

3. ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS

- 1 **Preguntado un padre por la edad de su hijo contesta: “el producto de su edad hace 6 años por el de su edad hace 4 años es mi edad actual que son 48 años. Calcula la edad del hijo.**

Solución:

Se plantea la ecuación, “x” es la edad del hijo: $(x - 6) \cdot (x - 4) = 48$

Operando: $x^2 - 10x - 24 = 0$

Soluciones: $x = 12$ y $x = -1$. La solución válida es 12 años.

- 2 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $x^2 + 10 = 9x + 10$

b) $2x^2 - 12x + 14 = 0$

c) $2x^2 - 5x + 12 = x^2 + 5x - 12$

d) $2x^2 - 3 = x^2 - 6$

Solución:

a) $x = 4$ y $x = 5$; b) $x = -1$ y $x = 7$; c) $x = 4$ y $x = 6$; d) $x = -3$ y $x = 3$

- 3 **Preguntado un padre por la edad de sus tres hijos contesta: mis hijos se llevan cada uno un año con el siguiente, si sumamos sus edades se obtienen 9 años más que si sumamos las edades de los dos más pequeños.**

Solución:

Se plantea la ecuación: edad del más pequeño “x” entonces $x + (x + 1) + (x + 2) = 9 + x + (x + 1)$

Operando: $x = 7$ años, $x + 1 = 8$ años y $x + 2 = 9$ años.

- 4 **Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:**

a) $10(20 - x) = 8(2x - 1)$

$$\frac{x}{2} - \frac{21}{3} - \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 7$$

b)

$$\frac{3x - 5}{2} - \frac{4x}{5} = \frac{3x + 5}{20}$$

c)

$$\frac{40 + 14x - 1 - 2x}{3} = \frac{-5x + 15}{5}$$

d)

Solución:

a) $x = 8$

b) Multiplicando por 12 queda: $6x - 84 - 9x + 10x = 84$; $x = 24$

c) Multiplicando por 20 queda: $30x - 50 - 16x = 3x - 5$; $x = 5$

d) Multiplicando por 15 queda: $200 + 70x - 5 - 10x = -15x + 45$; $x = -2$

- 5 **En una clase deciden que este verano van a escribir todos una carta al resto de compañeros. El listillo de la clase dice: ¡Los de correos se van a poner contentos porque vamos a escribir 600 cartas!. Calcula el número de alumnos que hay en la clase.**

Solución:

Se plantea el problema. Si “x” es el numero de alumnos cada uno de ellos escribe $(x - 1)$ cartas por lo que el total de las cartas será la suma de x veces $(x - 1)$.

$x(x - 1) = 600$

Operando: $x^2 - x - 600 = 0$

Las soluciones son $x = -24$ y $x = 25$, la solución válida es 25 alumnos.

- 6 **Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:**

a) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

b) $x^5 - 41x^3 + 400x = 0$

c) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$

Solución:

a) Realizando el cambio de variable: $x^2 = z$ queda la ecuación:

$$z^2 - 20z + 64 = 0; \text{ cuyas soluciones son: } z = 4 \text{ y } z = 16.$$

Calculando las raíces cuadradas de las soluciones obtenidas queda: $x = -2; x = 2; x = -4 \text{ y } x = 4$

b) Sacando factor común x y realizando el cambio de variable: $x^2 = z$ queda la ecuación:

$$x \cdot (z^2 - 41z + 40) = 0; \text{ cuyas soluciones son: } x = 0, z = 16 \text{ y } z = 25.$$

Calculando las raíces cuadradas de las soluciones (z) obtenidas queda: $x = 0; x = -4; x = 4; x = -5 \text{ y } x = 5$

c) Realizando el cambio de variable: $x^3 = z$ queda la ecuación:

$$z^2 - 3z + 2 = 0; \text{ cuyas soluciones son: } z = 1 \text{ y } z = 2.$$

Calculando las raíces cúbicas de las soluciones obtenidas queda $x = 1 \text{ y } x = \sqrt[3]{2}$

7 Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

$$\frac{6x - 22}{3} - \frac{10x - 2}{14} = \frac{2x - 14}{6} - \frac{10x - 12}{21}$$

a)

$$\frac{x}{2} - \frac{21}{3} - \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 7$$

b)

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

c)

$$\frac{2(x - 1)}{4} - \frac{-2(1 - x)}{3} = 5$$

d)

Solución:

a) Multiplicando por 42 queda: $84x - 308 - 30x + 6 = 14x - 98 - 20x + 24; x = 19/5$

b) Multiplicando por 12 queda: $6x - 84 - 9x + 10x = 84; x = 24$

c) Multiplicando por 12 queda: $-6x + 4x + 3x = 6 - 4 + 3; x = 5$

d) Multiplicando por 12 queda: $6x - 6 + 8 - 8x = 60; x = -29$

8 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$x^2 - \frac{5x - 12}{2} = \frac{x^2 + 5x}{2} - 6$$

a)

$$\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4} = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}$$

b)

$$c) 2x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 2$$

$$d) x^2 - (2x - 1) = x - 1$$

Solución:

a) $x = 4 \text{ y } x = 6;$

b) $x = -3 \text{ y } x = 3;$

c) $x = -1 \text{ y } x = 1;$

d) $x = 1 \text{ y } x = 2$

1 Resuelve los siguientes sistemas por sustitución y reducción.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y = 10 \\ 2x + y = 7 \end{array} \right\}$$

a)

b)

Solución:

a) Sustitución:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 2(5 - 2y) + y = 7 \end{cases}$$

$$10 - 4y + y = 7; \quad -3y = -3; \quad y = 1 \Rightarrow x = 3$$

Reducción

$$\begin{array}{r} -2 \cdot (x + 2y = 5) \\ 2x + y = 7 \end{array} \left\} \begin{array}{l} -2x - 4y = -10 \\ \underline{2x + y = 7} \\ -3y = -3 \end{array} \right. \Rightarrow y = 1; x = 3$$

b) Sustitución

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 7 - 2x \\ 2x + 4(7 - 2x) = 10 \end{cases}$$

$$2x + 28 - 8x = 10; \quad -6x = -18; \quad x = 3 \Rightarrow y = 1$$

Reducción:

$$\begin{array}{r} -(2x + 4y = 10) \\ 2x + y = 7 \end{array} \left\} \begin{array}{l} -2x - 4y = -10 \\ \underline{2x + y = 7} \\ -3y = -3 \end{array} \right. \Rightarrow y = 1; x = 3$$

2 Resuelve el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Solución:

$$x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{2}, y = 1; \quad x = \frac{1}{2}, y = -1; \quad x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$$

3 Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

$$\begin{cases} x + y - \frac{y}{x} = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ x^2 - 2y^2 = 7 \end{cases}$$

a)

b)

Solución:

$$a) x = 1, y = 4 \quad b) x = -5, y = -3; \quad x = -5, y = 3; \quad x = 5, y = -3; \quad x = 5, y = 3$$

4 Resuelve el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} + \frac{y+3}{y+1} = 3 \\ x(x-2) = y(1-y) \end{cases}$$

Solución:

$$x = 2, y = 1; \quad x = \frac{2}{13}, y = -\frac{3}{13}$$

5 **Partiendo de la ecuación: $2x + y = 9$ añade otra que forme con esta un sistema que no tenga solución.**

Solución:

Para que el sistema no tenga solución basta con tomar una proporcional a ésta en una de las dos partes de la igualdad:

Ej: $4x + 2y = 15$

También se puede tomar como compañera de esta la misma ecuación pero con diferente resultado:

Ej: $2x + y = 7$

Resolviéndolas se puede comprobar que se obtienen resultados absurdos como $7 = 9$

6 **Resuelve el siguiente sistema no lineal:**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ xy = 28 \end{cases}$$

Solución:

$x = -7, y = -4; \quad x = -4, y = -7; \quad x = 4, y = 7; \quad x = 7, y = 4$

7 **El área de un triángulo rectángulo es $6m^2$ y su perímetro 12 m. Calcula la longitud de los lados del triángulo.**

Solución:

Llamamos x e y a los catetos y escribimos las ecuaciones en función de estos

$$\begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 12 \end{cases}$$

La segunda ecuación que tiene la forma de una radical la tratamos como tal elevándola al cuadrado:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 12 - x - y; \quad x^2 + y^2 = 144 + x^2 + y^2 - 24x - 24y + 2xy$$

$$\begin{cases} 24x + 24y - 2xy = 144 \\ xy = 12 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{12}{x}$$

$$24 \frac{12}{x} + 24x - 2 \frac{12}{x} x = 144; \quad 24x^2 - 168x + 288 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0; \quad x = 4, \quad x = 3$$

Tomando $x = 4$ se tiene $y = 3$ y viceversa si se toma $x = 3$ será $y = 4$, que forman el mismo triángulo.

8 **Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método que quieras.**

$$\begin{cases} \frac{4x}{3} + \frac{3y}{2} = 7 \\ -\frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y = \frac{5}{3} \\ 4x - y = \frac{5}{6} \end{cases}$$

a)

b)

Solución:

a) $x = 3; y = 2$

b) $x = 1/3; y = 1/2$

1 **Resuelve la siguiente inecuación ordenadamente, explicando todos los pasos que realizas:**

$$-4x + \frac{3 - 2x}{4} > \frac{1 - 3x}{3} - \frac{37}{12}$$

Solución:

Multiplicamos por 12 que es el m.c.m. de los denominadores para que desaparezcan:

$$-48x + 9 - 6x > 4 - 12x - 37$$

Se trasponen términos:

$$-48x - 6x + 12x > 4 - 37 - 9$$

Se opera en cada miembro

$$-42x > -42$$

Se divide por -42 cada miembro y se cambia el sentido de la desigualdad:

$$x < 1$$

2 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $x^2 + 2x + 3 \leq -1$ b) $(x + 5)(x - 4) \geq 0$

Solución:

a) \mathbb{R} b) $(-\infty, -5] \cup [4, +\infty)$

3 **Un vendedor de seguros tiene dos opciones de sueldo, debe elegir entre un fijo de 800 Euros más 80 Euros por póliza o cobrar 150 Euros de comisión pura (sin fijo) por póliza. ¿A partir de que cantidad de pólizas es más rentable la opción de comisión pura?**

Solución:

Se plantea la inecuación: "x" es el número de pólizas

$$800 + 80x < 150x; \quad x > 11,4$$

A partir de 12 pólizas es más rentable la comisión pura.

4 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $2(x - 3) > 1 - 3(x - 1)$

b) $10(20 - x) < 8(2x - 1)$

c) $2(1 - x) - 4 > 2(x + 3)$

Solución:

a) $x > 2$

b) $x > 8$

c) $x > -2$

5 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $x + 2x + 3x < 5(1 - x) + 6$

b) $(x - 1) + 2(2x + 3) < 4$

c) $6(x - 2) - 7(x - 4) > 6 - 3x$

Solución:

a) $x < 1$

b) $x < -1$

c) $x > -5$

6 **La tarifa de telefonía de la empresa A es 20 Euros fijos mensuales más 7 céntimos de euro por minuto de conversación, la de la empresa B es 11 Euros fijos más 12 céntimos por minuto de conversación. ¿A partir de cuantos minutos empieza a ser más rentable la tarifa de la empresa A?**

Solución:

Se plantea la inecuación (ponemos los datos en céntimos): "x" es el número de minutos

$$2000 + 7x < 1100 + 12x; \quad x > 18 \text{ minutos.}$$

7 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $\frac{x^2 + x}{3} - 1 > -\frac{1 - 2x^2}{6}$ b) $\frac{2x^2}{3} - x < \frac{8x}{3}(1 + x) + 1$

a)

b)

Solución:

a) $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ b) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

a)

b)

8 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $x + 2x + 3x > 5(1 - x) + 6$

b) $-1(x - 1) + 2(2x + 3) > 4$

c) $6(x - 2) - 7(x - 4) < 6 - 3x$

Solución:

a) $x > 1$

b) $x > -1$

c) $x > -5$

1 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{cases} 6 - x \leq 4x - 5 \\ 1 - 2x \geq -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 6 < 0 \\ x - 4 > -5 \end{cases}$$

a) b)

Solución:

a) \emptyset b) $(-1, 3)$

2 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 1 > x - \frac{3}{2} \\ 2x - 1 < 1 - 3x \end{cases} \quad \begin{cases} x - \frac{1}{3} < \frac{3}{2}x - 1 \\ 4x - 5 < 2 - 5x \end{cases}$$

a) b)

Solución:

$$\left(-\frac{5}{2}, \frac{2}{5}\right)$$

a) b) \emptyset

3 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 15 \leq x - 5 \\ -x + 12 \geq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 10 > -x + 2 \\ 10 - 4x > -3x \end{cases}$$

a) b)

Solución:

a) $(-\infty, 6]$ b) $(4, 10)$

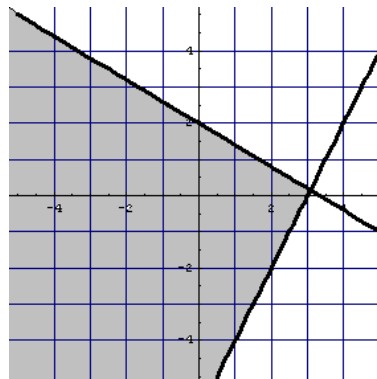
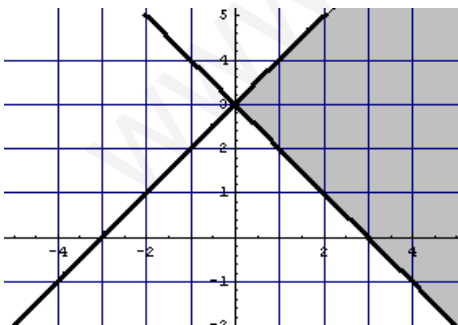
4 Representa la región del plano que verifica el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} -x + y \leq 3 \\ x + y - 3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y > 6 \\ 3x + 5y - 10 < 0 \end{cases}$$

a) b)

Solución:

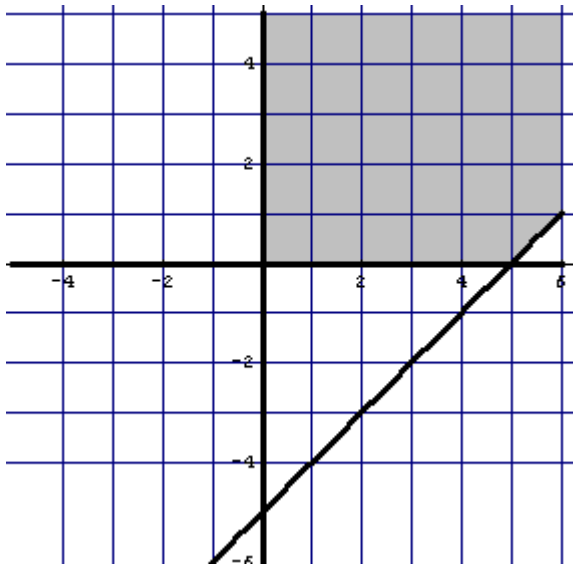
a) b)



5 Representa la región del plano que verifica el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$$

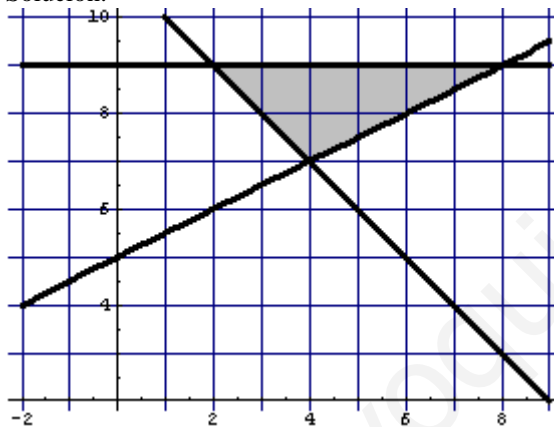
Solución:



6 Representa la región del plano que verifica el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{cases}$$

Solución:



7 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{x}{4} \geq \frac{7}{6} \\ \frac{3}{2} \left(1 - \frac{x}{4}\right) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 \geq \frac{x-1}{2} \\ 3x + \frac{1}{3} < x + 7 \end{cases}$$

a)

b)

Solución:

a) $(-\infty, -2]$ b) $\left[3, \frac{10}{3}\right)$

8 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{cases} 5(x-1) \leq 3(x+1) \\ 2(x+3) \geq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(x-2) \geq 2x+3 \\ x-1 < 9 \end{cases}$$

a)

b)

Solución:

a) $[0, 4]$ b) $[9, 10)$

