EJERCICIOS DE ECUACIONES : DE PRIMER GRADO, SEGUNDO GRADO, BICUADRADAS, CON X EN EL DENOMINADOR Y CON RADICALES

Ejercicio nº 1.-

Resuelve esta ecuación:

$$3(2x+1)-\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}\left[x+2-\frac{x+1}{3}\right]$$

Ejercicio nº 2.-

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2-16=0$

b) $\frac{(2x+5)(3x-1)}{3}+\frac{x^2+5}{2}=\frac{7x-5}{6}+1$

Ejercicio nº 3.-

Resuelve:

$$\frac{5(3x+1)}{4}-\frac{6x-1}{3}=\frac{-9x}{16}+\frac{2(9x+5)}{8}$$

Ejercicio nº 4.-

Resuelve estas ecuaciones:

a) $x^2+3x-4=0$

b) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}x=\frac{10}{9}$

Ejercicio nº 5.-

Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{2x+1}{5}-\frac{x+1}{3}=2\left[\frac{3x}{10}-\left(\frac{x}{6}-1\right)\right]$$

Ejercicio nº 6.-

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2-32=0$

b) $\frac{2x^2-1}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{1-x}{6}$

Ejercicio nº 7.-

Resuelve la ecuación:

$$\frac{3(x+1)}{4}-\frac{2x-1}{3}=\frac{-x}{3}+\frac{3(2x-1)}{4}$$

Ejercicio nº 8.-

Resuelve:

a) $18x^2-2=0$

b) $4(5x+1)^2-9=0$

Ejercicio nº 9.-

Resuelve:

$$\frac{2}{5}(x+5)-\frac{1}{2}(2x+1)=2-\frac{1}{4}(x-3)$$

Ejercicio nº 10.-

Resuelve estas ecuaciones:

a) $3x^2-243=0$

b) $2(2x+1)^2-3(2x-1)^2+5(2x-1)(2x+1)=0$

Ejercicio nº 11.-

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x^2-1}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{1-x}{6}$

b) $x^4-26x^2+25=0$

Ejercicio nº 12.-

Resuelve las ecuaciones:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=2$

b) $\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x}=\frac{-7}{4}$

Ejercicio nº 13.-

Resuelve:

a) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}x=\frac{10}{9}$

b) $x^4 - 48x^2 - 49 = 0$

Ejercicio nº 14.-

Resuelve las ecuaciones:

a) $2x+\sqrt{6x+1}=3$

b) $\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x-1}=\frac{15}{4}$

Ejercicio nº 15.-

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{(2x+5)(3x-1)}{3}+\frac{x^2+5}{2}=\frac{7x-5}{6}+1$

b) $3x^4-10x^2-8=0$

Ejercicio nº16.-

Resuelve:

a) $\sqrt{4x+1}-\sqrt{9x-2}=-1$

b) $\frac{1}{3x}+\frac{1}{x^2}=\frac{5}{12}$

Ejercicio nº 17.-

Resuelve la ecuacion:

$2x^4 + 9x^2 - 68 = 0$

Ejercicio nº 18.-

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x^4+9}-\sqrt{6x^2+1}=0$

b) $x+\frac{8}{2x}=5$

Ejercicio nº 19.-

Resuelve:

a) $2(2x+1)^2-3(2x-1)^2+5(2x-1)(2x+1)=0$

b) $4x^4-25x^2=0$

Ejercicio nº 20.-

Resuelve:

a) $\frac{81}{x^3}-1=2$

b) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=3$

Ejercicio nº 21.-

Resuelve:

a) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}x=\frac{10}{9}$

b) $x^4 - 48x^2 - 49 = 0$

Ejercicio nº 22.-

Resuelve las ecuaciones:

a) $2x+\sqrt{6x+1}=3$

b) $\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x-1}=\frac{15}{4}$

RESOLUCION DE LOS EJERCICIOS DE ECUACIONES : DE PRIMER GRADO, SEGUNDO GRADO, BICUADRADAS, CON X EN EL DENOMINADOR Y CON RADICALES

<u>Ejercicio nº 1.-</u>
Solución:

$$3(2x+1)-\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}\left[x+2-\frac{x+1}{3}\right]$$
$$6x+3-\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}\left[x+2-\frac{x+1}{3}\right]$$
$$6x+3-\frac{x+1}{2}=\frac{x}{2}+1-\frac{x+1}{6}$$
$$\frac{36x}{6}+\frac{18}{6}-\frac{3x+3}{6}=\frac{3x}{6}+\frac{6}{6}-\frac{x+1}{6}$$

$36x + 18 - 3x - 3 = 3x + 6 - x - 1$

$36x - 3x - 3x + x = 6 - 1 - 18 + 3$

$31x = -10$
$$x=\frac{-10}{31}$$

<u>Ejercicio nº 2.-</u>
Solución:

a) $4x^2-16=0 \quad \to \quad 4x^2=16 \quad \to \quad x^2=\dfrac{16}{4}=4 \quad \to \quad x=\pm\sqrt{4}\ \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=2 \end{cases}$

b) $$\frac{(2x+5)(3x-1)}{3}+\frac{x^2+5}{2}=\frac{7x-5}{6}+1$$
$$\frac{2(2x+5)(3x-1)}{6}+\frac{3x^2+15}{6}=\frac{7x-5}{6}+\frac{6}{6}$$

$12x^2 - 4x + 30x - 10 + 3x^2 + 15 - 7x + 5 - 6 = 0$

$15x^2 + 19x + 4 = 0 \quad \to \quad a = 15,\ b = 19,\ c = 4$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-19\pm\sqrt{361-240}}{30}=\frac{-19\pm\sqrt{121}}{30}=\frac{-19\pm 11}{30}\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\dfrac{-8}{30}=\dfrac{-4}{15} \end{cases}$$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>
Solución:

$$\frac{5(3x+1)}{4}-\frac{6x-1}{3}=\frac{-9x}{16}+\frac{2(9x+5)}{8}$$
$$\frac{15x+5}{4}-\frac{6x-1}{3}=\frac{-9x}{16}+\frac{18x+10}{8}$$
$$\frac{180x+60}{48}-\frac{96x-16}{48}=\frac{-27x}{48}+\frac{108x+60}{48}$$

$180x + 60 - 96x + 16 = -27x + 180x + 60$

$180x - 96x + 27x - 108x = 60 - 60 - 16$

$3x = -16$

$$x = \frac{-16}{3}$$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>
Solución:

a) $x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 1,\ b = 3,\ c = -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

b) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}x = \frac{10}{9}$

$$x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2x}{3} = \frac{10}{9} \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

$$x^2 = \frac{9}{9} \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>
Solución:

$$\frac{2x+1}{5} - \frac{x+1}{3} = 2\left[\frac{3x}{10} - \left(\frac{x}{6} - 1\right)\right]$$

$$\frac{2x+1}{5} - \frac{x+1}{3} = 2\left[\frac{3x}{10} - \frac{x}{6} + 1\right]$$

$$\frac{2x+1}{5} - \frac{x+1}{3} = \frac{6x}{10} - \frac{2x}{6} + 2$$

$$\frac{12x+6}{30} - \frac{10x+10}{30} = \frac{18x}{30} - \frac{10x}{30} + \frac{60}{30}$$

$12x + 6 - 10x - 10 = 18x - 10x + 60$

$12x - 10x - 18x + 10x = 60 - 6 + 10$

$-6x = 64$

$$x = \frac{64}{-6} = \frac{-32}{3} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-32}{3}$$

<u>Ejercicio nº 6.-</u>
Solución:

a) $2x^2 - 32 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 = 32 \quad \rightarrow \quad x^2 = \dfrac{32}{2} = 16$

$$x = \pm\sqrt{16} \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

b) $\dfrac{2x^2 - 1}{2} - \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{1-x}{6}$

$$\frac{6x^2 - 3}{6} - \frac{2x-2}{6} = \frac{1-x}{6}$$

$6x^2 - 3 - 2x + 2 = 1 - x$

$6x^2 - 2x + x - 3 + 2 - 1 = 0$

$6x^2 - x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 6,\ b = -1,\ c = -2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12} \begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \\ x_2 = \dfrac{-6}{12} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

<u>Ejercicio nº 7.-</u>
Solución:

$$\frac{3(x+1)}{4} - \frac{2x-1}{3} = \frac{-x}{3} + \frac{3(2x-1)}{4}$$

$$\frac{3x+3}{4} - \frac{2x-1}{3} = \frac{-x}{3} + \frac{6x-3}{4}$$

$$\frac{9x+9}{12} - \frac{8x-4}{12} = \frac{-4x}{12} + \frac{18x-9}{12}$$

$9x + 9 - 8x + 4 = -4x + 18x - 9$

$9x - 8x + 4x - 18x = -9 - 9 - 4$

$-13x = -22$

$x = \dfrac{-22}{-13} = \dfrac{22}{13} \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{22}{13}$

<u>Ejercicio nº 8.-</u>
Solución:

a) $18x^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 18x^2 = 2 \quad \rightarrow \quad x^2 = \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{9} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{9}} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1}{3} \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

b) $4(5x + 1)^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 4(25x^2 + 10x + 1) - 9 = 0$

$100x^2 + 40x + 4 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 100x^2 + 40x - 5 = 0$

$20x^2 + 8x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 20,\ b = 8,\ c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{40} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{40} = \frac{-8 \pm 12}{40} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-20}{40} = \dfrac{-1}{2} \\ x_2 = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Ejercicio nº 9.-
Solución:

$$\frac{2}{5}(x+5) - \frac{1}{2}(2x+1) = 2 - \frac{1}{4}(x-3)$$

$$\frac{2x+10}{5} - \frac{2x+1}{2} = 2 - \frac{x-3}{4}$$

$$\frac{8x+40}{20} - \frac{20x+10}{20} = \frac{40}{20} - \frac{5x-15}{20}$$

$8x + 40 - 20x - 10 = 40 - 5x + 15$

$8x - 20x + 5x = 40 + 15 - 40 + 10$

$-7x = 25$

$$x = \frac{25}{-7} = \frac{-25}{7} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-25}{7}$$

Ejercicio nº 10.-
Solución:

a) $3x^2 - 243 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = 243 \quad \rightarrow \quad x^2 = \dfrac{243}{3} = 81 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{81} \begin{cases} x_1 = -9 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

b) $2(2x + 1)^2 - 3(2x - 1)^2 + 5(2x - 1)(2x + 1) = 0$

$2(4x^2 + 4x + 1) - 3(4x^2 - 4x + 1) + 5(4x^2 - 1) = 0$

$8x^2 + 8x + 2 - 12x^2 + 12x - 3 + 20x^2 - 5 = 0$

$16x^2 + 20x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad 8x^2 + 10x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 8,\ b = 10,\ c = -3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 96}}{16} = \frac{-10 \pm \sqrt{196}}{16} = \frac{-10 \pm 14}{16} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-24}{16} = \dfrac{-3}{2} \\ x_2 = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Ejercicio nº 11.-
Solución:

a) Multiplicamos los dos miembros por 6:

$3(2x^2 - 1) - 2(x - 1) = 1 - x \quad \rightarrow \quad 6x^2 - 3 - 2x + 2 = 1 - x \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad 6x^2 - x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12} \begin{cases} \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{-6}{12} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1 = \dfrac{2}{3}$ y $x_2 = \dfrac{-1}{2}$.

b) Por ser bicuadrada, hacemos el cambio $x^2 = z$:

$$z^2 - 26z + 25 = 0 \quad \rightarrow \quad z = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{2} = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{26 \pm 24}{2} \begin{cases} \dfrac{2}{2} = 1 \\ \dfrac{50}{2} = 25 \end{cases}$$

Si $z = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$
Si $z = 25 \quad \rightarrow \quad x^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x = \pm 5$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$ y $x_4 = -5$.

<u>Ejercicio nº 12.-</u>
Solución:

a) $\sqrt{x-2} = 2 - \sqrt{x}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x - 2 = 4 + x - 4\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad 4\sqrt{x} = 6 \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{x} = 3$

Volvemos a elevar al cuadrado:

$4x = 9 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{9}{4}$ es la posible solución.

Lo comprobamos:

$$\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Luego $x = \dfrac{9}{4}$ es la solución buscada.

b) Multiplicamos ambos miembros por $4x(x+2)$:

$4x - 4(x+2)^2 = -7x(x+2) \quad \rightarrow \quad 4x - 4\left(x^2 + 4x + 4\right) = -7x^2 - 14x \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad 4x - 4x^2 - 16x - 16 = -7x^2 - 14x \quad \rightarrow \quad 3x^2 + 2x - 16 = 0 \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+192}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{-2 \pm 14}{6} \begin{cases} 2 \\ \dfrac{-16}{6} = \dfrac{-8}{3} \end{cases}$$

Comprobamos estas soluciones sobre la ecuación:

$$\frac{1}{4}-\frac{4}{2}=\frac{1-8}{4}=\frac{-7}{4} \quad \rightarrow \quad 2 \text{ es solución.}$$

$$\frac{1}{\frac{-8}{3}+2}-\frac{\frac{-8}{3}+2}{\frac{-8}{3}}=\frac{1}{\frac{-2}{3}}-\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{-8}{3}}=-\frac{3}{2}-\frac{2}{8}=\frac{-14}{8}=\frac{-7}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{-8}{3} \text{ es solución.}$$

Las soluciones son $x_1=2$ y $x_2=\frac{-8}{3}$.

<u>Ejercicio nº 13.-</u>
Solución:

a) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x=\frac{10}{9} \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{1}{9}=\frac{10}{9} \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad x^2=\frac{9}{9} \rightarrow \quad x^2=1 \quad \rightarrow \quad x=\pm 1$

Las soluciones son $x_1=1$ *y* $x_2=-1$.

b) Ecuación bicuadrada; hacemos $x^2=z$ y obtenemos:

$$z^2-48z-49=0 \quad \rightarrow \quad z=\frac{48\pm\sqrt{2304+196}}{2}=\frac{48\pm 50}{2} \begin{cases} \frac{-2}{2}=-1 \\ \frac{98}{2}=49 \end{cases}$$

Si $z=-1 \quad \rightarrow \quad x^2=-1 \quad \rightarrow$ no hay solución real
Si $z=49 \quad \rightarrow \quad x^2=49 \quad \rightarrow \quad x=\pm 7$

Las soluciones son $x_1=7$ y $x_2=-7$.

<u>Ejercicio nº 14.-</u>
Solución:

a) $\sqrt{6x+1}=3-2x$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$6x+1=9-12x+4x^2 \quad \rightarrow \quad 4x^2-18x+8=0 \quad \rightarrow \quad 2x^2-9x+4=0 \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad x=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\frac{9\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{9\pm 7}{4} \begin{cases} \frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ \frac{16}{4}=4 \end{cases}$$

Comprobamos las posibles soluciones sobre la ecuación:

$2\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{6}{2}+1}=1+\sqrt{4}=1+2=3 \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$ es solución

$8+\sqrt{24+1}=8+\sqrt{25}=8+5=13 \quad \rightarrow \quad x=4$ no es solución

La única solución es $x = \frac{1}{2}$.

b) Multiplicamos ambos miembros por $4(x+1)(x-1)$:

$$4x(x-1) + 8x(x+1) = 15(x+1)(x-1) \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 4x^2 - 4x + 8x^2 + 8x = 15x^2 - 15 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 12x^2 + 4x = 15x^2 - 15 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 4x - 15 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16+180}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{4 \pm 14}{6} \begin{cases} \frac{18}{6} = 3 \\ \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$$\frac{3}{3+1} + \frac{6}{3-1} = \frac{3}{4} + \frac{6}{2} = \frac{3+12}{4} = \frac{15}{4} \quad \rightarrow \quad 3 \text{ es solución.}$$

$$\frac{\frac{-5}{3}}{\frac{-5}{3}+1} + \frac{\frac{-10}{3}}{\frac{-5}{3}-1} = \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}} + \frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{8}{3}} = \frac{5}{2} + \frac{10}{8} = \frac{20+10}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} \quad \rightarrow \quad -\frac{5}{3} \text{ es solución.}$$

Las soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = \frac{-5}{3}$.

<u>Ejercicio nº 15.-</u>
Solución:

a) Multiplicamos ambos miembros por 6:

$$2(2x+5)(3x-1) + 3(x^2+5) = 7x - 5 + 6 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 12x^2 - 4x + 30x - 10 + 3x^2 + 15 - 7x + 5 - 6 = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 15x^2 + 19x + 4 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{-19 \pm \sqrt{361-240}}{30} = \frac{-19 \pm \sqrt{121}}{30} = \frac{-19 \pm 11}{30} \begin{cases} \frac{-30}{30} = -1 \\ \frac{-8}{30} = \frac{-4}{15} \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1 = -1$ y $x_2 = \frac{-4}{15}$.

b) Haciendo $x^2 = z$, se obtiene: $3z^2 - 10z - 8 = 0$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{100+96}}{6} = \frac{10 \pm 14}{6} \begin{cases} \frac{24}{6} = 4 \\ \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

Si $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Si $z = \dfrac{-2}{3} \rightarrow x^2 = \dfrac{-2}{3} \rightarrow$ no hay solución real.

Las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

Ejercicio nº 16.-
Solución:

a) $\sqrt{4x+1} = -1 + \sqrt{9x-2}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$4x+1 = 1 + (9x-2) - 2\sqrt{9x-2} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 4x+1 = 9x - 1 - 2\sqrt{9x-2} \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{9x-2} = 5x - 2$$

Volvemos a elevar al cuadrado:

$$4(9x-2) = 25x^2 - 20x + 4 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 36x - 8 = 25x^2 - 20x + 4 \quad \rightarrow \quad 25x^2 - 56x + 12 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{56 \pm \sqrt{3136 - 1200}}{50} = \frac{56 \pm \sqrt{1936}}{50} = \frac{56 \pm 44}{50} \begin{cases} \dfrac{100}{50} = 2 \\[2mm] \dfrac{12}{50} = \dfrac{6}{25} \end{cases}$$

Comprobamos las dos posibles soluciones, sustituyendo en la ecuación inicial:

$$\sqrt{4 \cdot 2 + 1} - \sqrt{9 \cdot 2 - 2} = \sqrt{9} - \sqrt{16} = 3 - 4 = -1 \quad \rightarrow \quad 2 \text{ es solución}$$

$$\sqrt{\frac{24}{25} + 1} - \sqrt{\frac{54}{25} - 2} = \sqrt{\frac{49}{25}} - \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{6}{25} \text{ no es solución}$$

La única solución es $x = 2$.

b) Multiplicamos ambos miembros por $12x^2$, que es el m.c.m. de los denominadores:

$$4x + 12 = 5x^2 \quad \rightarrow \quad 5x^2 - 4x - 12 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 240}}{10} = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{10} = \frac{4 \pm 16}{10} \begin{cases} \dfrac{20}{10} = 2 \\[2mm] \dfrac{-12}{10} = \dfrac{-6}{5} \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12} \quad \rightarrow \quad 2 \text{ es solución.}$$

$$x = \frac{-6}{5} \quad \rightarrow \quad - \ \frac{5}{18} + \frac{25}{36} = \frac{-10+25}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \quad \rightarrow \quad \frac{-6}{5} \text{ es solución.}$$

Las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = \dfrac{-6}{5}$.

Ejercicio nº 17.-
Solución:

b) $2x^4 + 9x^2 - 68 = 0$ equivale a $2z^2 + z - 68 = 0$, siendo $z = x^2$.

$$z = \frac{-9 \pm \sqrt{81+544}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{625}}{4} = \frac{-9 \pm 25}{4} \begin{cases} \dfrac{-34}{4} = \dfrac{-17}{2} \\ \dfrac{16}{4} = 4 \end{cases}$$

Si $z = \frac{-17}{2} \;\rightarrow\; x^2 = \frac{-17}{2} \;\rightarrow$ no hay solución real.

Si $z = 4 \;\rightarrow\; x^2 = 4 \;\rightarrow\; x = \pm 2$

Las soluciones pedidas son $x_1 = 2$ y $x_2 = 2$.

Ejercicio nº 18.-
Solución:

a) $\sqrt{x^4 + 9} = \sqrt{6x^2 + 1}$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$x^4 + 9 = 6x^2 + 1 \;\rightarrow\; x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Ecuación bicuadrada, que resolvemos haciendo el cambio $x^2 = z$:

$$z^2 - 6z + 8 = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

Si $z = 4 \;\rightarrow\; x^2 = 4 \;\rightarrow\; x = \pm 2$

Si $z = 2 \;\rightarrow\; x^2 = 2 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{2}$

Comprobación:

$x = \pm 2 \;\rightarrow\; \sqrt{16+9} - \sqrt{24+1} = \sqrt{25} - \sqrt{25} = 0 \;\rightarrow\; x = \pm 2$ son soluciones.

$x = \pm\sqrt{2} \;\rightarrow\; \sqrt{4+9} - \sqrt{12+1} = \sqrt{13} - \sqrt{13} = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{2}$ son soluciones.

Las soluciones son $x_1 = 2,\; x_2 = -2,\; x_3 = \sqrt{2}$ y $x_4 = -\sqrt{2}$.

b) Multiplicamos ambos miembros por $2x$:

$2x^2 + 8 = 10x \;\rightarrow\; 2x^2 - 10x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 5x + 4 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación de las posibles soluciones:

$4 + \frac{8}{8} = 4 + 1 = 5 \;\rightarrow\; 4$ es solución

$1 + \frac{8}{2} = 1 + 4 = 5 \;\rightarrow\; 1$ es solución

Las soluciones son $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$.

Ejercicio nº 19.-
Solución:

a) Efectuamos los paréntesis teniendo en cuenta que todos son productos notables:

$$2\left(4x^2+4x+1\right)-3\left(4x^2-4x+1\right)+5\left(4x^2-1\right)=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 8x^2+8x+2-12x^2+12x-3+20x^2-5=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 16x^2+20x-6=0 \quad \rightarrow \quad 8x^2+10x-3=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{-10\pm\sqrt{100+96}}{16}=\frac{-10\pm\sqrt{196}}{16}=\frac{-10\pm14}{16} \quad \begin{cases} \dfrac{-24}{16}=\dfrac{-3}{2} \\ \dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=\frac{-3}{2}$ y $x_2=\frac{1}{4}$.

b) Ecuación bicuadrada en la que podemos extraer x^2 como factor común:
(Observa que también se puede hacer con el cambio de variable, y entonces resolver: $4z^2$ -25z = 0. Compruébalo, y verás como obtienes los mismos resultados)

$$4x^4 - 25x^2 = x^2\left(4x^2 - 25\right)$$

Así:

$$4x^4-25x^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2\left(4x^2-25\right)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \\ 4x^2-25=0 \quad \rightarrow \quad x^2=\dfrac{25}{4} \quad \rightarrow \quad x=\pm\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=0$, $x_2=\frac{5}{2}$ y $x_3=-\frac{5}{2}$.

Ejercicio nº 20.-
Solución:

a) Multiplicamos ambos miembros por x^3:

$$\frac{81}{x^3}=3 \quad \rightarrow \quad 81=3x^3 \quad \rightarrow \quad x^3=27 \quad \rightarrow \quad x=3$$

Comprobamos si es, o no, solución en la ecuación inicial:

$$\frac{81}{27}-1=3-1=2 \quad \rightarrow \quad x=3 \text{ es solución}$$

b) $\sqrt{x+4}=3-\sqrt{x-1}$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$x+4=9+x-1-6\sqrt{x-1} \quad \rightarrow \quad 6\sqrt{x-1}=4 \quad \rightarrow \quad 3\sqrt{x-1}=2$$

Volvemos a elevar al cuadrado:

$$9\left(x-1\right)=4 \quad \rightarrow \quad 9x-9=4 \quad \rightarrow \quad 9x=13 \quad \rightarrow \quad x=\frac{13}{9}$$

Comprobamos si es, o no, solución:

$$\sqrt{\frac{13}{9}+4}=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{7}{3}$$

$$3-\sqrt{\frac{13}{9}-1}=3-\sqrt{\frac{4}{9}}=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$$

Ambos miembros coinciden, luego $x=\frac{13}{9}$ es la solución buscada.

Ejercicio nº 21.-
Solución:

a) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x=\frac{10}{9} \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{1}{9}=\frac{10}{9} \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad x^2=\frac{9}{9} \rightarrow \quad x^2=1 \quad \rightarrow \quad x=\pm 1$$

Las soluciones son $x_1=1$ *y* $x_2=-1$.

b) Ecuación bicuadrada; hacemos $x^2=z$ y obtenemos:

$$z^2-48z-49=0 \quad \rightarrow \quad z=\frac{48\pm\sqrt{2304+196}}{2}=\frac{48\pm 50}{2} \begin{cases} \frac{-2}{2}=-1 \\ \frac{98}{2}=49 \end{cases}$$

Si $z=-1 \quad \rightarrow \quad x^2=-1 \quad \rightarrow$ no hay solución real
Si $z=49 \quad \rightarrow \quad x^2=49 \quad \rightarrow \quad x=\pm 7$

Las soluciones son $x_1=7$ y $x_2=-7$.

Ejercicio nº 22.-
Solución:

a) $\sqrt{6x+1}=3-2x$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$6x+1=9-12x+4x^2 \quad \rightarrow \quad 4x^2-18x+8=0 \quad \rightarrow \quad 2x^2-9x+4=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\frac{9\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{9\pm 7}{4} \begin{cases} \frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ \frac{16}{4}=4 \end{cases}$$

Comprobamos las posibles soluciones sobre la ecuación:

$$2\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{6}{2}+1}=1+\sqrt{4}=1+2=3 \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{2} \text{ es solución}$$

$$8+\sqrt{24+1}=8+\sqrt{25}=8+5=13 \quad \rightarrow \quad x=4 \text{ no es solución}$$

La única solución es $x = \frac{1}{2}$.

b) Multiplicamos ambos miembros por $4(x+1)(x-1)$:

$$4x(x-1) + 8x(x+1) = 15(x+1)(x-1) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 4x^2 - 4x + 8x^2 + 8x = 15x^2 - 15 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 12x^2 + 4x = 15x^2 - 15 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 4x - 15 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16+180}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{4 \pm 14}{6} \begin{cases} \frac{18}{6} = 3 \\ \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$$\frac{3}{3+1} + \frac{6}{3-1} = \frac{3}{4} + \frac{6}{2} = \frac{3+12}{4} = \frac{15}{4} \quad \rightarrow \quad 3 \text{ es solución.}$$

$$\frac{\frac{-5}{3}}{\frac{-5}{3}+1} + \frac{\frac{-10}{3}}{\frac{-5}{3}-1} = \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}} + \frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{8}{3}} = \frac{5}{2} + \frac{10}{8} = \frac{20+10}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} \quad \rightarrow \quad -\frac{5}{3} \text{ es solución.}$$

Las soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = \frac{-5}{3}$.