FUNCIONES

1 **Dada la función** $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ **indica su dominio y su recorrido y dibújala.**

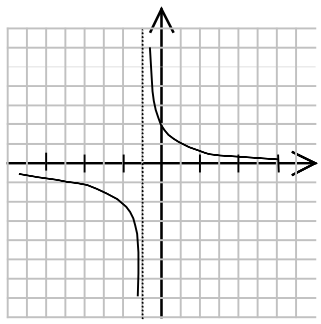
Solución:

Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

Rec(f) = $\mathbb{R} - \{0\}$

Tomando algunos valores:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-1/3	-1	1	1/3	1/5



2 **Dada la función:** $f(x) = \frac{1}{3x+6}$ **indica su dominio y su recorrido y dibújala.**

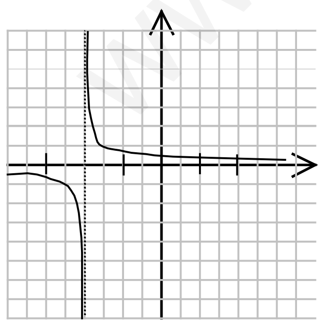
Solución:

Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-2\}$

Rec(f) = $\mathbb{R} - \{0\}$

Tomando algunos valores:

x	-4	-3	-1	0	1
f(x)	-1/6	-1/3	1/3	1/6	1/9



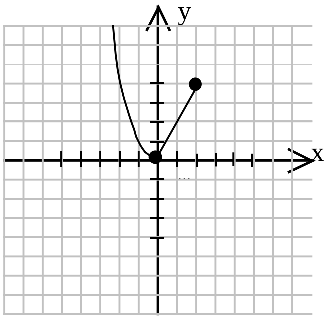
3 **Representa las siguientes funciones e indica su dominio y recorrido:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ si } x \in (-\infty, 0) \\ 2x, \text{ si } x \in [0,2] \end{cases}$

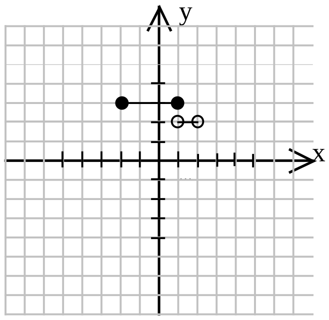
b) $g(x) = \begin{cases} 3, \text{ si } x \in [-2,1] \\ 2, \text{ si } x \in (1,2) \end{cases}$

Solución:

a)



b)



a) Dom(f) = $(-\infty,2]$, Rec(f) = $[0,+\infty)$

b) Dom(g) = $[-2,2)$, Rec(g) = $\{2,3\}$

4 **Dada la función: $f(x)=\sqrt{2x+1}$ indica su dominio, su recorrido y dibújala.**

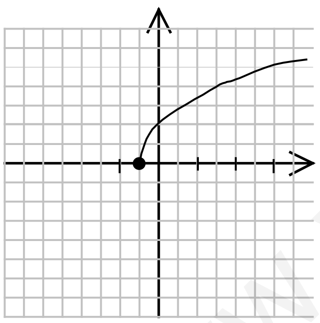
Solución:

Dom(f) = $[-\frac{1}{2},4)$

Rec(f) = [0, 4)

Tomando algunos valores:

x	-1/2	0	1,5	2	3
f(x)	0	1	2	2,2	2,6



5 **Representa las siguientes funciones a trozos e indica su dominio y recorrido:**

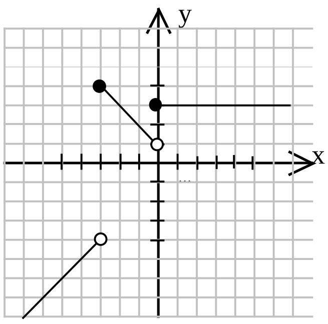
$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{si } x<-3 \\ -x+1, & \text{si } -3\le x<0 \\ 3, & \text{si } 0\le x<\infty \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x<-2 \\ 3, & \text{si } -2\le x<1 \\ \sqrt{x}, & \text{si } 1\le x \end{cases}$$

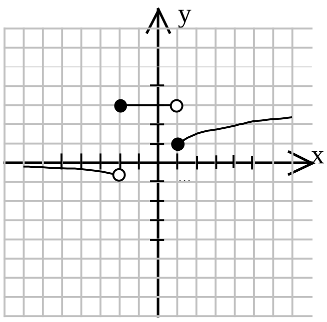
a) **b)**

Solución:

a)



b)

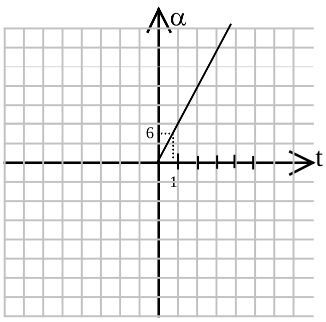


a) Dom(f) = R, Rec(f) = $(-\infty,-4) \cup (1,4]$

b) Dom(g) = R, Rec(g) = $\left[-\frac{1}{2},0\right) \cup [1,+\infty)$

6 **El segundero de un reloj analógico avanza 6º cada segundo. Escribe una función que exprese el ángulo girado (en grados) en función del tiempo (en segundos) y dibújala.**

Solución:
$\alpha = 6t$

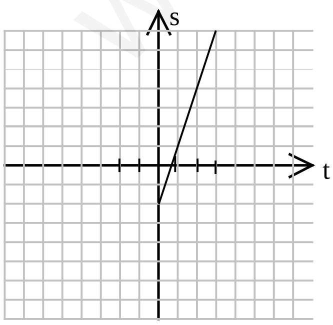


7 **Un ciclista participa en una carrera recorriendo 3 km cada minuto. Teniendo en cuenta que no partió del origen sino 2 km por detrás representa en una tabla el recorrido durante los tres primeros minutos. Escribe la función que expresa los kilómetros en función del tiempo en minutos y dibújala.**

Solución:

Tiempo en min.	0	1	2	3
km recorridos	-2	1	4	7

s (t) = 3t - 2



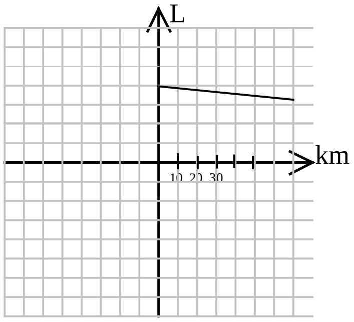
8 **Un ciclista bebe 1/2 litro de agua cada 10 km de recorrido. Si en el coche de equipo llevan un bidón de 40 litros, haz una tabla que indique su variación y escribe la función que la representa.**

Solución:

Litros	40	39,5	39	37	35
km	0	10	20	60	100

$L = L_0 - \frac{\Delta L}{\Delta s} s; \quad L = 40 - \frac{1/2}{10} s; \quad L = 40 - \frac{1}{20} s$

s = distancia en km.



1 **Comprobar si $f(x) = 2x$ y $g(x) = \frac{x}{2}$ son funciones recíprocas entre sí.**

Solución:

Como $(f \circ g)(x) = 2\frac{x}{2} = x$ es la función identidad, entonces sí son recíprocas.

2 **Calcula f · g e indica su dominio, para:**

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2x}, \; g(x) = \frac{x^2 - x}{x+1}$

b) $f(x) = x^2 - x - 6, \; g(x) = \frac{x-2}{2x-6}$

Solución:

a) $(f \cdot g)(x) = \frac{(x^2 - x)\sqrt{x+1}}{2x(x+1)}$. Dom(f·g) = $R - \{-1, 0\}$.

b) $(f \cdot g)(x) = \frac{2x^3 - 8x^2 - 6x + 36}{2x - 6}$. Dom(f·g) = $R - \{3\}$.

3 **Dados $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{2x+1}$, realiza $f \circ g$ y $g \circ f$ y calcula el dominio en cada caso.**

Solución:

$(f \circ g)(x) = 2x + 1 - 1 = 2x$. Dom($f \circ g$) = R.

$(g \circ f)(x) = \sqrt{2(x^2 - 1) + 1} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$. Dom($g \circ f$) = R.

4 **Dados $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{2-x}{3x-6}$, realiza f - g, f · g y f / g y calcula el dominio en cada caso.**

Solución:

$(f-g)(x)=\frac{3x^2-2x-8}{3x-6}$. Dom(f -g) = $R-\{2\}$.

$(f\cdot g)(x)=\frac{-x^2+x+2}{3x-6}$. Dom(f·g) = $R-\{2\}$.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{3x^2-3x-6}{2-x}$. Dom(f/g) = $R-\{2\}$.

5 **Calcula, si es posible, la función recíproca de**

a) $\mathbf{f(x)=\frac{1-3x}{6}}$ **b)** $\mathbf{g(x)=\frac{7-x}{x}}$ **c)** $\mathbf{h(x)=\frac{3}{2-2x}}$ **d)** $\mathbf{i(x)=\sqrt[3]{x-2}}$

Solución:

a) $f^{-1}(x)=\frac{1-6x}{3}$.

b) $g^{-1}(x)=\frac{7}{x+1}$.

c) $h^{-1}(x)=\frac{2x-3}{2x}$.

d) $i^{-1}(x)=x^3+3$.

6 **Calcula, si es posible, la función recíproca de:**

a) $\mathbf{f(x)=3x-2}$ **b)** $\mathbf{g(x)=\frac{x-3}{4x}}$ **c)** $\mathbf{h(x)=-x+5}$ **d)** $\mathbf{i(x)=x^2+5x}$

Solución:

a) $f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3}$.

b) $g^{-1}(x)=\frac{3}{1-4x}$.

c) $h^{-1}(x)=5-x$.

d) No es posible, pues i(x) no es inyectiva.

7 **Expresa cada función como composición de funciones:**

a) $\mathbf{h(x)=5\sqrt{x}+5}$ **b)** $\mathbf{i(x)=\sqrt{x^2+3}}$ **c)** $\mathbf{j(x)=5x^4+2x^2+6}$

Solución:

a) $h(x)=(f\circ g)(x)$ con $f(x)=5x+5, g(x)=\sqrt{x}$.

b) $i(x)=(f\circ g)(x)$ con $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=x^2+3$.

c) $j(x)=(f\circ g)(x)$ con $f(x)=5x^2+2x+6, g(x)=x^2$.

8 **Calcula $f \circ g$ y $g \circ f$ e indica sus dominios:**

a) $f(x) = \dfrac{2}{3x},\ g(x) = \dfrac{2x}{3}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+1},\ g(x) = 3$

Solución:

a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{2}{3\dfrac{2x}{3}} = \dfrac{1}{x}$. Dom($f \circ g$) = $R - \{0\}$.

$(g \circ f)(x) = \dfrac{2\dfrac{2}{3x}}{3} = \dfrac{4}{9x}$. Dom($g \circ f$) = $R - \{0\}$.

b) $(f \circ g)(x) = \sqrt{3^2+1} = \sqrt{10}$. Dom($f \circ g$) = R.

$(g \circ f)(x) = 3$. Dom($g \circ f$) = R.

1 **Calcula la tasa de variación media de $f(x) = x^2,\ g(x) = x^3$ en $\left[0,\dfrac{1}{2}\right], \left[\dfrac{1}{2},1\right], [1,2]$. Ordena las funciones según su tasa de variación media.**

Solución:

$TVM_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} f = \dfrac{\frac{1}{4}-0}{\frac{1}{2}-0} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, $TVM_{\left[\frac{1}{2},1\right]} f = \dfrac{1-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$, $TVM_{[1,2]} f = \dfrac{4-1}{2-1} = 3$.

$TVM_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} g = \dfrac{\frac{1}{8}-0}{\frac{1}{2}-0} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$, $TVM_{\left[\frac{1}{2},1\right]} g = \dfrac{1-\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$, $TVM_{[1,2]} g = \dfrac{8-1}{2-1} = 7$.

En el primer intervalo la función f crece más que la g, en el segundo y tercer intervalo crece más la función g.

2 Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo [x, x+1]:

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = x$ d) $f(x) = x^4$

Solución:

a) $\dfrac{(x+1)^2 - x^2}{x+1-x} = \dfrac{x^2+2x+1-x^2}{1} = 2x+1$

b) $\dfrac{(x+1)^3 - x^3}{x+1-x} = \dfrac{x^3+3x^2+3x+1-x^3}{1} = 3x^2+3x+1$

c) $\dfrac{x+1-x}{x+1-x} = \dfrac{1}{1} = 1$

$$\frac{(x+1)^4-x^4}{x+1-x}=\frac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1-x^3}{1}=4x^3+6x^2+4x+1$$

d)

3 Al medir el índice de variación del número de nacimientos en España se ha observado que ha habido una notable disminución. Tomando como valor 100 el correspondiente al año 1990 se tiene:

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Índice	100	93,3	90,3	85	82,9	79,9	76,8	73,7	72,8	70	68,7

¿Cuál fue la disminución durante el primer lustro?

¿En qué trienio hubo un mayor descenso? Interpreta el signo del resultado.

Solución:

$$TVM_{[1990,1995]}=\frac{79{,}9-100}{1995-1990}=\frac{-21{,}1}{5}=-4{,}22.$$

$$TVM_{[1990,1993]}=\frac{85-100}{1993-1990}=-5,\quad TVM_{[1991,1994]}=\frac{82{,}9-93{,}3}{1994-1991}=-3{,}47,\quad TVM_{[1992,1995]}=\frac{79{,}9-90{,}3}{1995-1992}=-3{,}47,$$

$$TVM_{[1993,1996]}=\frac{76{,}8-85}{1996-1993}=-2{,}73,\quad TVM_{[1994,1997]}=\frac{73{,}7-82{,}9}{1997-1994}=-3{,}07,\quad TVM_{[1995,1998]}=\frac{72{,}8-79{,}9}{1998-1995}=-2{,}37,$$

$$TVM_{[1996,1999]}=\frac{70-76{,}8}{1999-1996}=-2{,}27,\quad TVM_{[1997,2000]}=\frac{68{,}7-73{,}7}{2000-1997}=-1{,}67.$$

El trienio en el que hubo más descenso fue en 1990-1993.

El signo negativo indica que es descenso en lugar de aumento.

4 **La ecuación de un movimiento es $e(t)=50+100t-5t^2$. ¿Para qué valor de t la velocidad media entre 0 y t se anula?**

Solución:

$$v=\frac{50+100t-5t^2-50}{t-0}=0\Rightarrow 100t-5t^2=0\Rightarrow\begin{cases}t=0 & \text{(no tiene sentido)}\\ t=20\end{cases}$$

5 **Calcula la tasa de variación media en [a,b] de f(x) = mx + n. ¿Qué observas? ¿Depende del resultado? ¿Qué nombre recibe?**

Solución:

$$\frac{mb+n-(ma+n)}{b-a}=\frac{mb-ma}{b-a}=\frac{m(b-a)}{b-a}=m$$

que no depende del resultado y coincide con la pendiente.

6 **Un móvil tiene por ecuación de su distancia $s(t)=t^2$. Hallar la velocidad media en los intervalos [1, 2], [1; 1,9], [1; 1,8], [1; 1,5], [1; 1,1], [1; 1,01] y [1; 1,001]. ¿Hacia qué número se acercan?**

Solución:

$$v_1=\frac{4-1}{2-1}=3,\quad v_2=\frac{3{,}61-1}{1{,}9-1}=2{,}91,\quad v_3=\frac{3{,}24-1}{1{,}8-1}=2{,}8,\quad v_4=\frac{2{,}25-1}{1{,}5-1}=2{,}5,\quad v_5=\frac{1{,}21-1}{1{,}1-1}=2{,}1,$$

$$v_6=\frac{1{,}0201-1}{1{,}01-1}=2{,}01,\quad v_7=\frac{1{,}002001-1}{1{,}001-1}=2{,}001.$$

Se acerca hacia el 2.

7 **Un coche cubre la distancia entre dos ciudades a una media de 60 km/h y la vuelta a una media de 40 km/h. ¿Cuál fue la velocidad media de su recorrido?**

Solución:
Si s es la distancia entre las dos ciudades, la distancia total es 2s. El tiempo invertido en la ida es s/60 y en la vuelta es s/40, por lo que la velocidad media es

$$v = \frac{2\,s}{\frac{s}{60} + \frac{s}{40}} = 48\,\text{km/h}.$$

8 **La edad de un fósil en función del porcentaje de carbono 14 viene dada por $\mathbf{f(x) = -5700\,\log_2 \frac{x}{100}}$. Calcula la tasa de variación media en [1,2] y en [80,90] e interpreta el signo y magnitud de ambas cantidades.**

Solución:

$$TVM_{[1,2]} = \frac{-5700\log_2\frac{2}{100} + 5700\log_2\frac{1}{100}}{2-1} = -5700\log_2\frac{1}{2} = 5700.$$

$$TVM_{[80,90]} = \frac{-5700\log_2\frac{90}{100} + 5700\log_2\frac{80}{100}}{90-80} = -570\log_2\frac{80}{90} = 96{,}86.$$

Ambas tasas son positivas, y por tanto indican un aumento de edad. La primera es mucho mayor, e indica que la antigüedad de un fósil aumenta mucho más en ese intervalo.

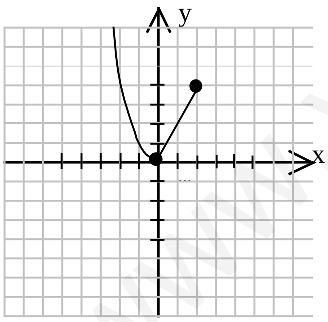
1 **Representa las siguientes funciones:**

a) $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ si } x \in (-\infty,0) \\ 2x, \text{ si } x \in [0,2] \end{cases}}$

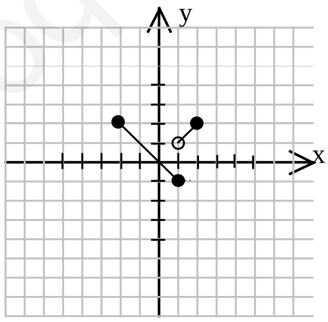
b) $\mathbf{g(x) = \begin{cases} -x, \text{ si } x \in [-2,1] \\ x, \text{ si } x \in (1,2] \end{cases}}$

Solución:

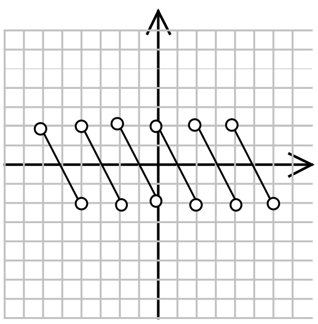
a)



b)



2 **Estudia la siguiente gráfica, indicando: dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, simetría, periodicidad crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.**



Solución:
Dominio: R - {…,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8…}; R - {2n}
Recorrido: (-2,2)
Corte eje OY: No tiene eje OX x ={-7,-5,-3,-1,1,3,5,7….}
Simetría: Es simétrica respecto del origen
Periodicidad: Es periódica con T = 2
Creciente: Nunca Decreciente: En tos los trozos de la función
Continuidad: la función no es continua en: x = {…,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8…}
Máximos: los valores máximos son los del principio del intervalo y los mínimos los del final.

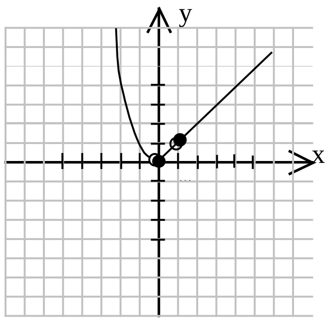
3 **Represента las siguientes funciones a trozos:**

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2}, & \mathbf{si\ \ x < 0} \\ \mathbf{|x|}, & \mathbf{si\ \ 0 \le x < 1} \\ \mathbf{x}, & \mathbf{si\ \ 1 \le x < \infty} \end{cases} \qquad \mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x - 1}, & \mathbf{si\ \ x < -3} \\ \mathbf{-x + 1}, & \mathbf{si\ \ -3 \le x < 0} \\ \mathbf{3}, & \mathbf{si\ \ 0 \le x < \infty} \end{cases}$$

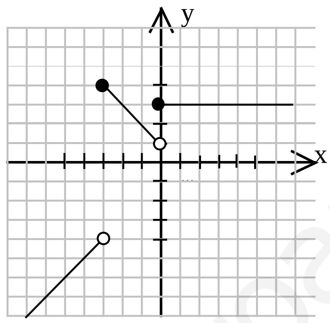
a) **b)**

Solución:

a)



b)



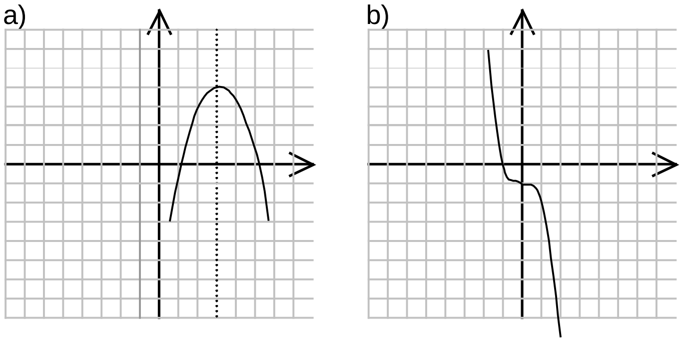
4 **La gráfica que se da a continuación indica la evolución de un valor de la bolsa (en el eje vertical en miles de euros por acción) durante una jornada. Estudia su dominio, recorrido, puntos de corte, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.**

Solución:
Dominio: [10,16)
Recorrido: [-2000, 6000)
Corte eje OY: No aparece en la gráfica (y = 0) por tanto no se puede decir el punto de corte. eje OX: 12:45 y 14:15
Simetría: No es simétrica
Periodicidad: No es periódica
Creciente: Intervalos 10:00h a 10:30h; 11:00h a 11:30h; 14:00h a 14:30h
Decreciente: Intervalos 11:30h a 12:00h; 12:30h a 13:00h; 14:30h a 16:00h
Continuidad: La función es continua en todo su dominio
Máximos: (11:30h , 6000), (14:30h , 4000)
Mínimos: (13:00h ,-2000)

5 **Las siguientes funciones no son simétricas ni respecto al origen ni respecto al eje OY, pero lo son con respecto a otros ejes u otros puntos. Dibújalas y di con respecto a que ejes o puntos son simétricas y sus zonas de crecimiento y decrecimiento.**

a) $y = x^2 + 2x + 1$ **b)** $y = x^3 + 1$

Solución:



a) Simétrica respecto a la recta x = 3
Creciente: x < 3
Decreciente: x > 3
b) Simétrica respecto al punto (0,-1)
Siempre decreciente.

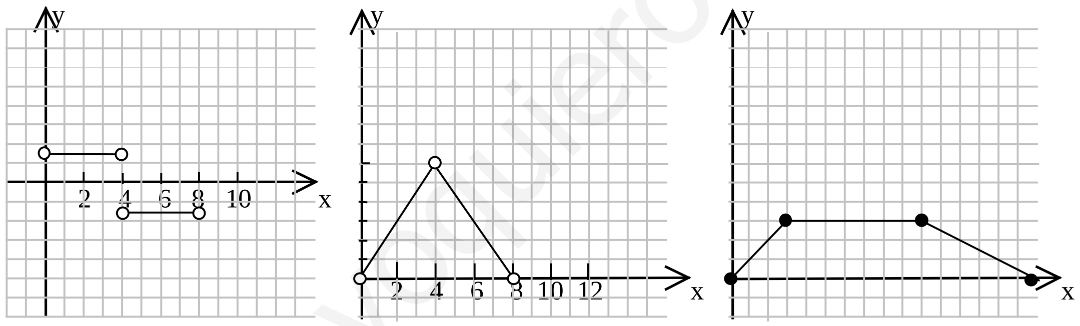
6 **¿Cuál de las siguientes gráficas representa a las funciones que se dan a continuación?**

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{3/2} & \mathbf{si\ x \in (0,4)} \\ \mathbf{-3/2} & \mathbf{si\ x \in (4,8)} \end{cases}$$

$$\mathbf{g(x)} = \begin{cases} \mathbf{x, \quad si\ 0 \le x \le 3} \\ \mathbf{3, \quad si\ 3 \le x \le 10} \\ \mathbf{\frac{-1}{2}x, \quad si\ 10 \le x \le 16} \end{cases}$$

a) **b)**

1 **2** **3**



Solución:
La función a) f (x) está representada en la gráfica 1
La función b) g (x) está representada en la gráfica 3

7 **Representa las siguientes funciones a trozos:**

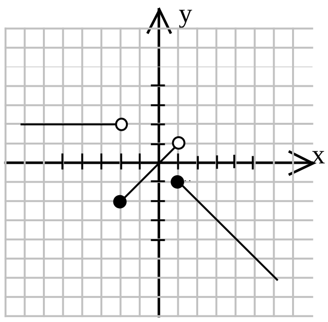
$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{2, \quad si\ x < -2} \\ \mathbf{x, \quad si\ -2 \le x < 1} \\ \mathbf{-x, \quad si\ 1 \le x < \infty} \end{cases}$$

$$\mathbf{g(x)} = \begin{cases} \mathbf{\frac{1}{x}, \ si\ x < -2} \\ \mathbf{3, \quad si\ -2 \le x < 1} \\ \mathbf{\sqrt{x}, \quad si\ 1 \le x} \end{cases}$$

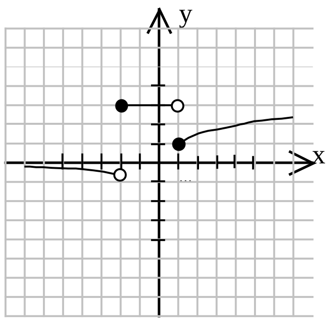
a) **b)**

Solución:

a)



b)



8 **¿Cuántas veces puede cortar una función al eje de las x? ¿Y al eje de las y?**

Solución:
Una función puede cortar al eje de las x todas las veces que quiera, es al eje de las y al que solo puede cortar en una ocasión ya que si lo cortara más veces no se trataría de una función. Las funciones periódicas que cortan al eje en alguna ocasión lo hacen repetidas veces (hasta infinito).
Solo una vez ya que si cortase al eje y en más de una ocasión al valor de x = 0 no le correspondería un único valor, que es una condición indispensable para que una gráfica defina una función.

1 **Indica para qué valores de x las siguientes funciones son continuas:**

a) $f(x) = \dfrac{-3}{x(x+3)(x-5)}$

b) $g(x) = \sqrt{(x-3)(x+2)}$

Solución:

a) $R - \{-3,0,5\}$ b) $(-\infty,-2] \cup [3,+\infty)$

2 **Indica para qué valores de x las siguientes funciones son continuas:**

a) $f(x) = \dfrac{4}{(x+1)(x-3)(x-7)}$

b) $g(x) = \dfrac{5}{x^4 - 1}$

Solución:

a) $R - \{-1,3,7\}$ b) $R - \{\pm 1\}$

3 **La función f de R^* en R dada por $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$, ¿es discontinua en x = 0? ¿De qué tipo es su discontinuidad?**

Solución:

Sí, pues no está definida en x = 0. Como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$, la discontinuidad es evitable.

4 **Indica para qué valores de x las siguientes funciones son continuas:**

a) $f(x) = \dfrac{2x+7}{(x-3)\sqrt{x+3}}$

$$\mathbf{g(x)=\frac{3}{x\sqrt{(x-1)(x+3)}}}$$

b)

Solución:

a) $(-3,3)\cup(3,+\infty)$ b) $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

5 **La suma de dos funciones no continuas en x_0, ¿puede ser continua en x_0? Pon algún ejemplo.**

Solución:

Sí, por ejemplo $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=-\frac{1}{x}$ son funciones discontinuas en x = 0, pero su suma es $(f+g)(x)=0$, que evidentemente es continua en todo R.

6 **Sea** $\mathbf{f(x)=\begin{cases}1 & si\ x>0\\ 0 & si\ x=0\\ -1 & si\ x<0\end{cases}}$**. Estudiar la continuidad de esta función llamada "función signo". ¿De qué tipo son sus discontinuidades?**

Solución:

En x = 0 tiene una discontinuidad de salto finito igual a 2.

7 **Sea** $\mathbf{f(x)=\begin{cases}1 & si\ x\in Q\\ 3 & si\ x\notin Q\end{cases}}$**. Estudia su continuidad y límites laterales en cada punto.**

Solución:

Para cualquier $a\in R$, los límites laterales $\lim_{x\to a^{\pm}} f(x)$ no existen, pues hay puntos infinitamente cercanos a x = a con ordenada 1 y también hay puntos infinitamente cercanos a x = a con ordenada 3 (tanto por la izquierda como por la derecha).
Por tanto, f(x) tiene, en todos los puntos, discontinuidad esencial o de tercera especie.

8 **Hallar los puntos de discontinuidad de f(x) y su tipo:**

a) $\mathbf{f(x)=\frac{|x|+x}{2}}$ **b)** $\mathbf{f(x)=E(x)}$

Solución:

a) No tiene puntos de discontinuidad, pues es suma de funciones continuas en R.
b) Es discontinua en todos los números enteros con una discontinuidad de salto finito igual a 1.

9 **Sea f una función tal que $f(x_0)\neq 0$. Si la función f y la función $f\cdot g$ son continuas en x_0, ¿debe ser g continua en x_0?**

Solución:

Sí, pues $g=\frac{f\cdot g}{f}$, y el cociente de dos funciones continuas en x_0 es otra función continua en x_0 (siempre que el denominador no se anule, como nos dice que $f(x_0)\neq 0$).

10 **Hallar los puntos de discontinuidad de f(x) y su tipo:**

a) $\mathbf{f(x)=\frac{|x|-x}{2}}$ **b)** $\mathbf{f(x)=x-E(x)}$

Solución:

a) No tiene puntos de discontinuidad, pues es suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$.
b) Es discontinua en todos los números enteros con una discontinuidad de salto finito igual a 1.