\ \underline{\ \ 4x + 3y = -7} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5y = -15 \ \rightarrow \ y = -3 \\ x = \dfrac{4+y}{2} \ \rightarrow \ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución: } x = \frac{1}{2},\ y = -3$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{1}{2} - (-3) = 1 + 3 = 4 \\ 4 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot (-3) = 2 - 9 = -7 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1{,}25 \end{cases}$

Por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por 2 y sumamos:

$$\begin{array}{l} x + 2y = -1 \\ \underline{6x - 2y = -2{,}5} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7x = -3{,}5 \ \rightarrow \ x = \dfrac{-3{,}5}{7} = -0{,}5 \\ y = \dfrac{-1-x}{2} \ \rightarrow \ y = -0{,}25 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución: } x = -0{,}5,\ y = -0{,}25$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} -0{,}5 + 2(-0{,}25) = -0{,}5 - 0{,}5 = -1 \\ 3(-0{,}5) - (-0{,}25) = -1{,}5 + 0{,}25 = -1{,}25 \end{cases}$$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$

Por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por –3 y sumamos:

$$\begin{array}{r} 3x - \ \ 2y = 2 \\ -3x - 12y = 5 \\ \hline -14y = 7 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -14y = 7 \ \rightarrow \ y = \dfrac{-1}{2} \\ x = \dfrac{-5}{3} - 4y \ \rightarrow \ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución: } x = \frac{1}{3}, \ y = -\frac{1}{2}$$

Comprobación: $\begin{cases} 3 \cdot \dfrac{1}{3} - 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 + 1 = 2 \\ \dfrac{1}{3} + 4 \cdot \left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{1}{3} - 2 = \dfrac{-5}{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - 3y \\ x = 7 - 8y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2 - 3y = 7 - 8y \ \rightarrow \ 5y = 5 \ \rightarrow \ y = 1 \\ x = 7 - 8 \cdot 1 \ \rightarrow \ x = -1 \end{array}$$

Solución: $x = -1, \ y = 1$

Comprobación: $\begin{cases} \dfrac{-1+1}{3} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ \dfrac{-1-3}{4} + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1 \end{cases}$

15 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y comprueba las soluciones:**

a) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ \dfrac{x^2 - 2y + 3}{x - 1} = 3 + x \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} + \dfrac{y+3}{4} = 1 \\ \dfrac{1-x}{2} - \dfrac{2-y}{6} = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{r} 2x + 2 + \ \ y - 1 = 6 \\ x + 1 - 2y + 2 = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + \ \ y = 5 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 2y$

$2 \cdot 2y + y = 5 \rightarrow 5y = 5 \rightarrow y = 1,\ x = 2$

Solución: $x = 2,\ y = 1$

Comprobación: $\begin{cases} \dfrac{2+1}{2} + \dfrac{1-1}{4} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2+1}{4} - \dfrac{1-1}{3} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ \dfrac{x^2 - 2y + 3}{x-1} = 3 + x \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 9 \\ x^2 - 2y + 3 = (3+x)(x-1) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 9 - 3y \\ x^2 - 2y + 3 = 3x - 3 + x^2 - x \end{array}\right\}$

$\begin{cases} x = 9 - 3y \\ -2y - 2x + 6 = 0 \end{cases}$

$-2y - 2(9 - 3y) + 6 = 0 \rightarrow -2y - 18 + 6y + 6 = 0 \rightarrow 4y = 12 \rightarrow$

$\rightarrow y = 3,\ x = 0$

Solución: $x = 0,\ y = 3$

Comprobación: $\begin{cases} 0 + 9 = 9 \\ \dfrac{-6+3}{-1} = \dfrac{-3}{-1} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} + \dfrac{y+3}{4} = 1 \\ \dfrac{1-x}{2} - \dfrac{2-y}{6} = 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{r} 2x + 6 + y + 3 = 4 \\ 3 - 3x - 2 + y = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} 2x + y = -5 \\ -3x + y = \ \ 5 \\ \hline 5x \qquad = -10 \end{array} \rightarrow x = -2,\ y = -1$

Solución: $x = -2,\ y = -1$

Comprobación: $\begin{cases} \dfrac{-2+3}{2} + \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} = 1 \\ \dfrac{1+2}{2} - \dfrac{2+1}{6} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{6} = 1 \end{cases}$

16 **Halla las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$

$x = 1 - y$

$(1 - y)y + 2y = 2 \rightarrow y - y^2 + 2y = 2 \rightarrow -y^2 + 3y - 2 = 0$

$y = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = 0 \\ y_2 = 2 \rightarrow x_2 = -1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 0, \; y_1 = 1 \\ x_2 = -1, \; y_2 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

$y = 3 - 2x$

$x^2 + (3 - 2x)^2 = 2 \rightarrow x^2 + 9 + 4x^2 - 12x = 2 \rightarrow 5x^2 - 12x + 7 = 0$

$x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144-140}}{2 \cdot 5} = \dfrac{12 \pm 2}{10} \begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{5} \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{7}{5} \rightarrow y_1 = 3 - 2 \cdot \dfrac{7}{5} = \dfrac{1}{5} \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Soluciones: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{5}, \; y_1 = \dfrac{1}{5} \\ x_2 = 1, \; y_2 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$

$y = 3 - 2x$

$x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0 \rightarrow (3 - 2x)(x - (3 - 2x)) = 0$

$(3 - 2x) \cdot (3x - 3) = 0 \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3}{2} \rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Soluciones: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2}, \; y_1 = 0 \\ x_2 = 1, \; y_2 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$

$x = 1 + y$

$(1 + y)^2 + y^2 = 11 - 3(1 + y) \rightarrow 1 + y^2 + 2y + y^2 = 11 - 3 - 3y$

$2y^2 + 5y - 7 = 0 \rightarrow y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-5 \pm 9}{4} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \dfrac{-7}{2} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = 2 \\ y_2 = \dfrac{-7}{2} \rightarrow x_2 = \dfrac{-5}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$ Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 2, \ y_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{-5}{2}, \ y_2 = \dfrac{-7}{2} \end{cases}$

17 Resuelve:

a) $\begin{cases} \mathbf{2x + y = 2} \\ \mathbf{xy - y^2 = 0} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{\mathbf{x + y}}{\mathbf{2}} \mathbf{- x = 1} \\ \dfrac{\mathbf{x - y}}{\mathbf{2}} \mathbf{+ x^2 = 0} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$

$x = \dfrac{2 - y}{2}$

$\dfrac{2 - y}{2} \cdot y - y^2 = 0 \rightarrow 2y - y^2 - 2y^2 = 0 \rightarrow 3y^2 - 2y = 0 \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} y_1 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \\ y_2 = \dfrac{2}{3} \rightarrow x_2 = \dfrac{2 - 2/3}{2} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \rightarrow$ Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 1, \ y_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{2}{3}, \ y_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} - x = 1 \\ \dfrac{x - y}{2} + x^2 = 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x + y - 2x = 2 \\ x - y + 2x^2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{r} y - x \qquad = 2 \\ -y + x + 2x^2 = 0 \\ \hline 2x^2 = 2 \end{array} \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1, \ y_1 = 3 \\ x_2 = -1, \ y_2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 1, \ y_1 = 3 \\ x_2 = -1, \ y_2 = 1 \end{cases}$

Inecuaciones

18 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

19 **Halla el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:**

a) $3x - 7 < 5$ **b)** $2 - x > 3$

c) $7 > 8x - 5$ **d)** $1 - 5x < -8$

a) $3x - 7 < 5$

$3x < 5 + 7 \ \rightarrow\ x < \dfrac{12}{3} \ \rightarrow\ x < 4 \ \rightarrow\ (-\infty, 4)$

b) $2 - x > 3$

$-x > 1 \ \rightarrow\ x < -1 \ \rightarrow\ (-\infty, -1)$

c) $7 > 8x - 5$

$8x < 7 + 5 \ \rightarrow\ x < \dfrac{12}{8} \ \rightarrow\ x < \dfrac{3}{2} \ \rightarrow\ \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$

d) $1 - 5x < -8$

$-5x < -9 \ \rightarrow\ x > \dfrac{9}{5} \ \rightarrow\ \left(\dfrac{9}{5}, +\infty\right)$

20 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $\dfrac{2\,(x+2)}{3} < 2x$ **b)** $\dfrac{x-4}{4} + 1 < \dfrac{x+4}{8}$

c) $-4x + 9 < x - 1$ **d)** $\dfrac{x-1}{2} > x + 1$

a) $\dfrac{2\,(x+2)}{3} < 2x$

$2x + 4 < 6x \ \rightarrow\ 4x > 4 \ \rightarrow\ x > 1 \ \rightarrow\ (1, +\infty)$

b) $\dfrac{x-4}{4} + 1 < \dfrac{x+4}{8}$

$2x - 8 + 8 < x + 4 \ \rightarrow\ x < 4 \ \rightarrow\ (-\infty, 4)$

c) $-4x + 9 < x - 1$

$5x > 10 \ \rightarrow\ x > 2 \ \rightarrow\ (2, +\infty)$

d) $\dfrac{x-1}{2} > x + 1$

$x - 1 > 2x + 2 \ \rightarrow\ x < -3 \ \rightarrow\ (-\infty, -3)$

21 Traduce a lenguaje algebraico:

a) El triple de un número más 8 unidades es menor que 20.

b) El cuadrado de un número es menor que el doble de ese número más 1.

c) Si creciera 15 cm, superaría la estatura que se requiere para entrar en el equipo de baloncesto, que es 1,80 m.

a) $3x + 8 < 20$, siendo x el número inicial.

b) $x^2 < 2x + 1$, donde x es el número.

c) $x + 15 > 180$, donde x es la estatura inicial.

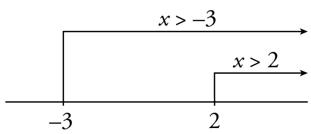
22 Halla el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3 - x > 0 \\ 3 + x > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 5 \le 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x \ge 0 \\ 1 - x < 0 \end{cases}$

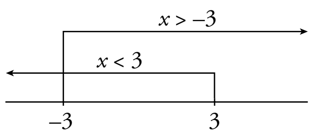
a) $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x > 2 \\ x > -3 \end{array}\right\} \to$ Solución: $x > 2 \to (2, +\infty)$



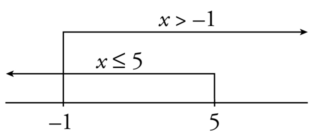
b) $\begin{cases} 3 - x > 0 \\ 3 + x > 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x < 3 \\ x > -3 \end{array}\right\} \to$ Solución: $(-3, 3)$



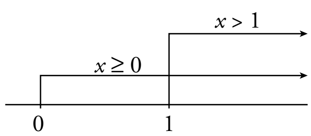
c) $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 5 \le 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x > -1 \\ x \le 5 \end{array}\right\} \to$ Solución: $(-1, 5]$



d) $\begin{cases} x \ge 0 \\ 1 - x < 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ x > 1 \end{array}\right\} \to$ Solución: $x > 1 \to (1, +\infty)$



PIENSA Y RESUELVE

23 Resuelve:

a) $x^3 - 27 = 0$ b) $\dfrac{64}{x^3} - 1 = 0$ c) $\dfrac{3x}{5} + \dfrac{25}{9x^2} = 0$

d) $\dfrac{4}{x} - \dfrac{x^2}{2} = 0$ e) $16x^4 - 81 = 0$ f) $\dfrac{1}{50x} - \dfrac{25x^3}{2} = 0$

a) $x^3 - 27 = 0$

$x^3 = 27 \rightarrow x = \sqrt[3]{27} \rightarrow x = 3$

b) $\dfrac{64}{x^3} - 1 = 0$

$64 - x^3 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} \rightarrow x = 4$

c) $\dfrac{3x}{5} + \dfrac{25}{9x^2} = 0$

$27x^3 + 125 = 0 \rightarrow x^3 = \dfrac{-125}{27} \rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{-125}{27}} = -\dfrac{5}{3} \rightarrow x = -\dfrac{5}{3}$

d) $\dfrac{4}{x} - \dfrac{x^2}{2} = 0$

$8 - x^3 = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} \rightarrow x = 2$

e) $16x^4 - 81 = 0$

$16x^4 = 81 \rightarrow x^4 = \dfrac{81}{16} \rightarrow x = \sqrt[4]{\dfrac{81}{16}} = \pm\dfrac{3}{2} \rightarrow x_1 = \dfrac{3}{2},\ x_2 = -\dfrac{3}{2}$

f) $\dfrac{1}{50x} - \dfrac{25x^3}{2} = 0$

$1 - 625x^4 = 0 \rightarrow x^4 = \dfrac{1}{625} \rightarrow x = \sqrt[4]{\dfrac{1}{625}} = \pm\dfrac{1}{5} \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = \dfrac{1}{5},\ x_2 = -\dfrac{1}{5}$

Comprobación:

$x_1 = \dfrac{1}{5} \rightarrow \dfrac{1}{10} - \dfrac{\frac{1}{5}}{2} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{10} = 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{5}$ es solución.

$x_2 = -\dfrac{1}{5} \rightarrow -\dfrac{1}{10} + \dfrac{\frac{1}{5}}{2} = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} = 0 \rightarrow x_2 = -\dfrac{1}{5}$ es solución.

24 **Resuelve:**

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2y^2 = 36 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2y^2 = 36 \end{cases} \to x^2 = \dfrac{36}{y^2} \to x = \pm\sqrt{\dfrac{36}{y^2}} \to x = \pm\dfrac{6}{y}$

• Si $x = \dfrac{6}{y} \to \dfrac{6}{y} + y = 5 \to 6 + y^2 = 5y \to y^2 - 5y + 6 = 0$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

$y_1 = 3 \to x_1 = 5 - 3 = 2$
$y_2 = 2 \to x_2 = 5 - 2 = 3$

• Si $x = -\dfrac{6}{y} \to -\dfrac{6}{y} + y = 5 \to -6 + y^2 = 5y \to y^2 - 5y - 6 = 0$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \begin{cases} y_3 = 6 \to x_3 = -1 \\ y_4 = -1 \to x_4 = 6 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = 3;\ x_2 = 3,\ y_2 = 2;\ x_3 = -1,\ y_3 = 6;\ x_4 = 6,\ y_4 = -1$

b) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$

$\sqrt{x} = 5 - y \to x = (5 - y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = (5 - y)^2 \to y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y \to 8y = 24 \to y = 3$

$x = (5 - 3)^2 = 4$

Solución: $x = 4,\ y = 3$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$

Sumamos:
$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 34 \\ \underline{x^2 - y^2 = 16} \\ 2x^2 \quad\ = 50 \end{array} \to x^2 = 25 \to x = \pm 5$$

$x = \pm 5 \to y = \pm\sqrt{34 - 25} = \pm 3$

Soluciones: $x_1 = 5,\ y_1 = 3;\ x_2 = 5,\ y_2 = -3;\ x_3 = -5,\ y_3 = 3;\ x_4 = -5,\ y_4 = -3$

d) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

$y = \dfrac{-1 + 2x}{3}$

$2\sqrt{x+1} = \dfrac{2x-1}{3} + 1 \;\rightarrow\; 6\sqrt{x+1} = 2x - 1 + 3 \;\rightarrow\; 6\sqrt{x+1} = 2x + 2$

$3\sqrt{x+1} = x + 1 \;\rightarrow\; 9(x+1) = x^2 + 2x + 1 \;\rightarrow\; 9x + 9 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 7x - 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} = \dfrac{7 \pm 9}{2}$ $\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 8 \;\rightarrow\; y_1 = 5 \\ x_2 = -1 \;\rightarrow\; y_2 = -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 8,\ y_1 = 5;\ x_2 = -1,\ y_2 = -1$

25 **Dos de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Averigua cuáles son y resuelve las otras:**

a) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2(x+1)} = 0$

b) $\sqrt{x-4} - \sqrt{3-x} = 0$

c) $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3-x} = 0$

d) $\sqrt{5x-7} - \sqrt{1-x} = 0$

a) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2(x+1)} = 0$

$\sqrt{x+2} = \sqrt{2(x+1)} \;\rightarrow\; x + 2 = 2x + 2 \;\rightarrow\; x = 0$

Comprobación: $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

Solución: $x = 0$

b) $\sqrt{x-4} - \sqrt{3-x} = 0$

$\sqrt{x-4} = \sqrt{3-x} \;\rightarrow\; x - 4 = 3 - x \;\rightarrow\; 2x = 7 \;\rightarrow\; x = \dfrac{7}{2}$

Comprobación:

$\sqrt{\dfrac{7}{2} - 4} - \sqrt{3 - \dfrac{7}{2}} = \sqrt{-\dfrac{1}{2}} - \sqrt{-\dfrac{1}{2}} \;\rightarrow$ No tiene solución.

c) $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3-x} = 0$

$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{3-x} \;\rightarrow\; x^2 + 3 = 3 - x \;\rightarrow\; x^2 + x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x(x+1) = 0$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Comprobación: $x_1 = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0$ es solución.

$x_2 = -1 \;\rightarrow\; \sqrt{4} - \sqrt{4} = 0 \;\rightarrow\; x_2 = -1$ es solución.

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1$

d) $\sqrt{5x-7} - \sqrt{1-x} = 0$

$\sqrt{5x-7} = \sqrt{1-x} \;\rightarrow\; 5x-7 = 1-x \;\rightarrow\; 6x = 8 \;\rightarrow\; x = \dfrac{4}{3}$

Comprobación:

$\sqrt{\dfrac{20}{3}-7} - \sqrt{1-\dfrac{4}{3}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} - \sqrt{-\dfrac{1}{3}} \;\rightarrow$ No existe la raíz cuadrada de un número negativo $\rightarrow$ No hay solución.

Página 97

26 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

27 **Resuelve:**

a) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$ **b)** $x^2 - 4x - 5 \leq 0$

c) $2x^2 + 9x - 5 > 0$ **d)** $-x^2 + 4x < 0$

a) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

Resolvemos la ecuación $-x^2 + 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si } \quad x < 1 & \rightarrow & -x^2 + 3x - 2 < 0 \\ \text{Si } 1 < x < 2 & \rightarrow & -x^2 + 3x - 2 > 0 \\ \text{Si } \quad x > 2 & \rightarrow & -x^2 + 3x - 2 < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución: } [1, 2]$$

b) $x^2 - 4x - 5 \leq 0$

Resolvemos la ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{-2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si } \quad x < -1 & \rightarrow & x^2 - 4x - 5 > 0 \\ \text{Si } -1 < x < 5 & \rightarrow & x^2 - 4x - 5 < 0 \\ \text{Si } \quad x > 5 & \rightarrow & x^2 - 4x - 5 > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución: } [-1, 5]$$

c) $2x^2 + 9x - 5 > 0$

Resolvemos la ecuación $2x^2 + 9x - 5 = 0$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{42} = \frac{-9 \pm 11}{4} \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si } \quad x < -5 & \rightarrow & 2x^2 + 9x - 5 > 0 \\ \text{Si } -5 < x < 1/2 & \rightarrow & 2x^2 + 9x - 5 < 0 \\ \text{Si } \quad x > 1/2 & \rightarrow & 2x^2 + 9x - 5 > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución: } (-\infty, -5) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

d) $-x^2 + 4x < 0$

Resolvemos la ecuación $-x^2 + 4x = 0$

$$x(-x+4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} \quad x < 0 & \rightarrow & -x^2 + 4x < 0 \\ \text{Si} \quad 0 < x < 4 & \rightarrow & -x^2 + 4x > 0 \\ \text{Si} \quad x > 4 & \rightarrow & -x^2 + 4x < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución: } (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$$

28 **Resuelve:**

a) $\boldsymbol{x^2 - 2x + 3 > x + 1}$

b) $\boldsymbol{-x^2 + 3x - 6 < -x - 2}$

c) $\boldsymbol{-x^2 + x - 5 \geq -2x - 3}$

a) $x^2 - 2x + 3 > x + 1$

Resolvemos la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} \quad x < 1 & \rightarrow & x^2 - 3x + 2 > 0 \\ \text{Si} \quad 1 < x < 2 & \rightarrow & x^2 - 3x + 2 < 0 \\ \text{Si} \quad x > 2 & \rightarrow & x^2 - 3x + 2 > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución: } (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

b) $-x^2 + 3x - 6 < -x - 2$

Resolvemos la ecuación $-x^2 + 3x - 6 = -x - 2$

$$-x^2 + 4x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{-2} = 2$$

Como solo hay un punto de corte entre la parábola $-x^2 + 3x - 6$ y la recta $-x - 2$, entonces toda la parábola menos un punto es mayor que la recta o toda la parábola menos un punto es menor que la recta.

Para $x = 0 \rightarrow -6 < -2$ que es cierto, luego:

$$-x^2 + 3x - 6 < -x - 2 \text{ en } (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

c) $-x^2 + x - 5 \geq -2x - 3$

Resolvemos la ecuación $-x^2 + x - 5 = -2x - 3$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} \quad x < 1 & \rightarrow & -x^2 + x - 5 < -2x - 3 \\ \text{Si} \quad 1 < x < 2 & \rightarrow & -x^2 + x - 5 > -2x - 3 \\ \text{Si} \quad x > 2 & \rightarrow & -x^2 + x - 5 < -2x - 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución: } [1, 2]$$

29 Resuelve las siguientes inecuaciones estudiando el signo de cada factor:

a) $(x-1)(x+3)>0$

b) $x(x-4)<0$

c) $(x-5)(x+2)\leq 0$

d) $(x+1)(3-x)\leq 0$

a) $(x-1)(x+3)>0$

Un producto de dos factores es positivo cuando los dos son positivos o los dos son negativos:

$x-1<0$	$x-1<0$	$x-1>0$
$x+3<0$	$x+3>0$	$x+3>0$

$-3 \qquad 1$

El conjunto de soluciones es $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

b) $x(x-4)<0$

Un producto de dos factores es negativo cuando los dos factores son de distinto signo:

$x<0$	$x>0$	$x>0$
$x-4<0$	$x-4<0$	$x-4>0$

$0 \qquad 4$

El conjunto de soluciones es $(0, 4)$.

c) $(x-5)(x+2)\leq 0$

$x+2<0$	$x+2>0$	$x+2>0$
$x-5<0$	$x-5<0$	$x-5>0$

$-2 \qquad 5$

El conjunto de soluciones es $[-2, 5]$.

d) $(x+1)(3-x)\leq 0$

$x+1<0$	$x+1>0$	$x+1>0$
$3-x>0$	$3-x>0$	$3-x<0$

$-1 \qquad 3$

El conjunto de soluciones es $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

30 Resuelve:

a) $\dfrac{x^2-9}{5}-\dfrac{(x+2)(x-2)}{15}<\dfrac{1-2x}{3}$ **b)** $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{1}{3}>x+\dfrac{3x-x^2}{3}$

a) $\dfrac{x^2-9}{5} - \dfrac{(x+2)(x-2)}{15} < \dfrac{1-2x}{3}$

$3(x^2 - 9) - (x^2 - 4) < 5(1 - 2x)$

$3x^2 - 27 - x^2 + 4 - 5 + 10x < 0$

$2x^2 + 10x - 28 < 0 \;\rightarrow\; x^2 + 5x - 14 < 0$

Resolvemos la ecuación $x^2 + 5x - 14 = 0$:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

• Si $x < -7$, tomamos, por ejemplo, $x = -10 \;\rightarrow$
$\rightarrow\; (-10)^2 + 5 \cdot (-10) - 14 = 36 > 0$ luego $x^2 + 5x - 14 > 0$

• Si $-7 < x < 2$, tomamos, por ejemplo, $x = 0 \;\rightarrow\; -14 < 0 \;\rightarrow$
$\rightarrow\; x^2 + 5x - 14 < 0$

• Si $x > 2$, tomamos, por ejemplo, $x = 3 \;\rightarrow\; 3^2 + 5 \cdot 3 - 14 = 10 > 0$

> 0	< 0	> 0
	-7	2

Solución: $-7 < x < 2 \;\rightarrow\; (-7, 2)$

b) $\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{1}{3} > x + \dfrac{3x - x^2}{3}$

$3(x-1) - 2 > 6x + 2(3x - x^2)$

$3x - 3 - 2 > 6x + 6x - 2x^2 \;\rightarrow\; 2x^2 - 9x - 5 > 0$

Resolvemos la ecuación $2x^2 - 9x - 5 = 0$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81+40}}{4} = \frac{9 \pm 11}{4} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

• Si $x < -\dfrac{1}{2}$ (por ejemplo, -1) $2 + 9 - 5 > 0 \;\rightarrow\; 2x^2 - 9x - 5 > 0$

• Si $-\dfrac{1}{2} < x < 5$ (por ejemplo, 0) $-5 < 0 \;\rightarrow\; 2x^2 - 9x - 5 < 0$

• Si $x > 5$ (por ejemplo, 6) $2 \cdot 36 - 54 - 5 > 0 \;\rightarrow\; 2x^2 - 9x - 5 > 0$

> 0	< 0	> 0
	$-1/2$	5

Solución: $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup (5, +\infty)$

31 **Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 € y los vende, después de algún tiempo, por 2 157,50 €.**

Con el equipo de música perdió el 10% de su valor, y con el ordenador, el 15%. ¿Cuánto le costó cada objeto?

$x \rightarrow$ Precio del equipo de música

$y \rightarrow$ Precio del ordenador

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2\,500 \\ 0{,}9x + 0{,}85y = 2\,157{,}50 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 2\,500 - x \\ 0{,}9x + 0{,}85(2\,500 - x) = 2\,157{,}50 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow 0{,}9x + 2\,125 - 0{,}85x = 2\,157{,}50 \rightarrow 0{,}05x = 32{,}50 \rightarrow$

$\rightarrow x = 650, \; y = 1\,850$

Le costó 650 € el equipo de música y 1 850 € el ordenador.

32 **La nota media de los aprobados en un examen de matemáticas fue 6,5, y la de los suspensos, 3,2. En la clase son 30 alumnos y alumnas, y la nota media global fue 5,29.**

Calcula cuántos aprobaron y cuántos suspendieron.

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ es el número de aprobados} \\ y \text{ es el número de suspensos} \end{array}\right\} x + y = 30$$

Al decir que la nota media de los aprobados es 6,5, se puede asegurar que sumando todas las notas de los aprobados queda $(6{,}5 \cdot x)$.

Al sumar todas las notas de los suspensos, queda $(3{,}2 \cdot y)$.

La relación es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 6{,}5x + 3{,}2y = 5{,}29\,(x + y) \\ x + y = 30 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 6{,}5x + 3{,}2y = 5{,}29 \cdot 30 \\ x = 30 - y \end{array}\right\}$$

$6{,}5\,(30 - y) + 3{,}2y = 158{,}7 \rightarrow 195 - 6{,}5y + 3{,}2y = 158{,}7 \rightarrow$

$\rightarrow 36{,}3 = 3{,}3y \rightarrow y = 11 \rightarrow x = 30 - 11 = 19$

$x = 19, \; y = 11$

Aprobaron 19 estudiantes y suspendieron 11.

33 **La calificación de una oposición se obtiene mediante dos exámenes: uno escrito, que es el 65% de la nota final, y otro oral, que es el 35%. Si una persona tuvo 12 puntos entre los dos exámenes y obtuvo un 5,7 de nota final, ¿qué nota tuvo en cada uno de ellos?**

$$\left.\begin{array}{l} x \rightarrow \text{nota del examen escrito} \\ y \rightarrow \text{nota del examen oral} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ 0{,}65x + 0{,}35y = 5{,}7 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 12 - y \\ 0{,}65(12 - y) + 0{,}35y &= 5{,}7 \quad \rightarrow \quad 7{,}8 - 0{,}65y + 0{,}35y = 5{,}7 \end{aligned}\right\}$$

$-0{,}3y = -2{,}1 \quad \rightarrow \quad y = 7 \quad \rightarrow \quad x = 5$

Obtuvo un 5 en el examen escrito y un 7 en el examen oral.

34 **En un examen de 20 preguntas te dan dos puntos por cada acierto y te quitan medio punto por cada fallo. Para aprobar, es obligatorio contestar a todas las preguntas y hay que obtener, por lo menos, 20 puntos.**

¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para aprobar?

$$\left.\begin{aligned} x &\rightarrow \text{número de respuestas acertadas} \\ y &\rightarrow \text{número de respuestas falladas} \end{aligned}\right\}$$

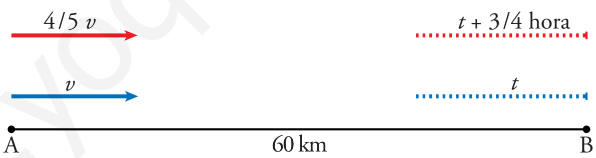
$$\left.\begin{aligned} x + y &= 20 \\ 2x - 1/2y &= 20 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x + y &= 20 \\ 4x - y &= 40 \end{aligned}$$

$$5x \quad = 60 \quad \rightarrow \quad x = \frac{60}{5} \quad \rightarrow \quad x = 12, \; y = 8$$

Para aprobar, hay que contestar 12 preguntas bien y 8 preguntas mal.

35 **La distancia entre dos localidades, A y B, es de 60 km. Dos ciclistas salen a la vez de A. La velocidad del primero es 4/5 de la del segundo y llega 3/4 de hora más tarde.**

¿Qué velocidad lleva cada ciclista?



$$\left.\begin{aligned} V_A &\rightarrow \text{velocidad de } A \\ V_B &\rightarrow \text{velocidad de } B \\ t &\rightarrow \text{tiempo que tarda } A \text{ en recorrer los 60 km} \end{aligned}\right\}$$

$$V_A = \frac{4}{5} V_B$$

$$\left.\begin{aligned} 60 &= V_A \cdot t \\ 60 &= V_B \cdot (t - 3/4) \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 60 &= (4/5)\, V_B \cdot t \\ 60 &= V_B \cdot (t - 3/4) \end{aligned}\right\}$$

Dividimos ambas ecuaciones:

$$\frac{60}{60} = \frac{\frac{4}{5} V_B \cdot t}{V_B \cdot \left(t - \frac{3}{4}\right)} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{\frac{4}{5} t}{t - \frac{3}{4}}$$

$$t - \frac{3}{4} = \frac{4}{5}t \;\rightarrow\; t - \frac{4}{5}t = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{5}t = \frac{3}{4} \;\rightarrow\; t = \frac{15}{4}$$

$$V_B = \frac{60}{3} = 20 \text{ km/h}$$

$$V_A = \frac{4}{5} \cdot 20 = 16 \text{ km/h}$$

36 **Halla una fracción de la que sabemos que es igual a 1 si le añadimos 7 al numerador y 2 al denominador.**

También sabemos que el producto de ambos términos es 1 254.

Llamamos $x \rightarrow$ numerador de la fracción

$y \rightarrow$ denominador de la fracción

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+7}{y+2} = 1 \\ xy = 1\,254 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 7 = y + 2 \;\rightarrow\; x = y - 5 \\ (y-5)\cdot y = 1\,254 \;\rightarrow\; y^2 - 5y - 1\,254 = 0 \end{array}$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 5\,016}}{2} = \frac{5 \pm 71}{2} \begin{array}{l} y_1 = 38 \;\rightarrow\; x_1 = 38 - 5 = 33 \\ y_2 = -33 \;\rightarrow\; x_2 = -33 - 5 = -38 \end{array}$$

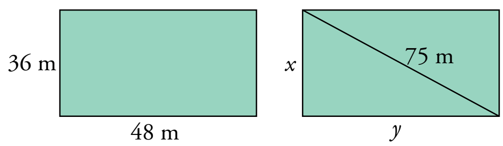
La fracción válida es $\frac{33}{38}$.

Página 98

37 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

38 **Calcula las dimensiones de un rectángulo de diagonal igual a 75 m, sabiendo que es semejante a otro de lados 36 m y 48 m.**

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 75^2 \\ \dfrac{x}{36} = \dfrac{y}{48} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5\,625 \\ 48x = 36y \end{array}\right\}$$



$$y = \frac{4}{3}x$$

$$x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = 5\,625 \;\rightarrow\; 9x^2 + 16x^2 = 50\,625 \;\rightarrow\; 25x^2 = 50\,625$$

$$x^2 = \frac{50\,625}{25} = 2\,025 \;\rightarrow\; x = 45 \;\; (x = -45 \text{ no es una solución válida})$$

$$y = \frac{4}{3} \cdot 45 = 60$$

Las dimensiones del rectángulo son 45 m y 60 m.

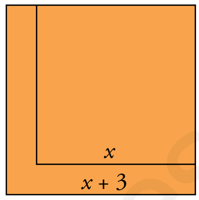
39 **Si se aumenta en 3 m el lado de un cuadrado, la superficie aumenta en 75 m².**

¿Cuál es la longitud del lado?

$(x+3)^2 = x^2 + 75 \ \rightarrow\ x^2 + 6x + 9 = x^2 + 75 \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 6x = 66 \ \rightarrow\ x = 11$

El lado del cuadrado mide 11 m.



40 **Los lados de un triángulo miden 18 cm, 16 cm y 9 cm. Si restamos una misma cantidad a los tres lados, obtenemos un triángulo rectángulo.**

¿Qué cantidad es esa?

$(18-x)^2 = (16-x)^2 + (9-x)^2$

$324 + x^2 - 36x = 256 + x^2 - 32x + 81 + x^2 - 18x \ \rightarrow\ x^2 - 14x + 13 = 0$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196-52}}{2} = \frac{14 \pm 12}{2} \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$x = 13$ no puede ser, porque nos quedaría una longitud negativa $(9 - 13 < 0)$.

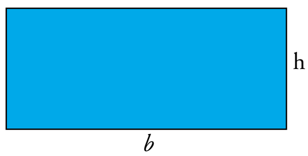
Solución: $x = 1$ cm es la cantidad restada.

41 **Si acortamos en 2 cm la base de un rectángulo y en 1 cm su altura, el área disminuye en 13 cm².**

Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que su perímetro es de 24 cm.

Perímetro $= 2b + 2\text{h} = 24$ cm $\ \rightarrow\ b + \text{h} = 12$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Área}_1 = b \cdot \text{h} \\ \text{Área}_2 = (b-2)(\text{h}-1) \end{array}\right\} \ \text{Área}_2 = \text{Área}_1 - 13$$



$(b-2)(\text{h}-1) = b \cdot \text{h} - 13$

$b \cdot \text{h} - 2\text{h} - b + 2 = b \cdot \text{h} - 13 \ \rightarrow\ 2\text{h} + b = 15$

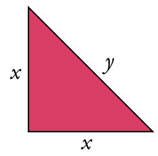
Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} b + \text{h} = 12 \\ b + 2\text{h} = 15 \end{array}\right\} \ \rightarrow\ \begin{array}{r} -b - \text{h} = -12 \\ b + 2\text{h} = 15 \\ \hline \text{h} = 3 \end{array} \ \rightarrow\ b = 12 - 3 = 9$$

Solución: La base del rectángulo mide 9 cm y la altura, 3 cm.

42 **Calcula los lados de un triángulo rectángulo isósceles cuyo perímetro es de 24 cm.**

Existen dos relaciones entre x e y:



- $y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \;\rightarrow\; y^2 = 2x^2$
- $2x + y = 24 \;\rightarrow\; y^2 = (24 - 2x)^2$

$2x^2 = 576 - 96x + 4x^2 \;\rightarrow\; 2x^2 - 96x + 576 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 48x + 288 = 0$

$$x = \frac{48 \pm \sqrt{2\,304 - 1\,152}}{2} = \frac{48 \pm \sqrt{1\,152}}{2}$$

$$x_1 = \frac{48 + 24\sqrt{2}}{2} = 40{,}97$$

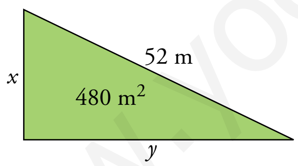
$$x_2 = \frac{48 - 24\sqrt{2}}{2} = 7{,}029$$

$x_1 = 40{,}97$ no puede ser porque el perímetro es 24.

$x_2 = 7{,}029 \;\rightarrow\; y = 9{,}942$

Los lados iguales miden 7,03 cm y la hipotenusa mide 9,94 cm.

43 **Halla los catetos de un triángulo rectángulo de 480 m² de área y cuya hipotenusa mide 52 m.**



Existen dos relaciones entre x e y:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 52^2 \\ \dfrac{xy}{2} = 480 \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2\,704 \\ xy = 960 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{960}{y} \;\rightarrow\; \left(\frac{960}{y}\right)^2 + y^2 = 2\,704 \;\rightarrow\; \frac{921\,600}{y^2} + y^2 - 2\,704 = 0$$

$y^4 - 2\,704y^2 + 921\,600 = 0$

Llamamos $z = y^2 \;\rightarrow\; z^2 = y^4$

$$z^2 - 2\,704z + 921\,600 = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{2\,704 \pm \sqrt{7\,311\,616 - 3\,686\,400}}{2} =$$

$$= \frac{2\,704 \pm \sqrt{3\,625\,216}}{2} =$$

$$= \frac{2\,704 \pm 1\,904}{2} \begin{cases} z_1 = 2\,304 \\ z_2 = 400 \end{cases}$$

- Si $z_1 = 2\,304 \;\rightarrow\; y = \sqrt{2\,304} = 48$ m $\;\rightarrow\; x = \dfrac{960}{48} = 20$

- Si $z_2 = 400 \;\rightarrow\; y = 20$ m $\;\rightarrow\; x = \dfrac{960}{20} = 48$

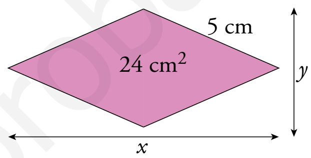
Nos quedamos con la parte positiva de la raíz cuadrada por estar trabajando con longitudes.

Solución: Los catetos miden 20 m y 48 m.

44 El lado de un rombo es 5 cm y su área es 24 cm². Calcula la longitud de sus diagonales.

Existen dos relaciones entre x e y:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \dfrac{x \cdot y}{2} = 24 \;\rightarrow\; x^2 = \dfrac{2\,304}{y^2} \\[2ex] \bullet\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 25 \;\rightarrow\; x^2 = 100 - y^2 \end{array}\right\}$$



$$\frac{2\,304}{y^2} = 100 - y^2 \;\rightarrow\; y^4 - 100y^2 + 2\,304 = 0 \;\rightarrow\; z = y^2 \;\rightarrow\; z^2 = y^4$$

$$z^2 - 100z + 2\,304 = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{100 \pm \sqrt{10\,000 - 9\,216}}{2} =$$

$$= \frac{100 \pm 28}{2} \begin{cases} z_1 = 64 \\ z_2 = 36 \end{cases}$$

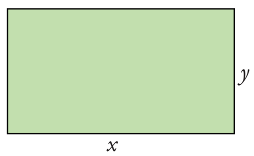
$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 8 \;\rightarrow\; x_1 = 6 \\ y_2 = 6 \;\rightarrow\; x_2 = 8 \end{array}\right\} \text{En realidad es la misma solución.}$$

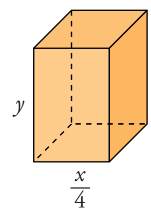
La diagonal mayor mide 8 cm y la menor mide 6 cm.

45 Con una cartulina de 240 cm² de superficie hacemos un prisma de base cuadrada, sin bases, cuyo volumen es de 360 cm³. ¿Cuáles son las dimensiones de la cartulina?

Existen dos relaciones entre x e y:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x \cdot y = 240 \;\rightarrow\; y = \dfrac{240}{x} \\[2ex] \bullet\ \dfrac{x}{4} \cdot \dfrac{x}{4} \cdot y = 360 \;\rightarrow\; y = \dfrac{5\,760}{x^2} \end{array}\right\}$$





$$\frac{240}{x} = \frac{5\,760}{x^2} \;\rightarrow\; 240x^2 = 5\,760x \;\rightarrow\; x(240x - 5\,760) = 0;$$

Como $x \neq 0 \;\rightarrow\; 240x = 5\,760 \;\rightarrow\; x = 24$ cm $\;\rightarrow\; y = 10$ cm

Las dimensiones de la cartulina son 24 cm y 10 cm.

46 **Un grupo de estudiantes alquila un piso por 490 € al mes. Si fueran dos más, cada uno pagaría 28 € menos.**

¿Cuántos son?

Llamamos $x \to$ número de estudiantes

$y \to$ dinero que paga cada estudiante

$$\left.\begin{array}{l} xy = 490 \\ (x+2)(y-28) = 490 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} xy = 490 \\ xy - 28x + 2y - 56 = 490 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} xy = 490 \\ 490 - 28x + 2y - 56 = 490 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} xy = 490 \\ -14x + y = 28 \end{array}\right\} \to y = 28 + 14x$$

$$x(28 + 14x) = 490 \to 14x^2 + 28x - 490 = 0 \to x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \to y_1 = 98 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

$x_2 = -7$ no vale, porque no puede haber un número negativo de estudiantes.

Han alquilado el piso 5 estudiantes (cada uno paga 98 € al mes).

47 **Un grifo tarda el doble de tiempo que otro en llenar un cubo de agua. Si los abrimos a la vez, el cubo se llena en 3 minutos.**

¿Cuánto tarda cada uno por separado?

Si entre los dos llenan el cubo en 3 minutos, en un minuto llenan $\frac{1}{3}$ de cubo.

Como el grifo A tarda el doble de tiempo en llenar el cubo que el grifo B:

- B llena $2x$ del cubo en un minuto.
- A llena x del cubo en un minuto.
- $A + B$ llenan $3x$ del cubo en un minuto.

Sabemos que $A + B$ llenan $\frac{1}{3}$ de cubo en un minuto.

Igualando, $3x = \frac{1}{3} \to x = \frac{1}{9}$ del cubo en un minuto.

A tarda 9 minutos en llenar el cubo.

B tarda 4 minutos y 30 segundos en llenar el cubo.

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

48 ¿Cómo se puede saber si una ecuación de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, tiene dos, una o ninguna solución, sin resolverla?

Si $b^2 - 4ac > 0$, hay dos soluciones.

Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una solución.

Si $b^2 - 4ac < 0$, no hay ninguna solución.

49 Determina para qué valores de k, la ecuación $2x^2 - 8x + k = 0$:

a) Tiene solución única.

b) Tiene dos soluciones distintas.

c) No tiene solución.

$b^2 - 4ac = (-8)^2 - 8k = 64 - 8k$

a) $64 - 8k = 0 \ \rightarrow\ k = 8$

b) $64 - 8k > 0 \ \rightarrow\ 64 > 8k \ \rightarrow\ k < 8$

c) $64 - 8k < 0 \ \rightarrow\ 64 < 8k \ \rightarrow\ k > 8$

50 Una solución de la ecuación $2x^2 + x + k = 0$ es $x = \frac{3}{2}$. Calcula k y la otra solución.

Sustituimos en la ecuación $x = \frac{3}{2}$.

$2 \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + k = 0 \ \rightarrow\ 6 + k = 0 \ \rightarrow\ k = -6$

La ecuación es $2x^2 + x - 6 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

La otra solución es $x = -2$.

51 Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 y –1.

$(x - 3)(x + 1) = 0 \ \rightarrow\ x^2 - 2x - 3 = 0$

52 ¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación bicuadrada? Comprueba tu respuesta resolviendo estas ecuaciones:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ **b)** $x^4 - 4x^2 = 0$

c) $x^4 - 16 = 0$ **d)** $x^4 + x^2 = 0$

e) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **f)** $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

Una ecuación bicuadrada puede tener una, dos, tres, cuatro soluciones o no tener ninguna.

a) Hacemos un cambio de variable, $x^2 = z$, $x^4 = z^2$:

$$z^2 - 10z + 9 = 0 \rightarrow z = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

Como $z = x^2 \rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

b) $x^4 - 4x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$

c) $x^4 - 16 = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$

d) $x^4 + x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 0$

e) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

Haciendo el cambio de variable $z = x^2$, $z^2 = x^4$:

$$z^2 + 3z + 2 = 0 \rightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = -2 \end{cases}$$

Como $z = x^2 \rightarrow$ No existen soluciones.

f) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

Haciendo el cambio de variable $z = x^2$, $z^2 = x^4$:

$$4z^2 - 17z + 4 = 0 \rightarrow z = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8} \begin{cases} z_1 = 4 \\ z_2 = 1/4 \end{cases}$$

Como $z = x^2 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = -\frac{1}{2}$

53 **Escribe un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas cuya única solución sea $x = 1$, $y = 2$.**

Por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

Página 99

PROFUNDIZA

54 Obtención, paso a paso, de la solución general de la ecuación de segundo grado:

$ax^2 + bx + c = 0$ **(Pasa c al 2º miembro)**

$\Downarrow$

$ax^2 + bx = -c$ **(Multiplica por $4a$)**

$\Downarrow \cdot 4a$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ **(Suma b^2)**

$\Downarrow + b^2$

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

$\Downarrow$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Extrae la raíz cuadrada a los dos miembros y después despeja la x.

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \;\rightarrow\; 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \;\rightarrow\; x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b+2 - 4ac}}{2a}$

55 Comprueba si los siguientes sistemas tienen solución:

a) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 3y = 10 \\ x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$

☛ *Obtén la solución del sistema formado por las dos primeras ecuaciones y prueba si esa solución verifica la tercera ecuación.*

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 5 \\ x + 3y = 10 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$ Resolvemos el sistema $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -x + 2y = -5 \\ x + 3y = 10 \\ \hline 5y = 5 \end{array} \;\rightarrow\; y = 1 \;\rightarrow\; x = 5 + 2 = 7$$

Verificamos la solución $x = 7$, $y = 1$ en la tercera ecuación:

$7 - 1 = 6 \neq 0 \;\rightarrow\;$ El sistema no tiene solución

b) $\left\{\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ x - y &= 2 \\ x + y &= 4 \end{aligned}\right.$ Resolvemos el sistema $\left\{\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right.$

$$\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ -x + y = -2 \\ \hline 3y = 3 \end{array} \;\to\; y = 1 \;\to\; x = 2 + 1 = 3$$

Comprobamos si la solución $x = 3,\ y = 1$ cumple la tercera ecuación:

$x + y = 4 \;\to\; 3 + 1 = 4$. La cumple.

La solución es $x = 3,\ y = 1$.

56 **Resuelve:**

a) $\left\{\begin{aligned} x - 5 &= 0 \\ 2x + y &= 7 \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned}\right.$ b) $\left\{\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x - 2z &= 6 \\ y + z &= 3 \end{aligned}\right.$

a) De la primera ecuación se obtiene $x = 5$

De la segunda ecuación, si $x = 5$, entonces $y = -3$.

De la tercera ecuación, si $x = 5$ e $y = -3$, $z = 1$.

b) Restando las dos primeras, queda lo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} -y + 2z &= -6 \\ y + z &= 3 \end{aligned}\right\} \;\to\; 3z = -3 \;\to\; z = -1$$

De la tercera ecuación, si $z = -1$, entonces $y = 4$.

De la primera ecuación, si $y = 4$, entonces $x = 4$.

57 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

58 **Resuelve como el ejercicio anterior:**

a) $\dfrac{2 - x}{x - 7} \geq 0$ b) $\dfrac{x^2}{3 - x} \geq 0$ c) $\dfrac{x + 1}{x^2} < 0$

a) $\dfrac{2 - x}{x - 7} \geq 0$

$2 - x > 0$	$2 - x < 0$	$2 - x < 0$
$x - 7 < 0$	$x - 7 < 0$	$x - 7 > 0$

2 7

El conjunto de soluciones es $[2, 7)$.

b) $\dfrac{x^2}{3-x} \ge 0$

$$\begin{array}{c|c|c} x^2 > 0 & x^2 > 0 & x^2 > 0 \\ 3-x > 0 & 3-x > 0 & 3-x < 0 \\ \hline \end{array}$$
$$\qquad 0 \qquad\qquad 3$$

El conjunto de soluciones es $(-\infty, 3)$.

c) $\dfrac{x+1}{x^2} < 0$

$$\begin{array}{c|c|c} x+1 < 0 & x+1 > 0 & x+1 > 0 \\ x^2 > 0 & x^2 > 0 & x^2 > 0 \\ \hline \end{array}$$
$$\qquad -1 \qquad\qquad 0$$

El conjunto de soluciones es $(-\infty, -1)$.

59 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

60 **Un coche va de A a B con una velocidad de 60 km/h y vuelve de B a A a 40 km/h. ¿Cuál fue la velocidad media del recorrido?**

☛ *No es 50 km/h.*

x es la distancia de A a B.

El coche tarda $\dfrac{x}{60}$ h en ir de A a B y $\dfrac{x}{40}$ h en ir de B a A.

La velocidad media es el espacio total dividido por el tiempo total.

$$\text{Velocidad media} = \frac{2x}{\dfrac{x}{60} + \dfrac{x}{40}} = \frac{2x}{\dfrac{5x}{120}} = \frac{240x}{5x} = 48 \text{ km/h}$$

61 **¿Cuántos litros de leche con un 10% de grasa hemos de mezclar con otra leche que tiene un 4% de grasa para obtener 18 litros con un 6% de grasa?**

$x \;\rightarrow\;$ litros de leche con un 10% de grasa

$y \;\rightarrow\;$ litros de leche con un 4% de grasa

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 18 \\ 0{,}1x + 0{,}04y = 0{,}06(x+y) \end{array}\right\} \; 0{,}04x = 0{,}02y \;\rightarrow\; y = 2x$$

$x + 2x = 18 \;\rightarrow\; 3x = 18 \;\rightarrow\; x = 6, \; y = 12$

Hemos de mezclar 6 litros de leche de un 10% de grasa con 12 litros de leche de un 4% de grasa.

62 **Dos grifos abiertos a la vez llenan un depósito en 90 minutos. Abiertos por separado, uno de ellos tardaría 4 horas más que el otro en llenar ese mismo depósito. Calcula cuánto tardará cada grifo por separado.**

90 minutos $\rightarrow$ 1,5 h

$x \rightarrow$ tiempo que tarda un grifo en llenar el depósito (en horas)

$y \rightarrow$ tiempo que tarda el otro grifo en llenar el depósito (en horas)

$\dfrac{V}{x} \rightarrow$ Cantidad de agua en 1 h del primer grifo

$\dfrac{V}{y} \rightarrow$ Cantidad de agua en 1 h del segundo grifo

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{V}{x}\cdot 1{,}5+\dfrac{V}{y}\cdot 1{,}5=V\\ x=4+y\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}\dfrac{1{,}5}{x}+\dfrac{1{,}5}{y}=1\\ x=4+y\end{array}\right\}\ 1{,}5y+1{,}5x=xy$$

$$1{,}5y+1{,}5(4+y)=(4+y)y \rightarrow 1{,}5y+6+1{,}5y=4y+y^2 \rightarrow y^2+y-6=0$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}\begin{array}{l} y_1=2\\ y_2=-3\end{array}$$

$y=-3 \rightarrow$ no puede haber tiempos negativos

$y=2 \rightarrow x=6$

Un grifo tardará 2 h en llenar el depósito y el otro tardará 6 h en llenar el mismo depósito.

63 **Un avión militar vuela a 600 km/h cuando no hace viento y puede llevar combustible para 4 horas. Cierto día, al ir a salir para una misión de reconocimiento, hacía un viento en contra de 40 km/h, que se mantendría, según los pronósticos, durante todo el trayecto.**

¿Cuántos kilómetros pudo alejarse de su base de modo que pudiese regresar sin repostar?

A la ida vuela a 560 km/h, a la vuelta vuela a 640 km/h

Como mucho puede estar 4 horas volando.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Llamamos } x \text{ al tiempo que tarda a la ida}\\ \text{Llamamos } y \text{ al tiempo que tarda a la vuelta}\end{array}\right\} \rightarrow x+y=4$$

Tiene que hacer los mismos kilómetros a la ida que a la vuelta:

$560x = 640y$

Hay dos soluciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 4 \\ 560x - 640y = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 640x + 640y = 2\,560 \\ 560x - 640y = 0 \end{array}\right\} \to 1\,200x = 2\,560 \to$$

$$\to x = \frac{2\,560}{1\,200} = \frac{32}{15} = 2{,}133 = 2 \text{ horas y } 8 \text{ minutos}$$

Como $x = 2$ horas y 8 minutos, entonces $y = 1$ hora y 52 minutos.

En 2 horas y 8 minutos a 560 km/h hace 1 195 km, aproximadamente.

64 **La suma de las dos cifras de un número es 8. Si al número se le añaden 18 unidades, el número resultante está formado por las mismas cifras en orden inverso. ¿Cuál es ese número?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Llamamos } x \text{ a las unidades del número} \\ \text{Llamamos } y \text{ a las decenas del número} \end{array}\right\} \to x + y = 8$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{El número tiene un valor de } 10y + x \\ \text{El número, al sumarle 18 unidades, es } 10x + y \end{array}\right\} \to 10y + x + 18 = 10x + y$$

Queda el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 8 \\ 9x - 9y = 18 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 9x + 9y = 72 \\ 9x - 9y = 18 \end{array}\right\} \to 18x = 90 \to x = 5,\ y = 3$$

El número es 35.

Página 120

PRACTICA

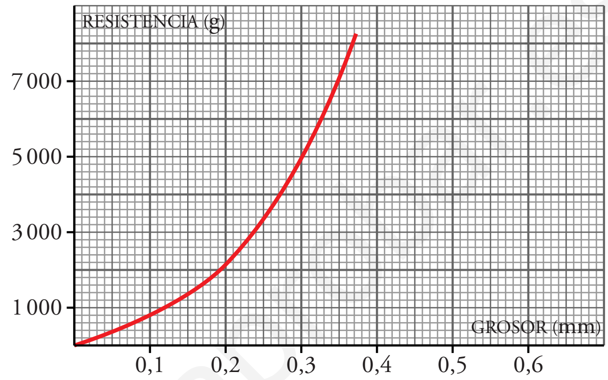
Interpretación de gráficas

1 **En un libro de pesca hemos encontrado la siguiente gráfica que relaciona la resistencia de un tipo de hilo con su grosor:**

a) ¿Qué grosor debe tener el sedal de un pescador que quiera pescar salmones cuyo peso no supere los 2 kg?

b) ¿Con cuántos gramos se podría romper un sedal de 0,2 mm de grosor?

¿Y de 0,35 mm?



a) Un grosor de, al menos, 0,17 mm.

b) Con más de 2 200 g se rompería un sedal de 0,2 mm.

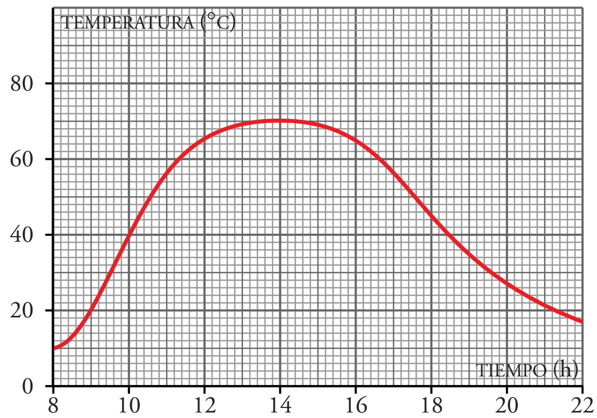
Con más de 7 000 g se rompería un sedal de 0,35 mm.

2 **La siguiente gráfica nos muestra la temperatura de un radiador desde que se enciende la calefacción (8 h) hasta 14 horas más tarde.**

a) ¿Cuál es la temperatura máxima que alcanza y cuándo la alcanza?

b) Calcula el aumento de temperatura por hora entre las 8 h y las 10 h. ¿Es el mismo entre las 10 h y las 12 h?

c) ¿Cuál es el dominio de definición?



d) Di en qué intervalo es decreciente la función.

a) La temperatura máxima es de 70 °C y la alcanza a las 14 horas.

b) $\dfrac{40-10}{10-8} = \dfrac{30}{2} = 15$ °C cada hora.

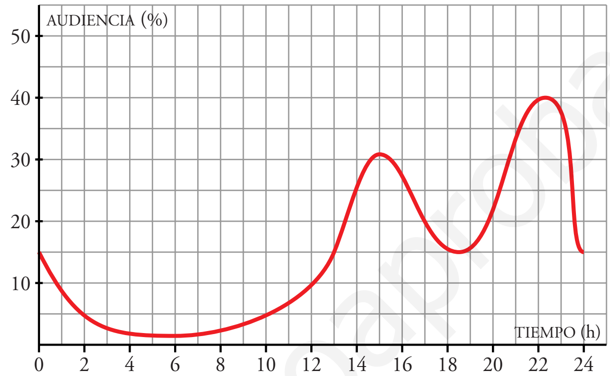
Entre las 10 h y las 12 h, el aumento de temperatura es:

$$\frac{65 - 40}{12 - 10} = \frac{25}{2} = 12{,}5\ °C$$

c) *Dominio* = [8, 22]

d) El intervalo de decrecimiento es [14, 22].

3 **a) Esta curva muestra la audiencia de televisión en España en un día promedio del mes de abril de 2002. ¿Cuáles son sus puntos más importantes? Descríbela.**

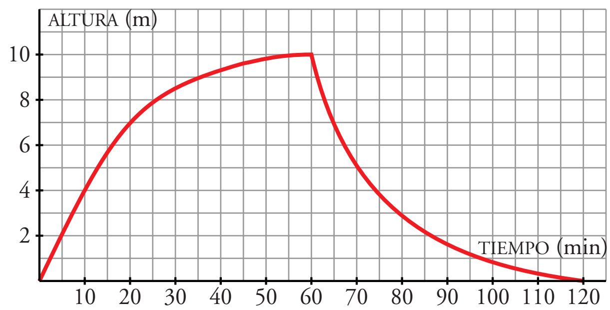


b) Cuando se habla de audiencia se dice que España, al igual que Francia, Italia o Portugal, pertenece al grupo de países "camello" cuyas curvas de audiencia tienen dos "jorobas". Otros países como Alemania y Dinamarca son del grupo dromedario con una sola "joroba", que se produce alrededor de las 20 h. ¿Qué quieren decir los técnicos cuando hablan de "jorobas"?

a) A las 0 h hay un 15% de gente viendo la televisión. De esa hora en adelante decrece el porcentaje hasta las 6 h, que empieza a crecer poco a poco hasta las 15 h, que es cuando hay más de un 30% de audiencia. De nuevo baja hasta un 15% a las 18 h, y vuelve a subir muy rápido hasta un 40% de audiencia a las 22 h, que empieza a decrecer, quedándose a las 24 h en un 15%, como se empezó.

b) Las jorobas son los máximos, es decir, los puntos con un índice de audiencia más alto.

4 **Esta gráfica muestra cómo varía la altura del agua en un depósito que se llena con una bomba y que lleva dos válvulas para regular la entrada y la salida del agua.**



a) ¿Cuál es el máximo de esta función? Explica su significado.

b) ¿En qué puntos corta el eje de las x? ¿Qué significan esos puntos?

c) ¿Cuál es su dominio de definición?

d) Di en qué intervalo es creciente y en cuál es decreciente.

a) El máximo llega a los 60 minutos y es de 10 m de altura. Esto significa que al llegar el agua a los 10 m de altura, se abre la válvula que lo vacía.

b) En $x = 0$ y en $x = 120$.

Para $x = 0$, empieza a llenarse el depósito, y para $x = 120$, es que el depósito se ha vaciado a las 2 horas.

c) *Dominio* = [0, 120]

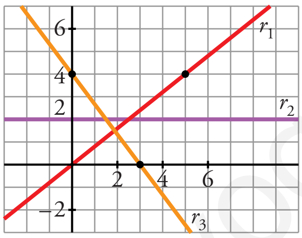
d) Creciente $\rightarrow$ (0, 60)

Decreciente $\rightarrow$ (60, 120)

Página 121

Gráficas y fórmulas

5 Asocia a cada recta su ecuación:



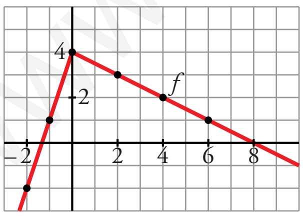
a) $y - 2 = 0$

b) $4x - 5y = 0$

c) $4x + 3y = 12$

a) r_2, b) r_1, c) r_3

6 Observa la gráfica de la función f y completa la siguiente tabla de valores:



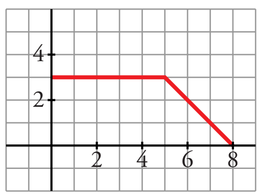
x	–2	–1	0	2	4	6	8
y	–2	1	4	3	2	1	0

7 ¿A cuál de las siguientes funciones f, g o h corresponde esta gráfica?

a) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ -x + 8 & \text{si } 6 \le x \le 8 \end{cases}$

b) $g(x) = \dfrac{24 - 3x}{8}$

c) $h(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ -x + 8 & \text{si } 5 \le x \le 8 \end{cases}$



Corresponde a la función c): $h(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ -x + 8 & \text{si } 5 \le x \le 8 \end{cases}$

8 **Comprueba si los pares de valores que figuran en la siguiente tabla corresponden a la función dada y completa los que faltan:**

$$y = 3 - \frac{1}{x-2}$$

x	2,01	2,5	1,9	102	…	…
y	–97	…	13	…	3,5	103

¿Qué valor no podemos dar a x en esa función?

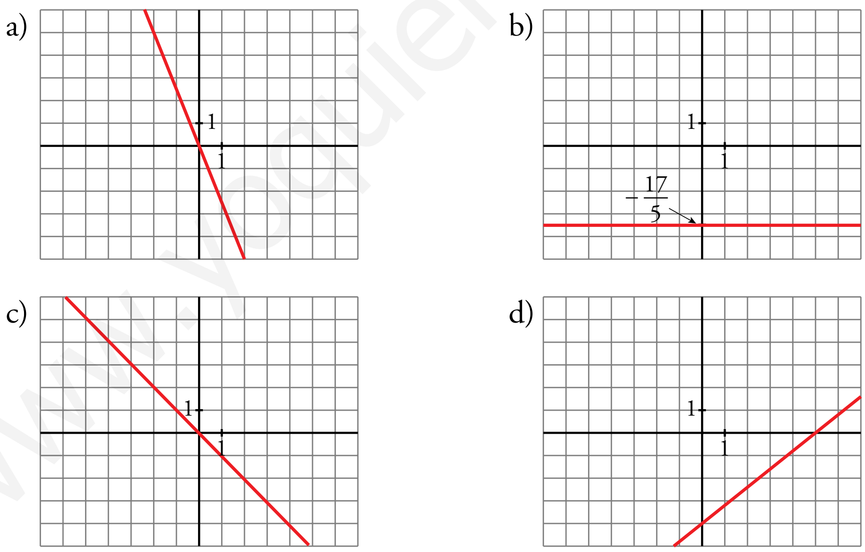
x	2,01	2,5	1,9	102	0	1,99
y	–97	1	13	2,99	3,5	103

A la x no podemos darle el valor $x = 2$.

Funciones lineales

9 **Representa:**

a) $y = -2{,}5x$ b) $y = -\frac{17}{5}$ c) $y = -x$ d) $y = \frac{4x - 20}{5}$



10 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

11 **Halla, en cada caso, la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B y escribe su ecuación:**

a) $A(5, 0)$, $B(0, 3)$ b) $A(-4, 1)$, $B(-2, 5)$

c) $A(2, -3)$, $B(-1, 2)$ d) $A\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $B\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$

a) $m = \dfrac{3-0}{0-5} = -\dfrac{3}{5}$; $y = -\dfrac{3}{5}x + 3$

b) $m = \dfrac{5-1}{-2-(-4)} = \dfrac{4}{2} = 2$; $y - 5 = 2(x+2)$; $y = 2x + 9$

c) $m = \dfrac{2-(-3)}{-1-2} = \dfrac{5}{-3} = -\dfrac{5}{3}$; $y - 2 = -\dfrac{5}{3}(x+1)$; $y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{1}{3}$

d) $m = \dfrac{-3/2-3}{-2-1/2} = \dfrac{-9/2}{-5/2} = \dfrac{9}{5}$; $y - 3 = \dfrac{9}{5}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$; $y = \dfrac{9}{5}x + \dfrac{21}{10}$

12 **Di cuál es la pendiente de cada una de las siguientes rectas:**

a) $y = 3x - 5$ **b)** $y = \dfrac{2x+3}{5}$ **c)** $y = 3$ **d)** $x - 2y + 4 = 0$

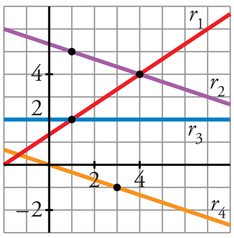
a) $y = 3x - 5 \;\rightarrow\; m = 3$

b) $y = \dfrac{2x+3}{5} \;\rightarrow\; m = \dfrac{2}{5}$

c) $y = 3 \;\rightarrow\; m = 0$

d) $x - 2y + 4 = 0 \;\rightarrow\; y = \dfrac{x+4}{2} \;\rightarrow\; m = \dfrac{1}{2}$

13 **Halla la ecuación de las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4.**



r_1 pasa por (1, 2) y (4, 4) $\rightarrow\; m = \dfrac{4-2}{4-1} = \dfrac{2}{3}$

$y - 2 = \dfrac{2}{3}(x-1) \;\rightarrow\; y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$

r_2 pasa por (4, 4) y (1, 5) $\rightarrow\; m = \dfrac{5-4}{1-4} = \dfrac{-1}{3}$

$y - 5 = -\dfrac{1}{3}(x-1) \;\rightarrow\; y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{16}{3}$

r_3 es una recta paralela al eje X que pasa por (1, 2) $\rightarrow\; y = 2$

r_4 es paralela a r_2 y pasa por (0, 0) $\rightarrow\; y = -\dfrac{1}{3}x$

Página 122

14 **Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas de estas rectas y represéntalas:**

a) $y = -3 + 2(x - 1)$ b) $y = \frac{3x + 15}{5}$ c) $-x + 4y = -2$ d) $x - y = 0$

a) Eje $X \rightarrow \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Eje $Y \rightarrow (0, -5)$

b) Eje $X \rightarrow (-5, 0)$

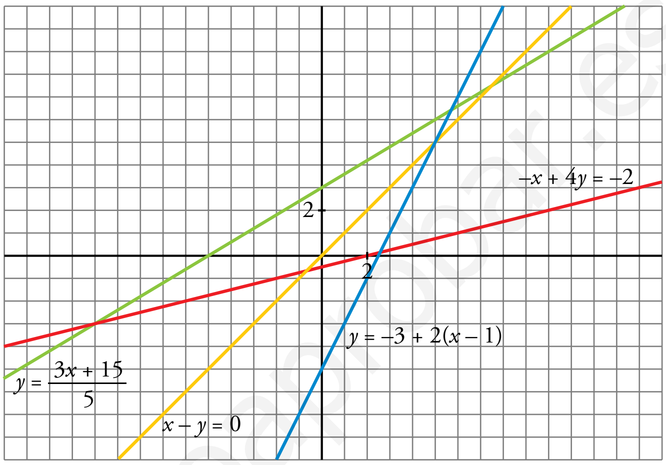
Eje $Y \rightarrow (0, 3)$

c) Eje $X \rightarrow (2, 0)$

Eje $Y \rightarrow \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

d) Eje $X \rightarrow (0, 0)$

Eje $Y \rightarrow (0, 0)$



15 **Escribe la ecuación de las siguientes rectas y represéntalas:**

a) Su pendiente es $m = -\frac{2}{3}$ y pasa por el punto $P(-1, 2)$.

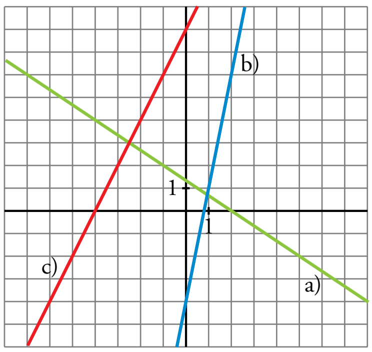
b) Su pendiente es $m = 5$ y su ordenada en el origen es -4.

c) Es paralela a $2x - y + 4 = 0$ y pasa por el punto $P(-3, 2)$.

a) $y - 2 = -\frac{2}{3}(x + 1) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

b) $y = 5x - 4$

c) $y - 2 = 2(x + 3) \rightarrow y = 2x + 8$



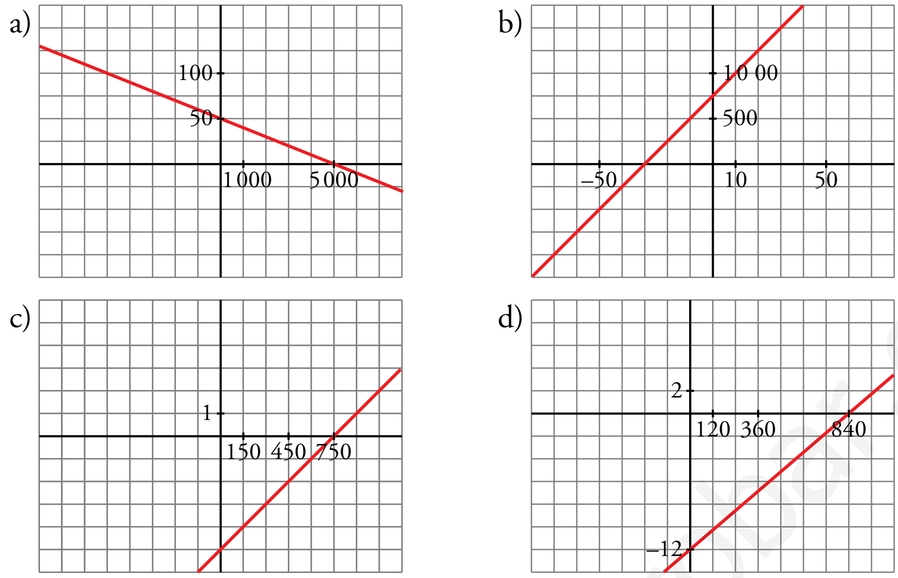
16 **Representa las siguientes rectas tomando una escala adecuada en cada eje:**

a) $y = 50 - 0{,}01x$

b) $y = 25x + 750$

c) $y = \frac{x}{150} - 5$

d) $x - 70y = 840$



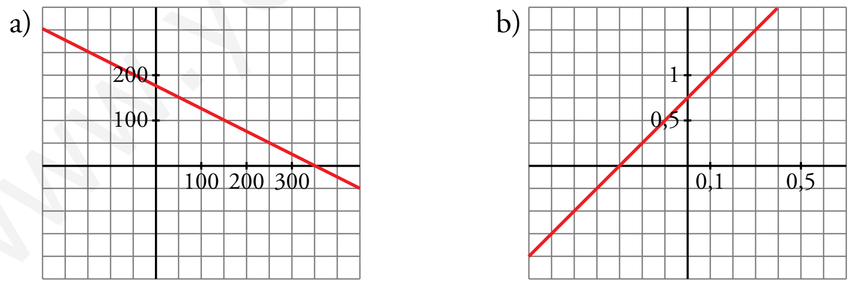
17 **Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q y represéntala:**

a) $P(350, 0)$, $Q(100, 135)$ **b)** $P(0{,}04;\ 0{,}85)$, $Q(0{,}4;\ 1{,}75)$

a) $m = -\dfrac{135}{250} = -\dfrac{27}{50}$; $y = -\dfrac{27}{50}(x - 350) \;\rightarrow\; y = -\dfrac{27}{50}x + 189$

b) $m = \dfrac{1{,}75 - 0{,}85}{0{,}4 - 0{,}04} = \dfrac{0{,}9}{0{,}36} \;\rightarrow\; m = \dfrac{5}{2}$

$y = 1{,}75 + 2{,}5(x - 0{,}4) \;\rightarrow\; y = 2{,}5x + 0{,}75$



18 **Di, sin representarlas, cuáles de las siguientes rectas son paralelas:**

a) $y = \dfrac{2x - 1}{3}$ **b)** $y = \dfrac{1}{2}$ **c)** $y = 2x + 3$

d) $y - 2x = -5$ **e)** $y = -7$ **f)** $2x - 3y = 0$

a) paralela a f); la pendiente de ambas es $m = \dfrac{2}{3}$.

c) paralela a d); ambas tienen pendiente $m = 2$.

b) paralela a e); ambas tienen pendiente $m = 0$.

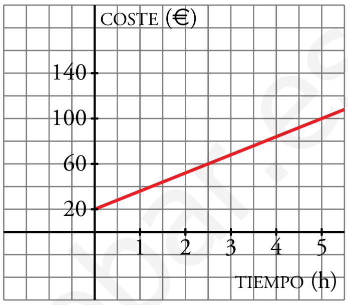
19 **Un fontanero cobra 18 € por el desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo.**

a) Haz una tabla de valores de la función *tiempo-coste* y represéntala gráficamente.

b) Si ha cobrado por una reparación 70,50 €, ¿cuánto tiempo ha invertido en la reparación?

a)

TIEMPO (h)	1	2	3	4	5
COSTE (€)	33	48	63	78	93



b) $y = 18 + 15x$ donde x son las horas invertidas e y es el coste de la reparación.

Si $y = 70{,}50 \rightarrow x = \dfrac{70{,}50 - 18}{15} = 3{,}5$

Ha invertido 3 horas y media.

PIENSA Y RESUELVE

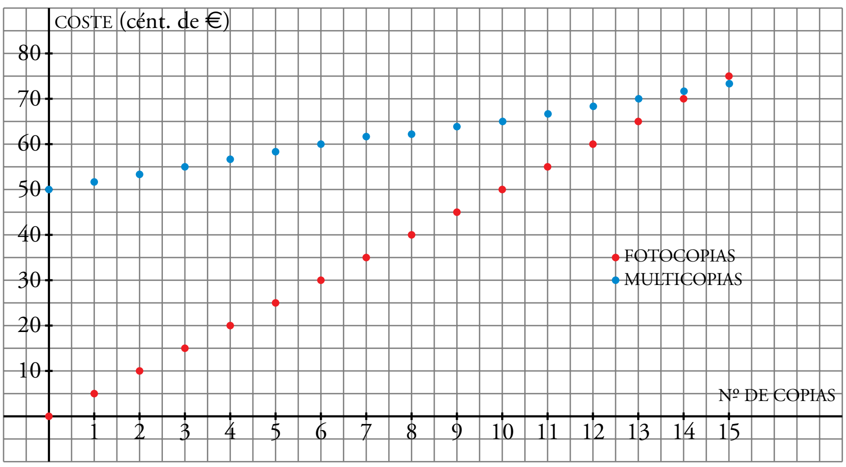
20 **Una casa de reprografía cobra 5 cent. por cada fotocopia. Ofrece también un servicio de multicopia, por el que cobra 50 cent. fijos por el cliché y 1,50 cent. por cada copia de un mismo ejemplar.**

Haz, para cada caso, una tabla de valores que muestre lo que hay que pagar según el número de copias realizadas. Representa las funciones obtenidas.

¿Tiene sentido unir los puntos en cada una de ellas? Obtén la expresión analítica de cada función. ¿A partir de cuántas copias es más económico utilizar la multicopista?

Nº DE FOTOCOPIAS	1	2	3	4	5	6
COSTE (cent. de €)	5	10	15	20	25	30

Nº DE MULTICOPIAS	1	2	3	4	5
COSTE (cent. de €)	51,5	53	54,5	56	57,5



No tiene sentido unir los puntos de cada una de ellas, ya que no se puede hacer una fracción de fotocopia, como, por ejemplo, 1/2 fotocopia.

Fotocopias $\rightarrow$ $y = 5x$ con $x \in \mathbb{N}$

Multicopias $\rightarrow$ $y = 50 + 1{,}5x$ con $x \in \mathbb{N}$

Si nos fijamos en la gráfica, a partir de 15 copias es más económico utilizar la multicopista. Lo hacemos analíticamente, calculando cuándo el coste es el mismo para los dos métodos.

$5x = 50 + 1{,}5x \rightarrow 3{,}5x = 50 \rightarrow x = 14{,}28$

Por tanto, a partir de 15 copias es más económico utilizar la multicopista.

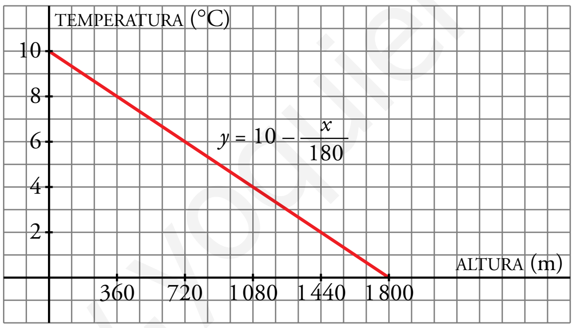
21 Mientras ascendíamos por una montaña, medimos la temperatura y obtuvimos los datos de esta tabla:

ALTURA (m)	0	360	720	990
TEMPERATUTA (°C)	10	8	6	4,5

a) Representa la función *altura-temperatura* y busca su expresión analítica.

b) ¿A partir de qué altura la temperatura es menor que 0 °C?

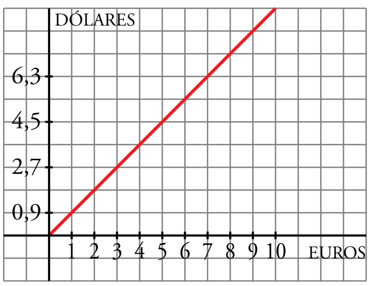
a)



b) A partir de 1 800 m, la temperatura es menor que 0 °C

22 En un banco nos dan 10 euros por 9 dólares. Escribe la expresión analítica de la función que da el cambio de euros a dólares y represéntala. ¿De qué tipo es?

$\left.\begin{array}{l} x \rightarrow \text{euros} \\ y \rightarrow \text{dólares} \end{array}\right\} \; y = \dfrac{9x}{10} = 0{,}9x$ es una función de proporcionalidad.

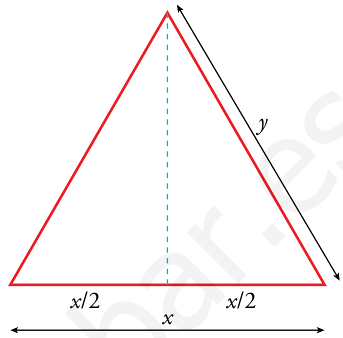


23 **Un triángulo isósceles tiene 20 cm de perímetro.**

Llama x al lado desigual e y a los lados iguales. Haz una tabla de valores y, a partir de ella, escribe la relación entre x e y.

¿Qué tipo de función obtienes?

x	2	4	6	8	10
y	9	8	7	6	5



$2y + x = 20$

$y = -\frac{x}{2} + 10$

Es una función lineal

24 **Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{2x-7}$ c) $y = \sqrt{2-x}$

d) $y = \sqrt{-x}$ e) $y = \sqrt{x^2+1}$ f) $y = \sqrt[3]{2x}$

a) $Dom\, f = [3, +\infty)$ b) $Dom\, f = \left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$ c) $Dom\, f = (-\infty, 2]$

d) $Dom\, f = (-\infty, 0]$ e) $Dom\, f = \mathbb{R}$ f) $Dom\, f = \mathbb{R}$

Página 123

25 **Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \frac{1}{5x-15}$ b) $y = \frac{2}{2x+7}$ c) $y = \frac{1}{4x-x^2}$

d) $y = \frac{-3}{x^2+1}$ e) $y = \frac{x}{x^2-9}$ f) $y = \frac{1-x}{x^2-x-6}$

a) $Dom\, f = \mathbb{R} - \{3\}$ b) $Dom\, f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{7}{2}\right\}$

c) $Dom\, f = \mathbb{R} - \{0, 4\}$ d) $Dom\, f = \mathbb{R}$

e) $Dom\, f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

f) $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{3, -2\}$

En todos los casos se han quitado del dominio de la función aquellos valores que anulan el denominador.

26 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

27 Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

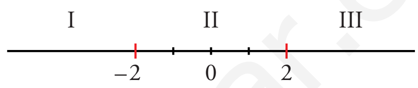
a) $y = \sqrt{4 - x^2}$ b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

c) $y = \sqrt{2x^2 - 5x}$ d) $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$

e) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ f) $y = \sqrt{x^2 - x + 5}$

a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

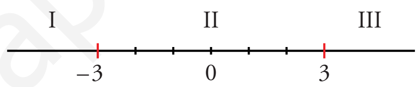
Resolvemos $4 - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm 2$



$$\left.\begin{array}{lll} \text{I) Si } x < -2 & \rightarrow & 4 - x^2 < 0 \\ \text{II) Si } -2 < x < 2 & \rightarrow & 4 - x^2 > 0 \\ \text{III) Si } x > 2 & \rightarrow & 4 - x^2 < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \; Dom\, f = [-2, 2]$$

b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

$x^2 - 9 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm 3$

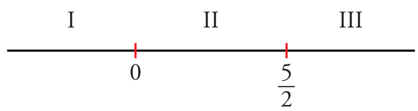


$$\left.\begin{array}{lll} \text{I) Si } x < -3 & \rightarrow & x^2 - 9 > 0 \\ \text{II) Si } -3 < x < 3 & \rightarrow & x^2 - 9 < 0 \\ \text{III) Si } x > 3 & \rightarrow & x^2 - 9 > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \; Dom\, f = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

c) $y = \sqrt{2x^2 - 5x}$

$2x^2 - 5x = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x(2x - 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

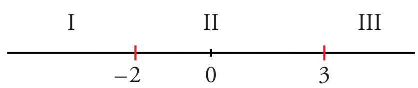


$$\left.\begin{array}{lll} \text{I) Si } x < 0 & \rightarrow & 2x^2 - 5x > 0 \\ \text{II) Si } 0 < x < 5/2 & \rightarrow & 2x^2 - 5x < 0 \\ \text{III) Si } x > 5/2 & \rightarrow & 2x^2 - 5x > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \; Dom\, f = (-\infty, 0] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

d) $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$

$x^2 - x - 6 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

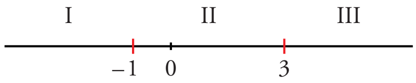


$$\left.\begin{array}{lll} \text{I) Si } x < -2 & \rightarrow & x^2 - x - 6 > 0 \\ \text{II) Si } -2 < x < 3 & \rightarrow & x^2 - x - 6 < 0 \\ \text{III) Si } x > 3 & \rightarrow & x^2 - x - 6 > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \; Dom\, f = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$$

e) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

$-x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = \dfrac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$



$$\left.\begin{array}{lll} \text{I) Si } x < -1 & \rightarrow & -x^2 + 2x + 3 < 0 \\ \text{II) Si } -1 < x < 3 & \rightarrow & -x^2 + 2x + 3 > 0 \\ \text{III) Si } x > 3 & \rightarrow & -x^2 + 2x + 3 < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \ Dom\, f = [-1, 3]$$

f) $y = \sqrt{x^2 - x + 5}$

$x^2 - x + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 20}}{2}$ No tiene solución.

Luego, $x^2 - x + 5$ no se anula en ningún valor de x, es decir, es siempre mayor que cero o menor. Para averiguarlo, tomamos cualquier valor de x, por ejemplo $x = 0$, y lo sustituímos en la expresión:

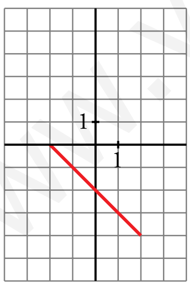
$x^2 - x + 5 = 0 - 0 + 5 > 0 \quad \rightarrow \quad Dom\, f = \mathbb{R}$.

28 **Representa las siguientes funciones para los valores en los que están definidas:**

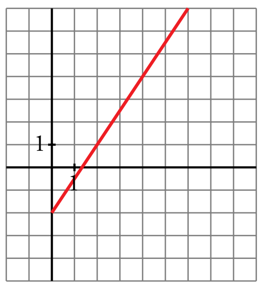
a) $y = -x - 2$ si $-2 \le x \le 2$

b) $y = \dfrac{3x - 4}{2}$ si $0 \le x \le 6$

a)



b)



29 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

30 **Representa estas funciones:**

a) $y = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

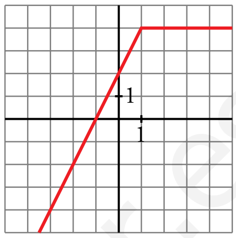
b) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 - 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \le x < 5 \\ 5 & \text{si } 5 \le x \le 7 \end{cases}$

a) $y = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

El 1^er^ trozo de la función es la recta $y = 2x + 2$ definida para $x < 1$.

x	–1	0	0,9
y	0	–2	–3,8

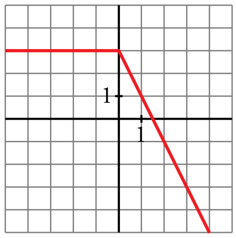


La recta $y = 4$ definida para $x \geq 1$ es una recta paralela al eje X que pasa por $(1, 4)$.

b) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

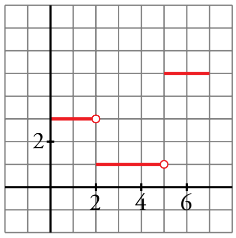
El 1^er^ trozo de función es la recta constante $y = 3$ definida para $x < 0$.

El 2º trozo es la recta $y = 3 - 2x$ definida para $x \geq 0$:



x	0	1	3
y	3	1	–3

c) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ 5 & \text{si } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$



Los tres tramos de la función son rectas paralelas al eje X.

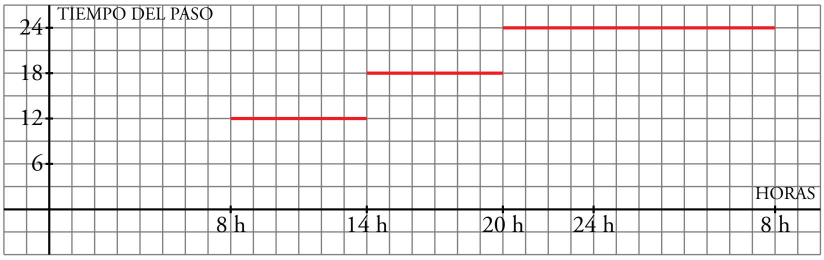
31 **En las llamadas telefónicas interurbanas, el tiempo que dura cada paso del contador depende de la hora de la llamada:**

De 8 h a 14 h	12 segundos
De 14 h a 20 h	18 segundos
De 20 h a 8 h del día siguiente ..	24 segundos

a) Representa gráficamente la función que da la duración del paso del contador según la hora de la llamada para un día completo.

b) Busca la expresión analítica de esa función.

a)

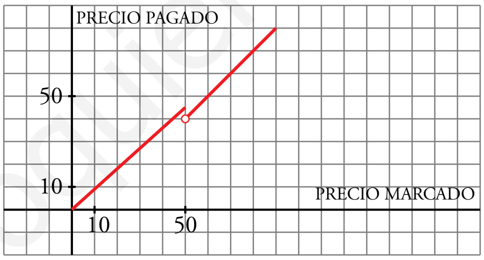


b) $y = \begin{cases} 24 & \text{si} \quad 0 < x \le 8 \\ 12 & \text{si} \quad 9 < x \le 14 \\ 18 & \text{si} \quad 14 < x \le 20 \\ 24 & \text{si} \quad 20 < x \le 24 \end{cases}$

32 **En una tienda rebajan el 10% en compras inferiores a 50 € y el 20% si son superiores a 50 €. ¿Cuál es la relación entre el precio marcado (x) y el que pagamos (y)? Represéntala gráficamente.**

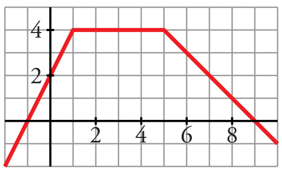
$y = \begin{cases} 0{,}9x & \text{si} \quad 0 \le x \le 50 \\ 0{,}8x & \text{si} \quad x > 50 \end{cases}$

x	10	20	50	60	80
y	9	18	45	48	64



Página 124

33 **Halla la expresión analítica de la función que se representa:**



Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos de rectas que forman la función:

- Para $x < 1$ la recta pasa por $(0, 2)$ y $(1, 4)$:

  $m = 2 \;\rightarrow\; y = 2 + 2\,(x - 0) \;\rightarrow\; y = 2 + 2x$

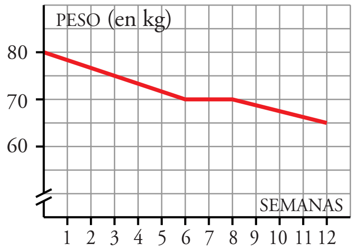
- Para $1 \le x \le 5$ la recta es $y = 4$.

- Para $x \ge 5$ la recta pasa por $(5, 4)$ y $(9, 0)$:

  $m = -1 \;\rightarrow\; y = 4 - 1\,(x - 5) \;\rightarrow\; y = 9 - x$

La expresión analítica de esa función es: $y = \begin{cases} 2 + 2x & \text{si} \quad x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1 \le x \le 5 \\ 9 - x & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$

34 **El médico ha puesto a Ricardo un régimen de adelgazamiento y le ha hecho esta gráfica para explicarle lo que espera conseguir en las 12 semanas que dure la dieta.**



a) ¿Cuál era su peso al comenzar el régimen?

b) ¿Cuánto tiene que adelgazar por semana en la primera etapa del régimen? ¿Y entre la 6ª y la 8ª semana?

c) Halla la expresión analítica de esa función.

a) Ricardo pesaba 80 kg al comenzar el régimen.

b) $\frac{5}{3} = 1{,}67$ kg por semana

Entre la 6ª y 8ª semana no tiene que adelgazar nada.

c) Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos:

- Para $0 \le x \le 6$, la pendiente $m = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$ y $n = 80 \rightarrow$

  $\rightarrow y = -\frac{5}{3}x + 80$

- Para $6 < x \le 8$, $y = 70$

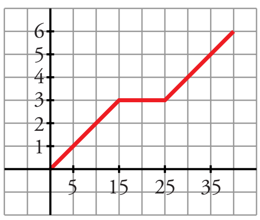
- Para $8 < x \le 12$, $m = -\frac{5}{4}$ y pasa por $(12, 65)$

  $y - 65 = -\frac{5}{4}(x - 12) \rightarrow y = -\frac{5}{4}x + 80$

Luego, la expresión analítica de esta función será:

$$y = \begin{cases} -\frac{5}{3}x + 80 & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ 70 & \text{si } 6 < x \le 8 \\ -\frac{5}{4}x + 80 & \text{si } 8 < x \le 12 \end{cases}$$

35 **Busca la expresión analítica de esta función que muestra la altura a la que está un ascensor que sube hasta un 6º piso con una parada en el 3º.**



Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos:

- Para $0 \le x \le 15$, $m = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \rightarrow y = \frac{1}{5}x$
- Para $15 < x \le 25$, $\rightarrow y = 3$
- Para $25 < x \le 40$, $m = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ y pasa por $(30, 4)$

$y - 4 = \frac{1}{5}(x - 30) \rightarrow y = \frac{1}{5}x - 2$

La expresión analítica buscada es:

$$y = \begin{cases} x/5 & \text{si } 0 \le x \le 15 \\ 3 & \text{si } 15 < x \le 25 \\ (x/5) - 2 & \text{si } 25 < x \le 40 \end{cases}$$

36 **Un ciclista sale de excursión a un lugar que dista 20 km de su casa. A los 15 minutos de salida, cuando se encuentra a 6 km, hace una parada de 10 minutos. Reanuda la marcha y llega a su destino una hora después de haber salido.**

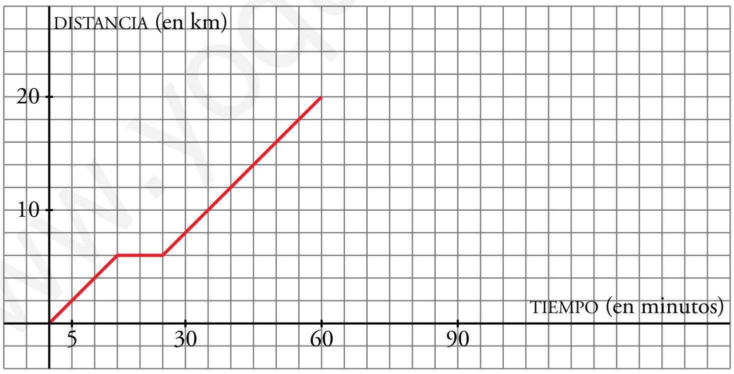
a) Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa*.

b) ¿Lleva la misma velocidad antes y después de la parada?

(Suponemos que en cada etapa la velocidad es constante).

c) Busca la expresión analítica de la función que has representado.

a)



b) Sí, lleva la misma velocidad antes y después de la parada, en 2 km tarda 5'.

c) Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos:

- Si $0 \le x \le 15 \rightarrow m = \frac{2}{5}$ y pasa por $(0, 0) \rightarrow y = \frac{2}{5}x$
- Si $15 < x \le 25 \rightarrow m = 0 \rightarrow y = 6$
- Si $25 < x \le 60 \rightarrow m = \frac{2}{5}$ y pasa por $(60, 20)$

$y - 20 = \frac{2}{5}(x - 60) \rightarrow y = \frac{2}{5}x - 4$

La expresión analítica buscada es:

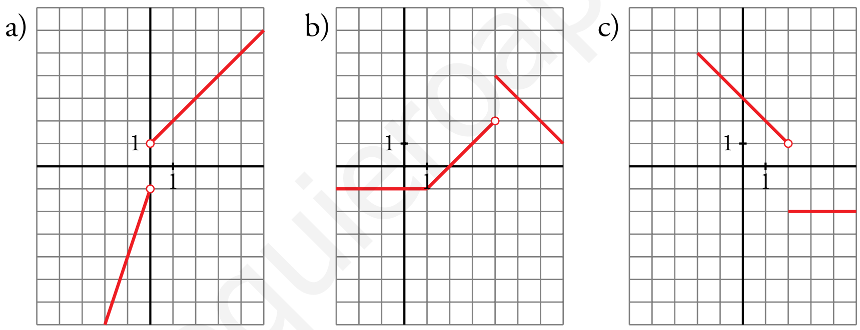
$$y = \begin{cases} (2/5)x & \text{si } 0 \le x \le 15 \\ 6 & \text{si } 15 < x \le 25 \\ (2/5)x - 4 & \text{si } 25 < x \le 60 \end{cases}$$

37 **Representa las siguientes funciones definidas a trozos:**

a) $y = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ x - 2 & \text{si } 1 \le x < 4 \\ 8 - x & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -2 & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$



REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

38 **Averigua si los siguientes puntos están alineados comprobando si C pertenece a la recta que pasa por A y B:**

$$A\left(\frac{1}{3}, 5\right), \quad B\left(\frac{13}{3}, -3\right) \quad \text{y} \quad C\left(\frac{100}{3}, -61\right)$$

Si la pendiente de la recta que pasa por A y B es la misma que la de la recta que pasa por B y C, entonces están alineados. Si no es así, no lo están.

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB} = \dfrac{-3 - 5}{\dfrac{13}{3} - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{-8}{\dfrac{12}{3}} = -\dfrac{8}{4} = -2 \\[2em] m_{BC} = \dfrac{-61 - (-3)}{\dfrac{180}{3} - \dfrac{13}{3}} = \dfrac{-58}{\dfrac{87}{3}} = -\dfrac{58}{29} = -2 \end{array}\right\} \text{Están alineados.}$$

39 **La expresión analítica de una función es de la forma:**

$$y = ax^3 + bx + c$$

Si sabemos que los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 4)$ y $C(2, -4)$ pertenecen a su gráfica, ¿cuáles serán los valores de a, b y c?

Como A pertenece, entonces: $c = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Como } B \text{ pertenece, entonces: } a + b = 4 \\ \text{Como } C \text{ pertenece, entonces: } 8a + 2b = -4\end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 6\end{array}$$

40 **Comprueba si los puntos $A(-13, -265)$, $B(0{,}1;\ 2{,}01)$ y $C\left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{16}\right)$ pertenecen a la gráfica de la función $y = -x^2 + 7x - 5$.**

$A(-13, -265)$: si $x = -13 \ \to\ y = -(-13)^2 + 7 \cdot (-13) - 5 = -265$

$B(0{,}1;\ 2{,}01)$: si $x = 0{,}1 \ \to\ y = -(0{,}1)^2 + 7 \cdot 0{,}1 - 5 = -4{,}31$

$$C\left(\frac{-3}{4}, \frac{-5}{16}\right): \text{ si } x = \frac{-3}{4} \ \to\ y = -\left(\frac{-3}{4}\right)^2 + 7 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) - 5 =$$

$$= -\frac{9}{16} - \frac{21}{4} - 5 = -\frac{173}{16}$$

Por tanto, A pertenece; pero ni B ni C pertenecen.

Página 125

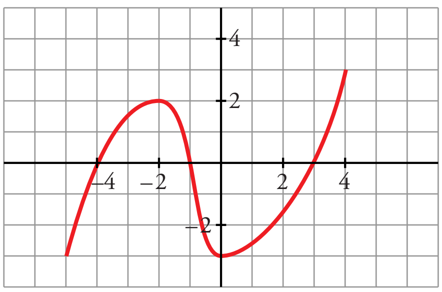
41 **Observa la gráfica de la función y responde:**

a) ¿Cuál es su dominio de definición?

b) ¿Tiene máximo y mínimo? En caso afirmativo, ¿cuáles son?

c) ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

d) ¿Para qué valores de x es creciente y para cuáles es decreciente?



a) $Dom\ f = \mathbb{R}$

b) Máximo $\to$ $(-2, 2)$

Mínimo $\to$ $(0, -3)$

c) Puntos de corte:

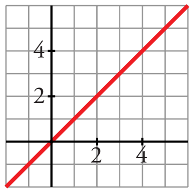
Con el eje X $\to$ $(-4, 0)$, $(3, 0)$, $(-1, 0)$

Con el eje Y $\to$ $(0, -3)$

d) Creciente $\to$ $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Decreciente $\to$ $(-2, 0)$

42 **A la recta representada en este gráfico se le llama *bisectriz del primer cuadrante*.**



a) Escribe su ecuación.

b) ¿Cuál es su pendiente? ¿Qué ángulo forma con el eje *OX*?

c) Si una recta forma un ángulo de 60° con el eje *OX*, ¿su pendiente será mayor o menor que 1?

d) Escribe la ecuación de la bisectriz del segundo cuadrante.

e) ¿Cuál será la pendiente de las rectas paralelas a la bisectriz del segundo cuadrante?

a) $y = x$

b) Su pendiente es 1 y forma 45° con el eje *OX*.

c) Su pendiente será mayor.

d) $y = -x$

e) $m = -1$

43 **Di cuál es la pendiente de cada una de las siguientes rectas y di si son crecientes o decrecientes:**

a) $y = \dfrac{3x-5}{2}$ **b)** $2x + y - 3 = 0$ **c)** $y - 7 = 0$ **d)** $y = -3 - \dfrac{1}{2}(x-5)$

¿Qué relación existe entre el crecimiento o decrecimiento de una recta y su pendiente?

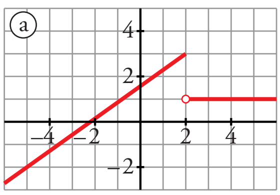
a) $m = \dfrac{3}{2} \rightarrow$ Creciente b) $m = -2 \rightarrow$ Decreciente

c) $m = 0 \rightarrow$ Ni creciente ni decreciente d) $m = -\dfrac{1}{2} \rightarrow$ Decreciente

Una recta es creciente si su pendiente es positiva y decreciente si su pendiente es negativa.

PROFUNDIZA

44 **Halla la expresión analítica de las funciones:**



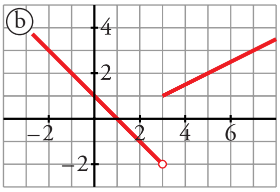
- Para $x \le 2$, la recta pasa por (2, 3) y (–5, –2):

$$m = \frac{-2-3}{-5-2} = \frac{5}{7}$$

$$y - 3 = \frac{5}{7}(x-2) \rightarrow y = \frac{5}{7}x + \frac{11}{7}$$

- Para $x > 2 \rightarrow y = 1$

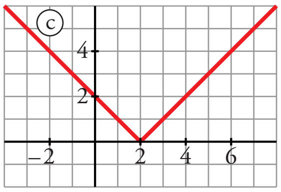
La expresión analítica es: $y = \begin{cases} (5/7)x + 11/7 & \text{si } x \le 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



- Para $x < 3 \;\rightarrow\; n = 1$ y $m = -1 \;\rightarrow\; y = 1 - x$
- Para $x \geq 3 \;\rightarrow\; m = \dfrac{1}{2}$ y pasa por (5, 2):

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 5) \;\rightarrow\; y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

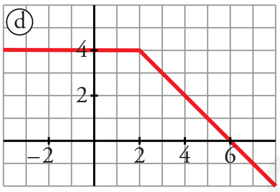
La expresión analítica buscada es $y = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 3 \\ (1/2)x - 1/2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



- Si $x \leq 2 \;\rightarrow\; n = 2$ y $m = -1 \;\rightarrow\; y = 2 - x$
- Si $x > 2 \;\rightarrow\; m = 1$ y pasa por (4, 2)

$y - 2 = x - 4 \;\rightarrow\; y = x - 2$

La expresión analítica es $y = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



- Si $x \leq 2 \;\rightarrow\; y = 4$
- Si $x > 2 \;\rightarrow\; m = -1$ y pasa por (6, 0) $\rightarrow$

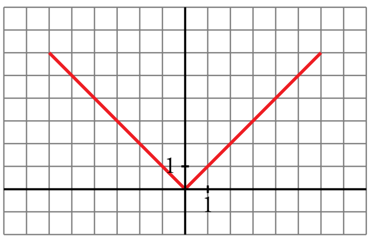
$\rightarrow\; y = 6 - x$

La expresión analítica buscada es $y = \begin{cases} 4 & \text{si } x \leq 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

45 **a) Representa $y = |x|$ (valor absoluto de x).**

b) Representa: $y = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Compárala con la anterior.

a)



x	y
0	0
1	1
–1	1
2	2
–2	2

b) Es la misma gráfica que la anterior.

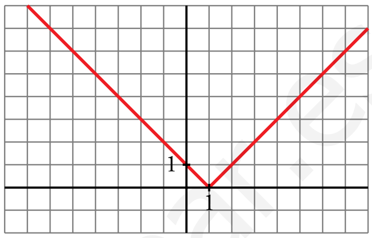
46 **Haz la gráfica de las siguientes funciones:**

a) $y = |x - 1|$

b) $y = 1 + |x|$

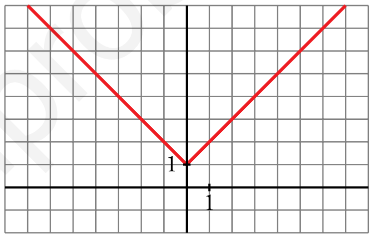
a) $y = |x - 1|$

x	–2	–1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2



b) $y = 1 + |x|$

x	–2	–1	0	1	2
y	3	2	1	2	3

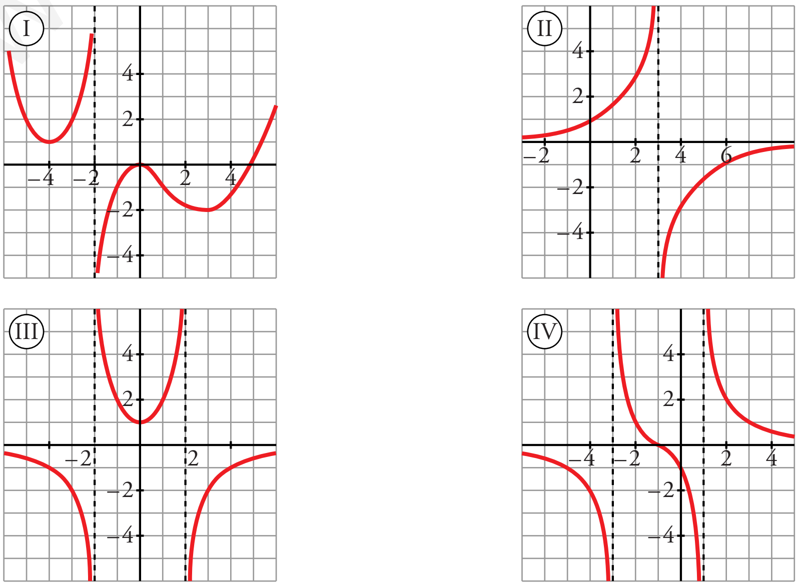


47 **Las cuatro gráficas siguientes corresponden a funciones discontinuas.**

a) Di cuáles son los puntos de discontinuidad. ¿Cuál es su dominio de definición?

b) Indica si tienen máximos o mínimos y di cuáles son.

c) ¿En qué intervalos son crecientes y en cuáles son decrecientes?



a) I $Dom\ f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Discontinuidad: $x = -2$

II $Dom\ f = \mathbb{R} - \{3\}$

Discontinuidad: $x = 3$

III $Dom\ f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Discontinuidades: $x = -2$, $x = 2$

IV $Dom\ f = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

Discontinuidades: $x = -3$, $x = 1$

b) I Máximo: $(0, 0)$

Mínimo: $(-4, 1)$, $(3, -2)$

II No tiene máximo ni mínimo.

III Mínimo: $(0, 1)$

IV No tiene máximo ni mínimo.

c) I Creciente: $(-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (3, +\infty)$

Decreciente: $(-\infty, -4) \cup (0, 3)$

II Creciente: $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

III Creciente: $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

Decreciente: $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

IV Decreciente: $(-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, +\infty)$

Página 143

PRACTICA

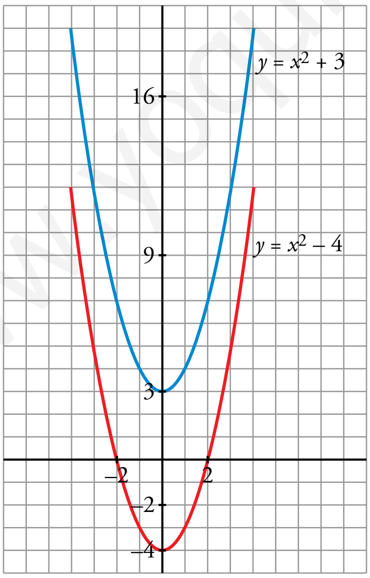
Funciones cuadráticas

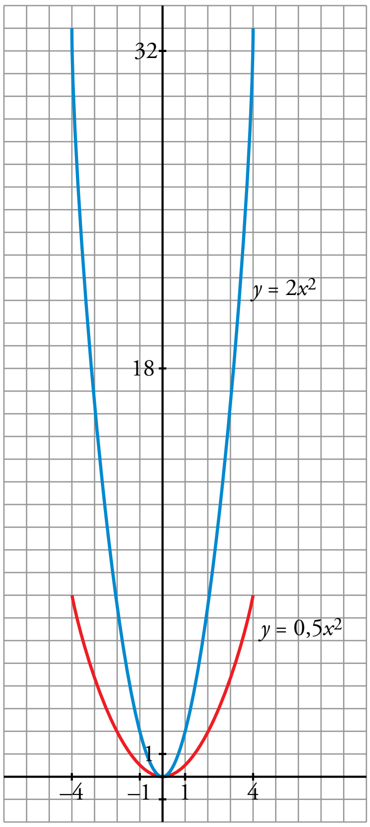
1 Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 4$ c) $y = 2x^2$ d) $y = 0{,}5x^2$

x	$y = x^2 + 3$	$y = x^2 - 4$	$y = 2x^2$	$y = 0{,}5x^2$
–4	19	12	32	8
–3	12	5	18	4,5
–2	7	0	8	2
–1	4	–3	2	0,5
0	3	–4	0	0
1	4	–3	2	0,5
2	7	0	8	2
3	12	5	18	4,5
4	19	12	32	8
VÉRTICE	(0, 3)	(0, –4)	(0, 0)	(0, 0)



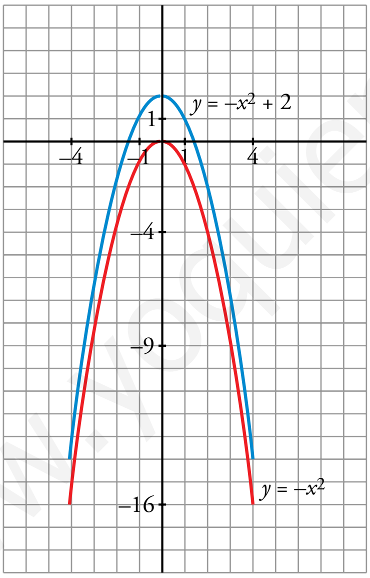


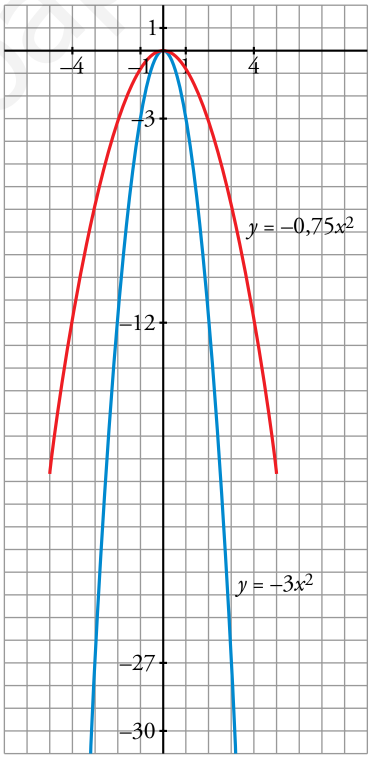
2 Haz una tabla de valores como la del ejercicio anterior para representar cada una de las funciones siguientes:

a) $y = -x^2$ b) $y = -x^2 + 2$ c) $y = -3x^2$ d) $y = -0{,}75x^2$

Di cuál es el vértice de cada una de estas parábolas.

x	$y = -x^2$	$y = -x^2 + 2$	$y = -3x^2$	$y = -0{,}75x^2$
–4	–16	–14	–48	–12
–3	–9	–7	–27	–6,75
–2	–4	–2	–12	–3
–1	–1	1	–3	–0,75
0	0	2	0	0
1	–1	1	–3	–0,75
2	–4	–2	–12	–3
3	–9	–7	–27	–6,75
4	–16	–14	–48	–12
VÉRTICE	(0, 0)	(0, 2)	(0, 0)	(0, 0)





3 Representa las siguientes parábolas, hallando los puntos de corte con los ejes, el vértice y algunos puntos próximos a él:

a) $y = (x - 2)^2$ b) $y = 2x^2 - 8x + 2$

c) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ d) $y = -x^2 + 3x - 4$

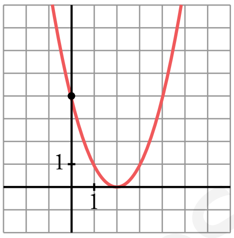
a) $y = (x - 2)^2$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $(x - 2)^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$ raíz doble $\rightarrow$ $(2, 0)$

Eje Y: $y = 4 \;\rightarrow\; (0, 4)$

Vértice: $(2, 0)$



Puntos próximos al vértice

x	–1	1	3	4
y	9	1	1	4

b) $y = 2x^2 - 8x + 2$

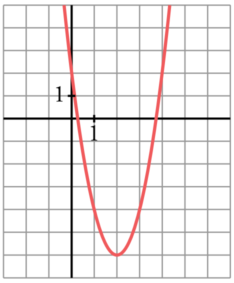
Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $2x^2 - 8x + 2 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 2 \pm \sqrt{3} \begin{cases} (2 + \sqrt{3}, 0) \approx (3{,}73; 0) \\ (2 - \sqrt{3}, 0) \approx (0{,}27; 0) \end{cases}$$

Eje Y: $y = 2 \;\rightarrow\; (0, 2)$



Vértice: $(2, -6)$

Puntos próximos al vértice:

x	–1	1	3	4
y	12	–4	–4	2

c) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$

Puntos de corte con los ejes:

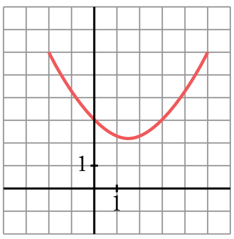
Eje X: $\frac{1}{3}x^2 - x + 3 = 0 \;\rightarrow\; \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2/3}$

No tiene puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = 3 \;\rightarrow\; (0, 3)$

Vértice: $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Puntos próximos al vértice:



x	–1	1	3
y	13/3	7/3	3

d) $y = -x^2 + 3x - 4$

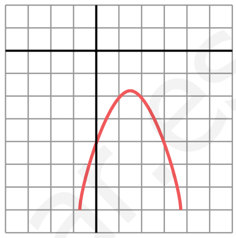
Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $-x^2 + 3x - 4 = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{-2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{-2}$

No tiene puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = -4 \;\rightarrow\; (0, -4)$

Vértice: $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{7}{4}\right)$



Puntos próximos al vértice:

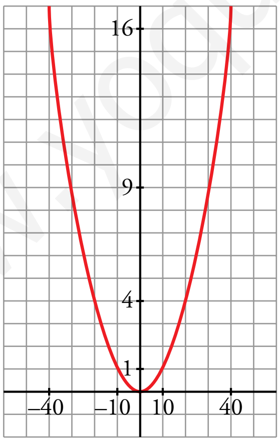
x	–1	1	2	3
y	–8	–2	–2	–4

4 **Utiliza una escala adecuada para representar las parábolas siguientes:**

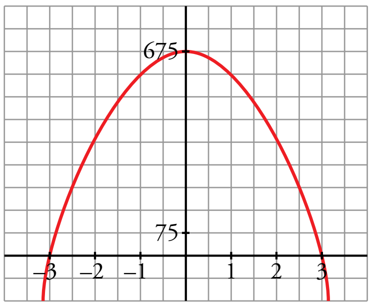
a) $y = \dfrac{x^2}{100}$ **b)** $y = -75x^2 + 675$

c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$ **d)** $y = -10x^2 - 100x$

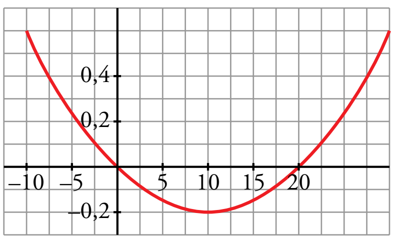
a) $y = \dfrac{x^2}{100}$



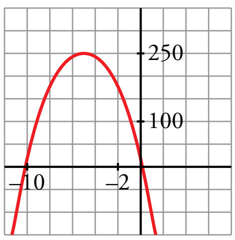
b) $y = -75x^2 + 675$



c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$



d) $y = -10x^2 - 100x$



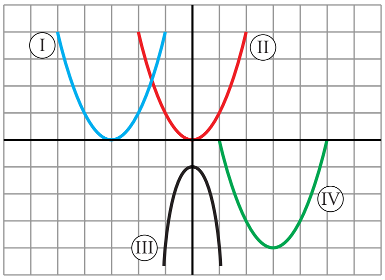
5 **Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:**

a) $y = x^2$

b) $y = x^2 - 6x + 5$

c) $y = (x + 3)^2$

d) $y = -3x^2 - 1$



a) II b) IV c) I d) III

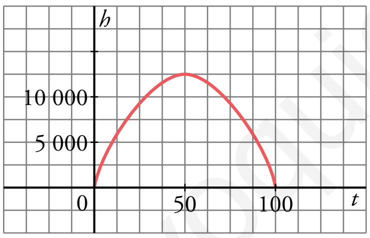
6 **La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, t, un proyectil que lanzamos verticalmente con una velocidad de 500 m/s, es: $h = 500t - 5t^2$**

a) Haz una representación gráfica.

b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es ésta?

d) ¿En qué intervalo de tiempo el proyectil está a una altura superior a los 4 500 metros?

a) 

b) Dominio = [0, 100]

c) La altura máxima es alcanzada a los 50 segundos, a una altura de 12 500 metros.

d) Queremos saber cuándo $h > 4\,500$ metros:

$$500t - 5t^2 > 4\,500 \ \rightarrow \ -5t^2 + 500t - 4\,500 > 0$$

Resolvemos la ecuación:

$$t = \frac{-500 \pm \sqrt{250\,000 - 90\,000}}{-10} = \frac{-500 \pm \sqrt{160\,000}}{-10} =$$

$$= \frac{-500 \pm 400}{-10} \begin{cases} t = 10 \\ t = 90 \end{cases}$$

Si $t < 10 \ \rightarrow \ -5t^2 + 500t - 4\,500 < 0$

Si $10 < t < 90 \ \rightarrow \ -5t^2 + 500t - 4\,500 > 0$

Si $t > 90 \ \rightarrow \ -5t^2 + 500t - 4\,500 < 0$

Luego, $h > 4\,500$ m en el intervalo (10, 90).

Otras funciones

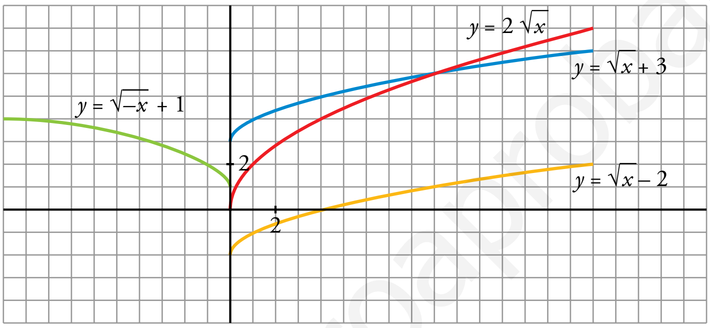
7 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = 3 + \sqrt{x}$

b) $y = \sqrt{x} - 2$

c) $y = 2\sqrt{x}$

d) $y = \sqrt{-x} + 1$



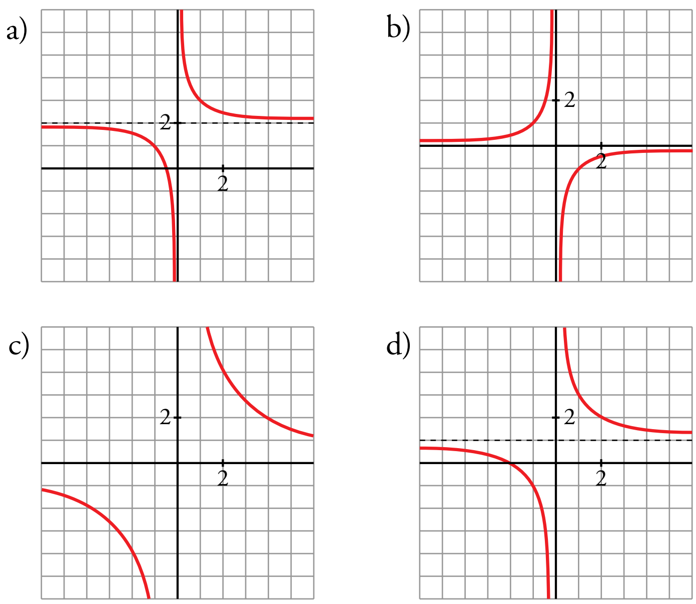
8 Dibuja la gráfica de las funciones siguientes:

a) $y = \dfrac{1}{x} + 2$

b) $y = -\dfrac{1}{x}$

c) $y = \dfrac{8}{x}$

d) $y = \dfrac{2}{x} + 1$

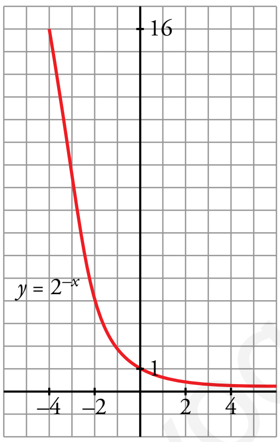


9 **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como la del ejercicio 1. (Ayúdate de la calculadora).**

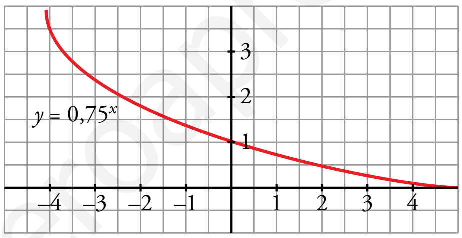
a) $y = 2^{-x}$ b) $y = 0{,}75^x$ c) $y = 1{,}5^x$ d) $y = 2^x - 3$

x	2^{-x}	$0{,}75^x$	$1{,}5^x$	$2^x - 3$
–4	16	3,16	0,197	–2,9375
–3	8	2,37	0,296	–2,875
–2	4	1,78	0,44	–2,75
–1	2	1,33	0,66	–2,5
0	1	1	1	–2
1	0,5	0,75	1,5	–1
2	0,25	0,5625	2,25	1
3	0,125	0,422	3,375	5
4	0,0625	0,3164	5,0625	13

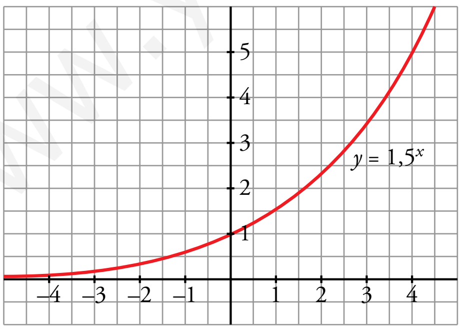
a)



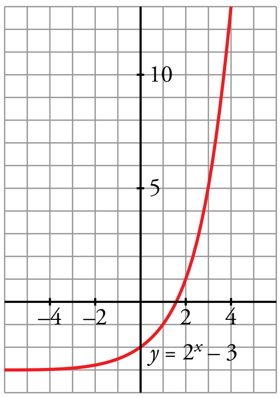
b)



c)



d)

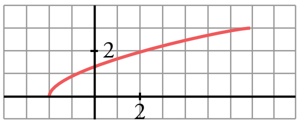


10 **Estudia el dominio de definición de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \sqrt{x + 2}$ b) $y = \sqrt{4 - x}$ c) $y = \sqrt{2x - 5}$ d) $y = 1 + \sqrt{-2x}$

a) $y = \sqrt{x+2}$

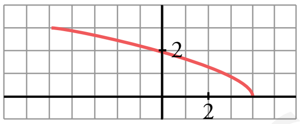
$x + 2 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq -2 \;\rightarrow\;$ Dominio $= [-2, +\infty)$



b) $y = \sqrt{4-x}$

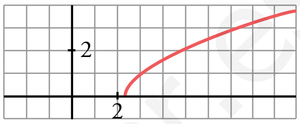
$4 - x \geq 0 \;\rightarrow\; -x \geq -4 \;\rightarrow\; x \leq 4$

Dominio $= (-\infty, 4]$



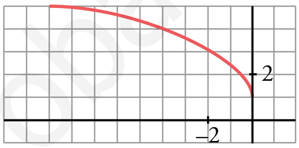
c) $y = \sqrt{2x-5}$

$2x - 5 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq \dfrac{5}{2} \;\rightarrow\;$ Dominio $= \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$



d) $y = 1 + \sqrt{-2x}$

$-2x \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq 0 \;\rightarrow\;$ Dominio $= (-\infty, 0]$



Página 144

11 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

12 **Di cuál es el dominio de definición de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

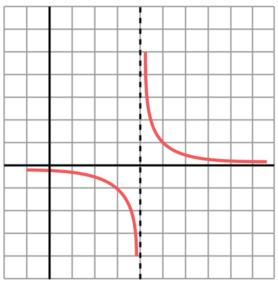
a) $y = \dfrac{1}{x-4}$ b) $y = \dfrac{-2}{x+1}$ c) $y = \dfrac{1}{x} + 2$ d) $y = \dfrac{1}{x-1} + 1$

a) $y = \dfrac{1}{x-4}$

Dominio $= \mathbb{R} - \{4\}$

- Calculamos algunos puntos próximos a $x = 4$:

x	3,5	3,9	3,99	4,01	4,1	4,5
y	–2	–10	–100	100	10	2

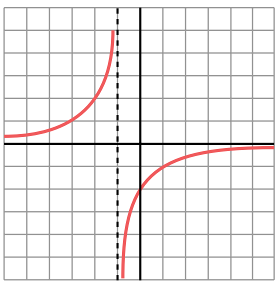


b) $y = -\dfrac{2}{x+1}$

Dominio $= \mathbb{R} - \{-1\}$

- Calculamos algunos puntos próximos a $x = -1$:

x	–1,5	–1,1	–1,01	–0,99	–0,9	–0,5
y	4	20	200	–200	–20	–4

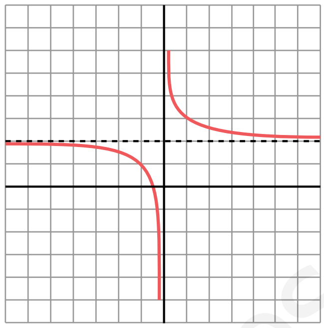


c) $y = \dfrac{1}{x} + 2$

Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Calculamos algunos puntos próximos a $x = 0$:

x	–0,5	–0,1	–0,01	0,01	0,1	0,5
y	0	–8	–98	102	12	4

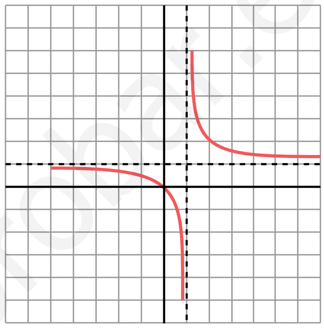


d) $y = \dfrac{1}{x-1} + 1$

Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

• Calculamos algunos puntos próximos a $x = 1$:

x	0,5	0,9	0,99	1,01	1,1	1,5
y	–1	–9	–99	101	11	3



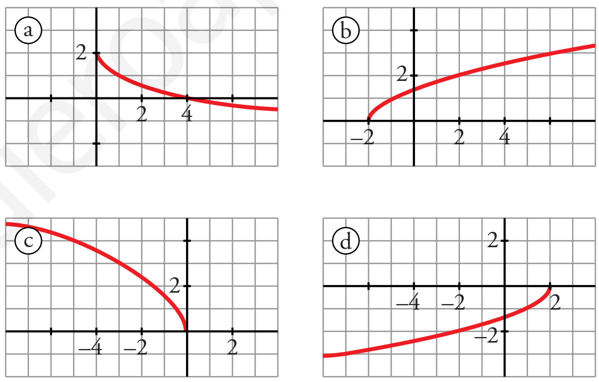
13 **Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponde:**

I) $y = \sqrt{x+2}$

II) $y = 2 - \sqrt{x}$

III) $y = -\sqrt{2-x}$

IV) $y = \sqrt{-3x}$



I ↔ b) II ↔ a)

III ↔ d) IV ↔ c)

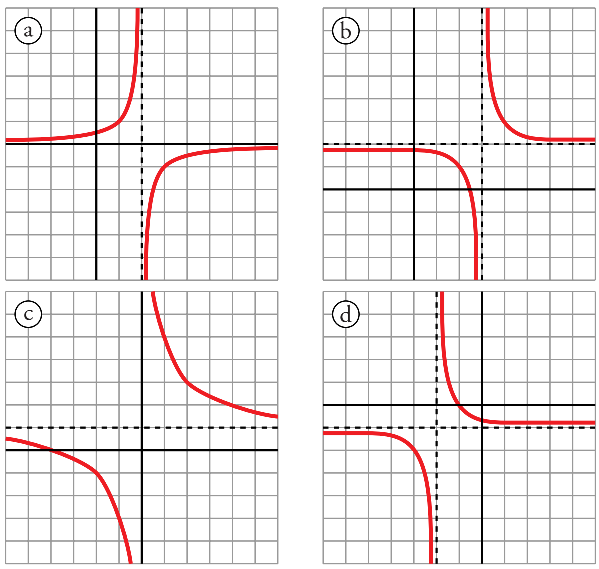
14 **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

I) $y = \dfrac{4}{x} + 1$

II) $y = 2 + \dfrac{1}{x-3}$

III) $y = -1 + \dfrac{1}{x+2}$

IV) $y = \dfrac{-1}{x-2}$



I ↔ c) II ↔ b)

III) ↔ d) IV ↔ a)

15 **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

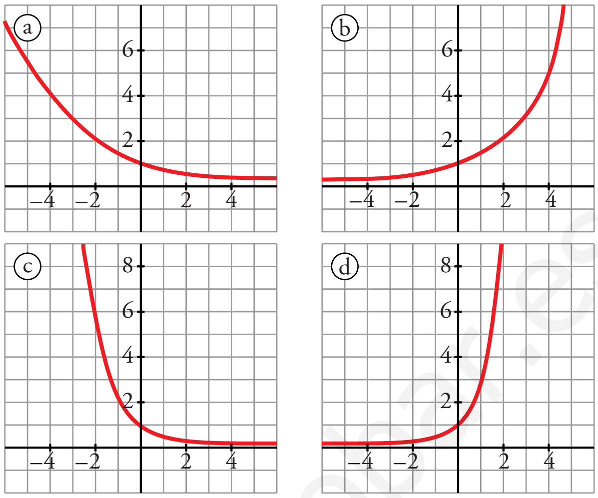
I) $y = 3^x$

II) $y = 1{,}5^x$

III) $y = 0{,}4^x$

IV) $y = 0{,}7^x$

Di, de cada una de ellas, si es creciente o decreciente.



I $\Leftrightarrow$ d)		Creciente
II $\Leftrightarrow$ b)		Creciente
III $\Leftrightarrow$ c)		Decreciente
IV $\Leftrightarrow$ a)		Decreciente

16 **a) Representa las funciones** $y = 3^x$ **e** $y = log_3\, x$ **.**

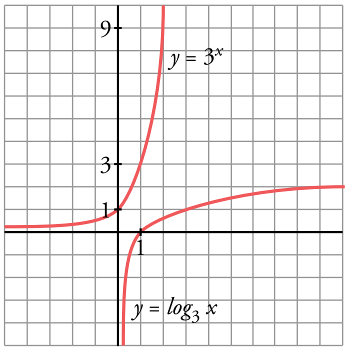
b) Comprueba si pertenecen a la gráfica de $y = log_3\, x$ **los puntos siguientes:**

$$(243,\ 5) \quad \left(\frac{1}{27}, -3\right) \quad (\sqrt{3};\ 0{,}5) \quad (-3, -1)$$

a) Una es la inversa de la otra.

x	–2	–1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$log_3 x$	–2	–1	0	1	2



b) Se sabe que $y = log_3\, x \Leftrightarrow 3^y = x$. Luego:

$(243, 5) \rightarrow 3^5 = 243 \rightarrow log_3\, 243 = 5$

$\left(\frac{1}{27}, -3\right) \rightarrow 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \rightarrow log_3 \frac{1}{27} = -3$

$(\sqrt{3}; 0{,}5) \rightarrow 3^{0{,}5} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \rightarrow log_3 \sqrt{3} = 0{,}5$

$(-3, -1) \rightarrow 3^{-1} = \frac{1}{3} \neq -3 \rightarrow$ $(-3, -1)$ no pertenece a la gráfica de $y = log_3\, x$.

Luego, $(243, 5)$, $\left(\frac{1}{27}, -3\right)$ y $(\sqrt{3}, 0{,}5)$ son puntos que pertencen a la gráfica de $y = log_3\, x$.

Página 145

PIENSA Y RESUELVE

17 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

18 **Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - 15 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$

Analíticamente

Vemos los puntos de corte:

$2x^2 - 5x - 6 = 3x + 4 \rightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2}$ $\begin{cases} x = 5 \rightarrow y = 19 \\ x = -1 \rightarrow y = 1 \end{cases}$

Hay dos puntos de corte: (5, 19), (–1, 1).

Gráficamente

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = 2x^2 - 5x - 6$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $2x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 48}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{73}}{4} =$

$= \begin{cases} x = \left(\dfrac{5 + \sqrt{73}}{4}, 0\right) \approx (3{,}38; 0) \\ x = \left(\dfrac{5 - \sqrt{73}}{4}, 0\right) \approx (-0{,}88; 0) \end{cases}$

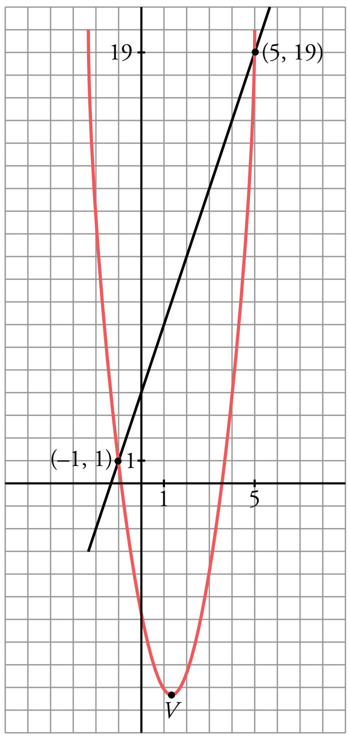
Eje Y: $y = -6 \rightarrow (0, -6)$

Vértice: $\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{73}{8}\right)$

- $y = 3x + 4$

Hacemos una tabla de valores:

x	–1	5
y	1	19



b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

Analíticamente

Puntos de corte entre ambas:

$$x^2 - 2x + 1 = -2x + 2 \;\rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm 1 \;\rightarrow\; y = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

Los puntos de corte son: $(1, 0)$, $(-1, 4)$.

Gráficamente

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = x^2 - 2x + 1$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $x^2 - 2x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1 \;\rightarrow$ raíz doble: $(1, 0)$

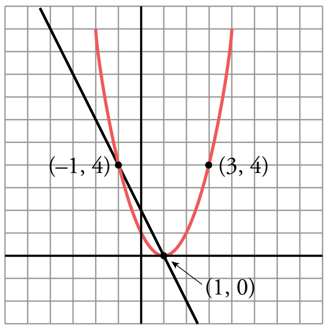
  Eje Y: $y = 1 \;\rightarrow\; (0, 1)$

  Vértice: $(1, 0)$

- $y = -2x + 2$

  Hacemos una tabla de valores:

x	1	–1
y	0	4



c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

Analíticamente

$$2x^2 - 8x - 3 = x^2 - 2x - 3 \;\rightarrow\; x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x(x - 6) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

Si $x_1 = 0 \;\rightarrow\; y_1 = -3$

Si $x_2 = 6 \;\rightarrow\; y_2 = 6^2 - 2 \cdot 6 - 3 = 21$

Solución: $x_1 = 0$, $y_1 = -3$; $x_2 = 6$, $y_2 = 21$

Gráficamente

Representamos cada una de las parábolas.

- $y = 2x^2 - 8x - 3$

  Cortes con los ejes:

  Eje X: $y = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 - 8x - 3 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-3) \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{88}}{4} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{22}}{2} \begin{cases} (4{,}34;\ 0) \\ (-0{,}34;\ 0) \end{cases}$$

Eje Y: $x = 0 \;\rightarrow\; y = -3 \;\rightarrow\; (0, -3)$

Vértice: $(2, -11)$

- $y = x^2 - 2x - 3$

  Cortes con los ejes:

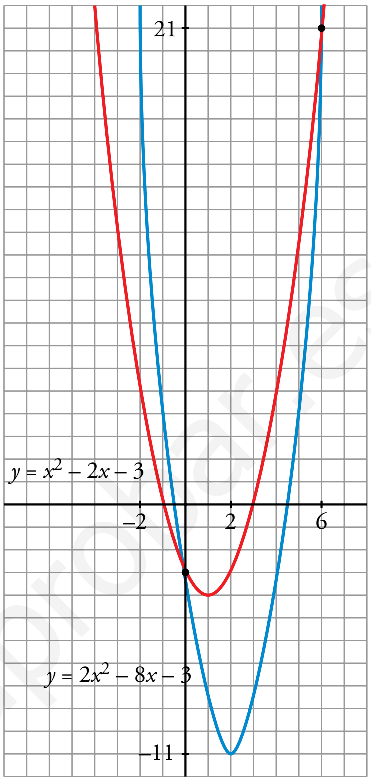
  Eje X: $y = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 3 = 0$

  $$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} =$$

  $$= \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} (3, 0) \\ (-1, 0) \end{cases}$$

  Eje Y: $x = 0 \;\rightarrow\; y = -3 \;\rightarrow\; (0, -3)$

  Vértice: $(1, -4)$



d) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - 15 \end{cases}$

Analíticamente

$-x^2 + 5x = x^2 + 3x - 15 \;\rightarrow\; 2x^2 - 2x - 15 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{124}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{31}}{2} \begin{cases} x_1 = 3{,}28 \\ x_2 = -2{,}28 \end{cases}$$

Si $x_1 = 3{,}28 \;\rightarrow\; y_1 = 5{,}63$

Si $x_2 = -2{,}28 \;\rightarrow\; y_2 = -16{,}63$

Gráficamente

Representamos cada una de las parábolas.

- $y = -x^2 + 5x$

  Cortes con los ejes:

  Eje X: $y = 0 \;\rightarrow\; -x^2 + 5x = 0 \;\rightarrow$

  $$\rightarrow\; x(-x + 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; (0, 0) \\ x = 5 \;\rightarrow\; (5, 0) \end{cases}$$

  Eje Y: $x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$

  Vértice: $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$

- $y = x^2 + 3x - 15$

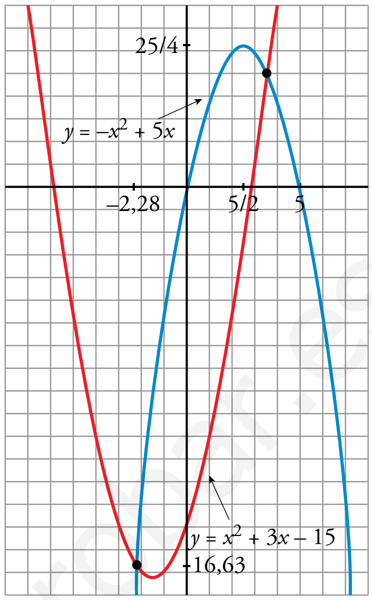
  Cortes con los ejes:

  Eje X: $y = 0 \;\to\; x^2 + 3x - 15 = 0$

  $$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 15}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{2} = \begin{cases} x_1 = 2{,}65 \;\to\; (2{,}65;\ 0) \\ x_2 = -5{,}65 \;\to\; (-5{,}65;\ 0) \end{cases}$$

  Eje Y: $x = 0 \;\to\; y = -15 \;\to\; (0, -15)$

  Vértice: $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-69}{4}\right)$



19 **Comprueba analítica y gráficamente que estos dos sistemas no tienen solución:**

a) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{x}{2} - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x-1} \\ y = -x + 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{x}{2} - 3 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Resolvemos el sistema:

$$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = \frac{x}{2} - 3 \;\to\; x^2 - 2x - 3 = x - 6 \;\to\; x^2 - 3x + 3 = 0$$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \;\to$ No hay puntos en común $\to$ No hay solución.

RESOLUCIÓN GRÁFICA

- Representamos $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

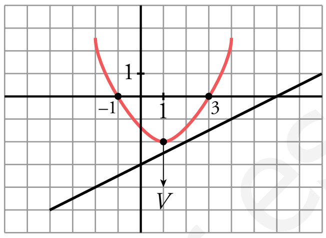
  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \;\to\; x^2 - 2x - 3 = 0$

  $$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \;\to\; (3, 0) \\ -1 \;\to\; (-1, 0) \end{cases}$$

Eje Y: $y = -\frac{3}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{3}{2}\right)$

Vértice: $(1, -2)$



• Representamos $y = \frac{x}{2} - 3$

x	0	2
y	–3	–2

b) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x-1} \\ y = -x + 1 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Resolvemos el sistema:

$$\frac{1}{x-1} = -x + 1 \rightarrow 1 = (-x+1)(x-1) \rightarrow 1 = -(x-1)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 = -x^2 + 2x - 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

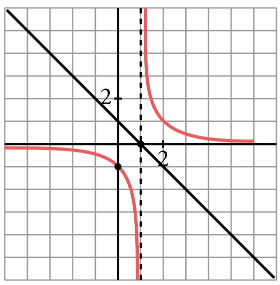
No hay puntos en común.

No hay solución.

RESOLUCIÓN GRÁFICA

• Representamos $y = \frac{1}{x-1}$

x	0	–1	2	3
y	–1	–1/2	1	1/2



• Representamos $y = -x + 1$

x	0	2
y	1	–1

20 Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x+1} \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = x - 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x+1} \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA:

Resolvemos el sistema:

$$\frac{2}{x+1} = 3x - 4 \rightarrow 2 = (3x-4)(x+1) \rightarrow 3x^2 + 3x - 4x - 6 = 0$$

$$3x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+72}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{6} =$$

$$= \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{73}}{6} \approx 1{,}59 \\ x = \dfrac{1-\sqrt{73}}{6} \approx -1{,}26 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 1{,}59 \rightarrow y = 0{,}77 \\ \quad x = -1{,}26 \rightarrow y = -7{,}77 \end{array}\right\} \text{Soluciones: } (1{,}59;\ 0{,}77) \text{ y } (-1{,}26;\ -7{,}77)$$

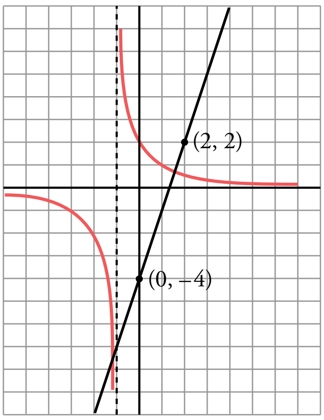
RESOLUCIÓN GRÁFICA

- Representamos la función $y = \dfrac{2}{x+1}$ que tiene una asíntota en $x = -1$ y otra en $y = 0$:

x	–3	–2	0	1
y	–1	–2	2	1

- Representamos la recta $y = 3x - 4$:

x	2	0
y	2	–4



b) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = x - 5 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Puntos de corte:

$$\sqrt{x+1} = x - 5 \rightarrow x + 1 = (x-5)^2 \rightarrow x + 1 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} =$$

$$= \begin{cases} x = 8 \rightarrow y = 3 \\ x = 3 \rightarrow y = -2 \rightarrow \text{no pertenece a } y = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

Solución: (8, 3)

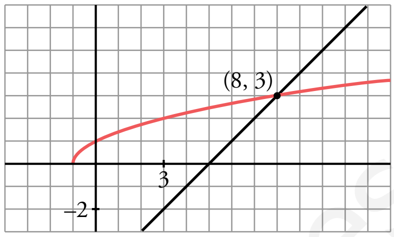
RESOLUCIÓN GRÁFICA

• Para representar $y = \sqrt{x+1}$ damos valores:

x	–1	3	0	8
y	0	2	1	3

• Para representar $y = x - 5$, hacemos la tabla de valores:

x	3	8
y	–2	3



21 Halla los puntos comunes de las funciones $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.

$$\sqrt{x} = x^2 \ \rightarrow\ x = x^4 \ \rightarrow\ x^4 - x = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x(x^3 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \ \rightarrow\ y = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \ \rightarrow\ x = 1 \ \rightarrow\ y = 1 \end{cases}$$

Los puntos en común son (0, 0) y (1, 1).

22 Aplica la definición de logaritmo para hallar, sin calculadora:

a) $log_2\ 64$ b) $log_2\ 16$

c) $log_2\ \frac{1}{4}$ d) $log_2\ \sqrt{2}$

e) $log_3\ 81$ f) $log_3\ \frac{1}{3}$

g) $log_3\ \sqrt{3}$ h) $log_4\ 16$

a) $log_2\ 64 = 6$, porque $2^6 = 64$.

b) $log_2\ 16 = 4$, por ser $2^4 = 16$.

c) $log_2\ \frac{1}{4} = -2$, ya que $2^{-2} = \frac{1}{4}$.

d) $log_2\ \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, porque $2^{1/2} = \sqrt{2}$.

e) $log_3\ 81 = 4$, pues $3^4 = 81$.

f) $log_3\ \frac{1}{3} = -1$, ya que $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

g) $log_3\ \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, por ser $3^{1/2} = \sqrt{3}$.

h) $log_4\ 16 = 2$, ya que $4^2 = 16$.

23 Halla con la calculadora:

a) $log_2\ 13{,}5$ b) $log_3\ 305$

c) $log_5\ 112$ d) $log_2\ \frac{1}{7}$

e) $log_3\ 5^7$ f) $log_4\ \sqrt{725}$

g) $log_2\ 10^6$ h) $log_3\ 10^{-4}$

a) $log_2 13{,}5 = \dfrac{log\ 13{,}5}{log\ 2} = 3{,}75$

b) $log_3 305 = \dfrac{log\ 305}{log\ 3} = 5{,}206$

c) $log_5 112 = \dfrac{log\ 112}{log\ 5} = 2{,}93$

d) $log_2 \dfrac{1}{7} = \dfrac{log\ 1/7}{log\ 2} = -2{,}807$

e) $log_3 5^7 = \dfrac{log\ 5^7}{log\ 3} = 10{,}255$

f) $log_4 \sqrt{725} = \dfrac{log \sqrt{725}}{log\ 4} = 2{,}375$

g) $log_2 10^6 = \dfrac{log\ 10^6}{log\ 2} = 19{,}93$

h) $log_3 10^{-4} = \dfrac{log\ 10^{-4}}{log\ 3} = -8{,}384$

24 **Calcula la base de los siguientes logaritmos:**

a) $\boldsymbol{log_b 10\,000 = 2}$

b) $\boldsymbol{log_b 125 = 3}$

c) $\boldsymbol{log_b 4 = -1}$

d) $\boldsymbol{log_b 3 = \frac{1}{2}}$

a) $log_b 10\,000 = 2 \;\rightarrow\; b^2 = 10\,000 \;\rightarrow\; b = 100$

b) $log_b 125 = 3 \;\rightarrow\; b^3 = 125 \;\rightarrow\; b = 5$

c) $log_b 4 = -1 \;\rightarrow\; b^{-1} = 4 \;\rightarrow\; b = \dfrac{1}{4}$

d) $log_b 3 = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; b^{1/2} = 3 \;\rightarrow\; b = 9$

25 **Las ventanas de un edificio de oficinas han de tener $2\ m^2$ de área.**

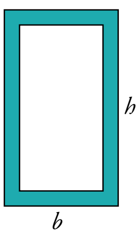
a) Haz una tabla que muestre cómo varía la altura de las ventanas según la longitud de la base.

b) Representa la función *base-altura*.

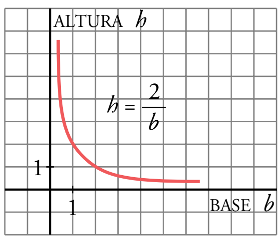
El área de la ventana es: $b \cdot h = 2\ m^2$.

La función que nos da la altura en función de la variación de la base es: $h = \dfrac{2}{b}$

Tabla de valores:



b	h
0,25	8
0,5	4
1	2
1,25	1,6
1,5	$1,\widehat{3}$
1,75	1,14



26 **Con un listón de madera de 3 metros de largo, queremos fabricar un marco para un cuadro.**

a) Si la base midiera 0,5 m, ¿cuánto medirían la altura y la superficie del cuadro?

b) ¿Cuál es el valor de la superficie para una base cualquiera x?

c) ¿Para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima?

d) ¿Cuánto vale dicha superficie?

a) $x \;\to\;$ base: $2 \cdot 0{,}5 + 2y = 3 \;\to\; y = 1$

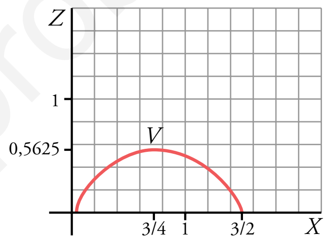
$y \;\to\;$ altura

La altura mediría 1 m.

Área $= x \cdot y = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$. La superficie sería de 0,5 m^2.

b) $2x + 2y = 3 \;\to\; y = \dfrac{3-2x}{2}$

Área $= x \cdot y \;\to\;$ Área $= x \cdot \left(\dfrac{3-2x}{2}\right)$



c) y d) Dibujamos la función $z = \dfrac{x(3-2x)}{2}$

Puntos de corte:

Eje X: $x(3-2x) = 0 \;\to\; \begin{cases} x = 0 \;\to\; (0, 0) \\ x = 3/2 \;\to\; (3/2, 0) \end{cases}$

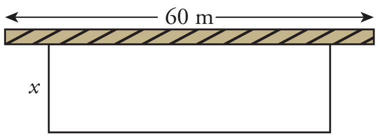
Eje Z: $z = 0 \;\to\; (0, 0)$

Vértice: $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{9}{16}\right)$

La superficie máxima es $\dfrac{9}{16} = 0{,}5625$ m^2, que corresponde a un marco cuadrado de lado 0,75 m.

Página 146

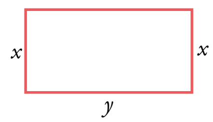
27 **Con 100 metros de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared.**



a) Llama x a uno de los lados de la valla. ¿Cuánto valen los otros dos lados?

b) Construye la función que nos da el área. ¿Cuándo se hace máxima y cuánto vale ese máximo?

c) ¿Cuál es su dominio de definición?



a) $2x + y = 100 \;\rightarrow\; y = 100 - 2x$

El lado de enfrente a la pared mide: $100 - 2x$.

b) Área $= xy \;\rightarrow\;$ Área $= x(100 - 2x)$

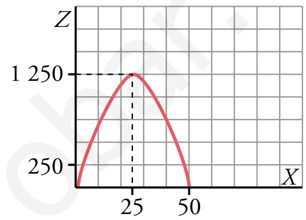
Representamos la función $z = x(100 - 2x)$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $x(100 - 2x) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ m} \\ x = 50 \text{ m} \end{cases}$

Eje Z: $z = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$

Vértice: (25, 1 250)



Se hace máxima el área cuando: $\begin{cases} x = 25 \text{ m} \\ y = 50 \text{ m} \end{cases}$

El área máxima es de 1 250 m^2

c) Dominio de definición: (0, 50)

28 **El coste por unidad de fabricación de unas pegatinas disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función:**

$$y = \frac{0{,}5x + 10}{x}$$

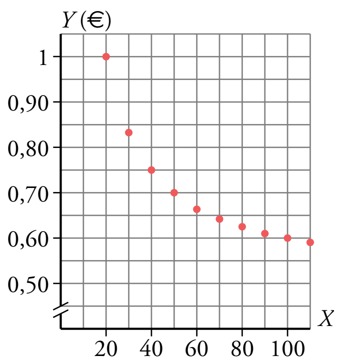
a) Haz la gráfica correspondiente. ¿Se pueden unir los puntos que has representado?

b) ¿Cuál será el coste cuando el número de pegatinas se hace muy grande?

$$y = \frac{0{,}5x + 10}{x}$$

a) Hacemos la tabla de valores:

x	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y	1	$0{,}8\overset{\frown}{3}$	0,75	0,7	$0{,}\overset{\frown}{6}$	0,64	0,625	$0{,}\overset{\frown}{61}$	0,6



No se pueden unir los puntos, ya que el número de pegatinas es un número entero (y positivo).

b) Hacemos una tabla de valores con el número de pegatinas muy alto:

x	1 000	10 000	100 000	1 000 000
y	0,51	0,501	0,5001	0,50001

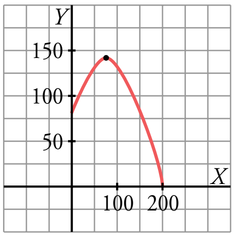
El coste de las pegatinas, si el número de estas es muy grande, es de 50 céntimos por pegatina.

29 **Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderían a 0,40 €/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg y el precio aumenta 0,01 €/kg.**

¿Cuándo hemos de vender las naranjas para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

La función que representa el coste de todas las naranjas en función del número de días que ha pasado es: $y = (200 - x)(0,4 + 0,01x)$

Dibujamos esta función y vemos cuál es su máximo:



$V = (80, 144)$

Se han de vender dentro de 80 días, y el beneficio será de 144 €.

30 **Los gastos anuales de una empresa por la fabricación de x ordenadores son $G(x) = 20\,000 + 250x$ en euros, y los ingresos que se obtienen por las ventas son $I = 600x - 0,1x^2$ en euros.**

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

La función beneficio es:

$B = I - G = 600x - 0,1x^2 - (20\,000 + 250x) \rightarrow$

$\rightarrow B(x) = -0,1x^2 + 350x - 20\,000$

El vértice es el máximo: $V = \dfrac{-350}{-2 \cdot 0,1} = 1\,750$

Se deben fabricar 1 750 ordenadores para que el beneficio sea máximo.

31 **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a.

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\rightarrow$ $3 = ka^0$ $\rightarrow$ $k = 3$

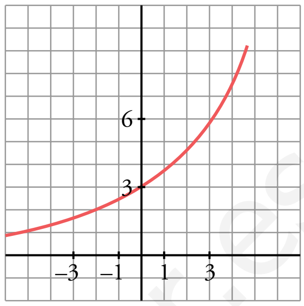
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\rightarrow$ $3{,}6 = ka^1$ $\rightarrow$ $3{,}6 = 3a$ $\rightarrow$ $a = 1{,}2$

Tenemos la función $y = 3 \cdot (1{,}2)^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



32 **La función exponencial $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 2) y (2; 1,28). Calcula k y a y representa la función.**

$y = ka^x$

Si pasa por el punto (0, 2), entonces:

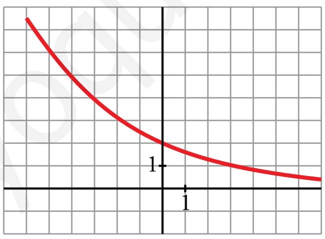
$$2 = k \cdot a^0 \rightarrow 2 = k$$

Si pasa por el punto (2; 1,28), entonces:

$$1{,}28 = k \cdot a^2 \rightarrow 1{,}28 = 2a^2 \rightarrow a^2 = 0{,}64 \rightarrow a = 0{,}8$$

La función es: $y = 2 \cdot (0{,}8)^x$

x	y
–3	3,906
–2	3,125
–1	2,5
0	2
1	1,6
2	1,28
3	1,024



33 **Llamamos inflación a la pérdida de valor del dinero; es decir, si un artículo que costó 100 € al cabo de un año cuesta 115 €, la inflación habrá sido del 15%. Supongamos una inflación constante del 15% anual. ¿Cuánto costará dentro de 5 años un terreno que hoy cuesta 50 000 euros?**

$P = 50\,000 \cdot (1{,}15)^5 = 100\,567{,}86$ € costará el terreno dentro de cinco años.

34 **En el contrato de alquiler de un apartamento figura que el precio subirá un 5% anual. Si el precio era de 250 € mensuales, ¿cuál será dentro de 5 años?**

Escribe la función que da el precio del alquiler según los años transcurridos.

$P_5 = 250 \cdot (1{,}05)^5 = 319{,}07$ € pagará dentro de cinco años.

La función que relaciona el precio del alquiler con los años transcurridos es $P = 250 \cdot 1{,}05^t$.

35 **Una furgoneta que costó 20 000 € se deprecia a un ritmo de un 12% anual. ¿Cuál será su precio dentro de 4 años?**

Halla la función que da el precio del vehículo según los años transcurridos, y calcula cuánto tiempo tardará el precio en reducirse a la mitad.

$P_4 = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}12)^4 = 20\,000 \cdot 0{,}88^4 \approx 11\,993{,}90$ €

$P = 20\,000 \cdot 0{,}88^t$

Si el precio final es de 10 000 euros:

$10\,000 = 20\,000 \cdot 0{,}88^t \;\rightarrow\; 0{,}5 = 0{,}88^t \;\rightarrow\; t \approx 5{,}4$ años

36 **En un bosque en etapa de crecimiento se mide el volumen de madera y se obtiene 10 250 m³. Se observa que el bosque crece a un ritmo de un 2% anual.**

a) ¿Qué cantidad de madera tendrá dentro de 10 años?

b) ¿Cuál es la función que da la cantidad de madera según los años transcurridos, suponiendo que se mantenga el ritmo de crecimiento?

a) $V = 10\,250 \cdot (1{,}02)^{10} = 12\,494{,}7$ m³ de madera habrá dentro de diez años.

b) $V = 10\,250 \cdot (1{,}02)^t$

37 **Un millón de euros se coloca al 8% de interés anual. ¿En cuánto se convierte al cabo de 3 años? ¿Y al cabo de x años?**

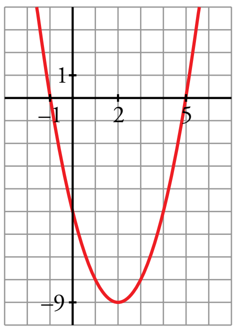
Al cabo de tres años tendremos: $C = 1\,000\,000 \cdot (1{,}08)^3 = 1\,259\,712$ €

Al cabo de x años tendremos: $C = 1\,000\,000 \cdot (1{,}08)^x$ €

38 **a) Estudia, sobre la gráfica de la función $y = x^2 - 4x - 5$, para qué valores de x se verifica $x^2 - 4x - 5 > 0$.**

b) ¿Qué valores de x cumplirán la desigualdad $x^2 - 4x - 5 \le 0$?

a) Representamos la parábola $y = x^2 - 4x - 5$.



Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $y = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \;\rightarrow\; (5, 0) \\ x_2 = -1 \;\rightarrow\; (-1, 0) \end{cases}$$

Eje Y: $x = 0 \;\rightarrow\; y = -5 \;\rightarrow\; (0, -5)$

Vértice: $(2, -9)$

$x^2 - 4x - 5 > 0$ es el intervalo que queda por encima del eje X.

Luego $x^2 - 4x - 5 > 0$ ocurre en $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

b) $x^2 - 4x - 5 \le 0$ es el intervalo de la gráfica que queda por debajo del eje X; luego $x^2 - 4x - 5 \le 0$ ocurre en $[-1, 5]$.

39 **Representa las siguientes funciones:**

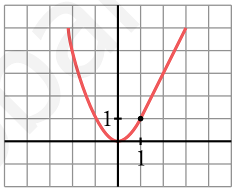
a) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- Representamos la parábola $y = x^2$ definida para $x < 1$:

  $V(0, 0)$

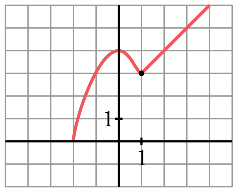
x	–2	–1	0,99
y	4	1	0,9801



- Representamos la recta $y = 2x - 1$ para $x \geq 1$:

x	1	3
y	1	5

b) $y = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



- La parábola $y = 4 - x^2$ tiene su vértice en $(0, 4)$; está definida para $x \leq 1$.

x	–2	–1	1
y	0	3	3

- La recta $y = x + 2$, definida para $x > 1$, pasa por los puntos $(2, 4)$ y $(3, 5)$.

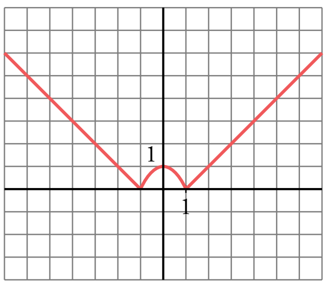
40 **Representa:**

a) $f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

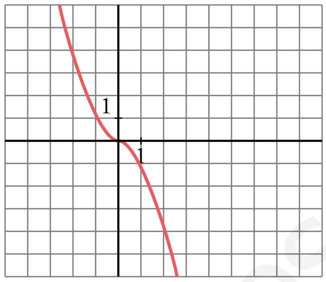
- La recta $y = -1 - x$ está definida para $x < -1$:

x	–2	–1,5
y	1	0,5



- La parábola $y = 1 - x^2$ definida si $-1 \leq x \leq 1$, corta al eje X en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, y al eje Y en $(0, 1)$, vértice a su vez de la parábola.
- La recta $y = x - 1$ está definida para $x > 1$ y pasa por $(2, 1)$ y $(3, 2)$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



- La parábola $y = x^2$, definida para $x < 0$, pasa por (–1, 1) y (–2, 4).
- La parábola $y = -x^2$, definida para $x \geq 0$, tiene su vértice en (0, 0) y pasa por (1, –1) y (2, –4).

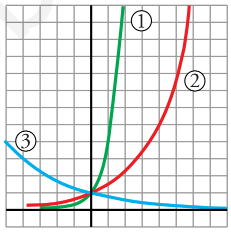
Página 147

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

41 **La expresión analítica de estas tres gráficas es de la forma $y = a^x$.**

Di el valor de a en cada una de ellas.

(En los ejes se ha tomado la misma escala.)



① $a = 4 \rightarrow y = 4^x$

② $a = 1{,}5 \rightarrow y = 1{,}5^x$

③ $a = 0{,}76 \rightarrow y = 0{,}76^x$

42 **Todas las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ pasan por un mismo punto. Di cuál es y justifícalo. ¿En qué casos la función es decreciente?**

Todas las exponenciales de este tipo pasan por el punto (0, 1) porque cualquier número elevado a cero es uno.

La función es decreciente cuando $0 < a < 1$.

43 **Calcula b para que el vértice de la parábola $y = x^2 + bx + 10$ esté en el punto (3, 1). ¿Cuál es su eje de simetría? ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?**

La abscisa del vértice es: $V_a = \frac{-b}{2a}$. En este caso: $a = 1$, $V_a = 3$.

$3 = \frac{-b}{2 \cdot 1} \rightarrow b = -6$

El eje de simetría es la recta $x = 3$.

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $x^2 - 6x + 10 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = 10 \rightarrow$ El punto de corte con el eje Y es el punto (0, 10).

44 **¿Cuánto debe valer k para que la parábola $y = 4x^2 - 20x + k$ tenga un solo punto de corte con el eje de abscisas?**

¿Para qué valores de k no cortará al eje X?

Para calcular los puntos de corte con el eje X, hacemos:

$$4x^2 - 20x + k = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 16k}}{8}$$

Para que solo haya una solución en esta ecuación:

$$400 - 16k = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{400}{16} = 25$$

Solo hay un punto de corte con el eje X si $k = 25$.

$400 - 16k < 0 \;\rightarrow\; -16k < -400 \;\rightarrow\; k > 25$

La parábola no corta al eje X si $k > 25$.

45 **La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá c? Si, además, sabes que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 6), ¿cómo calcularías a y b? Halla a y b y representa la parábola.**

Si pasa por el origen de coordenadas, cuando $x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

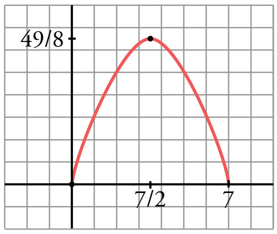
Por tanto: $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \;\rightarrow\; c = 0$

Por otro lado: $\left.\begin{array}{l} 3 = a + b \\ 6 = 16a + 4b \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} -12 = -4a - 4b \\ 6 = 16a + 4b \\ \hline -6 = 12a \end{array} \;\rightarrow\; a = \frac{-1}{2}$

$b = 3 + \frac{1}{2} \;\rightarrow\; b = \frac{7}{2}$

La parábola es: $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$

$V = \left(\frac{7}{2}, \frac{49}{8}\right)$



46 **Calcula a y b para que la función $y = \dfrac{a}{x - b}$ pase por los puntos (2, 2) y (–1, –1).**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para que pase por el punto (2, 2): } 2 = \dfrac{a}{2 - b} \\[2ex] \text{Para que pase por el punto (–1, –1): } -1 = \dfrac{a}{-1 - b} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4 - 2b \\ a = 1 + b \\ \hline 0 = 3 - 3b \;\rightarrow\; b = 1 \;\rightarrow\; a = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ La función es } y = \frac{2}{x - 1}.$$

PROFUNDIZA

47 **Aplica la definición de logaritmo para calcular x en cada caso:**

a) $log_2\,(2x-1)=3$ **b)** $log_2\,(x+3)=-1$

c) $log\,4x=2$ **d)** $log\,(x-2)=2{,}5$

e) $log\,(3x+1)=-1$ **f)** $log_2\,(x^2-8)=0$

a) $log_2\,(2x-1)=3 \;\rightarrow\; 2^3=2x-1 \;\rightarrow\; 8=2x-1 \;\rightarrow\; 9=2x \;\rightarrow\; x=\dfrac{9}{2}$

b) $log_2\,(x+3)=-1 \;\rightarrow\; 2^{-1}=x+3 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{2}-3=x \;\rightarrow\; x=-\dfrac{5}{2}$

c) $log\,4x=2 \;\rightarrow\; 10^2=4x \;\rightarrow\; 100=4x \;\rightarrow\; x=25$

d) $log\,(x-2)=2{,}5 \;\rightarrow\; 10^{2,5}=x-2 \;\rightarrow\; \sqrt{10^5}=x-2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x=2+\sqrt{10^5} \;\rightarrow\; x=2+100\sqrt{10}\approx 318{,}23$

e) $log\,(3x+1)=-1 \;\rightarrow\; 10^{-1}=3x+1 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{10}-1=3x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x=\dfrac{-9/10}{3} \;\rightarrow\; x=-\dfrac{3}{10}$

f) $log_2\,(x^2-8)=0 \;\rightarrow\; 2^0=x^2-8 \;\rightarrow\; 1=x^2-8 \;\rightarrow\; x^2=9 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x=3;\; x=-3$

48 **Una ecuación en la que la incógnita está en el exponente se llama ecuación exponencial. Por ejemplo, $3^{1-x^2}=1/27$. Se resuelve así: $3^{1-x^2}=\dfrac{1}{27}$. Como $\dfrac{1}{27}=3^{-3}$: $3^{1-x^2}=3^{-3} \rightarrow 1-x^2=-3 \rightarrow x=2;\; x=-2$.**

Resuelve estas ecuaciones exponenciales, expresando como potencia el segundo miembro:

a) $3^{x^2-5}=81$ **b)** $2^{2x-3}=1/8$ **c)** $2^{x+1}=\sqrt[3]{4}$ **d)** $2^{x+1}=0{,}5^{3x-2}$

a) $3^{x^2-5}=81 \;\rightarrow\; 3^{x^2-5}=3^4 \;\rightarrow\; x^2-5=4 \;\rightarrow\; x^2=9 \;\rightarrow\; x=\pm 3$

b) $2^{2x-3}=\dfrac{1}{8} \;\rightarrow\; 2^{2x-3}=2^{-3} \;\rightarrow\; 2x-3=-3 \;\rightarrow\; x=0$

c) $2^{x+1}=\sqrt[3]{4} \;\rightarrow\; 2^{x+1}=2^{2/3} \;\rightarrow\; x+1=\dfrac{2}{3} \;\rightarrow\; x=\dfrac{2}{3}-1 \;\rightarrow\; x=-\dfrac{1}{3}$

d) $2^{x+1}=0{,}5^{3x-2} \;\rightarrow\; 2^{x+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-2} \;\rightarrow\; 2^{x+1}=2^{-(3x-2)} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x+1=-(3x-2) \;\rightarrow\; 4x=1 \;\rightarrow\; x=\dfrac{1}{4}$

49 **Para resolver $3^x = 1\,000$ no podemos aplicar el procedimiento del ejercicio anterior.**

a) Busca la solución por tanteo con la calculadora.

b) Sabes que la función inversa de $y = 3^x$ es $y = log_3\, x$. Por ello:

$$3^x = 1000 \iff x = log_3\, 1000$$

Obtén x y compara el resultado con el que obtuviste en el apartado a).

a) $3^6 = 729$ y $3^7 = 2\,187$

$3^{6,2} = 908{,}13\ldots$ y $3^{6,3} = 1\,013{,}59\ldots$

$3^{6,28} = 991{,}56\ldots$ y $3^{6,29} = 1\,002{,}51\ldots$

$3^{6,287} = 999{,}22\ldots$ y $3^{6,288} = 1\,000{,}31\ldots$

$3^{6,2877} = 999{,}98\ldots$ y $3^{6,2878} = 1\,000{,}09\ldots$

Luego $3^x = 1\,000 \to x \approx 6{,}2877$

b) $3^x = 1\,000 \iff x = log_3\, 1\,000 = \dfrac{log\, 1\,000}{log\, 3} \approx 6{,}2877$

El resultado es el mismo que el obtenido en el apartado a).

50 **Resuelve, como en el ejercicio anterior, las siguientes ecuaciones:**

a) $5^x = 42$ b) $4^{x-1} = 186{,}4$ c) $2^{x^2+1} = 87$ d) $1{,}5^x = 0{,}84$

a) $5^x = 42$

$$x = log_5\, 42 = \frac{log_{10}\, 42}{log_{10}\, 5} = 2{,}32$$

b) $4^{x-1} = 186{,}4$

$$log_4\, 186{,}4 = x - 1 \to x - 1 = \frac{log_{10}\, 186{,}4}{log_{10}\, 4} = 3{,}77 \to x = 3{,}77 + 1 \to x = 4{,}77$$

c) $2^{x^2+1} = 87$

$$x^2 + 1 = log_2\, 87 \to x^2 + 1 = \frac{log_{10}\, 87}{log_{10}\, 2} \to x^2 + 1 = 6{,}44 \to$$

$$\to x^2 = 5{,}44 \to x = \pm 2{,}33$$

d) $1{,}5^x = 0{,}84$

$$x = log_{1,5}\, 0{,}84 \to x = \frac{log_{10}\, 0{,}84}{log_{10}\, 1{,}5} \to x = -0{,}43$$

51 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $7^{x+2} = 823\,543$ **b)** $1{,}5^x = 318$ **c)** $2^{x^2-2} = 1753$ **d)** $4^{1-x} = 0{,}125$

a) $7^{x+2} = 823\,543$

$7^{x+2} = 7^7 \rightarrow x + 2 = 7 \rightarrow x = 5$

b) $1{,}5^x = 318$

$x = \log_{1,5} 318 \rightarrow x = \dfrac{\log_{10} 318}{\log_{10} 1{,}5} = 14{,}21 \rightarrow x = 14{,}21$

c) $2^{x^2-2} = 1\,753$

$x^2 - 2 = \log_2 1\,753 \rightarrow x^2 - 2 = \dfrac{\log_{10} 1\,753}{\log_{10} 2} \rightarrow x^2 - 2 = 10{,}77 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 12{,}77 \rightarrow x = \pm 3{,}57$

d) $4^{1-x} = 0{,}125$

$1 - x = \log_4 0{,}125 \rightarrow 1 - x = \dfrac{\log_{10} 0{,}125}{\log_{10} 4} \rightarrow 1 - x = -1{,}5 \rightarrow x = 2{,}5$

52 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

53 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$ **b)** $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \dfrac{31}{5}$

c) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ **d)** $2^{x-1} + 4^{x-3} = 5$ **e)** $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$

$3^x + 3^x \cdot 3^2 = 30$. Hacemos el cambio $3^x = z$:

$z + 9z = 30 \rightarrow 10z = 30 \rightarrow z = 3$

$3^x = 3 \rightarrow x = 1$

b) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \dfrac{31}{5}$

$5^x \cdot 5 + 5^x + \dfrac{1}{5} \cdot 5^x = \dfrac{31}{5}$. Hacemos el cambio $5^x = z$:

$5z + z + \dfrac{1}{5}z = \dfrac{31}{5} \rightarrow 25z + 5z + z = 31 \rightarrow 31z = 31 \rightarrow z = 1$

$5^x = 1 \rightarrow x = 0$

c) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$(2^2)^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \;\rightarrow\; (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

Hacemos el cambio $2^x = z$:

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} z_1 = 4 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

$2^x = 4 \;\rightarrow\; x = 2$

$2^x = 1 \;\rightarrow\; x = 0$

d) $2^{x-1} + 4^{x-3} = 5$

$$2^{x-1} + (2^2)^{x-3} = 5 \;\rightarrow\; 2^{x-1} + 2^{2x-6} = 5 \;\rightarrow\; \frac{1}{2} \cdot 2^x + \frac{1}{2^6} \cdot (2^x)^2 = 5$$

Hacemos el cambio $2^x = z$:

$$\frac{1}{2}z + \frac{1}{64}z^2 = 5 \;\rightarrow\; 32z + z^2 = 320 \;\rightarrow\; z^2 + 32z - 320 = 0$$

$$z = \frac{-32 \pm \sqrt{1\,024 + 1\,280}}{2} = \frac{-32 \pm 48}{2} \begin{cases} z_1 = 8 \\ z_2 = -40 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^x = 8 \;\rightarrow\; x = 3 \\ 2^x = -40 \;\rightarrow\; \text{No tiene solución.} \end{array}\right\} \rightarrow\; x = 3$$

e) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

$(2^2)^x - 3 \cdot 2^x \cdot 2 + 8 = 0 \;\rightarrow\; (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Hacemos el cambio $2^x = z$:

$$z^2 - 6z + 8 = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} z_1 = 4 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

$2^x = 4 \;\rightarrow\; x = 2$

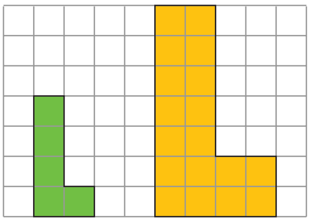
$2^x = 2 \;\rightarrow\; x = 1$

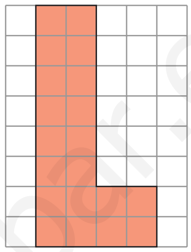
Página 170

PRACTICA

Semejanza de figuras

1 **Copia en una hoja de papel cuadriculado estas dos figuras. Modifica la de la derecha para que sean semejantes.**





2 **En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm.**

a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

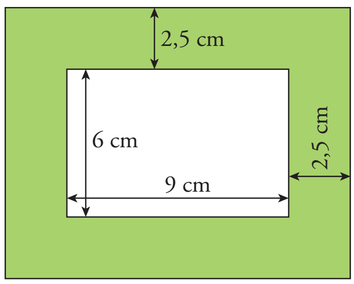
b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades A y B cuya distancia real es 360 km?

a) Como la escala es 1:1 500 000, cada centímetro en el mapa corresponde a 1 500 000 cm en la realidad, que equivalen a 15 km.

2,5 cm en el mapa serán: $2,5 \cdot 15 = 37,5$ km en la realidad.

b) $\dfrac{36\,000\,000}{1\,500\,000} = 24$ cm

3 **Una fotografía de 9 cm de ancha y 6 cm de alta tiene alrededor un marco de 2,5 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.**

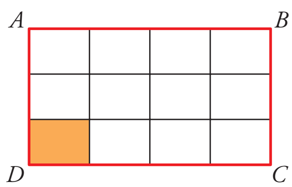


El rectángulo exterior es de 14 cm de ancho y 11 cm de alto.

Para que los rectángulos sean semejantes, los lados correspondientes han de ser proporcionales: $\dfrac{6}{11} \neq \dfrac{9}{14}$.

Ambos rectángulos no son proporcionales.

4 **Hemos dividido en cuatro partes iguales el lado mayor del rectángulo *ABCD* y en tres partes iguales el lado menor.**



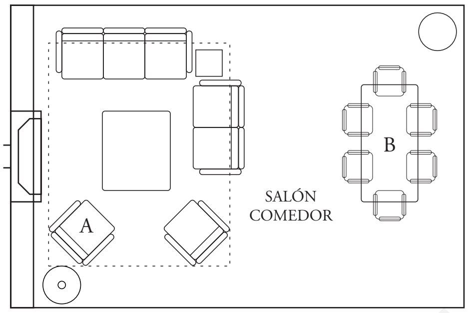
a) ¿Es semejante cada uno de los doce rectángulos obtenidos con el inicial?

b) Si dividimos los dos lados en tres partes iguales, ¿obtendríamos rectángulos semejantes?

a) No, porque los lados mayores están en la relación 1/4, y los menores, en 1/3.

b) En este caso sí. La razón de semejanza es 1/3.

5 **En una oficina de venta de pisos han hecho este plano a escala 1/50.**



a) Calcula las dimensiones reales del salón y su área.

b) Halla las dimensiones de la mesa B y del sillón A. ¿Te parecen razonables?

a) Cada centímetro del plano equivale a 0,5 m en la realidad.

Dimensiones del salón: $(6 \cdot 0{,}5 \text{ m}) \times (4 \cdot 0{,}5 \text{ m}) = 3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$

Área del salón: 6 m^2

b) Mesa: $(0{,}75 \cdot 0{,}5 \text{ m}) \times (1{,}55 \cdot 0{,}5 \text{ m}) = 0{,}375 \text{ m} \times 0{,}775 \text{ m}$

Podemos considerar (por errores de medición) que la mesa mide:

$0{,}4 \text{ m} \times 0{,}8 \text{ m}$, es decir, $40 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$.

Sillón A: $(0{,}7 \cdot 0{,}5 \text{ m}) \times (0{,}65 \cdot 0{,}5 \text{ m}) = 0{,}35 \text{ m} \times 0{,}325 \text{ m} =$

$= 35 \text{ cm} \times 32{,}5 \text{ cm}$

Las medidas no son razonables en absoluto: un salón de 6 m^2 es una estancia algo pequeña.

Teorema de Tales

6 **Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes y su razón de semejanza es 2/3. Calcula los lados del triángulo $A'B'C'$ si sabemos que**

$$\overline{AB} = 12 \text{ m}, \quad \overline{BC} = 9 \text{ m} \quad \text{y} \quad \overline{AC} = 7{,}5 \text{ m}$$

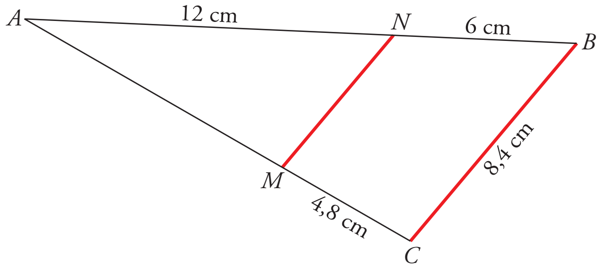
Si son semejantes se cumple que:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3} \qquad \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \qquad \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{12} = \frac{2}{3} \rightarrow \overline{A'B'} = \frac{12 \cdot 2}{3} = 8 \text{ m}; \qquad \frac{\overline{B'C'}}{9} = \frac{2}{3} \rightarrow \overline{B'C'} = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{A'C'}}{7{,}5} = \frac{2}{3} \rightarrow \overline{A'C'} = \frac{7{,}5 \cdot 2}{3} = 5 \text{ m}$$

7 **En la figura, MN es paralelo a BC. Calcula $\overline{AM}$ y $\overline{MN}$.**



Los triángulos ANM y ABC están en posición de Tales.

Tenemos, pues, las siguientes igualdades: $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AN}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AM}}$

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AN}} \rightarrow \frac{8,4}{\overline{MN}} = \frac{12+6}{12} \rightarrow \overline{MN} = \frac{8,4 \cdot 12}{18} = 5,6 \rightarrow \overline{MN} = 5,6 \text{ cm}$$

Llamamos $x = \overline{AM}$:

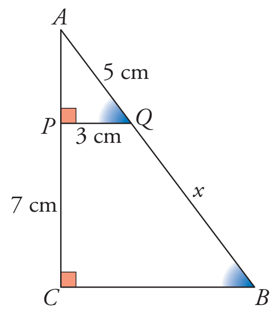
$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AM}} \rightarrow \frac{8,4}{4,8+x} = \frac{5,6}{x} \rightarrow 8,4x = 5,6(4,8+x) \rightarrow$$

$$\rightarrow 8,4x - 5,6x = 26,88 \rightarrow x = \frac{26,88}{2,8} = 9,6$$

Luego $\overline{AM} = 9,6$ cm.

8 **a) ¿Por qué son semejantes los triángulos APQ y ACB?**

b) Calcula $x = \overline{BQ}$.



a) El ángulo $\hat{A}$ es común a los dos triángulos y los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{C}$ son rectos, luego los ángulos $\hat{Q}$ y $\hat{B}$ son iguales. Por lo tanto, ambos triángulos son semejantes.

b) Por ser triángulos semejantes: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$

Calculamos $\overline{AP}$ aplicando el teorema de Pitágoras:

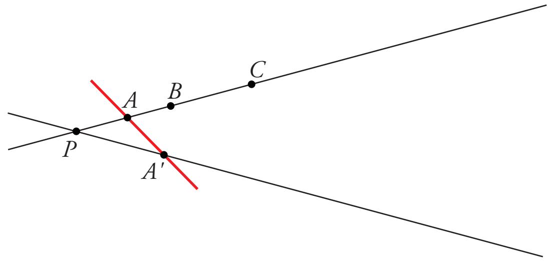
$$\overline{AP} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$\overline{AC} = \overline{AP} + \overline{PC} = 4 + 7 \rightarrow \overline{AC} = 11 \text{ cm}$$

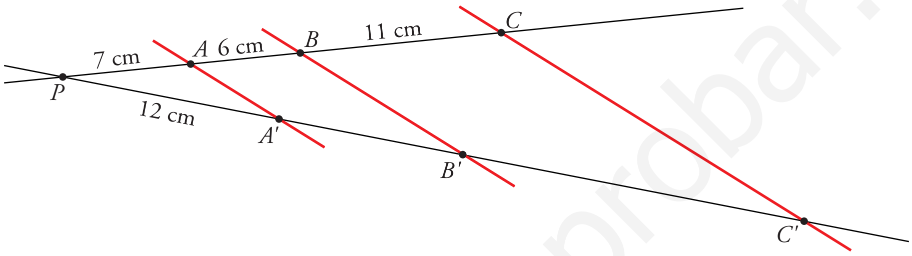
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} \rightarrow \frac{11}{4} = \frac{5+x}{5} \rightarrow 55 = 20 + 4x \rightarrow x = \frac{35}{4} = 8,75$$

$x = 8,75$ cm

9 **Sabemos que:** $\overline{PA} = 7$ **cm,** $\overline{PB} = 13$ **cm,** $\overline{PC} = 24$ **cm y** $\overline{PA'} = 12$ **cm.**



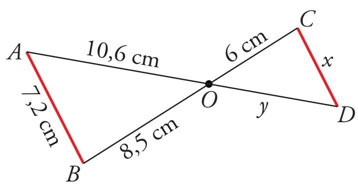
Traza paralelas a AA' **desde** B **y desde** C **y calcula** $\overline{A'B'}$ **y** $\overline{B'C'}$**.**



$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{A'B'}} \to \frac{7}{6} = \frac{12}{\overline{A'B'}} \to \overline{A'B'} = \frac{6 \cdot 12}{7} = 10{,}28 \to \overline{A'B'} = 10{,}28 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \to \overline{B'C'} = \frac{10{,}28 \cdot 11}{6} = 10{,}85 \to \overline{B'C'} = 18{,}85 \text{ cm}$$

10 **Observa esta figura, en la que el segmento** AB **es paralelo a** CD.



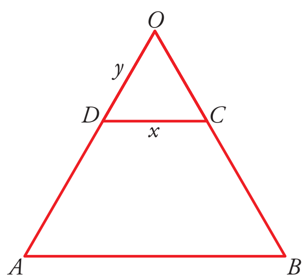
a) Di por qué son semejantes los triángulos OAB **y** ODC.

b) Calcula x **e** y.

a) Como $AB // CD$: $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{C}$, $\hat{O}$ es común $(\hat{O}' = \hat{O}'')$.

Los ángulos de ambos triángulos son iguales, luego los dos triángulos son semejantes.

b) Ponemos los triángulos en posición de Tales:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} \to \frac{7{,}2}{8{,}5} = \frac{x}{6} \to$$

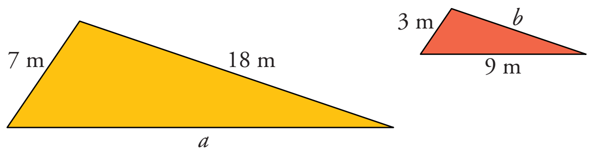
$$\to x = \frac{7{,}2 \cdot 6}{8{,}5} = 5{,}08 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{OD}} \to \frac{7{,}2}{10{,}6} = \frac{5{,}08}{y} \to$$

$$\to y = \frac{5{,}08 \cdot 10{,}6}{7{,}2} = 7{,}48 \text{ cm}$$

Página 171

11 **Estos dos triángulos tienen sus lados paralelos. ¿Cuánto miden los lados *a* y *b*?**



Como los lados respectivos son paralelos:

$$\hat{A} = \hat{A}',\ \hat{B} = \hat{B}',\ \hat{C} = \hat{C}'$$

y los triángulos son semejantes.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}} \rightarrow \frac{a}{7} = \frac{9}{3} \rightarrow a = \frac{9 \cdot 7}{3} = 21 \text{ m} \rightarrow a = 21 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}} \rightarrow \frac{21}{18} = \frac{9}{b} \rightarrow b = \frac{18 \cdot 9}{21} = 7{,}71 \text{ m} \rightarrow b = 7{,}71 \text{ m}$$

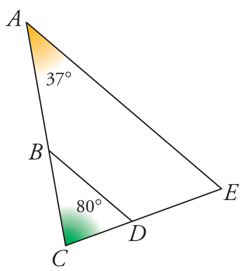
12 **En un triángulo *ABC*, la base *AB* mide 5,7 m y la altura relativa a esa base mide 9,5 m. ¿Cuánto mide el área de otro triángulo semejante a *ABC* en el que $\overline{A'B'}$ = 4,14 m?**

Como son semejantes: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{h}{h'} \rightarrow \frac{5{,}7}{4{,}14} = \frac{9{,}5}{h'} \rightarrow h' = \frac{9{,}5 \cdot 4{,}14}{5{,}7} = 6{,}9$ m

La altura mide 6,9 m.

Por tanto, el área pedida es: $A = \frac{6{,}9 \cdot 4{,}14}{2} = 14{,}283 \text{ m}^2$

13 **Si *BD* es paralelo a *AE*, y $\overline{AC}$ = 15 cm, $\overline{CE}$ = 11 cm, $\overline{BD}$ = 6,4 cm:**



a) Calcula $\overline{CD}$.

b) ¿Podemos saber cuánto vale $\overline{AE}$ sin medirlo directamente?

c) Si $\hat{A}$ = 37° y $\hat{C}$ = 80°, calcula $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.

Los triángulos $\widehat{ACE}$ y $\widehat{BCD}$ son semejantes, luego:

a) $\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \rightarrow \frac{11}{15} = \frac{\overline{BD}}{6{,}4} \rightarrow \overline{CD} = \frac{11 \cdot 6{,}4}{15} = 4{,}7$ cm

b) No se puede.

c) $\hat{A} = 37°,\ \hat{C} = 80°$

$\hat{E} = 180° - 37° - 80° = 63°$

$\hat{B} = \hat{A} = 37°$

$\hat{D} = \hat{E} = 63°$

14 **Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del primero es 26 cm². ¿Cuál es el área del segundo?**

Si la razón de semejanza entre dos triángulos es k, la razón entre sus áreas es k^2.

Razón entre áreas $= \left(\frac{13,6}{8}\right)^2 = (1,7)^2 = 2,89$

$A_{primero} = 26 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{A'}{26} = 2,89 \rightarrow A' = 2,89 \cdot 26 = 75,14 \text{ cm}^2$

El área del segundo triángulo mide $75,14 \text{ cm}^2$.

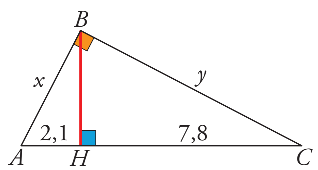
15 **Di cuál es la relación entre los radios de dos círculos si la razón entre sus áreas es 16/9.**

$\frac{A}{A'} = \frac{16}{9} \rightarrow \frac{R}{r} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

Teoremas del cateto y de la altura

16 **En cada uno de los siguientes triángulos rectángulos se ha trazado la altura** ***BH*** **sobre la hipotenusa. Halla, en cada caso, los segmentos** ***x*** **e** ***y*****.**

a) Por el teorema del cateto:



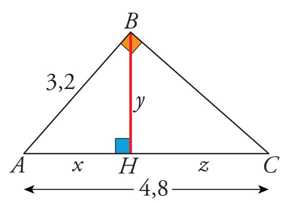
$y^2 = \overline{AC} \cdot \overline{HC} \rightarrow y^2 = (2,1 + 7,8) \cdot 7,8 =$

$= 77,22 \rightarrow y = \sqrt{77,22} \approx 8,79$

$x^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AH} \rightarrow x^2 = (2,1 + 7,8) \cdot 2,1 =$

$= 20,79 \rightarrow x = \sqrt{20,79} \approx 4,56$

b) Por el teorema del cateto:



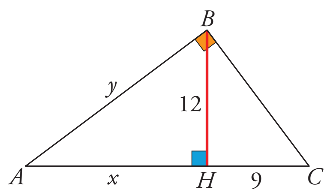
$3,2^2 = 4,8 \cdot x \rightarrow x = \frac{3,2^2}{4,8} = 2,13 \rightarrow x \approx 2,13$

$z = 4,8 - 2,13 = 2,67$

Por el teorema de la altura:

$y^2 = x \cdot z \rightarrow y = \sqrt{2,13 \cdot 2,67} \approx \sqrt{5,68} \rightarrow y \approx 2,38$

c) Por el teorema de la altura:



$12^2 = x \cdot 9 \rightarrow x = \frac{144}{9} = 16 \rightarrow x = 16$

Por el teorema del cateto:

$y^2 = (x + 9) \cdot x = x^2 + 9x = 256 + 144 = 400 \rightarrow y = 20$

Rectas

17 **Escribe la ecuación de las siguientes rectas:**

a) Pasa por (–4, 2) y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por (1, 3) y su pendiente es –2.

c) Pasa por (5, –1) y su pendiente es 0.

a) $y = 2 + \frac{1}{2}(x + 4) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$

b) $y = 3 - 2(x - 1) \rightarrow -2x + 5$

c) $y = -1$

18 **Da un vector dirección y la pendiente de la recta que pasa por A y B en los siguientes casos:**

a) $A(-1, 0)$ $B(0, 3)$

b) $A(0, -2)$ $B(5, -2)$

c) $A(-2, 3)$ $B(4, -1)$

a) $A(-1, 0)$ y $B(0, 3)$

Un vector dirección es $\overrightarrow{AB} = (0, 3) - (-1, 0) = (1, 3)$.

La pendiente es $m = \frac{3}{1} = 3$.

b) $A(0, -2)$ y $B(5, -2)$

Vector dirección: $\overrightarrow{AB} = (5, -2) - (0, -2) = (5, 0)$

Pendiente: $m = 0$

c) $A(-2, 3)$ y $B(4, -1)$

Vector dirección: $\overrightarrow{AB} = (4, -1) - (-2, 3) = (6, -4)$

Pendiente: $m = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

19 **Halla la ecuación de cada una de las rectas del ejercicio anterior. Esríbela en forma general.**

a) $m = 3$ y pasa por $A(-1, 0) \rightarrow y = 3(x + 1) \rightarrow y = 3x + 3$

b) $m = 0$ y pasa por $A(0, -2) \rightarrow y = -2$

c) $m = -\frac{2}{3}$ y pasa por $A(-2, 3) \rightarrow y = 3 - \frac{2}{3}(x + 2) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

20 Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por (–4, 2) y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por (1, 3) y su pendiente es –2.

c) Pasa por (5, –1) y su pendiente es 0.

a) La ecuación será: $y = 2 + \frac{1}{2}(x + 4) \;\rightarrow\; 2y = 4 + x + 4 \;\rightarrow\; 2y - x - 8 = 0$

b) La ecuación será: $y = 3 - 2(x - 1) \;\rightarrow\; y = 3 - 2x + 2 \;\rightarrow\; y + 2x - 5 = 0$

c) Ecuación: $y = -1$

21 Halla la ecuación de las siguientes rectas:

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por (4, 5).

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por (4, 0).

c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por (0, –3).

a) Pendiente de la recta $y = -2x + 3 \;\rightarrow\; m = -2$

Ecuación: $y = 5 - 2(x - 4) \;\rightarrow\; y = -12x + 13 \;\rightarrow\; y + 2x - 13 = 0$

b) Pendiente de la recta $2x - 4y + 3 = 0$: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \;\rightarrow\; m = \frac{1}{2}$

Ecuación: $y = \frac{1}{2}(x - 4) \;\rightarrow\; 2y = x - 4 \;\rightarrow\; x - 2y - 4 = 0$

c) Pendiente de la recta $3x + 2y - 6 = 0$: $y = -\frac{3}{2}x + 3 \;\rightarrow\; m = -\frac{3}{2}$

Ecuación: $y = -3 - \frac{3}{2}x \;\rightarrow\; 2y = -6 - 3x \;\rightarrow\; 3x + 2y + 6 = 0$

22 Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al vector $\vec{v}$, en los siguientes casos:

a) $P(-7, 2)$ $\vec{v}(2, 1)$ b) $P(4, -3)$ $\vec{v}(-5, 4)$ c) $P(5, 1)$ $\vec{v}(-1, -3)$

a) Un vector perpendicular a $\vec{v}(2, 1)$ es (–1, 2), vector dirección de la recta pedida $\rightarrow\; m = -2$

Ecuación: $y = 2 - 2(x + 7) \;\rightarrow\; y = -2x - 12 \;\rightarrow\; 2x + y + 12 = 0$

b) Un vector perpendicular a $\vec{v}(-5, 4)$ es (4, 5), vector dirección de la recta pedida $\rightarrow\; m = \frac{5}{4}$

Ecuación: $y = -3 + \frac{5}{4}(x - 4) \;\rightarrow\; 4y = -12 + 5x - 20 \;\rightarrow\; 5x - 4y - 32 = 0$

c) Un vector dirección de la recta pedida es (–3, 1), perpendicular a $\vec{v}(-1, -3)$

$\rightarrow \ m = -\frac{1}{3}$

Ecuación: $y = 1 - \frac{1}{3}(x - 5) \ \rightarrow \ 3y = 3 - x + 5 \ \rightarrow \ x + 3y - 8 = 0$

23 **Calcula la pendiente y un vector dirección de una recta perpendicular a la que pasa por $A(3, 1)$ y $B(-5, -1)$.**

- Vector dirección de la recta que pasa por $A(3, 1)$ y $B(-5, -1)$:
  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-5, -1) - (3, 1) = (-8, -2)$
- Vector perpendicular a $\vec{v}$ es $(1, -4)$, vector dirección de la recta perpendicular a la que pasa por A y B.
- Pendiente $\rightarrow \ m = -4$

24 **Escribe la ecuación de la recta que pasa por (–3, 0) y es perpendicular a $3x - y + 6 = 0$.**

- Pendiente de la recta $3x - y + 6 = 0 \ \rightarrow \ m = 3$
- Pendiente de la recta perpendicular a $3x - y + 6 = 0$ es $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{3}$.
- Ecuación: $y = -\frac{1}{3}(x + 3) \ \rightarrow \ 3y = -x - 3 \ \rightarrow \ x + 3y + 3 = 0$

25 **Dados los puntos $A(-3, 2)$ y $B(5, 0)$ halla las ecuaciones de las rectas siguientes:**

r: pasa por A y es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

s: pasa por B y es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

r: pasa por $A(-3, 2)$ y es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = (5, 0) - (-3, 2) = (8, -2)$$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ es $(1, 4)$, que es vector dirección de la recta r $\rightarrow$

$\rightarrow \ m = 4$

Ecuación de r: $y = 2 + 4(x + 3) \ \rightarrow \ y = 4x + 14 \ \rightarrow \ 4x - y + 14 = 0$

s: pasa por $B(5, 0)$ y es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$

Ecuación de s: $y = 4(x - 5) \ \rightarrow \ y = 4x - 20 \ \rightarrow \ 4x - y - 20 = 0$

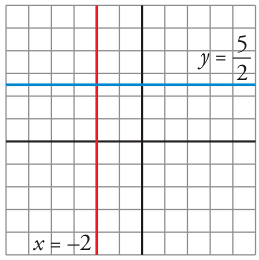
Página 172

26 **Representa las rectas $3x + 6 = 0$ y $2y - 5 = 0$ y halla su punto de intersección.**

$3x + 6 = 0 \ \rightarrow \ x = -2$ recta paralela al eje Y

$2y - 5 = 0 \ \rightarrow \ y = \frac{5}{2}$ recta paralela al eje X

Punto de intersección: $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$



27 **Escribe la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por (4, –3) en los siguientes casos:**

a) r: $2x + 7 = 0$ **b) s: $-y + 4 = 0$**

a) r: $2x + 7 = 0$

$2x + 7 = 0 \ \rightarrow \ x = -\frac{7}{2}$ es paralela al eje Y.

Por tanto, la recta perpendicular a r es paralela al eje $X \ \rightarrow \ y = k$

Como pasa por (4, –3), su ecuación es $y = -3 \ \rightarrow \ y + 3 = 0$

b) r: $-y + 4 = 0$

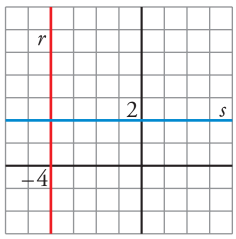
$-y + 4 = 0 \ \rightarrow \ y = 4$ es paralela al eje X.

Por tanto, la recta perpendicular a r es paralela al eje $Y \ \rightarrow \ x = k$

Como pasa por (4, –3), su ecuación es $x = 4 \ \rightarrow \ x - 4 = 0$

28 **Las rectas r y s pasan por el punto (–4, 2); r es paralela a $3x - 12 = 0$ y s es perpendicular a ella. Representa r y s y halla su ecuación.**

- Por ser r paralela a $3x - 12 = 0$, r será de la forma $x = k$. Como pasa por (–4, 2) $\rightarrow \ x = -4 \ \rightarrow$ r: $x + 4 = 0$
- Por ser s perpendicular a $3x - 12 = 0$, s será de la forma $y = k'$. Como pasa por (–4, 2) $\rightarrow \ y = 2 \ \rightarrow$ s: $y - 2 = 0$



29 **La recta r es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, y la recta s es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto (1, 3). Escribe las ecuaciones de las rectas r y s.**

La pendiente de r coincidirá con la pendiente de la recta $5x - 4y + 3 = 0$, por ser ambas paralelas $\rightarrow \ m = \frac{5}{4}$

s es perpendicular a $r \ \rightarrow$ pendiente de s es $-\frac{1}{m} = -\frac{4}{5}$

Tanto r como s pasan por el punto (–4, 2), luego:

- Ecuación de $r \;\rightarrow\; y = 2 + \frac{5}{4}(x+4) \;\rightarrow\; y = \frac{5}{4}x + 7 \;\rightarrow\; 5x - 4y + 28 = 0$
- Ecuación de $s \;\rightarrow\; y = 2 - \frac{4}{5}(x+4) \;\rightarrow\; 5y = 10 - 4x - 16 \;\rightarrow$

  $\rightarrow\; 4x + 5y + 6 = 0$

30 Determina el punto de corte de las rectas:

r: $5x + 4y + 3 = 0$ **s: $-4x + 2y - 5 = 0$**

Para hallar el punto de corte, resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 4y + 3 = 0 \\ -4x + 2y - 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} 5x + 4y + \;\;3 = 0 \\ 8x - 4y + 10 = 0 \\ \hline 13x \qquad\; + 13 = 0 \end{array} \rightarrow \; x = -1$$

$$5 \cdot (-1) + 4y + 3 = 0 \;\rightarrow\; 4y - 2 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{2}$$

El punto de corte es $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Distancias y circunferencia

31 Calcula la distancia entre P y Q:

a) $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$ **b) $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$**

c) $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$ **d) $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$**

a) $dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(3-3)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{12^2} = 12$

b) $dist\,(P, Q) = \sqrt{(-6+8)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $dist\,(P, Q) = \sqrt{(-5)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

d) $dist\,(P, Q) = \sqrt{(15+3)^2} = \sqrt{18^2} = 18$

32 Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?

Un triángulo es isósceles cuando dos de sus lados miden lo mismo.

Calculamos, pues, $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$ y $|\overrightarrow{BC}|$:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3+1)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(7+1)^2 + 4^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(7-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{array}\right\} \; |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$$

El triángulo de vértices A, B y C es isósceles.

33 **Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 6)$ es rectángulo.**

$A(-2, -1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 6)$

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \end{array}\right\} \begin{array}{c} |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 \text{ por Pitágoras:} \\ (\sqrt{29})^2 + (\sqrt{29})^2 = (\sqrt{58})^2 \\ 29 + 29 = 58 \end{array}$$

El triángulo de vértices A, B y C es rectángulo.

34 **Escribe la ecuación de la circunferencia de centro C y radio r:**

a) $C(4, -3)$, $r = 3$ **b)** $C(0, 5)$, $r = 6$

c) $C(6, 0)$, $r = 2$ **d)** $C(0, 0)$, $r = 5$

a) $C(4, -3)$, $r = 3$

$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9 \rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 9$

$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$

b) $C(0, 5)$, $r = 6$

$(x - 0)^2 + (y - 5)^2 = 36 \rightarrow x^2 + y^2 - 10y + 25 = 36$

$x^2 + y^2 - 10y - 11 = 0$

c) $C(6, 0)$, $r = 2$

$(x - 6)^2 + y^2 = 4 \rightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4$

$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$

d) $C(0, 0)$, $r = 5$

$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 25 = 0$

35 **Di cuál es el centro y el radio de las circunferencias siguientes:**

a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

b) $(x + 1)^2 + y^2 = 81$

c) $x^2 + y^2 = 10$

a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16 \rightarrow C(2, -3)$, $r = 4$

b) $(x + 1)^2 + y^2 = 81 \rightarrow C(-1, 0)$, $r = 9$

c) $x^2 + y^2 = 10 \rightarrow C(0, 0)$, $r = \sqrt{10}$

PIENSA Y RESUELVE

36 El perímetro de un triángulo isósceles es 64 m y el lado desigual mide 14 m. Calcula el área de un triángulo semejante cuyo perímetro es de 96 m.

$P = a + 2b = 64 \;\rightarrow\; 14 + 2b = 64 \;\rightarrow\; b = 25$ m

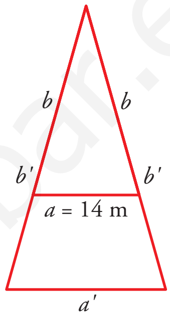
Como los triángulos son semejantes: $\frac{a'}{b'} = \frac{14}{25} \;\rightarrow\; a' = \frac{14b'}{25}$

$P' = a' + 2b' = 96;\; P' = \frac{14b'}{25} + 2b' = 96$

$14b' + 50b' = 2\,400 \;\rightarrow\; b' = 37{,}5$ m $\rightarrow\; a' = 21$ m

$h' = \sqrt{37{,}5^2 - (21/2)^2} = 36$ m

Área $= \frac{21 \cdot 36}{2} = 378$ m^2



37 Dos triángulos ABC y PQR son semejantes. Los lados del primero miden 24 m, 28 m y 34 m. Calcula la medida de los lados del segundo triángulo sabiendo que su perímetro es 129 m.

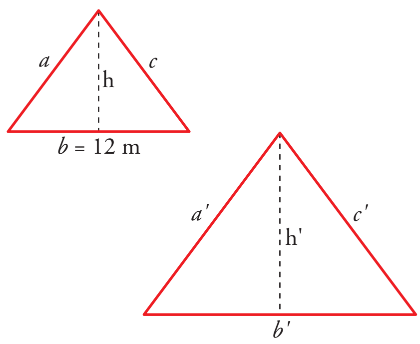
$P = 24 + 28 + 34 = 86$ m; $P' = 129$ m

$\frac{86}{129} = \frac{24}{a'} = \frac{28}{b'} = \frac{34}{c'}$

$a' = 36$ m, $b' = 42$ m, $c' = 51$ m

38 Las áreas de dos triángulos isósceles semejantes son 48 m^2 y 108 m^2. Si el lado desigual del primer triángulo es 12 m, ¿cuál es el perímetro del segundo?

Si la razón de semejanza entre los lados de un triángulo es k, la razón entre sus áreas es k^2.



$k^2 = \frac{108}{48} = 2{,}25 \;\rightarrow\; k = 1{,}5$

$b' = 12 \cdot 1{,}5 = 18$ m

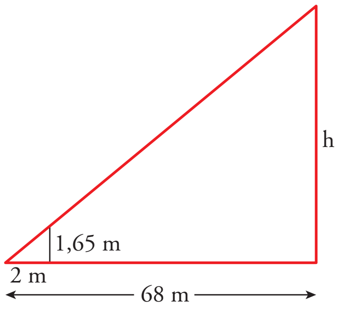
$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 2}{2} \cdot \text{h} = 48 \;\rightarrow\; \text{h} = 8$ m

h' $= 1{,}5 \cdot 8 = 12$ m

$a' = \sqrt{(\text{h}')^2 + \left(\frac{b'}{2}\right)^2} = \sqrt{144 + 81} = 15 \text{ m} = c'$

$P' = a' + b' + c' = 30$ m $+ 18$ m $= 48$ m

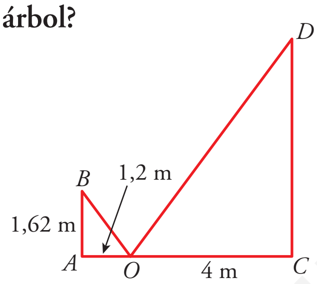
39 **¿Cuál es la altura de una casa que proyecta una sombra de 68 m, al mismo tiempo que una persona de 1,65 m de altura proyecta una sombra de 2 m?**



$$\frac{68}{h} = \frac{2}{1{,}65} \rightarrow h = 56{,}1 \text{ m}$$

La casa tiene una altura de 56,1 m.

40 **Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?**

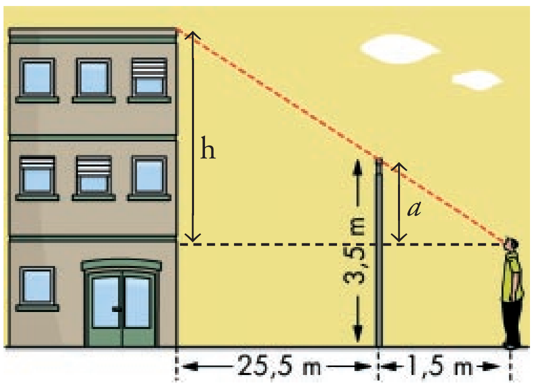


Ambos triángulos son semejantes:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{4}{1{,}2} \rightarrow \overline{CD} = \frac{4 \cdot 1{,}62}{1{,}2} = 5{,}4$$

La altura del árbol es de 5,4 m.

41 **Para medir la altura de la casa, Álvaro, de 165 cm de altura, se situó a 1,5 m de la verja y tomó las medidas indicadas. ¿Cuánto mide la casa?**



$a = 3{,}5 - 1{,}65 = 1{,}85$ m

$$\frac{25{,}5 + 1{,}5}{1{,}5} = \frac{h}{1{,}85} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{27 \cdot 1{,}85}{1{,}5} = 33{,}3 \text{ m}$$

La altura de la casa es: $33{,}3 + 1{,}65 = 34{,}95$ m

Página 173

42 **Dados los puntos $A(-1, 1)$ y $B(3, 4)$, halla:**

a) La ecuación de una recta r que pase por A y sea perpendicular a AB.

b) La ecuación de una recta s que pase por B y sea paralela al eje X.

c) El punto de corte de r y s.

$A(-1, 1)$ y $B(3, 4)$

a) $\overrightarrow{AB} = (3, 4) - (-1, 1) = (4, 3) \rightarrow m = \dfrac{3}{4}$

Pendiente de r es $-\dfrac{1}{m} = -\dfrac{4}{3}$

r pasa por A y su pendiente es $-\dfrac{4}{3} \rightarrow$ su ecuación será:

$y = 1 - \dfrac{4}{3}(x + 1) \rightarrow 3y = 3 - 4x - 4 \rightarrow 4x + 3y + 1 = 0$

b) s es una recta paralela al eje $X \rightarrow$ su ecuación será de la forma $y = k$. Como pasa por $B(3, 4) \rightarrow y = 4 \rightarrow y - 4 = 0$

c) El punto de intersección de r y s será la solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y + 1 = 0 \\ y = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4x + 12 + 1 = 0 \\ 4x = -13 \rightarrow x = -\dfrac{13}{4} \end{array}$$

El punto de corte entre r y s es $\left(-\dfrac{13}{4}, 4\right)$.

43 **Escribe las ecuaciones de los ejes de coordenadas y de las bisectrices de los cuadrantes primero y segundo.**

Ecuación del eje $X \rightarrow y = 0$

Ecuación del eje $Y \rightarrow x = 0$

Ecuación de la bisectriz del 1$^{\text{er}}$ cuadrante $\rightarrow y = x \rightarrow y - x = 0$

Ecuación de la bisectriz del 2º cuadrante $\rightarrow y = -x \rightarrow y + x = 0$

44 **Comprueba si los puntos $A(14, 0)$, $B(-9, 3)$, $C(2, 3/2)$ y $D(4, 8/7)$ pertenecen a la recta determinada por los puntos $P(-2, 2)$ y $Q(5, 1)$.**

Calculamos la ecuación de la recta r que pasa por $P(-2, 2)$ y $Q(5, 1)$:

$\overrightarrow{PQ} = (5 + 2, 1 - 2) = (7, -1) \rightarrow m = -\dfrac{1}{7}$

Ecuación $\rightarrow y = 1 - \dfrac{1}{7}(x - 5) \rightarrow 7y = 7 - x + 5 \rightarrow r: x + 7y - 12 = 0$

Para comprobar si un punto pertenece a una recta determinada, se sustituyen las coordenadas del punto en la ecuación de la recta. Si se verifica la ecuación, el punto pertenece a dicha recta.

$A(14, 0) \;\to\; 14 + 7 \cdot 0 - 12 \neq 0 \;\to\; A$ no pertenece a r.

$B(-9, 3) \;\to\; -9 + 7 \cdot 3 - 12 = 0 \;\to\; B$ pertenece a r.

$C\left(2, \dfrac{3}{2}\right) \;\to\; 2 + 7 \cdot \dfrac{3}{2} - 12 \neq 0 \;\to\; C$ no pertenece a r.

$D\left(4, \dfrac{8}{7}\right) \;\to\; 4 + 7 \cdot \dfrac{8}{7} - 12 = 0 \;\to\; D$ pertenece a r.

45 **Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas $r: 2x - y + 1 = 0$ y $s: x + 4y - 13 = 0$, y el punto $(3, -2)$ es uno de sus vértices.**

a) Dibuja el paralelogramo.

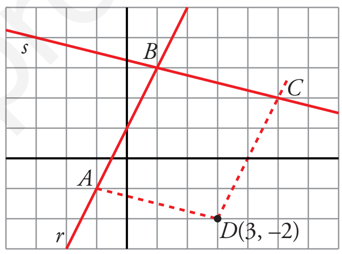
b) Halla las ecuaciones de los otros dos lados.

c) Calcula las coordenadas de los vértices.

a) Representamos las rectas $r: 2x - y + 1 = 0$ y $s: x + 4y - 13 = 0$:

r pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, 3)$

s pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(-3, 4)$



b) • Lado $\overline{AD}$ paralelo a la recta s:

Pendiente de s es $-\dfrac{1}{4}$.

Ecuación del lado $\overline{AD}$:

$$y = -2 - \frac{1}{4}(x - 3) \;\to\; 4y = -8 - x + 3 \;\to\; x + 4y + 5 = 0$$

• Lado $\overline{CD}$ paralelo a la recta r:

Pendiente de r es 2.

Ecuación de lado $\overline{CD}$:

$$y = -2 + 2(x - 3) \;\to\; y = 2x - 8 \;\to\; 2x - y - 8 = 0$$

c) • El vértice A es el punto de corte de r y $\overline{AD}$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 4y + 5 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 2x - y + 1 = 0 \\ -2x - 8y - 10 = 0 \\ \hline -9y - 9 = 0 \end{array} \;\to\; y = -1 \qquad \begin{array}{l} x - 4 + 5 = 0 \\ x = -1 \end{array}$$

• Vértice B: punto de corte de r y s:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 4y - 13 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 2x - y + 1 = 0 \\ -2x - 8y + 26 = 0 \\ \hline -9y + 27 = 0 \end{array} \;\to\; y = 3 \qquad \begin{array}{l} x + 12 - 13 = 0 \\ x = 1 \end{array}$$

• Vértice C: punto de corte de s y $\overline{CD}$:

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y - 13 = 0 \\ 2x - y - 8 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{r} x + 4y - 13 = 0 \\ 8x - 4y - 32 = 0 \\ \hline 9x \qquad - 45 = 0 \end{array} \to x = 5 \qquad \begin{array}{l} 10 - y - 8 = 0 \\ y = 2 \end{array}$$

Los vértices del paralelogramo son: $A(-1, -1)$, $B(1, 3)$, $C(5, 2)$ y $D(3, -2)$

46 **a) Escribe la ecuación de una recta r que es paralela al eje OY y que pasa por el punto $(-3, 2)$.**

b) Halla el punto de corte de r con la recta: $3x + 4y - 7 = 0$

a) Por ser r paralela al eje OY su ecuación es de la forma $x = k$; como pasa por $(-3, 2)$ $\to$ $x = -3$ $\to$ $x + 3 = 0$

b) Se resuelve el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y - 7 = 0 \\ x + \qquad 3 = 0 \end{array}\right\} -9 + 4y - 7 = 0 \to 4y = 16 \to y = 4$$

El punto de corte es $(-3, 4)$.

47 **Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ y uno de sus diámetros es el segmento de extremos $A(0, 4)$, $B(3, 0)$.**

La distancia entre los puntos $A(0, 4)$ y $B(3, 0)$ es:

$$d = \sqrt{(3 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

El radio de la circunferencia es $r = \dfrac{5}{2}$.

Su ecuación es: $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2$

$$x^2 + \frac{9}{4} - 3x + y^2 + 4 - 4y = \frac{25}{4}$$

$$4x^2 + 9 - 12x + 4y^2 + 16 - 16y = 25$$

$$4x^2 + 4y^2 - 12x - 16y = 0$$

48 **Representa la circunferencia $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ y di en qué se transforma mediante cada uno de los siguientes movimientos:**

a) Una traslación de vector $\vec{t}(3, 4)$.

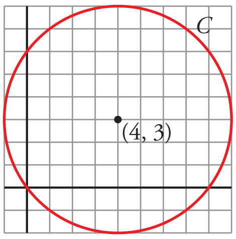
b) Un giro de centro $(4, 0)$ y ángulo $-90°$.

c) Un giro de centro $(4, 3)$ y ángulo $30°$.

d) Una simetría de eje $y = 0$.

e) Una simetría de eje $y = -x$.

f) Una simetría de eje $y = x - 1$.



Es una circunferencia de centro (4, 3) y radio $r = 5$.

a) Mediante $\vec{t}(3, 4)$ se transforma en una circunferencia de centro (7, 7) y radio 5.

b) El centro se transforma en el punto (7, 0). Su radio sigue siendo de 5 unidades.

c) Se transforma en sí misma.

d) El centro se transforma en el punto (4, –3); el radio es de 5 unidades.

e) Circunferencia de centro (–4, –3) y radio 5.

f) Se transforma en sí misma.

49 **Di en qué se transforma el eje Y según cada uno de los movimientos descritos en el ejercicio anterior.**

a) Recta $x = 3$

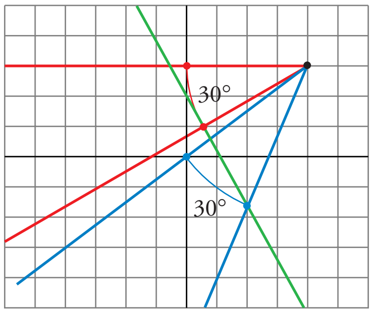
b) Recta $y = 4$

c) Recta que se observa en el gráfico.

d) Eje Y

e) Eje X

f) Recta $y = -1$



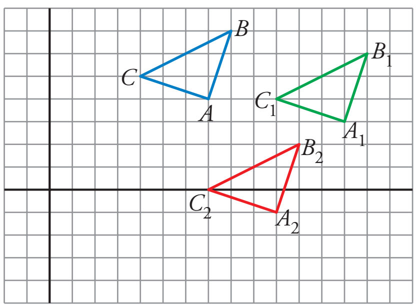
50 **Halla el transformado del triángulo de vértices $A(7, 4)$, $B(8, 7)$, $C(4, 5)$ mediante la transformación $T_2 \circ T_1$, siendo T_1 y T_2 las traslaciones de vectores $\vec{t_1}(6, -1)$ y $\vec{t_2}(-3, -4)$.**

$T_1(\widehat{ABC}) = A_1\widehat{B_1}C_1$

$T_2(A_1\widehat{B_1}C_1) = A_2\widehat{B_2}C_2$ donde $A_2(10, -1)$, $B_2(11, 2)$ y $C_2(7, 0)$

$T_2 \circ T_1$ resulta ser una traslación de vector

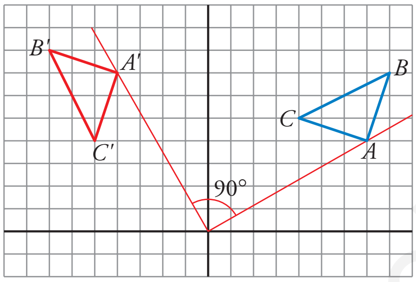
$\vec{t_1} + \vec{t_2} = (3, -5)$



PROFUNDIZA

51 **Halla el transformado del mismo triángulo ABC del ejercicio anterior mediante la transformación $G_2 \circ G_1$, siendo G_1 y G_2 los giros de centro $O(0, 0)$ y ángulos $\alpha_1 = 120°$ y $\alpha_2 = -30°$.**

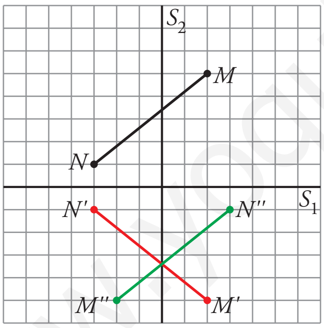
El giro $G_2 \circ G_1$ es otro giro, G, de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$.



52 **a) Transforma el segmento de extremos $M(2, 5)$, $N(-3, 1)$ mediante la transformación $S_2 \circ S_1$, siendo S_1 y S_2 las simetrías de ejes e_1: el eje X, e_2: el eje Y.**

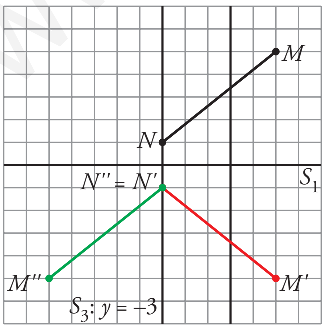
b) Transforma MN mediante la transformación $S_3 \circ S_1$, siendo S_3 la simetría de eje e_3: $y = -3$.

a)



Resulta, mediante S_1, el segmento de extremos $M'(2, -5)$, $N'(-3, -1)$, y aplicando a $M'N'$ la simetría S_2, obtenemos el segmento $M''N''$ de coordenadas $M''(-2, -5)$ y $N''(3, -1)$.

b)



En este caso obtenemos el segmento de extremos $M''(-5, -5)$ $N''(-3, -1)$.

53 **Tenemos una traslación $T(\vec{t})$: $\vec{t}(6, 0)$, y un giro $G(C, \alpha)$: $C(3, 3)$, $\alpha = -90°$. Vamos a demostrar que la transformación $M = G \circ T$ es un giro G' de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = -90°$.**

a) $P(-2, 10)$. Halla $P' = T(P)$, $P'' = G(P')$ y comprueba que $P'' = G'(P)$.

b) Halla dos simetrías S_1 y S_2 de modo que el eje de S_2 pase por C (centro del giro G) y tales que $T = S_2 \circ S_1$.

c) Halla S_3 de modo que $G = S_3 \circ S_2$ siendo S_2 la misma del apartado anterior.

d) Observa que:

$$M = G \circ T = (S_3 \circ S_2) \circ (S_2 \circ S_1) = S_3 \circ (S_2 \circ S_2) \circ S_1 = S_3 \circ I \circ S_1 = S_3 \circ S_1$$

Justifica cada paso de la igualdad anterior.

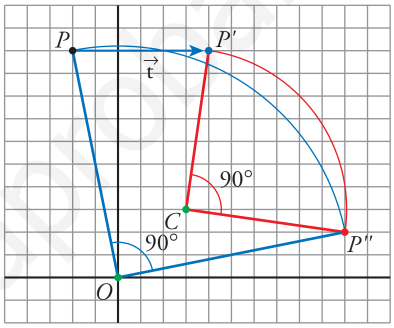
e) Puesto que $M = S_3 \circ S_1$, ¿qué tipo de transformación es M?

Observa que hemos probado que el resultado de componer una traslación con un giro es otro giro.

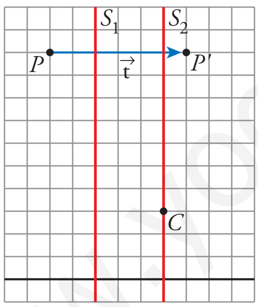
a) $P' = T(P) = (4, 10)$

$P'' = G(P') = G(4, 10) = (10, 2)$

$G'(P) = G'(-2, 10) = (10, 2)$

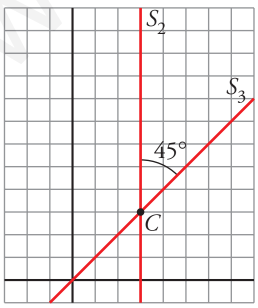


b)



$$\left.\begin{array}{l} S_1\text{: eje } Y \\ S_2\text{: } x = 3 \end{array}\right\} \; T = S_2 \circ S_1$$

c)



$S_3 \circ S_2 = G$

d) La composición de una simetría por sí misma es la identidad, y $S \circ I = I \circ S = S$.

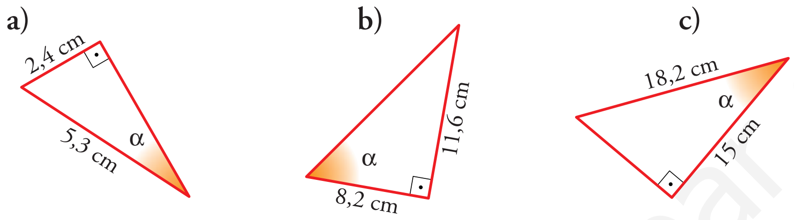
e) M es un giro.

Página 190

PRACTICA

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

1 Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:



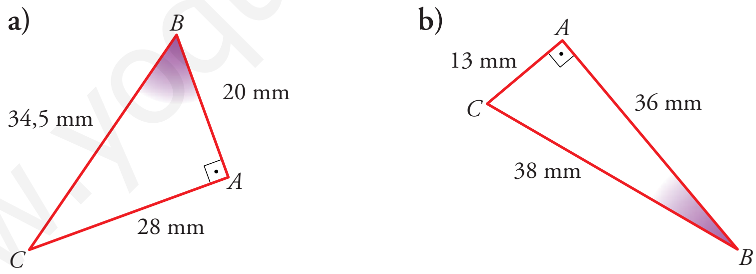
a) $sen\ \alpha = \dfrac{2{,}4}{5{,}3} = 0{,}45$ $\quad cos\ \alpha = \sqrt{1 - 0{,}45^2} = 0{,}89$ $\quad tg\ \alpha = \dfrac{0{,}45}{0{,}89} = 0{,}5$

b) $tg\ \alpha = \dfrac{11{,}6}{8{,}2} = 1{,}41$ La hipotenusa h es: $h = \sqrt{11{,}6^2 + 8{,}2^2} = 14{,}2$

$sen\ \alpha = \dfrac{11{,}6}{14{,}2} = 0{,}82$ $\quad cos\ \alpha = \dfrac{8{,}2}{14{,}2} = 0{,}58$

c) $cos\ \alpha = \dfrac{15}{18{,}2} = 0{,}82$ $\quad sen\ \alpha = \sqrt{1 - (0{,}82)^2} = 0{,}57$ $\quad tg\ \alpha = \dfrac{0{,}57}{0{,}82} = 0{,}69$

2 Midiendo los lados, halla las razones trigonométricas de $\hat{B}$ en cada caso:



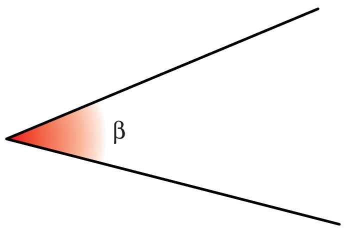
a) $sen\ B = \dfrac{28}{34{,}5} = 0{,}81$ $\qquad$ b) $sen\ B = \dfrac{13}{38} = 0{,}34$

$cos\ B = \dfrac{20}{34{,}5} = 0{,}58$ $\qquad cos\ B = \dfrac{36}{38} = 0{,}95$

$tg\ B = \dfrac{28}{20} = 1{,}4$ $\qquad tg\ B = \dfrac{13}{36} = 0{,}36$

3 Calcula las razones trigonométricas de β:

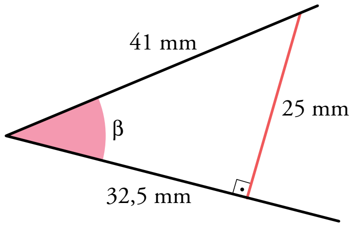
☛ *Construye un triángulo trazando una perpendicular a uno de los lados.*



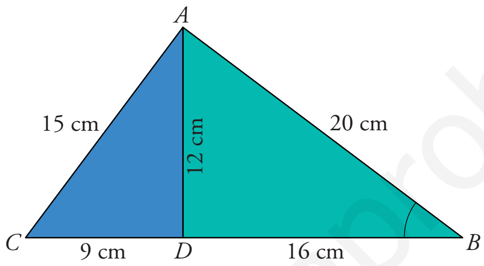
$sen\ \beta = \dfrac{25}{41} = 0{,}61$

$cos\ \beta = \dfrac{32{,}5}{41} = 0{,}79$

$tg\ \beta = \dfrac{25}{32{,}5}\ 0{,}77$



4 **Prueba, con el teorema de Pitágoras, que los triángulos *ABC* y *ADB* son rectángulos. Halla $sen\ \hat{B}$ en los dos triángulos (el verde y el total) y comprueba que obtienes el mismo valor.**

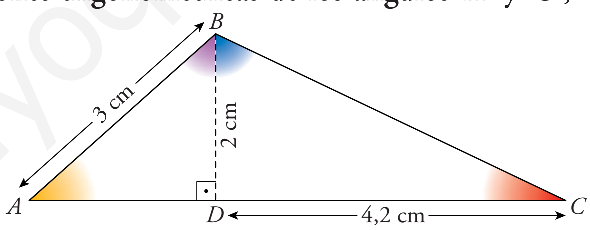


Triángulo *ABC*: $\sqrt{20^2 + 15^2} = 25 = \overline{CB} \rightarrow$ *ABC* es un triángulo rectángulo.

Triángulo *ADB*: $\sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \rightarrow$ *ADB* es un triángulo rectángulo.

En *ABC*: $sen\ \hat{B} = \dfrac{15}{9 + 16} = 0{,}6$ En *ADB*: $sen\ \hat{B} = \dfrac{12}{20} = 0{,}6$

5 **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$.**



- $sen\ \hat{A} = \dfrac{2}{3}$

  $cos\ \hat{A} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

  $tg\ \hat{A} = \dfrac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

- $tg\ \hat{C} = \dfrac{2}{4{,}2} = 0{,}48 \rightarrow \dfrac{sen\ \hat{C}}{cos\ \hat{C}} = 0{,}48 \rightarrow sen\ \hat{C} = 0{,}48 \cdot cos\ \hat{C}$

  $(sen\ \hat{C})^2 + (cos\ \hat{C})^2 = 1 \rightarrow (0{,}48\ cos\ \hat{C})^2 + (cos\ \hat{C})^2 = 1 \rightarrow cos\ \hat{C} = 0{,}9$

  $sen\ \hat{C} = 0{,}48 \cdot 0{,}9 = 0{,}43$

- Llamamos $\alpha = \widehat{ABD}$:

$cos\ \alpha = \dfrac{2}{3}$

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \;\rightarrow\; (sen\ \alpha)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \;\rightarrow\; (sen\ \alpha)^2 = 1 - \frac{4}{9} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; (sen\ \alpha)^2 = \frac{5}{9} \;\rightarrow\; sen\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\sqrt{5}/3}{2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- Llamamos $\beta = CBD$:

$$tg\ \beta = \frac{4{,}2}{2} = 2{,}1 \;\rightarrow\; \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = 2{,}1 \;\rightarrow\; sen\ \beta = 2{,}1 \cdot cos\ \beta$$

$$(sen\ \beta)^2 + (cos\ \beta)^2 = 1 \;\rightarrow\; (2{,}1 \cdot cos\ \beta)^2 + (cos\ \beta)^2 = 1 \;\rightarrow\; cos\ \beta = 0{,}43$$

$$sen\ \beta = 2{,}1 \cdot cos\ \beta = 2{,}1 \cdot 0{,}43 = 0{,}9$$

Relaciones fundamentales

6 **Si $sen\ \alpha = 3/5$, calcula $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ utilizando las relaciones fundamentales ($\alpha < 90°$).**

$sen\ \alpha = \dfrac{3}{5}$ $(\alpha < 90°)$

$$cos\ \alpha = \sqrt{1 - (sen\ \alpha)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \;\rightarrow\; cos\ \alpha = \frac{4}{5}$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \;\rightarrow\; tg\ \alpha = \frac{3}{4}$$

7 **Halla el valor exacto (con radicales) de $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$ sabiendo que $tg\ \alpha = 3$ ($\alpha < 90°$).**

$tg\ \alpha = 3$ $(\alpha < 90°)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 3 \\ sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} sen\ \alpha = 3cos\ \alpha \\ (3cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \;\rightarrow\; 10cos^2\ \alpha = 1 \;\rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow\; cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \;\rightarrow\; cos\ \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \;\rightarrow\; sen\ \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

8 **Completa esta tabla:**

sen α	**0,92**	0,6	0,99	$\sqrt{5}/3$	**0,2**	$\sqrt{3}/2$
cos α	0,39	0,8	**0,12**	2/3	0,98	**1/2**
tg α	2,35	**0,75**	8,27	$\sqrt{5}$ **/2**	0,2	$\sqrt{3}$

En todos los casos solo tomaremos valores positivos.

- $sen\ \alpha = 0{,}92 \ \rightarrow\ cos\ \alpha = \sqrt{1-(0{,}92)^2} = 0{,}39$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}35$

- $tg\ \alpha = 0{,}75$

  $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 0{,}75 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = 0{,}75 \cdot cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \ \rightarrow\ (0{,}75 \cdot cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \ \rightarrow$

  $\rightarrow\ (cos\ \alpha)^2 = 0{,}64 \ \rightarrow\ cos\ \alpha = 0{,}8$

  $sen\ \alpha = 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6$

- $cos\ \alpha = 0{,}12 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \sqrt{1-(0{,}12)^2} = 0{,}99$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}99}{0{,}12} = 8{,}27$

- $tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

  $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\ cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$

  $\dfrac{5}{4}(cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \ \rightarrow\ \dfrac{9}{4}(cos\ \alpha)^2 = 1$

  $(cos\ \alpha)^2 = \dfrac{4}{9} \ \rightarrow\ cos\ \alpha = \dfrac{2}{3}$

  $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

- $sen\ \alpha = 0{,}2 \ \rightarrow\ cos\ \alpha = \sqrt{1-0{,}2^2} = 0{,}98$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}2}{0{,}98} = 0{,}2$

- $cos\ \alpha = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  $tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

9 **Calcula el valor exacto (utilizando radicales) de las razones trigonométricas que faltan y el ángulo α ($\alpha < 90°$).**

$sen\ \alpha$	$1/3$	$\sqrt{7}/3$	$(2\sqrt{5})/5$
$cos\ \alpha$	$(2\sqrt{2})/3$	$\sqrt{2}/3$	$\sqrt{5}/5$
$tg\ \alpha$	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{7/2}$	2
α	19° 28' 16''	61° 52' 28''	63° 26' 6''

Como $\alpha < 90° \rightarrow \begin{cases} sen\ \alpha > 0 \\ cos\ \alpha > 0 \end{cases}$

- $sen\ \alpha = \dfrac{1}{3} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

  $tg\ \alpha = \dfrac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

  $\alpha = 19{,}47° = 19°\ 28'\ 16''$

- $cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{7}{9}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

  $tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{7}/3}{\sqrt{2}/3} = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$

  $\alpha = 61{,}87° = 61°\ 52'\ 28''$

- $tg\ \alpha = 2 \rightarrow \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 2 \rightarrow sen\ \alpha = 2\ cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow 4(cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

  $sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; $\alpha = 63{,}43° = 63°\ 26'\ 6''$

Resolución de triángulos rectángulos

10 **Halla la medida de los lados y ángulos desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90°$):**

a) $b = 5$ cm — $c = 12$ cm — Calcula a, $\hat{B}$ y $\hat{C}$

b) $c = 43$ m — $\hat{C} = 37°$ — Calcula a, b y $\hat{B}$

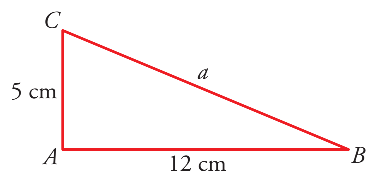
c) $b = 7$ m — $\hat{C} = 49°$ — Calcula a, c y $\hat{B}$

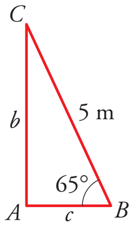
d) $a = 5$ m — $\hat{B} = 65°$ — Calcula b, c y $\hat{C}$

a) $a = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ cm

$sen\ \hat{B} = \dfrac{5}{13} = 22{,}62 \rightarrow \hat{B} = 22°\ 37'\ 11''$

$\hat{C} = 90° - 22{,}62 = 67{,}38 = 67°\ 22'\ 48''$



b) 

$\hat{B} = 90° - 37° = 53°$

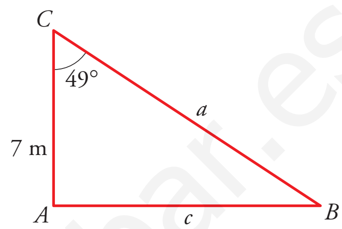
$cos\ \hat{B} = \dfrac{43}{a} \rightarrow cos\ 53° = \dfrac{43}{a} \rightarrow a = \dfrac{43}{cos\ 53°} = 71{,}45$ m

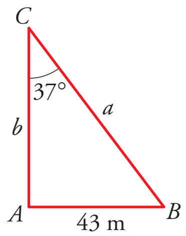
$tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{43} \rightarrow b = 43 \cdot tg\ 53° = 57{,}06$ m

c) $\hat{B} = 90 - 49 = 41°$

$cos\ \hat{C} = \dfrac{7}{a} \rightarrow a = \dfrac{7}{cos\ 49°} = 10{,}67$ m

$sen\ \hat{C} = \dfrac{c}{10{,}67} \rightarrow c = 10{,}67 \cdot sen\ \hat{C} = 8{,}05$ m



d) 

$\hat{C} = 90° - 65° = 25°$

$sen\ 65° = \dfrac{b}{5} \rightarrow b = 5\ sen\ 65° = 4{,}53$ m

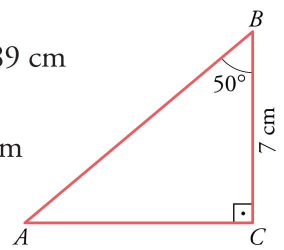
$cos\ 65° = \dfrac{c}{5} \rightarrow c = 5\ cos\ 65° = 2{,}11$ m

11 **En un triángulo rectángulo, *ABC*, con el ángulo recto en *C*, conocemos $\hat{B} = 50°$ y el cateto $\overline{BC} = 7$ cm. Calcula $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\hat{A}$.**

$cos\ \hat{B} = \dfrac{7}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \dfrac{7}{cos\ 50°} = 10{,}89 \rightarrow \overline{AB} = 10{,}89$ cm

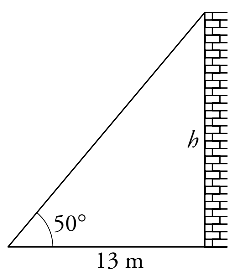
$tg\ \hat{B} = \dfrac{\overline{AC}}{7} \rightarrow \overline{AC} = 7 \cdot tg\ \hat{B} = 8{,}34 \rightarrow \overline{AC} = 8{,}34$ cm

$\hat{A} = 180° - 90° - 50° = 40° \rightarrow \hat{A} = 40°$



Página 191

12 **Calcula la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50° con el suelo.**



$tg\ 50° = \dfrac{h}{13} \rightarrow h = 13 \cdot tg\ 50° \rightarrow h = 15{,}49$ m

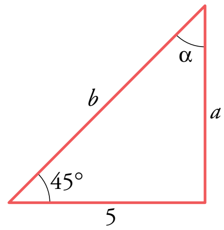
La torre mide 15,49 m de altura.

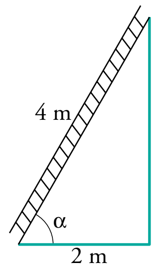
13 **De un triángulo rectángulo se sabe que un ángulo mide 45° y uno de sus catetos 5 cm. ¿Cuánto miden el otro cateto, la hipotenusa y el otro ángulo agudo?**

$tg\ 45° = \frac{a}{5} \rightarrow 1 = \frac{a}{5} \rightarrow a = 5$ cm

$b = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}1$ cm; $\alpha = 90° - 45° = 45°$

El otro cateto mide 5 cm, la hipotenusa 7,1 cm y el ángulo 45°.



14 

Una escalera de 4 m está apoyada contra la pared. ¿Cuál será su inclinación si su base dista 2 m de la pared?

$cos\ \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$

La inclinación de la escalera es de 60° respecto del suelo.

15 Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 8 cm, respectivamente. ¿Cuánto mide el lado del rombo?

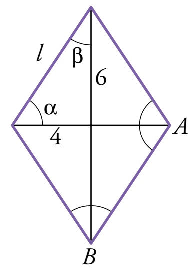
$tg\ \alpha = \frac{6}{4} \rightarrow \alpha = 56{,}3° \rightarrow \beta = 90 - 56{,}3 = 33{,}7°$

Los ángulos del rombo son:

$\hat{A} = 56{,}3 \cdot 2 = 112{,}6°$; $\hat{B} = 33{,}7 \cdot 2 = 67{,}4°$

$l = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = 7{,}21$ cm

El lado del rombo mide 7,21 cm.



16 En el triángulo *ABC*:

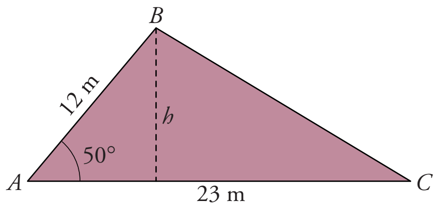
a) Traza la altura sobre *AC* y halla su longitud.

b) Calcula el área del triángulo.

a) $sen\ 50° = \frac{h}{12} \rightarrow$

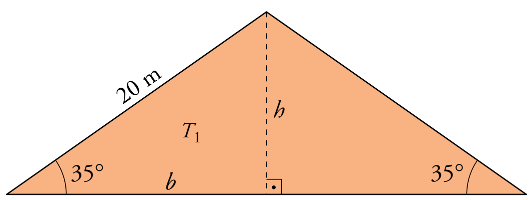
$\rightarrow h = 12 \cdot sen\ 50° = 9{,}19$ m

b) $\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{23 \cdot 9{,}19}{2} = 105{,}68 \text{ m}^2$



17 Calcula el área de este triángulo:

☛ *Al trazar la altura se forman dos triángulos rectángulos. Halla sus catetos.*



$sen\ 35° = \dfrac{h}{20} \rightarrow h = 20 \cdot sen\ 35° = 11{,}47$ m

$cos\ 35° = \dfrac{b}{20} \rightarrow b = 20 \cdot cos\ 35° = 16{,}38$ m

Área de $T_1 = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{16{,}38 \cdot 11{,}47}{2} = 93{,}94\ m^2$

Área total $= 2 \cdot 93{,}94 = 187{,}88\ m^2$

Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

18 **Di en qué cuadrante se encuentran los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas.**

a) 128° b) 198° c) 87° d) 98° e) 285° f) 305°

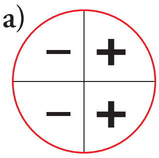
Compruébalo con la calculadora.

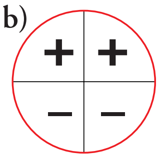
ÁNGULO	CUADRANTE	SIGNO SENO	SIGNO COSENO	SIGNO TANGENTE
128°	2º	positivo	negativo	negativo
198°	3º	negativo	negativo	positivo
87°	1º	positivo	positivo	positivo
98°	2º	positivo	negativo	negativo
285°	4º	negativo	positivo	negativo
305°	4º	negativo	positivo	negativo

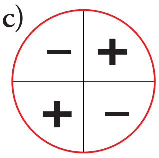
19 **Completa esta tabla sin usar la calculadora:**

	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tg	0	—	0	—	0

20 **En cada uno de estos círculos está indicado el signo de las razones trigonométricas de α, según el cuadrante en el que esté α. ¿Cuál corresponde a *sen* α, cuál a *cos* α y cuál a *tg* α?**

a)


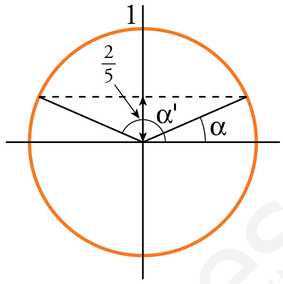
b)


c)


a) Corresponde a *cos* α. b) Corresponde a *sen* α. c) Corresponde a *tg* α.

21 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

22 **Dibuja dos ángulos cuyo seno sea 2/5 y halla su coseno.**



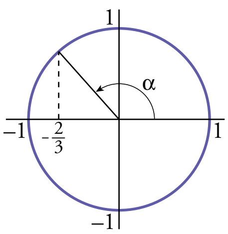
$sen\ \alpha = \frac{2}{5} \rightarrow \alpha = 23°\ 34'\ 41''$

$cos\ \alpha = \sqrt{1 - (sen\ \alpha)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$sen\ \alpha' = \frac{2}{5} \rightarrow \alpha' = 156°\ 25'\ 18''$

$cos\ \alpha' = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

23 **Dibuja un ángulo menor que 180° cuyo coseno sea $-\frac{2}{3}$ y halla su seno y su tangente.**



$cos\ \alpha = -\frac{2}{3}$ el ángulo es $\alpha = 131°\ 48'\ 37''$

$sen\ \alpha = \sqrt{1 - (cos\ \alpha)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\sqrt{5}/3}{-2/3} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

24 **Sabiendo que $tg\ \alpha = -2$ y $\alpha < 180°$, halla $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$.**

Por ser $tg\ \alpha < 0$ y $\alpha < 180°$, el ángulo $\alpha \in$ 2º cuadrante $\rightarrow$ $sen\ \alpha > 0$ y $cos\ \alpha < 0$.

$tg\ \alpha = -2 \rightarrow \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -2 \rightarrow sen\ \alpha = -2\ cos\ \alpha$

$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow (-2\ cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 5(cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

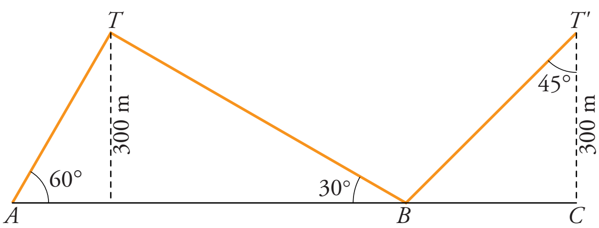
$sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Página 192

PIENSA Y RESUELVE

25 **Una línea de alta tensión pasa por dos transformadores, *T* y *T'*.**

Este es un plano de la línea:



Calcula las longitudes de los tres tramos de cable.

$sen\ 60° = \dfrac{300}{b} \;\rightarrow\; b = \dfrac{600}{\sqrt{3}} = 200\sqrt{3} \approx 346,4$ m

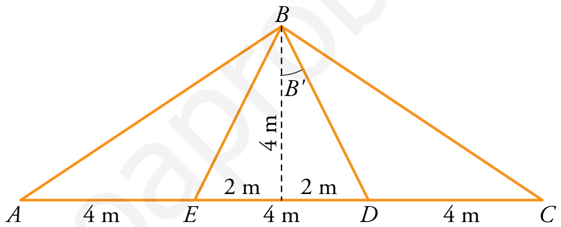
$sen\ 30° = \dfrac{300}{a} \;\rightarrow\; a = 600$ m

$cos\ 45° = \dfrac{300}{c} \;\rightarrow\; c = \dfrac{300}{cos\ 45°} = \dfrac{600}{\sqrt{2}} = 300\sqrt{2} \approx 424,3$ m

Longitud total: $a + b + c = 200\sqrt{3} + 600 + 300\sqrt{2} = 1\,370,7$ m

26 **Una estructura metálica tiene la forma y dimensiones de la figura. Halla la longitud de los postes AB y BE y la medida de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\widehat{EBD}$ y $\widehat{ABC}$**

Por el teorema de Pitágoras:



$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + (4+2)^2} =$

$= \sqrt{16 + 36} = 7,21$ m

$\overline{BE} = \sqrt{2^2 + 4^2} =$

$= \sqrt{4 + 16} = 4,47$ m

$tg\ \hat{A} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \;\rightarrow\; \hat{A} = 0,\widehat{6}$ INV tan $67,38° = 33°\ 41'\ 24''$

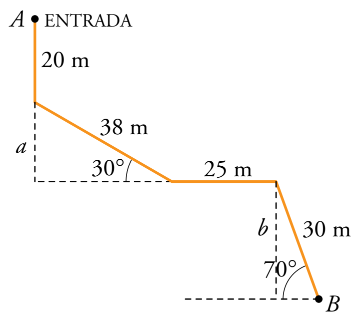
$\hat{C} = \hat{A} = 33°\ 41'\ 24''$

$\widehat{ABC} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 180° - 67,38° = 112,62° = 112°\ 37'\ 12''$

$tg\ \hat{B}' = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \hat{B}' = 26,57° \;\rightarrow\; \hat{B}' = 26°\ 34'\ 12''$

$\widehat{EBD} = 2\hat{B}' = 53,14° = 53°\ 8'\ 24''$

27 **Los espeleólogos utilizan un carrete para medir la profundidad. Sueltan hilo del carrete y miden la longitud y el ángulo que forma con la horizontal. Halla la profundidad del punto B.**



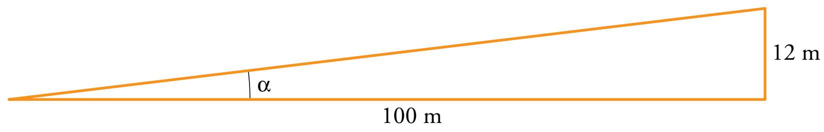
$sen\ 30° = \dfrac{a}{38} \;\rightarrow\; a = 38 \cdot sen\ 30° = 19$ m

$sen\ 70° = \dfrac{b}{30} \;\rightarrow\; b = 30 \cdot sen\ 70° = 28,19$ m

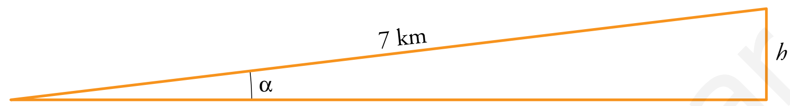
La profundidad es:

$20 + a + b = 20 + 19 + 28,19 = 67,19$ m

28 **Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?**



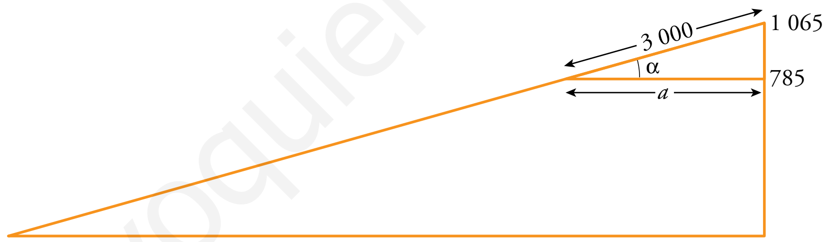
$$tg\,\alpha = \frac{12}{100} = 0{,}12 \ \rightarrow \ \alpha = 6{,}84° = 6°\ 50'\ 34''$$



Si h son los metros que hemos descendido: $sen\,\alpha = \dfrac{h}{7\,000}$

$h = 7\,000\ sen\,(6°\ 50'\ 34'') = 834$ m $\rightarrow$ Hemos descendido 834 m.

29 **En una ruta de montaña una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1 065 m. Halla la pendiente media de esa ruta y el ángulo que forma con la horizontal.**



$$sen\,\alpha = \frac{1\,065 - 785}{3\,000} = 0{,}093 \ \rightarrow \ \alpha = 5{,}35° = 5°\ 21'\ 19''$$

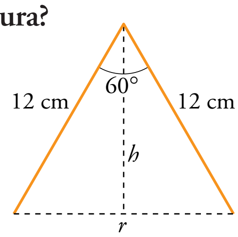
$$cos\,\alpha = \frac{a}{3\,000} \ \rightarrow \ a = cos\,5{,}35° \cdot 3\,000 = 2\,986{,}9 \text{ m}$$

Pendiente: $\dfrac{1\,065 - 785}{2\,986{,}9} = \dfrac{x}{100} \ \rightarrow \ x = 9{,}37$

La pendiente es del 9,37%.

30 **Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 60°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?**

$$sen\,30° = \frac{r/2}{12} \ \rightarrow \ \frac{r}{2} = 12 \cdot sen\,30° \ \rightarrow \ r = 12 \text{ cm}$$

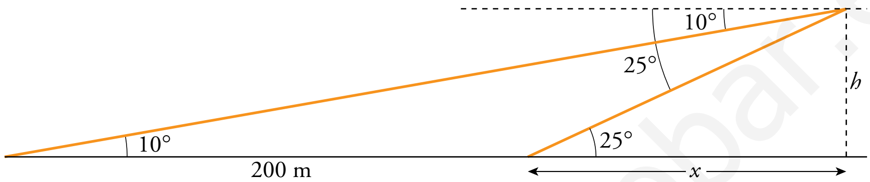


El radio de la circunferencia que puede trazarse es de 12 cm.

31 **Calcula la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas:**

- **El ángulo que forma la visual hacia la luz con la línea de horizonte es de 25°.**
- **Nos alejamos 200 metros y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10°.**

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 25° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 10° = \dfrac{h}{200 + x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}46 = \dfrac{h}{x} \\ 0{,}17 = \dfrac{h}{200 + x} \end{array}$$



$$\left.\begin{array}{l} h = 0{,}46x \\ 34 + 0{,}17x = h \end{array}\right\} 0{,}46x = 34 + 0{,}17x \rightarrow 0{,}29x = 34 \rightarrow$$

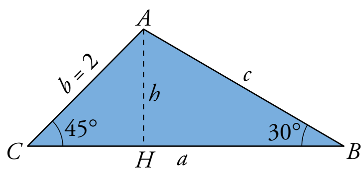
$$\rightarrow x = \frac{34}{0{,}29} = 117{,}24 \text{ m}$$

$h = 0{,}46 \cdot 117{,}24 = 53{,}93$ m

La altura de la luz del faro es de 53,93 m.

32 **Resuelve el siguiente triángulo ABC; es decir, averigua las medidas de sus elementos desconocidos. Empieza por trazar la altura AH.**

$\hat{A} = 180° - 45° - 30° = 105°$



$$cos\ \hat{C} = \frac{\overline{CH}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{CH}}{2} \rightarrow \overline{CH} = \sqrt{2}$$

$$tg\ 45° = \frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} \rightarrow 1 = \frac{\overline{AH}}{\sqrt{2}} \rightarrow \overline{AH} = \sqrt{2}$$

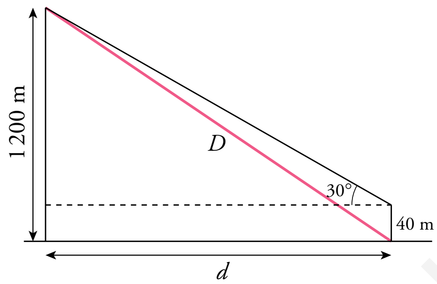
$$sen\ 30° = \frac{\overline{AH}}{c} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{c} \rightarrow c = 2\sqrt{2}$$

$$cos\ 30° = \frac{\overline{HB}}{c} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{HB}}{2\sqrt{2}} \rightarrow \overline{HB} = \sqrt{6}$$

$$\text{Elementos del triángulo:} \left\{\begin{array}{l} \text{Ángulos:} \left\{\begin{array}{l} \hat{A} = 105° \\ \hat{B} = 30° \\ \hat{C} = 45° \end{array}\right. \\ \text{Lados:} \left\{\begin{array}{l} a = \sqrt{6} + \sqrt{2} \approx 3{,}9 \\ b = 2 \\ c = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

33 **Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento el avión se encuentra a una altura de 1 200 metros y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de 30°.**

¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si esta mide 40 m de altura?



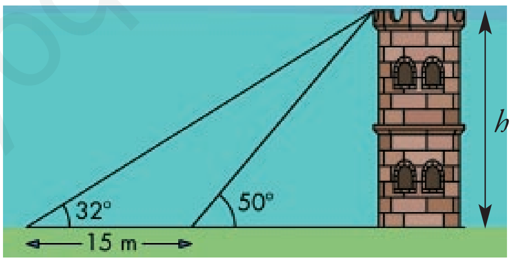
$$tg\ 30° = \frac{1\,200 - 40}{d} \rightarrow d = \frac{1\,160}{tg\ 30°} = 2\,009{,}2 \text{ m}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$D = \sqrt{(1\,200)^2 + (2\,009{,}2)^2} = 2\,340{,}3 \text{ m}$$

La distancia del avión al pie de la torre es de 2 340,3 m.

34 **Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal. Si me acerco 15 m, el ángulo es de 50°. ¿Cuál es la altura de la torre?**



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 32° = \dfrac{h}{15 + x} \\ tg\ 50° = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}62 = \dfrac{h}{15 + x} \\ 1{,}19 = \dfrac{h}{x} \end{array}$$

$h = 9{,}3 + 0{,}62x$

$h = 1{,}19x$

$9{,}3 + 0{,}62x = 1{,}19x \rightarrow 9{,}3 = 0{,}57x$

$x = 16{,}31$

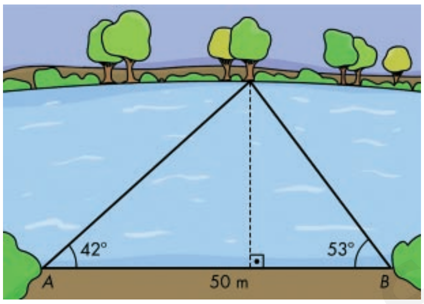
$h = 16{,}31 \cdot 1{,}19 = 19{,}4$

La altura de la torre es de 19,4 m.

Página 193

35 **Observa las medidas que ha tomado Juan para calcular la anchura del río.**

Realiza los cálculos que ha de hacer Juan para hallar la anchura del río.



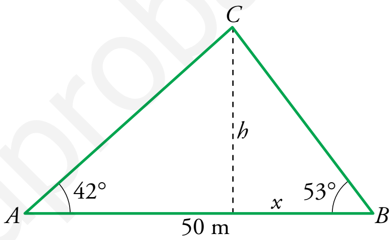
$$\left.\begin{array}{l} tg\ 53° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] tg\ 42° = \dfrac{h}{50-x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1{,}32 = \dfrac{h}{x} \;\to\; h = 1{,}32x \\[2ex] 0{,}9 = \dfrac{h}{50-x} \;\to\; h = 45 - 0{,}9x \end{array}$$

$1{,}32x = 45 - 0{,}9x \;\to\; 2{,}22x = 45 \;\to$

$\to\; x = \dfrac{45}{2{,}22} = 20{,}27$ m

$h = 1{,}32 \cdot 20{,}27 = 26{,}75$

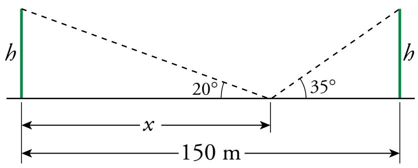
La anchura del río es de 26,75 m.



36 **Dos edificios distan entre sí 150 metros. Desde un punto que está entre los dos edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20°. ¿Cuál es la altura de los edificios, si sabemos que los dos miden lo mismo?**

$tg\ 20° = \dfrac{h}{x} \;\to\; 0{,}36 = \dfrac{h}{x}$

$tg\ 35° = \dfrac{h}{150-x} \;\to\; 0{,}7 = \dfrac{h}{150-x}$



$$\left.\begin{array}{l} h = 0{,}36x \\ 105 - 0{,}7x = h \end{array}\right\} 105 - 0{,}7x = 0{,}36x \;\to\; 1{,}06x = 105 \;\to\; x = 99{,}05 \text{ m}$$

$h = 0{,}36 \cdot 99{,}05 = 35{,}66$ m

La altura de los dos edificios es de 35,66 m.

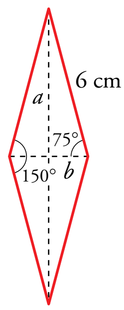
37 **Calcula el área de un rombo cuyo lado mide 6 cm y uno de sus ángulos, 150°.**

$sen\ 75° = \dfrac{a}{6} \;\to\; a = 6 \cdot sen\ 75° \approx 5{,}8$ cm

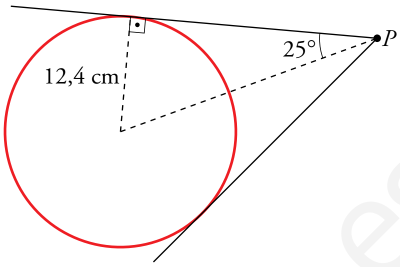
$cos\ 75° = \dfrac{b}{6} \;\to\; b = 6 \cdot cos\ 75° \approx 1{,}55$ cm

Área $= \dfrac{2a \cdot 2b}{2} = 2ab = 2 \cdot 5{,}8 \cdot 1{,}55 = 17{,}98 \approx 18$

El área del rombo es de 18 cm^2



38 **Las tangentes a una circunferencia de centro O, trazadas desde un punto exterior P, forman un ángulo de 50°. Halla la distancia PO sabiendo que el radio de la circunferencia es 12,4 cm.**

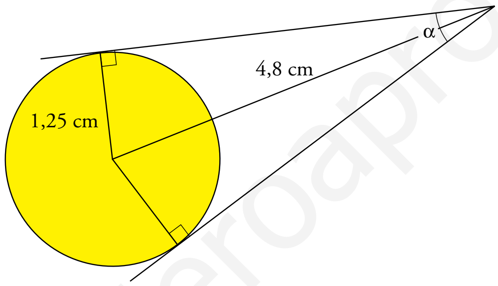


$$sen\ 25° = \frac{12{,}4}{\overline{OP}} \to$$

$$\to \overline{OP} = \frac{12{,}4}{sen\ 25°} \approx 29{,}3 \text{ cm}$$

La distancia de P a O es de 29,3 cm.

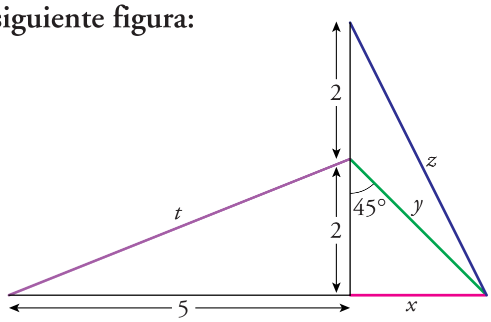
39 **El diámetro de una moneda de 2 € mide 2,5 cm. Averigua el ángulo que forman sus tangentes trazadas desde una distancia de 4,8 cm del centro, como indica la figura.**



$$sen\ \frac{\alpha}{2} = \frac{1{,}25}{4{,}8} \to \frac{\alpha}{2} = 15{,}09° = 15°\ 5'\ 41''$$

$\alpha = 30{,}19° = 30°\ 11'\ 22''$

40 **Calcula los valores de x, y, z, t en la siguiente figura:**



$$tg\ 45° = \frac{x}{2} \to 1 = \frac{x}{2} \to x = 2$$

$$y = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$$

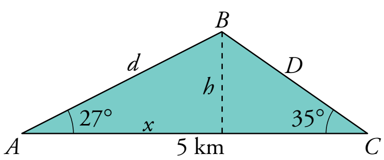
$$t = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}38$$

$$z = \sqrt{(2+2)^2 + x^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} =$$

$$= \sqrt{20} \to z = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$$

41 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

42 **En dos comisarías de policía, A y C, se escucha la alarma de un banco B. Con los datos de la figura, calcula la distancia del banco a cada una de las comisarías.**



$$tg\ 27° = \frac{h}{x} \rightarrow 0,51 = \frac{h}{x} \rightarrow h = 0,51x$$

$$tg\ 35° = \frac{h}{5-x} \rightarrow 0,7 = \frac{h}{5-x} \rightarrow 3,5 - 0,7x = h$$

$$0,51x = 3,5 - 0,7x \rightarrow 1,21x = 3,5 \rightarrow x = 2,89 \text{ km}$$

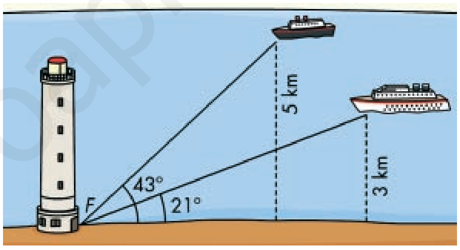
$$h = 0,51 \cdot 2,89 = 1,47 \text{ km}$$

$$sen\ 27° = \frac{h}{d} \rightarrow d = \frac{1,47}{sen\ 27°} = 3,23 \text{ km}$$

$$sen\ 35° = \frac{h}{D} \rightarrow D = \frac{1,47}{sen\ 35°} = 2,56 \text{ km}$$

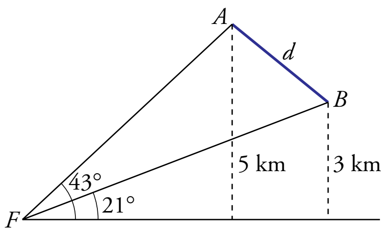
Página 194

43 **Desde el faro F se observa el barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y el barco B, bajo un ángulo de 21°. El barco A está a 5 km de la costa y el B a 3 km.**



Calcula la distancia entre los barcos.

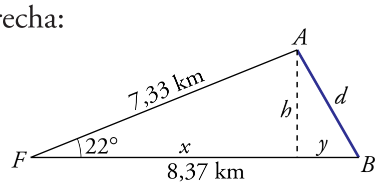
Calculamos $\overline{FA}$ y $\overline{FB}$:



$$sen\ 43° = \frac{5}{\overline{FA}} \rightarrow \overline{FA} = \frac{5}{sen\ 43°} = 7,33 \text{ km}$$

$$sen\ 21° = \frac{3}{\overline{FB}} \rightarrow \overline{FB} = \frac{3}{sen\ 21°} = 8,37 \text{ km}$$

Para calcular d utilizamos el triángulo de la derecha:



$$sen\ 22° = \frac{5}{7,33}$$

$$h = 7,33 \cdot sen\ 22° = 2,74 \text{ km}$$

$$cos\ 22° = \frac{x}{7,33} \rightarrow x = 7,33 \cdot cos\ 22° = 6,8 \text{ km}$$

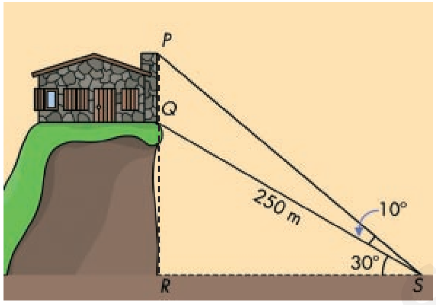
$$y = 8,37 - x \rightarrow y = 8,37 - 6,8 = 1,57 \text{ km}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{2,74^2 + 1,57^2} = 3,16 \text{ km}$$

La distancia entre A y B es de 3,16 km.

44 **Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q, cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$.**



Calculamos $\overline{SR}$ y $\overline{RQ}$ con el triángulo SQR:

$$\cos 30° = \frac{\overline{SR}}{250} \rightarrow \overline{SR} = 250 \cdot \cos 30° \approx 216{,}5 \text{ m}$$

$$\text{sen } 30° = \frac{\overline{RQ}}{250} \rightarrow \overline{RQ} = 250 \cdot \text{sen } 30° = 125 \text{ m}$$

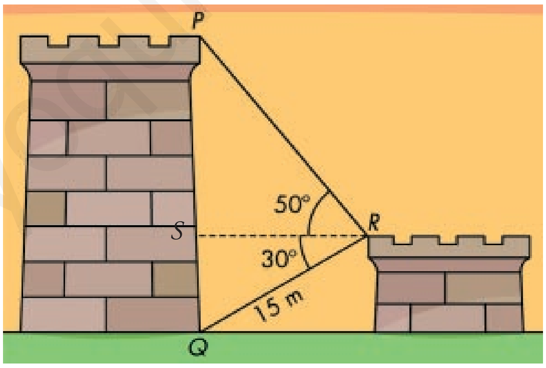
Calculamos $\overline{RP}$ con el triángulo SPR:

$$\text{tg } 40° = \frac{\overline{RP}}{\overline{SR}} \rightarrow \overline{RP} = 216{,}5 \cdot \text{tg } 40° \approx 181{,}66 \text{ m}$$

Luego, $\overline{PQ} = \overline{RP} - \overline{RQ} = 181{,}66 - 125 = 56{,}66$ m.

La altura del edificio es de 56,66 m.

45 **Si $\overline{QR}$ = 15 m, ¿cuál es la altura de la torre, $\overline{PQ}$?**



Calculamos $\overline{SR}$ y $\overline{SQ}$ con el triángulo RSQ:

$$\cos 30° = \frac{\overline{SR}}{15} \rightarrow \overline{SR} = 15 \cdot \cos 30° = 13 \text{ m}$$

$$\text{sen } 30° = \frac{\overline{SQ}}{15} \rightarrow \overline{SQ} = 15 \cdot \text{sen } 30° = 7{,}5 \text{ m}$$

Calculamos $\overline{SP}$ con el triángulo RPS:

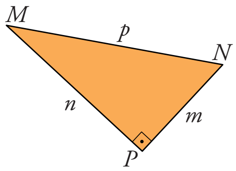
$$\text{tg } 50° = \frac{\overline{SP}}{\overline{SR}} \rightarrow \overline{SP} = 13 \cdot \text{tg } 50° = 15{,}5 \text{ m}$$

Entonces: $\overline{PQ} = \overline{SP} + \overline{SQ} = 15{,}5 + 7{,}5 = 23$ m

La altura de la torre es de 23 m.

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

46 Observa el triángulo rectángulo *MPN*, y en las siguientes igualdades, sustituye los puntos suspensivos por *sen*, *cos* o *tg*.



a) … $\hat{M} = \frac{m}{p}$ b) … $\hat{N} = \frac{m}{p}$ c) … $\hat{M} = \frac{m}{n}$

d) … $\hat{N} = \frac{n}{p}$ e) … $\hat{N} = \frac{n}{m}$ f) … $\hat{M} = \frac{n}{p}$

a) $sen\ \hat{M} = \frac{m}{p}$ b) $cos\ \hat{N} = \frac{m}{p}$ c) $tg\ \hat{M} = \frac{m}{n}$

d) $sen\ \hat{N} = \frac{n}{p}$ e) $tg\ \hat{N} = \frac{n}{m}$ f) $cos\ \hat{M} = \frac{n}{p}$

47 ¿Existe algún ángulo α tal que $sen\ \alpha = \frac{3}{5}$ y $tg\ \alpha = \frac{1}{4}$?

Si $sen\ \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow cos\ \alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$

Tomamos el resultado positivo $\rightarrow cos\ \alpha = \frac{4}{5}$

Entonces $tg\ \alpha = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{4}$

No existe un ángulo α tal que $sen\ \alpha = \frac{3}{5}$ y $tg\ \alpha = \frac{1}{4}$.

48 En un triángulo rectángulo uno de los catetos mide el doble que el otro.

a) Llama x al cateto menor y expresa en función de x el otro cateto y la hipotenusa.

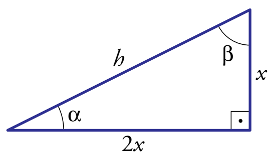
b) Halla las razones trigonométricas del ángulo menor.

c) ¿Cuánto miden los ángulos de ese triángulo?

a) $x \rightarrow$ cateto menor

$2x \rightarrow$ cateto mayor

Hipotenusa: $h = \sqrt{x^2 + (2x^2)} = \sqrt{5x^2} \rightarrow h = x\sqrt{5}$



b) $sen\ \alpha = \frac{x}{x\sqrt{5}} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$cos\ \alpha = \frac{2x}{x\sqrt{5}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$tg\ \alpha = \frac{x}{2x} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{1}{2}$

c) $tg\ \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26°\ 33'\ 54''$; $\beta = 90° - 26{,}56° = 63{,}43° = 63°\ 26'\ 6''$

49 **El seno de un ángulo α es igual a la mitad de su coseno. Calcula *sen* α, *cos* α y *tg* α.**

$sen\,\alpha = \dfrac{cos\,\alpha}{2} \rightarrow \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{1}{2} \rightarrow tg\,\alpha = \dfrac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26°\,33'\,54''$

$2\,sen\,\alpha = cos\,\alpha$

$(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1 \rightarrow (sen\,\alpha)^2 + (2\,sen\,\alpha)^2 = 1$

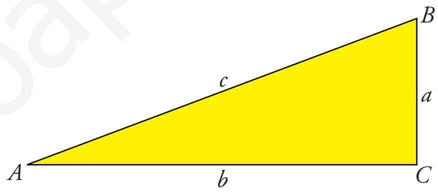
$5\,(sen\,\alpha)^2 = 1 \rightarrow sen\,\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Tomamos el resultado positivo:

$sen\,\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow cos\,\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5};\; tg\,\alpha = \dfrac{1}{2}$

50 **En el triángulo rectángulo *ABC*, *sen* $\hat{A} = \dfrac{1}{3}$. ¿Cuánto valen las siguientes relaciones entre sus lados?**

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b},\ \frac{c}{a}$$



Si $sen\,\hat{A} = \dfrac{1}{3} \rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{3}$

$cos\,\hat{A} = \dfrac{b}{c}$

$cos\,\hat{A} = \pm\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \pm\sqrt{\dfrac{8}{9}} = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Tomamos la parte positiva: $cos\,\hat{A} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \dfrac{b}{c} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$tg\,\hat{A} = \dfrac{a}{b};\; tg\,\hat{A} = \dfrac{sen\,\hat{A}}{cos\,\hat{A}} = \dfrac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{sen\,\hat{A}} \rightarrow \dfrac{c}{a} = 3$

51 **Usando las relaciones fundamentales, simplifica:**

$$(sen\,\alpha + cos\,\alpha)^2 + (sen\,\alpha - cos\,\alpha)^2$$

$(sen\,\alpha + cos\,\alpha)^2 + (sen\,\alpha - cos\,\alpha)^2 = (sen\,\alpha)^2 + 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha + (cos\,\alpha)^2 +$

$+ (sen\,\alpha)^2 - 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha + (cos\,\alpha)^2 = 1 + 1 = 2$

Página 195

52 Usando las relaciones fundamentales, demuestra que:

a) $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{sen\ \alpha} = 1$ **b)** $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

c) $1 + (tg\ \alpha)^2 = \dfrac{1}{(cos\ \alpha)^2}$

a) $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{sen\ \alpha} = 1$

Sacamos factor común $sen\ \alpha$:

$$\frac{sen\ \alpha\ [(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2]}{sen\ \alpha} = (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$$

b) $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

Sacamos factor común $sen\ \alpha$:

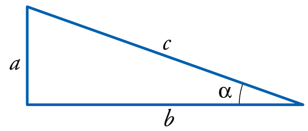
$$\frac{sen\ \alpha\ [(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2]}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha \cdot 1}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$$

c) $1 + (tg\ \alpha)^2 = \dfrac{1}{(cos\ \alpha)^2}$

Usando la igualdad $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$:

$$1 + (tg\ \alpha)^2 = 1 + \left(\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}\right)^2 = \frac{(cos\ \alpha)^2 + (sen\ \alpha)^2}{(cos\ \alpha)^2} = \frac{1}{(cos\ \alpha)^2}$$

53 ¿Puede existir un ángulo cuyo seno sea igual a 2? ¿Y uno cuyo coseno sea igual a 3/2? Razona las respuestas.



No puede ocurrir ninguna de las dos cosas.

En un triángulo rectángulo lo vemos claramente:

Sabemos que la hipotenusa es mayor que cualquiera de los dos catetos, es decir:

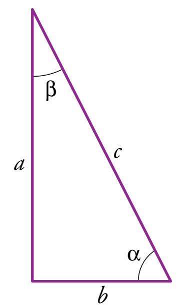
$c > a$ y $c > b$, como $sen\ \alpha = \dfrac{a}{c}$ y $cos\ \alpha = \dfrac{b}{c}$, entonces:

si $c > a \ \rightarrow\ \dfrac{a}{c} = sen\ \alpha < 1$

si $c > b \ \rightarrow\ \dfrac{b}{c} = cos\ \alpha < 1$

Y esto pasa para cualquier triángulo rectángulo.

54 **Dibuja un triángulo rectángulo en el que la tangente de uno de sus ángulos agudos valga dos. ¿Cuánto vale la tangente del otro ángulo agudo?**



$tg\ \alpha = 2 \ \rightarrow\ \alpha = 63°\ 26'\ 5{,}82''$; $\beta = 90° - \alpha$

$tg\ \beta = \dfrac{sen\ \beta}{cos\ \beta}$

$sen\ \alpha = \dfrac{a}{c} \qquad sen\ \beta = \dfrac{b}{c}$

$cos\ \alpha = \dfrac{b}{c} \qquad cos\ \beta = \dfrac{a}{c}$

$$\left.\begin{array}{l} sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha \\ cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha \end{array}\right\}\ tg\ \beta = \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{1}{2}$$

La tangente del otro ángulo, β, vale $tg\ \beta = \dfrac{1}{2}$.

55 **Indica, en cada caso, en qué cuadrante está el ángulo α:**

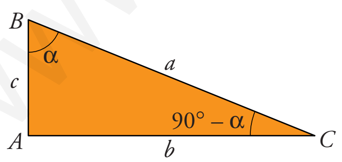
a) $sen\ \alpha > 0,\ cos\ \alpha < 0$ b) $sen\ \alpha < 0,\ cos\ \alpha > 0$

c) $tg\ \alpha > 0,\ sen\ \alpha < 0$ d) $tg\ \alpha > 0,\ sen\ \alpha > 0$

a) 2º cuadrante b) 4º cuadrante c) 3er cuadrante d) 1er cuadrante

PROFUNDIZA

56 **Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se llaman complementarios porque su suma es un recto. ¿Cómo se podrían calcular las razones trigonométricas de un ángulo si conocemos las de su complementario? Observa la figura, completa la tabla y expresa simbólicamente lo que obtienes:**



	α	$90° - \alpha$
sen	b/a	c/a
cos	c/a	b/a
tg	b/c	c/b

$sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha$

$cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha$

$tg\ (90° - \alpha) = \dfrac{1}{tg\ \alpha}$

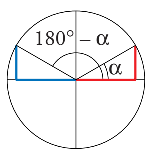
57 **Sobre la circunferencia goniométrica señalamos un ángulo α en el primer cuadrante y a partir de él dibujamos los ángulos $180° - \alpha$; $180° + \alpha$; $360° - \alpha$**

Busca la relación que existe entre:

a) $sen\ (180° - \alpha)$ y $sen\ \alpha$

$cos\ (180° - \alpha)$ y $cos\ \alpha$

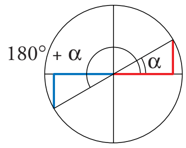
$tg\ (180° - \alpha)$ y $tg\ \alpha$



b) ***sen*** **(180° + α) y *sen* α**

cos **(180° + α) y *cos* α**

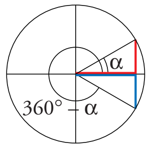
tg **(180° + α) y *tg* α**



c) ***sen*** **(360° – α) y *sen* α**

cos **(360° – α) y *cos* α**

tg **(360° – α) y *tg* α**



a) *sen* (180° – α) = *sen* α

cos (180° – α) = – *cos* α

tg (180° – α) = – *tg* α

b) *sen* (180° + α) = – *sen* α

cos (180° + α) = – *cos* α

tg (180° + α) = *tg* α

c) *sen* (360° – α) = – *sen* α

cos (360° – α) = *cos* α

tg (360° – α) = – *tg* α

58 **Con ayuda de la calculadora, halla dos ángulos comprendidos entre 0° y 360° tales que:**

a) Su seno sea 0,7.

b) Su coseno sea 0,54.

c) Su tangente sea 1,5.

d) Su seno sea –0,3.

e) Su coseno sea –2/3.

f) Su tangente sea –2.

a) $sen\ \alpha = 0{,}7 \rightarrow \alpha = 44°\ 25'\ 37''$

$\beta = 180° - \alpha = 135°\ 34'\ 22''$

b) $cos\ \alpha = 0{,}54 \rightarrow \alpha = 57°\ 18'\ 59''$

$\beta = -\alpha = -57°\ 18'\ 59'' = 302°\ 41'\ 1''$

c) $tg\ \alpha = 1{,}5 \rightarrow \alpha = 56°\ 18'\ 35''$

$\beta = 180° + \alpha = 236°\ 18'\ 35''$

d) $sen\ \alpha = -0{,}3 \rightarrow \alpha = -17°\ 27'\ 27'' = 342°\ 32'\ 32''$

$\beta = 180° - \alpha = 197°\ 27'\ 27''$

e) $cos\ \alpha = -\dfrac{2}{3} \rightarrow \alpha = 131°\ 48'\ 37''$

$\beta = 360° - \alpha = 228°\ 11'\ 23''$

f) $tg\ \alpha = -2 \rightarrow \alpha = -63°\ 26'\ 6'' = 296°\ 33'\ 54''$

$\beta = 180° + \alpha = 116°\ 33'\ 54''$

59 **Recuerda las razones de 30°, 45° y 60° y completa la tabla sin usar la calculadora:**

	120°	135°	150°	210°	225°	240°	315°	330°
sen	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$
cos	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
tg	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$

60 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

61 **Resuelve las siguientes ecuaciones sabiendo que $0° \le x \le 360°$.**

a) $(sen\ x)^2 - sen\ x = 0$ **b)** $2(cos\ x)^2 - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$

c) $3\ tg\ x + 3 = 0$ **d)** $4(sen\ x)^2 - 1 = 0$

e) $2(cos\ x)^2 - cos\ x - 1 = 0$

a) $(sen\ x)^2 - sen\ x = 0$

$sen\ x(sen\ x - 1) = 0$

- $sen\ x = 0$: $x = 0$, $x = 180°$
- $sen\ x = 1 \rightarrow x = 90°$

b) $2(cos\ x)^2 - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$

$cos\ x(2\ cos\ x - \sqrt{3}) = 0$

- $cos\ x = 0$: $x = 90°$, $x = 270°$
- $cos\ x = \sqrt{3}/2$: $x = 30$, $x = 330°$

c) $3\ tg\ x + 3 = 0 \rightarrow tg\ x = -1$: $x = 135°$, $x = 315°$

d) $4(sen\ x)^2 - 1 = 0 \rightarrow (sen\ x)^2 = \frac{1}{4}$

- $sen\ x = \frac{1}{2}$: $x = 30°$, $x = 150°$
- $sen\ x = -\frac{1}{2}$: $x = 210°$, $x = 330°$

e) $2(cos\ x)^2 - cos\ x - 1 = 0$

$cos\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} =$

- $cos\ x = 1 \rightarrow x = 0°$
- $cos\ x = -\frac{1}{2}$: $x = 120°$, $x = 240°$

Página 215

PRACTICA

Media y desviación típica

1 **El número de faltas de ortografía que cometieron un grupo de estudiantes en un dictado fue:**

0 3 1 2 0	2 1 3 0 4
0 1 1 4 3	5 3 2 4 1
5 0 2 1 0	0 0 0 2 1
2 1 0 0 3	0 5 3 2 1

a) Di cuál es la variable y de qué tipo es.

b) Haz una tabla de frecuencias y representa los datos en un diagrama adecuado.

c) Calcula la media y la desviación típica.

a) Variable: "Número de faltas de ortografía"

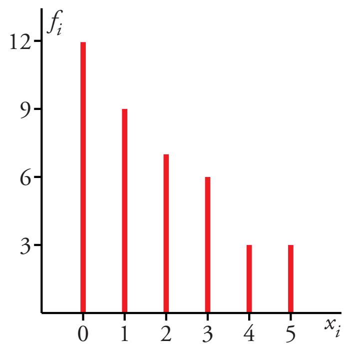
Es una variable cuantitativa discreta.

Llamamos x_i a dicha variable y sus valores son 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

b) Tabla de frecuencias:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	12	0	0
1	9	9	9
2	7	14	28
3	6	18	54
4	3	12	48
5	3	15	75
	40	68	214

Diagrama de barras:



Nº DE FALTAS DE ORTOGRAFÍA

c) MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{68}{40} = 1,7$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{214}{40} - 1,7^2 = 2,46$$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{2,46} = 1,57$

2 **A un grupo de 30 personas se les ha tomado el número de pulsaciones por minuto (ritmo cardíaco) obteniéndose los siguientes resultados:**

87	**85**	**61**	**51**	**64**	**75**	**80**	**70**	**69**	**82**
80	**79**	**82**	**74**	**90**	**76**	**72**	**73**	**63**	**65**
67	**71**	**88**	**76**	**68**	**73**	**70**	**76**	**71**	**86**

a) Representa gráficamente esta distribución agrupando los datos en 6 intervalos.

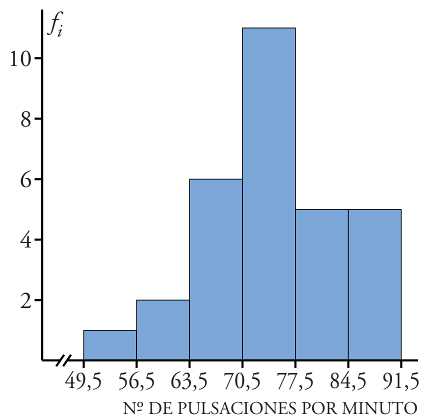
b) Calcula la media y la desviación típica.

a) • Localizamos los valores extremos: 51 y 90 $\rightarrow$ recorrido = 39

• Buscamos un múltiplo de 6 (nº de intervalos) algo mayor que 39, por ejemplo $r' = 42$. Así, cada intervalo tendrá una longitud de $\frac{42}{6} = 7$.

INTERVALOS	MARCAS DE CLASE (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
49,5 - 56,5	53	1	53	2 809
56,5 - 63,5	60	2	120	7 200
63,5 - 70,5	67	6	402	26 934
70,5 - 77,5	74	11	814	60 236
77,5 - 84,5	81	5	405	32 805
84,5 - 91,5	88	5	440	38 720
		30	2 234	168 704

Puesto que los intervalos son de la misma longitud, la altura de cada barra en este histograma coincide con la frecuencia (f_i).

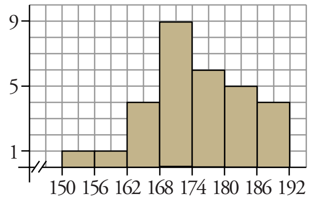


b) MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{2\,234}{30} = 74,47$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{168\,704}{30} - 74,47^2 = 77,69$$

DESVIACIÓN TÍPICA = $\sigma = \sqrt{77,69} = 8,81$

3 **Este gráfico muestra las alturas de los árboles de un parque. Haz la tabla de frecuencias correspondiente y calcula $\bar{x}$ y σ.**



INTERVALOS	MARCA DE CLASE (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
150 - 156	153	1	153	23 409
156 - 162	159	1	159	25 281
162 - 168	165	4	660	108 900
168 - 174	171	9	1 539	263 169
174 - 180	177	6	1 062	187 974
180 - 186	183	5	915	167 445
186 - 192	189	4	756	142 884
		30	5 244	919 062

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{5\,244}{30} = 174{,}8$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{919\,062}{30} - 174{,}8^2 = 80{,}36$$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{80{,}36} = 8{,}96$

4 **En una maternidad se han tomado los pesos (en kilogramos) de 50 recién nacidos:**

2,8	3,2	3,8	2,5	2,7	3,7	1,9	2,6	3,5	2,3
3,0	2,6	1,8	3,3	2,9	2,1	3,4	2,8	3,1	3,9
2,9	3,5	3,0	3,1	2,2	3,4	2,5	1,9	3,0	2,9
2,4	3,4	2,0	2,6	3,1	2,3	3,5	2,9	3,0	2,7
2,9	2,8	2,7	3,1	3,0	3,1	2,8	2,6	2,9	3,3

a) Construye una tabla con los datos agrupados en 6 intervalos de amplitud 0,4 kg.

b) Representa gráficamente esta distribución.

c) Calcula la media y la desviación típica.

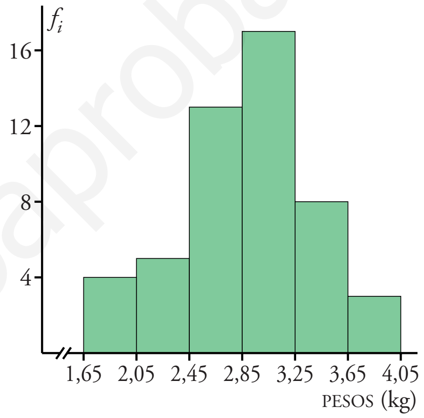
Localizamos los valores extremos: 1,8 y 3,9.

Recorrido = 3,9 – 1,8 = 2,1

a)

INTERVALOS	MARCA DE CLASE (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
1,65 - 2,05	1,85	4	7,4	13,69
2,05 - 2,45	2,25	5	11,25	25,31
2,45 - 2,85	2,65	13	34,45	91,29
2,85 - 3,25	3,05	17	51,85	158,14
3,25 - 3,65	3,45	8	27,6	95,22
3,65 - 4,05	3,85	3	11,55	44,47
		50	144,1	428,12

b) Representamos los datos en un histograma; al ser los intervalos de la misma amplitud, la altura de cada barra corresponde a la frecuencia (f_i) de cada intervalo.



c) $\bar{x} = \dfrac{144,1}{50} = 2,9$ kg

$$\sigma^2 = \frac{428,12}{50} - 2,8^2 = 0,1524$$

$$\sigma = \sqrt{0,1524} = 0,39 \text{ kg}$$

5 **El número de personas que acudieron a las clases de natación de una piscina municipal fueron:**

38	**32**	**54**	**47**	**50**	**58**	**46**
47	**55**	**60**	**43**	**60**	**45**	**48**
40	**53**	**59**	**48**	**39**	**48**	**56**
52	**48**	**55**	**60**	**53**	**43**	**52**
46	**55**	**56**	**54**	**48**	**39**	**50**

a) Haz una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos.

b) Representa gráficamente la distribución.

c) Halla $\bar{x}$ y σ.

Localizamos los valores extremos: 32 y 60.

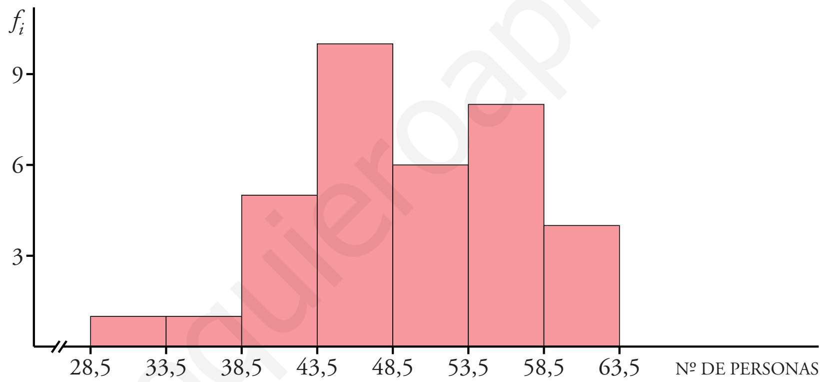
Recorrido = 60 – 32 = 28

Agrupamos los datos en 7 intervalos. Con el fin de que los extremos de los intervalos no coincidan con ninguno de los datos, tomamos cada intervalo de longitud 5, en vez de 4.

a)

INTERVALOS	MARCA DE CLASE (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
28,5 - 33,5	31	1	31	961
33,5 - 38,5	36	1	36	1 296
38,5 - 43,5	41	5	205	8 405
43,5 - 48,5	46	10	460	21 160
48,5 - 53,5	51	6	306	15 606
53,5 - 58,5	56	8	448	25 088
58,5 - 63,5	61	4	244	14 884
		35	1 730	87 400

b) Representamos los datos en un histograma. La altura de cada rectángulo coincidirá con la frecuencia absoluta, por ser los intervalos de igual amplitud.



c) MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{1\,730}{35} \approx 49{,}43$

$$\sigma^2 = \frac{87\,400}{35} - 49{,}43^2 = 53{,}82$$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{53{,}82} \approx 7{,}34$

Mediana, cuartiles y percentiles

6 **Las urgencias atendidas durante un mes en un centro de salud fueron:**

1 5 3 2 1	6 4 2 2 3
4 3 5 1 0	1 5 3 3 6
2 4 6 3 2	4 3 2 1 5

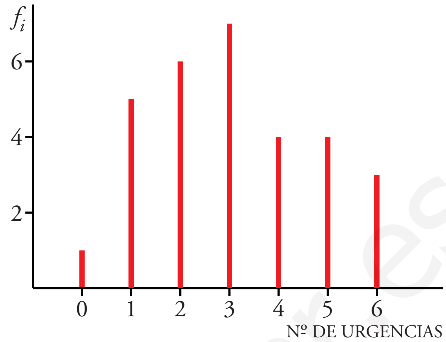
a) Haz una tabla de frecuencias y representa los datos.

b) Haz la tabla de frecuencias acumuladas y di cuál es la mediana.

a)

x_i = urgencias atendidas	f_i	F_i	en %
0	1	1	3,33
1	5	6	20
2	6	12	40
3	7	19	63,33
4	4	23	76,67
5	4	27	90
6	3	30	100

Representamos los datos en un diagrama de barras:



b) $Me = p_{50} = 3$ (para $x_i = 3$, F_i supera el 50%)

7 **La altura, en centímetros, de un grupo de alumnos y alumnas de una misma clase es:**

150, 169, 171, 172, 172, 175, 181

182, 183, 177, 179, 176, 184, 158

Calcula la mediana y los cuartiles y explica el significado de estos parámetros.

Colocamos los datos en orden creciente:

150 - 158 - 169 - 171 - 172 - 172 - 175 - 176 - 177 - 179 - 181 - 182 - 183 - 184

Hay 14 datos:

$\frac{14}{2} = 7 \rightarrow$ Mediana: valor intermedio de los dos centrales situados en séptima y octava posición:

$$Me = \frac{175 + 176}{2} = 175{,}5 \text{ cm}$$

Significa que la mitad de los alumnos tiene una estatura inferior a 175,5 cm.

$\frac{14}{4} = 3{,}5 \rightarrow$ $Q_1 = 171$ cm (4º lugar)

El 25% de los alumnos mide menos de 171 cm de altura.

$14 \cdot \frac{3}{4} = 10{,}5 \rightarrow$ $Q_3 = 181$ cm (posición 11)

El 75% de los alumnos tiene una estatura inferior a 181 cm.

8 **Calcula la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:**

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	12	9	7	6	3	3

Completamos la tabla con las frecuencias acumuladas:

x_i	f_i	F_i	en %
0	12	12	30
1	9	21	52,5
2	7	28	70
3	6	34	85
4	3	37	92,5
5	3	40	100

- $Me = 1$, porque para $x_i = 1$ la F_i supera el 50%
- $Q_1 = 0$, porque para F_i supera el 25% para $x_i = 0$
- $Q_3 = 3$, porque F_i supera el 75% para $x_i = 3$

9 **Halla la mediana, los cuartiles y el percentil 60 en cada una de las siguientes distribuciones, correspondientes a las notas obtenidas en un test que han hecho dos grupos de estudiantes:**

A: 25 – 22 – 27 – 30 – 23 – 22 – 31 – 18
24 – 25 – 32 – 35 – 20 – 28 – 30

B: 27 – 32 – 19 – 22 – 25 – 30 – 21
29 – 23 – 31 – 21 – 20 – 18 – 27

Colocamos en orden creciente los datos:

A 18 - 20 - 22 - 22 - 23 - 24 - 25 - 25 - 27 - 28 - 30 - 30 - 31 - 32 - 35

Hay 15 datos:

- La mediana es el valor central (posición 8) $\rightarrow$ $Me = 25$
- $\frac{15}{4} = 3{,}75 \rightarrow Q_1 = 22$ (4ª posición)
- $15 \cdot \frac{3}{4} = 11{,}25 \rightarrow Q_3 = 30$ (12ª posición)
- $15 - \frac{60}{100} = 9 \rightarrow p_{60}$ será el valor intermedio de los datos situados en 9ª y 10ª posición, es decir:

$$p_{60} = \frac{27 + 28}{2} \rightarrow p_{60} = 27{,}5$$

B 18 - 19 - 20 - 21 - 21 - 22 - 23 - 25 - 27 - 27 - 29 - 30 - 31 - 32

Hay 14 datos:

- Los dos valores centrales son 23 y 25 $\rightarrow Me = \frac{23 + 25}{2} = 24$
- $\frac{14}{4} = 3{,}5 \rightarrow Q_1 = 21$ (4ª posición)
- $14 \cdot \frac{3}{4} = 10{,}5 \rightarrow Q_3 = 29$ (11ª posición)
- $14 \cdot \frac{60}{100} = 8{,}4 \rightarrow p_{60} = 27$ (9ª posición)

Página 216

Muestras

10 Se quieren realizar los siguientes estudios:

a) Tipo de transporte que utilizan los vecinos de un barrio para acudir a su trabajo.

b) Estudios que piensan realizar los alumnos y alumnas de un centro escolar al terminar la ESO.

c) Edad de las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

d) Número de horas diarias que ven la televisión los niños y niñas españoles con edades comprendidas entre 5 y 10 años.

Di en cada uno de estos casos cuál es la población.

¿En cuáles de ellos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

a) Población: todos los vecinos del barrio.

Es necesario recurrir a una muestra porque la población es grande y difícil de controlar.

b) Población: todos los alumnos y alumnas del centro escolar.

Es necesario recurrir a una muestra. La población es grande.

c) Población: personas que han visto la obra de teatro.

Es necesario recurrir a una muestra: la población es difícil de controlar.

d) Población: niños y niñas españoles con edades entre 5 y 10 años.

Es necesario recurrir a una muestra. La población es muy grande.

11 Queremos seleccionar una muestra de 50 alumnos de 3º de ESO.

En cada uno de los siguientes casos debes decidir si el muestreo debe ser aleatorio simple o estratificado por sexos (chicos-chicas) para estudiar las variables indicadas:

a) Uso de pendientes en las orejas.

b) Tiempo que emplean los alumnos en ir de su casa al colegio.

c) Incidencia de caries dental.

d) Práctica de fútbol.

a) Estratificado por sexos.

b) Aleatorio simple.

c) Aleatorio simple.

d) Estratificado por sexos.

12 **Para hacer un estudio sobre los hábitos ecológicos de las familias de una ciudad, se han seleccionado por sorteo las direcciones, calle y número, que serán visitadas. Si en un portal vive más de una familia, se sorteará entre ellas la que será seleccionada. ¿Obtendremos con este procedimiento una muestra aleatoria?**

☛ ***(Piensa si tiene la misma probabilidad de ser incluida en la muestra una familia que vive en una vivienda unifamiliar que otra que vive en un bloque de 32 viviendas).***

No obtendremos una muestra aleatoria.

13 **En un club deportivo que tiene 500 socios, se quiere elegir una muestra de 120 individuos. Los socios están agrupados por edades en tres grupos de 95, 125 y 280 individuos. ¿Cuántos se deben tomar de cada grupo de forma que el muestreo sea estratificado con reparto proporcional?**

Grupo de 95 individuos: $\frac{120}{500} = \frac{n_1}{95} \rightarrow n_1 \approx 23$

Grupo de 125 individuos: $\frac{120}{500} = \frac{n_2}{125} \rightarrow n_2 = 30$

Grupo de 280 individuos: $\frac{120}{500} = \frac{n_3}{280} \rightarrow n_3 \approx 67$

14 **Los empleados de una empresa están clasificados como indica esta tabla:**

CATEGORÍA	A	B	C	D
Nº DE EMPLEADOS	400	300	200	100

Para hacer una consulta sobre la modificación del horario laboral, se elige por sorteo a 50 empleados de la categoría A, 40 de la B, 30 de la C y 20 de la D.

¿Es éste un modelo de muestreo aleatorio estratificado? ¿Es proporcional? ¿Por qué?

Sí es un modelo aleatorio estratificado, pero no es proporcional porque:

$$\frac{50}{400} \neq \frac{40}{300} \neq \frac{30}{200} \neq \frac{20}{100}$$

PIENSA Y RESUELVE

15 **Deseamos hacer una tabla con datos agrupados a partir de 384 datos, cuyos valores extremos son 19 y 187.**

a) Si queremos que sean 10 intervalos de amplitud 17, ¿cuáles serán esos intervalos?

b) Haz otra distribución en 12 intervalos de la amplitud que creas conveniente.

Recorrido: $r = 187 - 19 = 168$

a) Buscamos un número algo mayor que el recorrido y que sea múltiplo de 10. Por ejemplo, $r' = 170$. De este modo, cada intervalo tendrá una longitud de 17.

Los intervalos son:

[18, 35); [35, 52); [52, 69); [69, 86); [86, 103); [103, 120)
[120, 137); [137, 154); [154, 171); [171, 188)

b) Buscamos ahora un número que sea múltiplo de 12, que es el número de intervalos en este caso.

$168 = 12 \cdot 14 \rightarrow$ la amplitud de cada intervalo será 14.

Los intervalos son:

[19, 33); [33, 47); [47, 61); [61, 75); [75, 89); [89, 103)
[103, 117); [117, 131); [131, 145); [145, 159); [159, 173); [173, 187)

16 **Los gastos mensuales de una empresa A tienen una media de 100 000 euros y una desviación típica de 12 500 euros. En otra empresa B la media es 15 000 euros y la desviación típica 2 500 euros.**

Calcula el coeficiente de variación y di cuál de las dos tiene mayor variación relativa.

Empresa A: $\left.\begin{array}{l}\bar{x} = 100\,000 \text{ €} \\ \sigma = 12\,500 \text{ €}\end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{12\,500}{100\,000} = 0{,}125$ o bien 12,5%

Empresa B: $\left.\begin{array}{l}\bar{x} = 15\,000 \text{ €} \\ \sigma = 2\,500 \text{ €}\end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{2\,500}{15\,000} = 0{,}1\widehat{6}$ o bien 16,67%

Tiene mayor variación relativa la empresa B.

17 **El peso medio de los alumnos de una clase es 58,2 kg y su desviación típica 3,1 kg. El de las alumnas de esa clase es 52,4 kg y su desviación típica es 5,1 kg. Calcula el coeficiente de variación y compara la dispersión de ambos grupos.**

Alumnos $\left\{\begin{array}{l}\bar{x} = 58{,}2 \text{ kg} \\ \sigma = 3{,}1 \text{ kg}\end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{3{,}1}{58{,}2} = 0{,}053 \rightarrow 5{,}3\%$

Alumnas $\left\{\begin{array}{l}\bar{x} = 52{,}4 \text{ kg} \\ \sigma = 5{,}1 \text{ kg}\end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{5{,}1}{52{,}4} = 0{,}097 \rightarrow 9{,}7\%$

El peso medio de las alumnas es más variable que el peso de los alumnos.

18 **Se han medido los pesos y las alturas de 6 personas, obteniéndose los siguientes datos:**

Calcula el coeficiente de variación y di si están más dispersos los pesos o las alturas.

PESOS (kg)	ALTURAS (m)
65	1,7
60	1,5
63	1,7
63	1,7
68	1,75
68	1,8

PESOS (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
60	1	60	3 600
63	2	126	7 938
65	1	65	4 225
68	2	136	9 248
	6	387	25 011

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{387}{6} = 64{,}5 \text{ kg}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{25\,011}{6} - 64{,}5^2 = 8{,}25 \;\rightarrow\; \sigma = \sqrt{8{,}25} = 2{,}87 \text{ kg}$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2{,}87}{64{,}5} = 0{,}044 \text{ o bien } 4{,}4\%$$

ALTURAS (y_i)	f_i	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
1,5	1	1,5	2,25
1,7	3	5,1	8,67
1,75	1	1,75	3,06
1,8	1	1,8	3,24
	6	10,15	17,22

$$\bar{y} = \frac{\Sigma f_i y_i}{\Sigma f_i} = \frac{10{,}15}{6} = 1{,}69 \text{ m}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i y_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{y}^2 = \frac{17{,}22}{6} - 1{,}69^2 = 0{,}0139 \;\rightarrow\; \sigma = \sqrt{0{,}0139} = 0{,}12 \text{ m}$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{y}} = \frac{0{,}12}{1{,}69} = 0{,}071 \text{ o bien } 7{,}1\%$$

Están más dispersas las alturas que los pesos.

Página 217

19 **En una regata de veleros, los tiempos, en minutos, empleados por los participantes en hacer el primer recorrido han sido:**

43,7	52	49,5	47,3	42,5
51,6	50,2	48,4	39,8	40,6
41,2	41,8	44	54	45,2
46,4	42,8	49	50,8	58

a) Representa gráficamente los datos.

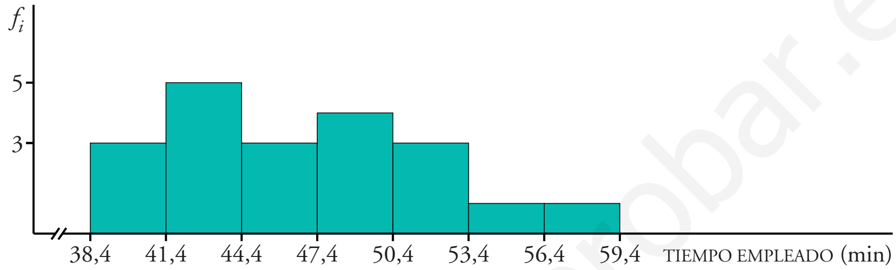
b) Calcula $\overline{x}$ y σ.

c) Ordena los datos y calcula la mediana y los cuartiles.

a) El número de valores distintos que hay es grande; luego, es adecuado agruparlos en intervalos.

Recorrido = 58 – 39,8 = 18,2

Tomamos 7 intervalos de amplitud 3.



b)

INTERVALO	f_i	MARCA (x_i)	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
38,4 - 41,4	3	39,9	119,7	4776,03
41,4 - 44,4	5	42,9	214,5	9202,05
44,4 - 47,4	3	45,9	137,7	6320,43
47,4 - 50,4	4	48,9	195,6	9564,84
50,4 - 53,4	3	51,9	155,7	8080,83
53,4 - 56,4	1	54,9	54,9	3014,01
56,4 - 59,4	1	57,9	57,9	3352,41
	20		936	44310,6

MEDIA $\to$ $\overline{x} = \dfrac{936}{20} = 46{,}8$ minutos

$\sigma^2 = \dfrac{44\,310{,}6}{20} - 46{,}8^2 = 25{,}29$

DESVIACIÓN TÍPICA $\to$ $\sigma = \sqrt{25{,}29} = 5{,}03$ minutos

c) Ordenamos los datos:

39,8 - 40,6 - 41,2 - 41,8 - 42,5 - 42,8 - 43,7 - 44 - 45,2 - 46,4

47,3 - 48,4 - 49 - 49,5 - 50,2 - 50,8 - 51,6 - 52 - 54 - 58

Hay 20 datos:

$\dfrac{20}{2} = 10 \to$ La mediana es el valor intermedio de los valores situados en las posiciones 10 y 11:

$Me = \dfrac{46{,}4 + 47{,}3}{2} = 46{,}85$

$\frac{20}{4} = 5 \rightarrow$ Q_1 es la media aritmética de 42,5 y 42,8, valores situados en 5ª y 6ª posición:

$$Q_1 = \frac{42{,}5 + 42{,}8}{2} = 42{,}65$$

$20 \cdot \frac{3}{4} = 15 \rightarrow$ Q_3 es el valor intermedio entre 50,2 y 50,8, valores que ocupan la posición 15 y 16, respectivamente:

$$Q_3 = \frac{50{,}2 + 50{,}8}{2} = 50{,}5$$

20 **El número de errores cometidos en un test por un grupo de personas viene reflejado en la siguiente tabla:**

Nº DE ERRORES	0	1	2	3	4	5	6
Nº DE PERSONAS	10	12	8	7	5	4	3

a) Halla la mediana y los cuartiles inferior y superior, y explica su significado.

b) ¿Cuál es el número medio de errores por persona?

Construimos la tabla de frecuencias acumuladas:

Nº DE ERRORES (x_i)	Nº DE PERSONAS (f_i)	$x_i f_i$	F_i	EN %
0	12	0	12	23,53
1	12	12	24	47,06
2	8	16	32	62,75
3	7	21	39	76,47
4	5	20	44	86,27
5	4	20	48	94,12
6	3	18	51	100
	51	107		

a) $Me = 2$. Significa que el 50% de las personas cometen 0, 1 ó 2 errores.

$Q_1 = 1$. El 25% de las personas comete 1 error o ninguno.

$Q_3 = 3$. El 75% de las personas comente 3 errores o menos de 3 errores.

b) $\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{107}{51} \approx 2{,}1$

El número medio de errores por persona es ligeramente superior a 2.

21 **Al preguntar a un grupo de personas cuánto tiempo dedicaron a ver televisión durante un fin de semana, se obtuvieron estos resultados:**

Dibuja el histograma correspondiente y halla la media y la desviación típica.

TIEMPO (en horas)	NÚMERO DE PERSONAS
[0; 0,5)	10
[0,5; 1,5)	10
[1,5; 2,5)	18
[2,5; 4)	12
[4, 8)	12

Como los intervalos no son de la misma longitud, para representar la distribución mediante un histograma pondremos en cada barra una altura tal que el área sea proporcional a la frecuencia:

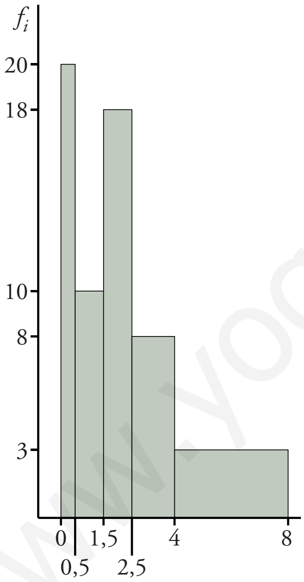
[0; 0,5) $\rightarrow$ $a_1 = 0{,}5$ $\quad f_1 = 10 \rightarrow h_1 = \dfrac{10}{0{,}5} = 20$

[0,5; 1,5) $\rightarrow$ $a_2 = 1$ $\quad f_2 = 10 \rightarrow h_2 = 10$

[1,5; 2,5) $\rightarrow$ $a_3 = 1$ $\quad f_3 = 18 \rightarrow h_3 = 18$

[2,5; 4) $\rightarrow$ $a_4 = 1{,}5$ $\quad f_4 = 12 \rightarrow h_4 = \dfrac{12}{1{,}5} = 8$

[4; 8) $\rightarrow$ $a_5 = 4$ $\quad f_5 = 12 \rightarrow h_5 = \dfrac{12}{4} = 3$



TIEMPO DEDICADO A VER T.V. DURANTE UN FIN DE SEMANA (h)

TIEMPO	MARCA (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
[0; 0,5)	0,25	10	2,5	0,625
[0,5; 1,5)	1	10	10	10
[1,5; 2,5)	2	18	36	72
[2,5; 4)	3,25	12	39	126,75
[4; 8)	6	12	72	432
		62	159,5	641,375

$$\bar{x} = \frac{159{,}5}{62} = 2{,}57$$

$$\sigma^2 = \frac{641{,}375}{62} - 2{,}57^2 = 3{,}74 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{3{,}74} = 1{,}93$$

22 **Un dentista observa el número de caries en cada uno de los 100 niños de un colegio y obtiene los resultados resumidos en esta tabla:**

NÚMERO DE CARIES	0	1	2	3	4
FRECUENCIA ABSOLUTA	25	20	y	15	x
FRECUENCIA RELATIVA	0,25	0,2	z	0,15	0,05

a) Completa la tabla obteniendo x, y, z.

b) Calcula el número medio de caries.

a) La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de individuos (100, en nuestro caso).

$$0{,}05 = \frac{x}{100} \quad \to \quad x = 5$$

$$25 + 20 + y + 15 + 5 = 100 \quad \to \quad y = 35$$

$$z = \frac{y}{100} = \frac{35}{100} \quad \to \quad z = 0{,}35$$

b)

Nº DE CARIES (x_i)	f_i	$f_i x_i$
0	25	0
1	20	20
2	35	70
3	15	45
4	5	20
	100	155

$$\bar{x} = \frac{155}{100} = 1{,}55$$

El número medio de caries es de 1,55.

23 **En una población de 25 familias se ha observado la variable X = "número de coches que tiene la familia" y se han obtenido los siguientes datos:**

0	**1**	**2**	**3**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**4**
3	**2**	**2**	**1**	**1**
2	**2**	**1**	**1**	**1**
2	**1**	**3**	**2**	**1**

a) Construye la tabla de frecuencias de la distribución X.

b) Haz el diagrama de barras.

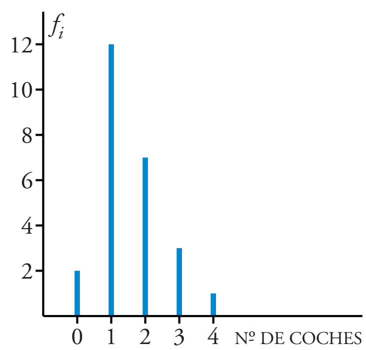
c) Calcula la media y la desviación típica.

d) Halla la mediana y los cuartiles.

a)

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	F_i	en %
0	2	0	0	2	8
1	12	12	12	14	56
2	7	14	28	21	84
3	3	9	27	24	96
4	1	4	16	25	100
	25	39	83		

b)

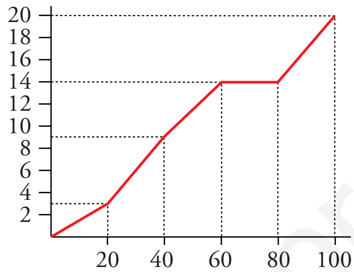


c) $\overline{x} = \dfrac{39}{25} = 1,56$

$\sigma^2 = \dfrac{83}{25} - 1,56^2 = 0,89 \;\to\; \sigma = \sqrt{0,89} \approx 0,94$

d) $Me = 1, \; Q_1 = 1 \;$ y $\; Q_3 = 2$

24 **Este es el polígono de frecuencias acumuladas correspondiente a una distribución de datos agrupados en intervalos:**



a) Escribe la tabla de frecuencias absolutas.

b) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

a)

INTERVALOS	F_i	f_i	MARCA DE CLASE (x_i)	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
[0, 20)	3	3	10	30	300
[20, 40)	9	6	30	180	5 400
[40, 60)	14	5	50	250	12 500
[60, 80)	14	0	70	0	0
[80, 100)	20	6	90	540	48 600
		20		1 000	66 800

b) MEDIA $\to \; \overline{x} = \dfrac{1\,000}{20} = 50$

VARIANZA $\to \; \sigma^2 = \dfrac{66\,800}{20} - 50^2 = 840$

DESVIACIÓN TÍPICA $\to \; \sigma = \sqrt{840} \approx 28,98$

25 **Completa la siguiente tabla estadística, donde *f*, *F* y *fr* representan, respectivamente, la frecuencia absoluta, la frecuencia absoluta acumulada y la frecuencia relativa.**

☛ *Recuerda que $fr = f/n$ y calcula n.*

x	f	F	fr
1	4	4	0,08
2	4	**8**	**0,08**
3	**8**	16	0,16
4	7	**23**	0,14
5	5	28	**0,1**
6	**10**	38	**0,2**
7	7	45	**0,14**
8	5	**50**	**0,1**

De la primera fila se obtiene fácilmente el valor de n:

$$fr = \frac{f}{n} \quad \rightarrow \quad 0{,}08 = \frac{4}{n} \quad \rightarrow \quad n = 50$$

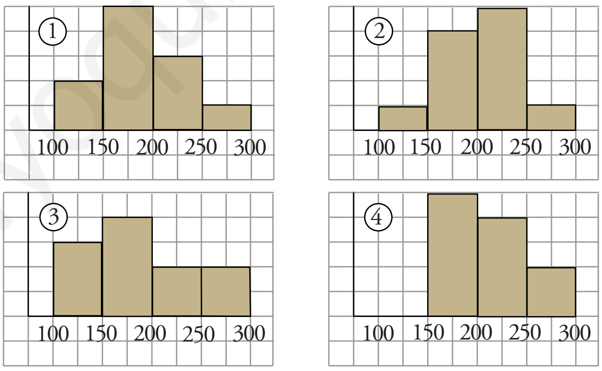
Página 218

26 **Se ha medido el nivel de colesterol en cuatro grupos de personas sometidas a diferentes dietas.**

Las medias y las desviaciones típicas son las que figuran en esta tabla:

DIETA	A	B	C	D
$\bar{x}$	211,3	188,6	202,2	185
σ	37,4	52,6	39,1	43,6

Las gráficas son, no respectivamente:



Asocia a cada dieta la gráfica que le corresponde.

Fijándonos en las gráficas, se observa que los grupos 1 y 3 tienen una media inferior a 200, mientras que las medias de 2 y 4 son superiores a ese número. Luego podemos asociar:

$$\text{A y C} \;\rightarrow\; 2 \text{ y } 4$$
$$\text{B y D} \;\rightarrow\; 1 \text{ y } 3$$

Por otra parte, las personas de 2 tienen el nivel de colesterol más disperso que las de 4. Según esto, su desviación típica será mayor, por lo que C $\leftrightarrow$ 2 y A $\leftrightarrow$ 4. Análogamente, B $\leftrightarrow$ 3 y D $\leftrightarrow$ 1.

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

27 Justifica que la suma de las frecuencias relativas es siempre igual a 1.

Supongamos que tenemos n datos:

$$fr_1 + fr_2 + \ldots + fr_n = \frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n} + \ldots + \frac{f_n}{n} = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Siendo f_i la frecuencia absoluta del dato x_i.

28 En la distribución de las notas de un examen, el primer cuartil fue 4. ¿Qué significa esto?

$Q_1 = 4$ significa que el 25% de los alumnos obtuvieron una nota igual o inferior a 4.

29 Completa la tabla de esta distribución en la que sabemos que su media es 2,7.

x_i	1	2	3	4
f_i	3	…	7	5

Llamamos z a la frecuencia absoluta del dato $x_i = 2$.

Aplicamos la definición de la media:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} \rightarrow 2{,}7 = \frac{3 + 2z + 21 + 20}{15 + z}$$

$$2{,}7 \cdot (15 + z) = 44 + 2z$$

$$40{,}5 + 2{,}7z = 44 + 2z \rightarrow 0{,}7z = 3{,}5 \rightarrow z = 5$$

30 Si a todos los datos de una distribución le sumamos un mismo número, ¿qué le ocurre a la media? ¿Y a la desviación típica? ¿Y si multiplicamos todos los datos por un mismo número?

Llamamos a al valor sumado a cada dato de la distribución:

• MEDIA

$$\frac{(x_1 + a)f_1 + (x_2 + a)f_2 + \ldots + (x_n + a)f_n}{n} =$$

$$= \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n + a(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)}{n} =$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{n} + a\frac{\Sigma f_i}{n} = \bar{x} + a, \text{ puesto que } \frac{\Sigma f_i}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

La nueva media es el valor de la media original más el valor que hemos sumado a cada dato.

- DESVIACIÓN TÍPICA:

$$\frac{\Sigma f_i(x_i+a)^2}{\Sigma f_i}-(\overline{x}+a)^2=\frac{\Sigma f_i x_i^{\,2}+\Sigma f_i a^2+\Sigma f_i 2x_i a}{\Sigma f_i}-\overline{x}^2-a^2-2\overline{x}a=$$

$$=\frac{\Sigma f_i x_i^{\,2}}{\Sigma f_i}+a^2+2a\overline{x}-\overline{x}^2-a^2-2\overline{x}a=$$

$$=\frac{\Sigma f_i x_i^{\,2}}{\Sigma f_i}-\overline{x}^2$$

La desviación típica no se ve alterada al sumar a todos los datos de la distribución un mismo número.

Supongamos ahora que todos los datos se multiplican por un mismo valor a:

- MEDIA $=\dfrac{ax_1f_1+ax_2f_2+\ldots+ax_nf_n}{n}=a\overline{x}\ \to$ la media queda multiplicada por dicho valor.

- DESVIACIÓN TÍPICA:

$$\frac{\Sigma f_i(x_ia)^2}{\Sigma f_i}-(\overline{x}a)^2=\frac{a^2\Sigma f_i x_i^{\,2}}{\Sigma f_i}-a^2\overline{x}^2=a^2\left(\frac{\Sigma f_i x_i^{\,2}}{\Sigma f_i}-\overline{x}^2\right)$$

La varianza quedaría multiplicada por a^2, luego la desviación típica queda multiplicada por a.

31 **Dos distribuciones estadísticas, A y B, tienen la misma desviación típica.**

a) Si la media de A es mayor que la de B, ¿cuál tiene mayor coeficiente de variación?

b) Si la media de A es doble que la de B, ¿cómo serán sus coeficientes de variación?

C.V. $=\dfrac{\sigma}{\overline{x}}$

a) Si $\overline{x}_A>\overline{x}_B\ \to\ \dfrac{1}{\overline{x}_A}<\dfrac{1}{\overline{x}_B}\ \xrightarrow{\sigma>0}\ \dfrac{\sigma}{\overline{x}_A}<\dfrac{\sigma}{\overline{x}_B}\ \to$ B tiene mayor coeficiente de variación.

b) Si $\overline{x}_A=2\overline{x}_B$

$$\left.\begin{array}{l}\text{C.V. de } A\ \to\ \dfrac{\sigma}{\overline{x}_A}=\dfrac{\sigma}{2\overline{x}_B}\\[2ex]\text{C.V. de } B\ \to\ \dfrac{\sigma}{\overline{x}_B}\end{array}\right\}$$

El coeficiente de variación de A es la mitad que el de B.

32 **Observa esta demostración:**

$$\frac{\Sigma(x_i-\overline{x})^2}{n}=\frac{\Sigma(x_i^2-2x_i\overline{x}+\overline{x}^2)}{n}\overset{①}{=}$$

$$=\frac{\Sigma x_i^2}{n}-2\overline{x}^2+\frac{\Sigma\overline{x}^2}{n}\overset{②}{=}$$

$$=\frac{\Sigma x_i^2}{n}-2\overline{x}^2+\overline{x}^2=\frac{\Sigma\overline{x}^2}{n}-\overline{x}^2$$

Justifica las igualdades ① y ②.

- Justificación de ① $\rightarrow$ $\dfrac{\Sigma(x_i^2-2x_i\overline{x}+\overline{x}^2)}{n}=\dfrac{\Sigma x_i^2}{n}-\dfrac{2\overline{x}\Sigma x_i}{n}+\dfrac{\Sigma\overline{x}^2}{n}$

  Como $\dfrac{\Sigma x_i}{n}=\overline{x}$, entonces se obtiene: $\dfrac{\Sigma x_i^2}{n}-2\overline{x}^2+\dfrac{\Sigma\overline{x}^2}{n}$

- Justificación de ② $\rightarrow$ $\dfrac{\Sigma\overline{x}^2}{n}=\dfrac{n\overline{x}^2}{n}=\overline{x}^2$ (por ser n datos con frecuencia 1)

PROFUNDIZA

33 **En una fábrica se ha medido la longitud de 1 000 piezas de las mismas características y se han obtenido estos datos:**

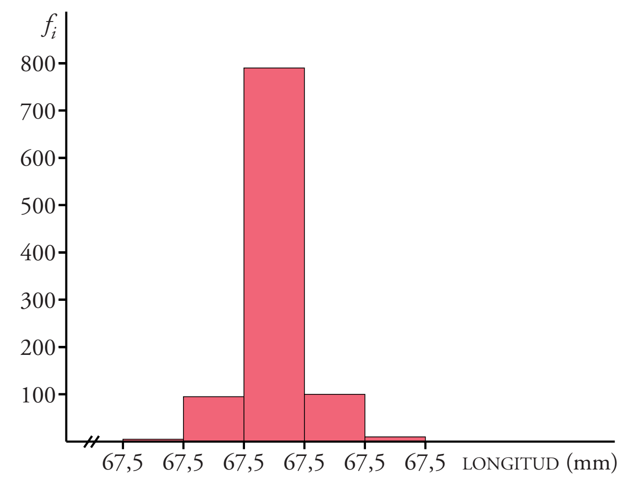
LONGITUD (en mm)	NÚMERO DE PIEZAS
67,5-72,5	5
72,5-77,5	95
77,5-82,5	790
82,5-87,5	100
87,5-92,5	10

a) Representa el histograma correspondiente.

b) Se consideran aceptables las piezas cuya longitud está en el intervalo [75, 86]. ¿Cuál es el porcentaje de piezas defectuosas?

☛ *Del segundo intervalo habrá que rechazar las que midan entre 72,5 y 75. Calcula qué tanto por ciento de la amplitud representa la diferencia 75-72,5 y halla el porcentaje de la frecuencia correspondiente. Procede análogamente en el cuarto intervalo.*

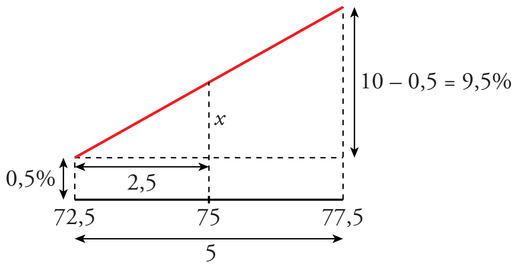
a) Por tener todos los intervalos la misma longitud, la altura de cada una de las barras coincidirá con la frecuencia de cada intervalo.



b) Construimos la tabla de frecuencias absolutas acumuladas:

INTERVALO	f_i	F_i	en %
67,5 - 72,5	5	5	0,5
72,5 - 77,5	95	100	10
77,5 - 82,5	790	890	89
82,5 - 87,5	100	990	99
87,5 - 92,5	10	1 000	100

• Calculamos el porcentaje de piezas que hay por debajo de 75 mm:

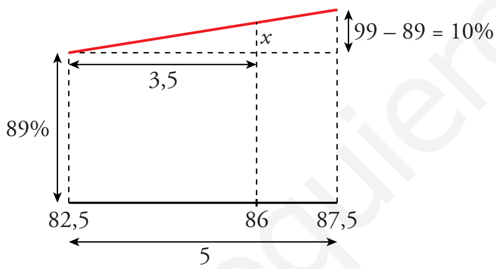


$$\frac{9,5}{5} = \frac{x}{2,5} \rightarrow x = 4,75$$

Por debajo de 75 mm están el

4,75 + 0,5 = 5,25% de las piezas.

• Calculamos el porcentaje de piezas que están por debajo de 86 mm:



$$\frac{10}{5} = \frac{x}{3,5} \rightarrow x = 7$$

Por debajo de 86 mm están el

89 + 7 = 96% de las piezas.

El porcentaje de piezas que hay en el intervalo [75, 86] es:

$$96 - 5,25 = 90,75\%$$

Por tanto, el 100 – 90,75 = 9,25% de las piezas serán defectuosas.

34 En un sondeo de opinión entre los jóvenes españoles de 15 a 24 años, una de las preguntas era: ***¿Justificas que alguien acepte un soborno en su trabajo?***

Respuesta $\begin{cases} \text{Nunca} \rightarrow 1 \quad \text{A veces} \rightarrow 5 \\ \text{Siempre} \rightarrow 10 \end{cases}$

En una muestra de 2 000 individuos se obtuvo una puntuación de 2,63.

a) Expresa este resultado sabiendo que en la ficha técnica se dice que el error máximo es de ±1,22 con un nivel de confianza del 95%.

b) Si el error máximo fuera ±0,6, ¿el nivel de confianza sería mayor o menor?

a) La puntuación media estará en el intervalo:

$$(2,63 - 1,22; 2,63 + 1,22) = (1,41; 3,85)$$

con un nivel de confianza del 95%.

b) Con el nuevo error, el intervalo será (2,03; 3,23). Por tanto, el nivel de confianza será menor que el 95% anterior.

Página 219

35 **a) Para estimar la estatura media de los 934 soldados de un regimiento, extraemos una muestra de 53 de ellos. La media de la muestra es 172,6 cm. Expresa este resultado sabiendo que en la ficha técnica se dice que el error máximo es de ±1,8 cm, con una probabilidad de 0,90.**

b) Si con el mismo estudio anterior admitimos que se cometa un error de ±2,6 cm, el nivel de confianza ¿será superior o inferior al 90%?

c) ¿Cómo podríamos aumentar el nivel de confianza manteniendo la cota de error en ±1,8 cm?

a) La estatura media de los soldados de ese regimiento estará en el intervalo

$$(172{,}6 - 1{,}8;\ 172{,}6 + 1{,}8) = (170{,}8;\ 174{,}4)$$

con una probabilidad de 0,90.

b) Ahora el intervalo es (170; 175,2). Como es mayor que el anterior, el nivel de confianza aumenta.

c) Aumentando la muestra de 53 soldados.

36 **De una muestra de 75 pilas eléctricas, se han obtenido estos datos sobre su duración:**

a) Representa los datos gráficamente.

b) Calcula la media y la desviación típica.

c) ¿Qué porcentaje de pilas hay en el intervalo $(\bar{x} - \sigma,\ \bar{x} + \sigma)$?

TIEMPO (en horas)	NÚMERO DE PILAS
[25, 30)	3
[30, 35)	5
[35, 40)	21
[40, 45)	28
[45, 55)	12
[55, 70)	6

a) Representamos los datos en un histograma. Como los intervalos son de distinta longitud, calculamos la altura (h_i) de cada barra, sabiendo que el área de cada rectángulo ha de ser proporcional a la frecuencia (f_i).

$[25, 30) \rightarrow h_1 = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

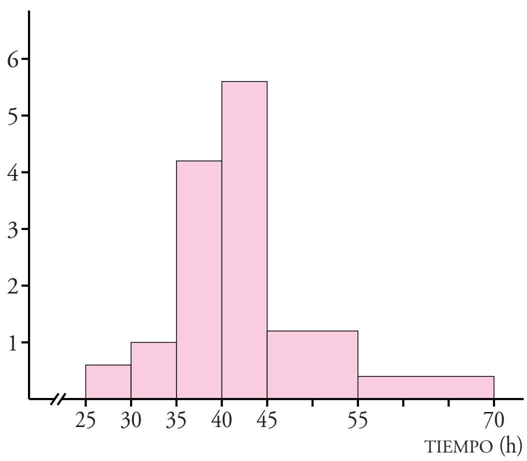
$[30, 35) \rightarrow h_2 = \dfrac{5}{5} = 1$

$[35, 40) \rightarrow h_3 = \dfrac{21}{5} = 4{,}2$

$[40, 45) \rightarrow h_4 = \dfrac{28}{5} = 5{,}6$

$[45, 55) \rightarrow h_5 = \dfrac{12}{10} = 1{,}2$

$[55, 70) \rightarrow h_6 = \dfrac{6}{15} = 0{,}4$



b)

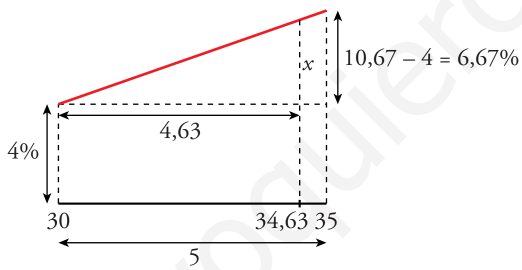
INTERVALO	MARCA (x_i)	f_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$	F_i	EN %
[25, 30)	27,5	3	82,5	2 268,75	3	4
[30, 35)	32,5	5	162,5	5 281,25	8	10,67
[35, 40)	37,5	21	787,5	29 531,25	29	38,67
[40, 45)	42,5	28	1 190	50 575	57	76
[45, 55)	50	12	600	30 000	69	92
[55, 70)	62,5	6	375	23 437,5	75	100
		75	3 197,5	141 093,75		

MEDIA $\rightarrow$ $\bar{x} = \dfrac{3\,197{,}5}{75} = 42{,}63$

$\sigma^2 = \dfrac{141\,093{,}75}{75} - 42{,}63^2 = 63{,}93$ $\rightarrow$ DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{63{,}93} \approx 8$

c) $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma) = (42{,}63 - 8;\ 42{,}63 + 8) = (34{,}63;\ 50{,}63)$

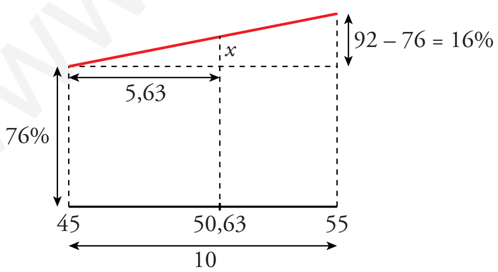
- Calculamos el porcentaje de pilas por debajo de 34,63:



$\dfrac{6{,}67}{5} = \dfrac{x}{4{,}63} \rightarrow x = 6{,}2$

El porcentaje de pilas por debajo de 34,63 es 4 + 6,2 = 10,2%.

- Calculamos el porcentaje de pilas por debajo de 50,63:



$\dfrac{16}{10} = \dfrac{x}{5{,}63} \rightarrow x \approx 9$

El porcentaje de pilas por debajo de 50,63 es de 76 + 9 = 85%

El porcentaje de pilas que hay en el intervalo (34,63; 50,63) es:

$$85 - 10{,}2 = 74{,}8\%$$

37 **En el proceso de fabricación de un vino, se le añade un compuesto químico. Se ha comprobado la concentración de este compuesto en una partida de 200 botellas y se han obtenido los datos de la tabla.**

a) **Calcula la media y la desviación típica.**

b) **Se estima que el vino no se debe consumir si la concentración de ese compuesto es superior a 20,9 mg/*l*.**

Según esto, ¿qué porcentaje de botellas no es adecuado para el consumo?

CONCENT. (mg/*l*)	NÚMERO DE BOTELLAS
[20; 20,2)	15
[20,2; 20,4)	38
[20,4; 20,6)	76
[20,6; 20,8)	57
[20,8; 21)	14

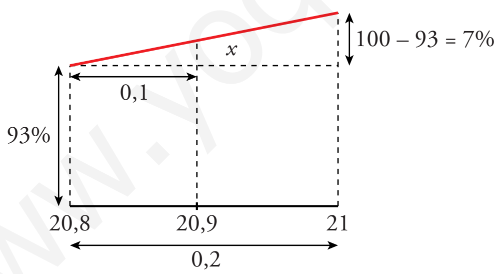
a)

INTERVALO	MARCA (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	F_i	EN %
[20; 20,2)	20,1	15	301,5	6 060,15	15	7,5
[20,2; 20,4)	20,3	38	771,4	15 659,42	53	26,5
[20,4; 20,6)	20,5	76	1 558	31 939	129	64,5
[20,6; 20,8)	20,7	57	1 179,9	24 423,93	186	93
[20,8; 21)	20,9	14	292,6	6 115,34	200	100
		200	4 103,4	84 197,84		

MEDIA $\rightarrow$ $\bar{x} = \dfrac{4\,103,4}{200} = 20,52$

$$\sigma^2 = \frac{84\,197,84}{200} - 20,517^2 = 0,04 \;\rightarrow\; \sigma = \sqrt{0,04} = 0,2$$

b) Calculamos el porcentaje de botellas cuya concentración es inferior a 20,9 mg/*l*:



$\dfrac{7}{0,2} = \dfrac{x}{0,1} \rightarrow x = 3,5$

El porcentaje de botellas cuya concentración es inferior a 20,9 mg/*l* es de 93 + 3,5 = 96,5%.

No es adecuado para el consumo el 100 – 96,5 = 3,5% de botellas.

38 **Solo uno de los siguientes procedimientos nos permite obtener una muestra aleatoria. Di cuál es y, en los otros, estudia el sentido del sesgo y su importancia:**

a) **Para estudiar las frecuencias relativas de las letras, se toman al azar 20 libros de la biblioteca de un centro escolar y se cuenta las veces que aparece cada letra en la página 20 de los libros seleccionados.**

b) **Para conocer la opinión de sus clientes sobre el servicio ofrecido por unos grandes almacenes, se selecciona al azar, entre los que poseen tarjeta de compra, 100 personas entre las que han gastado menos de 1 000 € el últi-**

mo año, otras 100 entre las que han gastado entre 1 000 € y 5 000 € y 100 más entre las que han gastado más de 5 000 €.

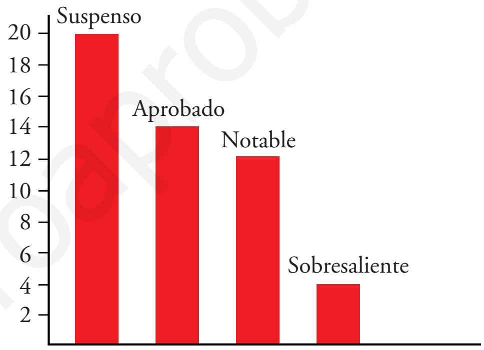
c) Para calcular el número medio de personas por cartilla en un Centro de Salud de la Seguridad Social, los médicos toman nota de las cartillas de las personas que acuden a las consultas durante un mes.

La opción buena es la a).

La b) no es válida, porque solo se tiene en cuenta a los clientes que poseen tarjeta de compra, que no son representativos de todos los clientes.

La c) no es válida, porque existen grupos en la sociedad que acuden más habitualmente al médico y no representan a toda ella.

39 **Este diagrama de barras muestra las calificaciones obtenidas por un grupo de 50 estudiantes:**



a) Construye el histograma correspondiente a las calificaciones numéricas teniendo en cuenta las siguientes equivalencias: Suspenso, [0, 5); Aprobado, [5, 7); Notable, [7, 9); Sobresaliente, [9, 10).

b) Calcula la calificación media.

☛ ***Ten en cuenta que los intervalos no tienen la misma amplitud y que las áreas de los rectángulos deben ser proporcionales a las frecuencias.***

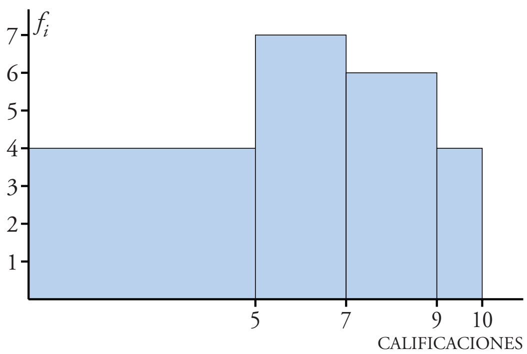
a) Calculamos las alturas respectivas de cada rectángulo del histograma:

$$[0,5) \;\rightarrow\; h_1 = \frac{20}{5} = 4$$

$$[5,7) \;\rightarrow\; h_2 = \frac{14}{2} = 7$$

$$[7,9) \;\rightarrow\; h_3 = \frac{12}{2} = 6$$

$$[9,10) \;\rightarrow\; h_4 = \frac{4}{1} = 4$$



b)

INTERVALO	f_i	MARCA (x_i)	$f_i x_i$
[0, 5)	20	2,5	50
[5, 7)	14	6	84
[7, 9)	12	8	96
[9, 10)	4	9,5	38
	50		268

$$\bar{x} = \frac{268}{50} = 5,36$$

Página 233

PRACTICA

1 **Para cada uno de los siguientes casos:**

- **Di si se trata de una distribución bidimensional.**
- **Indica cuáles son las dos variables que se relacionan.**
- **Indica si se trata de una relación funcional o de una relación estadística.**

a) Familias: Estatura media de los padres – Estatura media de los hijos mayores de 17 años.

b) Tamaño de la vivienda – Gasto en calefacción.

c) Número de personas que viven en una casa – Litros de agua consumidos en un mes.

d) Metros cúbicos de gas consumidos en una casa – Coste del recibo del gas.

e) Longitud de un palmo de un alumno de cuarto curso de ESO – Número de calzado que usa.

f) Número de médicos por cada mil habitantes – Índice de mortalidad infantil.

g) Velocidad con que se lanza una pelota hacia arriba – Altura que alcanza.

	DIS. BIDIMENS.	VARIABLES	TIPO DE RELACIÓN
a)	Sí	Estatura media de padres. Estatura media de hijos mayores de 17 años.	Estadística
b)	Sí	Tamaño vivienda. Gasto en calefacción.	Estadística
c)	Sí	Número de personas en una casa. Litros de agua consumidos en un mes.	Estadística
d)	Sí	m^3 de gas consumidos en una casa. Coste del recibo del gas.	Funcional
e)	Sí	Longitud de un palmo de la mano. Número de calzado.	Estadística
f)	Sí	Número de médicos por 1 000 habitantes. Índice de mortalidad infantil.	Estadística
g)	Sí	Velocidad de una pelota lanzada hacia arriba. Altura que alcanza.	Funcional

2 **En cada uno de los apartados del ejercicio anterior, estima si la correlación será positiva o negativa.**

a) $r > 0$ b) $r > 0$ c) $r > 0$ d) $r > 0$

e) $r > 0$ f) $r < 0$ g) $r > 0$

3 **Estos son los resultados que hemos obtenido al tallar y pesar a varias personas:**

ESTATURA (cm)	156	163	171	177	184
PESO (kg)	48	75	65	73	81

a) ¿Es una distribución bidimensional? ¿Cuáles son las variables que se relacionan? ¿Cuáles son los individuos?

b) Representa la nube de puntos.

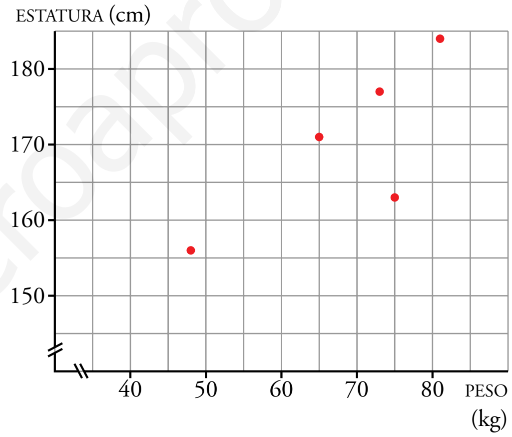
c) ¿Es una relación estadística o funcional?

a) Sí.

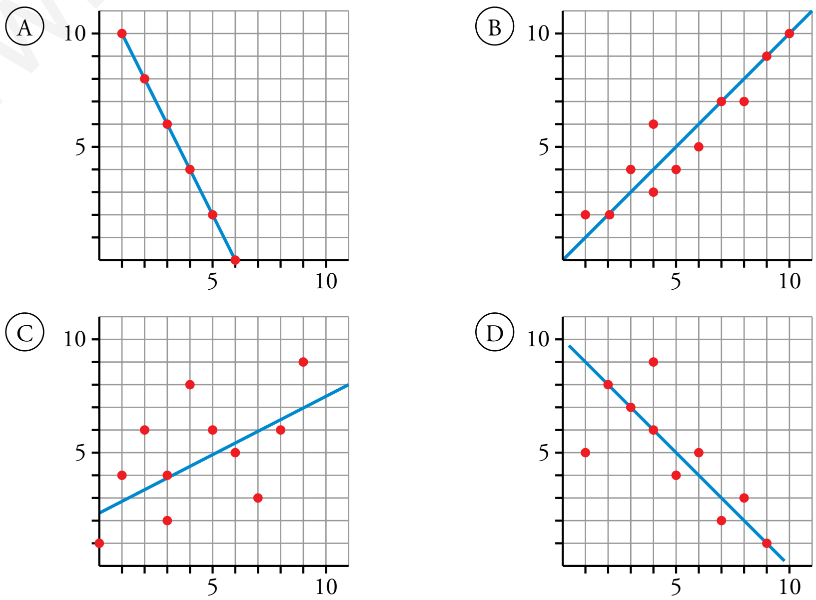
Las variables son: estatura, en centímetros, y peso, en kilos.

Los individuos son las personas talladas y pesadas.

c) Es una relación estadística.

b) 

4 **a) Traza, a ojo, la recta de regresión en cada una de las distribuciones bidimensionales siguientes:**



b) ¿Cuáles de ellas tienen correlación positiva y cuáles tienen correlación negativa?

c) Una de ellas presenta relación funcional. ¿Cuál es?

¿Cuál es la expresión analítica de la función que relaciona las dos variables?

d) Ordena de menor a mayor las correlaciones de las cuatro: en primer lugar la que presenta correlación más débil y, en último lugar, la de correlación más fuerte.

b)Correlación positiva: B y C.

Correlación negativa: A y D.

c) A presenta relación funcional.

$y = -2x + 12$

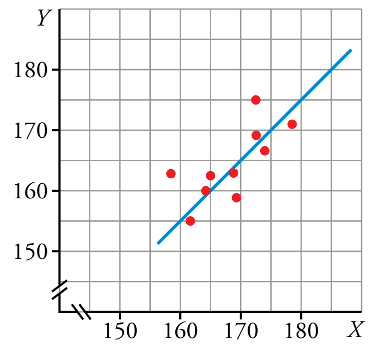
d) $|r_C| < |r_D| < |r_B| < |r_A|$

5 Las estaturas de 10 chicas y las de sus respectivas madres son:

x_i	158	162	164	165	168	169	172	172	174	178
y_i	163	155	160	161	164	158	175	169	166	172

Representa los valores, sobre papel cuadriculado, mediante una nube de puntos.

Traza a ojo la recta de regresión y di si la correlación es positiva o negativa y más o menos fuerte de lo que esperabas.

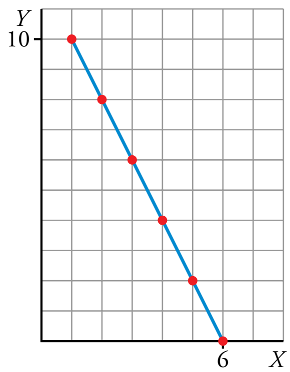


La correlación es positiva y fuerte.

Página 234

6 Representa la nube de puntos correspondiente a esta distribución y di cuánto vale el coeficiente de correlación.

x	1	2	3	4	5	6
y	10	8	6	4	2	0

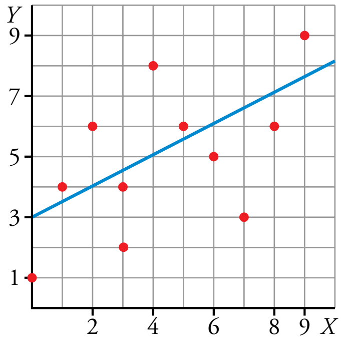


El coeficiente de correlación vale –1.

7 Representa la nube de puntos de esta distribución y estima cuál de estos tres puede ser el coeficiente de correlación:

a) $r = 0{,}98$ b) $r = -0{,}87$ c) $r = 0{,}5$

c) $r = 0{,}57$



x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	6	2	4	8	6	5	3	6	9

PIENSA Y RESUELVE

8 Se ha hecho un estudio para ver los efectos que producen ciertas sustancias A, B y C en el peso de los ratones.

Los datos obtenidos vienen dados en las tablas siguientes:

mg DIARIOS DE UNA SUSTANCIA *A*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aumento de peso (g) EN UN MES	3	1	3	5	6	4	6	5	7	7

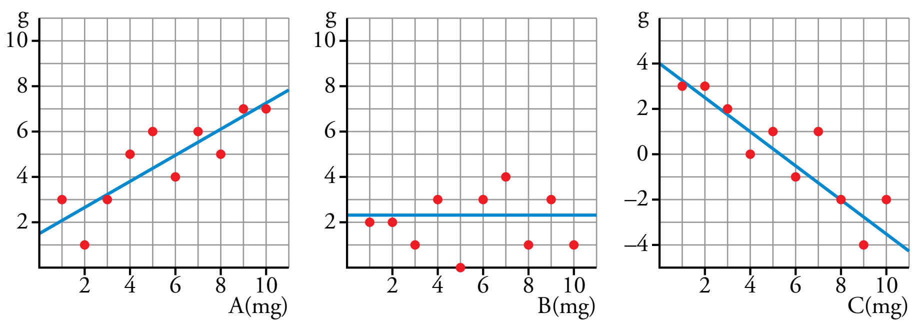
mg DIARIOS DE UNA SUSTANCIA *B*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aumento de peso (g) EN UN MES	2	2	1	3	0	3	4	1	3	1

mg DIARIOS DE UNA SUSTANCIA *C*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aumento de peso (g) EN UN MES	3	3	2	0	1	–1	1	–2	–4	–2

a) Representa la nube de puntos de cada distribución.

b) Indica si la correlación es positiva o negativa en cada una de ellas.

c) Ordena las correlaciones de menor a mayor (de menos a más fuerte).



b) $r > 0$, r prácticamente nula, $r < 0$, respectivamente.

c) $r_C < r_B < r_A$, $|r_B| < |r_A| < |r_C|$

9 **Para realizar unos estudios sobre energía solar se ha medido la temperatura máxima y el número de horas de sol durante una semana, obteniéndose los siguientes resultados:**

	TEMPERATURA (°C)	Nº DE HORAS DE SOL
LUNES	12	12,35
MARTES	14	12,36
MIÉRCOLES	7	12,16
JUEVES	10	12,36
VIERNES	15	12,38
SÁBADO	20	12,45
DOMINGO	18	12,40

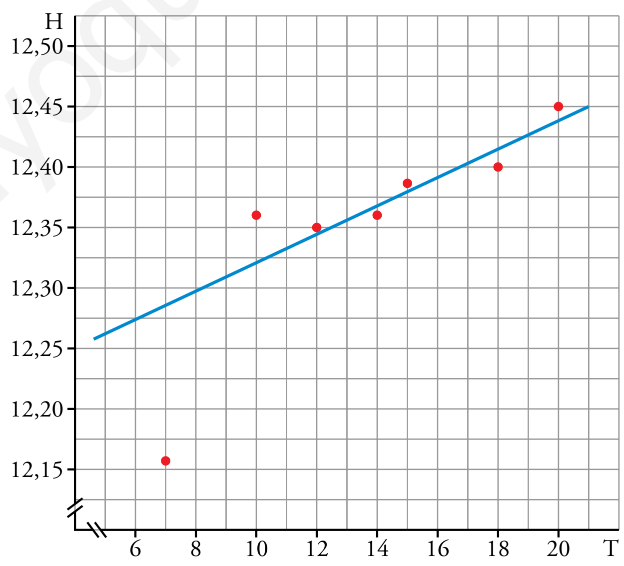
a) Traza a ojo la recta de regresión de la temperatura en función del número de horas de sol.

b) El lunes siguiente a la realización de la experiencia se rompió el medidor del número de horas de sol.

¿Podemos estimar este número a partir de la recta obtenida en el apartado anterior?

Justifica la respuesta y haz esta estimación si sabemos que la temperatura máxima fue de 19 grados centígrados.

a)



b) Se puede hacer una estimación, pero con un cierto margen de error. Cometeremos más error en temperaturas bajas que en altas.

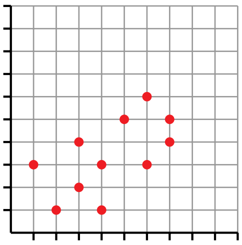
Si $T = 19$ °C, el número de horas de sol se puede aproximar entre 12,40 y 12,45 horas de sol.

Página 235

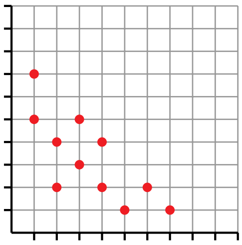
10 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

11 **Observa estas cuatro distribuciones bidimensionales:**

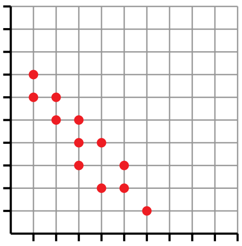
a)



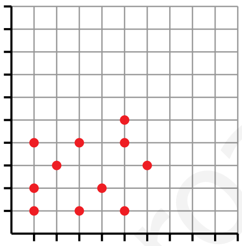
b)



c)



d)



Los coeficientes de correlación de estas distribuciones son, no respectivamente:

0,2 –0,9 –0,7 0,6

Asigna a cada gráfica el suyo.

a) $r = 0,6$

b) $r = -0,7$

c) $r = -0,9$

d) $r = 0,2$

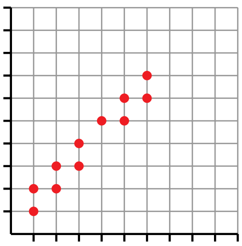
Página 236

12 **Los coeficientes de correlación de las distribuciones bidimensionales que aparecen a continuación son, en valor absoluto, los siguientes:**

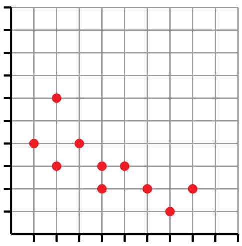
0,55 0,75 0,87 0,96

Asigna a cada uno el suyo, cambiando el signo cuando proceda:

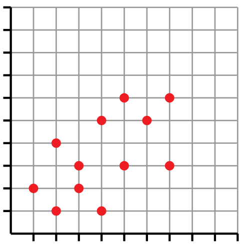
a)



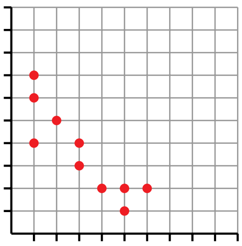
b)



c)



d)



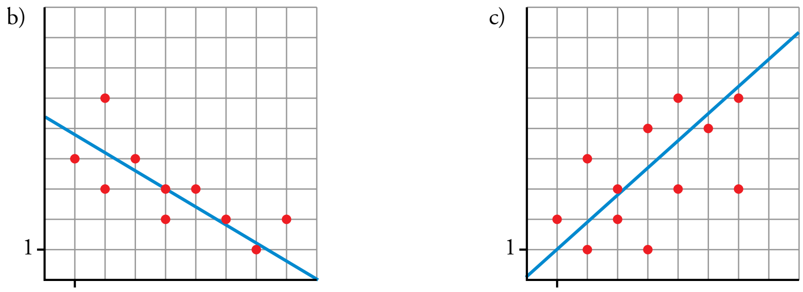
a) $r = 0,96$

b) $r = -0,75$

c) $r = 0,55$

d) $r = -0,87$

13 **Traza la recta de regresión de las distribuciones b) y c) del ejercicio anterior. Estima, en cada una de ellas, los valores que corresponden a $x = 0$ y a $x = 11$. ¿En cuál de las dos son más fiables las estimaciones realizadas?**



$x = 0 \to \hat{y} = 5{,}5$

$x = 11 \to \hat{y} = -1{,}1$

$x = 0 \to \hat{y} = 0$

$x = 11 \to \hat{y} = 10$

Es más fiable la estimación de b) que la de c), ya que la correlación es más fuerte en b).

14 **De un muelle colgamos pesas.**

La siguiente tabla nos da los pesos colgados y los correspondientes alargamientos del muelle:

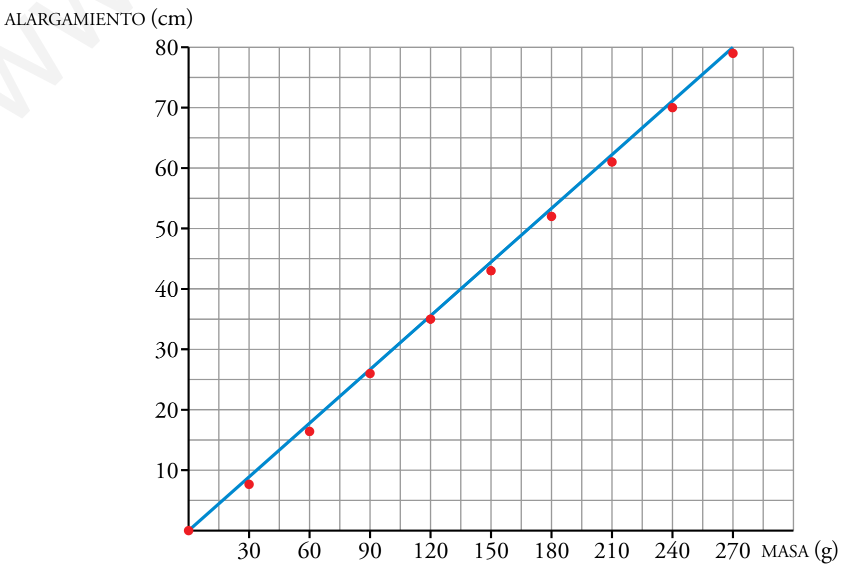
a) Representa los puntos y traza la recta de regresión ($r = 0{,}999$).

b) Estima el alargamiento esperado para masas de 40 g, 100 g, 250 g y 350 g.

c) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, 0) y (240, 70). Compara esta recta con la que has trazado en el apartado a) y calcula con ella los alargamientos que has estimado en b).

MASA (g)	ALARGAMIENTO (cm)
0	0
30	9
60	17
90	26
120	35
150	43
180	52
210	61
240	70
270	79

a)



b) Si $m = 40$ g $\rightarrow$ alargamiento ≈ 12 cm

Si $m = 100$ g $\rightarrow$ alargamiento ≈ 30 cm

Si $m = 250$ g $\rightarrow$ alargamiento ≈ 72 cm

Si $m = 350$ g $\rightarrow$ alargamiento ≈ 100 cm

c) Recta que pasa por los puntos (0, 0) y (240, 70):

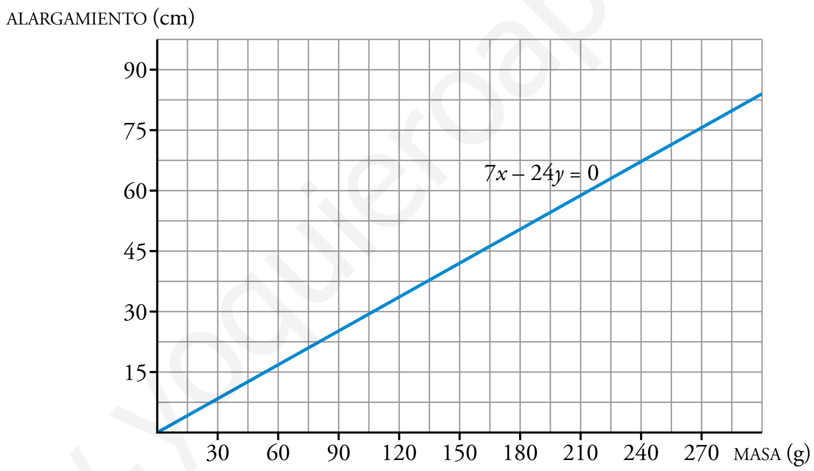
$$\frac{x}{240} = \frac{y}{70} \rightarrow 7x = 24y \rightarrow 7x - 24y = 0$$

Con esta recta: si $m = 40$ g $\rightarrow$ alargamiento = 11,67 cm

si $m = 100$ g $\rightarrow$ alargamiento = 29,16 cm

si $m = 250$ g $\rightarrow$ alargamiento = 72,92 cm

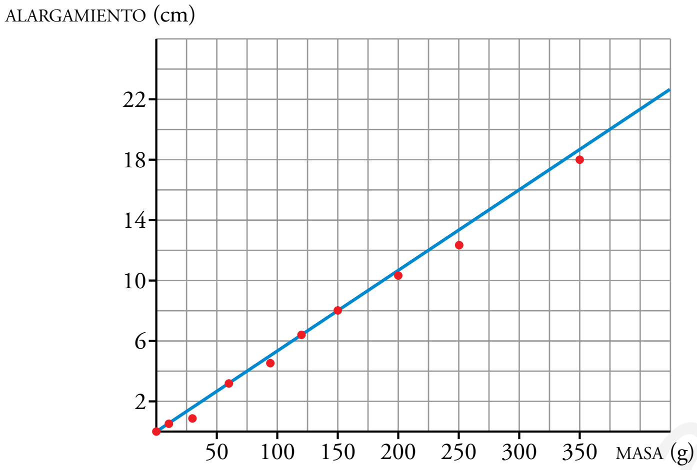
si $m = 350$ g $\rightarrow$ alargamiento = 102,08 cm



15 **Para otro muelle, se obtiene la siguiente tabla:**

MASA (g)	ALARGAMIENTO (cm)
0	0
10	0,5
30	1
60	3
90	5
120	6,5
150	8
200	10,2
250	12,5
350	18

Representa los puntos, traza la recta de regresión y estima algunos valores que no estén en la tabla.



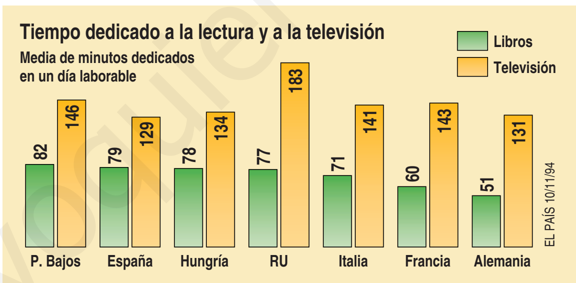
Por ejemplo: si $m = 100 \rightarrow$ alargamiento ≈ 5 cm

si $m = 175 \rightarrow$ alargamiento ≈ 9 cm

si $m = 300 \rightarrow$ alargamiento ≈ 16 cm

Página 237

16 En una encuesta realizada en 7 países europeos, se obtuvieron los datos de este gráfico:

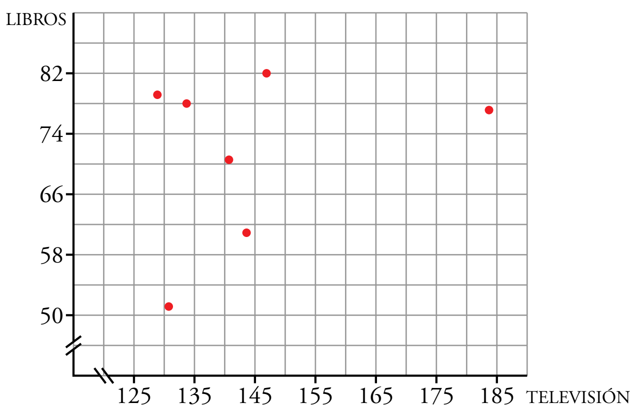


a) ¿Cómo crees que será la correlación entre los tiempos dedicados a la lectura y a la televisión?

b) Haz la nube de puntos correspondiente a estas dos variables y contrasta lo que observas en ella con tu respuesta del apartado a).

a) La correlación será bastante débil y negativa, ya que a más tiempo dedicado a la televisión, menos tiempo dedicado a la lectura.

b) La nube de puntos correspondiente a estos datos nos muestra que la correlación es casi nula.



17 **La correlación entre las temperaturas medias mensuales de una ciudad española y el tiempo que sus habitantes dedican a ver la televisión, es de –0,89.**

¿Te parece razonable este valor? Explica su significado. ¿Será positiva o negativa la correlación entre la lluvia caída mensualmente en La Coruña y el consumo televisivo de sus habitantes?

a) Es razonable que sea negativa y fuerte. Se ve más televisión en invierno que en verano. A medida que aumenta la temperatura media, disminuye el tiempo dedicado a la televisión.

b) La correlación entre la lluvia y el consumo televisivo será positiva y fuerte. Cuanto más llueve, más televisión se ve.

18 **Observa la siguiente tabla sobre los países suramericanos:**

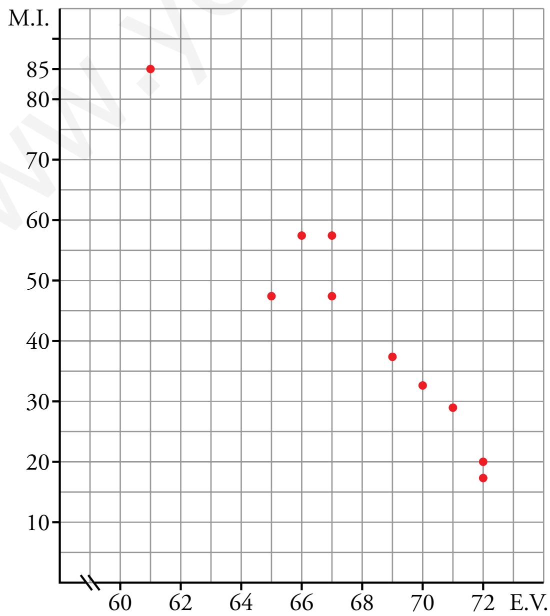
	ESPERANZA DE VIDA (1990-95)	MORTALIDAD INFANTIL POR 1000 (1990-95)
ARGENTINA	71	29
BOLIVIA	61	85
BRASIL	66	57
COLOMBIA	69	37
CHILE	72	17
ECUADOR	67	57
PARAGUAY	67	47
PERÚ	65	47
URUGUAY	72	20
VENEZUELA	70	33

a) Representa la nube de puntos y di si la correlación que observas es positiva o negativa, fuerte o débil.

b) ¿Cuál de los siguientes valores será el coeficiente de correlación?:

0,8; –0,5; –0,97; –0,75; 0,95

a)



b) $r = -0{,}97$

Observamos que la correlación es negativa y fuerte.

PROFUNDIZA

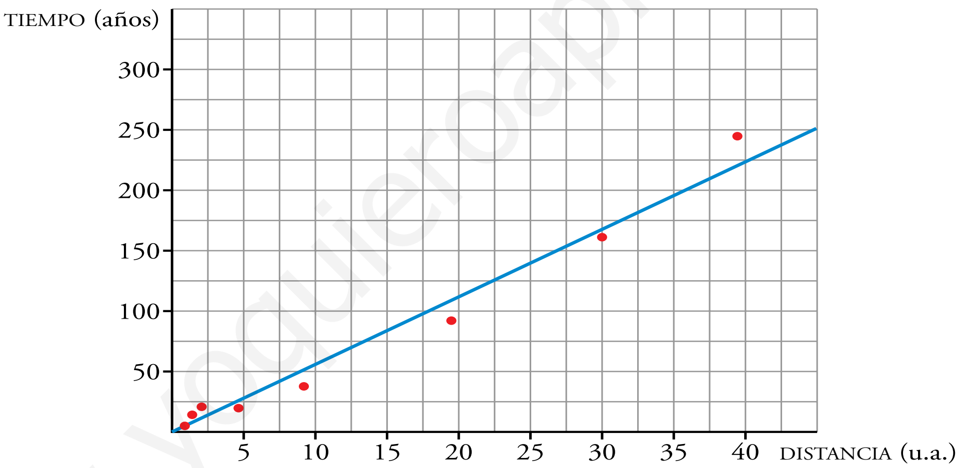
19 **Las distancias medias de los planetas al Sol y los tiempos que tardan en dar una vuelta completa alrededor del mismo, son:**

	DISTANCIA	TIEMPO
MERCURIO	0,39	0,24
VENUS	0,72	0,61
TIERRA	1	1
MARTE	1,52	1,88
JÚPITER	5,2	11,88
SATURNO	9,54	29,48
URANO	19,19	84,1
NEPTUNO	30,07	164,93
PLUTÓN	39,52	248,7

Se han tomado como unidades la distancia entre la Tierra y el Sol, a lo que se llama unidad astronómica (u.a.), 1 u.a. = 150 millones de kilómetros; y el tiempo que tarda la Tierra en dar la vuelta al Sol (1 año).

a) Representa la nube de puntos y estima el coeficiente de correlación.

b) Si existiera un planeta cuya distancia al Sol fuera 3,5 u.a., ¿cuál sería su tiempo de revolución? ¿Podríamos estar seguros de esta estimación?

a) 

$r \approx 0,9$

b) Si la distancia es de 3,5 u.a., el tiempo de revolución será de 5,5 años, aproximadamente.

20 **Investiga. Elabora una tabla con los cubos de las distancias (d^3) de los planetas al Sol y los cuadrados de los tiempos (t^2) y estudia la correlación entre ambos valores.**

Es una relación funcional? (Busca en un libro de Física la tercera ley de Kepler.)

Calcula el periodo de un planeta cuya distancia al Sol fuera 3,5 u.a.

	d^3	t^2
Mercurio	0,059	0,058
Venus	0,37	0,372
Tierra	1	1
Marte	3,51	3,534
Júpiter	140,6	141,13
Saturno	868,25	869,07
Urano	7 066,83	7 072,81
Neptuno	27 189,44	27 201,9
Plutón	61 723,54	61 851,69

Estos valores corresponden a una relación funcional $(r \approx 1)$, cuya expresión es la tercera ley de Kepler:

"El cociente entre la distancia media de un planeta al Sol elevada al cubo y su periodo de revolución elevado al cuadrado es constante."

$$\frac{R^3}{T^2} = \text{cte}$$

Si $d = 3{,}5$ u.a., entonces $3{,}5^3 \approx t^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{3{,}5^3} = 6{,}54$

Luego el periodo es $t \approx 6{,}54$ años.

Página 252

PRACTICA

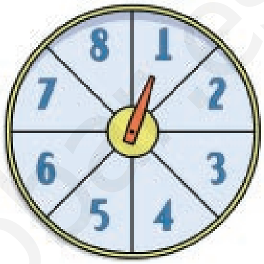
1 **Se hace girar la flecha y se observa sobre qué número se detiene. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:**

a) Obtener un número par.

b) Obtener un número primo.

c) Obtener 5 o más.

d) Que no salga el 7.



a) $P[\text{PAR}] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

b) $P[\text{PRIMO}] = \frac{5}{8}$

c) $P[5 \text{ O MÁS}] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

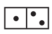
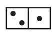
d) $P[\text{NO } 7] = 1 - P[7] = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

2 **Extraemos una ficha de un dominó. Calcula la probabilidad de que:**

a) La suma de puntos sea igual a 6.

b) La suma de puntos sea menor que 4.

c) Sea una ficha "doble".

En el dominó hay 28 fichas; la ficha  es igual que la  (solo hay una ficha, no dos)

a) $P[\text{SUMA SEA IGUAL A } 6] = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

b) $P[\text{SUMA SEA MENOR QUE } 4] = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$

c) $P[\text{FICHA "DOBLE"}] = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	×	×	×	×	×	×
1	1	2	×	×	×	×	×
2	2	3	4	×	×	×	×
3	3	4	5	6	×	×	×
4	4	5	6	7	8	×	×
5	5	6	7	8	9	10	×
6	6	7	8	9	10	11	12

3 **Escribimos cada una de las letras de la palabra PREMIO en una ficha y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.**

a) Escribe los sucesos elementales de este experimento aleatorio. ¿Tienen todos la misma probabilidad?

b) Escribe el suceso "obtener vocal", y calcula su probabilidad.

c) Si la palabra elegida fuera SUERTE, ¿cómo responderías a los apartados a) y b)?

a) Los sucesos elementales son: {P}, {R}, {E}, {M}, {I}, {O}.

Todas tienen la misma probabilidad, porque todas aparecen una sola vez.

b) V = "obtener vocal" $\rightarrow$ S = {E, I, O}

$P[\text{V}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) Los sucesos elementales son: {S}, {U}, {E}, {R}, {T}

$P[\text{V}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

En este caso el suceso elemental {E} tiene más probabilidad que el resto, por aparecer dos veces.

4 **Lanzamos dos monedas y anotamos el número de caras que obtenemos. El espacio muestral es $E = \{0, 1, 2\}$.**

a) ¿Tienen los tres sucesos elementales la misma probabilidad?

b) Calcula la probabilidad de "0 CARAS", "1 CARA", "2 CARAS". Comprueba que su suma es igual a 1.

c) ¿Cuál es el suceso contrario de "0 CARAS"?

d) ¿Cuál es la probabilidad del suceso "ALGUNA CARA"?

a) No. El suceso {1} tiene más probabilidad que los sucesos {0} y {2}.

b) $$\left.\begin{array}{l} \text{P [0 CARAS]} = \text{P [0]} = \frac{1}{4} \\ \text{P [1 CARA]} = \text{P [1]} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \text{P [2 CARAS]} = \text{P [2]} = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \text{P(0)} + \text{P(1)} + \text{P(2)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

c) S = "0 CARAS"; S' = "AL MENOS UNA CARA"

d) P [AL MENOS UNA CARA] = 1 – P [NINGUNA CARA] = $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

5 **Si señalamos al azar una página de este libro, ¿qué probabilidad hay de que sea una página de la unidad de PROBABILIDAD?**

El libro tiene 264 páginas y el tema de probabilidad tiene 18 páginas.

P [PÁGINA SEA DEL TEMA DE PROBABILIDAD] = $\frac{18}{264} = \frac{3}{44} \approx 0{,}07$

6 **En un sorteo de lotería observamos la cifra en que termina el “gordo”.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe los sucesos: A = MENOR QUE 5 ; B = PAR

c) Halla los sucesos $A \cup B$; $A \cap B$; A'; B'; $A' \cap B'$.

a) El espacio muestral es: E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

b) A = “MENOR QUE 5” = {0, 1, 2, 3, 4}

B = “PAR” = {0, 2, 4, 6, 8}

c) $A \cup B$ = {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8}

$A \cap B$ = {0, 2, 4}

A' = {5, 6, 7, 8, 9}

B' = {1, 3, 5, 7, 9}

$A' \cap B'$ = {5, 7, 9}

7 **En la lotería primitiva se extraen bolas numeradas del 1 al 49. Calcula la probabilidad de que la primera bola extraída:**

a) Sea un número de una sola cifra.

b) Sea un número múltiplo de 7.

c) Sea un número mayor que 25.

a) $P[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] = \dfrac{9}{49}$

b) $P[7, 14, 21, 28, 35, 42, 49] = \dfrac{7}{49} = \dfrac{1}{7}$

c) $P[26, 27, 28, \ldots, 49] = \dfrac{24}{49}$

8 **Lanzamos dos dados y anotamos la diferencia entre la mayor y la menor puntuación. Completa la tabla y calcula la probabilidad de que la diferencia sea:**

a) 0 **b) 5** **c) 2 como máximo.**

a) 0 $\rightarrow$ $P[\text{DIFERENCIA SEA } 0] = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

b) 5 $\rightarrow$ $P[\text{DIFERENCIA SEA } 5] = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

c) 2 como máximo:

$P[\text{DIFERENCIA SEA 2 O MENOS}] = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	**0**	1	0	1	0	1
⚁	**1**	0	1	2	3	4
⚂	2	1	0	1	2	3
⚃	3	2	1	**0**	1	**2**
⚄	4	3	2	1	0	1
⚅	5	4	3	2	1	0

9 **Lanzamos dos dados. Llamamos A, B y C a los siguientes sucesos:**

A: La suma de puntos es 5.

B: En uno de los dados ha salido 4.

C: En los dos dados salió el mismo resultado.

a) Escribe los sucesos elementales de A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \cap C$.

b) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos del apartado a).

a) $A = \{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)\}$

$B = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$A \cup B = \{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

$A \cap B = \{(4, 1), (1, 4)\}$

$A \cap C = \emptyset$

b) $P[A] = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

$P[B] = \dfrac{11}{36}$

$P[C] = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$P[A \cup B] = \dfrac{13}{36}$

$P[A \cap B] = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

$P[A \cap C] = 0$

10 **Se extrae una carta de una baraja española. Di cuál es la probabilidad de que sea:**

a) REY o AS.

b) FIGURA y OROS.

c) NO sea ESPADAS.

a) $P[\text{REY O AS}] = \dfrac{8}{40} = \dfrac{1}{5}$

b) $P[\text{FIGURA Y OROS}] = P(\text{FIGURA DE OROS}) = \dfrac{3}{40} = \dfrac{1}{10}$

c) $P[\text{NO SEA ESPADAS}] = \dfrac{30}{40} = \dfrac{3}{4}$

Página 253

PIENSA Y RESUELVE

11 **Una urna contiene 100 bolas numeradas así: 00, 01, 02 … 99. Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la cifra de las unidades del número que tiene cada bola.**

Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) $x = 3$ **b)** $y = 3$ **c)** $x \neq 7$ **d)** $x > 5$

e) $x + y = 9$ **f)** $x < 3$ **g)** $y > 7$ **h)** $y < 7$

DECENAS \ UNIDADES	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

a) $x = 3 \;\rightarrow\; P[x = 3] = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

b) $y = 3 \;\rightarrow\; P[y = 3] = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

c) $x \neq 7 \;\rightarrow\; P[x \neq 7] = \dfrac{90}{100} = \dfrac{9}{10}$

d) $x > 5 \;\rightarrow\; P[x > 5] = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$

e) $x + y = 9 \;\rightarrow\; P[x + y = 9] = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

f) $x < 3 \;\rightarrow\; P[x < 3] = \dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{10}$

g) $y > 7 \;\rightarrow\; P[y > 7] = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$

h) $y < 7 \;\rightarrow\; P[y < 7] = \dfrac{7}{100} = \dfrac{7}{10}$

12 **En un centro escolar hay 1000 alumnos y alumnas repartidos así:**

	CHICOS	CHICAS
USAN GAFAS	147	135
NO USAN GAFAS	368	350

(Este tipo de tabla numérica se llama tabla de contingencia).

Se elige al azar uno de ellos. Calcula la probabilidad de que:

a) Sea chico **b) Sea chica** **c) Use gafas**

d) No use gafas **e) Sea una chica con gafas**

a) Sea chico → $P[\text{SEA CHICO}] = \dfrac{147 + 368}{1\,000} = 0{,}515$

b) Sea chica → $P[\text{SEA CHICA}] = 1 - P[\text{SEA CHICO}] = 1 - 0{,}515 = 0{,}485$

c) Use gafas → $P[\text{USE GAFAS}] = \dfrac{147 + 135}{1\,000} = 0{,}282$

d) No use gafas → $P[\text{NO USE GAFAS}] = 1 - P[\text{USE GAFAS}] = 1 - 0{,}282 = 0{,}718$

e) Sea una chica con gafas → $P[\text{SEA UNA CHICA CON GAFAS}] = \dfrac{135}{1\,000} = 0{,}135$

13 **En una empresa hay 200 empleados, 100 hombres y 100 mujeres. Los fumadores son 40 hombres y 35 mujeres. Si elegimos un empleado al azar, calcula la probabilidad de que sea hombre y no fume.**

☛ ***Haz una tabla de contingencia como la del ejercicio anterior.***

	HOMBRES	MUJERES
FUMADORES	40	35
NO FUMADORES	60	65

$P[\text{HOMBRE Y NO FUME}] = \dfrac{60}{200} = \dfrac{3}{10}$

14 **En una bolsa hay bolas de colores, pero no sabemos cuántas ni qué colores tienen. En 100 extracciones (devolviendo la bola cada vez) hemos obtenido bola blanca en 41 ocasiones, bola negra en 19, bola verde en 18 y bola azul en 22. Al hacer una nueva extracción, di qué probabilidad asignarías a:**

a) Sacar bola blanca. **b) No sacar bola blanca.**

c) Sacar bola verde o azul. **d) No sacar ni bola negra ni azul.**

Si en la bolsa hay 22 bolas, ¿cuántas estimas que habrá de cada uno de los colores?

Como se han hecho 100 extracciones:

$P[\text{BOLA BLANCA}] = \dfrac{41}{100} = 0{,}41$ $P[\text{BOLA VERDE}] = \dfrac{18}{100} = 0{,}18$

$P[\text{BOLA NEGRA}] = \dfrac{19}{100} = 0{,}19$ $P[\text{BOLA AZUL}] = \dfrac{22}{100} = 0{,}22$

a) P[BOLA BLANCA] = 0,41

b) P[NO BOLA BLANCA] = 1 – 0,41 = 0,59

c) P[BOLA VERDE O AZUL] = 0,18 + 0,22 = 0,4

d) P[NO BOLA NEGRA NI AZUL] = 1 – (0,19 + 0,22) = 0,59

Si hay 22 bolas:

- El 41% son blancas → 22 · 0,41 = 9 bolas blancas.
- El 19% son negras → 22 · 0,19 = 4 bolas negras.
- El 18% son verdes → 22 · 0,18 = 4 bolas verdes.
- El 22% son azules → 22 · 0,22 = 5 bolas azules.

15 **Ana tira un dado y su hermana Eva lo tira después. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Eva sea superior a la de Ana?**

☛ ***Haz la tabla de posibles resultados.***

EVA \ ANA	1	2	3	4	5	6
1	1–1	1–2	1–3	1–4	1–5	1–6
2	2–1	2–2	2–3	2–4	2–5	2–6
3	3–1	3–2	3–3	3–4	3–5	3–6
4	4–1	4–2	4–3	4–4	4–5	4–6
5	5–1	5–2	5–3	5–4	5–5	5–6
6	6–1	6–2	6–3	6–4	6–5	6–6

P[PUNTUACIÓN DE EVA SUPERIOR A LA DE ANA] $= \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

16 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

Página 254

17 **Resuelve el problema anterior rellenando la tabla adjunta:**

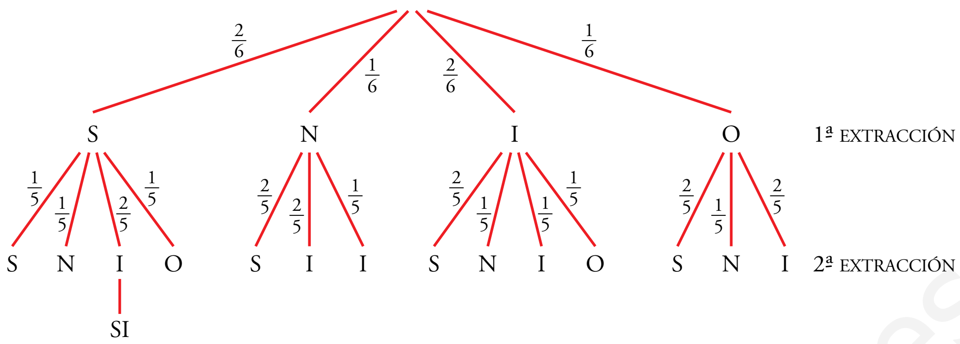
	S	S	N
I	SI	SI	NI
O	SO	SO	NO
O	SO	SO	NO

a) P[“SI”] $= \dfrac{2}{9}$

b) P[“NO”] $= \dfrac{2}{9}$

18 **En una bolsa tenemos las letras S, S, N, I, I, O. Sacamos dos letras. ¿Cuál es la probabilidad de que con ellas se pueda escribir SI?**

Razonamos con un diagrama en árbol:



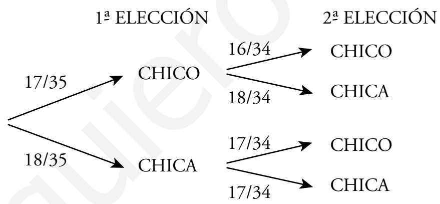
$P[\text{“SI”}] = \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{15}$

19 **En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase. Calcula la probabilidad de que:**

a) Los dos sean chicos.

b) Sean dos chicas.

c) Sean un chico y una chica.



a) $P[\text{DOS CHICOS}] = \dfrac{17}{35} \cdot \dfrac{16}{34} = \dfrac{8}{35}$

b) $P[\text{DOS CHICAS}] = \dfrac{18}{35} \cdot \dfrac{17}{34} = \dfrac{9}{35}$

c) $P[\text{UN CHICO Y UNA CHICA}] = \dfrac{17}{35} \cdot \dfrac{18}{34} + \dfrac{18}{35} \cdot \dfrac{17}{34} = \dfrac{18}{35}$

20 **En un laboratorio se somete un nuevo medicamento a tres controles. La probabilidad de pasar el primero es 0,89; la de pasar el segundo es 0,93 y la de pasar el tercero es 0,85.**

¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo producto pase las tres pruebas?

Las tres pruebas son independientes una de otra.

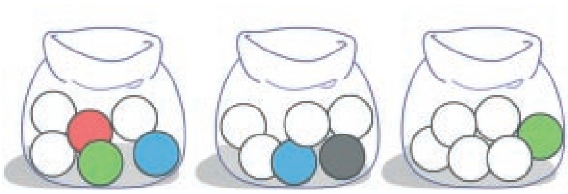
$P[\text{PASAR EL PRIMER CONTROL}] = 0{,}89$

$P[\text{PASAR EL SEGUNDO CONTROL}] = 0{,}93$

$P[\text{PASAR EL TERCER CONTROL}] = 0{,}85$

$P[\text{PASAR LOS TRES CONTROLES}] = 0{,}89 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}85 = 0{,}703$

21 ¿Cuál es la probabilidad de obtener bola blanca al elegir al azar una de estas bolsas y extraer de ella una bola?



$$\begin{array}{llll} \xrightarrow{1/3} & \text{BOLSA 1} & \xrightarrow{3/6} & \text{BLANCA} \\ \xrightarrow{1/3} & \text{BOLSA 2} & \xrightarrow{4/6} & \text{BLANCA} \\ \xrightarrow{1/3} & \text{BOLSA 3} & \xrightarrow{5/6} & \text{BLANCA} \end{array}$$

$$P[\text{BLANCA}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{5}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

22 Si tiramos dos dados:

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener en los dos la misma puntuación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 6 en alguno de ellos?

c) ¿Y la de obtener en uno de ellos mayor puntuación que en el otro?

	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

a) $P[\text{MISMA PUNTUACIÓN}] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{AL MENOS UN } 6] = \frac{11}{36}$

c) $P[\text{MAYOR PUNTUACIÓN EN UNO QUE EN OTRO}] = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

23 Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38. Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?

$$\begin{array}{llll} & \underline{\text{1ª CHINCHETA}} & & \underline{\text{2ª CHINCHETA}} \\ \xrightarrow{0,38} & \text{HACIA ARRIBA} & \xrightarrow{0,38} & \text{HACIA ARRIBA} \\ & & \xrightarrow{0,62} & \text{HACIA OTRO SITIO} \\ \xrightarrow{0,62} & \text{HACIA OTRO SITIO} & \xrightarrow{0,38} & \text{HACIA ARRIBA} \\ & & \xrightarrow{0,62} & \text{HACIA OTRO SITIO} \end{array}$$

$$P[\text{DISTINTA FORMA}] = 0,38 \cdot 0,62 + 0,62 \cdot 0,38 = 0,47$$

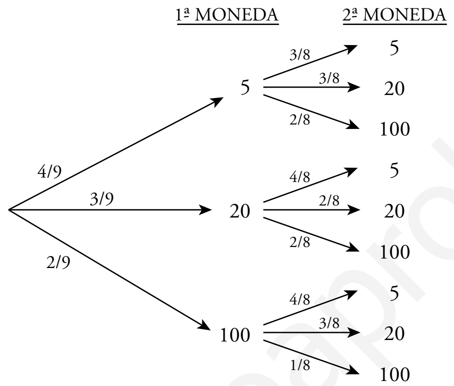
24 **Javier tiene en su monedero 4 monedas de cinco céntimos, 3 de veinte y 2 de un euro. Saca dos monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?**

a) Que las dos sean de cinco céntimos.

b) Que ninguna sea de un euro.

c) Que saque 1,20 €.

En el diagrama de árbol, las monedas aparecen en céntimos. 1 € = 100 cent.



a) $P[\text{DOS DE 5 CENT.}] = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{6}$

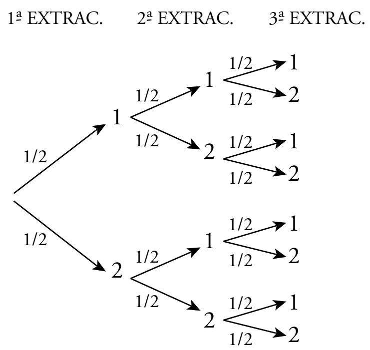
b) $P[\text{NINGUNA DE 1 €}] = \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{8}\right) + \dfrac{3}{9}\left(\dfrac{4}{8} + \dfrac{2}{8}\right) = \dfrac{7}{9} \cdot \dfrac{6}{8} = \dfrac{7}{12}$

c) $P[\text{SACAR 1,20 €}] = \text{P}[100, 20] = \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{6}$

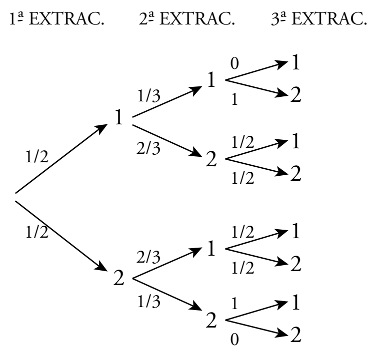
25 **En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones. Calcula la probabilidad de que el número formado por las tres bolas sea el 121, suponiendo que:**

a) La bola se reintegra a la bolsa

b) La bola no se devuelve a la bolsa.

a) 

$P[121] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

b) 

$P[121] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

26 **Un jugador de baloncesto suele acertar el 75% de sus tiros desde el punto de lanzamiento de personales. Si acierta el primer tiro, puede tirar de nuevo.**

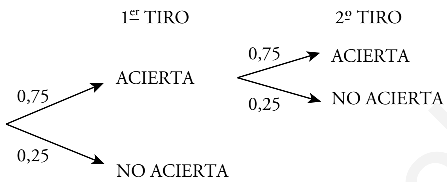
Calcula la probabilidad de que:

a) Haga dos puntos

b) Haga un punto

c) No haga ningún punto

P[ACERTAR] = 0,75



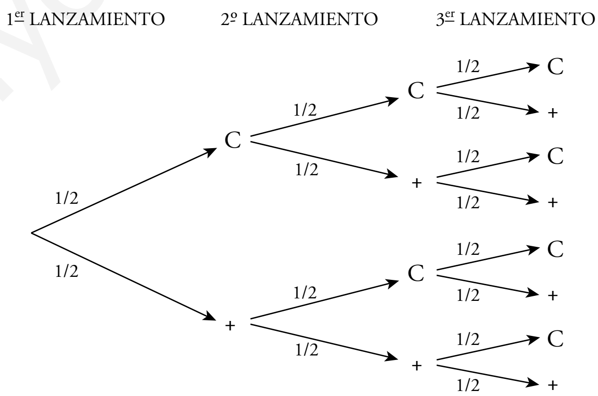
a) P[DOS PUNTOS] = $0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}56$

b) P[UN PUNTO] = $0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}19$

c) P[NO HAGA NINGÚN PUNTO] = 0,25

27 **Matías y Elena juegan con una moneda. La lanzan tres veces y si sale dos veces cara y una vez cruz o dos veces cruz y una vez cara, gana Matías. Si sale tres veces cara o tres veces cruz, gana Elena.**

Calcula la probabilidad que tiene cada uno de ganar.



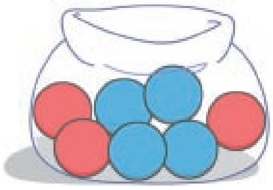
P[GANE MATÍAS] = P[C, C, +) + P[C, +, C] + P[+, C, C] + P[+, +, C] +

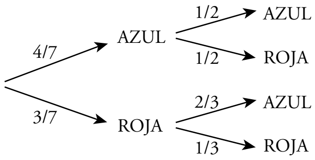
$$+ P[+, C, +] + P[C, +, +] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$P[\text{GANE ELENA}] = P[C, C, C] + P[+, +, +] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

28 **Se extraen dos bolas de esta bolsa.**

Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.





$P\,[\text{AZUL Y AZUL}] = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$

$P\,[\text{ROJA Y ROJA}] = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$

$P\,[\text{AMBAS DEL MISMO COLOR}] = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

29 **En una bolsa tenemos tres bolas marcadas con los números 1, 2 y 3, respectivamente. Extraemos una bola, anotamos su número y la devolvemos a la bolsa. Extraemos otra bola, observamos su número y lo sumamos al anterior.**

¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 4?

	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

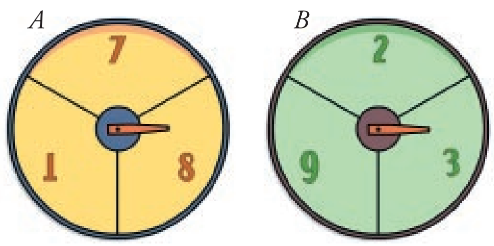
$P\,[\text{SUMA SEA } 4] = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Página 255

PROFUNDIZA

30 **Se hace girar la flecha en cada una de estas ruletas, y gana la que consiga la puntuación más alta.**

Calcula la probabilidad de que gane *A* y la de que gane *B*.



		A		
		1	7	8
	2	1-2	7-2	8-2
B	3	1-3	7-3	8-3
	9	1-9	7-9	8-9

$P\,[\text{GANE A}] = \frac{4}{9}$

$P\,[\text{GANE B}] = \frac{5}{9}$

31 **En una urna marcada con la letra A hay una bola roja y una negra. En otra urna, que lleva la letra B, hay una bola azul, una verde y una blanca. Se lanza un dado; si sale par, se saca una bola de la urna A, y si sale impar, de la urna B.**

a) Escribe todos los resultados posibles de esta experiencia aleatoria.

b) ¿Tiene la misma probabilidad el suceso PAR y ROJA que el IMPAR y VERDE?

c) Calcula la probabilidad de todos los sucesos elementales y halla su suma. ¿Qué obtienes?

a) El espacio muestral es:

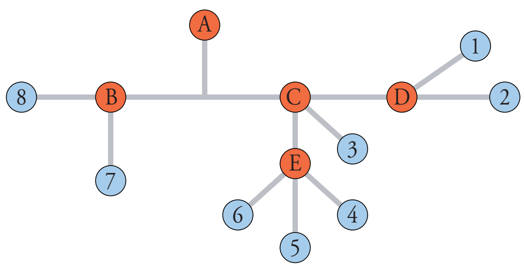
E = {(PAR, ROJA), (PAR, NEGRA), (IMPAR, AZUL), (IMPAR, VERDE), (IMPAR, BLANCA)}

b)
$$\left.\begin{aligned} &P[\text{PAR, ROJA}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ &P[\text{IMPAR, VERDE}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}\right\} \to \text{Son distintas}$$

c)
$$\left.\begin{aligned} &P[\text{PAR, ROJA}] = \frac{1}{4} \\ &P[\text{PAR, NEGRA}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ &P[\text{IMPAR, AZUL}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ &P[\text{IMPAR, VERDE}] = \frac{1}{6} \\ &P[\text{IMPAR, BLANCA}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}\right\} \to \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Se obtiene $P[E] = 1$

32 **Esto es un plano de parte de la red de cercanías de una ciudad. En cada nudo es igual de probable que el tren continúe por cualquiera de los caminos que salen de él.**

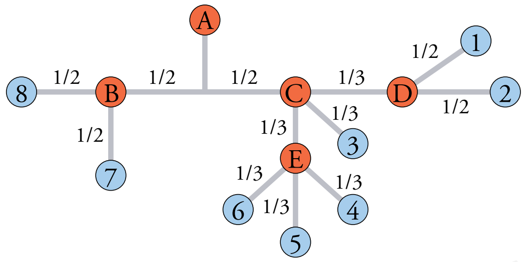


Un viajero sube a un tren en A sin saber a dónde se dirige.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a la estación 5?

b) Calcula la probabilidad de llegar a cada una de las estaciones.

a) $P[5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$



b) $P[1] = P[2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P[3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

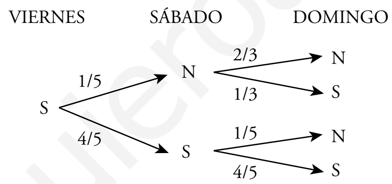
$P[4] = P[5] = P[6] = \frac{1}{18}$

$P[7] = P[8] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

33 **En cierto lugar se sabe que si hoy hace sol, la probabilidad de que mañana también lo haga es 4/5. Pero si hoy está nublado, la probabilidad de que mañana lo siga estando es 2/3.**

Si hoy es viernes y hace sol, ¿cuál es la probabilidad de que el domingo también haga sol?

Hacemos un diagrama en árbol:



P[DOMINGO SOL] = P[VIERNES S, SÁBADO N, DOMINGO S] +

+ P[VIERNES S, SÁBADO S, DOMINGO S] =

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{15} + \frac{16}{25} = \frac{53}{75} = 0{,}7$$

34 **En una urna tenemos 100 bolas numeradas del 1 al 100.**

Se extrae una bola al azar y se anota su número, x.

Considera los siguientes sucesos:

A: x es divisible por 5.

B: x termina en 0.

C: x es par.

Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: A; B; C; $A \cap C$; $B \cup C$; $A \cap B'$; $B \cap C'$

Hay 20 bolas múltiplos de 5.

Hay 10 bolas que terminan en 0.

Hay 50 bolas pares.

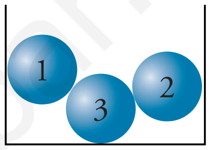
$P[A] = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$; $P[B] = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; $P[C] = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$;

$P[A \cap C] = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; $P[B \cup C] = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

B': x no termina en 0 $\qquad$ C': x es impar

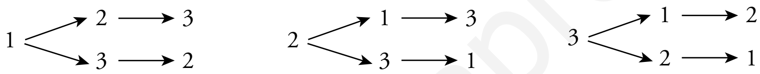
$P[A \cap B'] = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ $\qquad$ $P[B \cap C'] = P(\varnothing) = 0$

35 **En el interior de una urna hay tres bolas marcadas con los números 1, 2 y 3, como indica la figura.**



Se extrae una bola al azar, después otra y luego la tercera.

Calcula la probabilidad de que la primera no sea la que tiene el 1, la segunda no tenga el 2 y la tercera no lleve el 3.

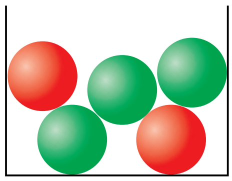


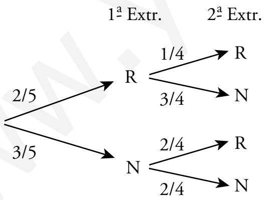
$P[1^{\text{a}} \text{ NO } 1, \ 2^{\text{a}} \text{ NO } 2 \text{ Y LA } 3^{\text{a}} \text{ NO } 3] = P[2, 3, 1] + P[3, 1, 2] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

36 **¿Cuál de estos dos sucesos A y B tiene mayor probabilidad?**

A: Obtener dos bolas rojas en dos extracciones sin devolver la bola a la urna.

B: Obtener tres bolas verdes en tres extracciones sin devolver la bola a la urna.





$P[A] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$P[B] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$

Ambos sucesos tienen la misma probabilidad.