Página 30

PRACTICA

Números enteros y racionales

1 **Calcula:**

a) $5 + (-3) - (-2) + (4 - 6) - [3 - (6 - 4)]$

b) $(3 + 6 - 11) \cdot (4 - 2 - 9) \cdot (-1)$

c) $5 \cdot [8 - (2 + 3)] - (-4) \cdot [6 - (2 + 7)]$

d) $(-7) \cdot [4 \cdot (3 - 8) - 5 \cdot (8 - 5)]$

a) $5 + (-3) - (-2) + (4 - 6) - [3 - (6 - 4)] = 5 - 3 + 2 + 4 - 6 - 3 + 6 - 4 =$
$= (5 + 2 + 4 + 6) - (3 + 6 + 3 + 4) =$
$= 17 - 16 = 1$

b) $(3 + 6 - 11) \cdot (4 - 2 - 9) \cdot (-1) = (-2) \cdot (-7) \cdot (-1) = -14$

c) $5 \cdot [8 - (2 + 3)] - (-4) \cdot [6 - (2 + 7)] = 5 \cdot (8 - 5) - (-4) \cdot (6 - 9) =$
$= 5 \cdot 3 - (-4) \cdot (-3) = 15 - 12 = 3$

d) $(-7) \cdot [4 \cdot (3 - 8) - 5 \cdot (8 - 5)] = (-7) \cdot [4 \cdot (-5) - 5 \cdot 3] =$
$= (-7) \cdot (-20 - 15) = (-7) \cdot (-35) = 245$

2 **Calcula mentalmente:**

a) **La mitad de** $\frac{7}{8}$

b) **La tercera parte de** $\frac{9}{5}$

c) **La mitad de la quinta parte de** -4

d) **El triple de la mitad de** $\frac{2}{3}$

a) $\frac{7}{16}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) 1

3 **Calcula mentalmente:**

a) **Los dos quintos de 400**

b) **El número cuyos dos quintos son 160**

c) **Los tres séptimos de 140**

d) **El número cuyos cinco sextos son 25**

a) $\frac{2}{5}$ de $400 = 2 \cdot 80 = 160$

b) $\frac{2}{5}$ de $\boxed{} = 160 \rightarrow$ por a) se sabe que el número es 400

c) $\frac{3}{7}$ de $140 = 3 \cdot 20 = 60$

d) $\frac{5}{6}$ de $\boxed{} = 25 \rightarrow$ el número es 30

4 **Calcula mentalmente:**

a) $\frac{4}{3}$ **de 21** **b)** $\frac{5}{2}$ **de 10** **c)** $\frac{3}{10}$ **de 1 millón** **d)** $\frac{7}{20}$ **de cien mil**

a) $\frac{4}{3}$ de $21 = 4 \cdot 7 = 28$

b) $\frac{5}{2}$ de $10 = 5 \cdot 5 = 25$

c) $\frac{3}{10}$ de 1 millón $= 3 \cdot 100\,000 = 300\,000$

d) $\frac{7}{20}$ de cien mil $= 7 \cdot 5\,000 = 35\,000$

5 **Expresa en forma de fracción de hora:**

a) 15 minutos **b) 20 minutos** **c) 10 minutos**

d) 1 minuto **e) 120 segundos** **f) 1 segundo**

a) $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ b) $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{60}$

e) $120'' = 2' \rightarrow \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ f) $1 \text{ h} = 3\,600'' \rightarrow \frac{1}{3\,600}$

6 **En un puesto de frutas y verduras, los 5/6 del importe de las ventas de un día corresponden al apartado frutas. Del dinero recaudado en la venta de fruta, los 3/8 corresponden a las naranjas. Si la venta de naranjas asciende a 89 €, ¿qué caja ha hecho el establecimiento?**

Del dinero total recaudado, la fracción que corresponde a la venta de naranjas es:

$$\frac{3}{8} \text{ de } \frac{5}{6} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$$

Por lo tanto, $\frac{5}{16}$ equivale a 89 € $\rightarrow$ $\frac{1}{16}$ equivale a 17,8 € (resultado de dividir 89 entre 5) $\rightarrow$ el total de dinero recaudado será $17{,}8 \cdot 16 = 284{,}8$ €.

7 **En un depósito, el lunes había 3 000 litros de agua y estaba lleno. El martes se gastó 1/6 del depósito. El miércoles se sacaron 1 250 litros. ¿Qué fracción queda?**

Lunes $\rightarrow$ depósito lleno = 3 000 l

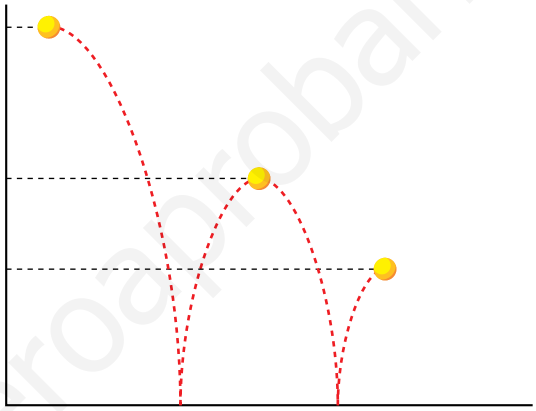
Martes $\rightarrow$ se gastó $\frac{1}{6}$ del depósito = $\frac{1}{6}$ de 3 000 = 500 l

Miércoles $\rightarrow$ se sacaron 1 250 l

Litros que quedan $\rightarrow$ 3 000 – 1 250 – 500 = 1 250 l

La fracción que representa el número de litros que queda es $\frac{1\,250}{3\,000} = \frac{5}{12}$

8 **Una pelota pierde en cada bote $\frac{2}{5}$ de la altura a la que llegó en el bote anterior. ¿Qué fracción de la altura inicial, desde la que cayó, alcanzará cuatro botes después?**



En el primer bote alcanzará una altura de $\frac{3}{5}$ de la altura inicial;

en el segundo bote la altura será $\frac{3}{5}$ de $\frac{3}{5}$ de la altura inicial…

… luego en cuatro botes la altura alcanzada será $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$ de la altura inicial.

9 **Reduce a una sola fracción cada una de estas expresiones:**

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right)$

c) $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

d) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right]$

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} - \frac{4}{16} - \frac{2}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right) = \left(\frac{12}{20} - \frac{5}{20} + \frac{40}{20}\right) - \left(\frac{15}{20} - \frac{8}{20} + \frac{20}{20}\right) =$

$= \frac{47}{20} - \frac{27}{20} = \frac{20}{20} = 1$

c) $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$

$= 1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{4} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{2} =$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$

d) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right] = \left(\frac{9}{15} + \frac{5}{15}\right) - \left[1 - \left(\frac{3-2}{4}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right] =$

$= \frac{14}{15} - \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right) =$

$= \frac{14}{15} - 1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{20} =$

$= \frac{56}{60} - \frac{60}{60} + \frac{15}{60} - \frac{40}{60} + \frac{9}{60} =$

$= \frac{-20}{60} = \frac{-1}{3}$

10 Calcula:

a) $\dfrac{\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right)}{\frac{5}{3} : \frac{7}{6}}$

b) $\dfrac{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}} : \dfrac{3 + \frac{1}{7}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{14}}$

a) $\dfrac{\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right)}{\frac{5}{3} : \frac{7}{6}} = \dfrac{\frac{-3 \cdot 8}{4 \cdot 9}}{\frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 7}} = \dfrac{\frac{-2}{3}}{\frac{10}{7}} = \frac{-2}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{-14}{30} = \frac{-7}{15}$

b) $\dfrac{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}} : \dfrac{3 + \frac{1}{7}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{14}} = \dfrac{\frac{8}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8}}{\frac{6}{8} - \frac{4}{8} - \frac{1}{8}} : \dfrac{\frac{21}{7} + \frac{1}{7}}{\frac{7}{14} + \frac{3}{14}} =$

$= \left(\frac{11}{8} : \frac{1}{8}\right) : \left(\frac{22}{7} : \frac{10}{14}\right) = \left(\frac{11}{8} : \frac{8}{1}\right) : \left(\frac{22}{7} : \frac{14}{10}\right) =$

$= 11 : \frac{22}{5} = 11 \cdot \frac{5}{22} = \frac{5}{2}$

Página 31

11 **Expresa en el sistema sexagesimal $\frac{7}{3}$ de hora.**

$\frac{7}{3}$ de hora $= \frac{7}{3}$ de 60 minutos $= 7 \cdot 20 = 140$ minutos $= 2$ h y 20 minutos

12 **Separa en cada fracción la parte entera, como en el ejemplo: $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$**

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{-7}{3}$ c) $\frac{45}{5}$

d) $\frac{-48}{5}$ e) $\frac{93}{10}$ f) $\frac{2\,437}{621}$

a) $\frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

b) $\frac{-7}{3} = \frac{-6}{3} - \frac{1}{3} = -2 - \frac{1}{3}$

c) $\frac{45}{5} = 9$

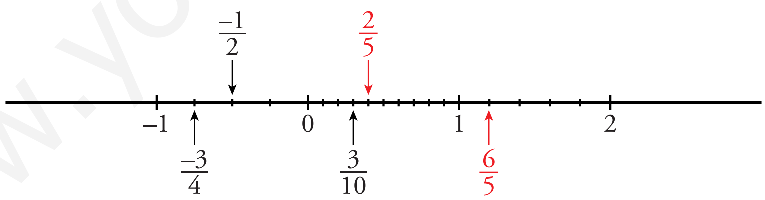
d) $\frac{-48}{5} = \frac{-45}{5} - \frac{3}{5} = -9 - \frac{3}{5}$

e) $\frac{93}{10} = \frac{90}{10} + \frac{3}{10} = 9 + \frac{3}{10}$

f) $\frac{2\,437}{621} = \frac{1\,863}{621} + \frac{574}{621} = 3 + \frac{574}{621}$

13 **Representa en la recta numérica:**

$$\frac{2}{5};\ -\frac{3}{4};\ -\frac{1}{2};\ \frac{6}{5};\ \frac{3}{10}$$



Potencias

14 **Elimina paréntesis y simplifica:**

a) $(2 \cdot 3 \cdot 5)^4$ b) $(-3)^5 : (-3)^3$ c) $\frac{6^2}{(-3)^4}$

d) $[2^4 \cdot (-2)^2] : (-4)^3$ e) $\frac{a^2 \cdot (b \cdot c)^2}{(ab)^3 \cdot c}$ f) $\frac{(ab)^2 - (ab)^3}{(ab)^4}$

a) $(2 \cdot 3 \cdot 5)^4 = 30^4$

b) $(-3)^5 : (-3)^3 = (-3)^2 = 3^2$

c) $\dfrac{6^2}{(-3)^4} = \dfrac{2^2 \cdot 3^2}{3^4} = \dfrac{2^2}{3^2}$

d) $[2^4 \cdot (-2)^2] : (-4)^3 = (2^4 \cdot 2^2) : (-4)^3 = 2^6 : (-2^6) = -1$

e) $\dfrac{a^2 \cdot (b \cdot c)^2}{(ab)^3 \cdot c} = \dfrac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{a^3 \cdot b^3 \cdot c} = \dfrac{c}{ab}$

f) $\dfrac{(ab)^2 - (ab)^3}{(ab)^4} = \dfrac{a^2b^2 - a^3b^3}{a^4b^4} = \dfrac{a^2b^2(1 - ab)}{a^4b^4} = \dfrac{1 - ab}{a^2b^2}$

15 **Calcula:**

a) $(-2)^4$ **b)** -2^4 **c)** $(-2)^3$

d) -2^3 **e)** 2^{-3} **f)** $(-2)^{-3}$

g) $(-1)^{16}$ **h)** $(-1)^{17}$ **i)** $(-1)^{8723}$

a) $(-2)^4 = 16$ b) $-2^4 = -16$ c) $(-2)^3 = -8$

d) $-2^3 = -8$ e) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ f) $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = -\dfrac{1}{8}$

g) $(-1)^{16} = 1$ h) $(-1)^{17} = -1$ i) $(-1)^{8723} = -1$

16 **Reduce:**

a) $\dfrac{-3^2}{(-3)^3}$ **b)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-3}{2}\right)^4$ **c)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 : \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 : \left(\dfrac{2}{5}\right)^3$ **e)** $\dfrac{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 9^2}$ **f)** $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\right]^2$

a) $\dfrac{-3^2}{(-3)^3} = \dfrac{-3^2}{-3^3} = \dfrac{1}{3}$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3^2}{2^2}$

c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 : \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 : \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 : \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

d) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 : \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1} = \dfrac{5}{2}$

e) $\dfrac{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 9^2} = \dfrac{2^3 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^2}{(2 \cdot 3)^3 \cdot (3^2)^2} = \dfrac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^4} = \dfrac{2^7 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^7} = \dfrac{2^4}{3^5}$

f) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\right]^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6$

17 Calcula:

a) $\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9}{8}-\frac{5}{4}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}-1\right)^2$

c) $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}-\frac{7}{9}\right)^{-1}+4$ d) $\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{12}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-4\right)^{-1}$

a) $\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9}{8}-\frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{6}{4}-\frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9-10}{8}\right)^2 = \left(\frac{-1}{4}\right)^3 : \left(\frac{-1}{8}\right)^2 =$

$= -\left(\frac{1}{2}\right)^6 : \left(\frac{1}{2}\right)^6 = -1$

b) $\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}-1\right)^2 = \left(\frac{1}{6}-\frac{4}{6}\right)^2-\left(\frac{8}{6}-\frac{5}{6}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}-\frac{3}{3}\right)^2 =$

$= \left(\frac{-3}{6}\right)^2-\left(\frac{3}{6}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

$= \frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{4}-\frac{9}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

c) $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}-\frac{7}{9}\right)^{-1}+4 = \left(\frac{6}{4}-\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{9}-\frac{7}{9}\right)^{-1}+4 =$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-4}{9}\right)^{-1}+4 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)+4 =$

$= \frac{-4^2 \cdot 9}{3 \cdot 4}+4 = -12+4 = -8$

d) $\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{12}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}-4\right)^{-1} = \left(\frac{3}{12}-\frac{7}{12}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{10}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}-\frac{16}{4}\right)^{-1} =$

$= \frac{-4}{12}+\left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{15}{4}\right)^{-1} =$

$= -\frac{1}{3}+\left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{-4}{15}\right) = -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0$

18 Reduce aplicando las propiedades de las potencias:

a) $\frac{2^2 \cdot 3^4}{9 \cdot 12 \cdot 6}$ b) $\frac{4 \cdot 45 \cdot 24}{3^3 \cdot 2^4 \cdot 5}$ c) $\frac{8 \cdot 27^{-1}}{12^{-1}}$

a) $\dfrac{2^2 \cdot 3^4}{9 \cdot 12 \cdot 6} = \dfrac{2^2 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{2^2 \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3^4} = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{4 \cdot 45 \cdot 24}{3^3 \cdot 2^4 \cdot 5} = \dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 3}{3^3 \cdot 2^4 \cdot 5} = \dfrac{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5}{3^3 \cdot 2^4 \cdot 5} = 2$

c) $\dfrac{8 \cdot 27^{-1}}{12^{-1}} = \dfrac{2^3 \cdot 3^{-3}}{2^{-2} \cdot 3^{-1}} = 2^5 \cdot 3^{-2} = \dfrac{2^5}{3^2}$

19 Calcula:

a) $\sqrt[3]{5^3}$ **b)** $\sqrt[3]{2^6}$ **c)** $\sqrt[4]{3^8}$ **d)** $(\sqrt[5]{7})^{10}$

a) $\sqrt[3]{5^3} = 5$ b) $\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{2^{3 \cdot 2}} = 2^2 = 4$

c) $\sqrt[4]{3^8} = \sqrt[4]{3^{4 \cdot 2}} = 3^2 = 9$ d) $(\sqrt[5]{7})^{10} = (\sqrt[5]{7})^{5 \cdot 2} = 7^2 = 49$

20 Simplifica:

a) $\sqrt{4a^4}$ **b)** $(\sqrt[3]{5a})^9$ **c)** $\sqrt[4]{(2b^2)^8}$

a) $\sqrt{4a^4} = \sqrt{2^2 \cdot a^{2 \cdot 2}} = 2a^2$

b) $(\sqrt[3]{5a})^9 = (\sqrt[3]{5a})^{3 \cdot 3} = (5a)^3 = 125a^3$

c) $\sqrt[4]{(2b^2)^8} = \sqrt[4]{(2b^2)^{4 \cdot 2}} = (2b^2)^2 = 4b^4$

21 Expresa el radicando como potencia y calcula:

a) $\sqrt[5]{243}$ **b)** $\sqrt[4]{625}$ **c)** $\sqrt[5]{3\,125}$ **d)** $\sqrt[6]{4\,096}$

a) $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$ b) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

c) $\sqrt[5]{3\,125} = \sqrt[5]{5^5} = 5$ d) $\sqrt[6]{4\,096} = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4$

22 Calcula, sabiendo que estas raíces son exactas:

a) $\sqrt[6]{64}$ **b)** $\sqrt[8]{256}$ **c)** $\sqrt[3]{2\,197}$

d) $\sqrt[5]{100\,000}$ **e)** $\sqrt[5]{16\,807}$ **f)** $\sqrt[4]{81 \cdot 10^4}$

a) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$ b) $\sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{2^8} = 2$

c) $\sqrt[3]{2\,197} = \sqrt[3]{13^3} = 13$ d) $\sqrt[5]{100\,000} = \sqrt[5]{10^5} = 10$

e) $\sqrt[5]{16\,807} = \sqrt[5]{7^5} = 7$ f) $\sqrt[4]{81 \cdot 10^4} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 10^4} = \sqrt[4]{30^4} = 30$

23 Simplifica:

a) $\sqrt[3]{8a^3}$ b) $\sqrt[3]{8a^6}$ c) $\sqrt{64a^4}$ d) $\sqrt[4]{64a^4}$

a) $\sqrt[3]{8a^3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot a^3} = \sqrt[3]{(2a)^3} = 2a$

b) $\sqrt[3]{8a^6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot a^6} = 2a^2$

c) $\sqrt{64a^4} = \sqrt{2^6 \cdot a^4} = 2^3 \cdot a^2 = 8a^2$

d) $\sqrt[4]{64a^4} = \sqrt[4]{2a^6} \cdot a = \sqrt{2^3} \cdot a = \sqrt{2 \cdot 2^2} \cdot a = 2a\sqrt{2}$

Página 32

PIENSA Y RESUELVE

24 Los $\frac{3}{8}$ de un poste están pintados de blanco; los $\frac{3}{5}$ del resto, de azul, y el resto, que mide 1,25 m, de rojo. ¿Cuál es la altura del poste? ¿Cuánto mide la parte pintada de azul?

Pintados de blanco $\rightarrow \frac{3}{8} \rightarrow$ el resto es $\frac{5}{8}$

Pintados de azul $\rightarrow \frac{3}{5}$ del resto $= \frac{3}{5}$ de $\frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

Pintados de rojo $\rightarrow$ 1,25 m

Fracción pintada de blanco o azul $= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

El resto, que es $\frac{1}{4}$, está pintado de rojo, y representa 1,25 m $\rightarrow$

ALTURA DEL POSTE = 1,25 · 4 = 5 m

La parte pintada de azul mide $\frac{3}{8}$ de 5 = 1,875 m

25 Una canica cae al suelo y se eleva cada vez a los $\frac{2}{3}$ de la altura anterior. Después de haber botado tres veces, se ha elevado 2 m de altura. ¿Desde qué altura cayó?

$\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ de la altura incial es 2 m $\rightarrow$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3$ de la altura inicial = 2 m $\rightarrow \frac{8}{27}$ de la altura inicial = 2 m

Altura inicial $= \frac{2 \cdot 27}{8} = 6{,}75$ m

26 **Un depósito de agua tiene tres tomas de agua. Si se abren las tres, el depósito se llena en 2 horas. Abriendo las dos primeras, el depósito se llena en 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría la tercera en llenar el depósito?**

- Si se abren las tres tomas:

  El depósito se llena en 2 h.

  En 1 h se llena $\frac{1}{2}$ del depósito.

- Si se abren las dos primeras tomas:

  El depósito se llena en 5 h.

  En 1 h se llena $\frac{1}{5}$ del depósito.

- Si se abre la tercera toma solamente:

  En 1 h se llenaría $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ del depósito.

  En $\frac{1}{3}$ de hora se llenaría $\frac{1}{10}$ del depósito.

  En $\frac{10}{3}$ de hora se llena $\frac{10}{10}$ del depósito.

  La tercera toma tarda en llenar el depósito $\frac{10}{3} = 3{,}33\ldots \approx 3$ h 20 min

27 **Una fuente puede llenar un depósito en 3 horas, y un desagüe vaciarlo en 4 horas. Estando $\frac{1}{3}$ del depósito lleno, se abren a la vez la fuente y el desagüe. ¿Al cabo de cuántas horas se llenarán los $\frac{3}{4}$ del depósito?**

El objetivo es calcular qué cantidad de agua queda en el depósito en 1 h.

- La fuente llena el depósito en 3 h $\rightarrow$ en 1 h llena $\frac{1}{3}$ del depósito.
- El desagüe vacía el depósito en 4 h $\rightarrow$ en 1 h vacía $\frac{1}{4}$ del depósito.

Antes de abrir la fuente y el desagüe, el depósito tenía $\frac{1}{3}$ de su capacidad, luego al cabo de 1 h, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ del depósito estará lleno.

Así, la cantidad que queda en el depósito al cabo de 1 h es:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

$\frac{5}{12}$ del depósito se llena en 1 h

$\frac{1}{12}$ del depósito se llena en $\frac{1}{5}$ de hora $= \frac{60}{5} = 12$ minutos

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ del depósito se llena en $9 \cdot 12 = 108$ min $= 1$ h 48 min

Los $\frac{3}{4}$ del depósito se llenarán al cabo de 1 h 48 min.

28 Un taxista cambia el aceite de su vehículo cada 3 500 km y le hace una revisión general cada 8 000 km. ¿Cada cuántos kilómetros coinciden ambas operaciones de mantenimiento?

Hay que calcular el m.c.m. (3 500, 8 000)

$$\left.\begin{array}{l} 3\,500 = 7 \cdot 5^3 \cdot 2^2 \\ 8\,000 = 2^6 \cdot 5^3 \end{array}\right\} \text{m.c.m. } (3\,500,\ 8\,000) = 2^6 \cdot 5^3 \cdot 7 = 56\,000$$

Ambas operaciones de mantenimiento coincidirán cada 56 000 km.

29 De un solar se venden primero los 2/3 de su superficie y después los 2/3 de lo que quedaba. El ayuntamiento expropia los 3 200 m^2 restantes para un parque público. ¿Cuál era la superficie del solar?

1ª venta $\rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow$ queda por vender $\frac{1}{3}$

2ª venta $\rightarrow \frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Fracción que representa el solar vendido $= \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$

Fracción que representa el solar sin vender, que es la superficie expropiada:

$\frac{9}{9} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$, que equivale a 3 200 m^2

La superficie del solar será $3\,200 \cdot 9 = 28\,800$ m^2

30 Un vendedor ambulante lleva una cesta de naranjas. En la primera casa que visita vende la mitad de las naranjas más media. En la segunda casa vende la mitad de las que le quedaban más media. En la tercera y en la cuarta casa, repite la misma operación, con lo que se le agota la mercancía. ¿Cuántas naranjas llevaba?

NOTA: **En ningún momento parte naranjas.**

El número total de naranjas es impar, ya que, en otro caso, al tomar la mitad de las naranjas más media, sería necesario partir una naranja por la mitad.

Supongamos que el número de naranjas que lleva el vendedor es a.

	VENDE	LE QUEDAN
1ª CASA	$\frac{a+1}{2}$	$a - \frac{a+1}{2} = \frac{a-1}{2}$
2ª CASA	$\frac{a-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{a+1}{4}$	$\frac{a-1}{2} - \frac{a+1}{4} = \frac{a-3}{4}$
3ª CASA	$\frac{a-3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{a+1}{8}$	$\frac{a-3}{4} - \frac{a+1}{8} = \frac{a-7}{8}$
4ª CASA	$\frac{a-7}{16} + \frac{8}{16} = \frac{a+1}{16}$	$\frac{a-7}{16} - \frac{a+1}{16} = \frac{a-15}{16}$

$$\frac{a-15}{16} = 0 \;\rightarrow\; a - 15 = 0 \;\rightarrow\; a = 15$$

El vendedor llevaba, en total, 15 naranjas.

31 **¿Cuántos números capicúas hay entre el 2 000 y el 5 000?**

Los números capicúas que hay entre 2 000 y 3 000 son de la forma $2aa2$, siendo $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Hay 10 números capicúas entre 2 000 y 3 000.

Análogamente, entre 3 000 y 4 000 y entre 4 000 y 5 000:

$$3aa3 \;\rightarrow\; 10 \text{ capicúas}$$
$$4aa4 \;\rightarrow\; 10 \text{ capicúas}$$

El total de números capicúas entre 2 000 y 5 000 es de $10 \cdot 3 = 30$

32 **Si multiplicas los números naturales de 1 a 50, ambos inclusive, ¿en cuántos ceros termina el resultado?**

Hemos de ver cuántas veces aparece el producto $2 \cdot 5$, que da lugar a un cero al final del producto.

Descartando los números, del 1 al 50, que al descomponerlos en factores no tienen ni 2 ni 5, obtenemos:

	2	4	5	6	8	10	12	14	15	16	18	20	
FACTOR 2	2	2^2		2	2^3	2	2^2	2		2^4	2	2^2	→ 18 veces
FACTOR 5			5			5			5			5	→ 4 veces

	22	24	25	26	28	30	32	34	35	36	38	40	
FACTOR 2	2	2^3		2	2^2	2	2^5	2		2^2	2	2^3	→ 21 veces
FACTOR 5			5^2			5			5			5	→ 5 veces

	42	44	45	46	48	50	
FACTOR 2	2	2^2		2	2^4	2	→ 9 veces
FACTOR 5			5			5^2	→ 3 veces

El factor 2 aparece en 48 ocasiones y el 5 en 12.

En total, el producto $2 \cdot 5$ aparece 12 veces.

Por tanto, el producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 49 \cdot 50$ acaba en 12 ceros.

33 **Observa este cuadrado mágico:**

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

En él se han colocado los números del 1 al 16 de forma que todas las líneas (filas, columnas y diagonales) suman lo mismo.

a) Construye otro cuadrado mágico con los números del 66 al 81.

b) Construye otro con los números 20, 25, 30, 35, … 95.

66	79	80	69
77	72	71	74
73	76	75	70
78	67	68	81

a) El lugar que ocupa el 1 corresponde al 66; el del 2, al 67; el del 3, al 68…; el del 16 al 81.

Las filas, columnas y diagonales suman 294.

b) El 20 ocupará el lugar del 1; el 25, el del 2; el 30, el del 3, y así sucesivamente, hasta el 95, que ocupa el lugar del 16.

En este cuadrado mágico, las líneas suman 230.

20	85	90	35
75	50	45	60
55	70	65	40
80	25	30	95

Página 33

34 **a) Calcula el punto medio entre cada uno de estos pares de números racionales:**

$$0 \text{ y } 1 \qquad \frac{1}{2} \text{ y } 1 \qquad \frac{1}{2} \text{ y } \frac{3}{4} \qquad \frac{1}{2} \text{ y } \frac{5}{8}$$

b) Representa esos valores en la recta numérica.

c) ¿Es racional el valor medio entre dos racionales? Esto es, ¿se puede expresar como una fracción?

d) ¿Podrías seguir colocando valores medios entre los obtenidos? ¿Cuántos podrías colocar?

e) ¿Cuántos números racionales hay entre 0 y 1? ¿Cuántos racionales hay entre dos racionales cualesquiera?

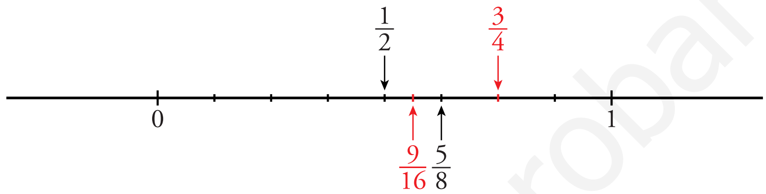
a) Entre 0 y 1 $\rightarrow$ $\dfrac{1}{2}$

Entre $\dfrac{1}{2}$ y 1 $\rightarrow$ $\left(\dfrac{1}{2}+1\right):2=\dfrac{3}{2}:2=\dfrac{3}{4}$

Entre $\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{3}{4}$ $\rightarrow$ $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\right):2=\dfrac{5}{4}:2=\dfrac{5}{8}$

Entre $\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{5}{8}$ $\rightarrow$ $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{8}\right):2=\dfrac{9}{8}:2=\dfrac{9}{16}$

b)



c) Sí, el punto medio entre dos racionales también es racional.

d) Entre los valores obtenidos $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{9}{16}$, $\dfrac{5}{8}$ y $\dfrac{3}{4}$ se pueden colocar infinitos valores medios.

e) En general, entre dos números racionales hay infinitos racionales.

35 **Una máquina transforma fracciones de forma que si entra una fracción F la convierte en una nueva fracción:**

$$\frac{1-F}{1+F}$$

Por ejemplo, entra $\dfrac{1}{2}$ y sale $\dfrac{1}{3}$. Compruébalo.

Pues bien, supongamos que entra la fracción $\dfrac{2}{5}$ y el resultado vuelve a introducirse en la máquina, repitiendo el proceso mil veces. ¿Cuál será la fracción obtenida al final?

$$\text{Si } F=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$\text{Si } F=\frac{2}{5} \rightarrow \frac{1-\dfrac{2}{5}}{1+\dfrac{2}{5}}=\frac{\dfrac{3}{5}}{\dfrac{7}{5}}=\frac{3}{7}$$

Reiteramos el proceso para $F = \frac{3}{7} \quad \rightarrow \quad \dfrac{1 - \frac{3}{7}}{1 + \frac{3}{7}} = \dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{10}{7}} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

es decir, obtenemos de nuevo $\frac{2}{5}$.

Así, en los procesos que ocupan un lugar impar, se obtiene como fracción $\frac{3}{7}$;

y en los procesos que ocupan un lugar par, 2, 4, 6, se obtiene como fracción $\frac{2}{5}$.

Al cabo de 1 000 veces se obtiene como fracción $\frac{2}{5}$.

Página 43

PRACTICA

Relación entre fracción y decimal

1 **Transforma en número decimal las siguientes fracciones:**

a) $\frac{121}{9}$ **b)** $\frac{173}{24}$ **c)** $\frac{1}{18}$ **d)** $\frac{2}{11}$ **e)** $\frac{1\,073}{3\,300}$

a) $\frac{121}{9} = 13,\widehat{4}$ b) $\frac{173}{24} = 7,208\widehat{3}$ c) $\frac{1}{18} = 0,0\widehat{5}$

d) $\frac{2}{11} = 0,\widehat{18}$ e) $\frac{1\,073}{3\,300} = 0,32\widehat{51}$

2 **Clasifica los siguientes números racionales en decimales exactos y decimales periódicos:**

a) $\frac{13}{8}$ **b)** $\frac{139}{27}$ **c)** $\frac{25}{11}$ **d)** $\frac{9}{250}$ **e)** $\frac{4}{13}$ **f)** $\frac{22}{7}$

a) $\frac{13}{8} = 1,625$ b) $\frac{139}{27} = 5,\widehat{148}$ c) $\frac{25}{11} = 2,\widehat{27}$

d) $\frac{9}{250} = 0,036$ e) $\frac{4}{13} = 0,307692$ f) $\frac{22}{7} = 3,\widehat{142857}$

Son decimales exactos a) y d) y decimales periódicos b), c), e) y f).

3 **Expresa en forma de fracción irreducible:**

a) $1,324$ **b)** $2,\widehat{4}$ **c)** $0,008$ **d)** $5,\widehat{53}$

e) $2,3\widehat{5}$ **f)** $0,0\widehat{28}$ **g)** $1,\widehat{235}$ **h)** $0,11\widehat{8}$

a) $1,324 = \frac{1\,324}{1\,000} = \frac{331}{250}$

b) $2,\widehat{4}$

$$\left.\begin{aligned} N &= 2,444\ldots \\ 10N &= 24,44\ldots \end{aligned}\right\}$$

Restando: $10N - N = 22 \;\rightarrow\; 9N = 22 \;\rightarrow\; N = \frac{22}{9} \;\rightarrow\; 2,4 = \frac{22}{9}$

c) $0,008 = \frac{8}{1\,000} = \frac{1}{125}$

d) $5,\widehat{53}$

$$\left.\begin{array}{r} N = \quad 5,5353\ldots \\ 100N = 553,5353\ldots \end{array}\right\}$$

Restando: $100N - N = 548 \;\rightarrow\; 99N = 548 \;\rightarrow\; N = \dfrac{548}{99}$

Así: $5,\widehat{53} = \dfrac{548}{99}$

e) $2,3\widehat{5}$

$$\left.\begin{array}{r} N = \quad 2,3555\ldots \\ 10N = \quad 23,555\ldots \\ 100N = 235,555\ldots \end{array}\right\}$$

Restando: $100N - 10N = 212 \;\rightarrow\; 90N = 212 \;\rightarrow\; N = \dfrac{212}{90} = \dfrac{106}{45}$

Así: $2,3\widehat{5} = \dfrac{106}{45}$

f) $0,0\widehat{28}$

$$\left.\begin{array}{r} N = \quad 0,02828\ldots \\ 10N = \quad 0,2828\ldots \\ 1\,000N = 28,2828\ldots \end{array}\right\}$$

Restando: $1\,000N - 10N = 28 \;\rightarrow\; 990N = 28 \;\rightarrow\; N = \dfrac{28}{990} = \dfrac{14}{495}$

Así: $0,0\widehat{28} = \dfrac{14}{495}$

g) $1,\widehat{235}$

$$\left.\begin{array}{r} N = \quad 1,235235\ldots \\ 1\,000N = 1\,235,235235\ldots \end{array}\right\}$$

Restando: $1\,000N - N = 1\,234 \;\rightarrow\; 999N = 1\,234 \;\rightarrow\; N = \dfrac{1\,234}{999}$

Así: $1,\widehat{235} = \dfrac{1\,234}{999}$

h) $0,11\widehat{8}$

$$\left.\begin{array}{r} N = \quad 0,11888\ldots \\ 100N = \quad 11,888\ldots \\ 1\,000N = 118,888\ldots \end{array}\right\}$$

Restando: $1\,000N - 100N = 107 \;\rightarrow\; 900N = 107 \;\rightarrow\; N = \dfrac{107}{900}$

Así: $0,11\widehat{8} = \dfrac{107}{900}$

4 **Ordena de menor a mayor:**

$$5{,}53; \quad 5{,}\widehat{53}; \quad 5{,}5\widehat{3}; \quad 5{,}5; \quad 5{,}56$$

$5{,}5 < 5{,}53 < 5{,}5\widehat{3} < 5{,}253 < 5{,}56$

5 **¿Cuáles de los siguientes números pueden expresarse como fracción?:**

$$3{,}45;\ 1{,}00\widehat{3};\ \sqrt{2};\ 2{,}131131113\ldots;\ \pi;\ 1{,}\widehat{142857}$$

Escribe la fracción que representa a cada uno en los casos posibles.

Se pueden expresar como fracción: $3{,}45$; $1{,}00\widehat{3}$ y $1{,}\widehat{142857}$

- $3{,}45 = \dfrac{345}{100} = \dfrac{69}{20}$

- $1{,}00\widehat{3}$

$$\left.\begin{array}{r} N = 1{,}00333\ldots \\ 100N = 100{,}333\ldots \\ 1\,000N = 1\,003{,}333\ldots \end{array}\right\}$$

Restando: $1\,000N - 100N = 903 \;\rightarrow\; 900N = 903 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; N = \dfrac{903}{900} = \dfrac{301}{300} \;\rightarrow\; 1{,}00\widehat{3} = \dfrac{301}{300}$

- $1{,}\widehat{142857}$

$1\,142\,857{,}\widehat{142857} - 1{,}\widehat{142857} = 1\,142\,856$

$$\left\{\begin{array}{r} N = 1{,}142857\ldots \\ 1\,000\,000N = 1\,142\,857{,}142857\ldots \end{array}\right.$$

Restando: $1\,000\,000N - N = 1\,142\,856 \;\rightarrow\; 999\,999N = 1\,142\,856$

$$N = \frac{1\,142\,856}{999\,999} = \frac{3^3 \cdot 2^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37}{3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} = \frac{2^3}{7} = \frac{8}{7}$$

$1{,}\widehat{142857} = \dfrac{8}{7}$

6 **Escribe, en cada caso, un decimal exacto y un decimal periódico comprendidos entre los números dados:**

a) $3{,}5$ y $3{,}6$ **b)** $3{,}\widehat{4}$ y $3{,}\widehat{5}$ **c)** $3{,}2\widehat{5}$ y $3{,}\widehat{26}$

a) Entre 3,5 y 3,6

Exacto $\rightarrow$ 3,55

Periódico $\rightarrow$ $3{,}5\widehat{1}$

b) Entre $3{,}\overset{\frown}{4}$ y $3{,}\overset{\frown}{5}$

Exacto → 3,47

Periódico → $3{,}4\overset{\frown}{52}$

c) Entre $3{,}2\overset{\frown}{5}$ y $3{,}\overset{\frown}{26}$

Exacto → 3,26

Periódico → $3{,}25\overset{\frown}{8}$

7 **Di cuáles de los siguientes números son irracionales:**

a) $-\dfrac{5}{3}$ **b)** $3{,}\overset{\frown}{26}$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** 2π **e)** $1+\sqrt{2}$

Son irracionales $\sqrt{3}$, 2π y $1+\sqrt{2}$

Aproximación y errores

8 **Aproxima a las centésimas:**

a) 0,318 **b)** 3,2414 **c)** 18,073

d) $\dfrac{100}{71}$ **e)** $\dfrac{25}{13}$ **f)** $\dfrac{65}{7}$

a) 0,32 b) 3,24 c) 18,07

d) $\dfrac{100}{71} = 1{,}4084507$ → la aproximación a las centésimas es 1,41

e) $\dfrac{25}{13} = 1{,}9230769$ → la aproximación a las centésimas es 1,92

f) $\dfrac{65}{7} = 9{,}2857142$ → la aproximación a las centésimas es 9,29

9 **Expresa con un número adecuado de cifras significativas:**

a) Audiencia de un programa de televisión: 3 017 849 espectadores.

b) Tamaño de un virus: 0,008375 mm.

c) Resultado de 15^7.

d) Fuerza de atracción entre dos cuerpos: 18 753 N.

e) Presupuesto de un ayuntamiento: 987 245 €.

f) Porcentaje de votos de un candidato a delegado: 37,285%.

g) Capacidad de un pantano: 3 733 827 000 *l*.

a) 3 000 000 espectadores

b) 0,008 mm

c) $15^7 = 170\,859\,375 \quad\rightarrow\quad 170\,000\,000$

d) 19 000 N

e) 1 000 000 €

f) 37%

g) 3 750 000 000 *l*

10 **Calcula, en cada uno de los apartados del ejercicio anterior, el error absoluto y el error relativo de las cantidades dadas como aproximaciones.**

Dado que:

Error absoluto = |Valor real – Valor de la medición|

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}},$$

obtendríamos:

a) Error absoluto = 17 849

$$\text{Error relativo} = \frac{17\,849}{3\,017\,849} \approx 0{,}006$$

b) Error absoluto = 0,000375

$$\text{Error relativo} = \frac{0{,}000375}{0{,}008375} \approx 0{,}04$$

c) Error absoluto = 859 375

$$\text{Error relativo} = \frac{859\,375}{170\,859\,375} \approx 0{,}005$$

d) Error absoluto = 247

$$\text{Error relativo} = \frac{247}{18\,753} \approx 0{,}013$$

e) Error absoluto = 12 755

$$\text{Error relativo} = \frac{12\,755}{987\,245} \approx 0{,}013$$

f) Error absoluto = 0,285

$$\text{Error relativo} = \frac{0{,}285}{37{,}285} \approx 0{,}007$$

g) Error absoluto = 16 173 000

$$\text{Error relativo} = \frac{16\,173\,000}{3\,733\,827\,000} \approx 0{,}004$$

11 Da una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes aproximaciones:

a) Radio de la Tierra: 6 400 km.

b) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km.

c) Habitantes de España: 41 millones.

d) Tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia: 0,007 segundos.

e) Volumen de una gota de agua: 0,4 mm^3.

a) Cota del error absoluto: $\frac{100}{2} = 50$

Cota del error relativo: $\frac{50}{6\,400} \approx 0{,}008$

b) Cota del error absoluto: $\frac{10\,000\,000}{2} = 5\,000\,000$

Cota del error relativo: $\frac{5\,000\,000}{150\,000\,000} \approx 0{,}03$

c) Cota del error absoluto: 500 000

Cota del error relativo: $\frac{500\,000}{40\,000\,000} \approx 0{,}12$

d) Cota del error absoluto: $\frac{0{,}001}{2} = 0{,}0005$

Cota del error relativo: $\frac{0{,}0005}{0{,}007} \approx 0{,}07$

e) Cota del error absoluto: $\frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$

Cota del error relativo: $\frac{0{,}05}{0{,}4} \approx 0{,}125$

Notación científica

12 Expresa con todas las cifras:

a) $6{,}25 \cdot 10^8$ **b) $2{,}7 \cdot 10^{-4}$** **c) $3 \cdot 10^{-6}$**

d) $5{,}18 \cdot 10^{14}$ **e) $3{,}215 \cdot 10^{-9}$** **f) $-4 \cdot 10^{-7}$**

a) 625 000 000 b) 0,00027 c) 0,000003

d) 518 000 000 000 000 e) 0,000000003215 f) –0,0000004

13 **Escribe en notación científica:**

a) 4 230 000 000 **b) 0,00000004** **c) 84 300** **d) –0,000572**

a) $4,23 \cdot 10^9$ b) $4 \cdot 10^{-8}$ c) $8,43 \cdot 10^4$ d) $-5,72 \cdot 10^{-4}$

Página 44

14 **Expresa en notación científica:**

a) Recaudación de las quinielas en una jornada de liga de fútbol: 1 628 000 €.

b) Toneladas de CO_2 que se emitieron a la atmósfera en 1995 en Estados Unidos: 5 228,5 miles de millones.

c) Radio del átomo de oxígeno: 0,000000000066 m

a) $1\,628\,000\,000 = 1,628 \cdot 10^9$

b) 5 228,5 miles de millones $= 5,2285 \cdot 10^{12}$

c) $0,000000000066$ m $= 6,6 \cdot 10^{-11}$

15 **Calcula con lápiz y papel y comprueba después el resultado con la calcula-dora:**

a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (1,5 \cdot 10^7)$ **b) $(3 \cdot 10^{-8}) \cdot (2,1 \cdot 10^4)$**

c) $(1,25 \cdot 10^{-17}) \cdot (4 \cdot 10^{13})$ **d) $(2,4 \cdot 10^{-7}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})$**

a) $(2 \cdot 1,5) \cdot 10^{5+7} = 3 \cdot 10^{12}$

b) $(3 \cdot 2,1) \cdot 10^{-8+4} = 6,3 \cdot 10^{-4}$

c) $(1,25 \cdot 4) \cdot 10^{-17+13} = 5 \cdot 10^{-4}$

d) $(2,4 \cdot 5) \cdot 10^{-7-6} = 12 \cdot 10^{-13} = 1,2 \cdot 10^{-12}$

16 **Efectúa y expresa el resultado en notación científica, sin utilizar la calculadora:**

a) $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$ **b) $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$**

c) $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$ **d) $(4 \cdot 10^5)^{-2}$**

e) $3,1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$

a) $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18}) = (3 \cdot 8) \cdot 10^{-7+18} = 24 \cdot 10^{11} = 2,4 \cdot 10^{12}$

b) $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3}) = (4 \cdot 5) \cdot 10^{-12-3} = 20 \cdot 10^{-15} = 2 \cdot 10^{-14}$

c) $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3}) = (5 : 2) \cdot 10^{12-(-3)} = 2,5 \cdot 10^{15}$

d) $(4 \cdot 10^5)^{-2} = 4^{-2} \cdot 10^{-10} = \dfrac{1}{16} \cdot 10^{-10} = 0,0625 \cdot 10^{-10}$

e) $3,1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10} = 310 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^{10} = 312 \cdot 10^{10} = 3,12 \cdot 10^{12}$

17 **Expresa en notación científica y calcula:**

a) $(75\,800)^4 : (12\,000)^2$

b) $\dfrac{0{,}000541 \cdot 10\,318\,000}{1\,520\,000 \cdot 0{,}00302}$

c) $\dfrac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0{,}00003 - 0{,}00015}$

a) $(75\,800)^4 : (12\,000)^2 = (7{,}58 \cdot 10^4)^4 : (1{,}2 \cdot 10^4)^2 =$

$$= [(7{,}58)^4 \cdot 10^{16}] : [(1{,}2)^2 \cdot 10^8] = \frac{(7{,}58)^4}{(1{,}2)^2} \cdot 10^{16-8} =$$

$$= 2\,292{,}52 \cdot 10^8 = 2{,}29252 \cdot 10^{11} \simeq 2{,}29 \cdot 10^{11}$$

b) $\dfrac{0{,}000541 \cdot 10\,318\,000}{1\,520\,000 \cdot 0{,}00302} = \dfrac{5{,}41 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}0318 \cdot 10^7}{1{,}51 \cdot 10^6 \cdot 3{,}02 \cdot 10^{-3}} =$

$$= \frac{(5{,}41 \cdot 1{,}0318) \cdot 10^3}{(1{,}52 \cdot 3{,}02) \cdot 10^3} = \frac{5{,}582038}{4{,}5904} \simeq 1{,}216$$

c) $\dfrac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0{,}00003 - 0{,}00015} = \dfrac{2{,}7 \cdot 10^6 - 13 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{-5} - 15 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{(2{,}7 - 13) \cdot 10^6}{(3 - 15) \cdot 10^{-5}} =$

$$= \frac{-10{,}3 \cdot 10^6}{-12 \cdot 10^{-5}} = 0{,}858\widehat{3} \cdot 10^{11}$$

18 **Utiliza la calculadora para efectuar las siguientes operaciones y expresa el resultado con dos y con tres cifras significativas:**

a) $(4{,}5 \cdot 10^{12}) \cdot (8{,}37 \cdot 10^{-4})$ b) $(5{,}2 \cdot 10^{-4}) \cdot (3{,}25 \cdot 10^{-9})$

c) $(8{,}4 \cdot 10^{11}) : (3{,}2 \cdot 10^{-6})$ d) $(7{,}8 \cdot 10^{-7})^3$

a) $(4{,}5 \cdot 10^{12}) \cdot (8{,}37 \cdot 10^{-4}) = (4{,}5 \cdot 8{,}37) \cdot 10^{12-4} =$

$$= 37{,}665 \cdot 10^8 \simeq 3{,}7665 \cdot 10^9$$

Con 3 cifras significativas $\rightarrow$ $3{,}77 \cdot 10^9$

Con 2 cifras significativas $\rightarrow$ $3{,}8 \cdot 10^9$

b) $(5{,}2 \cdot 10^{-4}) \cdot (3{,}25 \cdot 10^{-9}) = (5{,}2 \cdot 3{,}25) \cdot 10^{-4-9} = 16{,}9 \cdot 10^{-13} =$

$$= 1{,}69 \cdot 10^{-12} \simeq 1{,}7 \cdot 10^{-12}$$

c) $(8{,}4 \cdot 10^{11}) : (3{,}2 \cdot 10^{-6}) = (8{,}4 : 3{,}2) \cdot 10^{11-(-6)} =$

$$= 2{,}625 \cdot 10^{17} \simeq 2{,}63 \cdot 10^{17} \simeq 2{,}6 \cdot 10^{17}$$

d) $(7{,}8 \cdot 10^{-7})^3 = (7{,}8)^3 \cdot 10^{-7 \cdot 3} = 474{,}552 \cdot 10^{-21} = 4{,}74552 \cdot 10^{-19} \simeq$

$$\simeq 4{,}75 \cdot 10^{-19} \simeq 4{,}8 \cdot 10^{-19}$$

19 **Efectúa y expresa el resultado en notación científica:**

a) $\dfrac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$

b) $\dfrac{7{,}35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3{,}2 \cdot 10^7$

c) $(4{,}3 \cdot 10^3 - 7{,}2 \cdot 10^5)^2$

a) $\dfrac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5} = \dfrac{3 \cdot 10^{-5} + 70 \cdot 10^{-5}}{10 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5} = \dfrac{(3 + 70) \cdot 10^{-5}}{(10 - 5) \cdot 10^5} =$

$= \dfrac{73 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^5} = 14{,}6 \cdot 10^{-10} = 1{,}46 \cdot 10^{-9}$

b) $\dfrac{7{,}35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3{,}2 \cdot 10^7 = (7{,}35 : 5) \cdot 10^{4-(-3)} + 3{,}2 \cdot 10^7 =$

$= 1{,}47 \cdot 10^7 + 3{,}2 \cdot 10^7 = (1{,}47 + 3{,}2) \cdot 10^7 =$

$= 4{,}67 \cdot 10^7$

c) $(4{,}3 \cdot 10^3 - 7{,}2 \cdot 10^5)^2 = (4{,}3 \cdot 10^3 - 720 \cdot 10^3)^2 = (-715{,}7 \cdot 10^3)^2 =$

$= (-7{,}157 \cdot 10^5)^2 \simeq 51{,}22 \cdot 10^{10} = 5{,}122 \cdot 10^{11}$

PIENSA Y RESUELVE

20 **La masa del Sol es 330 000 veces la de la Tierra, aproximadamente, y esta es $5{,}98 \cdot 10^{21}$ t. Expresa en notación científica la masa del Sol en kilos.**

$M_{Sol} = 330\,000 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{21} = 33 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{25} = 1{,}9734 \cdot 10^{27}$ t

$M_{Sol} = 1{,}9734 \cdot 10^{30}$ kg

21 **El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de una ballena?**

1 t tiene 10^6 g; por tanto, 138 t tendrán $1{,}38 \cdot 10^8$ g.

Como un virus pesa 10^{-18} g, entonces la ballena azul necesita:

$\dfrac{1{,}38 \cdot 10^8}{10^{-18}} = 1{,}38 \cdot 10^{26}$ virus para conseguir su peso.

22 **Para medir distancias entre astros, se utiliza como unidad de medida el año-luz, que es la distancia que recorre la luz en un año a una velocidad de $3 \cdot 10^5$ km/s.**

a) Halla a cuántos kilómetros equivale un año-luz y exprésalo con todas sus cifras.

b) La Vía Láctea, nuestra galaxia, tiene un diámetro de cien mil años-luz. Exprésalo en kilómetros.

a) Calculamos el número de segundos que hay en 1 año:

$$1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s} \quad \rightarrow \quad 1 \text{ año} = 365 \times 24 \times 3\,600 = 3{,}1536 \cdot 10^7 \text{ segundos}$$

Así, la distancia que recorre la luz en un año será:

$$(3 \cdot 10^5) \cdot (3{,}1536 \cdot 10^7) = 9{,}4608 \cdot 10^{7+5} = 9{,}4608 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

Un año luz $\simeq 9{,}46 \cdot 10^{12}$ km = 9,46 billones de kilómetros

$$1 \text{ año luz} = 9\,460\,000\,000\,000 \text{ km}$$

b) Diámetro de la Vía Láctea:

$$10^5 \text{ años luz} = 10^5 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 9{,}46 \cdot 10^{17} \text{ km}$$

23 **La dosis de una vacuna es 0,05 cm^3. Si la vacuna tiene 100 000 000 bacterias por centímetro cúbico, ¿cuántas bacterias habrá en una dosis? Exprésalo en notación científica.**

En 1 cm^3 hay 10^8 bacterias $\rightarrow$ en una dosis habrá:

$$0{,}05 \cdot 10^8 = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^8 = 5 \cdot 10^6 \text{ bacterias}$$

24 **Si la velocidad de crecimiento del cabello humano es $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ km/h, ¿cuántos centímetros crece el pelo en un mes? ¿Y en un año?**

Calculamos el número de horas que hay en un mes:

$$30 \cdot 24 = 720 \text{ h}$$

Crecimiento del pelo en 1 mes:

$$1{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot 720 \text{ km} = 1\,152 \cdot 10^{-8} \text{ km} = 1{,}152 \cdot 10^{-5} \text{ km} \simeq 1{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ km} =$$

$$= 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^5 \text{ cm} = 1{,}2 \text{ cm}$$

En 1 año habrá crecido 12 veces lo que crece en 1 mes:

$$12 \cdot 1{,}2 \text{ cm} = 14{,}4 \text{ cm}$$

25 **En 18 g de agua hay $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas de este compuesto. ¿Cuál es la masa en gramos de una molécula de agua?**

Si en 18 g hay $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas, la masa de una molécula será:

$$\frac{18}{6{,}02 \cdot 10^{23}} \text{ g} = (18 : 6{,}02) \cdot 10^{-23} \text{ g} \simeq 2{,}99 \cdot 10^{-23} \text{ g} \simeq 3 \cdot 10^{-23} \text{ g}$$

Página 45

26 **Asocia cada uno de estos números con una de las cantidades dadas:**

Números:

$$5{,}98 \cdot 10^{31};\ \ 1{,}5 \cdot 10^{-1};\ \ 9{,}1 \cdot 10^{-31}$$

Cantidades:

Paso de un tornillo en milímetros.

Masa del electrón en kilogramos.

Masa de la Tierra en toneladas.

$5{,}98 \cdot 10^{31}$ → Masa de la Tierra en toneladas

$1{,}5 \cdot 10^{-1}$ → Paso de un tornillo en milímetros

$9{,}1 \cdot 10^{-31}$ → Masa del electrón en kilogramos

27 **Di cuál es la vigésima cifra decimal de estos números cuando los expresamos como decimales:**

a) $\frac{123}{999}$ b) $\frac{123}{990}$ c) $\frac{45}{13}$

a) $\frac{123}{999} = 0,\widehat{123}$ → La vigésima cifra decimal ($20 = 6 \cdot 3 + 2$) coincidirá con la que ocupa la segunda posición; en este caso, el 2.

b) $\frac{123}{990} = 0{,}1\widehat{24}$ → La vigésima cifra decimal coincidirá con la primera cifra del periodo ($20 - 1 = 19$ y $19 = 9 \cdot 2 + 1$); en este caso, el 2.

c) $\frac{45}{13} = 3,\widehat{461538}$ → La vigésima cifra decimal coincidirá con la que ocupa el segundo lugar ($20 = 6 \cdot 3 + 2$); en este caso, el 6.

28 **¿Cuál de las aproximaciones 2,5 ó 2,6 es la más próxima a $\frac{18}{7}$? Calcula el error absoluto cometido en cada caso.**

$\frac{18}{7} \simeq 2{,}571$

La aproximación 2,6 está más próxima a $\frac{18}{7}$.

Calculamos el error absoluto con cada aproximación:

Aproximando a 2,5 → Error absoluto $= 2{,}571 - 2{,}5 = 0{,}071$

Aproximando a 2,6 → Error absoluto $= 2{,}6 - 2{,}571 = 0{,}029$

29 **Indica en cada caso con cuál de las aproximaciones cometemos más error:**

a) $\dfrac{19}{30} \begin{cases} 0{,}63 \\ 0{,}64 \end{cases}$ **b)** $\dfrac{41}{90} \begin{cases} 0{,}45 \\ 0{,}46 \end{cases}$

c) $\dfrac{5}{12} \begin{cases} 0{,}41 \\ 0{,}42 \end{cases}$ **d)** $\dfrac{25}{18} \begin{cases} 1{,}39 \\ 1{,}40 \end{cases}$

a) $\dfrac{19}{30} = 0{,}6\widehat{3}$ está más próximo a 0,63 que a 0,64. Se comete más error con 0,64.

b) $\dfrac{41}{90} = 0{,}4\widehat{5}$ está más próximo a 0,46. Se comete más error tomando como aproximación 0,45.

c) $\dfrac{5}{12} = 0{,}41\widehat{6}$ está más próximo a 0,42. Se comete más error tomando 0,41 como aproximación.

d) $\dfrac{25}{18} = 1{,}3\widehat{8}$ está más próximo a 1,39. Se comete más error tomando 1,40 como aproximación.

30 **Escribe una aproximación de los siguientes números con un error menor que cinco milésimas:**

a) 5,7468 **b) 12,5271** **c) 8,0018**

a) 5,7468

Tomando 5,75 como aproximación, el error absoluto que se comete es:

$$5{,}75 - 5{,}7468 = 3{,}2 \cdot 10^{-3} < 0{,}005$$

b) 12,5271

Aproximando a 12,53 el error absoluto será:

$$12{,}53 - 12{,}5271 = 2{,}9 \cdot 10^{-3} < 0{,}005$$

c) 8,0018

Tomando 8 como aproximación, el error absoluto será:

$$8{,}0018 - 8 = 1{,}8 \cdot 10^{-3} < 0{,}005$$

31 **Calcula una cota del error cometido al hacer las siguientes aproximaciones:**

a) Peso de un grano de arroz: 0,000028 g.

b) Número de granos de arroz en un kilo: 36 miles.

c) Precio de un coche: 18 miles de euros.

d) Grosor de un hilo: 0,025 cm.

e) Diámetro de una célula: 0,00008 mm.

a) 0,000028 g = $2{,}8 \cdot 10^{-5}$

Cota del error absoluto = $\frac{0{,}00001}{2} = 0{,}000005$

b) 36 miles

Cota del error absoluto = $\frac{1\,000}{2} = 500$

c) 18 miles de euros

Cota del error absoluto = $\frac{1\,000}{2} = 500$

d) 0,025 cm = $2{,}5 \cdot 10^{-2}$

Cota del error absoluto = $\frac{0{,}01}{2} = 0{,}005$

e) 0,00008 mm

Cota del error absoluto = $\frac{0{,}00001}{2} = 0{,}000005$

f) 6 millones de km

Cota del error absoluto = $\frac{1\,000\,000}{2} = 500\,000$

Página 57

PRACTICA

Números reales

1 **a) Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:**

$$\frac{41}{13}; \quad \sqrt{49}; \quad 53,\widehat{7}; \quad 3,2; \quad \sqrt{12}; \quad \sqrt[3]{5}$$

b) ¿Alguno de ellos es entero?

c) Ordénalos de menor a mayor.

a) Racionales: $\frac{41}{13}$; $-\sqrt{49}$; $53,\widehat{7}$; $3,2 \cdot 10^{-10}$

Irracionales: $\sqrt{12}$; $\sqrt[3]{5}$

b) Entero: $-\sqrt{49} = -7$

c) $-\sqrt{49} < 3,2 \cdot 10^{-10} < \sqrt[3]{5} < \frac{41}{13} < \sqrt{12} < 53,\widehat{7}$

2 **Di cuáles de los siguientes números son irracionales:**

$$-\frac{3}{4}; \quad 1,7\widehat{3}; \quad \sqrt{3}; \quad \pi; \quad \sqrt{9}; \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Son irracionales $\sqrt{3}$, π y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3 **Ordena de menor a mayor:**

a) $1,45; \quad 1,\widehat{4}; \quad \sqrt{2}$

b) $\sqrt{2}; \quad \sqrt[3]{3}; \quad \frac{13}{9}$

a) $\sqrt{2} < 1,\widehat{4} < 1,45$

b) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \frac{13}{9}$

4 **Clasifica estos números como naturales, enteros, racionales y/o reales:**

3	$-\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}$	$7,23$
-2	π	0	-4
$\frac{1}{3}$	$\sqrt{-1}$	$\frac{11}{9}$	$\sqrt{5}$
2	$2,48$	18	$1+\sqrt{2}$
-1	$\sqrt[3]{-1}$	1	$1,010203\ldots$

$\mathbb{N} \rightarrow 3;\ 0;\ 2;\ 18;\ 1$

$\mathbb{Z} \rightarrow 3;\ 0;\ 2;\ 18;\ 1;\ -2;\ -4;\ -1;\ \sqrt[3]{-1}$

$\mathbb{Q} \rightarrow 3;\ 0;\ 2;\ 18;\ 1;\ -2;\ -4;\ -1;\ \sqrt[3]{-1};\ -\frac{3}{4};\ 7{,}23;\ \frac{1}{3};\ \frac{11}{9};\ 2{,}48$

$\mathbb{R} \rightarrow 3;\ 0;\ 2;\ 18;\ 1;\ -2;\ -4;\ -1;\ \sqrt[3]{-1};\ -\frac{3}{4};\ 7{,}23;\ \frac{1}{3};\ \frac{11}{9};\ 2{,}48;$

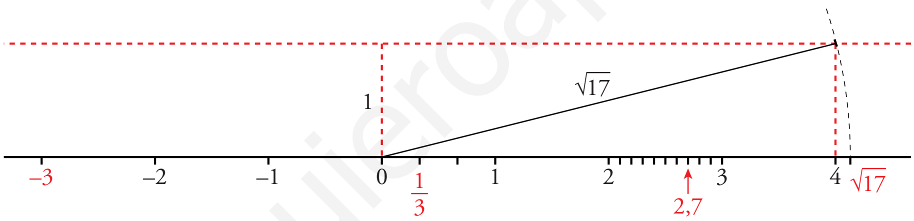
$\sqrt{2};\ \pi;\ 1 + \sqrt{2};\ 1{,}010203\ldots$

5 Representa en la recta real los siguientes números:

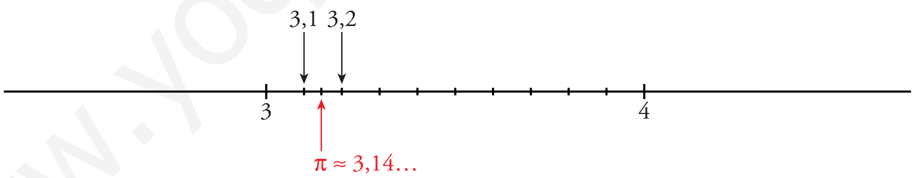
a) $-3;\ 2{,}7;\ \sqrt{17};\ \frac{1}{3}$**, de forma exacta.**

b) $\pi = 3{,}14\ldots$**, de forma aproximada.**

a) $\sqrt{17} = \sqrt{4^2 + 1^2}$



b)



Intervalos

6 Dados los números: 1; 2; 2,3; 3; 3,9; 4; 4,1:

a) Indica cuáles de ellos pertenecen al intervalo [2, 4).

b) Lo mismo, pero con el intervalo [2, 4].

c) Igual, pero con el intervalo (2, +∞).

a) Al intervalo [2, 4) pertenecen el 2; 2,3; 3; 3,9

b) En el intervalo [2, 4] están el 2; 2,3; 3; 3,9; 4

c) En el intervalo (2, +∞) se encuentran los números 2,3; 3; 3,9; 4; 4,1

7 Escribe en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones dadas en cada caso:

a) Menores o iguales que 3.

b) Comprendidos entre –1 y 0, incluyendo el 0, pero no el –1.

c) Mayores que 2, pero menores que 3.

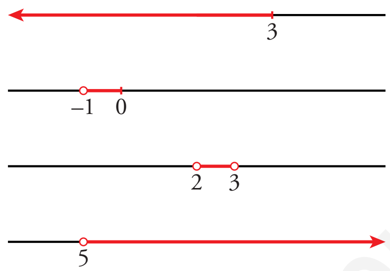
d) Mayores que 5.

a) $(-\infty, 3]$

b) $(-1, 0]$

c) $(2, 3)$

d) $(5, +\infty)$



8 Escribe en forma de intervalo y representa en cada caso:

a) $\{x \,/\, -6 \le x \le 3\}$

b) $\{x \,/\, -4 < x \le 4\}$

c) $\{x \,/\, x \ge 3\}$

d) $\{x \,/\, 0 < x < 5\}$

e) $\{x \,/\, x > -2\}$

f) $\{x \,/\, 10 \ge x\}$

a) $[-6, 3]$

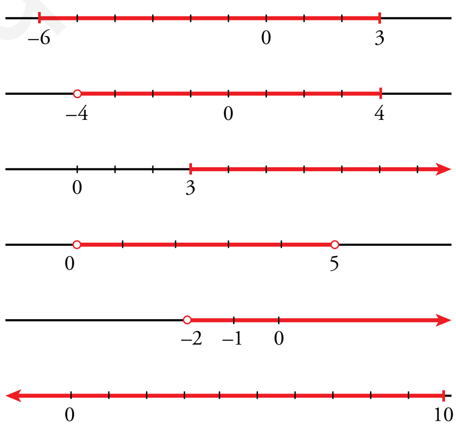
b) $(-4, 4]$

c) $[3, +\infty)$

d) $(0, 5)$

e) $(-2, +\infty)$

f) $(-\infty, 10]$



9 Escribe en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones indicadas en cada caso:

a) $0 < x < 1$

b) $x \le -3$

c) $x > 0$

d) $-5 \le x \le 5$

e) $x > -5$

f) $1 \le x < 3$

a) (0, 1)

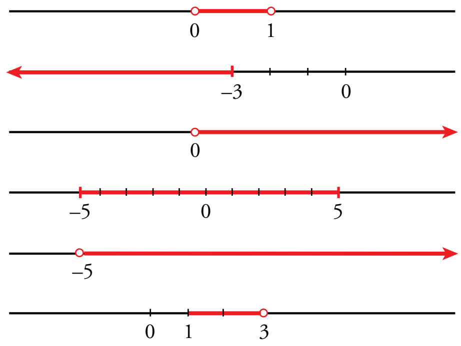
b) (–∞, –3]

c) (0, +∞)

d) [–5, 5]

e) (–5, +∞)

f) [1, 3)



10 **Escribe en forma de desigualdad y representa los siguientes intervalos:**

a) (1; 2,5) **b) [–2, 3]** **c) [–7, 0)**

d) [–3, +∞) **e) (2, +∞)** **f) (–5, 2]**

a) $\{x \,/\, 1 < x < 2{,}5\}$

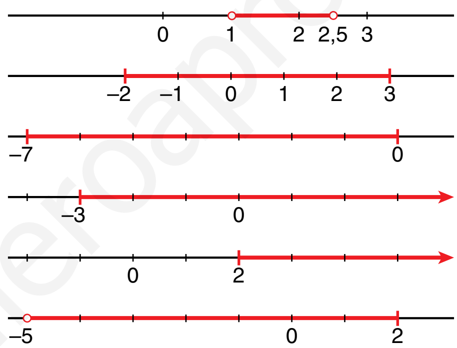
b) $\{x \,/\, -2 \le x \le 3\}$

c) $\{x \,/\, -7 \le x \le 0\}$

d) $\{x \,/\, -3 \le x\}$

e) $\{x \,/\, x > 2\}$

f) $\{x \,/\, -5 < x \le 2\}$



Potencias y raíces

11 **Expresa en forma de potencia con exponente fraccionario:**

a) $\sqrt[3]{5^2}$ **b)** $\sqrt[5]{a^2}$ **c)** $\sqrt[8]{a^5}$ **d)** $\sqrt[3]{x}$

e) $\sqrt{a^{-1}}$ **f)** $\sqrt[4]{a^2}$ **g)** $\sqrt{a}$ **h)** $\sqrt{2}$

a) $5^{2/3}$ b) $a^{2/5}$ c) $a^{5/8}$ d) $x^{1/3}$

e) $a^{-1/2}$ f) $a^{2/4} = a^{1/2}$ g) $a^{1/2}$ h) $2^{1/2}$

12 **Expresa en forma de raíz:**

a) $3^{2/5}$ **b)** $2^{3/4}$ **c)** $a^{1/3}$ **d)** $a^{1/2}$

e) $x^{1/4}$ **f)** $a^{3/2}$ **g)** $x^{-1/2}$ **h)** $x^{-3/2}$

a) $\sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$ b) $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$ c) $\sqrt[3]{a}$ d) $\sqrt{a}$

e) $\sqrt[4]{x}$ f) $\sqrt{a^3}$ g) $\sqrt{x^{-1}}$ h) $\sqrt{x^{-3}}$

13 **Calcula:**

a) $25^{1/2}$ **b)** $27^{1/3}$ **c)** $125^{2/3}$ **d)** $81^{3/4}$

a) $25^{1/2} = (5^2)^{1/2} = 5^{2/2} = 5$

b) $27^{1/3} = (3^3)^{1/3} = 3^{3/3} = 3$

c) $125^{2/3} = (5^3)^{2/3} = 5^{3 \cdot 2/3} = 5^2 = 25$

d) $81^{3/4} = (3^4)^{3/4} = 3^3 = 27$

Página 58

14 **Calcula las siguientes raíces:**

a) $\sqrt[4]{16}$ **b)** $\sqrt[5]{243}$ **c)** $\sqrt[7]{0}$

d) $\sqrt[4]{1}$ **e)** $\sqrt[3]{-1}$ **f)** $\sqrt{-1}$

g) $\sqrt[3]{-27}$ **h)** $\sqrt{144}$

a) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

b) $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

c) $\sqrt[7]{0} = 0$

d) $\sqrt[4]{1} = 1$

e) $\sqrt[3]{-1} = -1$

f) $\sqrt{-1}$ no existe

g) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

h) $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$

15 **Obtén con la calculadora:**

a) $\sqrt[5]{9}$ **b)** $\sqrt[3]{-173}$ **c)** $\sqrt[4]{14^3}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}$ **e)** $\sqrt{28^3}$ **f)** $28^{3/4}$

g) $8^{-1/3}$ **h)** $0,02^{1/2}$ **i)** $0,2^{-1/2}$

a) $\sqrt[5]{9} = 9^{1/5} \approx 1,55$

b) $\sqrt[3]{-173} \approx -5,57$

c) $\sqrt[4]{14^3} = 14^{3/4} \approx 7,24$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{1/4} \approx 0,88$

e) $\sqrt{28^3} \approx 148,16$

f) $28^{3/4} \approx 12,17$

g) $8^{-1/3} = 0,5$

h) $0,02^{1/2} \approx 0,14$

i) $0,2^{-1/2} \approx 2,24$

Radicales

16 **Multiplica y simplifica el resultado:**

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 8} = \sqrt{400} = 20$

d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3} = \sqrt{a \cdot a^3} = \sqrt{a^4} = a^2$

17 **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[6]{5^3}$ b) $\sqrt[15]{2^{12}}$ c) $\sqrt[10]{a^8}$

d) $\sqrt[12]{a^4 \cdot b^8}$ e) $\sqrt[8]{x^2 y^2}$ f) $\sqrt[4]{x^{12}}$

a) $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$

b) $\sqrt[15]{2^{12}} = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$

c) $\sqrt[10]{a^8} = \sqrt[5]{a^4}$

d) $\sqrt[12]{a^4 \cdot b^8} = \sqrt[3]{a \cdot b^2}$

e) $\sqrt[8]{x^2 \cdot y^2} = \sqrt[4]{x \cdot y}$

f) $\sqrt[4]{x^{12}} = x^3$

18 **Reduce a índice común y ordena de menor a mayor en cada caso:**

a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}$ b) $\sqrt[3]{2^4}, \sqrt[4]{5^3}, \sqrt[6]{3^5}$

a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64} \\ \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81} \\ \sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{64} \end{array}\right\} \quad \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$$

b) $\sqrt[3]{2^4}, \sqrt[4]{5^3}, \sqrt[6]{3^5}$

$\sqrt[3]{2^4} = \sqrt[12]{2^{16}}$; $\sqrt[4]{5^3} = \sqrt[12]{5^9}$; $\sqrt[6]{3^5} = \sqrt[12]{3^{10}}$

Como $3^{10} < 2^{16} < 5^9 \rightarrow \sqrt[6]{3^5} < \sqrt[3]{2^4} < \sqrt[4]{5^3}$

19 **Divide y simplifica el resultado:**

a) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt[4]{\dfrac{5}{12}} : \sqrt[4]{\dfrac{20}{3}}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[4]{a}}$ e) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} : \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$

a) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{5}{12}} : \sqrt[4]{\dfrac{20}{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{5}{12} : \dfrac{20}{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{5 \cdot 3}{12 \cdot 20}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{\dfrac{a^2}{a}} = \sqrt[3]{a}$

e) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} : \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{3}{2} : \dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{3^2}{2^2}} = \dfrac{3}{2}$

f) $\dfrac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}} = \dfrac{\sqrt[12]{20^2}}{\sqrt[12]{10^3}} = \sqrt[12]{\dfrac{400}{1\,000}} = \sqrt[12]{\dfrac{4}{10}}$

20 **Extrae todos los factores que puedas de los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt{28}$ c) $\sqrt[4]{2^{10}}$

d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{200}$ f) $\sqrt{300}$

a) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{28} = \sqrt{7 \cdot 2^2} = 2\sqrt{7}$

c) $\sqrt[4]{2^{10}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^2} = 4\sqrt[4]{4}$

d) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

e) $\sqrt{200} = \sqrt{5^2 \cdot 2^3} = 5 \cdot 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

f) $\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$

21 **Calcula y simplifica en cada caso:**

a) $(\sqrt{2})^{10}$ b) $(\sqrt[3]{2})^4$ c) $(\sqrt[4]{3^2})^8$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ f) $(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6$

a) $\left(\sqrt{2}\right)^{10} = \sqrt{2^{10}} = 2^5 = 32$

b) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

c) $\left(\sqrt[4]{3^2}\right)^8 = \sqrt[4]{3^{16}} = 3^4 = 81$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{8}} = \sqrt[8]{8}$

e) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{10} = \sqrt[4]{2^{10}} = \sqrt{2^5}$

f) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^6 = \sqrt[6]{2^6} = 2$

22 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

23 **Calcula y simplifica:**

a) $\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$

c) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$

d) $5\sqrt{12} + \sqrt{27} - 8\sqrt{75} + \sqrt{48}$

e) $\sqrt{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{4} - \dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

a) $\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (1 + 3 - 5)\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18} = 2\sqrt{2^3} + 4\sqrt{3^2 \cdot 2^3} - 7\sqrt{3^2 \cdot 2} =$

$= 4\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 21\sqrt{2} = (4 + 24 - 21)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2^3} - \sqrt{2^5} + \sqrt{5^2 \cdot 2} =$

$= 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} =$

$= (3 + 8 - 4 + 5)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

d) $5\sqrt{12} + \sqrt{27} - 8\sqrt{75} + \sqrt{48} = 5\sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3^3} - 8\sqrt{5^2 \cdot 3} + \sqrt{2^4 \cdot 3} =$

$= 10\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 40\sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$

$= (10 + 3 - 40 + 4)\sqrt{3} = -23\sqrt{3}$

e) $\sqrt{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{4} - \dfrac{5\sqrt{2}}{3} = \dfrac{12\sqrt{2}}{12} + \dfrac{9\sqrt{2}}{12} - \dfrac{20\sqrt{2}}{12} = \dfrac{(12 + 9 - 20)\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$

24 **Efectúa:**

a) $\sqrt{320} + \sqrt{80} - \sqrt{500}$

b) $\sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45}$

c) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{5}$

a) $\sqrt{320} + \sqrt{80} - \sqrt{500} = \sqrt{2^6 \cdot 5} + \sqrt{2^4 \cdot 5} - \sqrt{2^2 \cdot 5^3} =$

$= 2^3 \cdot \sqrt{5} + 2^2 \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot 5\sqrt{5} =$

$= 8\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 10\sqrt{5} = (8 + 4 - 10)\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

b) $\sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45} = \sqrt{5^3} + \sqrt{3^3 \cdot 2} - \sqrt{3^2 \cdot 5} =$

$= 5\sqrt{5} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{6}$

c) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} + \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} - \sqrt[3]{5} =$

$= 2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} = (2 + 3 - 1)\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$

25 **Racionaliza y simplifica:**

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$ c) $\dfrac{6}{\sqrt{12}}$ d) $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{6} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

c) $\dfrac{6}{\sqrt{12}} = \dfrac{6\sqrt{12}}{12} = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{15}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{15} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

26 **Racionaliza y simplifica:**

a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{a^5}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}}$

a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{3\sqrt[3]{25}}{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^5} \cdot \sqrt[8]{a^3}} = \dfrac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^8}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^3}}{a}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{2\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}} = \dfrac{2\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^4}} = \dfrac{2\sqrt[4]{8}}{2} = \sqrt[4]{8}$

Página 59

27 **Racionaliza y simplifica:**

a) $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{4}{3-\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{23}{5-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+3}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

g) $\dfrac{10}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ h) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3}$ i) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{2(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \dfrac{2(1-\sqrt{2})}{1-2} = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2}-2$

b) $\dfrac{4}{3-\sqrt{2}} = \dfrac{4(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \dfrac{4(3+\sqrt{2})}{9-2} = \dfrac{12+4\sqrt{2}}{7}$

c) $\dfrac{23}{5-\sqrt{2}} = \dfrac{23(5+\sqrt{2})}{(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})} = \dfrac{23(5+\sqrt{2})}{25-2} = \dfrac{23(5+\sqrt{2})}{23} = 5+\sqrt{2}$

d) $\dfrac{1}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-3} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{-2} = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+3} = \dfrac{\sqrt{5}-3}{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)} = \dfrac{\sqrt{5}-3}{5-9} = \dfrac{\sqrt{5}-3}{-4} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

g) $\dfrac{10}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{10(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \dfrac{10(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 10\sqrt{3}-10\sqrt{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-3)}{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-3)}{2-9} = \dfrac{2-3\sqrt{2}}{-7} = \dfrac{3\sqrt{2}-2}{7}$

i) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \dfrac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3} = \dfrac{2\sqrt{3}+4}{-2} = -\sqrt{3}-2$

PIENSA Y RESUELVE

28 **¿Cuántos números racionales hay entre $0,\widehat{8}$ y $0,\widehat{9}$? Pon ejemplos y razona tu respuesta.**

Entre $0,\widehat{8}$ y $0,\widehat{9}$ hay infinitos números racionales. Basta con introducir nueves entre la parte entera y el primer decimal de $0,\widehat{8}$. Por ejemplo, 0,98 está entre $0,\widehat{8}$ y $0,\widehat{9}$.

Lo mismo ocurre con $0,99\widehat{8}$; $0,999\widehat{8}$; $0,9999\widehat{8}$, y así, sucesivamente, vemos que podemos incluir infinitos números racionales entre $0,\widehat{8}$ y $0,\widehat{9}$.

29 **Explica un procedimiento para construir un segmento que mida, exactamente, $\sqrt{13}$ cm.**

Con un rectángulo 3×1 construimos su diagonal, que medirá $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Con un rectángulo de dimensiones $\sqrt{10}$ y 1 construimos $\sqrt{11}$.

$$\sqrt{(\sqrt{10})^2 + 1^2} = \sqrt{10 + 1} = \sqrt{11}$$

Análogamente, con un rectángulo de dimensiones $\sqrt{11}$ y 1 construimos $\sqrt{12}$.

Finalmente, con un rectángulo de dimensiones $\sqrt{12}$ y 1 construimos $\sqrt{13}$.

30 **¿Cuáles de las siguientes raíces no existen?:**

$$\sqrt[3]{-20}; \quad \sqrt[6]{0,12}; \quad \sqrt{-1}; \quad \sqrt[5]{241}; \quad \sqrt[4]{-16}$$

No existen las raíces de índice par y radicando negativo: $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-16}$ no existen.

31 **Obtén con la calculadora:**

a) $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$

a) $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{3} \approx -0,41$ b) $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} \approx 1,57$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \approx 0,59$

32 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

33 **Expresa como potencia única:**

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ b) $2\sqrt[3]{4}$ c) $a\sqrt{a}$

d) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ f) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a}$

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3^{1/2} \cdot 3^{1/3} = 3^{1/2 + 1/3} = 3^{5/6}$

b) $2\sqrt[3]{4} = 2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2 \cdot 2^{2/3} = 2^{1 + 2/3} = 2^{5/3}$

c) $a\sqrt{a} = a \cdot a^{1/2} = a^{3/2}$

d) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt{2^3}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2^{3/2}}{2^{2/3}} = 2^{3/2 - 2/3} = 2^{5/6}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2} = \dfrac{a^{8/3}}{a^2} = a^{8/3 - 2} = a^{2/3}$

f) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a} = a^{2/3} \cdot a^{1/6} = a^{2/3 + 1/6} = a^{5/6}$

34 **Expresa en forma exponencial:**

a) $(\sqrt[5]{a^2})^3$ b) $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$

d) $(\sqrt{a})^{-3}$ e) $(\sqrt[4]{a^2})^2$ f) $(\sqrt{a})^5$

a) $(\sqrt[5]{a^2})^3 = (a^{2/5})^3 = a^{6/5}$

b) $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2} = \sqrt[8]{a^7} = a^{7/8}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[12]{x} = x^{1/12}$

d) $(\sqrt{a})^{-3} = (a^{1/2})^{-3} = a^{-3/2}$

e) $(\sqrt[4]{a^2})^2 = (a^{2/4})^2 = a$

f) $(\sqrt{a})^5 = (a^{1/2})^5 = a^{5/2}$

35 **Reduce a un solo radical:**

a) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5}$ c) $\dfrac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2}}$

a) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^8} \cdot \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{2^8 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^{11}}$

b) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{a^9} \cdot \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[12]{a^9 \cdot a^{10}} = \sqrt[12]{a^{19}} = a\sqrt[12]{a^7}$

c) $\dfrac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt[8]{2^3}}{\sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2^4}} = \sqrt[8]{\dfrac{2^3}{2^2 \cdot 2^4}} = \sqrt[8]{\dfrac{2^3}{2^6}} = \sqrt[8]{\dfrac{1}{2^3}} = \sqrt[8]{2^{-3}}$

Página 70

PRACTICA

Ejercicios de operativa

1 **Calcula:**

a) 20% de 1 240 **b) 12% de 175**

c) 87% de 4 000 **d) 95% de 60**

e) 13% de 2 400 **f) 7% de 250**

g) 22% de 1 353 **h) 5% de 421**

a) 20% de $1\,240 = \dfrac{20 \cdot 1\,240}{100} = 248$

b) 12% de $175 = \dfrac{12 \cdot 175}{100} = 21$

c) 87% de $4\,000 = \dfrac{87 \cdot 4\,000}{100} = 3\,480$

d) 95% de $60 = \dfrac{95 \cdot 60}{100} = 57$

e) 13% de $2\,400 = \dfrac{13 \cdot 2\,400}{100} = 312$

f) 7% de $250 = \dfrac{7 \cdot 250}{100} = 17{,}5$

g) 22% de $1\,353 = \dfrac{22 \cdot 1\,353}{100} = 297{,}66$

h) 5% de $421 = \dfrac{5 \cdot 421}{100} = 21{,}05$

2 **Piensa y completa:**

a) Al multiplicar por 0,2 se calcula el …%.

b) Al multiplicar por 0,02 se calcula el …%.

c) Al multiplicar por 0,87 se calcula el …%.

d) Al multiplicar por 1,3 se aumenta un …%.

e) Al multiplicar por 1,08 se aumenta un …%.

f) Al multiplicar por 0,90 se disminuye un …%.

g) Al multiplicar por 0,65 se disminuye un …%.

a) 20% b) 2% c) 87% d) 30% e) 8% f) 10% g) 35%

3 Completa:

a) Para aumentar un 10%, se multiplica por …

b) Para aumentar un 15%, se multiplica por …

c) Para aumentar un 8%, se multiplica por …

d) Para aumentar un 5%, se multiplica por …

e) Para disminuir un 20% se multiplica por …

f) Para disminuir un 15% se multiplica por …

a) 1,10 b) 1,15 c) 1,08

d) 1,05 e) 0,8 f) 0,85

4 Calcula el valor de x en cada caso:

a) El 30% x es 21.

b) El 85% de x es 187.

c) El 32% de x es 384.

d) El 13% de x es 97,24.

a) 30% de $x = 21 \rightarrow 0,3 \cdot x = 21 \rightarrow x = 21 : 0,3 = 70$

b) 85% de $x = 187 \rightarrow 0,85 \cdot x = 187 \rightarrow x = 187 : 0,85 = 220$

c) 32% de $x = 384 \rightarrow 0,32 \cdot x = 384 \rightarrow x = 384 : 0,32 = 1\,200$

d) 13% de $x = 97,24 \rightarrow 0,13 \cdot x = 97,24 \rightarrow x = 97,24 : 0,13 = 748$

5 Partir el número 180 en partes que sean proporcionales a 3, a 4 y a 5.

Número total de partes = 3 + 4 + 5 = 12

Valor de una parte = $\dfrac{180}{12} = 15$

Número proporcional a 3 $\rightarrow$ $3 \cdot 15 = 45$

Número proporcional a 4 $\rightarrow$ $4 \cdot 15 = 60$

Número proporcional a 5 $\rightarrow$ $5 \cdot 15 = 75$

Los números pedidos son 45, 60 y 75.

6 Partir 260 en partes proporcionales a 1/2, 1/3 y 1/4.

Calculamos el número total de partes:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}$$

Así:

$\frac{13}{12}$ equivale al número entero, 260.

$\frac{1}{12}$ equivale a 260 : 13 = 20.

Como $\frac{1}{2} = \frac{6}{12} \rightarrow$ equivale a $6 \cdot 20 = 120$

Como $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} \rightarrow$ equivale a $4 \cdot 20 = 80$

Como $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} \rightarrow$ equivale a $3 \cdot 20 = 60$

Los números pedidos son 120, 80 y 60.

7 Partir 3 100 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 5.

Inversamente proporcionales a 2, 3 y 5 significa directamente proporcionales a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} + \frac{6}{30} = \frac{31}{30}$$

Así:

$\frac{31}{30}$ equivale al número entero 3 100.

$\frac{1}{30}$ equivale a 3 100 : 31 = 100.

Como $\frac{1}{2} = \frac{15}{30} \rightarrow 15 \cdot 100 = 1\,500$

$\frac{1}{3} = \frac{10}{30} \rightarrow 10 \cdot 100 = 1\,000$

$\frac{1}{5} = \frac{6}{30} \rightarrow 6 \cdot 100 = 600$

A 2, 3 y 5 les corresponde 1 500, 1 000 y 600, respectivamente.

Problemas de presupuestos y gastos

8 Un coche ha consumido 24 litros de combustible en un viaje de 375 km. ¿Cuántos litros consume cada 100 kilómetros? ¿Cuántos consumirá en un viaje de 80 km?

El número de litros que consume un coche es directamente proporcional a la distancia que recorre.

P. DIRECTA

DISTANCIA (km)	CONSUMO (*l*)
375	24
100	x
80	y

$$\frac{375}{100} = \frac{24}{x} \rightarrow x = \frac{24 \cdot 100}{375} = 6{,}4$$

$$\frac{375}{80} = \frac{24}{y} \rightarrow y = \frac{80 \cdot 24}{375} = 5{,}12$$

Cada 100 km consume 6,4 *l* y en un viaje de 80 km consumirá 5,12 *l*.

9 Un campesino ha obtenido una cosecha de 40 000 kilos de trigo de un campo que tiene una superficie de 2,5 hectáreas. ¿Qué cosecha puede esperar de un campo próximo con una superficie de hectárea y media?

La superficie de un campo y el número de kilos de trigo que se obtienen son magnitudes directamente proporcionales.

P. DIRECTA

SUPERFICIE (ha)	TRIGO (kg)
2,5	40 000
1,5	x

$$\frac{2{,}5}{1{,}5} = \frac{40\,000}{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{1{,}5 \cdot 40\,000}{2{,}5} = 24\,000$$

Puede esperar una cosecha de 24 000 kg.

10 Un solador, trabajando 8 horas al día, ha tardado 5 días en poner el suelo de una vivienda. ¿Cuántos días habría tardado trabajando 10 horas diarias?

El número de horas trabajadas al día es inversamente proporcional al número de días que se tarda en hacer un trabajo.

P. INVERSA

HORAS/DÍA	NÚMERO DE DIAS
8	5
10	x

$$\frac{8}{10} = \frac{x}{5} \rightarrow x = \frac{8 \cdot 5}{10} = 4$$

Trabajando 10 horas al día habría tardado 4 días.

11 Para comprar un piso que se vende en 180 000 €, se ha de pagar además un 7% a Hacienda (IVA), y 5 400 € de gastos de notaría y gestión.

¿Cuál es el gasto total necesario para la compra?

7% de 180 000 € = 180 000 · 0,07 = 12 600 €

180 000 + 12 600 + 5 400 = 198 000

El gasto total es de 198 000 €.

12 **El ayuntamiento de una población de 2 300 habitantes dedica una partida de 9 200 € anuales para actividades culturales. ¿Qué cantidad dedicará a ese mismo concepto una población vecina que distribuye los presupuestos con criterios similares y tiene una población de 3 700 habitantes?**

El número de habitantes de una población y el presupuesto anual dedicado a cierta actividad, son magnitudes directamente proporcionales:

P. DIRECTA

Nº DE HABITANTES	PRESUPUESTO (€)
2 300	9 200
3 700	x

$$\frac{2\,300}{3\,700} = \frac{9\,200}{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; x = \frac{9\,200 \cdot 3\,700}{2\,300} = 14\,800$$

En una población de 3 700 habitantes se ha de dedicar un presupuesto de 14 800 €.

13 **En una sesión de cine, de las 840 localidades disponibles, se han vendido un 65%. ¿Cuántos asientos hay vacíos?**

Si se han vendido un 65% de las localidades, el 35% quedan sin vender.

$$35\% \text{ de } 840 = 0{,}35 \cdot 840 = 294$$

Quedan 294 asientos vacíos.

14 **En un examen de Matemáticas han aprobado 22 alumnos, lo que supone el 88% del total de la clase. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?**

Llamamos x al número de alumnos de la clase.

$$88\% \text{ de } x = 22 \;\rightarrow\; 0{,}88 \cdot x = 22 \;\rightarrow\; x = 22 : 0{,}88 = 25$$

En la clase hay 25 alumnos.

Página 71

15 **En un estudio sociológico, de 1 232 hombres encuestados, 924 declaran que colaboran activamente en las tareas del hogar. ¿Cúal es el porcentaje de hombres que dice trabajar en casa?**

De un total de 100 hombres, colaboran en las tareas del hogar x.

TOTAL	PARTE
1 232	924
100	x

$$\frac{1\,232}{100} = \frac{924}{x} \rightarrow x = \frac{924 \cdot 100}{1\,232} = 75$$

El 75% de los hombres dice trabajar en casa.

16 **Paula ha pagado 76,5 € por un jersey que costaba 85 €. ¿Qué tanto por ciento le han rebajado?**

PRECIO INICIAL (€)	PRECIO FINAL (€)
85	76,5
100	x

$$\frac{85}{100} = \frac{76,5}{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x = \frac{76,5 \cdot 100}{85} = 90$$

En un artículo que hubiera costado 100 €, habría pagado 90 €, luego le han rebajado el 10%.

17 **En un supermercado se vuelca una caja que contiene 360 huevos y se rompen 45. ¿Qué tanto por ciento de los huevos se ha roto?**

Nº TOTAL DE HUEVOS	HUEVOS ROTOS
360	45
100	x

$$\frac{360}{100} = \frac{45}{x} \rightarrow x = \frac{45 \cdot 100}{360} = 12,5$$

Se han roto el 12,5% de los huevos.

18 **Ignacio ha pagado 63 € por una camisa que estaba rebajada un 10%. ¿Cuánto costaba la camisa antes de la rebaja?**

Llamamos x al precio inicial de la camisa.

Si está rebajada el 10%, se paga el 90% del precio inicial:

$$90\% \text{ de } x = 63 \rightarrow 0,9 \cdot x = 63 \rightarrow x = 63 : 0,9 = 70$$

La camisa costaba 70 € antes de la rebaja.

19 **El 72% de las fichas de un club deportivo pertenecen a jóvenes menores de veinte años. ¿Cuántos socios tiene el club, sabiendo que los menores de veinte años son 108?**

Llamamos x al número de socios del club.

$$72\% \text{ de } x = 108 \rightarrow 0,72 \cdot x = 108 \rightarrow x = 108 : 0,72 = 150$$

El club tiene 150 socios.

20 **Un comerciante adquirió el mes pasado 210 carretes de hilo por cierta cantidad de dinero. ¿Cuántos adquirirá este mes, con el mismo gasto, sabiendo que han subido un 5%?**

Llamamos x al número de carretes que adquirirá este mes.

El precio por carrete ha subido un 5%:

$$1,05 \text{ de } x = 210 \rightarrow x = 210 : 1,05 = 200$$

Podrá adquirir 200 carretes de hilo.

21 **El 34% de los asistentes a un congreso sobre la paz son europeos; el 18%, africanos; el 32%, americanos; y el resto, asiáticos. Sabiendo que hay 51 europeos, ¿cuántos hay de cada uno de los demás continentes?**

Llamamos x al número de asistentes al congreso.

$$34\% \text{ de } x = 51 \rightarrow 0{,}34 \cdot x = 51 \rightarrow x = 51 : 0{,}34 = 150$$

El número total de asistentes es de 150 personas.

Calculamos el número de africanos, americanos y asiáticos que hay:

Africanos $\rightarrow$ 18% de 150 = 0,18 · 150 = 27

Americanos $\rightarrow$ 32% de 150 = 0,32 · 150 = 48

Asiáticos $\rightarrow$ 150 – 27 – 48 – 51 = 24

Hay 27 africanos, 48 americanos y 24 asiáticos.

22 **En una carrera ciclista, la primera semana abandonan el 20% de los corredores, y en la segunda, el 40% de los que quedaban. ¿Qué porcentaje de los que empezaron permanece en carrera al inicio de la tercera semana?**

En la primera semana abandona la carrera el 20% $\rightarrow$ queda el 80%

En la segunda semana abandona el 40% del 80% de los participantes:

$$40\% \text{ de } 80\% = \frac{40}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{32}{100} = 32\% \text{ abandonan}$$

Quedan: 80% – 32% = 48%

El 48% de los que empezaron permance en carrera al inicio de la tercera semana.

23 **El precio de la vivienda subió un 8% hace dos años, un 15% el año pasado y un 10% durante este año. ¿Cuál ha sido el porcentaje de subida en los tres últimos años?**

El índice de variación en los últimos tres años será:

$$1{,}08 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}1 = 1{,}3662 \rightarrow 1{,}3662 - 1 = 0{,}3662$$

El porcentaje de subida es 36,62%.

24 **Un fabricante de churros usa una mezcla de aceite que contiene dos partes de aceite de oliva por cada parte de aceite de girasol. Sabiendo que compra el de oliva a 3,40 €/litro y el de girasol a 1,60 €/litro, ¿a cómo le sale el litro de mezcla?**

	CANTIDAD (*l*)	PRECIO (€/*l*)	COSTE TOTAL (€)
ACEITE OLIVA	2	3,40	6,80
ACEITE GIRASOL	1	1,60	1,60
MEZCLA	3		8,40

$$\text{Precio de un litro de mezcla} = \frac{\text{Coste}}{\text{nº de litros}} = \frac{8{,}40}{3} = 2{,}8$$

El litro de mezcla sale a 2,8 €.

25 **Un mayorista compra, sobre el terreno, 2 000 kilos de naranjas a 0,54 €/kg, y tres días después, otros 3 000 kilos a 0,63 €/kg. Posteriormente, vende todas las naranjas a 0,84 €/kg. ¿Cuánto gana en cada kilo por término medio? ¿Cuánto gana en total?**

Calculamos el precio del kilo de naranjas en el momento de la compra:

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE
NARANJAS CALIDAD INFERIOR	2 000	0,54	1 080
NARANJAS CALIDAD SUPERIOR	3 000	0,63	1 890
TOTAL	5 000		2 970

Precio mezcla $= \dfrac{\text{Coste}}{\text{kilos}} = \dfrac{2\,970}{5\,000} = 0{,}594$ €/kg

Las vende a 0,84 €/kg, luego en cada kilo gana:

$$0{,}84 - 0{,}594 = 0{,}246 \text{ €}$$

En total gana $0{,}246 \cdot 5\,000 = 1\,230$ €.

26 **Para fabricar cierta colonia se mezcla 1 litro de esencia con 5 litros de alcohol y 2 litros de agua destilada. La esencia cuesta 200 €/litro; el alcohol, 6 €/litro; y el agua destilada, 1 €/litro. ¿Cuál es el coste de un litro de esa colonia?**

	CANTIDAD (*l*)	PRECIO (€/*l*)	COSTE
ESENCIA	1	200	200
ALCOHOL	5	6	30
AGUA DESTILADA	2	1	2
MEZCLA	8		232

Precio mezcla $= \dfrac{\text{Coste}}{\text{litros}} = \dfrac{232}{8} = 29$

El precio de 1 litro de colonia es de 29 €.

27 **Se mezclan 300 kg de pintura de 30 € el kilo con 200 kg de otra pintura más barata. De esta forma, la mezcla sale a 24 € el kilo. ¿Cuál es el precio de la pintura barata?**

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
PINTURA BARATA	200	?	?
PINTURA CARA	300	30	9 000
MEZCLA	500	24	12 000

Para que el coste de la mezcla sea de 12 000 €, el coste de la pintura barata ha de ser $12\,000 - 9\,000 = 3\,000$ €.

El precio por kilo de la pintura barata será: $\dfrac{\text{Coste}}{\text{kilos}} = \dfrac{3\,000}{200} = 15$ €

15 €/kg cuesta la pintura barata.

28 **Se ha encargado a un orfebre el diseño y fabricación de un trofeo que ha de pesar 5 kg y ha de estar fabricado con una aleación que contenga tres partes de oro, tres de plata y dos de cobre. ¿Qué cantidad se necesita de cada metal?**

Número total de partes = 3 + 3 + 2 = 8

Cantidad de metal en cada parte = $\frac{5}{8}$ = 0,625 kg

Cantidad de oro $\rightarrow$ $3 \cdot 0{,}625 = 1{,}875$

Cantidad de plata $\rightarrow$ $3 \cdot 0{,}625 = 1{,}875$

Cantidad de cobre $\rightarrow$ $2 \cdot 0{,}625 = 1{,}25$

Se necesita 1 kg 875 g de oro, la misma cantidad de plata y 1 kg 250 g de cobre.

29 **Tres vecinos de una aldea alquilan una máquina motosierra durante 12 días. Juan la tiene 2 días; Pedro, 3 días; y Rufino, 7 días. El importe del alquiler asciende a 264 euros. ¿Cuánto debe pagar cada uno?**

Número total de días que se alquila la máquina = 12

Precio por día = $\frac{\text{Precio total}}{\text{Nº de días}} = \frac{264}{12} = 22$

Juan debe pagar $\rightarrow$ $2 \cdot 22 = 44$ €

Pedro debe pagar $\rightarrow$ $3 \cdot 22 = 66$ €

Rufino debe pagar $\rightarrow$ $7 \cdot 22 = 154$ €

Juan debe pagar 44 €, Pedro, 66 €, y Rufino, 154 €.

30 **En una granja de avestruces, cada animal consume, por término medio, 800 gramos de pienso al día. ¿Cuál será el presupuesto para alimentar a 80 avestruces, durante tres meses (90 días), si el kilo de pienso cuesta 1,03 €?**

Estamos ante un problema de proporcionalidad compuesta: el número de avestruces y de días para alimentarlos son directamente proporcionales al presupuesto:

P. DIRECTA

P. DIRECTA

Nº DE AVESTRUCES	Nº DE DÍAS	PRESUPUESTO (€)
1	1	0,8 · 1,03
80	90	x

$$\frac{1 \cdot 1}{80 \cdot 90} = \frac{0{,}8 \cdot 1{,}03}{x} \rightarrow \frac{1}{7\,200} = \frac{0{,}8 \cdot 1{,}03}{x} \rightarrow x = 7\,200 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}03 = 5\,932{,}8$$

El presupuesto para alimentar a 80 avestruces durante tres meses es de 5 932,8 €.

Página 72

31 Un taller de confección ha fabricado 1 600 chaquetas, trabajando 8 horas diarias durante 10 días. ¿Cuánto tiempo tardará en servir un pedido de 2 000 chaquetas trabajando 10 horas al día?

El número de chaquetas que se han de confeccionar es directamente proporcional al número de días que se han de trabajar.

Sin embargo, el número de horas de trabajo al día es inversamente proporcional al número de días trabajados.

P. DIRECTA

P. INVERSA

CHAQUETAS	HORAS/DÍA	Nº DE DÍAS
1 600	8	10
2 000	10	x

$$\frac{1\,600 \cdot 10}{2\,000 \cdot 8} = \frac{10}{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; x = \frac{10 \cdot 2\,000 \cdot 8}{1\,600 \cdot 10} = 10$$

Se tardarán 10 días en servir el pedido.

32 Tres socios financian un negocio que exige una inversión de 136 000 €. El primero pone el 65%; el segundo, el 20%, y el tercero, el resto. Un tiempo después reparten unos beneficios de 16 800 €. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno?

El beneficio se repartirá de forma proporcional a como se ha hecho la inversión.

PRIMERO $\rightarrow$ se queda con el 65% de 16 800 = 0,65 · 16 800 = 10 920

SEGUNDO $\rightarrow$ se queda con el 20% de 16 800 = 0,2 · 16 800 = 3 360

TERCERO $\rightarrow$ se queda con el 15% de 16 800 = 0,15 · 16 800 = 2 520

Al primero le corresponden 10 920 €, al segundo, 3 360 €, y al tercero, 2 520 €.

33 Iván recibe un sueldo de 80 € semanales por ayudar en el negocio familiar en los ratos libres. A partir del mes que viene, su padré le subirá su asignación en un 20%, lo que le permitirá apuntarse a clases de guitarra que le cuestan 50 € mensuales. Calcula cuánto dinero le quedará disponible cada semana.

El sueldo semanal que va a recibir es el 120% del sueldo inicial:

$$120\% \text{ de } 80 = 1{,}20 \cdot 80 = 96 \text{ €}$$

El gasto en las clases de guitarra, por semana, es de $\frac{50}{4} = 12{,}5$ €.

Así, el dinero disponible cada semana es de 96 – 12,5 = 83,5 €.

Cada semana le quedarán disponibles 83,5 €.

34 **Un ganadero tiene en la actualidad 15 vacas cuya manutención le cuesta 2,8 € por vaca y día. Si decide aumentar su negocio y adquirir una nueva vaca cada mes, a partir del próximo, que es mayo, ¿qué presupuesto dedicará a la alimentación de su ganado durante los seis próximos meses?**

Presupuesto por vaca y día = 2,8 €

1.er mes → Mayo (31 días) → 16 vacas → $16 \cdot 31 \cdot 2{,}8 = 1\,388{,}8$ €

2.º mes → Junio (30 días) → 17 vacas → $17 \cdot 30 \cdot 2{,}8 = 1\,428$ €

3.er mes → Julio (31 días) → 18 vacas → $18 \cdot 31 \cdot 2{,}8 = 1\,562{,}4$ €

4.º mes → Agosto (31 días) → 19 vacas → $19 \cdot 31 \cdot 2{,}8 = 1\,649{,}2$ €

5.º mes → Septiembre (30 días) → 20 vacas → $20 \cdot 30 \cdot 2{,}8 = 1\,680$ €

6.º mes → Octubre (31 días) → 21 vacas → $21 \cdot 31 \cdot 2{,}8 = 1\,822{,}8$ €

Presupuesto total = $1\,388{,}8 + 1\,428 + 1\,562{,}4 + 1\,649{,}2 + 1\,680 + 1\,822{,}8 =$

$= 9\,531{,}2$

El presupuesto dedicado a alimentación para los próximos 6 meses es de 9 531,2 €.

35 **Un especulador compra un terreno de 6 000 m² a 80 € el metro cuadrado. Un año después, vende 2 000 m² un 20% más caro, y seis meses más tarde vende el resto por un 25% más de lo que le costó. ¿Cuál ha sido la ganancia obtenida?**

Precio pagado por el terreno = $6\,000 \cdot 80 = 480\,000$ €

Precio de venta:

- 2 000 m² un 20% más caro → $1{,}20 \cdot 80 = 96$ €/m²

  Venta de 2 000 m²: $2\,000 \cdot 96 = 192\,000$ €

- 4 000 m² un 25% más caro → $1{,}25 \cdot 80 = 100$ €/m²

Venta de 4 000 m²: $4\,000 \cdot 100 = 400\,000$ €

Dinero total conseguido por la venta: $400\,000 + 192\,000 = 592\,000$ €

Ganancia = $592\,000 - 480\,000 = 112\,000$ €

La ganancia obtenida es de 112 000 €.

36 **Al pactar la compra de un piso se acuerda abonar como señal un 5% del precio, un segundo pago del 65% a la firma de las escrituras, y el resto en 12 mensualidades de 7 000 euros cada una. ¿Cuál es el precio del piso?**

Señal → 5% del precio del piso

Firma de escrituras → 65% del precio del piso

Resto → $12 \cdot 7\,000 = 84\,000$ €, que corresponde al 30% del valor del piso.

Llamando x al precio del piso:

30% de $x = 84\,000 \;\rightarrow\; 0{,}3 \cdot x = 84\,000 \;\rightarrow\; x = 84\,000 : 0{,}3 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = 280\,000$

El precio del piso es de 280 000 €.

37 **De una plancha de acero se ha cortado una porción rectangular de 70 cm de longitud y 60 cm de anchura. Ahora deseamos cortar una nueva porción de 40 cm de anchura y que tenga el mismo peso que la primera. ¿Cuál será el largo de esta nueva porción?**

Para que las dos planchas tengan el mismo peso, la longitud y la anchura han de ser magnitudes inversamente proporcionales (a menos anchura, más longitud):

P. INVERSA

ANCHO (cm)	LARGO (cm)
60	70
40	x

$$\frac{60}{40} = \frac{x}{70} \;\rightarrow\; x = \frac{60 \cdot 70}{40} = 105$$

El largo de la nueva porción será de 105 cm.

38 **Un sastre ha cobrado 398 € por un traje en el que ha invertido 4 metros de tela y 10 horas de trabajo. Sabiendo que valora su trabajo a razón de 19 € la hora, ¿cuánto cobrará por otro traje para el que ha necesitado 3,5 metros de tela y 12 horas de trabajo?**

De los 398 € cobrados por la confección de un traje se tiene que:

Coste por el trabajo: 10 h · 19 €/h = 190 €

Precio de 4 m de tela: 398 – 190 = 208 €

Precio de 1 m de tela: 208 € : 4 m = 52 €/m

Por un traje de 3,5 m de tela y 12 horas de trabajo cobrará:

$$\left.\begin{array}{l} 12 \cdot 19 = 228\text{ €} \\ 3{,}5 \cdot 52 = 182\text{ €} \end{array}\right\} \text{Total} = 228 + 182 = 410$$

Cobrará por el traje 410 €.

Problemas de depósitos y préstamos

39 **Calcula el interés simple que produce un capital de 25 000 € colocado al 2,75% durante 3 años.**

$$\left.\begin{array}{l} C = 25\,000\text{ €} \\ r = 2{,}75 \\ t = 3 \end{array}\right\} I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{25\,000 \cdot 2{,}75 \cdot 3}{100} = 2\,062{,}5$$

El interés que produce dicho capital es de 2 062,5 €.

40 **Un padre de familia gana en la lotería un premio de 24 000 €, y pacta con el banco mantener el dinero en una cuenta durante cinco años, cobrando los beneficios cada año. A cambio, el banco le dará un interés del 6% anual. ¿Qué beneficio obtiene anualmente? ¿Y en los cinco años que dura el acuerdo?**

Dado que los beneficios los retira anualmente, el interés que pacta con el banco es simple.

- Beneficio que obtiene en 1 año:

$$6\% \text{ de } 24\,000 = \frac{6 \cdot 24\,000}{100} = 1\,440 \text{ €}$$

- Beneficio que obtiene en 5 años:

$$5 \cdot 1\,440 = 7\,200 \text{ €}$$

En 1 año obtiene un beneficio de 1 440 € y, en 5 años, 7 200 €.

41 **Calcula el interés que produce un capital de 40 000 €, colocados al 3,25% anual durante:**

a) Un año. **b) Un mes.** **c) Cinco meses.**

a) UN AÑO

$$3{,}25\% \text{ de } 40\,000 = \frac{3{,}25 \cdot 40\,000}{100} = 1\,300 \text{ €}$$

El interés que se produce es de 1 300 €.

b) UN MES

Si en 1 año se producen 1 300 € de interés, en 1 mes serán:

$$1\,300 : 12 = 108{,}33 \text{ €}$$

c) CINCO MESES

Si en 1 mes se producen 108,33 € de interés, en 5 meses serán:

$$108{,}33 \cdot 5 = 541{,}67 \text{ €}$$

42 **Un comerciante pide una prórroga de dos meses en el pago de una letra de 2 000 €, con unos intereses de demora del 16% anual. ¿Cuánto le cuesta la prórroga?**

Si la prórroga fuera de un año tendría que pagar como intereses de demora el 16% de 2 000:

$$16\% \text{ de } 2\,000 = \frac{16 \cdot 2\,000}{100} = 320 \text{ €}$$

Como solo pide una prórroga de 2 meses (sexta parte del año), deberá pagar unos intereses de 320 : 6 = 53,33 €.

La prórroga le cuesta 53,33 €.

43 **Un inversor coloca 200 000 € al 5% de interés compuesto durante un periodo de 4 años. ¿A cuánto ascenderá su capital al final de dicho periodo?**

Los beneficios se suman al capital, el cual se incrementa un 5% cada año.

Capital final = $200\,000 \cdot 1{,}05^4 = 243\,101{,}25$

Al cabo de 4 años, el capital final será de 243 101,25 €.

44 **Rosa coloca 6 000 € al 4% anual y los mantiene en el banco durante cuatro años, retirando anualmente los beneficios obtenidos. María coloca la misma cantidad, al mismo interés y durante el mismo tiempo, pero da orden de que los beneficios se sumen cada año al capital. ¿Cuál es la diferencia entre los beneficios obtenidos por cada una?**

Rosa negocia su capital bajo un interés simple:

$$\left.\begin{array}{l} C = 6\,000 \text{ €} \\ r = 4 \\ t = 4 \end{array}\right\} \text{Beneficio} \rightarrow I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{6\,000 \cdot 4 \cdot 4}{100} = 960 \text{ €}$$

María negocia su capital bajo un interés compuesto:

Capital final = $6\,000 \cdot 1{,}04^4 = 7\,019{,}15$ €

María gana $7\,019{,}15 - 6\,000 = 1\,019{,}15$ €

María obtiene $1\,019{,}15 - 960 = 59{,}15$ € más de beneficio que Rosa.

45 **¿En cuánto se convierte un capital de 1 000 euros colocados al 0,003% mensual, durante 5 meses?**

Suponemos que, mensualmente, los beneficios obtenidos se suman al capital, que se incrementa un 0,003% al mes.

$$\left.\begin{array}{l} C = 1\,000 \text{ €} \\ t = 5 \end{array}\right\} \text{Capital final} = 1\,000 \cdot 1{,}00003^5 = 1\,000{,}15 \text{ €}$$

El capital de 1 000 € se convierte en 1 000,15 €.

Página 72

46 **Un usurero presta dinero al 5% mensual. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que una deuda se duplique? Naturalmente, el usurero cada mes suma a la deuda los intereses correspondientes.**

El usurero está negociando su préstamo con un interés compuesto.

Llamamos: $t \rightarrow$ tiempo transcurrido hasta que la deuda se duplique

$C \rightarrow$ deuda

$$C \cdot 1{,}05^t = 2 \cdot C \rightarrow 1{,}05^t = 2$$

Tanteando, se llega a que:

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}05^{14} = 1{,}98 \\ 1{,}05^{15} = 2{,}079 \end{array}\right\} \rightarrow \ t = 15$$

Para que la deuda se duplique, han de transcurrir 15 meses.

Problemas de velocidades y tiempos

47 **¿Cuántos metros por segundo recorre un coche que va a una velocidad de 90 km/h?**

El tiempo y la distancia son magnitudes directamente proporcionales:

$$\left.\begin{array}{cc} \underline{\text{TIEMPO (s)}} & \underline{\text{DISTANCIA (m)}} \\ 3\,600 & 90\,000 \\ 1 & x \end{array}\right\} \ \frac{3\,600}{1} = \frac{90\,000}{x} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ x = \frac{90\,000}{3\,600} = 25 \ \rightarrow \ \text{En 1 segundo recorre 25 m.}$$

48 **Un ciclista, que avanza a 23 km/h, alcanza a otro ciclista que avanza a 20 km/h. ¿Qué ventaja le llevará diez minutos más tarde? ¿Cuánto tiempo tardará en tomar una ventaja de un kilómetro?**

10 minutos es la sexta parte de 1 hora. Luego:

- En 10 minutos, el ciclista que va a 23 km/h recorrerá $\frac{23}{6} = 3{,}833$ km
- En 10 minutos, el ciclista que va a 20 km/h recorrerá $\frac{20}{6} = 3{,}333$ km

Al cabo de 10 minutos, el primer ciclista aventajará al segundo en:

$$3{,}833 - 3{,}333 = 0{,}5 \text{ km, es decir, medio kilómetro}$$

Si en 10 minutos la ventaja es de medio kilómetro, para que sea de 1 km han de transcurrir $2 \cdot 10 = 20$ minutos.

49 **Un automóvil ha viajado a 90 km/h durante 20 minutos y a 120 km/h durante los 10 minutos siguientes.**

¿Cuál ha sido la velocidad media durante ese espacio de tiempo?

Calculamos el espacio que ha recorrido en cada periodo:

- Durante 20 minutos la velocidad ha sido de 90 km/h. El espacio que ha recorrido es de $\frac{90}{3} = 30$ km (20 minutos es la tercera parte de 1 hora).

- Durante 10 minutos la velocidad ha sido de 120 km/h. En este tiempo ha recorrido $\frac{120}{6} = 20$ km (10 minutos es la sexta parte de 1 hora).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Espacio total recorrido} = 30 + 20 = 50 \text{ km} \\ \text{Tiempo invertido} = 20 + 10 = 30 \text{ min} = 0{,}5 \text{ h}\end{array}\right\} \text{velocidad} = \frac{50}{0{,}5} = 100$$

La velocidad media ha sido de 100 km/h.

50 **Un mensajero sale en su motocicleta a las 10 de la mañana para hacer una entrega a 45 km de distancia. Durante el trayecto, sufre una avería que le detiene durante 15 minutos. Después regresa al punto de partida y calcula que ha realizado el encargo logrando una velocidad media de 60 km/h. ¿Cuál habría sido la velocidad media si no hubiera tenido la avería?**

Calculamos el tiempo invertido en recorrer 45 km sabiendo que la velocidad media ha sido de 60 km/h:

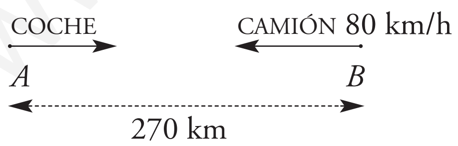
$$v = \frac{e}{t} \;\rightarrow\; 60 = \frac{45}{t} \;\rightarrow\; t = \frac{45}{60} \;\rightarrow\; t = 0{,}75 \text{ h}$$

El tiempo invertido ha sido de 0,75 h, esto es, tres cuartos de hora.

Si no hubiera sufrido la avería, habría tardado 15 minutos menos, es decir, media hora. En ese caso, la velocidad media habría sido:

$$v = \frac{45}{0{,}5} = 90 \text{ km/h}$$

51 **Un coche sale de A hacia B en el mismo instante que un camión sale de B hacia A, tardando hora y media en encontrarse. ¿Cuál es la velocidad media del coche, sabiendo que la del camión es de 80 km/h y que la distancia de A a B es de 270 km?**



1 hora y media = 1,5 h

- Calculamos la distancia que ha recorrido el camión hasta que se encuentra con el coche:

$$\left.\begin{array}{cc}\underline{\text{TIEMPO (h)}} & \underline{\text{DISTANCIA (km)}} \\ 1 & 80 \\ 1{,}5 & x\end{array}\right\} \frac{1}{1{,}5} = \frac{80}{x} \;\rightarrow\; x = 80 \cdot 1{,}5 = 120$$

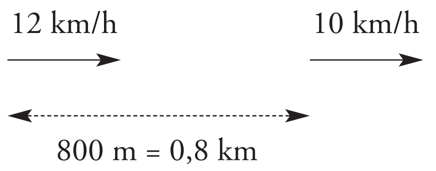
El camión ha recorrido 120 km hasta el momento del encuentro. Por tanto, el coche ha recorrido 270 – 120 = 150 km.

- Calculamos la velocidad media del coche sabiendo que ha invertido 1,5 h en recorrer 150 km.

  $v = \dfrac{150 \text{ km}}{1{,}5 \text{ h}} = 100 \text{ km/h}$

  La velocidad media del coche es de 100 km/h.

52 **Un corredor de fondo avanza a la velocidad de 10 km/h, perseguido por un rival que está 800 metros más atrás y lleva una velocidad de 12 km/h. ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que el segundo alcance al primero?**



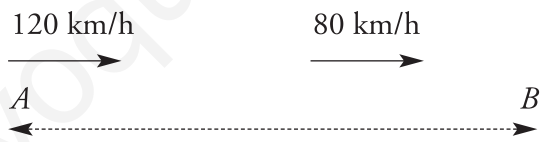
Los corredores se aproximan a una velocidad de 12 – 10 = 2 km/h.

El tiempo que se tarda en recorrer los 0,8 km que les separan, a una velocidad de 2 km/h es:

$$t = \frac{e}{v} \;\rightarrow\; t = \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4 \text{ h} = 0{,}4 \cdot 60 \text{ min} = 24 \text{ minutos}$$

El segundo alcanzará al primero al cabo de 24 minutos.

53 **Un camión sale de A hacia B a 80 km/h. Un cuarto de hora después sale un coche, en la misma dirección, a 120 km/h, llegando ambos a B simultáneamente. ¿Cuál es la distancia entre A y B?**



Ambos vehículos se aproximan a una velocidad de 120 – 80 = 40 km/h.

- Calculamos la distancia que lleva recorrida el camión cuando el coche sale:

  En 1 h recorre 80 km.

  En $\dfrac{1}{4}$ h recorre $\dfrac{80}{4} = 20$ km.

- El tiempo en recorrer los 20 km que les separan, a una velocidad de 40 km/h es:

  $t = \dfrac{e}{v} \;\rightarrow\; t = \dfrac{20}{40} = 0{,}5 \text{ h}$

El coche y el camión tardan media hora en encontrarse, momento que se produce al final del trayecto. Por tanto, el coche tarda 0,5 h en llegar a *B* a una velocidad de 120 km/h. Así, la distancia de *A* a *B* será de:

$$e = 0{,}5 \text{ h} \cdot 120 \text{ km/h} = 60 \text{ km}$$

La distancia entre *A* y *B* es de 60 km.

54 **Un depósito de 21 000 litros se abastece de dos grifos que aportan un caudal de 40 litros por minuto y de 30 litros por minuto, respectivamente. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si se abren ambos grifos simultáneamente?**

Ambos grifos, en 1 minuto, aportan un caudal de 40 + 30 = 70 *l*.

Como el depósito tiene una capacidad de 21 000 *l*:

$$\frac{21\,000}{70} = 300 \text{ minutos} = 5 \text{ horas}$$

El depósito tardará 5 horas en llenarse.

55 **Un grifo A, llena un depósito en 4 horas. Un segundo grifo, B, llena el mismo depósito en 6 horas. ¿Cuánto tardarán en llenarlo si se abren ambos simultáneamente?**

La idea está en calcular la porción de depósito que llena cada grifo en 1 h:

- El grifo A llena, en 1 h, $\frac{1}{4}$ de depósito.
- El grifo B llena, en 1 h, $\frac{1}{6}$ de depósito.
- Ambos grifos, en 1 h llenan, $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ de depósito.

Si se abren los dos grifos a la vez:

- Llenan $\frac{5}{12}$ del depósito en 1 hora.
- Llenan $\frac{1}{12}$ del depósito en $\frac{1}{5}$ hora.
- Llenan $\frac{12}{12}$ del depósito en $\frac{12}{5}$ hora = 2,4 h = 2 h + 0,4 · 60 min =
  = 2 h 24 min.

Ambos grifos llenan el depósito en 2 h 24 min.

56 **Una cuadrilla de segadores corta un campo de heno en 3 horas. Una segunda cuadrilla lo hace en 6 horas. ¿Cuánto tardarían en segar el campo las dos cuadrillas juntas?**

Calculamos la porción de campo que corta cada cuadrilla en 1 h:

- La primera cuadrilla corta, en 1 h, $\frac{1}{3}$ del campo.
- La segunda cuadrilla corta, en 1 h, $\frac{1}{6}$ del campo.

• Ambas cuadrillas cortan, en 1 h, $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ del campo.

Trabajando ambas cuadrillas juntas:

• Cortan $\frac{1}{2}$ del campo en 1 hora.

• Cortan $\frac{2}{2}$ del campo en 2 horas.

Entre las dos cuadrillas necesitan 2 horas para segar el campo.

Página 83

PRACTICA

Monomios

1 **Indica cuál es el grado de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:**

a) $2x^2$	b) $-3x^3$	c) $\frac{1}{2}x^2$
d) $\frac{3}{4}x$	e) $-\frac{1}{3}x$	f) x^3
g) 3	h) $\frac{-4}{5}x^2$	i) $\frac{-1}{5}$

a) Grado 2	b) Grado 3	c) Grado 2
d) Grado 1	e) Grado 1	f) Grado 3
g) Grado 0	h) Grado 2	i) Grado 0

Son semejantes: $2x^2, \ \frac{1}{2}x^2, \ \frac{-4}{5}x^2$

$-3x^3, \ x^3$

$\frac{3}{4}x, \ -\frac{1}{3}x$

$3, -\frac{1}{5}$

2 **Calcula el valor numérico de cada uno de estos monomios para $x = -1$, para $x = 2$ y para $x = \frac{1}{2}$:**

a) $3x^2$ b) $4x^3$ c) $-2x$ d) $-x^2$ e) $\frac{1}{2}x^2$ f) $-\frac{1}{4}x$

	Para $x = -1$	Para $x = 2$	Para $x = \frac{1}{2}$
a)	$3(-1)^2 = 3$	$3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
b)	$4 \cdot (-1)^3 = -4$	$4 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$	$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$
c)	$-2 \cdot (-1) = 2$	$-2 \cdot 2 = -4$	$-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$
d)	$-(-1)^2 = -1$	$-2^2 = -4$	$-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$

e) $\frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{1}{2} \cdot 2^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ $\qquad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

f) $-\frac{1}{4}(-1) = \frac{1}{4}$ $\qquad -\frac{1}{4} \cdot 2 = -\frac{1}{2}$ $\qquad -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$

3 Simplifica:

a) $2x^6 - 3x^6 - x^6$ **b)** $3x^2 - x^2 + 5x^2$

c) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x + x$ **d)** $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}x^2 + x^2$

e) $-2x^3 + x^3 - 3x^3$ **f)** $-\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 2x^2$

a) $2x^6 - 3x^6 - x^6 = (2 - 3 - 1)x^6 = -2x^6$

b) $3x^2 - x^2 + 5x^2 (3 - 1 + 5)x^2 = 7x^2$

c) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x + x = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 1\right)x = \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{4}{4}\right)x = \frac{3}{4}x$

d) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}x^2 + x^2 = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10} + 1\right)x^2 = \left(\frac{4}{10} - \frac{1}{10} + \frac{10}{10}\right)x^2 = \frac{13}{10}x^2$

e) $-2x^3 + x^3 - 3x^3 = (-2 + 1 - 3)x^3 = -4x^3$

f) $-\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 2x^2 = \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 2\right)x^2 = \left(-\frac{4}{2} + 2\right)x^2 = 0x^2 = 0$

4 Dados los monomios $A = -5x^4$, $B = 20x^4$, $C = 2x$, calcula:

a) $A + B$ **b)** $A - B$ **c)** $3A + 2B$

d) A^3 **e)** C^2 **f)** $A^2 + C^8$

g) $A \cdot B$ **h)** $A \cdot C$ **i)** $B \cdot C$

j) $B : A$ **k)** $A : B$ **l)** $B : C$

$A = -5x^4 \qquad B = 20x^4 \qquad C = 2x$

a) $A + B = -5x^4 + 20x^4 = 15x^4$

b) $A - B = -5x^4 - 20x^4 = -25x^4$

c) $3A + 2B = 3 \cdot (-5x^4) + 2 \cdot (20x^4) = -15x^4 + 40x^4 = 25x^4$

d) $A^3 = (-5x^4)^3 = -125x^{12}$

e) $C^2 = (2x)^2 = 4x^2$

f) $A^2 + C^8 = (-5x^4)^2 + (2x)^8 = 25x^8 + 256x^8 = 281x^8$

g) $A \cdot B = (-5x^4) \cdot (20x^4) = -100x^8$

h) $A \cdot C = (-5x^4) \cdot (2x) = -10x^5$

i) $B \cdot C = (20x^4) \cdot (2x) = 40x^5$

j) $B : A = (20x^4) : (-5x^4) = -4$

k) $A : B = (-5x^4) : (20x^4) = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4}$

l) $B : C = (20x^4) : (2x) = 10x^3$

5 **Efectúa las siguientes operaciones y di cuál es el grado del monomio resultante:**

a) $2x \cdot (-3x^2) \cdot (-x)$

b) $2x^3 \cdot (-x^2) \cdot 5x$

c) $\frac{3}{4}x^3 \cdot (-2x^2) \cdot 2x$

d) $x \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{3}{5}x$

e) $-\frac{1}{3}x \cdot 3x^2 \cdot (-x)$

f) $\frac{2}{5}x^2 \cdot \frac{3}{4}x \cdot \frac{10}{3}x^2$

a) $2x \cdot (-3x^2) \cdot (-x) = 6x^4 \rightarrow$ Grado 4

b) $2x^3 \cdot (-x^2) \cdot 5x = -10x^6 \rightarrow$ Grado 6

c) $\frac{3}{4}x^3 \cdot (-2x^2) \cdot 2x = \frac{3}{4} \cdot (-4)x^6 = -3x^6 \rightarrow$ Grado 6

d) $x \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{3}{5}x = -\frac{3}{10}x^3 \rightarrow$ Grado 3

e) $-\frac{1}{3}x \cdot 3x^2 \cdot (-x) = x^4 \rightarrow$ Grado 4

f) $\frac{2}{5}x^2 \cdot \frac{3}{4}x \cdot \frac{10}{3}x^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{3} \cdot x^5 = x^5 \rightarrow$ Grado 5

6 **Efectúa las siguientes divisiones de monomios y di cuál es el grado de cada monomio resultante:**

a) $(8x^3) : (2x^2)$

b) $(4x^6) : (2x)$

c) $(3x^3) : (2x^2)$

d) $(18x^3) : (2x^3)$

e) $\frac{20x^3}{2x^2}$

f) $\frac{-15x^6}{3x^2}$

g) $\frac{120x^2}{10x}$

h) $\frac{-7x^3}{2x^2}$

i) $\frac{-2x^2}{x^2}$

j) $\frac{-5x}{5x}$

a) $(8x^3) : (2x^2) = 4x \;\rightarrow\;$ Grado 1

b) $(4x^6) : (2x) = 2x^5 \;\rightarrow\;$ Grado 5

c) $(3x^3) : (2x^2) = \dfrac{3}{2}x \;\rightarrow\;$ Grado 1

d) $(18x^3) : (2x^3) = 9 \;\rightarrow\;$ Grado 0

e) $\dfrac{20x^3}{2x^2} = 10x \;\rightarrow\;$ Grado 1

f) $\dfrac{-15x^6}{3x^2} = -5x^4 \;\rightarrow\;$ Grado 4

g) $\dfrac{120x^2}{10x} = 12x \;\rightarrow\;$ Grado 1

h) $\dfrac{-7x^3}{2x^2} = -\dfrac{7}{2}x \;\rightarrow\;$ Grado 1

i) $\dfrac{-2x^2}{x^2} = -2 \;\rightarrow\;$ Grado 0

j) $\dfrac{-5x}{5x} = -1 \;\rightarrow\;$ Grado 0

Polinomios

7 **Indica cuál es el grado de los siguientes polinomios (recuerda que deben estar en forma reducida):**

a) $2x^4 - 3x^2 + 4x$ b) $x^2 - 3x^3 + 2x$

c) $x^2 - 3x^2 + 4x^3$ d) $-\dfrac{1}{2}x^3 + 3x^2$

e) $3x^3 - 2x^2 - 3x^3$ f) $-\dfrac{1}{4}x^5 - \dfrac{3}{5}x^2$

g) $2x + 3$ h) $-\dfrac{1}{3}x + 3x$

a) Grado 4 b) Grado 3 c) Grado 3 d) Grado 3

e) $-2x^2 \;\rightarrow\;$ Grado 2 f) Grado 5 g) Grado 1 h) Grado 1

8 **Halla el valor numérico de estos polinomios para $x = 0$, para $x = -1$ y para $x = 2$:**

a) $x^3 - 2x^2 + 3$ b) $x^2 - 3x + 1$

c) $\dfrac{1}{2}x^2 + 3x$ d) $\dfrac{3}{4}x^3 - 2x + 1$

Para $x = 0$	Para $x = -1$	Para $x = 2$
a) $0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3 = 3$	$(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 = 0$	$8 - 8 + 3 = 3$
b) $0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$	$1 + 3 + 1 = 5$	$4 - 6 + 1 = -1$
c) $\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$	$2 + 6 = 8$
d) $\frac{3}{4} \cdot 0^3 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$	$-\frac{3}{4} + 2 + 1 = \frac{9}{4}$	$6 - 4 + 1 = 3$

9 **Sean los polinomios:**

$$M(x) = 3x^2 - 5x - 3; \quad N(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 1; \quad K(x) = x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Calcula:

a) $2M(x) + 4N(x) + 3K(x)$

b) $M(x) - 2N(x)$

c) $M(x) + 3N(x) - K(x)$

$$M(x) = 3x^2 - 5x - 3; \quad N(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 1; \quad K(x) = x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2M(x) = 6x^2 - 10x - 6 \\ 4N(x) = 2x^2 + 3x + 4 \\ 3K(x) = 3x^2 - x + 2 \end{array}\right\} \to 2M(x) + 4N(x) + 3K(x) = 11x^2 - 8x$$

b) $2N(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

$$-2N(x) = -x^2 - \frac{3}{2}x - 2$$

$$M(x) - 2N(x) = 2x^2 - \frac{13}{3}x - 5$$

c) $$\left.\begin{array}{r} 3N(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + 3 \\ -K(x) = -x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

$$M(x) + 3N(x) - K(x) = \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{12}x - \frac{2}{3}$$

Página 84

10 **Opera y simplifica:**

a) $(5x - 2)(3 - 2x)$ **b)** $x(x - 3)(2x - 1)$

a) $(5x-2)(3-2x) = 15x-10x^2-6+4x = -10x^2+19x-6$

b) $x(x-3)(2x-1) = (x^2-3x)(2x-1) = 2x^3-x^2-6x^2+3x = 2x^3-7x^2+3x$

11 Opera y simplifica:

a) $3x^3(2x^2-3x+5)$ **b)** $(x^2-5x)(x^3+2x)$

c) $(x^3-2x+3)(x^2+4x-1)$ **d)** $(3x^2-2x+2)(x^3+3x-2)$

a) $3x^3(2x^2-3x+5) = 6x^5-9x^4+15x^3$

b) $(x^2-5x)\cdot(x^3+2x) = x^5+2x^3-5x^4-10x^2$

c) $(x^3-2x+3)\cdot(x^2+4x-1) =$

$= x^5+4x^4-x^3-2x^3-8x^2+2x+3x^2+12x-3 =$

$= x^5+4x^4-3x^3-5x^2+14x-3$

d) $(3x^2-2x+2)\cdot(x^3+3x-2) =$

$= 3x^5+9x^3-6x^2-2x^4-6x^2+4x+2x^3+6x-4 =$

$= 3x^5-2x^4+11x^3-12x^2+10x-4$

12 Calcula y simplifica:

a) $(3x-2)^2$ **b)** $(x+2)^2$ **c)** $(x+2)^3$

d) $(x+2)^4$ **e)** $(x^2-2x+2)^2$ **f)** $(x^2+x-3)^2$

a) $(3x-2)^2 = (3x-2)(3x-2) = 9x^2-6x-6x+4 = 9x^2-12x+4$

b) $(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x^2+2x+2x+4 = x^2+4x+4$

c) $(x+2)^3 = (x+2)(x+2)^2 = (x+2)(x^2+4x+4) =$

$= x^3+4x^2+4x+2x^2+8x+8 = x^3+6x^2+12x+8$

d) $(x+2)^4 = (x+2)\cdot(x+2)^3 = (x+2)(x^3+6x^2+12x+8) =$

$= x^4+6x^3+12x^2+8x+2x^3+12x^2+24x+16 =$

$= x^4+8x^3+24x^2+32x+16$

e) $(x^2-2x+2)^2 = (x^2-2x+2)(x^2-2x+2) =$

$= x^4-2x^3+2x^2-2x^3+4x^2-4x+2x^2-4x+4 =$

$= x^4-4x^3+8x^2-8x+4$

f) $(x^2+x-3)^2 = (x^2+x-3)(x^2+x-3) =$

$= x^4+x^3-3x^2+x^3+x^2-3x-3x^2-3x+9 =$

$= x^4+2x^3-5x^2-6x+9$

13 **Calcula, utilizando las identidades notables:**

a) $(4x + 1)^2$ b) $(3x - 1)^2$

c) $(x + 5)(x - 5)$ d) $(x - 1)^2$

e) $\left(3x + \frac{1}{3}\right)^2$ f) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2$

g) $\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right)$ h) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(2x + \frac{1}{2}\right)$

a) $(4x + 1)^2 = 16x^2 + 8x + 1$ b) $(3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$

c) $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$ d) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

e) $\left(3x + \frac{1}{3}\right)^2 = 9x^2 + 2x + \frac{1}{9}$ f) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$

g) $\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) = x^2 - \frac{1}{25}$ h) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(2x + \frac{1}{2}\right) = 4x^2 - \frac{1}{4}$

14 **Completa:**

a) $(x + 7)(x - 7) = \square^2 - \square^2$

b) $(x + 1)(x - 1) =$

c) $(2 + x)(2 - x) =$

a) $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 7^2$

b) $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1^2$

c) $(2 + x)(2 - x) = 2^2 - x^2$

15 **Expresa como diferencia de cuadrados:**

a) $(3x + 5)(3x - 5)$ b) $(5 - 2x)(5 + 2x)$

c) $(x^2 + 4)(x^2 - 4)$ d) $(x^2 - 2x)(x^2 + 2x)$

a) $(3x + 5)(3x - 5) = (3x)^2 - 5^2$

b) $(5 - 2x)(5 + 2x) = 5^2 - (2x)^2$

c) $(x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2)^2 - 4^2$

d) $(x^2 - 2x)(x^2 + 2x) = (x^2)^2 - (2x)^2$

16 **Calcula el cociente y el resto en cada una de estas divisiones:**

a) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : (x^3 + 2x)$

b) $(x^3 - 5x^2 + x) : (x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 5x^2 + x) : (2x^2 - 1)$

a) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : (x^3 + 2x)$

$$\begin{array}{rl|l}
& x^5 + 7x^3 - 5x + 1 & x^3 + 2x \\ \cline{3-3}
& -x^5 - 2x^3 & x^2 + 5 \quad \leftarrow \quad C(x) \\ \cline{2-2}
& 5x^3 - 5x & \\
& -5x^3 - 10x & \\ \cline{2-2}
& -15x + 1 \quad \leftarrow \quad R(x) &
\end{array}$$

b) $(x^3 - 5x^2 + x) : (x^2 - 1)$

$$\begin{array}{rl|l}
& x^3 - 5x^2 + x & x^2 - 1 \\ \cline{3-3}
& -x^3 \qquad\quad + x & x - 5 \quad \leftarrow \quad C(x) \\ \cline{2-2}
& -5x^2 + 2x & \\
& 5x^2 \qquad - 5 & \\ \cline{2-2}
& 2x - 5 \quad \leftarrow \quad R(x) &
\end{array}$$

c) $(x^3 - 5x^2 + x) : (2x^2 - 1)$

$$\begin{array}{rl|l}
& x^3 - 5x^2 + \qquad x & 2x^2 - 1 \\ \cline{3-3}
& -x^3 \qquad + (1/2)x & (1/2)x - 5/2 \quad \leftarrow \quad C(x) \\ \cline{2-2}
& -5x^2 + (3/2)x & \\
& 5x^2 \qquad\quad - 5/2 & \\ \cline{2-2}
& (3/2)x - 5/2 \quad \leftarrow \quad R(x) &
\end{array}$$

17 **Halla el cociente y el resto en cada una de estas divisiones:**

a) $(3x^2 - 7x + 5) : (x^2 - x + 1)$

b) $(x^3 - x) : (x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 3x^2 - 2) : (x^2 + 1)$

a)
$$\begin{array}{rl|l}
& 3x^2 - 7x + 5 & x^2 - x + 1 \\ \cline{3-3}
& -3x^2 + 3x - 3 & 3 \quad \leftarrow \quad C(x) \\ \cline{2-2}
& -4x + 2 \quad \leftarrow \quad R(x) &
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rl|l}
& x^3 - x & x^2 - 1 \\ \cline{3-3}
& -x^3 + x & x \quad \leftarrow \quad C(x) \\ \cline{2-2}
& 0 \quad \leftarrow \quad R(x) &
\end{array}$$

c)
$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -3x^2 & & -2 & x^2+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & & -x & & x-3 \quad \leftarrow \quad C(x) \\ \cline{1-4}
 & -3x^2 & -x & -2 & \\
 & 3x^2 & & +3 & \\ \cline{2-4}
 & & -x & +1 & \leftarrow \quad R(x)
\end{array}
$$

18 **Utilizando la regla de Ruffini, halla el cociente y el resto de cada división:**

a) $(3x^4 - 2x^2 + 5x - 2) : (x - 2)$

b) $(-x^4 + 2x^3 - 3x + 1) : (x + 1)$

c) $(3x^3 + 2x^2 - x) : (x + 2)$

d) $(x^3 - 27) : (x - 3)$

e) $(x^4 - x^2) : (x + 1)$

a) $(3x^4 - 2x^2 + 5x - 2) : (x - 2)$

	3	0	–2	5	–2
2		6	12	20	50
	3	6	10	25	48

$C(x) = 3x^3 + 6x^2 + 10x + 25$
$R = 48$

b) $(-x^4 + 2x^3 - 3x + 1) : (x + 1)$

	–1	2	0	–3	1
–1		1	–3	3	0
	–1	3	–3	0	1

$C(x) = -x^3 + 3x^2 + 3x$
$R = 1$

c) $(3x^3 + 2x^2 - x) : (x + 2)$

	3	2	–1	0
–2		–6	8	–14
	3	–4	7	–14

$C(x) = 3x^2 - 4x + 7$
$R = -14$

d) $(x^3 - 27) : (x - 3)$

	1	0	0	–27
3		3	9	27
	1	3	9	0

$C(x) = x^2 + 3x + 9$
$R = 0$

e) $(x^4 - x^2) : (x + 1)$

	1	0	–1	0	0
–1		–1	1	0	0
	1	–1	0	0	0

$C(x) = x^3 - x^2$
$R = 0$

19 **Calcula el cociente y el resto en cada una de las divisiones siguientes:**

a) $(x^4 - 2x^3 + 5x - 1) : (x - 2)$ b) $(x^4 + x^2 - 20) : (x + 2)$

c) $(2x^4 + x^2 - 3x) : (x - 1)$ d) $(x^4 - 81) : (x - 3)$

e) $(3x^4 - 7x^3 - 3x^2 - x) : \left(x + \dfrac{2}{3}\right)$

a) $(x^4 - 2x^3 + 5x - 1) : (x - 2)$

	1	–2	0	5	–1
2		2	0	0	10
	1	0	0	5	9

$C(x) = x^3 + 5$
$R = 9$

b) $(x^4 + x^2 - 20) : (x + 2)$

	1	0	1	0	–20
–2		–2	4	–10	20
	1	–2	5	–10	0

$C(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10$
$R = 0$

c) $(2x^4 + x^2 - 3x) : (x - 1)$

	2	0	1	–3	0
1		2	2	3	0
	2	2	3	0	0

$C(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x$
$R = 0$

d) $(x^4 - 81) : (x - 3)$

	1	0	0	0	–81
3		3	9	27	81
	1	3	9	27	0

$C(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 27$
$R = 0$

e) $(3x^4 - 7x^3 - 3x^2 - x) : \left(x + \dfrac{2}{3}\right)$

	3	–7	–3	–1	0
–2/3		–2	6	–2	2
	3	–9	3	–3	2

$C(x) = 3x^3 - 9x^2 + 3x - 3$
$R = 2$

PIENSA Y RESUELVE

20 **Al multiplicar $P(x)$ por $3x^2$ hemos obtenido $-15x^4$. ¿Cuánto vale $P(x)$?**

Si $P(x) \cdot 3x^2 = -15x^4 \;\rightarrow\; P(x) = \dfrac{-15x^4}{3x^2} = -5x^2$

21 **Al dividir $M(x)$ entre $2x^3$ hemos obtenido $5x^2$. ¿Cuánto vale $M(x)$?**

Si $M(x): 2x^3 = 5x^2 \rightarrow M(x) = 5x^2 \cdot 2x^3 = 10x^5$

22 **Completa estas expresiones:**

a) $(x - 3)^2 = x^2 - \square x + 9$ b) $(2x + 1)^2 = 4x^2 + \square x + 1$

c) $(x + \square)^2 = x^2 + 8x + 16$ d) $(3x - \square)^2 = \square x^2 - \square x + 4$

a) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ b) $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

c) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$ d) $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

Página 85

23 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

24 **Desarrolla y simplifica:**

a) $(x - 4)^2 + (x - 2)(x + 2)$ b) $(2x - 1)^2 - 2(x + 1)^2$

c) $(3x - 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1)$ d) $(5x - 1)^2 - 2(4x - 1)^2$

a) $(x - 4)^2 + (x - 2)(x + 2) = x^2 - 8x + 16 + x^2 - 4 = 2x^2 - 8x + 12$

b) $(2x - 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1 - 2(x^2 + 2x + 1) =$

$= 4x^2 - 4x + 1 - 2x^2 - 4x - 2 = 2x^2 - 8x - 1$

c) $(3x - 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1) = 9x^2 - 6x + 1 - (4x^2 - 1) =$

$= 9x^2 - 6x + 1 - 4x^2 + 1 = 5x^2 - 6x + 2$

d) $(5x - 1)^2 - 2(4x - 1)^2 = 25x^2 - 10x + 1 - 2(16x^2 - 8x + 1) =$

$= 25x^2 - 10x + 1 - 32x^2 + 16x - 2 = -7x^2 + 6x - 1$

25 **Opera y reduce:**

a) $\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2 - \dfrac{2x-1}{4}$ b) $\dfrac{x+3}{5} - \dfrac{(x-1)^2}{4}$

a) $\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2 - \dfrac{2x-1}{4} = \dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{2x-1}{4} = \dfrac{x^2 - 6x + 9 - 2x + 1}{4} =$

$= \dfrac{x^2 - 8x + 10}{4}$

b) $\dfrac{x+3}{5} - \dfrac{(x-1)^2}{4} = \dfrac{4(x+3)}{20} - \dfrac{5(x-1)^2}{20} = \dfrac{4x + 12 - 5(x^2 - 2x + 1)}{20} =$

$= \dfrac{4x + 12 - 5x^2 + 10x - 5}{20} = \dfrac{-5x^2 + 14x + 7}{20}$

26 **Efectúa las siguientes divisiones y expresa el resultado de la forma:**

$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$ **y de la forma** $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$:

a) $(x^2 - 3x + 2) : (x + 4)$

b) $(x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 1)$

c) $(3x^2 - 2x + 7) : (x - 2)$

d) $(x^2 + x - 12) : (x - 3)$

a) $(x^2 - 3x + 2) : (x + 4)$

Calculamos $C(x)$ y $R(x)$ aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2 \\ -4 & & -4 & 28 \\ \hline & 1 & -7 & \boxed{30} \end{array}$$

$C(x) = x - 7$
$R = 30$

Así: $x^2 - 3x + 2 = (x + 4)(x - 7) + 30$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 4} = x - 7 + \frac{30}{x + 4}$$

b)
$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x + 3 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^3 + x & x \\ \hline -x + 3 & \end{array}$$

$C(x) = x$

$R(x) = -x + 3$

Así: $x^3 - 2x + 3 = (x^2 - 1)x - x + 3$

$$\frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 - 1} = x + \frac{3 - x}{x^2 - 1}$$

c) $(3x^2 - 2x + 7) : (x - 2)$

Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & -2 & 7 \\ 2 & & 6 & 8 \\ \hline & 3 & 4 & \boxed{15} \end{array}$$

$C(x) = 3x + 4$
$R = 15$

Luego: $3x^2 - 2x + 7 = (x - 2)(3x + 4) + 15$

$$\frac{3x^2 - 2x + 7}{x - 2} = 3x + 4 + \frac{15}{x - 2}$$

d) $(x^2 + x - 12) : (x - 3)$

Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{l} C(x) = x + 4 \\ R = 0 \end{array}$$

Así: $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$

$$\frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = x + 4$$

27 **Calcula un polinomio $P(x)$ tal que: $A(x) - 2B(x) + P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ siendo:**

$$A(x) = 2x^4 - 3x^2 - 4x + 5 \qquad B(x) = x^3 - 5x^2 - 5x + 9$$

Despejamos $P(x)$ de la expresión dada; así:

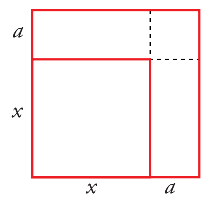
$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - A(x) + 2B(x)$

$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - (2x^4 - 3x^2 - 4x + 5) + 2(x^3 - 5x^2 - 5x + 9)$

$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - 2x^4 + 3x^2 + 4x - 5 + 2x^3 - 10x^2 - 10x + 18$

$P(x) = -x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 5x + 14$

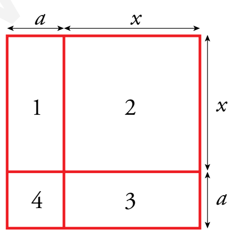
28 **Aumentamos el lado, x, de un cuadrado en a cm y formamos un nuevo cuadrado cuyo lado mide $x + a$. Suma las áreas de los rectángulos y de los cuadrados pequeños de la figura y comprueba que obtienes el área del cuadrado de lado $x + a$.**



- Área del cuadrado de lado $x + a$:

$$A = (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

- Área de cada zona señalada en la figura:



$$\left.\begin{array}{l} A_1 = a \cdot x \\ A_2 = x^2 \\ A_3 = a \cdot x \\ A_4 = a^2 \end{array}\right\} \to A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = xa + a^2 + xa + x^2 = a^2 + 2ax + x^2 = (x + a)^2 = A$$

Así, $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Página 95

PRACTICA

Factor común e identidades notables

1 **Saca factor común:**

a) $9x^2 + 6x - 3$

b) $2x^3 - 6x^2 + 4x$

c) $10x^3 - 5x^2$

d) $x^4 - x^3 + x^2 - x$

a) $9x^2 + 6x - 3 = 3(3x^2 + 2x - 1)$

b) $2x^3 - 6x^2 + 4x = 2x(x^2 - 3x + 2)$

c) $10x^3 - 5x^2 = 5x^2(2x - 1)$

d) $x^4 - x^3 + x^2 - x = x(x^3 - x^2 + x - 1)$

2 **Expresa los polinomios siguientes como cuadrado de un binomio:**

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + \square)^2$

b) $4x^2 - 20x + 25 = (\square - 5)^2$

c) $49 + 14x + x^2$

d) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

b) $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$

c) $49 + 14x + x^2 = (7 + x)^2$

d) $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

3 **Expresa como suma por diferencia los siguientes polinomios:**

a) $x^2 - 16 = (x + \square)(x - \square)$

b) $x^2 - 1$

c) $9 - x^2$

d) $4x^2 - 1$

e) $4x^2 - 9$

a) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

b) $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

c) $9 - x^2 = (3 + x)(3 - x)$

d) $4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$

e) $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$

4 **Expresa como un cuadrado o como producto de dos binomios cada uno de los siguientes polinomios:**

a) $25x^2 + 40x + 16$

b) $64x^2 - 160x + 100$

c) $4x^2 - 25$

a) $25x^2 + 40x + 16 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 4 + 4^2 = (5x + 4)^2$

b) $64x^2 - 160x + 100 = (8x)^2 - 2 \cdot 8x \cdot 10 + 10^2 = (8x - 10)^2$

c) $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x + 5)(2x - 5)$

5 **Saca factor común y utiliza los productos notables para descomponer en factores los siguientes polinomios:**

a) $x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $x^3 - x$

c) $4x^4 - 81x^2$

d) $x^3 + 2x^2 + x$

e) $3x^3 - 27x$

f) $3x^2 + 30x + 75$

a) $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$

b) $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

c) $4x^4 - 81x^2 = x^2(4x^2 - 81) = x^2(2x + 9)(2x - 9)$

d) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

e) $3x^3 - 27x = 3x(x^2 - 9) = 3x(x + 3)(x - 3)$

f) $3x^2 + 30x + 75 = 3(x^2 + 10x + 25) = 3(x + 5)^2$

Divisibilidad por $x - a$. Teorema del resto y raíces de un polinomio

6 **a) Explica, sin hacer la división, por qué el polinomio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ no puede ser divisible por $x - 2$ ni por $x + 3$.**

b) Indica qué expresiones del tipo $x - a$ podríamos considerar como posibles divisores de $P(x)$.

c) Comprueba, haciendo la división con la regla de Ruffini, cuáles de las expresiones consideradas en el apartado b) son divisores de $P(x)$.

a) En las expresiones $x - 2$ y $x + 3$, $a = 2$ y $a = -3$, respectivamente, y no son divisores del término independiente de $P(x)$, 1.

b) Los divisores de 1 son 1, –1. Podríamos considerar, como posibles divisores de $P(x)$, las expresiones $x - 1$ y $x + 1$.

c) $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

1 no es ráiz de $P(x)$. -1 sí es raíz de $P(x)$.

La expresión $x + 1$ es divisor de $P(x)$, mientras que $x - 1$ no lo es.

7 **Utiliza la regla de Ruffini para calcular $P(-2)$, $P(3)$ y $P(5)$, en los casos siguientes:**

a) $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 2$ **b) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 16x + 5$**

c) $P(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 9x$

a) $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & -1 & 7 & -2 \\ -2 & & -2 & 10 & -18 & 22 \\ \hline & 1 & -5 & 9 & -11 & \boxed{20} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & -1 & 7 & -2 \\ 3 & & 3 & 0 & -3 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 4 & \boxed{10} \end{array}$$

$P(-2) = 20$ $P(3) = 10$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & -1 & 7 & -2 \\ 5 & & 5 & 10 & 45 & 260 \\ \hline & 1 & 2 & 9 & 52 & \boxed{258} \end{array}$$

$P(5) = 258$

b) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 16x + 5$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -16 & 5 \\ -2 & & -4 & 22 & -12 \\ \hline & 2 & -11 & 6 & \boxed{-7} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -16 & 5 \\ 3 & & 6 & -3 & -57 \\ \hline & 2 & -1 & -19 & \boxed{-52} \end{array}$$

$P(-2) = -7$ $P(3) = -52$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -16 & 5 \\ 5 & & 10 & 15 & -5 \\ \hline & 2 & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(5) = 0$

c) $P(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 9x$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -4 & -3 & 9 & 0 \\ -2 & & -4 & 16 & -26 & 34 \\ \hline & 2 & -8 & 13 & -17 & \boxed{34} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -4 & -3 & 9 & 0 \\ 3 & & 6 & 6 & 9 & 54 \\ \hline & 2 & 2 & 3 & 18 & \boxed{54} \end{array}$$

$P(-2) = 34$ $P(3) = 54$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -4 & -3 & 9 & 0 \\ 5 & & 10 & 30 & 135 & 720 \\ \hline & 2 & 6 & 27 & 144 & \boxed{720} \end{array}$$

$P(5) = 720$

8 **Halla, para $x = -3$ y para $x = 4$, el valor de los siguientes polinomios:**

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

$Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2$

$R(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

$P(-3) = 2(-3)^3 - 3(-3)^2 + 5(-3) - 1 = -54 - 27 - 15 - 1 = -97$

$P(4) = 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 - 1 = 128 - 48 + 20 - 1 = 99$

$Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 = 2(x^4 - x^3 + x^2)$

$Q(-3) = 2[(-3)^4 - (-3)^3 + (-3)^2] = 2 \cdot (81 + 27 + 9) = 2 \cdot 117 = 234$

$Q(4) = 2(4^4 - 4^3 + 4^2) = 2(256 - 64 + 16) = 2 \cdot 208 = 416$

$R(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

$R(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 - (-3) + 3 = -27 - 27 + 3 + 3 = -48$

$R(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 4 + 3 = 64 - 48 - 4 + 3 = 15$

9 **Averigua cuáles de los números 0, 1, –1, 2, –2, 3 y –3 son raíces de los polinomios siguientes:**

$P(x) = x^3 - 7x - 6$

$Q(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$

$R(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$

☛ ***Recuerda que a es raíz de P(x) si P(a) = 0.***

$P(x) = x^3 - 7x - 6$

Calculamos el valor numérico de $P(x)$ en cada uno de los números dados:

$P(0) = -6$; $P(1) = 1 - 7 - 6 = -12$; $P(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$;

$P(2) = 8 - 14 - 6 = -12$; $P(-2) = -8 + 14 - 6 = 0$; $P(3) = 27 - 21 - 6 = 0$;

$P(-3) = -27 + 21 - 6 = -12$

Las raíces de $P(x)$ son –1, –2 y 3.

$Q(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$

$Q(0) = 24$; $Q(1) = 1 - 6 - 4 + 24 = 15$; $Q(-1) = -1 - 6 + 4 + 24 = 21$;

$Q(2) = 8 - 24 - 8 + 24 = 0$; $Q(-2) = -8 - 24 + 8 + 24 = 0$;

$Q(3) = 27 - 54 - 12 + 24 = -15$; $Q(-3) = -27 - 54 + 12 + 24 = -45$

Las raíces de $Q(x)$ son 2 y –2.

$R(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$

$R(0) = 0$; $R(1) = 1 - 2 - 11 + 12 = 0$; $R(-1) = 1 + 2 - 11 - 12 = -20$;

$R(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 11 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 = 16 - 16 - 44 + 24 = -20$

$R(-2) = 16 + 16 - 44 - 24 = -36$; $R(3) = 81 - 54 - 99 + 36 = -36$

$R(-3) = 81 + 54 - 99 - 36 = 0$

Las raíces de $R(x)$ son 0, 1 y –3.

10 **Aplica la regla de Ruffini para calcular el valor del polinomio:**

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 8$$

para $x = 2$, $x = 1$ y $x = -2$.

$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 8$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 5 & -8 \\ 2 & & 4 & -6 & -2 \\ \hline & 2 & -3 & -1 & \boxed{-10} \end{array} \rightarrow P(2) = -10$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 5 & -8 \\ 1 & & 2 & -5 & 0 \\ \hline & 2 & -5 & 0 & \boxed{-8} \end{array} \rightarrow P(1) = -8$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 5 & -8 \\ -2 & & -4 & 22 & -54 \\ \hline & 2 & -11 & 27 & \boxed{-62} \end{array} \rightarrow P(-2) = -62$$

11 **a) Si la división $P(x) : (x - 2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar del valor $P(2)$?**

b) Si –5 es raíz del polinomio $P(x)$, ¿qué puedes afirmar de la división $P(x) : (x + 5)$?

a) Si la división es exacta, el resto es 0, luego $P(2) = 0$.

b) La división $P(x) : (x + 5)$ es exacta, el resto es 0.

Página 96

PIENSA Y RESUELVE

Factorización de polinomios

12 **Expresa como cuadrado de un binomio o como suma por diferencia de binomios cada uno de los siguientes polinomios:**

a) $x^4 + 4x^2 + 4$ **b)** $x^2 - 16$ **c)** $9x^2 - 6x^3 + x^4$

a) $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2)^2 + 2 \cdot 2 \cdot x^2 + 2^2 = (x^2 + 2)^2$

b) $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$

c) $9x^2 - 6x^3 + x^4 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot x^2 + (x^2)^2 = (3x - x^2)^2$

13 **Descompón en factores utilizando los productos notables y sacando factor común cuando se pueda:**

a) $x^2 - 25$ **b)** $x^2 + 4x + 4$

c) $9 - x^2$ **d)** $x^3 - 2x^2$

e) $x^3 + 4x$ **f)** $x^4 - 1$

g) $x^2 - 12x + 36$ **h)** $x^4 - 9x^2$

a) $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$

b) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

c) $9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$

d) $x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$

e) $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$

f) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

g) $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$

h) $x^4 - 9x^2 = x^2(x^2 - 9) = x^2(x - 3)(x + 3)$

14 **Saca factor común e identifica productos notables en cada caso:**

a) $12x^3 - 3x$ **b)** $2x^4 + 12x^3 + 18x^2$

c) $45x^2 - 120x + 80$ **d)** $12x^3 + 12x^2 + 3x$

a) $12x^3 - 3x = 3x(4x^2 - 1) = 3x(2x - 1)(2x + 1)$

b) $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2$

c) $45x^2 - 120x + 80 = 5(9x^2 - 24x + 16) = 5(3x - 4)^2$

d) $12x^3 + 12x^2 + 3x = 3x(4x^2 + 4x + 1) = 3x(2x + 1)^2$

15 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

16 **Descompón en factores los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:**

a) $x^2 + 8x - 9$

b) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

c) $x^4 + x^2 - 20$

d) $x^3 + x^2 - 5x - 5$

e) $x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 18$

f) $x^4 - 81$

a) $x^2 + 8x - 9$

	1	8	–9
1		1	9
	1	9	0

$x^2 + 8x - 9 = (x - 1)(x + 9)$

Raíces: 1 y –9

b) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

	1	–1	9	–9
1		1	0	9
	1	0	9	0

$x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9)$

Raíz: 1

$x^2 + 9$ es irreducible.

c) $x^4 + x^2 - 20$

	1	0	1	0	–20
2		2	4	10	20
	1	2	5	10	0
–2		–2	0	–10	
	1	0	5	0	

El polinomio $x^2 + 5$ no se puede descomponer más.

$x^4 + x^2 - 20 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 5)$; raíces: 2, –2

d) $x^3 + x^2 - 5x - 5$

	1	1	–5	–5
–1		–1	0	5
	1	0	–5	0

$\rightarrow x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

Así: $x^3 + x^2 - 5x - 5 = (x + 1)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

Raíces: $-1, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$

e) $x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 18$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & -9 & 3 & 18 \\
-2 & & -2 & 6 & 6 & -18 \\
\hline
 & 1 & -3 & -3 & 9 & \boxed{0} \\
3 & & 3 & 0 & -9 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & \boxed{0} &
\end{array} \quad \to \quad x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

$x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 18 = (x + 2)(x - 3)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

Raíces: -2, 3, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$

f) $x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$

Raíces: 3, -3

17 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

18 **Descompón en factores:**

a) $x^4 - x^2$

b) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$

c) $2x^3 - 3x^2$

d) $x^3 - x^2 - 12x$

e) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

f) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$

a) $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x - 1)(x + 1)$

b) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & 4 & 12 \\
-3 & & -3 & 0 & -12 \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & \boxed{0}
\end{array} \quad \to \quad x^2 + 4 \text{ no tiene raíces reales.}$$

Luego: $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = (x + 3)(x^2 + 4)$

c) $2x^3 - 3x^2 = x^2(2x - 3)$

d) $x^3 - x^2 - 12x = x(x^2 - x - 12)$

Buscamos las raíces de $x^2 - x - 12$ entre los divisores de -12:

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -1 & -12 \\
4 & & 4 & 12 \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0}
\end{array} \quad \to \quad x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

$x^3 - x^2 - 12x = x(x - 4)(x + 3)$

e) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 14 & -8 \\ 1 & & 1 & -6 & 8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & -8 & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x-1)(x-2)(x-4)$

f) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 4 & -4 & 3 \\ 1 & & 1 & -3 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ 3 & & 3 & 0 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array} \quad \to \quad x^2 + 1 \text{ no tiene raíces reales.}$$

$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)(x^2+1)$

19 **Factoriza los siguientes polinomios:**

a) $x^2 - 6x - 7$ **b)** $x^2 + 12x + 35$

c) $4x^2 + 8x - 12$ **d)** $2x^3 + 2x^2 - 24x$

e) $x^4 + 9x^3 - 10x^2$ **f)** $3x^3 - 9x^2 - 30x$

a) $x^2 - 6x - 7$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -6 & -7 \\ -1 & & -1 & 7 \\ \hline & 1 & -7 & \boxed{0} \end{array} \quad \to \quad x^2 - 6x - 7 = (x+1)(x-7)$$

b) $x^2 + 12x + 35$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 12 & 35 \\ -5 & & -5 & -35 \\ \hline & 1 & 7 & \boxed{0} \end{array} \quad \to \quad x^2 + 12x + 35 = (x-5)(x+7)$$

c) $4x^2 + 8x - 12 = 4(x^2 + 2x - 3)$

Factorizamos $x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ 1 & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array} \quad \to \quad x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

Así: $4x^2 + 8x - 12 = 4(x-1)(x+3)$

d) $2x^3 + 2x^2 - 24x = 2x(x^2 + x - 12)$

Factorizamos $x^2 + x - 12$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & \boxed{0} \end{array} \quad \to \quad x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$$

Por tanto: $2x^3 + 2x^2 - 24x = 2x(x-3)(x+4)$

e) $x^4 + 9x^3 - 10x^2 = x^2(x^2 + 9x - 10)$

Factorizamos $x^2 + 9x - 10$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 9 & -10 \\ 1 & & 1 & 10 \\ \hline & 1 & 10 & \boxed{0} \end{array} \quad \to \quad x^2 + 9x - 10 = (x-1)(x+10)$$

Así: $x^4 + 9x^3 - 10x^2 = x^2(x-1)(x+10)$

f) $3x^3 - 9x^2 - 30x = 3x(x^2 - 3x - 10)$

Factorizamos $x^2 - 3x - 10$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & -10 \\ -2 & & -2 & 10 \\ \hline & 1 & -5 & \boxed{0} \end{array} \quad \to \quad x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$$

Así: $3x^3 - 9x^2 - 30x = 3x(x+2)(x-5)$

Página 97

20 Factoriza los polinomios siguientes:

a) $3x^2 + 2x - 8$ **b)** $4x^2 + 17x + 15$

c) $2x^2 - 9x - 5$ **d)** $-x^2 + 17x - 72$

a) $3x^2 + 2x - 8$

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & 2 & -8 \\ -2 & & -6 & 8 \\ \hline & 3 & -4 & \boxed{0} \end{array} \quad \to \quad 3x^2 + 2x - 8 = (x+2)(3x-4)$$

b) $4x^2 + 17x + 15$

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & 17 & 15 \\ -3 & & -12 & -15 \\ \hline & 4 & 5 & \boxed{0} \end{array} \quad \to \quad 4x^2 + 17x + 15 = (x+3)(4x+5)$$

c) $2x^2 - 9x - 5$

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -9 & -5 \\ 5 & & 10 & 5 \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array} \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1)$$

d) $-x^2 + 17x - 72$

$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & 17 & -72 \\ 9 & & -9 & 72 \\ \hline & -1 & 8 & \boxed{0} \end{array} \quad \rightarrow \quad -x^2 + 17x - 72 = (x - 9)(-x + 8)$$

21 **Descompón en factores:**

a) $x^3 - x^2 + 4x - 4$ **b)** $x^3 - x - 6$

c) $3x^4 + 15x^2$ **d)** $x^4 - 16$

a) $x^3 - x^2 + 4x - 4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array} \quad \rightarrow \quad x^2 + 4 \text{ no tiene raíces reales.}$$

$x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x^2 + 4)$

b) $x^3 - x - 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

El polinomio $x^2 + 2x + 3$ no tiene raíces reales, luego:

$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$

c) $3x^4 + 15x^2 = 3x^2(x^2 + 5)$

d) $x^4 - 16 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

Página 107

PRACTICA

Ecuaciones de primer grado

1 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{1+12x}{4}+\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

b) $\dfrac{3x-2}{6}-\dfrac{4x+1}{10}=-\dfrac{2}{15}-\dfrac{2(x-3)}{4}$

c) $\dfrac{2x-3}{6}-\dfrac{3(x-1)}{4}-\dfrac{2(3-x)}{6}+\dfrac{5}{8}=0$

d) $\dfrac{2}{3}(x+3)-\dfrac{1}{2}(x+1)=1-\dfrac{3}{4}(x+3)$

e) $6\left(\dfrac{x+1}{8}-\dfrac{2x-3}{16}\right)=3\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{3}{8}(3x-2)$

a) $\dfrac{1+12x}{4}+\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

Multiplicamos toda la ecuación por 8:

$2(1+12x)+4(x-4)=3(x+1)-(1-x) \;\rightarrow\; 2+24x+4x-16=$

$=3x+3-1+x$

$24x-16=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{3x-2}{6}-\dfrac{4x+1}{10}=-\dfrac{2}{15}-\dfrac{2(x-3)}{4}$

Multiplicamos la ecuación por 60:

$10(3x-2)-6(4x+1)=-2\cdot 4-15\cdot 2(x-3)$

$30x-20-24x-6=-8-30x+90$

$36x=108 \;\rightarrow\; x=\dfrac{108}{36}=3$

c) $\dfrac{2x-3}{6}-\dfrac{3(x-1)}{4}-\dfrac{2(3-x)}{6}+\dfrac{5}{8}=0$

Multiplicamos toda la ecuación por 24:

$4(2x-3)-6\cdot 3(x-1)-4\cdot 2(3-x)+3\cdot 5=0$

$8x-12-18x+18-24+8x+15=0$

$-2x=3 \;\rightarrow\; x=-\dfrac{3}{2}$

d) $\frac{2}{3}(x+3) - \frac{1}{2}(x+1) = 1 - \frac{3}{4}(x+3)$

Multiplicamos toda la ecuación por 12:

$4 \cdot 2(x+3) - 6(x+1) = 12 - 3 \cdot 3(x+3)$

$8x + 24 - 6x - 6 = 12 - 9x - 27$

$11x = -33 \rightarrow x = -\frac{33}{11} = -3$

e) $6\left(\frac{x+1}{8} - \frac{2x-3}{16}\right) = 3\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8}(3x-2)$

$3\left(\frac{x+1}{8} - \frac{2x-3}{16}\right) = 3\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8}(3x-2)$

Simplificamos la ecuación dividiendo entre 3:

$\frac{x+1}{4} - \frac{2x-3}{8} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} - \frac{3}{8}(3x-2)$

Multiplicamos por 24:

$6(x+1) - 3(2x-3) = 6 \cdot 3x - 6 - 3(3x-2)$

$6x + 6 - 6x + 9 = 18x - 6 - 9x + 6 \rightarrow 15 = 9x \rightarrow x = \frac{15}{9} \rightarrow x = \frac{5}{3}$

2 **Las siguientes ecuaciones son de primer grado. Compruébalo y resuélvelas:**

a) $(x+1)^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2 + (x-1)^2$

b) $4(x-3)(x+3) - (2x+1)^2 = 3$

c) $(x-3)^2 + 1 = (x+2)^2 - 4x - 3(x-1)$

d) $5(x-3)^2 + x^2 - 46 = -(2x+1)(1-3x)$

e) $(4x-3)(7x+2) - (3-4x)^2 = 3x(4x-5) - 2$

a) $(x+1)^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2 + (x-1)^2$

$x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4 + x^2 - 2x + 1$

$-2x + 5 = 2x + 5 \rightarrow -4x = 0 \rightarrow x = 0$

b) $4(x-3)(x+3) - (2x+1)^2 = 3$

$4(x^2 - 9) - 4x^2 - 4x - 1 = 3$

$4x^2 - 36 - 4x^2 - 4x - 1 = 3$

$-4x = 40 \rightarrow x = \frac{40}{-4} = -10$

c) $(x-3)^2 + 1 = (x+2)^2 - 4x - 3(x-1)$

$x^2 - 6x + 9 + 1 = x^2 + 4x + 4 - 4x - 3x + 3$

$-3x = -3 \quad \to \quad x = 1$

d) $5(x-3)^2 + x^2 - 46 = -(2x+1)(1-3x)$

$5(x^2 - 6x + 9) + x^2 - 46 = -(2x - 6x^2 + 1 - 3x)$

$5x^2 - 30x + 45 + x^2 - 46 = 6x^2 + x - 1$

$-31x = 0 \quad \to \quad x = 0$

e) $(4x-3)(7x+2) - (3-4x)^2 = 3x(4x-5) - 2$

$28x^2 + 8x - 21x - 6 - 9 + 24x - 16x^2 = 12x^2 - 15x - 2$

$26x = 13 \quad \to \quad x = \dfrac{13}{26} = \dfrac{1}{2}$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(2x-1)^2}{16} = \dfrac{35}{16}$

b) $\dfrac{x+3}{5} + \dfrac{(x-1)^2}{4} = \dfrac{1}{4}x^2 - \left(\dfrac{x}{2} + 2\right)$

c) $\dfrac{1}{2}\left[1 - (x+2)^2\right] = -x - \dfrac{x^2 - 1}{2}$

d) $\dfrac{1}{2}\left[2(x+1) - (x-3)^2\right] = \dfrac{1}{2}\left[3(x-1) - \dfrac{2}{3}(x+1)^2\right]$

Para comprobar que son ecuaciones de primer grado, simplificamos las ecuaciones al máximo antes de resolverlas:

a) $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(2x-1)^2}{16} = \dfrac{35}{16}$

$4(x^2 + 9 - 6x) - (4x^2 + 1 - 4x) = 35 \quad \to \quad 4x^2 + 36 - 24x - 4x^2 - 1 + 4x = 35$

$-20x = 0 \quad \to \quad$ Ecuación de primer grado

$20x = 0 \quad \to \quad x = 0$

b) $\dfrac{x+3}{5} - \dfrac{(x-1)^2}{4} = \dfrac{-1}{4}x^2 - \left(\dfrac{x}{2} + 2\right)$

$4(x+3) - 5(x^2 + 1 - 2x) = -5x^2 - 10x - 40$

$4x + 12 - 5x^2 - 5 + 10x = -5x^2 - 10x - 40 \quad \to \quad 24x = -47 \quad \to \quad x = -\dfrac{47}{24}$

c) $\frac{1}{2}\,[1-(x+2)^2] = -x - \frac{x^2-1}{2}$

$1-(x^2+4+4x) = -2x - x^2 + 1 \;\rightarrow\; 1 - x^2 - 4 - 4x = -2x - x^2 + 1$

$-3-4x = -2x+1 \;\rightarrow\;$ Ecuación de primer grado

$-3-4x = -2x+1 \;\rightarrow\; 2x = -4 \;\rightarrow\; x = -2$

d) $\frac{1}{2}[2(x+1)-(x-3)^2] = \frac{1}{2}\left[3(x-1) - \frac{2}{3}(x+1)^2\right]$

$2x+2-(x^2+9-6x) = 3x-3-\frac{2}{3}(x^2+2x+1)$

$6x+6-3x^2-27+18x = 9x- \ 9-2x^2-4x-2$

$-x^2-25x-10 = 0 \;\rightarrow\; x^2+25x+10 = 0$

$-x^2+19x-10 = 0 \;\rightarrow\; x^2-19x+10 = 0$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361-40}}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{19+\sqrt{321}}{2} \\[2ex] x_2 = \dfrac{19-\sqrt{321}}{2} \end{cases}$$

4 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{1-2x}{9} = 1 - \frac{x+4}{6}$

b) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4}$

c) $(3x+2)^2 + 3(1-3x)x = 2(x-11)$

d) $(2x-3)^2 + (x-2)^2 = 3(x+1) + 5x(x-1)$

a) $\frac{1-2x}{9} = 1 - \frac{x+4}{6}$

Quitamos los denominadores, multiplicando por 18 en ambos miembros:

$2(1-2x) = 18-3(x+4) \;\rightarrow\; 2-4x = 18-3x-12 \;\rightarrow\; x = -4$

b) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4}$

Multiplicamos toda la ecuación por 40:

$8(3x+2)-4(4x-1)+5(5x-2) = 10(x+1)$

$24x+16-16x+4+25x-10 = 10x+10 \;\rightarrow\; 23x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

c) $(3x+2)^2 + 3(1-3x)x = 2(x-11)$

$9x^2+4+12x+3x-9x^2 = 2x-22 \;\rightarrow\; 13x+26 = 0 \;\rightarrow\; x = -2$

d) $(2x - 3)^2 + (x - 2)^2 = 3(x + 1) + 5x(x - 1)$

$4x^2 + 9 - 12x + x^2 + 4 - 4x = 3x + 3 + 5x^2 - 5x \;\rightarrow\; 14x = 10 \;\rightarrow\; x = \frac{5}{7}$

Inecuaciones

5 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

6 **Halla el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:**

a) $3x - 7 < 5$ **b)** $2 - x > 3$

c) $7 \geq 8x - 5$ **d)** $1 - 5x \leq -8$

a) $3x - 7 < 5$

$3x < 5 + 7 \;\rightarrow\; x < \frac{12}{3} \;\rightarrow\; x < 4 \;\rightarrow\; (-\infty, 4)$

b) $2 - x > 3$

$-x > 1 \;\rightarrow\; x < -1 \;\rightarrow\; (-\infty, -1)$

c) $7 \geq 8x - 5$

$8x \leq 7 + 5 \;\rightarrow\; x \leq \frac{12}{8} \;\rightarrow\; x \leq \frac{3}{2} \;\rightarrow\; \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

d) $1 - 5x \leq -8$

$-5x \leq -9 \;\rightarrow\; x \geq \frac{9}{5} \;\rightarrow\; \left[\frac{9}{5}, +\infty\right)$

7 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $\frac{2(x + 2)}{3} < 2x$ **b)** $\frac{x - 1}{2} > x + 1$

c) $\frac{x - 4}{4} + 1 \leq \frac{x + 4}{8}$ **d)** $1 - x \leq \frac{x}{3}$

a) $\frac{2(x + 2)}{3} < 2x$

$2x + 4 < 6x \;\rightarrow\; 4x > 4 \;\rightarrow\; x > 1 \;\rightarrow\; (1, +\infty)$

b) $\frac{x - 1}{2} > x + 1$

$x - 1 > 2x + 2 \;\rightarrow\; x < -3 \;\rightarrow\; (-\infty, -3)$

c) $\frac{x - 4}{4} + 1 \leq \frac{x + 4}{8}$

$2x - 8 + 8 \leq x + 4 \;\rightarrow\; x \leq 4 \;\rightarrow\; (-\infty, 4]$

d) $1 - x \leq \frac{x}{3}$

$3 - 3x \leq x \;\rightarrow\; -4x \leq -3 \;\rightarrow\; x \geq \frac{3}{4} \;\rightarrow\; \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

8 **Traduce a lenguaje algebraico:**

a) El cuadrado de un número es menor que el doble de ese número más 15.

b) Si creciera 15 cm, superaría la estatura que se requiere para entrar en el equipo de baloncesto, que es 1,80 cm.

a) $x \;\rightarrow$ número

$x^2 < 2x + 15$

b) x = estatura actual $\;\rightarrow\; x + 15 > 1{,}80$

Ecuaciones de segundo grado

9 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $4x^2 - 64 = 0$ **b)** $3x^2 - 9x = 0$

c) $x^2 - 2x - 3 = 0$ **d)** $2x^2 - 7x - 4 = 0$

a) $4x^2 - 64 = 0$

$4x^2 = 64 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{64}{4} \;\rightarrow\; x^2 = 16 \;\rightarrow\; x = \pm 4$

Soluciones: $x_1 = 4,\; x_2 = -4$

b) $3x^2 - 9x = 0$

$3x(x - 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\; x_2 = 3$

c) $x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\; x_2 = -1$

d) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} = \begin{cases} 4 \\ \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 4,\; x_2 = -\frac{1}{2}$

10 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $3x(x+4) - x(x-1) = 15$

b) $(x+4)^2 - (2x-1)^2 = 8x$

c) $2x + 3(x-4)^2 = 37 + (x-3)(x+3)$

a) $3x(x+4) - x(x-1) = 15$

$3x^2 + 12x - x^2 + x = 15 \rightarrow 2x^2 + 13x - 15 = 0$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169+120}}{4} = \frac{-13 \pm 17}{4} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{30}{4} = -\dfrac{15}{2} \end{cases}$$

b) $(x+4)^2 - (2x-1)^2 = 8x$

$x^2 + 8x + 16 - 4x^2 + 4x - 1 = 8x \rightarrow -3x^2 + 4x + 15 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+180}}{-6} = \frac{-4 \pm 14}{-6} \begin{cases} x_1 = -5/3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

c) $2x + 3(x-4)^2 = 37 + (x-3)(x+3)$

$2x + 3x^2 - 24x + 48 = 37 + x^2 - 9 \rightarrow 2x^2 - 22x + 20 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 11x + 10 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121-40}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2} \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Página 108

11 Resuelve:

a) $(x-3)(x+3) + (x-4)(x+4) = 25$

b) $(x+1)(x-3) + (x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 1$

c) $2x(x+3) - 2(3x+5) + x = 0$

a) $(x-3)(x+3) + (x-4)(x+4) = 25$

$$x^2 - 9 + x^2 - 16 = 25 \rightarrow 2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = 25 \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

b) $(x+1)(x-3) + (x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 1$

$x^2 + x - 3x - 3 + x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 1 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$

c) $2x(x+3) - 2(3x+5) + x = 0$

$2x^2 + 6x - 6x - 10 + x = 0 \rightarrow 2x^2 + x - 10 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5/2 \end{cases}$$

12 **Las siguientes ecuaciones son de segundo grado e incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general:**

a) $(3x+1)(3x-1)+\frac{1}{2}(x-2)^2=1-2x$

b) $\frac{x^2+2}{3}-\frac{x^2+1}{4}=1-\frac{x+7}{12}$

c) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}+\frac{(x-2)^2}{4}=\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$

a) $(3x+1)(3x-1)+\frac{1}{2}(x-2)^2=1-2x$

$9x^2-1+\frac{x^2-4x+4}{2}=1-2x \;\rightarrow\; 18x^2-2+x^2-4x+4=2-4x$

$19x^2=0 \;\rightarrow\; x=0$

b) $\frac{x^2+2}{3}-\frac{x^2+1}{4}=1-\frac{x+7}{12}$

$4x^2+8-3x^2-3=12-x-7 \;\rightarrow\; x^2+x=0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x(x+1)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-1 \end{cases}$

c) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}+\frac{(x-2)^2}{4}=\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$

$\frac{4x^2-1}{3}+\frac{x^2-4x+4}{4}=\frac{3x+4+2x^2}{6} \;\rightarrow\; 16x^2-4+3x^2-12x+12=$

$=6x+8+4x^2 \;\rightarrow\; 15x^2-18x=0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x(15x-18)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\frac{6}{5} \end{cases}$

13 **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:**

a) $(x+1)^2-3x=3$

b) $(2x+1)^2=1+(x-1)(x+1)$

c) $\frac{(x+1)(x-3)}{2}+x=\frac{x}{4}$

d) $x+\frac{3x+1}{2}-\frac{x-2}{3}=x^2-2$

e) $\frac{x}{3}(x-1)-\frac{x}{4}(x+1)+\frac{3x+4}{12}=0$

a) $(x+1)^2 - 3x = 3$

$x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 = 0 \ \rightarrow\ x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

b) $(2x+1)^2 = 1 + (x-1)(x+1)$

$4x^2 + 1 + 4x = 1 + x^2 - 1 \ \rightarrow\ 3x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} \begin{cases} x_1 = -1/3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

c) $\dfrac{(x+1)(x-3)}{2} + x = \dfrac{x}{4}$

$\dfrac{x^2 - 2x - 3}{2} + x = \dfrac{x}{4} \ \rightarrow\ 2x^2 - 4x - 6 + 4x = x \ \rightarrow\ 2x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3/2 \end{cases}$$

d) $x + \dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} = x^2 - 2$

$6x + 9x + 3 - 2x + 4 = 6x^2 - 12 \ \rightarrow\ 6x^2 - 13x - 19 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169+456}}{12} = \frac{13 \pm 25}{12} \begin{cases} x_1 = 19/6 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

e) $\dfrac{x}{3}(x-1) - \dfrac{x}{4}(x+1) + \dfrac{3x+4}{12} = 0$

$4x(x-1) - 3x(x+1) + 3x + 4 = 0$

$4x^2 - 4x - 3x^2 - 3x + 3x + 4 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$$

Solución: $x = 2$

14 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x^2+1}{3} - 1 = \dfrac{x^2-4}{6} + x$

b) $\dfrac{x^2 - x - 4}{4} = \dfrac{x^2 + x - 2}{2}$

c) $x(x-3) + (x+4)(x-4) = 2 - 3x$

a) $\dfrac{x^2+1}{3} - 1 = \dfrac{x^2-4}{6} + x$

$$\frac{2x^2+2-6}{6} = \frac{x^2-4+6x}{6} \;\rightarrow\; x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x(x-6) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

b) $\dfrac{x^2-x-4}{4} = \dfrac{x^2+x-2}{2}$

$$\frac{x^2-x-4}{4} = \frac{2x^2+2x-4}{4} \;\rightarrow\; x^2 + 3x = 0 \;\rightarrow\; x(x+3) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

c) $x(x-3) + (x+4)(x-4) = 2 - 3x$

$$x^2 - 3x + x^2 - 16 = 2 - 3x \;\rightarrow\; 2x^2 = 18 \;\rightarrow\; x^2 = 9 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Otras ecuaciones

15 Di cuáles son las soluciones de estas ecuaciones:

a) $(x-2)(x+3)(2x-5) = 0$

b) $x^2(x-7)(4x-1) = 0$

c) $(x+2)(x^2+4) = 0$

a) $$(x-2)(x+3)(2x-5) = 0 \begin{cases} x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 2 \\ x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x_2 = -3 \\ 2x - 5 = 0 \;\rightarrow\; x_3 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

b) $$x^2(x-7)(4x-1) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0 \\ x - 7 = 0 \;\rightarrow\; x_2 = 7 \\ 4x - 1 = 0 \;\rightarrow\; x_3 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

c) $(x+2)(x^2+4) = 0 \;\rightarrow\; x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -2$

El factor $x^2 + 4$ es siempre distinto de 0, para cualquier valor de x real.

16 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

c) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

d) $x^4 - x^2 = 0$

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$

$y^2 - 5y - 36 = 0 \rightarrow y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \dfrac{5 \pm 13}{2} \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -4 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ x^2 = -4 \rightarrow \text{no hay solución} \end{array}\right\} \rightarrow$ Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$

$y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

c) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$

$36y^2 - 13y + 1 = 0 \rightarrow y = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{72} = \dfrac{13 \pm 5}{72} \begin{cases} y_1 = \dfrac{18}{72} = \dfrac{1}{4} \\ y_2 = \dfrac{8}{72} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$

$x^2 = \dfrac{1}{4} \rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$

$x^2 = \dfrac{1}{9} \rightarrow x = \pm\dfrac{1}{3}$

Soluciones: $x_1 = \dfrac{1}{2},\ x_2 = -\dfrac{1}{2},\ x_3 = \dfrac{1}{3},\ x_4 = -\dfrac{1}{3}$

d) $x^4 - x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

17 **Resuelve:**

a) $x - \sqrt{x} = 2$

b) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

c) $x - \sqrt{169 - x^2} = 17$

d) $x + \sqrt{5x + 10} = 8$

a) $x - \sqrt{x} = 2$

$(x - 2) = \sqrt{x} \rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2 - 4x + 4 = x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

Comprobación: $x_1 = 4 \;\rightarrow\; 4 - \sqrt{4} = 2$

$x_2 = 1 \;\rightarrow\; 1 - \sqrt{4} = 0 \neq 2$

Solución: $x = 4$

b) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

$(x - 1) = \sqrt{25 - x^2} \;\rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2 - 2x + 1 = 25 - x^2 \;\rightarrow\; 2x^2 - 2x - 24 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - x - 12 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{array}{l} 4 \\ -3 \end{array}$$

Comprobación: $x_1 = 4 \;\rightarrow\; 4 - \sqrt{25 - 16} = 4 - 3 = 1$

$x_2 = -3 \;\rightarrow\; -3 - \sqrt{25 - 9} = -3 - 4 = -7 \neq 1$

Solución: $x = 4$

c) $x - \sqrt{169 - x^2} = 17$

$(x - 17)^2 = \sqrt{169 - x^2} \;\rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2 + 289 - 34x = 169 - x^2 \;\rightarrow\; 2x^2 - 34x + 120 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 17x + 60 = 0$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} \begin{array}{l} x_1 = 12 \\ x_2 = 5 \end{array}$$

Comprobación: $x_1 = 12 \;\rightarrow\; 12 - \sqrt{169 - 144} = 12 - 5 = 7 \neq 17$

$x_2 = 5 \;\rightarrow\; 5 - \sqrt{169 - 25} = 5 - 12 = -7 \neq 17$

No tiene solución.

d) $x + \sqrt{5x + 10} = 8$

$\sqrt{5x + 10} = (8 - x)^2 \;\rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$5x + 10 = 64 + x^2 - 16x \;\rightarrow\; x^2 - 21x + 54 = 0$

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 216}}{2} = \frac{21 \pm 15}{2} \begin{array}{l} x_1 = 18 \\ x_2 = 3 \end{array}$$

Comprobación: $x_1 = 18 \;\rightarrow\; 18 + \sqrt{5 \cdot 18 + 10} = 18 + 10 = 28 \neq 8$

$x_2 = 3 \;\rightarrow\; 3 + \sqrt{5 \cdot 3 + 10} = 3 + 5 = 8$

Solución: $x = 3$

18 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\dfrac{x-3}{x} + \dfrac{x+3}{x^2} = \dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{(x-\ 2)^2}{x^2} - \dfrac{1}{2x} = \dfrac{8+3x}{2x^2} - \dfrac{2}{x}$

c) $\dfrac{3x+1}{x^3} + \dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{2x+3}{x^2}$

d) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{x-2}{x^2-1}$

a) $\dfrac{x-3}{x} + \dfrac{x+3}{x^2} = \dfrac{2}{3}$ Multiplicamos los dos miembros por $3x^2$:

$3x^2 - 9x + 3x + 9 = 2x^2 \ \rightarrow\ x^2 - 6x + 9 = 0 \ \rightarrow\ (x-3)^2 = 0$

$x = 3 \ \rightarrow$ Solución doble.

Comprobación: $x = 3 \ \rightarrow\ \dfrac{3-3}{3} + \dfrac{3+3}{9} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

Solución: $x = 3$

b) $\dfrac{(x-2)^2}{x^2} - \dfrac{2}{2x} = \dfrac{8+3x}{2x^2} - \dfrac{2}{x}$

Multiplicamos toda la ecuación por $2x^2$:

$2(x-2)^2 - x = 8 + 3x - 2 \cdot 2x \ \rightarrow\ 2x^2 - 8x + 8 - x = 8 + 3x - 4x$

$2x^2 - \ 8x = 0 \ \rightarrow\ 2x(x-4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \ \rightarrow \ \text{No es válida.} \\ x_2 = 4 \end{cases}$

Comprobación de que $x = 4$ es solución:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(4-2)^2}{4^2} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{4}{16} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{4}{16} - \dfrac{2}{16} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8} \\[2ex] \dfrac{8+3\cdot 4}{2\cdot 4^2} - \dfrac{2}{4} = \dfrac{20}{32} - \dfrac{2}{4} = \dfrac{5}{8} - \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{8} \end{array}\right\}$$

Coinciden ambos resultados $\rightarrow x = 4$ es solución.

c) $\dfrac{3x+1}{x^3} + \dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{2x+3}{x^2}$

Multiplicamos toda la ecuación por x^3:

$3x + 1 + x^2(x+1) = x^3 + x(2x+3) \ \rightarrow\ 3x + 1 + x^3 + x^2 = x^3 + 2x^2 + 3x$

$x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Comprobación

$x_1 = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{3+1}{1} + \dfrac{1+1}{1} = 4 + 2 = 6;\; 1 + \dfrac{2+3}{1} = 1 + 5 = 6 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x_1 = 1$ es solución.

$x_2 = -1 \;\rightarrow\; \dfrac{-3+1}{-1} + \dfrac{-1+1}{-1} = \dfrac{-2}{-1} = 2;\; 1 + \dfrac{-2+3}{1} = 1 + 1 = 2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x_2 = -1$ es solución.

d) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{x-2}{x^2-1}$

Multiplicamos toda la ecuación por $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$:

$(x+1)^2 + 3(x-1) = x - 2 \;\rightarrow\; x^2 + 2x + 1 + 3x - 3 = x - 2 \;\rightarrow\; x^2 + 4x = 0$

$x(x+4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

Comprobación

$x_1 = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{-1} + \dfrac{3}{1} = -1 + 3 = 2;\; \dfrac{-2}{-1} = 2 \;\rightarrow\; x_1 = 0$ es solución.

$x_2 = -4 \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l} \dfrac{-4+1}{-4-1} + \dfrac{3}{-4+1} = \dfrac{-3}{-5} + \dfrac{3}{-3} = \dfrac{3}{5} - 1 = \dfrac{-2}{5} \\ \dfrac{-4-2}{16-1} = \dfrac{-6}{15} = \dfrac{-2}{5} \end{array}\right\}$ $x_2 = -4$ es solución.

PIENSA Y RESUELVE

19 **Averigua qué ecuaciones no tienen solución:**

a) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

b) $\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{5}{2} = 0$

c) $(x+3)^2 - 2(3x+6) = 0$

d) $\dfrac{x+1}{2} = x - \dfrac{2x+3}{4}$

a) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

$25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x \;\rightarrow\; 9 = 0 \;\rightarrow$ No tiene solución.

b) $\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{5}{2} = 0$

$x^2 - 4x + 5 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \;\rightarrow$ No tiene solución.

c) $(x+3)^2 - 2(3x+6) = 0$

$$x^2 + 6x + 9 - 6x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{3} \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

d) $\dfrac{x+1}{2} = x - \dfrac{2x+3}{4}$

$2x + 2 = 4x - 2x - 3 \;\rightarrow\; 2 = -3 \;\rightarrow$ No tiene solución.

20 **Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 €, y los vende, después de algún tiempo, por 2 157,5 €. Con el equipo de música perdió el 10% de su valor, y con el ordenador, el 15%. ¿Cuánto le costó cada uno?**

$x \rightarrow$ Precio del equipo de música

$y \rightarrow$ Precio del ordenador

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 2\,500 \\ 0{,}9x + 0{,}85y = 2\,157{,}50 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 2\,500 - x \\ 0{,}9x + 0{,}85(2\,500 - x) = 2\,157{,}50 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow\; 0{,}9x + 2\,125 - 0{,}85x = 2\,157{,}50 \;\rightarrow\; 0{,}05x = 32{,}50 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = 650,\;\; y = 1\,850$

Le costó 650 € el equipo de música y 1 850 € el ordenador.

21 **La calificación de una oposición se obtiene mediante dos exámenes: uno escrito, que es el 65% de la nota final, y otro oral, que es el 35%. Si una persona tuvo 12 puntos entre los dos exámenes y obtuvo un 5,7 de nota final, ¿qué nota tuvo en cada uno de ellos?**

☛ *Nota examen oral → 12 – Nota examen escrito. Nota final = 65% del escrito + + 35% del oral*

$$\left.\begin{array}{l} x \rightarrow \text{nota del examen escrito} \\ y \rightarrow \text{nota del examen oral} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x + \quad y = 12 \\ 0{,}65x + 0{,}35y = 5{,}7 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 12 - y \\ 0{,}65(12 - y) + 0{,}35y = 5{,}7 \;\rightarrow\; 7{,}8 - 0{,}65y + 0{,}35y = 5{,}7 \end{array}\right\}$$

$-0{,}3y = -2{,}1 \;\rightarrow\; y = 7 \;\rightarrow\; x = 5$

Obtuvo un 5 en el examen escrito y un 7 en el examen oral.

Página 109

22 **En un examen de 20 preguntas te dan dos puntos por cada acierto y te quitan medio punto por cada fallo. Para aprobar, es obligatorio contestar a todas las preguntas y hay que obtener, por lo menos, 20 puntos. ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para aprobar?**

☛ *Puntuación total = 2 · aciertos – 0,5 · fallos = 20*

$\left.\begin{array}{l} x \;\rightarrow\; \text{número de respuestas acertadas} \\ y \;\rightarrow\; \text{número de respuestas falladas} \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 20 \\ 2x - 1/2y = 20 \end{array}\right\} \begin{array}{r} x + y = 20 \\ 4x - y = 40 \\ \hline 5x \quad = 60 \end{array} \;\rightarrow\; x = \frac{60}{5} \;\rightarrow\; x = 12,\; y = 8$$

23 Jorge tiene en el banco 12 500 €. Una parte de ese dinero está en una cuenta en la que le dan el 11% de interés anual. El resto lo tiene en otra cuenta al 9% anual. Calcula esas dos cantidades sabiendo que al final del año cobró 1 295 € de intereses.

$x \;\rightarrow\;$ dinero al 11% anual

$12\,500 - x \;\rightarrow\;$ dinero al 9% anual

Interés total: $0{,}11x + (12\,500 - x) \cdot 0{,}09 = 1\,295$

$$0{,}02x = 170 \;\rightarrow\; x = \frac{170}{0{,}02} = 8\,500$$

Luego pone 8 500 € al 11% de interés anual y 4 000 al 9% de interés anual.

24 Las amigas de María le han comprado un regalo por el que tienen que pagar 3,15 € cada una. Como tres de ellas no tienen dinero, deciden ponerlo entre las demás, pagando 3,60 € cada una. ¿Cuántas son? ¿Cuánto vale el regalo?

☛ ***Consulta el ejercicio resuelto de la página 106.***

$x \;\rightarrow\;$ número de amigos y amigas de María

$3{,}15 \cdot x = 3{,}60\,(x - 3) \;\rightarrow\; 3{,}15x = 3{,}60x - 10{,}80 \;\rightarrow\; 0{,}45x = 10{,}80$

$$x = \frac{10{,}80}{0{,}45} = 24$$

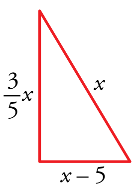
Son, en total, 24 amigos y amigas, y el regalo cuesta $3{,}15 \cdot 24 = 75{,}60$ €.

25 En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide los 3/5 de la hipotenusa, y el otro cateto mide 5 cm menos que la misma. Halla el perímetro del triángulo.

☛ ***Dibuja el triángulo y aplica el teorema de Pitágoras.***

$$x^2 = \left(\frac{3}{5}x\right)^2 + (x-5)^2 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{9}{25}x^2 + x^2 + 25 - 10x \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 25x^2 = 9x^2 + 25x^2 + 625 - 250x$$



$$9x^2 - 250x + 625 = 0$$

$$x = \frac{250 \pm \sqrt{62\,500 - 22\,500}}{18} = \frac{250 \pm 200}{18} \begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = \dfrac{50}{18} = \dfrac{25}{9} < 5 \end{cases}$$

Para que la longitud de los lados sea positiva, se ha de tener $x > 5$, luego la solución es $x = 25$.

$$\text{Perímetro} = \frac{3}{5} \cdot 25 + 25 - 5 + 25 = 15 + 20 + 25 = 60 \text{ cm}$$

26 **Los lados de un triángulo miden 18 cm, 16 cm y 9 cm. Si restamos una misma cantidad a los tres lados, obtenemos un triángulo rectángulo. ¿Qué cantidad es esa?**

$(18 - x)^2 = (16 - x)^2 + (9 - x)^2$

$324 + x^2 - 36x = 256 + x^2 - 32x + 81 + x^2 - 18x \;\rightarrow\; x^2 - 14x + 13 = 0$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 52}}{2} = \frac{14 \pm 12}{2} \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

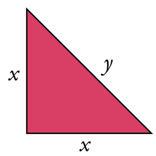
$x = 13$ no puede ser, porque nos quedaría una longitud negativa $(9 - 13 < 0)$.

Solución: $x = 1$ cm es la cantidad restada.

27 **Calcula los lados de un triángulo rectángulo isósceles cuyo perímetro es de 24 cm.**

☛ *Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales. Si es rectángulo, los lados iguales serán los catetos.*

Existen dos relaciones entre x e y:



- $y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \;\rightarrow\; y^2 = 2x^2$
- $2x + y = 24 \;\rightarrow\; y^2 = (24 - 2x)^2$

$2x^2 = 576 - 96x + 4x^2 \;\rightarrow\; 2x^2 - 96x + 576 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 48x + 288 = 0$

$$x = \frac{48 \pm \sqrt{2\,304 - 1\,152}}{2} = \frac{48 \pm \sqrt{1\,152}}{2}$$

$$x_1 = \frac{48 + 24\sqrt{2}}{2} = 40{,}97$$

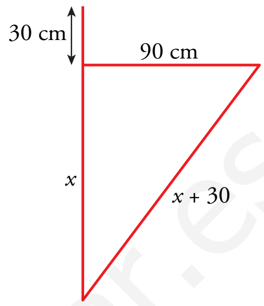
$$x_2 = \frac{48 - 24\sqrt{2}}{2} = 7{,}029$$

$x_1 = 40{,}97$ no puede ser porque el perímetro es 24.

$x_2 = 7{,}029 \;\rightarrow\; y = 9{,}942$

Los lados iguales miden 7,03 cm y la hipotenusa mide 9,94 cm.

28 **En un lago hay una flor a 90 cm de la orilla. Cuando el tallo está vertical, la flor sobresale 30 cm sobre la superficie. Inclinando la flor, con el tallo estirado, la corola toca la orilla. ¿qué profundidad tiene el lago?**



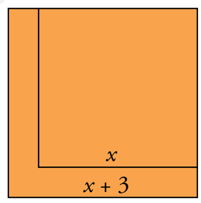
Utilizando el teorema de Pitágoras:

$(x + 30)^2 = x^2 + 90^2 \;\rightarrow\; x^2 + 60x + 900 = x^2 + 8\,100$

$60x = 7\,200 \;\rightarrow\; x = \dfrac{7\,200}{60} = 120$

La profundidad del lago es de 120 m.

29 **Si se aumenta en 3 m el lado de un cuadrado, la superficie aumenta en 75 m². ¿Cuál es su lado?**



$(x + 3)^2 = x^2 + 75 \;\rightarrow\; x^2 + 6x + 9 = x^2 + 75 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 6x = 66 \;\rightarrow\; x = 11$

El lado del cuadrado mide 11 m.

30 **Un grupo de estudiantes alquila un piso por 700 € al mes. Si fueran dos más, cada uno pagaría 40 € menos. ¿Cuántos son?**

☛ *nº de estudiantes = x; si fueran 2 más: x + 2*

Dinero que paga cada uno = $\dfrac{700}{x}$

Si fueran 2 más, cada uno pagaría = $\dfrac{700}{x} - 40$

Si hubiese x estudiantes, cada uno pagaría $\dfrac{700}{x}$.

Si hubiese $x + 2$ estudiantes, cada uno pagaría 40 € menos $\rightarrow$ $\dfrac{700}{x} - 40$

$$(x + 2)\left(\frac{700}{x} - 40\right) = 700$$

$700 - 40x + \dfrac{1\,400}{x} - 80 = 700 \;\rightarrow\; -40x^2 - 80x + 1\,400 = 0$

$x^2 + 2x - 35 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} =$

$= \dfrac{-2 \pm 12}{2} = \begin{cases} 5 \\ -7 \end{cases}$ -7 solución no válida.

Han alquilado el piso 5 estudiantes.

Página 119

PRACTICA

Sistemas lineales

1 **Comprueba si el par (3, –1) es solución de alguno de los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$

El par (3, –1) es solución de un sistema si al sustituir x por 3 e y por –1, se verifican ambas igualdades:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 9 + 2 = 11 \end{array}\right\} \to$ (3, –1) es solución del sistema.

b) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5 \\ 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11 \neq 8 \end{array}\right\}$

La segunda ecuación no se cumple para $x = 3$, $y = -1$. El par (3, –1) no es solución de este sistema.

2 **Completa para que los siguientes sistemas tengan como solución $x = -1$, $y = 2$:**

a) $\begin{cases} x - 3y = \dots \\ 2x + y = \dots \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - 3y = \dots \\ 2x + y = \dots \end{array}\right\}$ Si $x = -1$, $y = 2$ $\to \begin{cases} -1 - 3 \cdot 2 = -1 - 6 = -7 \\ 2 \cdot (-1) + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases}$

Así, $\begin{cases} x - 3y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ es el sistema buscado.

b) $\left.\begin{array}{l} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{array}\right\}$ Si $x = -1$, $y = 2$ $\to \begin{cases} 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \end{cases}$

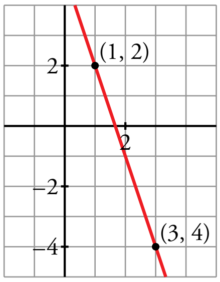
El sistema que tiene como solución $x = -1$, $y = 2$ es: $\begin{cases} y - x = 3 \\ 2y + x = 3 \end{cases}$

3 **Busca dos soluciones para cada una de estas ecuaciones y representa las rectas correspondientes:**

a) $3x + y = 5$ b) $2x - y = 4$

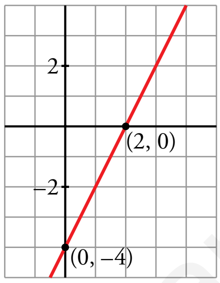
a) $3x + y = 5$

Soluciones de esta ecuación son, por ejemplo: (1, 2) y (3, –4)



b) $2x - y = 4$

Soluciones de esta ecuación son, por ejemplo: (0, –4) y (2, 0)



4 **Resuelve gráficamente cada uno de los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$

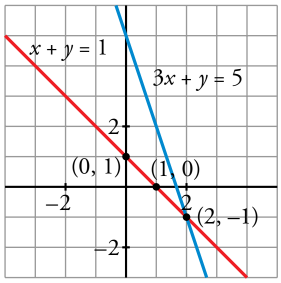
Buscamos dos soluciones para cada una de las ecuaciones:

$3x + y = 5$

x	y
0	5
2	–1

$x + y = 1$

x	y
0	1
1	0

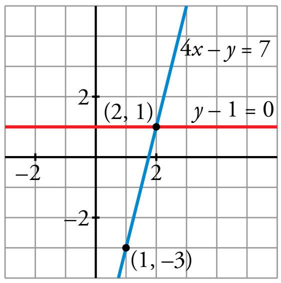


Las rectas se cortan en el punto (2, –1) $\rightarrow$ La solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$.

b) $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$

La segunda ecuación representa a una recta paralela al eje X, $y = 1$.

La primera ecuación tiene como soluciones, por ejemplo, los puntos (1, –3) y (2, 1).



La solución del sistema es $x = 2$, $y = 1$, punto de intersección de ambas rectas.

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

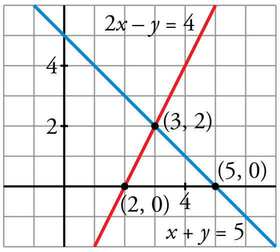
Buscamos dos soluciones para cada una de las ecuaciones:

$x + y = 5$

x	y
0	5
5	0

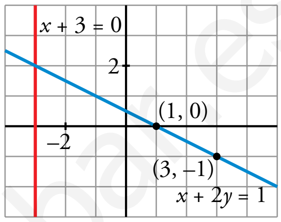
$2x - y = 4$

x	y
2	0
3	2



Las dos rectas se cortan en el punto (3, 2), luego $x = 3$, $y = 2$ es la solución del sistema.

d) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$



La primera ecuación tiene como soluciones, por ejemplo, los puntos (1, 0) y (3, –1).

La segunda ecuación es la de una recta paralela al eje Y, $x = -3$.

Las dos rectas se cortan en el punto (–3, 2) $\rightarrow$ La solución del sistema es $x = -3$, $y = 2$.

5 **Dos de los siguientes sistemas tienen solución única, uno de ellos es incompatible (no tiene solución) y otro es indeterminado (tiene infinitas soluciones). Intenta averiguar de qué tipo es cada uno, simplemente observando las ecuaciones. Después, resuélvelos gráficamente para comprobarlo:**

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - x = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$

- El sistema c) tiene infinitas soluciones, pues la segunda ecuación es la primera multiplicada por 2. Por tanto, las dos ecuaciones dicen lo mismo.

- El sistema b) es incompatible, sin solución, ya que las ecuaciones son contradictorias:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\} \text{Imposible que se cumplan ambas a la vez.}$$

- Los sistemas a) y d) tienen solución.

Resolvemos gráficamente todos los sistemas para comprobarlo:

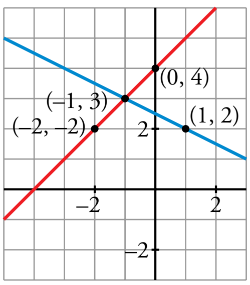
a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ y - x = 4 \end{array}\right\}$

$x + 2y = 5$

x	y
1	2
–1	3

$y - x = 4$

x	y
–2	2
0	4



Las dos rectas se cortan en (–1, 3) $\rightarrow$ La solución del sistema es $x = -1$, $y = 3$.

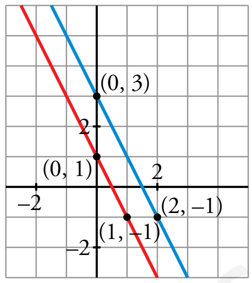
b) $\left.\begin{array}{l} 2x + \ \ y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{array}\right\}$

$2x + y = 3$

x	y
0	3
2	–1

$4x + 2y = 2$

x	y
0	1
1	–1



Las rectas son paralelas $\longrightarrow$ El sistema no tiene solución.

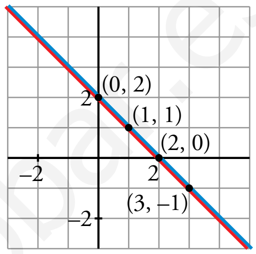
c) $\left.\begin{array}{l} x + \ \ y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{array}\right\}$

$x + y = 2$

x	y
0	2
2	0

$3x + 3y = 6$

x	y
1	1
3	–1



Se trata de la misma recta $\longrightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones.

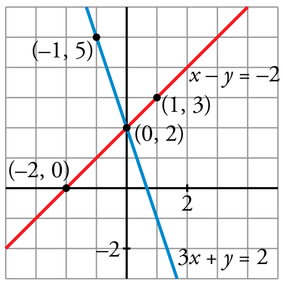
d) $\left.\begin{array}{l} 3x + y = 2 \\ \ \ x - y = -2 \end{array}\right\}$

$3x + y = 2$

x	y
0	2
–1	5

$x - y = -2$

x	y
–2	0
1	3



El sistema tiene solución única $x = 0$, $y = 2$, punto de corte de ambas rectas.

6 Resuelve estos sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + \ \ y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 7y = 15 \\ \ \ x + 6y = -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - \ \ y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 5 \\ 4x + \ \ y = -1 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $y = -1 - 4x$

$3x - 5(-1 - 4x) = 5 \longrightarrow 3x + 5 + 20x = 5 \longrightarrow 23x = 0 \longrightarrow x = 0$

$y = -1 - 4 \cdot 0 = -1$

Solución: $x = 0$, $y = -1$

b) $\left.\begin{array}{l} 8x - \ 7y = 15 \\ \ \ x + \ 6y = -5 \end{array}\right\}$ Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $x = -5 - 6y$

$8(-5 - 6y) - \ 7y = 15 \longrightarrow -40 - 48y - \ 7y = 15 \longrightarrow -55y = 55 \longrightarrow y = -1$

$x = -5 - \ 6 \cdot (-1) = -5 + 6 = 1$

Solución: $x = 1$, $y = -1$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = -1 \\ 3x - \ \ y = 7 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $y = 3x - 7$

$2x + 5(3x - 7) = -1 \;\rightarrow\; 2x + 15x - 35 = -1 \;\rightarrow\; 17x = 34 \;\rightarrow\; x = 2$

$y = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1$

Solución: $x = 2,\ y = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $y = \dfrac{3x - 2}{2}$

$$5x + 4 \cdot \left(\frac{3x - 2}{2}\right) = 7 \;\rightarrow\; 5x + 2(3x - 2) = 7 \;\rightarrow\; 5x + 6x - 4 = 7 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 11x = 11 \;\rightarrow\; x = 1$$

$y = \dfrac{3 \cdot 1 - 2}{2} = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = 1,\ y = \dfrac{1}{2}$

7 Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x - 3}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x - 3}{2} \end{array}\right\}$ Igualamos las y: $2x - 3 = \dfrac{x - 3}{2} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 4x - 6 = x - 3 \;\rightarrow\; 3x = 3 \;\rightarrow\; x = 1$

$y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

Solución: $x = 1,\ y = -1$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{array}\right\}$ Despejamos y de cada una de las ecuaciones e igualamos:

$\left.\begin{array}{l} y = 8 - 5x \\ y = 2x + 1 \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \begin{array}{l} 8 - 5x = 2x + 1 \;\rightarrow\; 7 = 7x \;\rightarrow\; x = 1 \\ y = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \end{array}$

Solución: $x = 1,\ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{l} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{array}\right\}$ Despejamos x de cada ecuación e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 - 6y \\ x = 1 + 3y \end{array}\right\} \rightarrow -2 - 6y = 1 + 3y \rightarrow -3 = 9y \rightarrow y = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$x = -2 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -2 + 2 = 0$$

Solución: $x = 0,\ y = -\frac{1}{3}$

d) $\left.\begin{array}{l} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{array}\right\}$ Despejamos x de cada ecuación e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5y - 2}{4} \\ x = \dfrac{10 - 2y}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{5y-2}{4} = \dfrac{10-2y}{3} \\ 3(5y - 2) = 4(10 - 2y) \\ 15y - 6 = 40 - 8y \rightarrow 23y = 46 \rightarrow y = 2 \end{array}$$

$$x = \frac{5 \cdot 2 - 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Solución: $x = 2,\ y = 2$

8 **Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:**

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{array}\right\}$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos $8x = 8 \rightarrow x = 1$

$3 \cdot 1 + 2y = 4 \rightarrow 2y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}$

Solución: $x = 1,\ y = \frac{1}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{array}{r} -4x - 10y = -22 \\ 4x - 3y = -4 \\ \hline -13y = -26 \end{array} \rightarrow y = 2$

$2x + 5 \cdot 2 = 1 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

Solución: $x = \frac{1}{2},\ y = 2$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-3)} -3x - 18y = 12 \\ \phantom{\xrightarrow{\times(-3)}} \quad 3x - \ \ 5y = 11 \end{array}$

$$-23y = 23 \quad \rightarrow \quad y = -1$$

$x + 6 \cdot (-1) = -4 \quad \rightarrow \quad x = 2$

Solución: $x = 2, \ y = -1$

d) $\left.\begin{array}{r} 5x - 2y = 7 \\ 4x + 3y = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 3} 15x - 6y = 21 \\ \xrightarrow{\times 2} \ \ 8x + 6y = -4 \end{array}$

$$23x \qquad = 17 \quad \rightarrow \quad x = \frac{17}{23}$$

$$5 \cdot \frac{17}{23} - 2y = 7 \quad \rightarrow \quad \frac{85}{23} - 7 = 2y \quad \rightarrow \quad \frac{85}{23} - \frac{161}{23} = 2y \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{-76}{23} = 2y \quad \rightarrow \quad y = \frac{-38}{23}$$

Solución: $x = \dfrac{17}{23}, \ y = \dfrac{-38}{23}$

9 Resuelve por el método que consideres más adecuado:

a) $\begin{cases} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la segunda ecuación y la sustituimos en la primera: $y = -2$

$7x + 6 \cdot (-2) = 2 \quad \rightarrow \quad 7x - 12 = 2 \quad \rightarrow \quad 7x = 14 \quad \rightarrow \quad x = 2$

Solución: $x = 2, \ y = -2$

b) $\left.\begin{array}{r} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 2} 10x - 6y = \ \ 2 \\ \xrightarrow{\times 3} 12x + 6y = 42 \end{array}$

$$22x \qquad = 44 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

$5 \cdot 2 - 3y = 1 \quad \rightarrow \quad 9 = 3y \quad \rightarrow \quad y = 3$

Solución: $x = 2, \ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{r} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 6 = y + 7 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - \ \ y = 1 \\ x + 2y = -2 \end{array}\right\}$

Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $y = 3x - 1$

$x + 2(3x - 1) = -2 \quad \to \quad x + 6x - 2 = -2 \quad \to \quad 7x = 0 \quad \to \quad x = 0$

$y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$

Solución: $x = 0$, $y = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 18 \\ x + y = 8 \end{array}\right\}$

Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $x = 8 - y$

$2 \cdot (8 - y) + 3y = 18 \quad \to \quad 16 - 2y + 3y = 18 \quad \to \quad y = 2$

$x = 8 - 2 = 6$

Solución: $x = 6$, $y = 2$

10 **Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes por el método que consideres oportuno y comprueba la solución que obtengas:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1{,}25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$

Por reducción, multiplicamos la 1ª ecuación por (–2) y sumamos:

$$\begin{array}{r} -4x + 2y = -8 \\ 4x + 3y = -7 \\ \hline 5y = -15 \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} 5y = -15 \quad \to \quad y = -3 \\ x = \dfrac{4 + y}{2} \quad \to \quad x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \to$ Solución: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = -3$

Comprobación: $\begin{cases} 2 \cdot \dfrac{1}{2} - (-3) = 1 + 3 = 4 \\ 4 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot (-3) = 2 - 9 = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1{,}25 \end{cases}$

Por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por 2 y sumamos:

$$\begin{array}{l} x + 2y = -1 \\ \underline{6x - 2y = -2{,}5} \\ 7x \qquad = -3{,}5 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7x = -3{,}5 \ \rightarrow \ x = \dfrac{-3{,}5}{7} = -0{,}5 \\ y = \dfrac{-1 - x}{2} \ \rightarrow \ y = -0{,}25 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución: } x = 0{,}5, \ y = -0{,}25$$

Comprobación: $\begin{cases} -0{,}5 + 2(-0{,}25) = -0{,}5 - 0{,}5 = -1 \\ 3(-0{,}5) - (-0{,}25) = -1{,}5 + 0{,}25 = -1{,}25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$

Por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por –3 y sumamos:

$$\begin{array}{l} 3x - \ \ 2y = 2 \\ \underline{-3x - 12y = 5} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -14y = 7 \ \rightarrow \ y = \dfrac{-1}{2} \\ x = \dfrac{-5}{3} - 4y \ \rightarrow \ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución: } x = \frac{1}{3}, \ y = -\frac{1}{2}$$

Comprobación: $\begin{cases} 3 \cdot \dfrac{1}{3} - 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 + 1 = 2 \\ \dfrac{1}{3} + 4 \cdot \left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{1}{3} - 2 = \dfrac{-5}{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - 3y \\ x = 7 - 8y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2 - 3y = 7 - 8y \ \rightarrow \ 5y = 5 \ \rightarrow \ y = 1 \\ x = 7 - 8 \cdot 1 \ \rightarrow \ x = -1 \end{array}$$

Solución: $x = -1, \ y = 1$

Comprobación: $\begin{cases} \dfrac{-1+1}{3} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ \dfrac{-1-3}{4} + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1 \end{cases}$

Página 120

11 Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} 4(x-3) + y = 0 \\ 3(x+3) - y = 18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y+1}{5} = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{5} - y = -1 \\ \dfrac{x-6}{5} + y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = \dfrac{y-4}{3} + 1 \\ y + \dfrac{1}{3} = \dfrac{x+4}{3} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4(x-3) + y = 0 \\ 3(x+3) - y = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x - 12 + y = 0 \\ 3x + \ \ 9 - y = 18 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} 4x + y = 12 \\ 3x - y = \ \ 9 \\ \hline 7x \qquad = 21 \end{array} \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 3 \cdot 3 - 9 = 0$$

Solución: $x = 3,\ y = 0$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y+1}{5} = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{5x + 4y + 4}{20} = \dfrac{20}{20} \\ x + 3y = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 5x + 4y = 16 \\ x + 3y = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times(-5)} \begin{array}{r} 5x + \ \ 4y = 16 \\ -5x - 15y = -5 \\ \hline -11y = 11 \end{array} \rightarrow y = -1$$

$x + 3 \cdot (-1) = 1 \rightarrow x - 3 = 1 \rightarrow x = 4$

Solución: $x = 4,\ y = -1$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{5} - y = -1 \\ \dfrac{x-6}{5} + y = -1 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} x + 4 - 5y = -5 \\ x - 6 + 5y = -5 \\ \hline 2x - 2 \qquad = -10 \end{array} \rightarrow x = -4$$

$-4 + 4 - 5y = -5 \;\rightarrow\; -5y = -5 \;\rightarrow\; y = 1$

Solución: $x = -4,\; y = 1$

d) $\begin{cases} x = \dfrac{y-4}{3} + 1 \\ y + \dfrac{1}{3} = \dfrac{x+4}{3} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} 3x = y - 4 + 3 \\ 3y + 1 = x + 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x - y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{array}\right\}$

$y = 3x + 1$

$-x + 3(3x + 1) = 3 \;\rightarrow\; -x + 9x + 3 = 3 \;\rightarrow\; 8x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$

Solución: $x = 0,\; y = 1$

Sistemas no lineales

12 **Halla las soluciones de estos sistemas:**

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$

$x = 1 - y$

$(1 - y)y + 2y = 2 \;\rightarrow\; y - y^2 + 2y = 2 \;\rightarrow\; -y^2 + 3y - 2 = 0$

$y = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \;\rightarrow\; x_1 = 0 \\ y_2 = 2 \;\rightarrow\; x_2 = -1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 0,\; y_1 = 1 \\ x_2 = -1,\; y_2 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

$y = 3 - 2x$

$x^2 + (3 - 2x)^2 = 2 \;\rightarrow\; x^2 + 9 + 4x^2 - 12x = 2 \;\rightarrow\; 5x^2 - 12x + 7 = 0$

$x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2 \cdot 5} = \dfrac{12 \pm 2}{10} \begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{5} \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{7}{5} \rightarrow y_1 = 3 - 2 \cdot \frac{7}{5} = \frac{1}{5} \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{7}{5},\ y_1 = \frac{1}{5} \\ x_2 = 1,\ y_2 = 1 \end{array}\right.$$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$

$y = 3 - 2x$

$x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0 \rightarrow (3 - 2x)(x - (3 - 2x)) = 0$

$$(3 - 2x) \cdot (3x - 3) = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{2} \rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{2},\ y_1 = 0 \\ x_2 = 1,\ y_2 = 1 \end{array}\right.$$

d) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$

$x = 1 + y$

$(1 + y)^2 + y^2 = 11 - 3(1 + y) \rightarrow 1 + y^2 + 2y + y^2 = 11 - 3 - 3y$

$$2y^2 + 5y - 7 = 0 \rightarrow y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 9}{4} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{-7}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = 2 \\ y_2 = \frac{-7}{2} \rightarrow x_2 = \frac{-5}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2,\ y_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-5}{2},\ y_2 = \frac{-7}{2} \end{array}\right.$$

13 **Resuelve el sistema siguiente por el método de reducción y comprueba que tiene cuatro soluciones:**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{array}\right\} \text{Multiplicamos por } -2 \text{ la primera ecuación:}$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 - 2y^2 = -148 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \\ \hline -5y^2 = -125 \end{array} \rightarrow y^2 = \frac{125}{5} = 25 \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -5 \end{cases}$$

Si $y_1 = 5 \rightarrow x^2 = 74 - 25 = 49 \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

Si $y_2 = -5 \rightarrow x^2 = 74 - 25 = 49 \begin{cases} x_3 = 7 \\ x_4 = -7 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 7,\ y_1 = 5;\ x_2 = -7,\ y_2 = 5;\ x_3 = 7,\ y_3 = -5;\ x_4 = -7,\ y_4 = -5$

14 Busca las soluciones de estos sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

$y = 3x - 3$

$2x^2 + (3x - 3)^2 = 9 \rightarrow 2x^2 + 9x^2 + 9 - 18x = 9 \rightarrow 11x^2 - 18x = 0$

$x(11x - 18) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 18/11 \end{cases}$

Si $x_1 = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow$ Solución: $x_1 = 0,\ y_1 = -3$

Si $x_2 = \dfrac{18}{11} \rightarrow y = \dfrac{21}{11} \rightarrow$ Solución: $x_2 = \dfrac{18}{11},\ y_2 = \dfrac{21}{11}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$

$y = \dfrac{-3x}{2}$

$x^2 - x\left(\dfrac{-3x}{2}\right) = 2\left(\dfrac{9x^2}{4} - 4\right) \rightarrow x^2 + \dfrac{3x^2}{2} = \dfrac{9x^2}{2} = -8$

$2x^2 + 3x^2 = 9x^2 - 16 \rightarrow 4x^2 = 16$

$x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Si $x_1 = 2 \rightarrow y = -3 \rightarrow$ Solución: $x_1 = 2,\ y_1 = -3$

Si $x_2 = -2 \rightarrow y = 3 \rightarrow$ Solución: $x_2 = -2,\ y_2 = 3$

15 Resuelve los siguientes sistemas (no olvides comprobar las soluciones):

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{-2}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 3y + 3x = -2xy \end{array}\right\} \; y = 2 - x$

$3(2 - x) + 3x = -2x(2 - x) \rightarrow 6 - 3x + 3x = -4x + 2x^2 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} =$

$= \dfrac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Si $x_1 = 3 \rightarrow y_1 = 2 - 3 = -1$

$x_2 = -1 \rightarrow y_2 = 2 + 1 = 3$

Comprobación

$\left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 - 1 = 2 \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{-1} = \dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right\}$ Se verifican ambas ecuaciones.

$\left.\begin{array}{l} x_2 = -1 \\ y_2 = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -1 + 3 = 2 \\ \dfrac{1}{-1} + \dfrac{1}{3} = -1 + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right\}$ Se cumplen ambas ecuaciones.

Solución: $x_1 = 3,\; y_1 = -1;\; x_2 = -1,\; y_2 = 3$

b) $\left.\begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{array}\right\} \; x + 1 = \sqrt{x} + 7 \rightarrow x - 6 = \sqrt{x} \rightarrow (x - 6)^2 = x \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 12x + 36 = x \rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

$x = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \rightarrow y = 9 + 1 = 10 \\ 4 \rightarrow y = 4 + 1 = 5 \end{cases}$

Comprobación (de la 2ª ecuación)

$x_1 = 9,\; y_1 = 10 \qquad \sqrt{9} + 7 = 3 + 7 = 10 \rightarrow$ Solución válida

$x_2 = 4,\; y_2 = 5 \qquad \sqrt{4} + 7 = 9 \neq 5 \rightarrow$ Solución no válida

Solución: $x = 9,\; y = 10$

PIENSA Y RESUELVE

16 **Cuatro barras de pan y seis litros de leche cuestan 6,8 €; tres barras de pan y cuatro litros de leche cuestan 4,7 €. ¿Cuánto vale una barra de pan? ¿Cuánto cuesta un litro de leche?**

$$\left.\begin{array}{l} x \;\rightarrow\; \text{precio de una barra de pan} \\ y \;\rightarrow\; \text{precio de un litro de leche} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 6y = 6{,}8 \\ 3x + 4y = 4{,}7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 3} \\ \xrightarrow{\times(-4)} \end{array} \begin{array}{r} 12x + 18y = 20{,}4 \\ -12x - 16y = -18{,}8 \\ \hline 2y = 1{,}6 \end{array} \;\rightarrow\; y = 0{,}8$$

$$4x + 6 \cdot 0{,}8 = 6{,}8 \;\rightarrow\; 4x + 4{,}8 = 6{,}8 \;\rightarrow\; 4x = 2 \;\rightarrow\; x = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

Una barra de pan cuesta 0,5 €, y un litro de leche, 0,8 €.

17 La suma de dos números es 15. La mitad de uno de ellos más la tercera parte del otro es 6. ¿De qué números se trata?

Llamamos x, y a los números buscados.

La suma es 15 $\rightarrow$ $x + y = 15$

La mitad de x + tercera parte de y es 6 $\rightarrow$ $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 6$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 15 \\ 3x + 2y = 36 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} y = 15 - x \\ 3x + 2(15 - x) = 36 \;\rightarrow\; 3x + 30 - 2x = 36 \;\rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow\; x = 6 \;\rightarrow\; y = 15 - 6 = 9$$

Los números buscados son 6 y 9.

18 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

19 Por una calculadora y un cuaderno habríamos pagado, hace tres días, 10,80 €. El precio de la calculadora ha aumentado un 8%, y el cuaderno tiene una rebaja del 10%. Con estas variaciones, los dos artículos nos cuestan 11,34 €.

¿Cuánto costaba cada uno de los artículos hace tres días?

	ANTES DE LA SUBIDA O REBAJA	CON SUBIDA O REBAJA
CALCULADORA	x	$1{,}08x$
CUADERNO	y	$0{,}9y$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 10{,}8 \\ 1{,}08x + 0{,}9y = 11{,}34 \end{array}\right\} \rightarrow\; y = 10{,}8 - x$$

$$1{,}08x + 0{,}9(10{,}8 - x) = 11{,}34 \;\rightarrow\; 1{,}08x + 9{,}72 - 0{,}9x = 11{,}34 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 0{,}18x = 1{,}62 \;\rightarrow\; x = \frac{1{,}62}{0{,}18} = 9 \;\rightarrow\; y = 10{,}8 - 9 = 1{,}8$$

Hace tres días, la calculadora costaba 9 €, y el cuaderno, 1,8 €.

20 **Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 €. Después de algún tiempo, los vende por 2 157,50 €. Con el equipo de música perdió el 10% de su valor, y con el ordenador, el 15%. ¿Cuánto le costó cada uno?**

	PRECIO COMPRA	PRECIO VENTA
EQUIPO MÚSICA	x	$0{,}9x$
ORDENADOR	y	$0{,}85y$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2\,500 \\ 0{,}9x + 0{,}85y = 2\,157{,}5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 2\,500 - x \\ 0{,}9x + 0{,}85\,(2\,500 - x) = 2\,157{,}5 \end{array}\right\}$$

$0{,}9x = 2\,125 - 0{,}85x = 2\,157{,}5 \;\rightarrow\; 0{,}05x = 32{,}5$

$x = 650, \;\; y = 1\,850$

Le costó 650 € el equipo de música y 1 850 € el ordenador.

21 **En una cafetería utilizan dos marcas de café, una de 6 €/kg y otra de 8,50 €/kg. El encargado quiere preparar 20 kg de una mezcla de los dos cuyo precio sea 7 €/kg. ¿Cuánto tiene que poner de cada clase?**

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE
CAFÉ INFERIOR	x	6	$6x$
CAFÉ SUPERIOR	y	8,5	$8{,}5y$
MEZCLA	20	7	140

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 20 \\ 6x + 8{,}5y = 140 \end{array}\right\} \rightarrow\; x = 20 - y$$

$6 \cdot (20 - y) + 8{,}5y = 140 \;\rightarrow\; 120 - 6y + 8{,}5y = 140 \;\rightarrow\; 2{,}5y = 20 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; y = \frac{20}{2{,}5} = 8 \;\rightarrow\; x = 20 - 8 = 12$$

Necesitan 12 kg de café inferior y 8 kg de café superior.

22 **¿Cuántos litros de leche con un 10% de grasa hemos de mezclar con otra leche que tiene un 4% de grasa para obtener 18 litros con un 6% de grasa?**

$x \;\rightarrow\;$ litros de leche con un 10% de grasa

$y \;\rightarrow\;$ litros de leche con un 4% de grasa

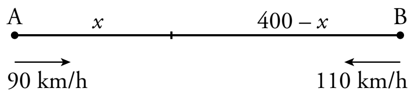
$$\left.\begin{array}{l} x + y = 18 \\ 0{,}1x + 0{,}04y = 0{,}06\,(x + y) \end{array}\right\} 0{,}04x = 0{,}02y \;\rightarrow\; y = 2x$$

$x + 2x = 18 \;\rightarrow\; 3x = 18 \;\rightarrow\; x = 6, \;\; y = 12$

Hemos de mezclar 6 litros de leche de un 10% de grasa con 12 litros de leche de un 4% de grasa.

Página 121

23 **La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 400 km. Un coche sale desde A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Simultáneamente, sale otro coche desde B hacia A a 110 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse? ¿A qué distancia de A se producirá el encuentro?**



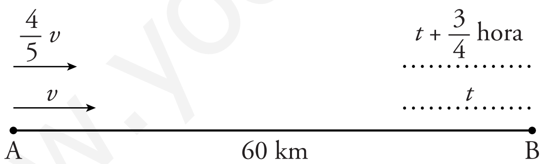
	ESPACIO	VELOCIDAD	TIEMPO
A	x	90 km/h	t
B	$400 - x$	110 km/h	t

$v = \dfrac{s}{t}$

$$\left.\begin{array}{l} 90 = \dfrac{x}{t} \;\to\; x = 90t \\ 110 = \dfrac{400 - x}{t} \;\to\; 400 - x = 110t \end{array}\right\} \begin{array}{l} 400 - 90t = 110t \\ 400 = 200t \;\to\; t = 2 \end{array}$$

Se encontrarán al cabo de 2 h a $90 \cdot 2 = 180$ km de A.

24 **La distancia entre dos localidades A y B es de 60 km. Dos ciclistas salen a la vez de A. La velocidad del primero es 4/5 de la del segundo y llega 3/4 de hora más tarde. ¿Qué velocidad lleva cada uno?**



$$\left.\begin{array}{l} V_A \;\to\; \text{velocidad de } A \\ V_B \;\to\; \text{velocidad de } B \\ t \;\to\; \text{tiempo que tarda } A \text{ en recorrer los 60 km} \end{array}\right\}$$

$V_A = \dfrac{4}{5} V_B$

$$\left.\begin{array}{l} 60 = V_A \cdot t \\ 60 = V_B \cdot (t - 3/4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 60 = (4/5)\, V_B \cdot t \\ 60 = V_B \cdot (t - 3/4) \end{array}\Bigg\}$$

Dividimos ambas ecuaciones:

$$\frac{60}{60} = \frac{\frac{4}{5} V_B \cdot t}{V_B \cdot \left(t - \frac{3}{4}\right)} \;\to\; 1 = \frac{\frac{4}{5} t}{t - \frac{3}{4}}$$

$$t - \frac{3}{4} = \frac{4}{5}t \ \rightarrow \ t - \frac{4}{5}t = \frac{3}{4}$$

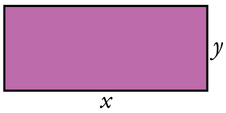
$$\frac{1}{5}t = \frac{3}{4} \ \rightarrow \ t = \frac{15}{4}$$

$$V_B = \frac{60}{3} = 20 \text{ km/h}$$

$$V_A = \frac{4}{5} \cdot 20 = 16 \text{ km/h}$$

25 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

26 El perímetro de un rectángulo es de 20 cm, y su área, de 21 cm². ¿Cuáles son sus dimensiones?



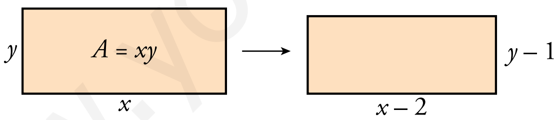
$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 20 \\ x \cdot y = 21 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ xy = 21 \end{array}\right\} \rightarrow y = 10 - x$$

$$x(10 - x) = 21 \ \rightarrow \ -x^2 + 10x - 21 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 84}}{-2} =$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-10 \pm 4}{-2} \begin{cases} x_1 = 7 \ \rightarrow \ y_1 = 10 - 7 = 3 \\ x_2 = 3 \ \rightarrow \ y_2 = 10 - 3 = 7 \end{cases}$$

Las dimensiones del rectángulo son 3 cm y 7 cm.

27 Si acortamos en 2 cm la base de un rectángulo y en 1 cm su altura, el área disminuye en 13 cm². Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que su perímetro es de 24 cm.



Perímetro = $2b + 2h = 24$ cm $\ \rightarrow \ b + h = 12$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Área}_1 = b \cdot h \\ \text{Área}_2 = (b - 2)(h - 1) \end{array}\right\} \text{Área}_2 = \text{Área}_1 - 13$$

$$(b - 2)(h - 1) = b \cdot h - 13$$

$$b \cdot h - 2h - b + 2 = b \cdot h - 13 \ \rightarrow \ 2h + b = 15$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} b + h = 12 \\ b + 2h = 15 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} -b - h = -12 \\ b + 2h = 15 \\ \hline h = 3 \end{array} \ \rightarrow \ b = 12 - 3 = 9$$

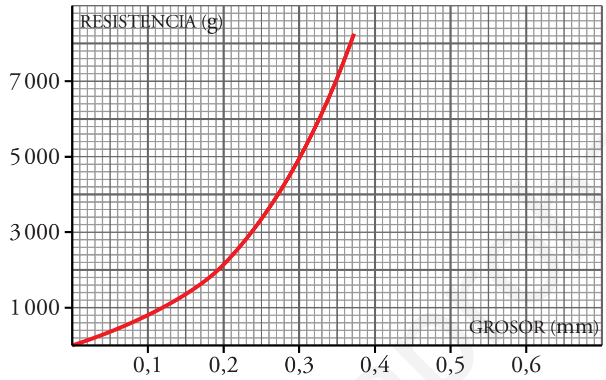
Solución: La base del rectángulo mide 9 cm y la altura, 3 cm.

Página 135

PRACTICA

Interpretación de gráficas

1 **En un libro de pesca hemos encontrado la siguiente gráfica que relaciona la resistencia de un tipo de hilo con su grosor:**



a) ¿Qué grosor debe tener el sedal de un pescador que quiera pescar salmones cuyo peso no supere los 2 kg?

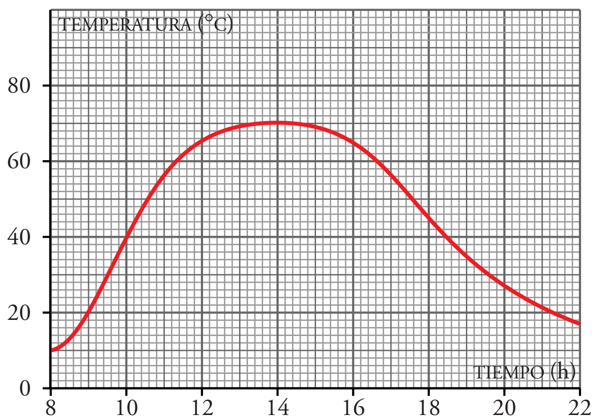
b) ¿Con cuántos gramos se podría romper un sedal de 0,2 mm de grosor? ¿Y de 0,35 mm?

a) Un grosor de, al menos, 0,17 mm.

b) Con más de 2 200 g se rompería un sedal de 0,2 mm.

Con más de 7 000 g se rompería un sedal de 0,35 mm.

2 **La siguiente gráfica nos muestra la temperatura de un radiador desde que se enciende la calefacción (8 h) hasta 14 horas más tarde.**



a) ¿Cuál es la temperatura máxima que alcanza y cuándo la alcanza?

b) Calcula el aumento de temperatura por hora entre las 8 h y las 10 h.

¿Es el mismo entre las 10 h y las 12 h?

c) ¿Cuál es el dominio de definición?

d) Di en qué intervalo es decreciente la función.

a) La temperatura máxima es de 70 °C y la alcanza a las 14 horas.

b) $\frac{40-10}{10-8} = \frac{30}{2} = 15$ °C cada hora.

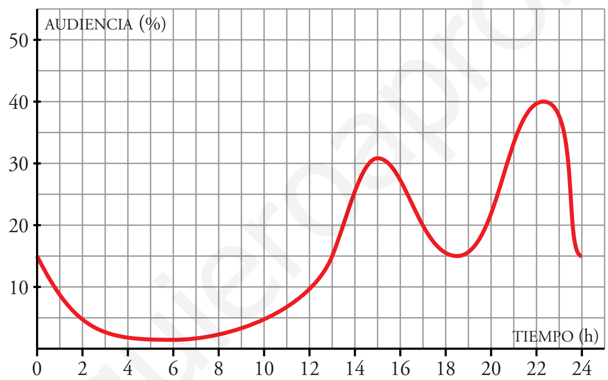
Entre las 10 h y las 12 h, el aumento de temperatura es:

$\frac{65-40}{12-10} = \frac{25}{2} = 12{,}5$ °C

c) *Dominio* = [8, 22]

d) El intervalo de decrecimiento es [14, 22].

3 **a) Esta curva muestra la audiencia de televisión en España en un día promedio del mes de abril de 2002. ¿Cuáles son sus puntos más importantes? Descríbela.**



b) Cuando se habla de audiencia, se dice que España, al igual que Francia, Italia o Portugal, pertenece al grupo de países "camello" cuyas curvas de audiencia tienen dos "jorobas". Otros países, como Alemania y Dinamarca, son del grupo dromedario con una sola "joroba", que se produce alrededor de las 20 h. ¿Qué quieren decir los técnicos cuando hablan de "jorobas"?

a) A las 0 h hay un 15% de gente viendo la televisión. De esa hora en adelante decrece el porcentaje hasta las 6 h, que empieza a crecer poco a poco hasta las 15 h, que es cuando hay más de un 30% de audiencia. De nuevo baja hasta un 15% a las 18 h, y vuelve a subir muy rápido hasta un 40% de audiencia a las 22 h, que empieza a decrecer, quedándose a las 24 h en un 15%, como se empezó.

b) Las jorobas son los máximos, es decir, los puntos con un índice de audiencia más alto.

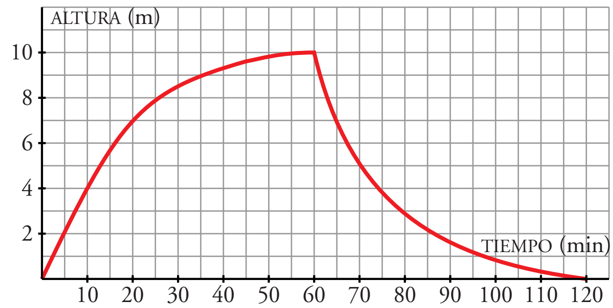
4 **Esta gráfica muestra cómo varía la altura del agua en un depósito que se llena con una bomba y que lleva dos válvulas para regular la entrada y la salida del agua.**

a) ¿Cuál es el máximo de esta función? Explica su significado.

b) ¿En qué puntos corta el eje de las *x*? ¿Qué significan esos puntos?

c) ¿Cuál es su dominio de definición?

d) Di en qué intervalo es creciente y en cuál es decreciente.



a) El máximo llega a los 60 minutos y es de 10 m de altura. Esto significa que al llegar el agua a los 10 m de altura, se abre la válvula que lo vacía.

b) En $x = 0$ y en $x = 120$.

Para $x = 0$, empieza a llenarse el depósito, y para $x = 120$, es que el depósito se ha vaciado a las 2 horas.

c) *Dominio* = [0, 120]

d) Creciente $\rightarrow$ (0, 60)

Decreciente $\rightarrow$ (60, 120)

Página 136

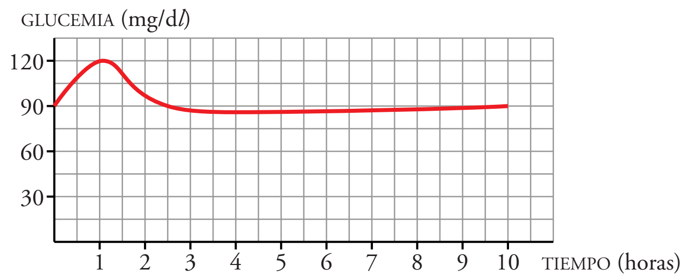
Construcción de gráficas

5 **Cuando una persona sana toma 50 g de glucosa en ayunas, su glucemia (% de glucosa en la sangre) se eleva desde 90 mg/d*l*, que es el nivel normal, hasta 120 mg/d*l* en una hora, aproximadamente. Luego disminuye hasta valores un poco por debajo del nivel normal, en 3 horas, y vuelve a la normalidad al cabo de 5 horas.**

a) Representa la curva de glucemia de una persona sana.

b) Di cuál es su máximo, su mínimo y explica su tendencia.

a)



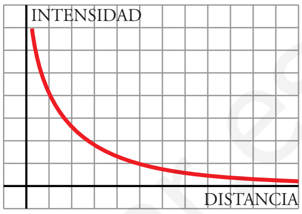
b) El máximo es de 120 mg/d*l* al cabo de 1 h de iniciar la toma. El mínimo está ligeramente por debajo de 90 mg/d*l* y se alcanza a las 4 h de iniciar la toma.

La tendencia de la función es 90 mg/d*l* (tener la glucemia en un nivel normal).

6 **La intensidad del sonido de un foco sonoro es menor a medida que nos alejamos de él.**

a) Representa la intensidad del sonido en función de la distancia al foco sonoro.

b) ¿Cuál es la tendencia?



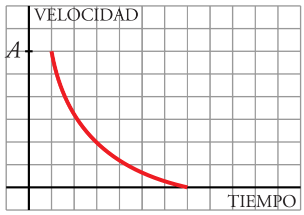
a) Una posible gráfica es:

b) La tendencia de la función es cero: la intensidad del sonido es prácticamente nula a medida que nos alejamos del foco.

7 **Cuando un avión comienza el aterrizaje, disminuye la velocidad mientras desciende hasta que toma tierra. Ya en la pista de aterrizaje, reduce su velocidad mientras rueda hasta que se para.**

Dibuja una gráfica aproximada que represente la velocidad del avión durante el tiempo que dura el aterrizaje.

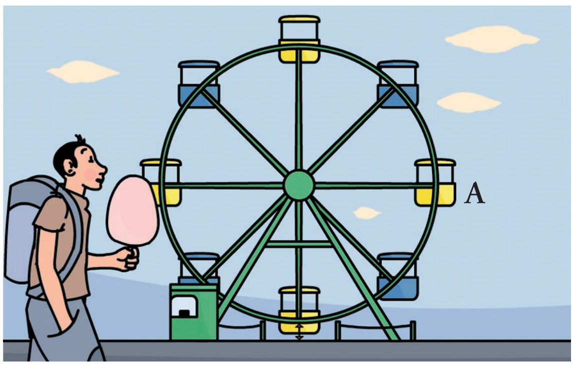
Por ejemplo:



A es la velocidad que tiene el avión en el momento de comenzar la maniobra de aterrizaje.

El punto en el que la gráfica corta al eje X es el momento en que el avión se ha parado.

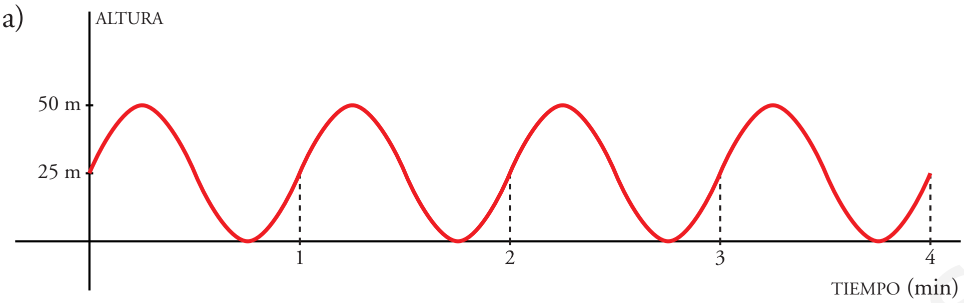
8 **La noria de la figura tiene un diámetro de 50 m y da una vuelta cada 60 segundos.**



a) Haz una gráfica que muestre cómo varía la altura del cestillo A durante 4 minutos.

b) Describe la gráfica que has dibujado.

a)



b) El cestillo *A* está a 25 m de altura. Sube y en 15 segundos alcanza los 50 m. Baja y en otros 15 segundos vuelve a estar a 25 m de altura. Sigue bajando hasta llegar al suelo (0 m) en otros 15 segundos, y en 155 más, al subir, alcanza su posición inicial, 25 m. Este proceso se repite 4 veces.

9 **Tres deportistas han estado nadando durante media hora. Su entrenador ha medido las distancias recorridas cada 5 minutos y ha obtenido los siguientes datos:**

A

TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA (m)	95	235	425	650	875	1 100

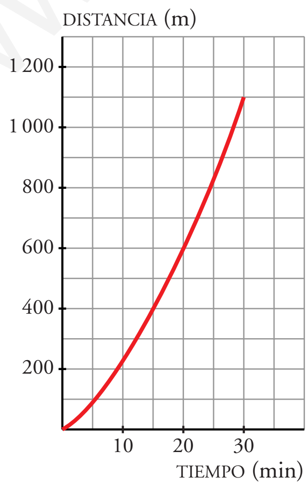
B

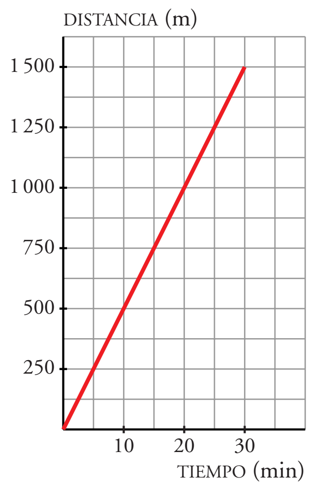
TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA (m)	250	500	750	1 000	1 250	1 500

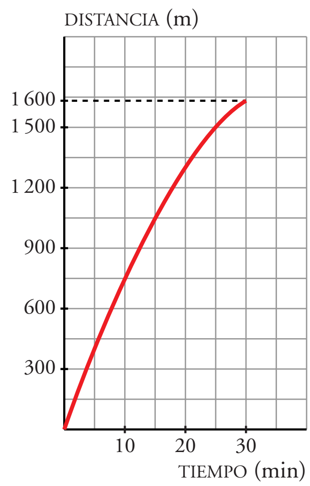
C

TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA (m)	360	710	1 020	1 300	1 490	1 600

Dibuja la gráfica que relaciona la distancia y el tiempo de cada nadador y descríbelas.







NADADOR A $\rightarrow$ Es el nadador más lento: recore 1 100 m en 30 minutos. Es quien más lento sale, y progresivamente aumenta la velocidad durante los 15 primeros minutos. A partir de aquí, y hasta el final, mantiene un ritmo constante, 225 m cada 5 minutos.

NADADOR B $\rightarrow$ Su ritmo es constante, 250 m cada 5 minutos.

NADADOR C $\rightarrow$ Es el que más rápido comienza, pero su velocidad va decreciendo progresivamente hasta finalizar el entrenamiento.

PIENSA Y RESUELVE

10 **Determina el dominio de definición:**

a) $y = \dfrac{1}{5x - 15}$ b) $y = \dfrac{-3}{x^2 + 1}$

c) $y = \dfrac{1}{4x - x^2}$ d) $y = \dfrac{1 - x}{x^2 - x - 6}$

a) $Dom\, f = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $Dom\, f = \mathbb{R}$

c) $Dom\, f = \mathbb{R} - \{0, 4\}$

d) $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{3, -2\}$

En todos los casos se han quitado del dominio de la función aquellos valores que anulan el denominador.

11 **Determina el dominio de definición:**

a) $y = \sqrt{2x - 7}$ b) $y = \sqrt{2 - x}$

c) $y = \sqrt{-x}$ d) $y = \sqrt[3]{2x}$

a) $Dom\, f = \left[\dfrac{7}{2}, +\infty\right)$

b) $Dom\, f = (-\infty, 2]$

c) $Dom\, f = (-\infty, 0]$

d) $Dom\, f = \mathbb{R}$

12 **Comprueba si los pares de valores que figuran en la siguiente tabla corresponden a la función $y = 3x - x^2$ y completa los que faltan:**

x	–2	–1	1,5	2	3,5	4	8	10
y	–10		2,25		–1,75			

$y = 3x - x^2$

Si $x = -2 \rightarrow y = 3 \cdot (-2) - (-2)^2 = -6 - 4 = -10$

Si $x = 1{,}5 \rightarrow y = 3 \cdot (1{,}5) - 1{,}5^2 = 4{,}5 - 2{,}25 = 2{,}25$

Si $x = 3{,}5 \rightarrow y = 3 \cdot (3{,}5) - 3{,}5^2 = 10{,}5 - 12{,}25 = -1{,}75$

Los pares de valores que figuran en la tabla corresponden a la función $y = 3x - x^2$.

Si $x = -1 \rightarrow y = 3 \cdot (-1) - (-1)^2 = -3 - 1 = -4$

Si $x = 2 \rightarrow y = 3 \cdot 2 - 2^2 = 6 - 4 = 2$

Si $x = 4 \rightarrow y = 3 \cdot 4 - 4^2 = 12 - 16 = -4$

Si $x = 8 \rightarrow y = 3 \cdot 8 - 8^2 = 24 - 64 = -40$

Si $x = 10 \rightarrow y = 3 \cdot 10 - 10^2 = 30 - 100 = -70$

La tabla queda así:

x	–2	–1	1,5	2	3,5	4	8	10
y	–10	–4	2,25	2	–1,75	–4	–40	–70

13 **Comprueba si los puntos $A(25; 1)$, $B(4; 1{,}75)$, $C(102; 2{,}99)$, $D(-3; 3{,}2)$ y $E(1{,}9; 13)$ pertenecen a la gráfica de la función $y = 3 - \frac{1}{x-2}$.**

¿Qué valor no podemos dar a x en esa función?

Sustituimos la coordenada x de cada punto en la función $y = 3 - \frac{1}{x-2}$ y comprobamos si se obtiene o no la coordenada y correspondiente.

$A(25; 1) \rightarrow x = 35;\ y = 3 - \frac{1}{25-2} = 3 - \frac{1}{23} = \frac{69-1}{23} = \frac{68}{23} \neq 1$

$B(4; 1{,}75) \rightarrow x = 4;\ y = 3 - \frac{1}{4-2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \neq 1{,}75$

$C(102; 2{,}99) \rightarrow x = 102;\ y = 3 - \frac{1}{102-2} = 3 - \frac{1}{100} = \frac{299}{100} = 2{,}99$

$D(-3; 3{,}2) \rightarrow x = -3;\ y = 3 - \frac{1}{-3-2} = 3 + \frac{1}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2$

$E(1{,}9; 13) \rightarrow x = 1{,}9;\ y = 3 - \frac{1}{1{,}9-2} = 3 - \frac{1}{-0{,}1} = 3 + \frac{1}{0{,}1} = 3 + 10 = 13$

Pertenecen a la gráfica los puntos C, D y E.

No podemos dar el valor $x = 2$ porque se anula el denominador.

Página 137

14 **Un técnico dispone de 2 horas para la revisión de los ordenadores de una empresa. El tiempo que puede dedicar a cada uno depende del número que haya.**

a) Haz una tabla de valores que relacione el número de ordenadores (x) con el tiempo dedicado a cada uno.

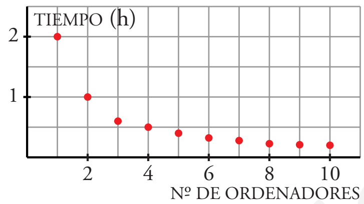
b) Representa esa función. ¿Se pueden unir los puntos?

c) ¿Qué tendencia se observa en esa función?

a) x → número de ordenadores para revisar.

y → tiempo dedicado a revisar cada ordenador (horas)

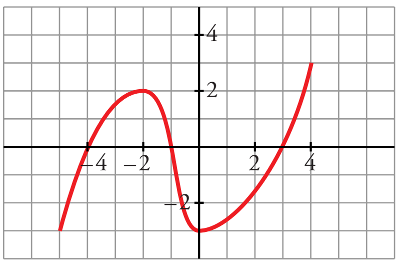
x	1	2	3	4	5	…	10	…	12
y	2	1	$0,\widehat{6}$	0,5	0,4	…	0,2	…	0,1

b) 

Los puntos no se pueden unir (un ordenador se revisa por completo o no se revisa); el número de ordenadores ha de ser un valor entero positivo.

c) A mayor número de ordenadores, menos tiempo para revisar cada uno. La tendencia es que el tiempo dedicado a cada ordenador sea, prácticamente, nulo.

15 **Observa la gráfica de la función y responde:**



a) ¿Cuál es su dominio de definición?

b) ¿Tiene máximo y mínimo? En caso afirmativo, ¿cuáles son?

c) ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

d) ¿Para qué valores de x es creciente y para cuáles es decreciente?

a) $Dom\ f = \mathbb{R}$

b) Máximo → (–2, 2)

Mínimo → (0, –3)

c) Puntos de corte:

Con el eje X → (–4, 0), (3, 0), (–1, 0)

Con el eje Y → (0, –3)

d) Creciente → $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

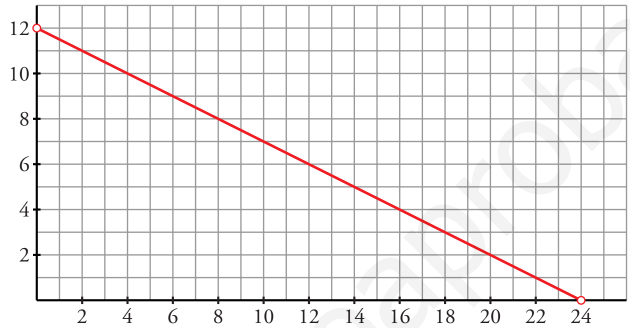
Decreciente → (–2, 0)

16 **Haz una tabla de valores que relacione el lado desigual (x) y los lados iguales (y) de un triángulo isósceles de 24 cm de perímetro. ¿Cuál de estas expresiones le corresponde?**

$$y = 12 - x; \quad y = \frac{x - 24}{2}; \quad y = \frac{24 - x}{2}$$

x	2	4	6	8	10	12	15	9,5
y	11	10	9	8	7	6	4,5	7,25

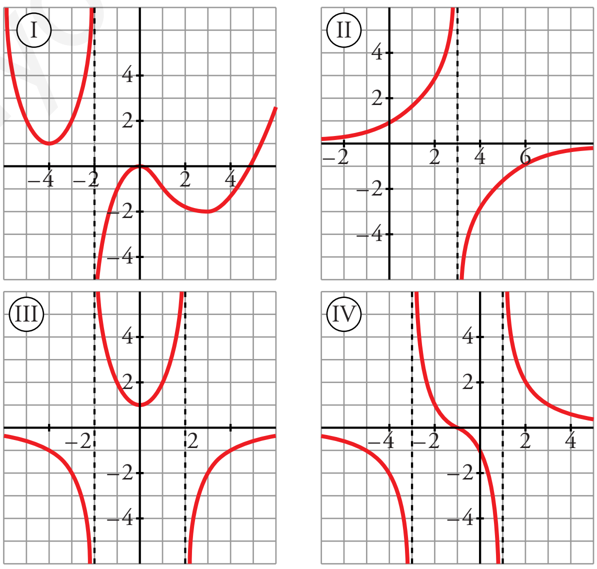
El dominio de definición es (0, 24).



Los puntos sí se pueden unir, ya que la longitud de los lados del triángulo puede tomar valores no enteros, reales.

Le corresponde la expresión $y = \frac{24 - x}{2}$ (pues $2y + x = 24$).

17 **Observa las cuatro gráficas siguientes:**



a) **Di cuáles son sus puntos de discontinuidad. ¿Cuál es su dominio de definición?**

b) **¿En qué intervalos son crecientes y en cuáles son decrecientes?**

a) I $Dom\ f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Discontinuidad: $x = -2$

II $Dom\ f = \mathbb{R} - \{3\}$

Discontinuidad: $x = 3$

III $Dom\ f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Discontinuidades: $x = -2$, $x = 2$

IV $Dom\ f = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

Discontinuidades: $x = -3$, $x = 1$

b) I Máximo: $(0, 0)$

Mínimo: $(-4, 1)$, $(3, -2)$

II No tiene máximo ni mínimo.

III Mínimo: $(0, 1)$

IV No tiene máximo ni mínimo.

c) I Creciente: $(-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (3, +\infty)$

Decreciente: $(-\infty, -4) \cup (0, 3)$

II Creciente: $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

III Creciente: $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

Decreciente: $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

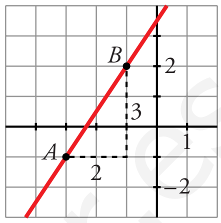
IV Decreciente: $(-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, +\infty)$

Página 146

PRACTICA

Pendiente de una recta

1 **Desde el punto A, nos movemos 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba. Así llegamos al punto B. ¿Cuál es la pendiente de la recta AB?**



Cuando x avanza 2, y avanza 3 $\rightarrow$ $m = \frac{2}{3}$

2 **Di cuál es la pendiente de las rectas que obtenemos partiendo del punto A del ejercicio anterior y moviéndonos de las siguientes formas:**

a) 3 unidades a la derecha y 1 hacia abajo.

b) 1 unidad a la izquierda y 2 hacia arriba.

a) $m = -\frac{1}{3}$ b) $m = -2$

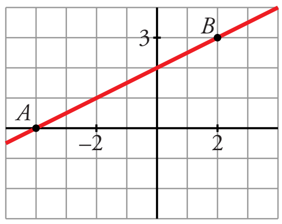
3 **Representa la recta que pasa por $A(-4, 0)$ y $B(2, 3)$.**

a) ¿Cuál es la variación de la y cuando vamos de A a B?

b) ¿Cuál es la variación de la x?

c) ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por A y por B?

$A(-4, 0)$ y $B(2, 3)$



a) La y varía 3 unidades hacia arriba.

b) La x varía 6 unidades a la derecha.

c) $m = \frac{3}{6}$ $\rightarrow$ $m = \frac{1}{2}$

4 **Halla, en cada caso, la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados:**

a) $A(0, 3)$ $B(4, -3)$

b) $A(17, 25)$ $B(-3, 15)$

c) $A(-4, 5)$ $B\left(1, \frac{5}{4}\right)$

d) $A(2{,}75; 8)$ $B(4{,}25; 3{,}5)$

La pendiente de la recta que pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

a) $A(0, 3)$, $B(4, -3)$ $\rightarrow$ $m = \frac{-3-3}{4-0} = \frac{-6}{4}$ $\rightarrow$ $m = \frac{-3}{2}$

b) $A(17, 25),\ B(-3, 15) \ \rightarrow\ m = \dfrac{15-25}{-3-17} = \dfrac{-10}{-20} \ \rightarrow\ m = \dfrac{1}{2}$

c) $A(-4, 5),\ B\left(1, \dfrac{5}{4}\right) \ \rightarrow\ m = \dfrac{\frac{5}{4}-5}{1+4} = \dfrac{\frac{-15}{4}}{5} = \dfrac{-15}{20} \ \rightarrow\ m = \dfrac{-3}{4}$

d) $A(2{,}75;\ 8),\ B(4{,}25;\ 3{,}5) \ \rightarrow\ m = \dfrac{3{,}5-8}{4{,}25-2{,}75} = \dfrac{-4{,}5}{1{,}5} = -3 \ \rightarrow\ m = -3$

5 **La pendiente de la recta $r: y = 3x - 2$ es $m = 3$.**

Compruébalo hallando dos puntos de r y dividiendo la variación de y entre la variación de x.

$r: y = 3x - 2 \qquad m = 3$

Calculamos dos puntos de r:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 0 \ \rightarrow\ y = 3 \cdot 0 - 2 = -2 \ \rightarrow\ A(0, -2) \\ \text{Si } x = 2 \ \rightarrow\ y = 3 \cdot 2 - 2 = 4 \ \rightarrow\ B(2, 4) \end{array}\right\} \rightarrow\ m = \frac{4-(-2)}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$$

Efectivamente, la pendiente es $m = 3$.

6 **Halla la pendiente de las siguientes rectas obteniendo dos de sus puntos:**

a) $y = 2x - 5$ b) $y = -3x$ c) $y = \dfrac{3x}{4} + 1$

Comprueba, en cada caso, que coincide con el coeficiente de la x (puesto que la y está despejada).

a) $y = 2x - 5$

Calculamos dos puntos que pertenezcan a la recta:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 3 \ \rightarrow\ y = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1 \ \rightarrow\ A(3, 1) \\ \text{Si } x = 1 \ \rightarrow\ y = 2 \cdot 1 - 5 = 2 - 5 = -3 \ \rightarrow\ B(1, -3) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ m = \frac{1-(-3)}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

La pendiente es $m = 2$.

b) $y = -3x$

Dos puntos que pertenecen a la recta son $(0, 0)$ y $(-1, 3)$:

$$m = \frac{3-0}{-1-0} = -3 \ \rightarrow\ m = -3$$

c) $y = \dfrac{3x}{4} + 1$

Calculamos dos puntos que pertenezcan a la recta:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } x = 0 \;\rightarrow\; y = \dfrac{3 \cdot 0}{4} + 1 = 1 \;\rightarrow\; A(0, 1) \\ \text{Si } x = -4 \;\rightarrow\; y = \dfrac{3 \cdot (-4)}{4} + 1 = -2 \;\rightarrow\; B(-4, -2)\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow\; m = \frac{1-(-2)}{0-(-4)} = \frac{3}{4} \;\rightarrow\; m = \frac{3}{4}$$

En los tres casos se comprueba que la pendiente de la recta coincide con el coeficiente de la x cuando y está despejada.

7 **Di cuál es la pendiente de las siguientes rectas observando el coeficiente de la x:**

a) $y = x - 4$ **b)** $y = -x$ **c)** $y = -4$

d) $y = \dfrac{4x-5}{2}$ **e)** $y = \dfrac{3-2x}{4}$ **f)** $y = \dfrac{7}{3}$

a) $m = 1$ b) $m = -1$ c) $m = 0$

d) $m = \dfrac{4}{2} = 2$ e) $m = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ f) $m = 0$

8 **Halla la pendiente de las siguientes rectas obteniendo el coeficiente de la x al despejar la y:**

a) $6x + 3y - 4 = 0$ **b)** $x + 4y - 2 = 0$ **c)** $3x - 2y + 6 = 0$

d) $-3x + 2y = 0$ **e)** $3y - 12 = 0$ **f)** $\dfrac{3}{4}x - 2y + 1 = 0$

a) $6x + 3y - 4 = 0 \;\rightarrow\; 3y = 4 - 6x \;\rightarrow\; y = \dfrac{4}{3} - \dfrac{6}{3}x \;\rightarrow\; y = -2x + \dfrac{4}{3} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; m = -2$

b) $x + 4y - 2 = 0 \;\rightarrow\; 4y = 2 - x \;\rightarrow\; y = \dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{4}x \;\rightarrow\; m = -\dfrac{1}{4}$

c) $3x - 2y + 6 = 0 \;\rightarrow\; 2y = 3x + 6 \;\rightarrow\; y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{6}{2} \;\rightarrow\; y = \dfrac{3}{2}x + 3 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; m = \dfrac{3}{2}$

d) $-3x + 2y = 0 \;\rightarrow\; 2y = 3x \;\rightarrow\; y = \dfrac{3}{2}x \;\rightarrow\; m = \dfrac{3}{2}$

e) $3y - 12 = 0 \;\rightarrow\; 3y = 12 \;\rightarrow\; y = 4 \;\rightarrow\; m = 0$

f) $\dfrac{3}{4}x - 2y + 1 = 0 \;\rightarrow\; 3x - 8y + 4 = 0 \;\rightarrow\; 8y = 3x + 4 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; y = \dfrac{3}{8}x + \dfrac{4}{8} \;\rightarrow\; y = \dfrac{3}{8}x + \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; m = \dfrac{3}{8}$

Ecuación de una recta

9 **Halla, en cada caso, la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B y escribe su ecuación:**

a) $A(5, 0)$, $B(0, 3)$

b) $A(-4, 1)$, $B(-2, 5)$

c) $A(2, -3)$, $B(-1, 2)$

d) $A\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $B\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$

a) $m = \frac{3-0}{0-5} = -\frac{3}{5}$; $y = -\frac{3}{5}x + 3$

b) $m = \frac{5-1}{-2-(-4)} = \frac{4}{2} = 2$; $y - 5 = 2(x+2)$; $y = 2x + 9$

c) $m = \frac{2-(-3)}{-1-2} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$; $y - 2 = -\frac{5}{3}(x+1)$; $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$

d) $m = \frac{-3/2-3}{-2-1/2} = \frac{-9/2}{-5/2} = \frac{9}{5}$; $y - 3 = \frac{9}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)$; $y = \frac{9}{5}x + \frac{21}{10}$

10 **Di cuál es la pendiente de cada una de las siguientes rectas y escribe la ecuación de una paralela que pase por el punto $P(-2, -3)$:**

a) $y = 3x - 5$

b) $y = \frac{2x+3}{5}$

c) $y = 3$

d) $x - 2y + 4 = 0$

a) $m = 3$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y + 3 = 3(x+2) \rightarrow y = 3x + 6 - 3 \rightarrow y = 3x + 3$

b) $m = \frac{2}{5}$

$y + 3 = \frac{2}{5}(x+2) \rightarrow 5y + 15 = 2x + 4 \rightarrow 5y - 2x + 11 = 0$

c) $m = 0$

$y + 3 = 0(x+2) \rightarrow y = -3$

d) $x - 2y + 4 = 0 \rightarrow 2y = x + 4 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

$m = \frac{1}{2}$

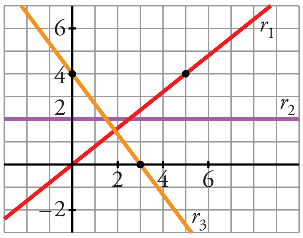
$y + 3 = \frac{1}{2}(x+2) \rightarrow 2y + 6 = x + 2 \rightarrow 2y - x + 4 = 0$

11 **Asocia a cada recta su ecuación:**

a) $y - 2 = 0$

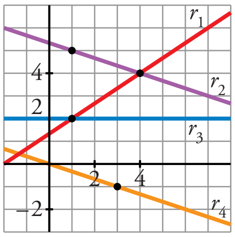
b) $4x - 5y = 0$

c) $4x + 3y = 12$



a) r_2, b) r_1, c) r_3

12 **Halla la ecuación de las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4 en la forma punto-pendiente.**



r_1 pasa por (1, 2) y (4, 4) $\rightarrow$ $m = \dfrac{4-2}{4-1} = \dfrac{2}{3}$

$y - 2 = \dfrac{2}{3}(x - 1)$

r_2 pasa por (4, 4) y (1, 5) $\rightarrow$ $m = \dfrac{5-4}{1-4} = \dfrac{-1}{3}$

$y - 5 = -\dfrac{1}{3}(x - 1)$

r_3 es una recta paralela al eje X que pasa por (1, 2) $\rightarrow$ $y = 2$

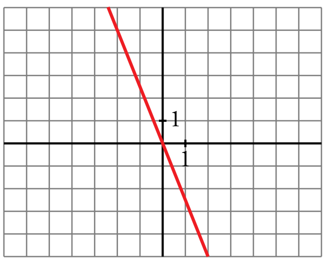
r_4 es paralela a r_2 y pasa por (0, 0) $\rightarrow$ $y = -\dfrac{1}{3}x$

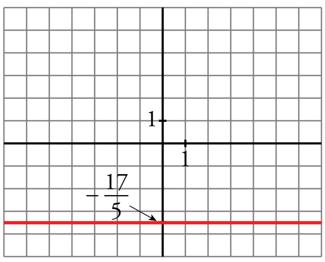
Página 147

Representación de rectas

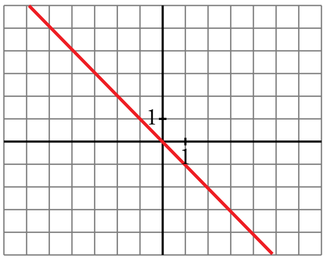
13 Representa:

a) $y = -2{,}5x$ **b)** $y = -\dfrac{17}{5}$ **c)** $y = -x$ **d)** $y = \dfrac{4x - 20}{5}$

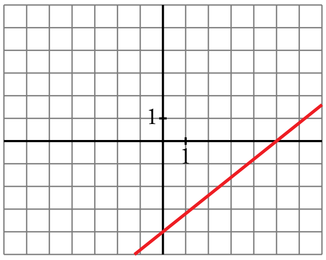
a) 

b) 

c)



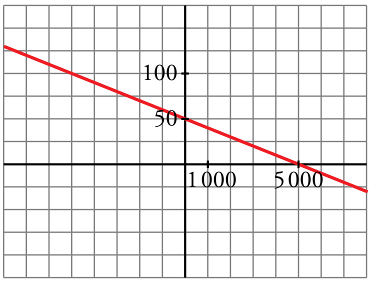
d)



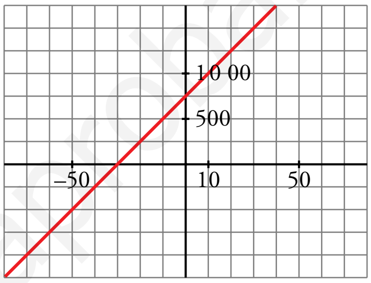
14 **Representa las siguientes rectas tomando una escala adecuada en cada eje:**

a) $y = 50 - 0{,}01x$ b) $y = 25x + 750$ c) $y = \dfrac{x}{150} - 5$ d) $x - 70y = 840$

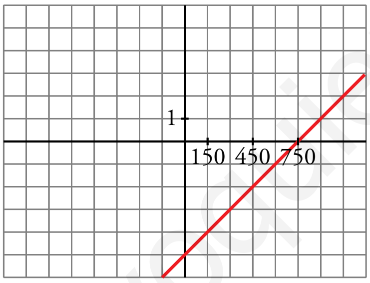
a)



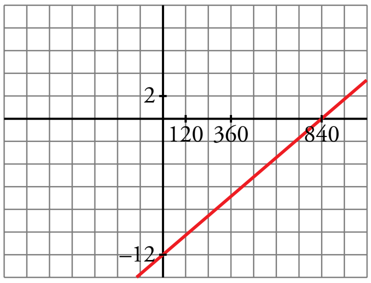
b)



c)



d)



15 **Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos** P **y** Q **y represéntala:**

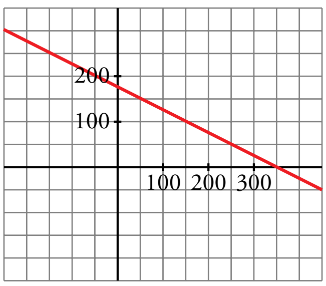
a) $P(350, 0)$, $Q(100, 135)$ b) $P(0{,}04;\ 0{,}85)$, $Q(0{,}4;\ 1{,}75)$

a) $m = -\dfrac{135}{250} = -\dfrac{27}{50}$; $y = -\dfrac{27}{50}(x - 350) \ \rightarrow\ y = -\dfrac{27}{50}x + 189$

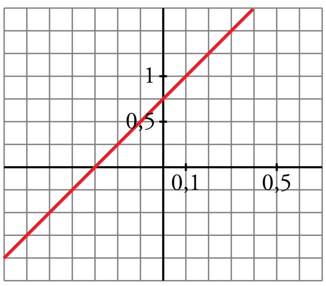
b) $m = \dfrac{1{,}75 - 0{,}85}{0{,}4 - 0{,}04} = \dfrac{0{,}9}{0{,}36} \ \rightarrow\ m = \dfrac{5}{2}$

$y = 1{,}75 + 2{,}5(x - 0{,}4) \ \rightarrow\ y = 2{,}5x + 0{,}75$

a)



b)



16 Escribe la ecuación de las siguientes rectas y represéntalas:

a) Su pendiente es $m = -\frac{2}{3}$ y pasa por el punto $P(-1, 2)$.

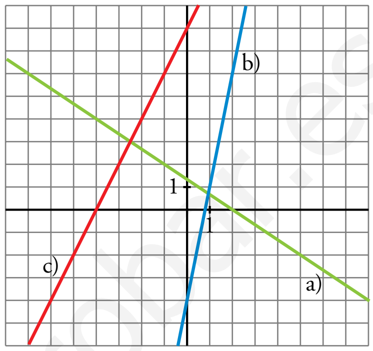
b) Su pendiente es $m = 5$ y su ordenada en el origen es -4.

c) Es paralela a $2x - y + 4 = 0$ y pasa por el punto $P(-3, 2)$.

a) $y - 2 = -\frac{2}{3}(x + 1) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

b) $y = 5x - 4$

c) $y - 2 = 2(x + 3) \rightarrow y = 2x + 8$



17 Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas de estas rectas y represéntalas:

a) $y = -3 + 2(x - 1)$ b) $y = \frac{3x + 15}{5}$ c) $-x + 4y = -2$ d) $x - y = 0$

a) Eje $X \rightarrow \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Eje $Y \rightarrow (0, -5)$

b) Eje $X \rightarrow (-5, 0)$

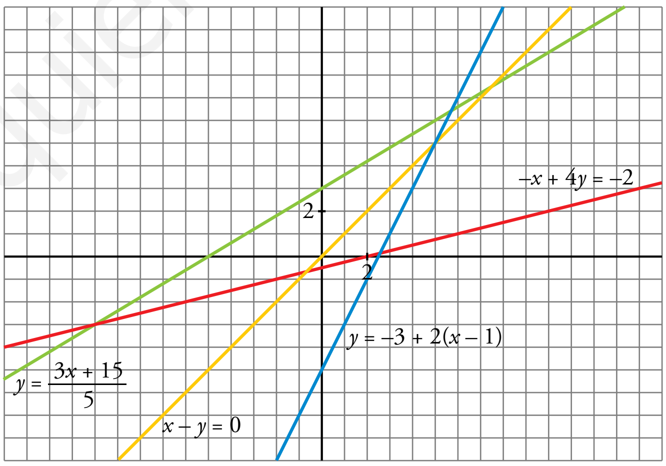
Eje $Y \rightarrow (0, 3)$

c) Eje $X \rightarrow (2, 0)$

Eje $Y \rightarrow \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

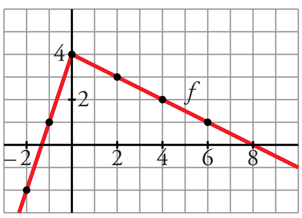
d) Eje $X \rightarrow (0, 0)$

Eje $Y \rightarrow (0, 0)$



Funciones definidas a trozos

18 Observa la gráfica de la función f y completa la siguiente tabla de valores:



x	–2	–1	0	2	4	6	8
y	–2	1	4	3	2	1	0

19 **Representa:**

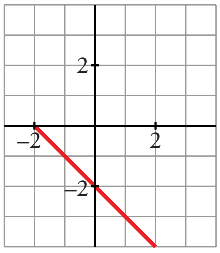
a) $y = -x - 2$ si $-2 \le x \le 2$

b) $y = 2x - 6$ si $0 \le x \le 5$

c) $y = \dfrac{3x - 4}{2}$ si $-2 \le x \le 6$

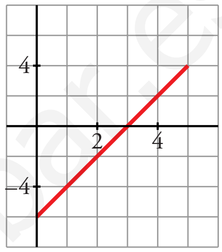
a) $y = -x - 2$ si $-2 \le x \le 2$

x	y
–2	0
2	–4



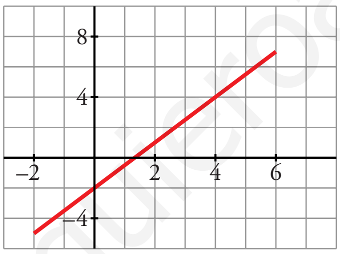
b) $y = 2x - 6$ si $0 \le x \le 5$

x	y
0	–6
5	4

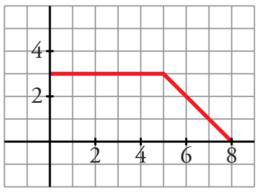


c) $y = \dfrac{3x - 4}{2}$ si $-2 \le x \le 6$

x	y
–2	–5
6	7



20 **¿A cuál de las siguientes funciones f, g o h corresponde esta gráfica?**



a) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ -x + 8 & \text{si } 6 \le x \le 8 \end{cases}$

b) $g(x) = \dfrac{24 - 3x}{8}$

c) $h(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ -x + 8 & \text{si } 5 \le x \le 8 \end{cases}$

Corresponde a la función c): $h(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ -x + 8 & \text{si } 5 \le x \le 8 \end{cases}$

21 **Representa estas funciones:**

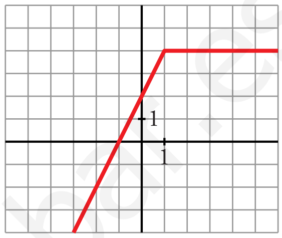
a) $y = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ 5 & \text{si } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ (x/2) + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) $y = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

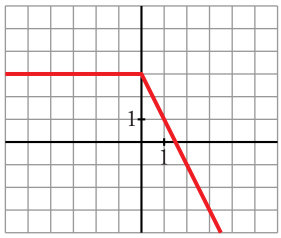


- Representamos el primer trozo de la función que es la recta $y = 2x + 2$ definida para $x < 1$:

x	0	–1	1
y	2	0	4

- El segundo tramo de función es constante, $y = 4$ definida para $x \geq 1$.

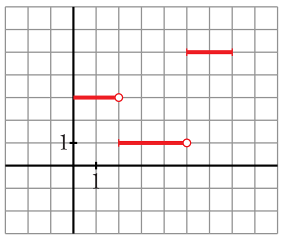
b) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



- El primer tramo de función es constante, $y = 3$ definida para $x < 0$.
- El segundo tramo de función, definida para $x \geq 0$, es la recta $y = 3 - 2x$:

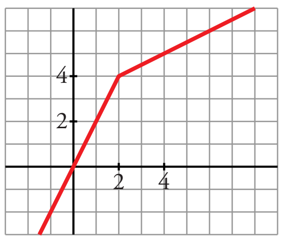
x	0	2
y	3	–1

c) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ 5 & \text{si } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$



Los tres tramos de la función son trozos de rectas paralelas al eje X.

d) $y = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ (x/2) + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$



- El primer tramo de función es la recta $y = 2x$ definida para $x < 2$:

x	0	1	1,5	2
y	0	2	3	4

- El segundo tramo de función, definida para $x \geq 2$, es la recta $y = \dfrac{x}{2} + 3$:

x	2	4
y	4	5

Puesto que los dos tramos empalman en $x = 2$, no nos preocupamos en ver si el punto (2, 4) pertenece a uno o a otro tramo.

PIENSA Y RESUELVE

22 **Di, sin representarlas, cuáles de las siguientes rectas son paralelas:**

a) $y = \frac{2x-1}{3}$ b) $y = \frac{1}{2}$ c) $y = 2x + 3$

d) $y - 2x = -5$ e) $y = -7$ f) $2x - 3y = 0$

a) paralela a f); la pendiente de ambas es $m = \frac{2}{3}$.

c) paralela a d); ambas tienen pendiente $m = 2$.

b) paralela a e); ambas tienen pendiente $m = 0$.

Página 148

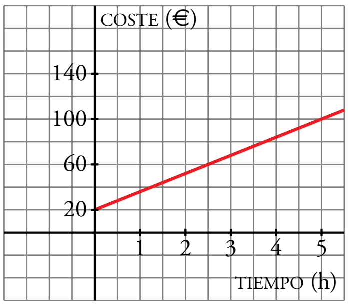
23 **Un fontanero cobra 18 € por el desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo.**

a) Haz una tabla de valores de la función *tiempo-coste* y represéntala gráficamente.

b) Si ha cobrado por una reparación 70,50 €, ¿cuánto tiempo ha invertido en la reparación?

a)

TIEMPO (h)	1	2	3	4	5
COSTE (€)	33	48	63	78	93



b) $y = 18 + 15x$ donde x son las horas invertidas e y es el coste de la reparación.

Si $y = 70{,}50 \;\rightarrow\; x = \frac{70{,}50 - 18}{15} = 3{,}5$

Ha invertido 3 horas y media.

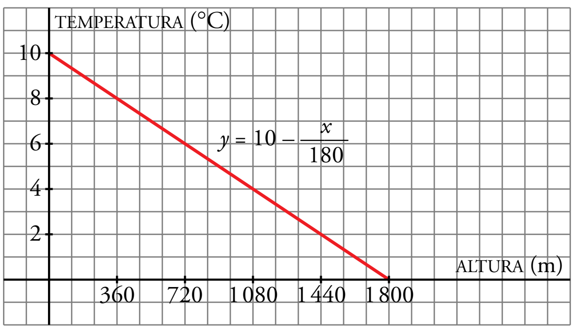
24 **Mientras ascendíamos por una montaña, medimos la temperatura y obtuvimos los datos de esta tabla.**

ALTURA (m)	0	360	720	990
TEMPERATUTA (°C)	10	8	6	4,5

a) Representa la función *altura-temperatura* y busca su expresión analítica.

b) ¿A partir de qué altura la temperatura es menor que 0 °C?

a)



b) A partir de 1 800 m, la temperatura es menor que 0 °C

25 **Halla el valor que debe tener s para que el punto $A(s, 5)$ esté sobre la recta que pasa por (3, –2) y (–5, 1).**

• Calculamos la pendiente de la recta que pasa por (3, –2) y (–5, 1) $\to$

$$\to \ m_1 = \frac{1-(-2)}{-5-3} = -\frac{3}{8}$$

• Calculamos la pendiente de la recta que pasa por (3, –2) y $A(s, 5)$ $\to$

$$\to \ m_2 = \frac{5-(-2)}{s-3} = \frac{7}{s-3}$$

Para que $A(s, 5)$ pertenezca a la recta que pasa por (3, –2) y (–5, 1), se ha de cumplir que $m_1 = m_2$:

$$-\frac{3}{8} = \frac{7}{s-3} \ \to \ -3(s-3) = 56 \ \to \ -3s + 9 = 56 \ \to \ -3s = 47$$

Luego: $s = -\dfrac{47}{3}$

26 **En el recibo mensual de la luz pagamos un coste fijo de 10 €. Además pagamos 0,2 € por cada kilowatio-hora (kW-h) consumido.**

a) Escribe la función que nos da el importe del recibo según los kW-h consumidos y represéntala.

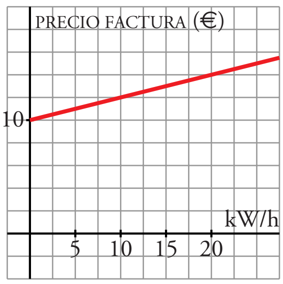
b) Si el recibo del mes de enero fue de 35 €, ¿cuántos kW-h se consumieron?

a) La función es $y = 10 + 0{,}2x$ siendo:

$x \to$ número de kW-h consumidos

$y \to$ precio del recibo

Hacemos una tabla de valores para representar la función:



x	0	5	10	15	20
y	10	11	12	13	14

b) Si $y = 35 \ \to \ 35 = 10 + 0{,}2x \ \to \ 35 - 10 = 0{,}2x \ \to \ x = \dfrac{25}{0{,}2} = 125$

Se consumieron 125 kW-h.

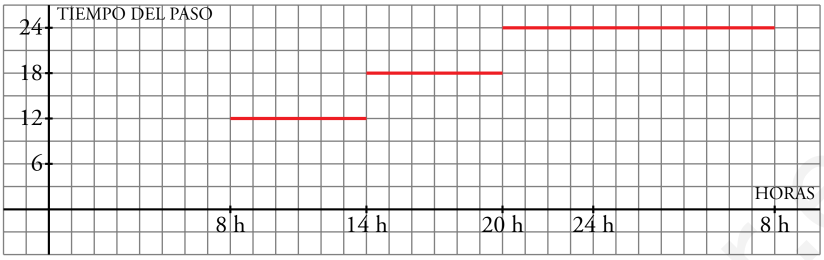
27 **En las llamadas telefónicas interurbanas, el tiempo que dura un paso del contador depende de la hora de la llamada:**

De 8 h a 14 h	12 segundos
De 14 h a 20 h	18 segundos
De 20 h a 8 h del día siguiente ..	24 segundos

a) Representa gráficamente la función que da la duración del paso del contador según la hora de la llamada para un día completo.

b) Busca la expresión analítica de esa función.

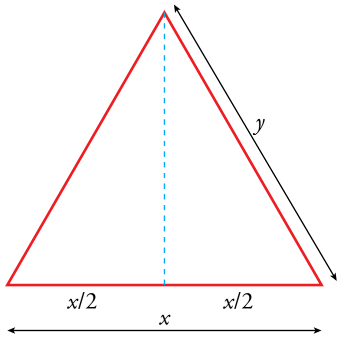
a)



b) $y = \begin{cases} 24 & \text{si} \quad 0 < x \le 8 \\ 12 & \text{si} \quad 9 < x \le 14 \\ 18 & \text{si} \quad 14 < x \le 20 \\ 24 & \text{si} \quad 20 < x \le 24 \end{cases}$

28 **Un triángulo isósceles tiene 20 cm de perímetro. Llama x al lado desigual e y a los lados iguales. Haz una tabla de valores y, a partir de ella, escribe la relación entre x e y. ¿Qué tipo de función obtienes?**

x	2	4	6	8	10
y	9	8	7	6	5



$2y + x = 20$

$y = -\dfrac{x}{2} + 10$

Es una función lineal

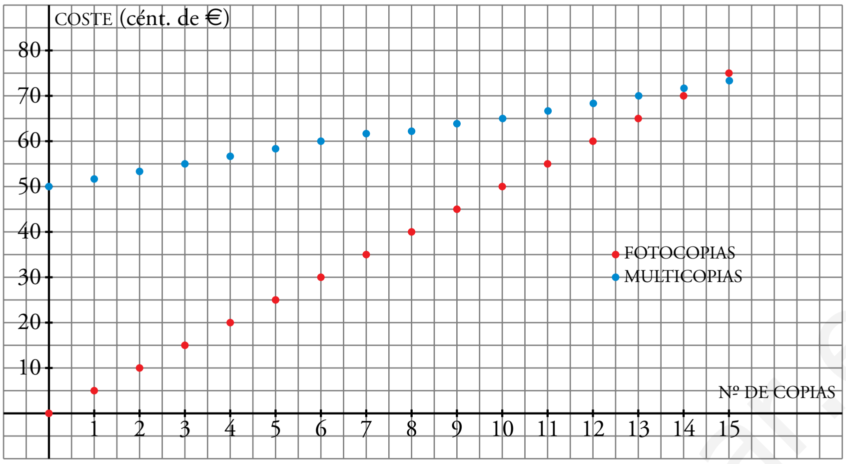
29 **Una casa de reprografía cobra 5 cent. por cada fotocopia. Ofrece también un servicio de multicopia, por el que cobra 50 cent. fijos por el cliché y 1,50 cent. por cada copia de un mismo ejemplar.**

Haz, para cada caso, una tabla de valores que muestre lo que hay que pagar según el número de copias realizadas. Representa las funciones obtenidas.

¿Tiene sentido unir los puntos en cada una de ellas? Obtén la expresión analítica de cada función. ¿A partir de cuántas copias es más económico utilizar la multicopista?

Nº DE FOTOCOPIAS	1	2	3	4	5	6
COSTE (cent. de €)	5	10	15	20	25	30

Nº DE MULTICOPIAS	1	2	3	4	5
COSTE (cent. de €)	51,5	53	54,5	56	57,5



No tiene sentido unir los puntos de cada una de ellas, ya que no se puede hacer una fracción de fotocopia, como, por ejemplo, 1/2 fotocopia.

Fotocopias $\to$ $y = 5x$ con $x \in \mathbb{N}$

Multicopias $\to$ $y = 50 + 1{,}5x$ con $x \in \mathbb{N}$

Si nos fijamos en la gráfica, a partir de 15 copias es más económico utilizar la multicopista. Lo hacemos analíticamente, calculando cuándo el coste es el mismo para los dos métodos.

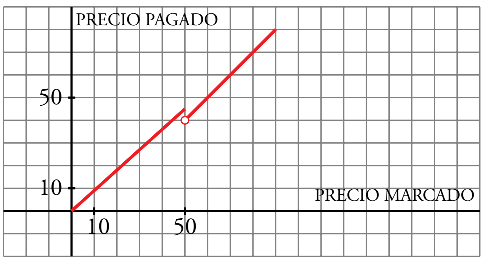
$$5x = 50 + 1{,}5x \;\to\; 3{,}5x = 50 \;\to\; x = 14{,}28$$

Por tanto, a partir de 15 copias es más económico utilizar la multicopista.

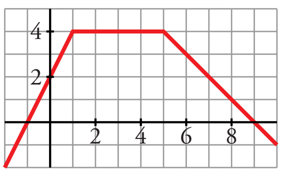
30 **En una tienda rebajan el 10% en compras inferiores a 50 € y el 20% si son superiores a 50 €. ¿Cuál es la relación entre el precio marcado (x) y el que pagamos (y)? Represéntala gráficamente.**

$$y = \begin{cases} 0{,}9x & \text{si } 0 \le x \le 50 \\ 0{,}8x & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

x	10	20	50	60	80
y	9	18	45	48	64



31 **Queremos hallar la expresión analítica de esta función formada por tres tramos de rectas.**



a) Para $x \leq 1$, la recta pasa por (0, 2) y (1, 4). Escribe su ecuación.

b) Para $1 \leq x \leq 5$, es una función constante. Escribe su ecuación.

c) Para $x \geq 5$, la recta pasa por (5, 4) y (9, 0). Escribe su ecuación.

d) Completa la expresión analítica de la siguiente función:

$$y = \begin{cases} \ldots & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } 1 \leq x \leq \ldots \\ \ldots & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

a) $m = \dfrac{4-2}{1-0} = 2$

Ecuación $y = 2 + 2(x - 0) \rightarrow y = 2 + 2x$

b) Para $1 \leq x \leq 5$, la recta es $y = 4$.

c) $m = \dfrac{0-4}{9-5} = -1$

Ecuación $y = 0 - 1(x - 9) \rightarrow y = 9 - x$

d) $y = \begin{cases} 2 + 2x & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ 9 - x & \text{si } x > 5 \end{cases}$

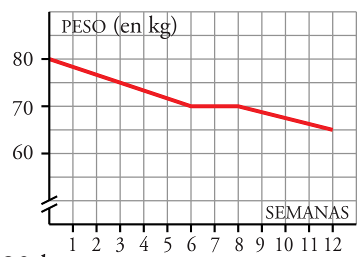
Página 149

32 **El médico ha puesto a Ricardo un régimen de adelgazamiento y le ha hecho esta gráfica para explicarle lo que espera conseguir en las 12 semanas que dure la dieta.**

a) ¿Cuál era su peso al comenzar el régimen?

b) ¿Cuánto tiene que adelgazar por semana en la primera etapa del régimen? ¿Y entre la 6ª y la 8ª semana?

c) Halla la expresión analítica de esa función.



a) Antes de empezar el régimen, Ricardo pesaba 80 kg.

b) $\dfrac{80-70}{6-0} = \dfrac{10}{6} \approx 1{,}6$ kg ha de adelgazar por semana en la primera etapa.

Entre la sexta y la octava semana debe mantenerse con el peso conseguido al final de la primera etapa.

c) Primer tramo: recta con $m = -\dfrac{10}{6}$; pasa por (6, 70)

$$y = 70 + \left(-\frac{5}{3}\right)(x - 6) \rightarrow y = -\frac{5}{3}x + 80$$

Segundo tramo: $y = 70$

Tercer tramo: recta que pasa por los puntos (8, 70), (12, 65):

$$m = \frac{65-70}{12-8} = \frac{-5}{4}$$

$$y = 70 - \frac{5}{4} \cdot (x - 8) \;\rightarrow\; y = -\frac{5}{4}x + 80$$

La expresión analítica queda: $y = \begin{cases} 80 - (5/3)x & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ 70 & \text{si } 6 < x \le 8 \\ 80 - (5/4) & \text{si } 8 < x \le 12 \end{cases}$

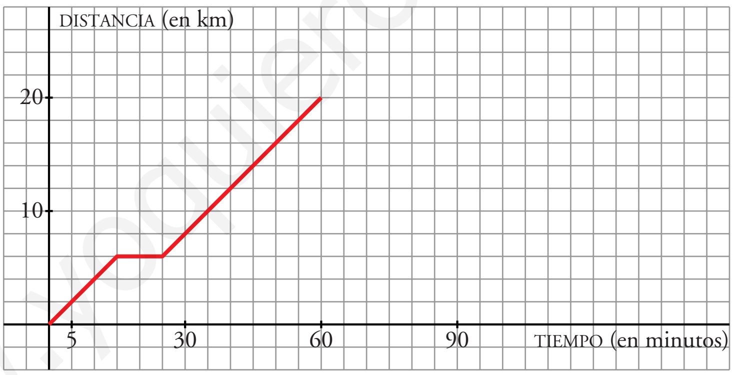
33 **Un ciclista sale de excursión a un lugar que dista 20 km de su casa. A los 15 minutos de salida, cuando se encuentra a 6 km, hace una parada de 10 minutos. Reanuda la marcha y llega a su destino una hora después de haber salido.**

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa*.

b) ¿Lleva la misma velocidad antes y después de la parada? (Suponemos que en cada etapa la velocidad es constante).

c) Busca la expresión analítica de la función que has representado.

a)



b) • Velocidad antes de la parada: recorre 6 km en 15 minutos $\rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{6}{15} = 0{,}4$ km/min

• Velocidad después de la parada: recorre 14 km en 35 minutos $\rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{14}{35} = 0{,}4$ km/min

Los dos trozos de recta, antes y después del descanso, son paralelos $\rightarrow$ la velocidad es la misma.

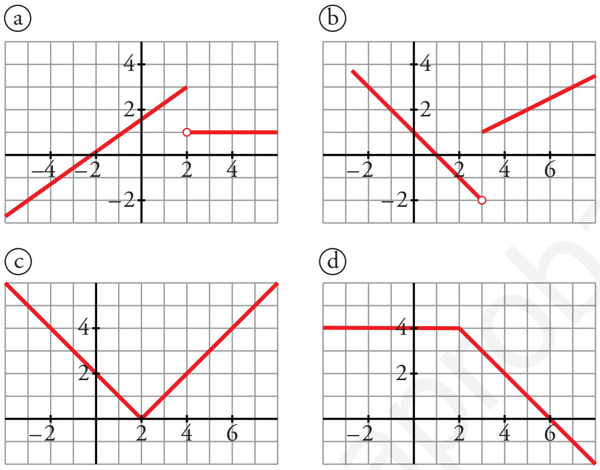
c) 1er tramo: pendiente $m = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$ y pasa por (0, 0)

3er tramo: pendiente $m = \dfrac{2}{5}$ y pasa por (60, 20)

2^{o} tramo: recta constante $y = 6$ $\rightarrow$

$$\rightarrow \quad y = \begin{cases} (2/5)x & \text{si } 0 \le x \le 15 \\ 6 & \text{si } 15 < x \le 25 \\ (2/5)x - 4 & \text{si } 25 < x \le 60 \end{cases}$$

34 Halla la expresión analítica de las funciones siguientes:



a) Para $x \le 2$, la recta pasa por (2, 3) y (–5, –2):

$$m = \frac{-2-3}{-5-2} = \frac{5}{7}$$

$$y - 3 = \frac{5}{7}(x-2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{5}{7}x + \frac{11}{7}$$

Para $x > 2 \quad \rightarrow \quad y = 1$

La expresión analítica es: $y = \begin{cases} (5/7)x + 11/7 & \text{si } x \le 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) Para $x < 3 \quad \rightarrow \quad n = 1$ y $m = -1 \quad \rightarrow \quad y = 1 - x$

Para $x \ge 3 \quad \rightarrow \quad m = \dfrac{1}{2}$ y pasa por (5, 2)

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x-5) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

La expresión analítica buscada es $y = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 3 \\ (1/2)x - 1/2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

c) Si $x \le 2 \quad \rightarrow \quad n = 2$ y $m = -1 \quad \rightarrow \quad y = 2 - x$

Si $x > 2 \quad \rightarrow \quad m = 1$ y pasa por (4, 2)

$y - 2 = x - 4 \quad \rightarrow \quad y = x - 2$

La expresión analítica es $y = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \le 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

d) El primer tramo de función es la recta constante $y = 4$ definida para $x < 2$.

El segundo tramo de recta pasa por (4, 2) y (6, 0):

$m = \frac{0-2}{6-4} = \frac{-2}{2} = -1$ Ecuación $\rightarrow$ $y = -1(x-6)$ $\rightarrow$ $y = 6 - x$

La expresión analítica buscada es: $y = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 2 \\ 6 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

35 **Di cuál es la pendiente de cada una de las siguientes rectas y di si son crecientes o si son decrecientes:**

a) $y = \frac{3x-5}{2}$ **b)** $2x + y - 3 = 0$

c) $y - 7 = 0$ **d)** $y = -3 - \frac{1}{2}(x-5)$

e) $7x - 10y = 0$ **f)** $x + y = 0$

¿Qué relación existe entre el crecimiento o decrecimiento de una recta y su pendiente?

a) $m = \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ Creciente b) $m = -2$ $\rightarrow$ Decreciente

c) $m = 0$ $\rightarrow$ Ni creciente ni decreciente d) $m = -\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ Decreciente

e) $7x - 10y = 0$ $\rightarrow$ $y = \frac{7}{10}x$ $\rightarrow$ $m = \frac{7}{10}$ $\rightarrow$ Creciente

f) $x + y = 0$ $\rightarrow$ $y = -x$ $\rightarrow$ $m = -1$ $\rightarrow$ Decreciente

Una recta es creciente si su pendiente es positiva y decreciente si su pendiente es negativa.

Página 158

PRACTICA

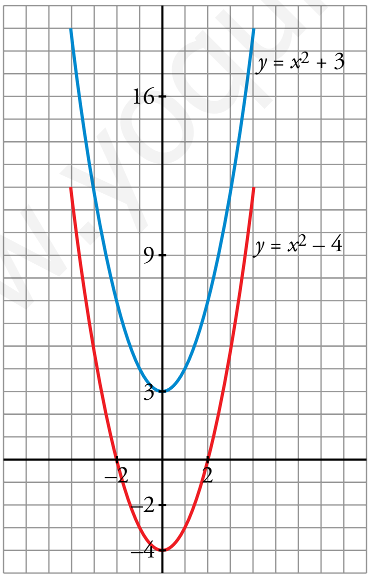
Funciones cuadráticas

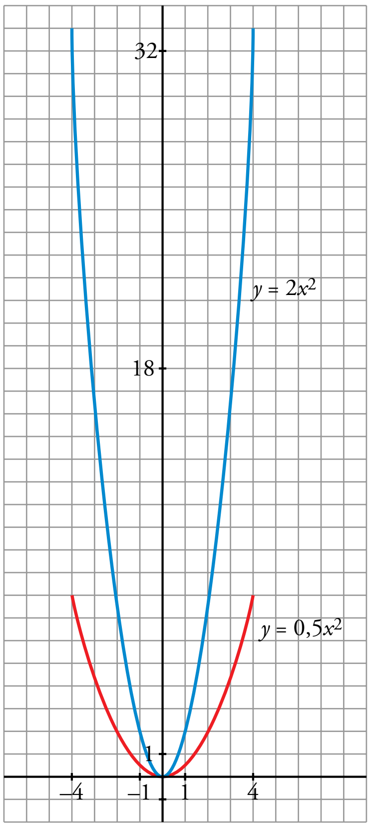
1 Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 4$ c) $y = 2x^2$ d) $y = 0,5x^2$

x	$y = x^2 + 3$	$y = x^2 - 4$	$y = 2x^2$	$y = 0,5x^2$
–4	19	12	32	8
–3	12	5	18	4,5
–2	7	0	8	2
–1	4	–3	2	0,5
0	3	–4	0	0
1	4	–3	2	0,5
2	7	0	8	2
3	12	5	18	4,5
4	19	12	32	8
VÉRTICE	(0, 3)	(0, –4)	(0, 0)	(0, 0)



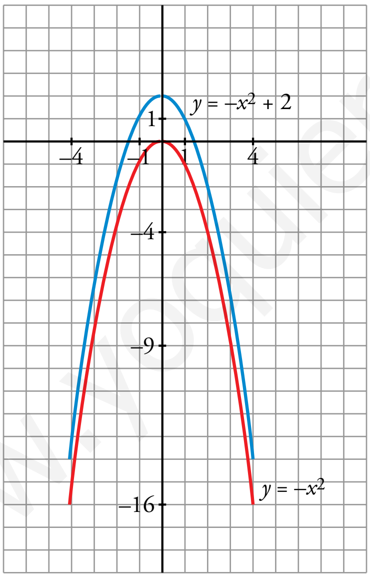


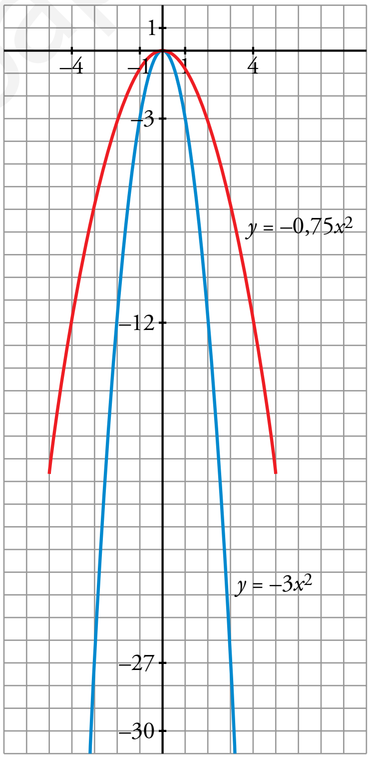
2 **Haz una tabla de valores como la del ejercicio anterior para representar cada una de las funciones siguientes:**

a) $y = -x^2$ **b)** $y = -x^2 + 2$ **c)** $y = -3x^2$ **d)** $y = -0{,}75x^2$

Di cuál es el vértice de cada una de estas parábolas.

x	$y = -x^2$	$y = -x^2 + 2$	$y = -3x^2$	$y = -0{,}75x^2$
–4	–16	–14	–48	–12
–3	–9	–7	–27	–6,75
–2	–4	–2	–12	–3
–1	–1	1	–3	–0,75
0	0	2	0	0
1	–1	1	–3	–0,75
2	–4	–2	–12	–3
3	–9	–7	–27	–6,75
4	–16	–14	–48	–12
VÉRTICE	(0, 0)	(0, 2)	(0, 0)	(0, 0)





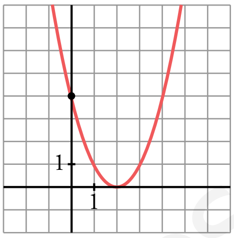
3 **Representa las siguientes parábolas, hallando los puntos de corte con los ejes, el vértice y algunos puntos próximos a él:**

a) $y = (x - 2)^2$ **b)** $y = 2x^2 - 8x + 2$

c) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ **d)** $y = -x^2 + 3x - 4$

a) $y = (x-2)^2$

Puntos de corte con los ejes:



Eje X: $(x-2)^2 = 0 \ \to \ x = 2$ raíz doble $\to \ (2, 0)$

Eje Y: $y = 4 \ \to \ (0, 4)$

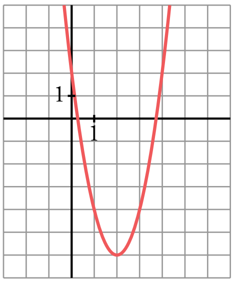
Vértice: $(2, 0)$

Puntos próximos al vértice

x	–1	1	3	4
y	9	1	1	4

b) $y = 2x^2 - 8x + 2$

Puntos de corte con los ejes:



Eje X: $2x^2 - 8x + 2 = 0 \ \to$

$$\to \ \frac{8 \pm \sqrt{64-16}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 2 \pm \sqrt{3} \begin{cases} (2+\sqrt{3}, 0) \approx (3{,}73; 0) \\ (2-\sqrt{3}, 0) \approx (0{,}27; 0) \end{cases}$$

Eje Y: $y = 2 \ \to \ (0, 2)$

Vértice: $(2, -6)$

Puntos próximos al vértice:

x	–1	1	3	4
y	12	–4	–4	2

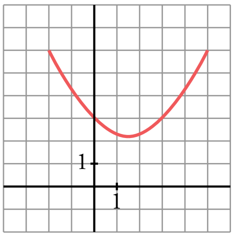
c) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $\frac{1}{3}x^2 - x + 3 = 0 \ \to \ \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2/3}$

No tiene puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = 3 \ \to \ (0, 3)$



Vértice: $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Puntos próximos al vértice:

x	–1	1	3
y	13/3	7/3	3

d) $y = -x^2 + 3x - 4$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $-x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{-2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{-2}$

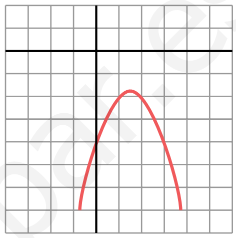
No tiene puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = -4 \rightarrow (0, -4)$

Vértice: $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{7}{4}\right)$

Puntos próximos al vértice:

x	-1	1	2	3
y	-8	-2	-2	-4



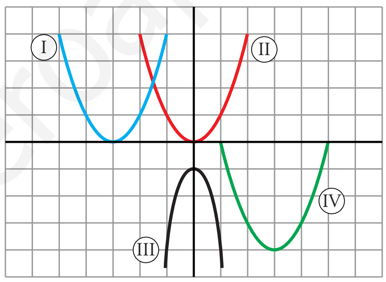
4 **Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:**

a) $y = x^2$

b) $y = x^2 - 6x + 5$

c) $y = (x + 3)^2$

d) $y = -3x^2 - 1$



a) II b) IV c) I d) III

Otras funciones

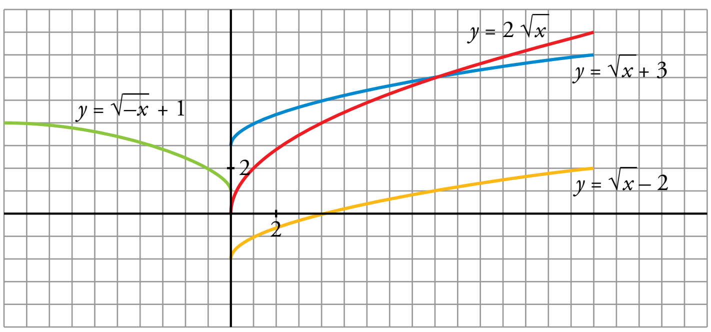
5 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = 3 + \sqrt{x}$

b) $y = \sqrt{x} - 2$

c) $y = 2\sqrt{x}$

d) $y = \sqrt{-x} + 1$



6 **Dibuja la gráfica de las funciones siguientes:**

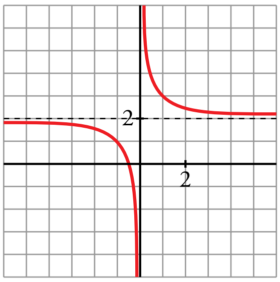
a) $y = \dfrac{1}{x} + 2$

b) $y = -\dfrac{1}{x}$

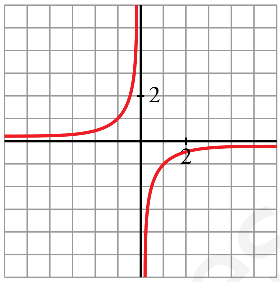
c) $y = \dfrac{8}{x}$

d) $y = \dfrac{2}{x} + 1$

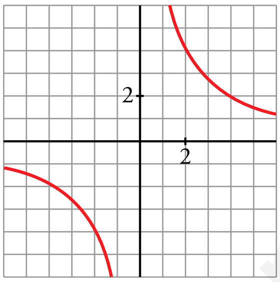
a)



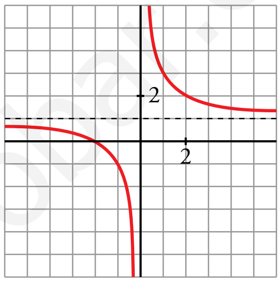
b)



c)



d)



7 **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como la del ejercicio 1.**

(Ayúdate de la calculadora).

a) $y = 2^{x+1}$

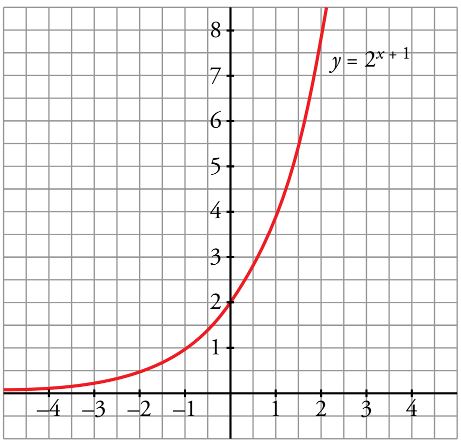
b) $y = 2{,}5^x$

c) $y = 1{,}5^x + 1$

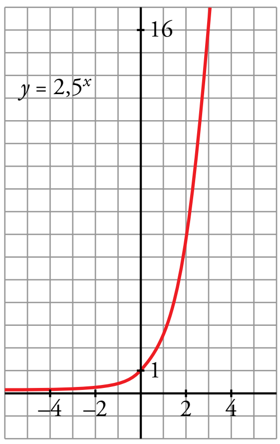
d) $y = 2^x - 3$

x	2^{x-1}	$2{,}5^x$	$1{,}5^x + 1$	$2^x - 3$
–4	0,125	0,026	1,2	–2,9375
–3	0,25	0,064	1,3	–2,875
–2	0,5	0,16	1,44	–2,75
–1	1	0,4	1,67	–2,5
0	2	1	1	–2
1	4	2,5	2,5	–1
2	8	6,25	3,25	1
3	16	15,625	4,38	5
4	32	39,063	6,06	13

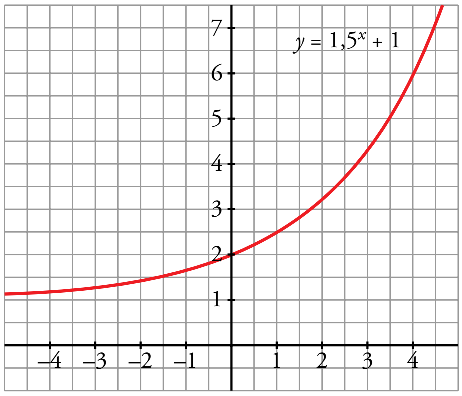
a)



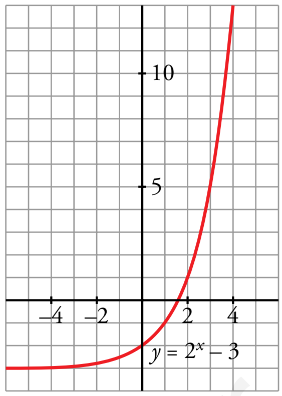
b)



c)



d)



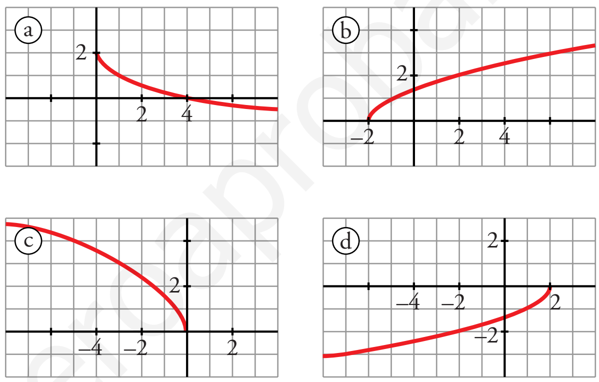
8 **Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponde:**

I) $y = \sqrt{x+2}$

II) $y = 2 - \sqrt{x}$

III) $y = -\sqrt{2-x}$

IV) $y = \sqrt{-3x}$



I $\leftrightarrow$ b) II $\leftrightarrow$ a)

III $\leftrightarrow$ d) IV $\leftrightarrow$ c)

Página 159

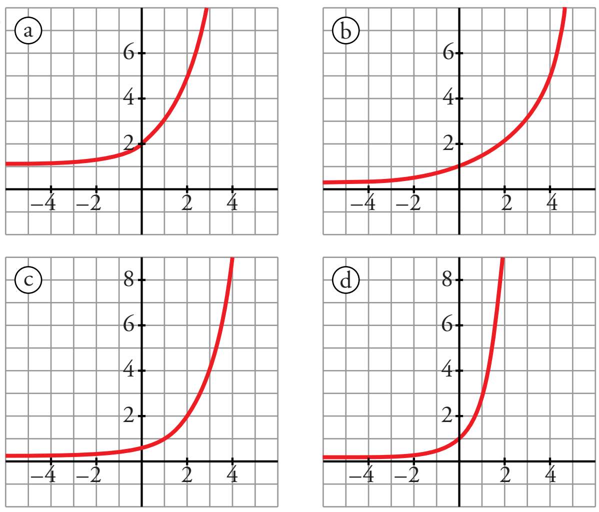
9 **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

I) $y = 3^x$

II) $y = 1{,}5^x$

III) $y = 2^{x-1}$

IV) $y = 2^x + 1$



I) $\to$ d)

II) $\to$ b)

III) $\to$ c)

IV) $\to$ a)

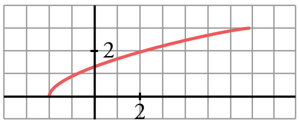
10 **Estudia el dominio de definición de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \sqrt{x+2}$ b) $y = \sqrt{4-x}$

c) $y = \sqrt{2x-5}$ d) $y = 1 + \sqrt{-2x}$

a) $y = \sqrt{x+2}$

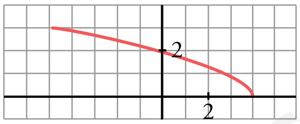
$x + 2 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq -2 \;\rightarrow\;$ Dominio $= [-2, +\infty)$



b) $y = \sqrt{4-x}$

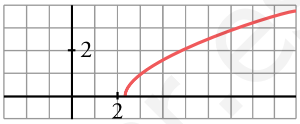
$4 - x \geq 0 \;\rightarrow\; -x \geq -4 \;\rightarrow\; x \leq 4$

Dominio $= (-\infty, 4]$



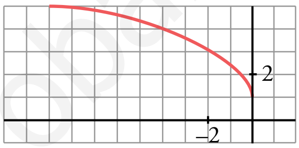
c) $y = \sqrt{2x-5}$

$2x - 5 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq \dfrac{5}{2} \;\rightarrow\;$ Dominio $= \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$



d) $y = 1 + \sqrt{-2x}$

$-2x \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq 0 \;\rightarrow\;$ Dominio $= (-\infty, 0]$



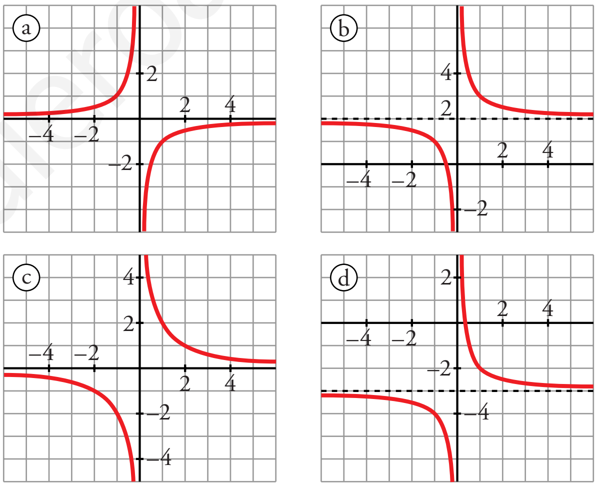
11 **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

I) $y = \dfrac{1}{x} + 2$

II) $y = \dfrac{2}{x}$

III) $y = \dfrac{1}{x} - 3$

IV) $y = -\dfrac{1}{x}$



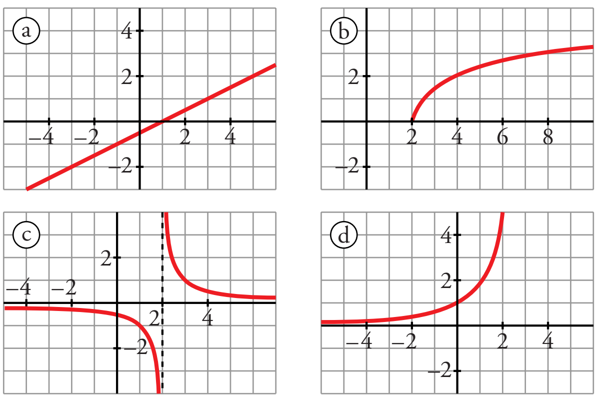
I) $\rightarrow$ b)

II) $\rightarrow$ c)

III) $\rightarrow$ d)

IV) $\rightarrow$ a)

12 **¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $y = \dfrac{1}{x-2}$?**



La función $y = \dfrac{1}{x-2}$ es una hipérbola cuyas asíntotas son el eje de abscisas ($y = 0$) y la recta $x = 2$.

Le corresponde la gráfica c).

PIENSA Y RESUELVE

13 **La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, t, un proyectil que lanzamos verticalmente con una velocidad de 500 m/s, es:**

$$h = 500t - 5t^2$$

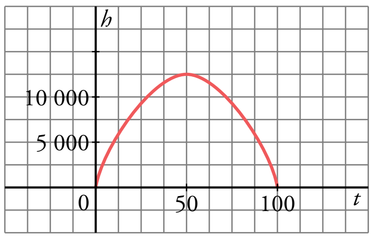
a) Haz una representación gráfica.

b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es ésta?

d) ¿En qué intervalo de tiempo el proyectil está a una altura superior a los 4 500 metros?

a)



b) Dominio = [0, 100]

c) La altura máxima es alcanzada a los 50 segundos, a una altura de 12 500 metros.

d) Queremos saber cuándo $h > 4\,500$ metros:

$$500t - 5t^2 > 4\,500 \;\rightarrow\; -5t^2 + 500t - 4\,500 > 0$$

Resolvemos la ecuación:

$$t = \frac{-500 \pm \sqrt{250\,000 - 90\,000}}{-10} = \frac{-500 \pm \sqrt{160\,000}}{-10} =$$

$$= \frac{-500 \pm 400}{-10} \begin{cases} t = 10 \\ t = 90 \end{cases}$$

Si $t < 10 \;\rightarrow\; -5t^2 + 500t - 4\,500 < 0$

Si $10 < t < 90 \;\rightarrow\; -5t^2 + 500t - 4\,500 > 0$

Si $t > 90 \;\rightarrow\; -5t^2 + 500t - 4\,500 < 0$

Luego, $h > 4\,500$ m en el intervalo (10, 90).

14 **Las ventanas de un edificio de oficinas han de tener $2\ \text{m}^2$ de área.**

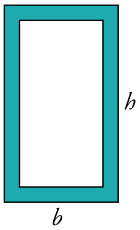
a) Haz una tabla que muestre cómo varía la altura de las ventanas según la longitud de la base.

b) Representa la función *base-altura*.

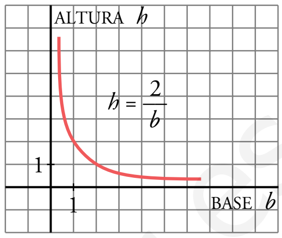
El área de la ventana es: $b \cdot h = 2\ \text{m}^2$

La función que nos da la altura en función de la variación de la base es: $h = \dfrac{2}{b}$

Tabla de valores:



b	h
0,25	8
0,5	4
1	2
1,25	1,6
1,5	$1,\widehat{3}$
1,75	1,14



15 **Con un listón de madera de 3 metros de largo queremos fabricar un marco para un cuadro.**

a) Si la base midiera 0,5 m, ¿cuánto medirían la altura y la superficie del cuadro?

b) ¿Cuál es el valor de la superficie para una base cualquiera x?

c) ¿Para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima?

d) ¿Cuánto vale dicha superficie?

a) $x \rightarrow$ base: $2 \cdot 0{,}5 + 2y = 3 \rightarrow y = 1$

$y \rightarrow$ altura

La altura mediría 1 m.

Área $= x \cdot y = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$. La superficie sería de 0,5 m^2.

b) $2x + 2y = 3 \rightarrow y = \dfrac{3 - 2x}{2}$

Área $= x \cdot y \rightarrow$ Área $= x \cdot \left(\dfrac{3 - 2x}{2}\right)$

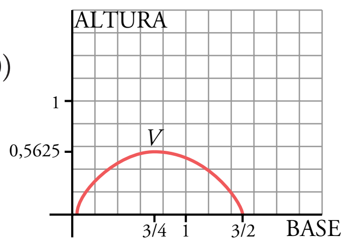
c) y d) Dibujamos la función $y = \dfrac{x(3 - 2x)}{2}$

Puntos de corte:

Eje X: $x(3 - 2x) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 3/2 \rightarrow (3/2, 0) \end{cases}$

Eje Y: $y = 0 \rightarrow (0, 0)$

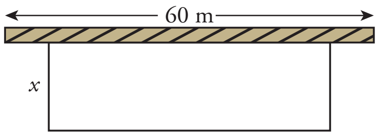
Vértice: $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{9}{16}\right)$



La superficie máxima es $\dfrac{9}{16} = 0{,}5625$ m^2, que corresponde a un marco cuadrado de lado 0,75 m.

Página 160

16 **Con 100 metros de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared de 60 m.**



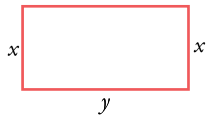
a) Llama x a uno de los lados de la valla. ¿Cuánto valen los otros dos lados?

b) Construye la función que nos da el área. ¿Cuándo se hace máxima y cuánto vale ese máximo?

c) ¿Cuál es su dominio de definición?

a) $2x + y = 100 \;\;\rightarrow\;\; y = 100 - 2x$

El lado de enfrente a la pared mide: $100 - 2x$.



b) Área $= xy \;\;\rightarrow\;\;$ Área $= x(100 - 2x)$

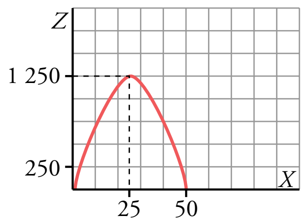
Representamos la función $z = x(100 - 2x)$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $x(100 - 2x) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ m} \\ x = 50 \text{ m} \end{cases}$

Eje Z: $z = 0 \;\;\rightarrow\;\; (0, 0)$

Vértice: (25, 1 250)



Se hace máxima el área cuando: $\begin{cases} x = 25 \text{ m} \\ y = 50 \text{ m} \end{cases}$

El área máxima es de 1 250 m^2

c) Dominio de definición: (0, 50)

17 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

18 **Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$

Resolución analítica

Vemos los puntos de corte:

$2x^2 - 5x - 6 = 3x + 4 \;\rightarrow\; 2x^2 - 8x - 10 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \begin{cases} x = 5 \;\rightarrow\; y = 19 \\ x = -1 \;\rightarrow\; y = 1 \end{cases}$$

Hay dos puntos de corte: (5, 19), (–1, 1).

Resolución gráfica

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = 2x^2 - 5x - 6$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $2x^2 - 5x - 6 = 0 \;\rightarrow$

  $$\rightarrow\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 48}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{4} = \begin{cases} x = \left(\dfrac{5 + \sqrt{73}}{4}, 0\right) \\ x = \left(\dfrac{5 - \sqrt{73}}{4}, 0\right) \end{cases}$$

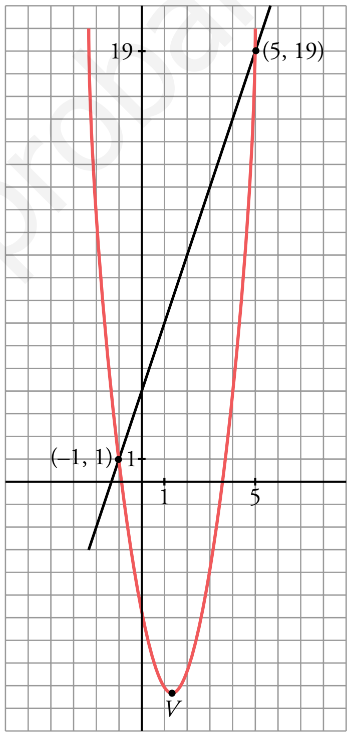
  Eje Y: $y = -6 \;\rightarrow\; (0, -6)$

  Vértice: $\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{73}{8}\right)$

- $y = 3x + 4$

  Hacemos una tabla de valores:

x	–1	5
y	1	19



b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

Resolución analítica

Puntos de corte entre ambas:

$$x^2 - 2x + 1 = -2x + 2 \;\rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm 1 \;\rightarrow\; y = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

Los puntos de corte son: (1, 0), (–1, 4).

Resolución gráfica

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = x^2 - 2x + 1$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $x^2 - 2x + 1 = 0 \ \rightarrow\ x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \ \rightarrow$ raíz doble: $(1, 0)$

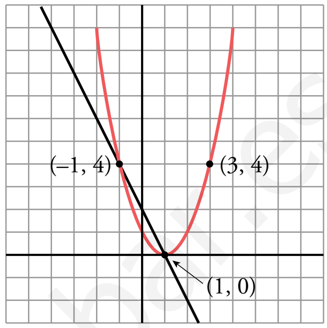
Eje Y: $y = 1 \ \rightarrow\ (0, 1)$

Vértice: $(1, 0)$

- $y = -2x + 2$

Hacemos una tabla de valores:

x	1	–1
y	0	4



19 **El coste por unidad de fabricación de unas pegatinas disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función:**

$$y = \frac{0,5x + 10}{x}$$

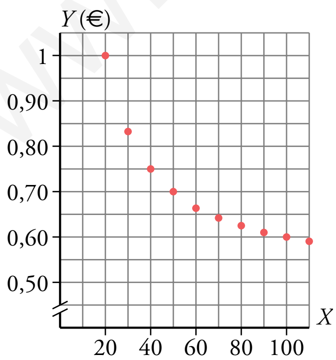
a) Haz la gráfica correspondiente. ¿Se pueden unir los puntos que has representado?

b) ¿Cuál será el coste cuando el número de pegatinas se hace muy grande?

$$y = \frac{0,5x + 10}{x}$$

a) Hacemos la tabla de valores:

x	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y	1	$0,8\overset{\frown}{3}$	0,75	0,7	$0,\overset{\frown}{6}$	0,64	0,625	$0,6\overset{\frown}{1}$	0,6



No se pueden unir los puntos, ya que el número de pegatinas es un número entero (y positivo).

b) Hacemos una tabla de valores con el número de pegatinas muy alto:

x	1 000	10 000	100 000	1 000 000
y	0,51	0,501	0,5001	0,50001

El coste de las pegatinas, si el número de estas es muy grande, es de 50 céntimos por pegatina.

20 **Los gastos anuales de una empresa por la fabricación de x ordenadores son: $G(x) = 20\,000 + 250x$ € y los ingresos que se obtienen por las ventas son: $I = 600x - 0{,}1x^2$ €. ¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?**

La función beneficio es:

$B = I - G = 600x - 0{,}1x^2 - (20\,000 + 250x) \ \rightarrow$

$\rightarrow \ B(x) = -0{,}1x^2 + 350x - 20\,000$

El vértice es el máximo: $V = \dfrac{-350}{-2 \cdot 0{,}1} = 1\,750$

Se deben fabricar 1 750 ordenadores para que el beneficio sea máximo.

21 **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a. b) ¿Es creciente o decreciente? c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\rightarrow$ $3 = ka^0$ $\rightarrow$ $k = 3$

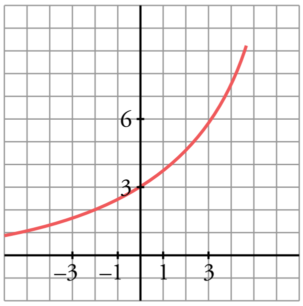
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\rightarrow$ $3{,}6 = ka^1$ $\rightarrow$ $3{,}6 = 3a$ $\rightarrow$ $a = 1{,}2$

Tenemos la función $y = 3 \cdot (1{,}2)^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



22 **La función exponencial $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 2) y (2; 1,28). Calcula k y a y representa la función.**

Si pasa por el punto (0, 2), entonces:

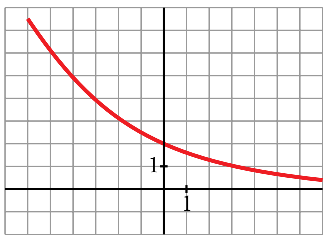
$$2 = k \cdot a^0 \ \rightarrow \ 2 = k$$

Si pasa por el punto (2; 1,28), entonces:

$1{,}28 = k \cdot a^2 \ \rightarrow \ 1{,}28 = 2a^2 \ \rightarrow \ a^2 = 0{,}64 \ \rightarrow \ a = 0{,}8$

La función es: $y = 2 \cdot (0{,}8)^x$

x	y
–3	3,906
–2	3,125
–1	2,5
0	2
1	1,6
2	1,28
3	1,024



23 **Llamamos inflación a la pérdida de valor del dinero; es decir, si un artículo que costó 100 € al cabo de un año cuesta 115 €, la inflación habrá sido del 15%.**

Supongamos una inflación constante del 15% anual. ¿Cuánto costará dentro de 5 años un terreno que hoy cuesta 50 000 euros?

$P = 50\,000 \cdot (1{,}15)^5 = 100\,567{,}86$ € costará el terreno dentro de cinco años.

24 **En el contrato de alquiler de un apartamento figura que el precio subirá un 5% anual.**

Si el precio era de 250 € mensuales, ¿cuál será dentro de 5 años?

Escribe la función que da el precio del alquiler según los años transcurridos.

$P_5 = 250 \cdot (1{,}05)^5 = 319{,}07$ € pagará dentro de cinco años.

La función que relaciona el precio del alquiler con los años transcurridos es $P = 250 \cdot 1{,}05^t$.

Página 161

25 **Una furgoneta que costó 20 000 € se deprecia a un ritmo de un 12% anual. ¿Cuál será su precio dentro de 4 años?**

Halla la función que da el precio del vehículo según los años transcurridos, y calcula cuánto tiempo tardará el precio en reducirse a la mitad.

$P_4 = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}12)^4 = 20\,000 \cdot 0{,}88^4 \approx 11\,993{,}90$ €

$P = 20\,000 \cdot 0{,}88^t$

Si el precio final es de 10 000 euros:

$10\,000 = 20\,000 \cdot 0{,}88^t \;\rightarrow\; 0{,}5 = 0{,}88^t \;\rightarrow\; t \approx 5{,}4$ años

26 **En un bosque en etapa de crecimiento se mide el volumen de madera y se obtiene 10 250 m³. Se observa que el bosque crece a un ritmo de un 2% anual.**

a) ¿Cuánta madera tendrá dentro de 10 años?

b) ¿Cuál es la función que da la cantidad de madera según los años transcurridos, suponiendo que se mantenga el ritmo de crecimiento?

a) $V = 10\,250 \cdot (1{,}02)^{10} = 12\,494{,}7$ m³ de madera habrá dentro de diez años.

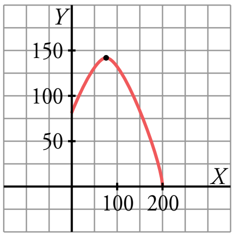
b) $V = 10\,250 \cdot (1{,}02)^t$

27 **Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderían a 0,40 €/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg y el precio aumenta 0,01 €/kg.**

¿Cuándo hemos de vender las naranjas para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

La función que representa el coste de todas las naranjas en función del número de días que ha pasado es: $y = (200 - x)(0{,}4 + 0{,}01x)$

Dibujamos esta función y vemos cuál es su máximo:



$V = (80, 144)$

Se han de vender dentro de 80 días, y el beneficio será de 144 €.

28 **a) Estudia, sobre la gráfica de la función $y = x^2 - 4x - 5$, para qué valores de x se verifica $x^2 - 4x - 5 > 0$.**

b) ¿Qué valores de x cumplirán la desigualdad $x^2 - 4x - 5 \le 0$?

a) Representamos la parábola $y = x^2 - 4x - 5$.

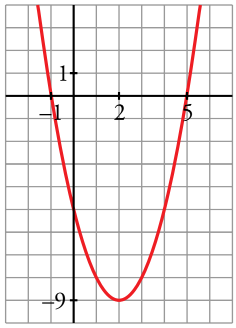
Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $y = 0 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \rightarrow (5, 0) \\ x_2 = -1 \rightarrow (-1, 0) \end{cases}$$

Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -5 \rightarrow (0, -5)$

Vértice: $(2, -9)$



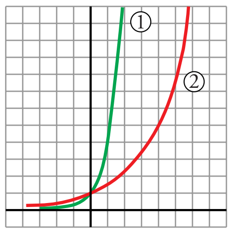
$x^2 - 4x - 5 > 0$ es el intervalo que queda por encima del eje X.

Luego $x^2 - 4x - 5 > 0$ ocurre en $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

b) $x^2 - 4x - 5 \le 0$ es el intervalo de la gráfica que queda por debajo del eje X; luego $x^2 - 4x - 5 \le 0$ ocurre en $[-1, 5]$.

29 **La expresión analítica de estas dos gráficas es de la forma $y = a^x$. Di el valor de a en cada una de ellas.**

(En los ejes se ha tomado la misma escala).



1) $a = 4 \rightarrow y = 4^x$

2) $a = 1{,}5 \rightarrow y = 1{,}5^x$

30 **Todas las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ pasan por un mismo punto. Di cuál es y justifícalo. ¿En qué casos la función es decreciente?**

Todas las exponenciales de este tipo pasan por el punto $(0, 1)$ porque cualquier número elevado a cero es uno.

La función es decreciente cuando $0 < a < 1$.

31 Calcula b para que el vértice de la parábola $y = x^2 + bx + 10$ esté en el punto (3, 1). ¿Cuál es su eje de simetría? ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

La abscisa del vértice es: $V_a = \frac{-b}{2a}$. En este caso: $a = 1$, $V_a = 3$.

$3 = \frac{-b}{2 \cdot 1} \rightarrow b = -6$

El eje de simetría es la recta $x = 3$.

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $x^2 - 6x + 10 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = 10 \rightarrow$ El punto de corte con el eje Y es el punto (0, 10).

32 ¿Cuánto debe valer k para que la parábola $y = 4x^2 - 20x + k$ tenga un solo punto de corte con el eje de abscisas? ¿Para qué valores de k no cortará al eje X?

Para calcular los puntos de corte con el eje X, hacemos:

$4x^2 - 20x + k = 0 \rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 16k}}{8}$

Para que solo haya una solución en esta ecuación:

$400 - 16k = 0 \rightarrow k = \frac{400}{16} = 25$

Solo hay un punto de corte con el eje X si $k = 25$.

$400 - 16k < 0 \rightarrow -16k < -400 \rightarrow k > 25$

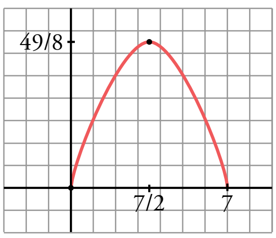
La parábola no corta al eje X si $k > 25$.

33 La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá c? Si, además, sabes que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 6), ¿cómo calcularías a y b? Halla a y b y representa la parábola.

Si pasa por el origen de coordenadas, cuando $x = 0 \rightarrow y = 0$

Por tanto: $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 0$

Por otro lado: $\left.\begin{array}{l} 3 = a + b \\ 6 = 16a + 4b \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} -12 = -4a - 4b \\ 6 = 16a + 4b \\ \hline -6 = 12a \end{array}$ $\rightarrow a = \frac{-1}{2}$



$b = 3 + \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{7}{2}$

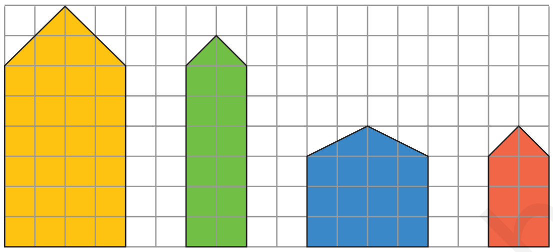
La parábola es: $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x \quad V = \left(\frac{7}{2}, \frac{49}{8}\right)$

Página 175

PRACTICA

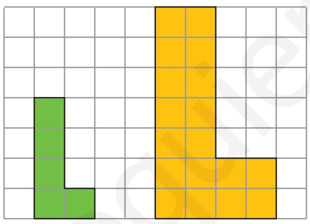
Semejanza de figuras

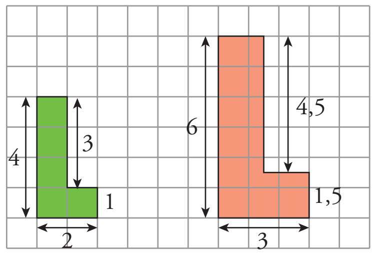
1 **¿Cuáles de estas figuras son semejantes? ¿Cuál es su razón de semejanza?**



La primera y la cuarta son semejantes, porque todos los lados de la primera figura miden el doble de los de la segunda figura.

2 **Copia en una hoja de papel cuadriculado estas dos figuras. Modifica la de la derecha para que sean semejantes.**





La solución no es única.

Estas dos figuras son semejantes, porque:

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{4,5}{3} = \frac{1,5}{1} = 1,5 \to \text{razón de semejanza}$$

3 **En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm.**

a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

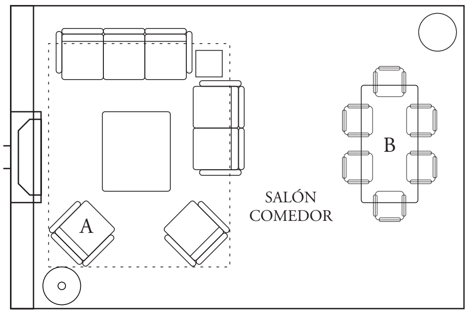
b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades A y B cuya distancia real es 360 km?

a) Como la escala es 1:1 500 000, cada centímetro en el mapa corresponde a 1 500 000 cm en la realidad, que equivalen a 15 km.

2,5 cm en el mapa serán: $2,5 \cdot 15 = 37,5$ km en la realidad.

b) $\dfrac{36\,000\,000}{1\,500\,000} = 24$ cm

4 **En una oficina de venta de pisos han hecho este plano a escala 1/50.**



a) Calcula las dimensiones reales del salón y su área.

b) Halla las dimensiones de la mesa B y del sillón A. ¿Te parecen razonables? ¿Es posible que los vendedores hayan dibujado los muebles para dar la sensación de que la habitación es más grande de lo que realmente es?

a) Cada centímetro del plano equivale a 0,5 m en la realidad.

Dimensiones del salón: $(6 \cdot 0{,}5 \text{ m}) \times (4 \cdot 0{,}5 \text{ m}) = 3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$

Área del salón: 6 m^2

b) Mesa: $(0{,}75 \cdot 0{,}5 \text{ m}) \times (1{,}55 \cdot 0{,}5 \text{ m}) = 0{,}375 \text{ m} \times 0{,}775 \text{ m}$

Podemos considerar (por errores de medición) que la mesa mide:

$0{,}4 \text{ m} \times 0{,}8 \text{ m}$, es decir, $40 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$.

Sillón A: $(0{,}7 \cdot 0{,}5 \text{ m}) \times (0{,}65 \cdot 0{,}5 \text{ m}) = 0{,}35 \text{ m} \times 0{,}325 \text{ m} =$

$= 35 \text{ cm} \times 32{,}5 \text{ cm}$

Las medidas no son razonables en absoluto: un salón de 6 m^2 es una estancia algo pequeña.

En una mesa de $40 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$ no caben, se apoyen como se apoyen, seis comensales y, para finalizar, en un sillón de estas medidas no hay quien se siente.

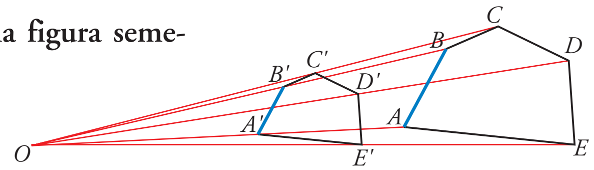
Conclusión: el plano está hecho hábilmente para engañar al comprador.

Construcción de figuras semejantes

5 **La figura *A'B'C'D'E'* se ha construido de modo que sus lados sean paralelos a los correspondientes de *ABCDE* y los vértices correspondientes alineados con *O*.**

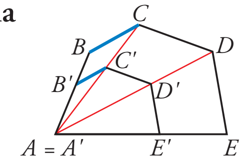
De este modo se obtiene una figura semejante a la que había.

Halla la razón de semejanza.



También procediendo como ves a la derecha se obtiene una figura semejante.

Copia en tu cuaderno el pentágono *ABCDE* y reprodúcelo mediante este método con razón de semejanza 3.



$\overline{OA'} = 3$ cm y $\overline{OA} = 5$ cm, es decir, $\overline{OA} = \frac{5}{3}\,\overline{OA'}$

La razón de semejanza es $\frac{5}{3}$

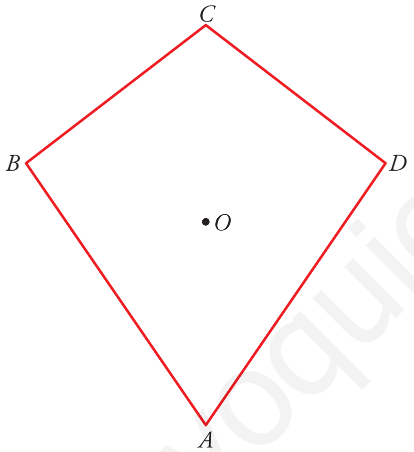
En la segunda figura, el objetivo es conseguir que:

$\overline{AB} = 3\,\overline{A'B'}$ $\quad \overline{AD} = 3\,\overline{A'D'}$

$\overline{AC} = 3\,\overline{A'C'}$ $\quad \overline{AE} = 3\,\overline{A'E'}$

Los segmentos de $A'B'C'D'E'$ son paralelos o coinciden con los de $ABCDE$.

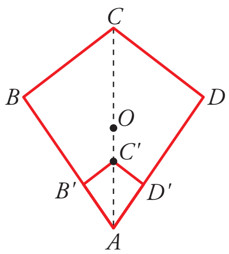
6



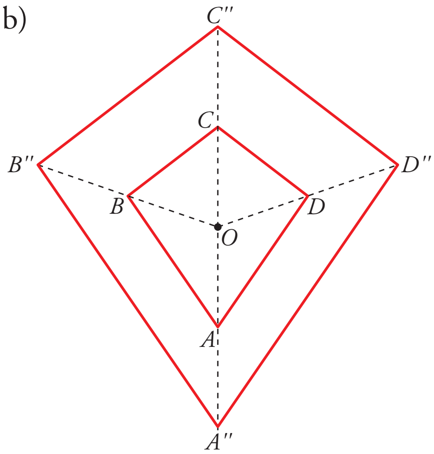
a) **Copia en tu cuaderno esta figura y redúcela a 1/3 de su tamaño tomando *A* como punto de proyección.**

b) **Amplíala al doble tomando *O* como punto de proyección.**

a)



b)



Semejanza de triángulos

7 **Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes y su razón de semejanza es 2/3. Calcula los lados del triángulo $A'B'C'$ si sabemos que:**

$\overline{AB} = 12$ m, $\overline{BC} = 9$ m y $\overline{AC} = 7,5$ m

Si son semejantes se cumple que:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3} \qquad \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \qquad \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{2}{3}$$

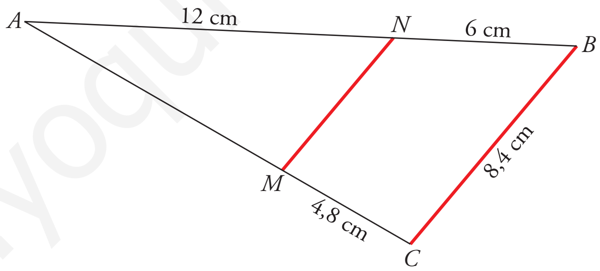
$$\frac{\overline{A'B'}}{12} = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \overline{A'B'} = \frac{12 \cdot 2}{3} = 8 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{B'C'}}{9} = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \overline{B'C'} = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{A'C'}}{7,5} = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \overline{A'C'} = \frac{7,5 \cdot 2}{3} = 5 \text{ m}$$

Página 176

8 **En la figura adjunta, MN es paralelo a BC. Calcula $\overline{AM}$ y $\overline{MN}$.**



Los triángulos ANM y ABC están en posición de Tales.

Tenemos, pues, las siguientes igualdades: $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AN}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AM}}$

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AN}} \;\rightarrow\; \frac{8,4}{\overline{MN}} = \frac{12+6}{12} \;\rightarrow \overline{MN} = \frac{8,4 \cdot 12}{18} = 5,6 \;\rightarrow\; \overline{MN} = 5,6 \text{ cm}$$

Llamamos $x = \overline{AM}$:

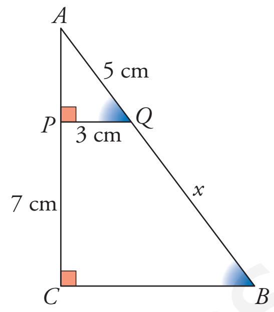
$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AM}} \;\rightarrow\; \frac{8,4}{4,8+x} = \frac{5,6}{x} \;\rightarrow\; 8,4x = 5,6(4,8+x) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 8,4x - 5,6x = 26,88 \;\rightarrow\; x = \frac{26,88}{2,8} = 9,6$$

Luego $\overline{AM} = 9,6$ cm.

9 **a) ¿Por qué son semejantes los triángulos** APQ **y** ACB**?**

b) Calcula $x = \overline{BQ}$**.**



a) El ángulo $\hat{A}$ es común a los dos triángulos y los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{C}$ son rectos, luego los ángulos $\hat{Q}$ y $\hat{B}$ son iguales. Por lo tanto, ambos triángulos son semejantes.

b) Por ser triángulos semejantes: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$

Calculamos $\overline{AP}$ aplicando el teorema de Pitágoras:

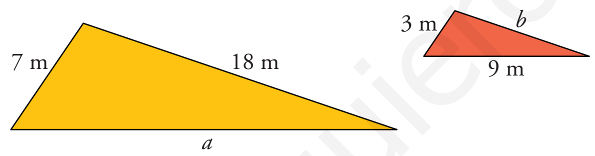
$$\overline{AP} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$\overline{AC} = \overline{AP} + \overline{PC} = 4 + 7 \;\rightarrow\; \overline{AC} = 11 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} \;\rightarrow\; \frac{11}{4} = \frac{5+x}{5} \;\rightarrow\; 55 = 20 + 4x \;\rightarrow\; x = \frac{35}{4} = 8{,}75$$

$x = 8{,}75$ cm

10



Estos dos triángulos tienen sus lados paralelos. ¿Cuánto miden los lados a **y** b**?**

Como los lados respectivos son paralelos:

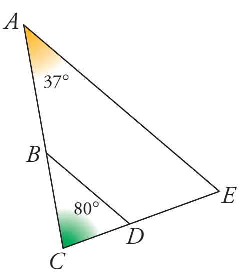
$$\hat{A} = \hat{A}', \;\; \hat{B} = \hat{B}', \;\; \hat{C} = \hat{C}'$$

y los triángulos son semejantes.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}} \;\rightarrow\; \frac{a}{7} = \frac{9}{3} \;\rightarrow\; a = \frac{9 \cdot 7}{3} = 21 \text{ m} \;\rightarrow\; a = 21 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}} \;\rightarrow\; \frac{21}{18} = \frac{9}{b} \;\rightarrow\; b = \frac{18 \cdot 9}{21} = 7{,}71 \text{ m} \;\rightarrow\; b = 7{,}71 \text{ m}$$

11 **Si** BD **es paralelo a** AE**, y** $\overline{AC} = 15$ **cm,** $\overline{CE} = 11$ **cm,** $\overline{BD} = 6{,}4$ **cm:**



a) Calcula $\overline{CD}$**.**

b) ¿Podemos saber cuánto vale $\overline{AE}$ **sin medirlo directamente?**

c) Si $\hat{A} = 37°$ **y** $\hat{C} = 80°$**, calcula** $\hat{E}$**,** $\hat{B}$ **y** $\hat{D}$**.**

Los triángulos ACE y BCD son semejantes, luego:

a) $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \rightarrow \dfrac{11}{15} = \dfrac{\overline{BD}}{6,4} \rightarrow \overline{CD} = \dfrac{11 \cdot 6,4}{15} = 4,7$ cm

b) No se puede.

c) $\hat{A} = 37°$, $\hat{C} = 80°$

$\hat{E} = 180° - 37° - 80° = 63°$

$\hat{B} = \hat{A} = 37°$

$\hat{D} = \hat{E} = 63°$

12 **Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del primero es 26 cm². ¿Cuál es el área del segundo?**

Si la razón de semejanza entre dos triángulos es k, la razón entre sus áreas es k^2.

Razón entre áreas $= \left(\dfrac{13,6}{8}\right)^2 = (1,7)^2 = 2,89$

$A_{primero} = 26 \text{ cm}^2 \rightarrow \dfrac{A'}{26} = 2,89 \rightarrow A' = 2,89 \cdot 26 = 75,14 \text{ cm}^2$

El área del segundo triángulo mide 75,14 cm².

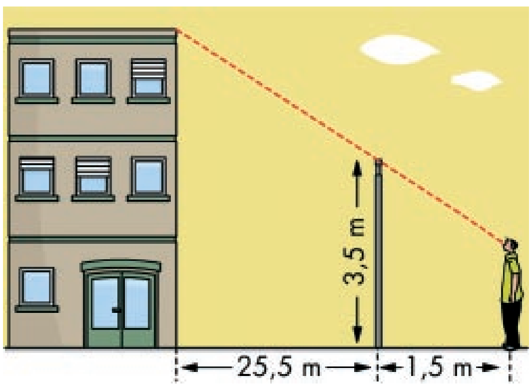
13 **Di cuál es la relación entre los radios de dos círculos si la razón entre sus áreas es 16/9.**

$\dfrac{A}{A'} = \dfrac{16}{9} \rightarrow \dfrac{R}{r} = \sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}$

Aplicaciones de la semejanza

14 **Para medir la altura de la casa, Álvaro, de 165 cm de altura, se situó a 1,5 m de la verja y tomó las medidas indicadas.**

¿Cuánto mide la casa?



$a = 3,5 - 1,65 = 1,85$ m

$\dfrac{25,5 + 1,5}{1,5} = \dfrac{h}{1,85} \rightarrow h = \dfrac{27 \cdot 1,85}{1,5} = 33,3$ m

La altura de la casa es:

$$33,3 + 1,65 = 34,95 \text{ m}$$

15 Dibuja un triángulo y, desde cada vértice, traza una recta paralela al lado opuesto. Así obtendrás un nuevo triángulo más grande.

a) Justifica por qué es semejante al inicial.

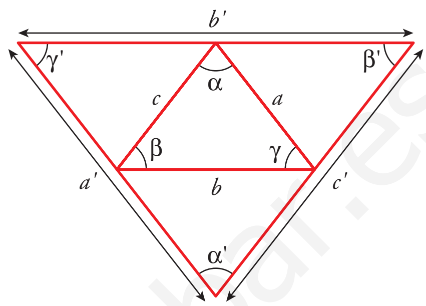
b) ¿Cuál es la razón entre las áreas?

a) Como $a // a'$ y $b // b'$, entonces $\alpha = \alpha'$.

Como $b // b'$ y $c // c'$, entonces $\beta = \beta'$.

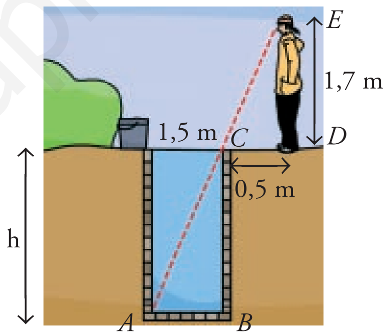
Por tanto, $\gamma = \gamma'$.

Los tres ángulos del triángulo grande son iguales a los respectivos del triángulo pequeño. Ambos triángulos son semejantes.



b) Si la razón entre los lados es k, la razón entre las áreas es k^2.

16 ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,5 m y alejándote 0,5 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?



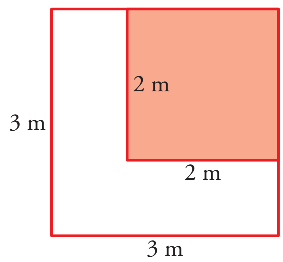
Los triángulos ABC y CDE son semejantes.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} \rightarrow \frac{1,5}{h} = \frac{0,5}{1,7} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{1,7 \cdot 1,5}{0,5} = 5,1 \text{ m}$$

La profundidad del pozo es 5,1 m

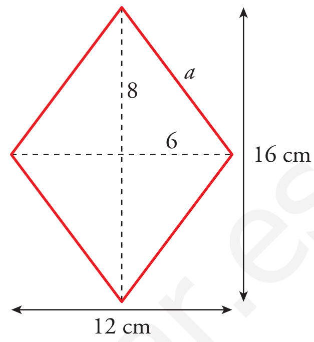
17 Si una plancha cuadrada de plástico de 3 m de lado pesa 12 kg, ¿cuánto pesará otra plancha, de igual material y grosor, de 2 m de lado?



Razón de semejanza: $\frac{2}{3}$ $\rightarrow$ Razón entre áreas: $\frac{4}{9}$

$\frac{4}{9} \cdot 12$ kg $\approx 5,3$ kg pesa la plancha de 2 m de lado.

18 **Las diagonales de un rombo miden 12 cm y 16 cm. Halla el área de otro rombo semejante al primero, cuyo perímetro sea igual a 1 m.**



$a = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm

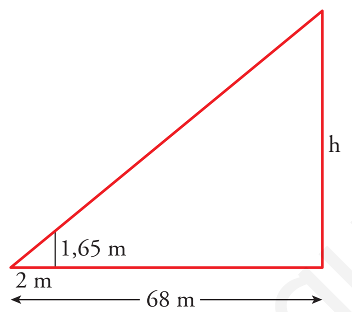
$\left.\begin{array}{l} P = 40 \text{ cm} \\ P' = 100 \text{ cm} \end{array}\right\}$ Razón $= \dfrac{40}{100} = 0{,}4$

$A = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{192}{2} = 96 \text{ cm}^2$

Razón entre áreas $= (0{,}4)^2 = 0{,}16$

$\dfrac{96}{A'} = 0{,}16 \to A' = \dfrac{96}{0{,}16} = 600 \text{ cm}^2$

19 **¿Cuál es la altura de una casa que proyecta una sombra de 68 m, al mismo tiempo que una persona de 1,65 m de altura proyecta una sombra de 2 m?**



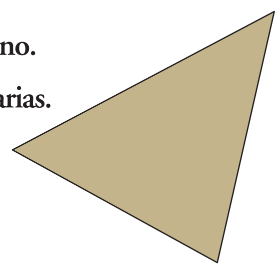
$\dfrac{68}{h} = \dfrac{2}{1{,}65} \to h = 56{,}1$ m

La casa tiene una altura de 56,1 m.

Página 177

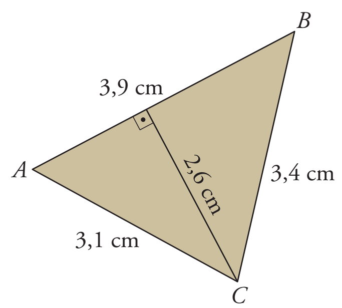
20 **Esta figura representa, a escala 1:3 500, una parcela de terreno.**

Calcula su perímetro y su área, tomando las medidas necesarias.



Tomamos las medidas sobre el plano de la parcela:

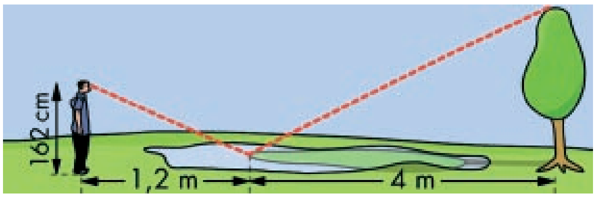
	MEDIDA EN EL PLANO	MEDIDA REAL
$\overline{AB}$	3,9 cm	136,5 m
$\overline{BC}$	3,4 cm	119 m
$\overline{AC}$	3,1 cm	108,5 m
h	2,6 cm	91 m



Perímetro = 364 m

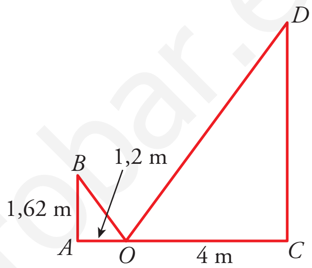
Área $= \dfrac{\overline{AB} \cdot h}{2} = 6\,210{,}75 \text{ m}^2$

21 **Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?**



Ambos triángulos son semejantes:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{4}{1,2} \rightarrow \overline{CD} = \frac{4 \cdot 1,62}{1,2} = 5,4$$



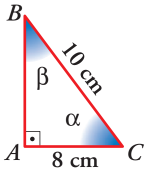
La altura del árbol es de 5,4 m.

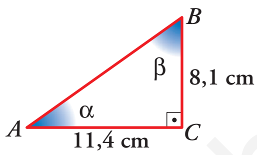
Página 187

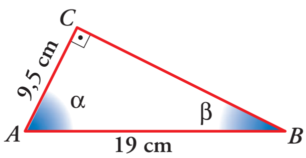
PRACTICA

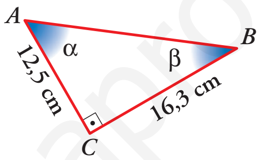
Razones trigonométricas de un ángulo

1 Halla las razones trigonométricas de los ángulos α y β en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos. Previamente, calcula la longitud del lado que falta.

a) 

b) 

c) 

d) 

a) $\overline{AB} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ cm

$sen\ \alpha = \dfrac{6}{10} = 0,6 \qquad sen\ \beta = \dfrac{8}{10} = 0,8$

$cos\ \alpha = \dfrac{8}{10} = 0,8 \qquad cos\ \beta = \dfrac{6}{10} = 0,6$

$tg\ \alpha = \dfrac{6}{8} = 0,75 \qquad tg\ \beta = \dfrac{8}{6} = 1,\widehat{3}$

b) $\overline{AB} = \sqrt{8,1^2 + 11,4^2} = \sqrt{195,57} \approx 13,98$ cm

$sen\ \alpha = \dfrac{8,1}{13,98} \approx 0,58 \qquad sen\ \beta = \dfrac{11,4}{13,98} \approx 0,82$

$cos\ \alpha = \dfrac{11,4}{13,98} \approx 0,82 \qquad cos\ \beta = \dfrac{8,1}{13,98} \approx 0,58$

$tg\ \alpha = \dfrac{8,1}{11,4} \approx 0,71 \qquad tg\ \beta = \dfrac{11,4}{8,1} \approx 1,41$

c) $\overline{BC} = \sqrt{19^2 - 9,5^2} = \sqrt{270,75} \approx 16,45$ cm

$sen\ \alpha = \dfrac{16,45}{19} \approx 0,87 \qquad sen\ \beta = \dfrac{9,5}{19} \approx 0,5$

$cos\ \alpha = \dfrac{9,5}{19} \approx 0,5 \qquad cos\ \beta = \dfrac{16,45}{19} \approx 0,87$

$tg\ \alpha = \dfrac{16,45}{9,5} \approx 1,73 \qquad tg\ \beta = \dfrac{9,5}{16,45} \approx 0,58$

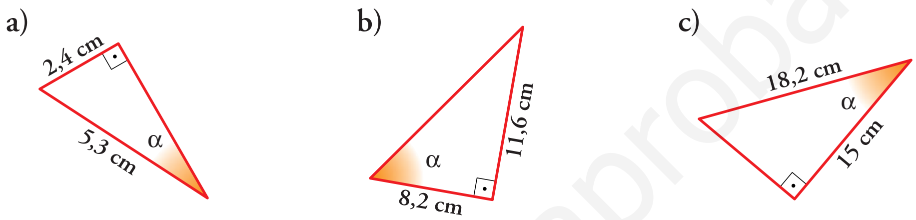
d) $\overline{AB} = \sqrt{12{,}5^2 + 16{,}3^2} = \sqrt{421{,}94} \approx 20{,}54$ cm

$sen\ \alpha = \dfrac{16{,}3}{20{,}54} \approx 0{,}79 \qquad sen\ \beta = \dfrac{12{,}5}{20{,}54} \approx 0{,}61$

$cos\ \alpha = \dfrac{12{,}5}{20{,}54} \approx 0{,}61 \qquad cos\ \beta = \dfrac{16{,}3}{20{,}54} \approx 0{,}79$

$tg\ \alpha = \dfrac{16{,}3}{12{,}5} \approx 1{,}304 \qquad tg\ \beta = \dfrac{12{,}5}{16{,}3} \approx 0{,}77$

2 **Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:**



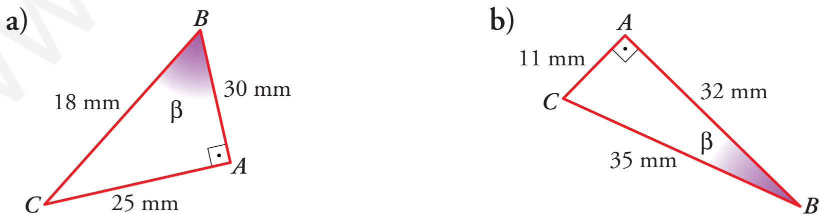
a) $sen\ \alpha = \dfrac{2{,}4}{5{,}3} = 0{,}45 \qquad cos\ \alpha = \sqrt{1 - 0{,}45^2} = 0{,}89 \qquad tg\ \alpha = \dfrac{0{,}45}{0{,}89} = 0{,}5$

b) $tg\ \alpha = \dfrac{11{,}6}{8{,}2} = 1{,}41$ La hipotenusa h es: $h = \sqrt{11{,}6^2 + 8{,}2^2} = 14{,}2$

$sen\ \alpha = \dfrac{11{,}6}{14{,}2} = 0{,}82 \qquad cos\ \alpha = \dfrac{8{,}2}{14{,}2} = 0{,}58$

c) $cos\ \alpha = \dfrac{15}{18{,}2} = 0{,}82 \qquad sen\ \alpha = \sqrt{1 - (0{,}82)^2} = 0{,}57 \qquad tg\ \alpha = \dfrac{0{,}57}{0{,}82} = 0{,}69$

3 **Midiendo, calcula las razones de β:**

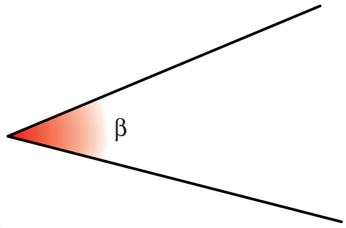


a) $sen\ \beta = \dfrac{25}{30} = 0{,}8\widehat{3} \qquad$ b) $sen\ \beta = \dfrac{11}{35} \approx 0{,}31$

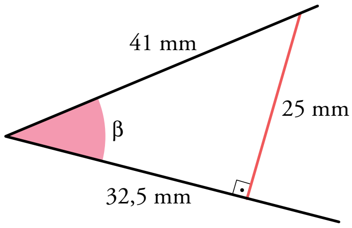
$cos\ \beta = \dfrac{18}{30} = 0{,}6 \qquad cos\ \beta = \dfrac{32}{35} \approx 0{,}91$

$tg\ \beta = \dfrac{28}{18} = 1{,}3\widehat{8} \qquad tg\ \beta = \dfrac{11}{32} \approx 0{,}34$

4 **Calcula las razones trigonométricas de β:**



☛ *Construye un triángulo trazando una perpendicular a uno de los lados.*



$sen\ \beta = \dfrac{25}{41} = 0{,}61$

$cos\ \beta = \dfrac{32{,}5}{41} = 0{,}79$

$tg\ \beta = \dfrac{25}{32{,}5}\ 0{,}77$

5 **Obtén con la calculadora** ***sen, cos*** **y** ***tg*** **de los siguientes ángulos:**

a) 19° **b)** 32° **c)** 48°

d) 64,5° **e)** 70° 30' **f)** 83° 50'

a) *sen* 19° = 0,325568154

cos 19° = 0,945518575

tg 19° = 0,344327613

b) *sen* 32° = 0,529919264

cos 32° = 0,848048096

tg 32° = 0,624869351

c) *sen* 48° = 0,743144825

cos 48° = 0,669130606

tg 48° = 1,110612515

d) *sen* 64,5° = 0,902585284

cos 64,5° = 0,430511096

tg 64,5° = 2,096543599

e) La forma de introducir 70°30' en la calculadora es con la tecla [° ' ''] → 70 [° ' ''] 30 [° ' ''] y aparecerá 70,5.

sen 70° 30' = 0,942641491

cos 70° 30' = 0,333806859

tg 70° 30' = 2,823912886

f) *sen* 83° 50' = 0,994213627

cos 83° 50' = 0,107420963

tg 83° 50' = 9,255303595

6 **Utiliza la calculadora para hallar el ángulo α en cada caso:**

a) $sen\ \alpha = 0{,}45$ b) $cos\ \alpha = 0{,}8$ c) $tg\ \alpha = 2{,}5$

a) $sen\ \alpha = 0{,}45 \to$ INV sin 0,45 26.74368395 INV °'" 26° 44' 37"

Luego $\alpha = 26°\ 44'\ 37''$

b) $cos\ \alpha = 0{,}8 \to$ INV cos 0,8 36.86989765 INV °'" 36° 52' 11,6"

Luego $\alpha = 36°\ 52'\ 11{,}6''$

c) $tg\ \alpha = 2{,}5 \to$ INV tan 2,5 68.19859051 INV °'" 68° 11' 55"

Luego $\alpha = 68°\ 11'\ 55''$

Relaciones fundamentales

7 **Si $sen\ 67° = 0{,}92$, halla $cos\ 67°$ y $tg\ 67°$ utilizando las relaciones fundamentales.**

$(cos\ 67°)^2 + (sen\ 67°)^2 = 1 \to cos\ 67° = \sqrt{1 - (0{,}92)^2} = \sqrt{0{,}1536} \approx 0{,}39$

$$tg\ 67° = \frac{sen\ 67°}{cos\ 67°} = \frac{0{,}92}{0{,}36} \approx 2{,}36$$

Luego, $cos\ 67° \approx 0{,}36$ y $tg\ 67° \approx 2{,}36$

8 **Si $sen\ \alpha = 3/5$, calcula $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ utilizando las relaciones fundamentales ($\alpha < 90°$).**

$$sen\ \alpha = \frac{3}{5} \quad (\alpha < 90°)$$

$$cos\ \alpha = \sqrt{1 - (sen\ \alpha)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \to cos\ \alpha = \frac{4}{5}$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \to tg\ \alpha = \frac{3}{4}$$

9 **Halla el valor exacto de $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$ sabiendo que $tg\ \alpha = 2$.**

Llamamos $s = sen\ \alpha$ y $c = cos\ \alpha$

$$\frac{s}{c} = 2 \to s = 2c$$

$$s^2 + c^2 = 1 \to (2c)^2 + c^2 = 1 \to 4c^2 + c^2 = 1 \to 5c^2 = 1 \to c^2 = \frac{1}{5} \to$$

$$\to c = \frac{1}{\sqrt{5}} \to c = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ y } s = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Luego, $cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ y $sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

10 Completa esta tabla:

sen **α**	**0,92**	0,6	0,99	$\sqrt{5}/3$	**0,2**	$\sqrt{3}/2$
cos **α**	0,39	0,8	**0,12**	2/3	0,98	**1/2**
tg **α**	2,35	**0,75**	8,27	$\sqrt{5}$ **/2**	0,2	$\sqrt{3}$

En todos los casos solo tomaremos valores positivos.

- $sen\ \alpha = 0{,}92 \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1-(0{,}92)^2} = 0{,}39$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}35$

- $tg\ \alpha = 0{,}75$

  $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 0{,}75 \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}75 \cdot cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow (0{,}75 \cdot cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow$

  $\rightarrow (cos\ \alpha)^2 = 0{,}64 \rightarrow cos\ \alpha = 0{,}8$

  $sen\ \alpha = 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6$

- $cos\ \alpha = 0{,}12 \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1-(0{,}12)^2} = 0{,}99$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}99}{0{,}12} = 8{,}27$

- $tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

  $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\ cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$

  $\dfrac{5}{4}(cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow \dfrac{9}{4}(cos\ \alpha)^2 = 1$

  $(cos\ \alpha)^2 = \dfrac{4}{9} \rightarrow cos\ \alpha = \dfrac{2}{3}$

  $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

- $sen\ \alpha = 0{,}2 \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1-0{,}2^2} = 0{,}98$

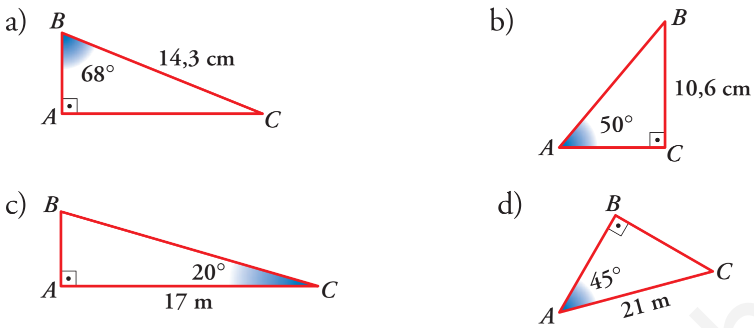
  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}2}{0{,}98} = 0{,}2$

- $cos\ \alpha = \dfrac{1}{2} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} \rightarrow sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  $tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

Resolución de triángulos rectángulos

11 **Calcula los lados y el ángulo desconocido en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:**



a) $\hat{C} = 90° - 68° \rightarrow \hat{C} = 22°$

$sen\ 68° = \dfrac{\overline{AC}}{14{,}3} \rightarrow \overline{AC} = 14{,}3 \cdot sen\ 68° \approx 13{,}26$ cm

$\overline{AC} \approx 13{,}26$ cm

$cos\ 68° = \dfrac{\overline{BA}}{14{,}3} \rightarrow \overline{BA} = 14{,}3 \cdot cos\ 68° \approx 5{,}36$ m $\rightarrow \overline{BA} \approx 5{,}36$ m

b) $\hat{B} = 90° - 50° \rightarrow \hat{B} = 40°$

$sen\ 50° = \dfrac{10{,}6}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \dfrac{10{,}6}{sen\ 50°} \approx 13{,}84$ cm

$\overline{AB} \approx 13{,}84$ cm

$tg\ 50° = \dfrac{10{,}6}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AC} = \dfrac{10{,}6}{tg\ 50°} \approx 8{,}89$ m $\rightarrow \overline{AC} \approx 8{,}89$ m

c) $\hat{B} = 90° - 20° \rightarrow \hat{B} = 70°$

$cos\ 20° = \dfrac{17}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \dfrac{17}{cos\ 20°} \approx 18{,}09$ cm

$\overline{BC} \approx 18{,}09$ cm

$tg\ 20° = \dfrac{\overline{AB}}{17} \rightarrow \overline{AB} = 17 \cdot tg\ 20° \approx 6{,}19$ m $\rightarrow \overline{AB} \approx 6{,}19$ m

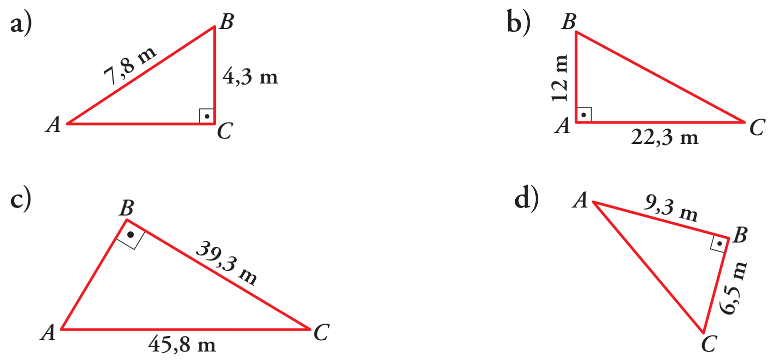
d) $\hat{C} = 90° - 45° \rightarrow \hat{C} = 45°$ (Triángulo isósceles)

$sen\ 45° = \dfrac{\overline{BC}}{21} \rightarrow \overline{BC} = 21 \cdot sen\ 45° \approx 14{,}85$ cm

$\overline{BC} \approx 14{,}85$ cm

Por ser isósceles, $\overline{AB} = \overline{BC} \rightarrow \overline{AB} \approx 14{,}85$ m

12 **Halla los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos:**



a) $sen\ \hat{A} = \dfrac{4,3}{7,8} \approx 0,55 \ \rightarrow\ \hat{A} \approx 33,37° \ \rightarrow\ \hat{A} \approx 33°\ 22'\ 12''$

$\hat{B} = 90 - \hat{A} = 90° - 33,37° = 56,63° \ \rightarrow\ \hat{B} = 56°\ 37'\ 48''$

b) $tg\ \hat{C} = \dfrac{12}{22,3} \approx 0,54 \ \rightarrow\ \hat{C} \approx 28,37° \ \rightarrow\ \hat{C} \approx 28°\ 22'\ 12''$

$\hat{B} = 90 - \hat{C} = 90° - 28,37° = 61,63° \ \rightarrow\ \hat{B} = 61°\ 37'\ 48''$

c) $cos\ \hat{C} = \dfrac{39,3}{45,8} \approx 0,86 \ \rightarrow\ \hat{C} \approx 30,68° \ \rightarrow\ \hat{C} \approx 30°\ 40'\ 48''$

$\hat{A} = 90 - \hat{C} = 90° - 30,68° = 59,32° \ \rightarrow\ \hat{A} = 59°\ 19'\ 12''$

d) $tg\ \hat{C} = \dfrac{9,3}{6,5} \approx 1,43 \ \rightarrow\ \hat{C} \approx 55,03° \ \rightarrow\ \hat{C} \approx 55°\ 1'\ 48''$

$\hat{A} = 90 - \hat{C} = 90° - 55,03° = 34,97° \ \rightarrow\ \hat{A} = 34°\ 58'\ 12''$

Página 188

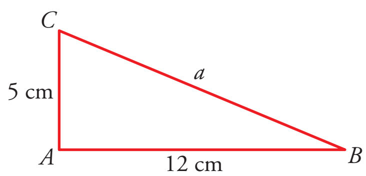
13 **Halla la medida de los lados y ángulos desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A}$ = 90°):**

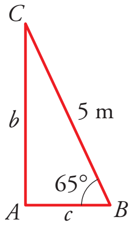
a) b = 5 cm	c = 12 cm	Calcula a, $\hat{B}$ y $\hat{C}$
b) c = 43 m	$\hat{C}$ = 37°	Calcula a, b y $\hat{B}$
c) b = 7 m	$\hat{C}$ = 49°	Calcula a, c y $\hat{B}$
d) a = 5 m	$\hat{B}$ = 65°	Calcula b, c y $\hat{C}$

a) $a = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ cm

$sen\ \hat{B} = \dfrac{5}{13} = 22,62 \ \rightarrow\ \hat{B} = 22°\ 37'\ 11''$

$\hat{C} = 90° - 22,62 = 67,38 = 67°\ 22'\ 48''$



b) 

$\hat{B} = 90° - 37° = 53°$

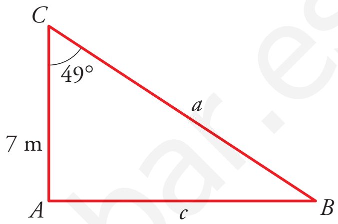
$cos\ \hat{B} = \dfrac{43}{a} \rightarrow cos\ 53° = \dfrac{43}{a} \rightarrow a = \dfrac{43}{cos\ 53°} = 71{,}45$ m

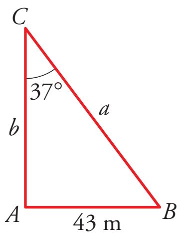
$tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{43} \rightarrow b = 43 \cdot tg\ 53° = 57{,}06$ m

c) $\hat{B} = 90 - 49 = 41°$

$cos\ \hat{C} = \dfrac{7}{a} \rightarrow a = \dfrac{7}{cos\ 49°} = 10{,}67$ m

$sen\ \hat{C} = \dfrac{c}{10{,}67} \rightarrow c = 10{,}67 \cdot sen\ \hat{C} = 8{,}05$ m



d) 

$\hat{C} = 90° - 65° = 25°$

$sen\ 65° = \dfrac{b}{5} \rightarrow b = 5\ sen\ 65° = 4{,}53$ m

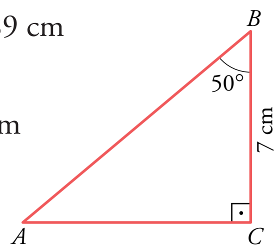
$cos\ 65° = \dfrac{c}{5} \rightarrow c = 5\ cos\ 65° = 2{,}11$ m

14 **En un triángulo rectángulo, *ABC*, con el ángulo recto en *C*, conocemos $\hat{B} = 50°$ y el cateto $\overline{BC} = 7$ cm. Calcula $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\hat{A}$.**

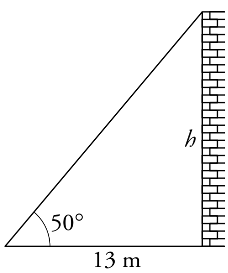
$cos\ \hat{B} = \dfrac{7}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \dfrac{7}{cos\ 50°} = 10{,}89 \rightarrow \overline{AB} = 10{,}89$ cm

$tg\ \hat{B} = \dfrac{\overline{AC}}{7} \rightarrow \overline{AC} = 7 \cdot tg\ \hat{B} = 8{,}34 \rightarrow \overline{AC} = 8{,}34$ cm

$\hat{A} = 180° - 90° - 50° = 40° \rightarrow \hat{A} = 40°$



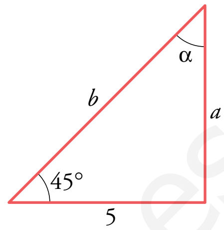
15 **Calcula la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50° con el suelo.**



$tg\ 50° = \dfrac{h}{13} \rightarrow h = 13 \cdot tg\ 50° \rightarrow h = 15{,}49$ m

La torre mide 15,49 m de altura.

16 **De un triángulo rectángulo se sabe que un ángulo mide 45° y uno de sus catetos 5 cm. ¿Cuánto miden el otro cateto, la hipotenusa y el otro ángulo agudo?**

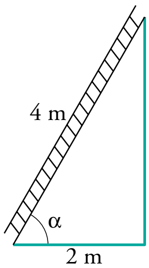


$tg\ 45° = \frac{a}{5} \ \rightarrow\ 1 = \frac{a}{5} \ \rightarrow\ a = 5$ cm

$b = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}1$ cm; $a = 90° - 45° = 45°$

El otro cateto mide 5 cm, la hipotenusa 7,1 cm y el ángulo 45°.

17

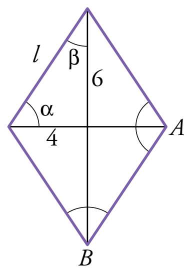


Una escalera de 4 m está apoyada contra la pared. ¿Cuál será su inclinación si su base dista 2 m de la pared?

$cos\ \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \ \rightarrow\ \alpha = 60°$

La inclinación de la escalera es de 60° respecto del suelo.

18 **Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 8 cm, respectivamente. ¿Cuánto mide el lado del rombo?**



$tg\ \alpha = \frac{6}{4} \ \rightarrow\ \alpha = 56{,}3° \ \rightarrow\ \beta = 90 - 56{,}3 = 33{,}7°$

Los ángulos del rombo son:

$\hat{A} = 56{,}3 \cdot 2 = 112{,}6°$; $\hat{B} = 33{,}7 \cdot 2 = 67{,}4°$

$l = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = 7{,}21$ cm

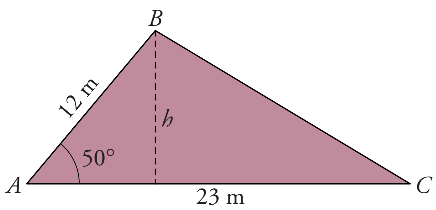
El lado del rombo mide 7,21 cm.

19 **En el triángulo *ABC*:**

a) Traza la altura sobre *AC* y halla su longitud.

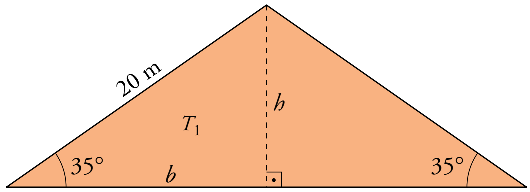
b) Calcula el área del triángulo.

a) $sen\ 50° = \frac{h}{12} \ \rightarrow\ h = 12 \cdot sen\ 50° = 9{,}19$ m



b) $\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{23 \cdot 9{,}19}{2} = 105{,}68\ m^2$

20 **Calcula el área de este triángulo:**



☛ *Al trazar la altura se forman dos triángulos rectángulos. Halla sus catetos.*

$sen\ 35° = \dfrac{h}{20} \ \rightarrow\ h = 20 \cdot sen\ 35° = 11{,}47$ m

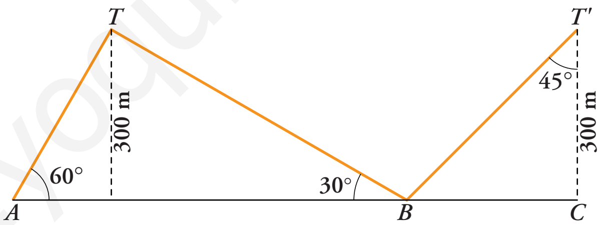
$cos\ 35° = \dfrac{b}{20} \ \rightarrow\ b = 20 \cdot cos\ 35° = 16{,}38$ m

Área de $T_1 = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{16{,}38 \cdot 11{,}47}{2} = 93{,}94\ \text{m}^2$

Área total $= 2 \cdot 93{,}94 = 187{,}88\ \text{m}^2$

PIENSA Y RESUELVE

21 **Una línea de alta tensión pasa por dos transformadores, T y T'. Este es un plano de la línea:**



Calcula las longitudes de los tres tramos de cable.

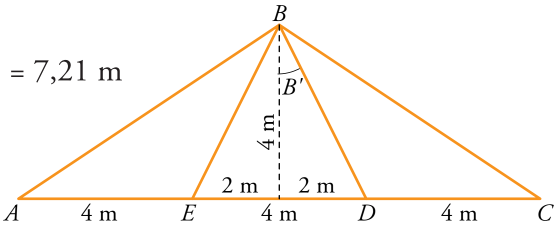
$sen\ 60° = \dfrac{300}{b} \ \rightarrow\ b = \dfrac{600}{\sqrt{3}} = 200\sqrt{3} \approx 346{,}4$ m

$sen\ 30° = \dfrac{300}{a} \ \rightarrow\ a = 600$ m

$cos\ 45° = \dfrac{300}{c} \ \rightarrow\ c = \dfrac{300}{cos\ 45°} = \dfrac{600}{\sqrt{2}} = 300\sqrt{2} \approx 424{,}3$ m

Longitud total: $a + b + c = 200\sqrt{3} + 600 + 300\sqrt{2} = 1\,370{,}7$ m

22 **Una estructura metálica tiene la forma y dimensiones de la figura. Halla la longitud de los postes AB y BE y la medida de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\widehat{EBD}$ y $\widehat{ABC}$**



Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + (4+2)^2} = \sqrt{16 + 36} = 7{,}21$ m

$\overline{BE} = \sqrt{2^2 + 4^2} =$

$= \sqrt{4 + 16} = 4{,}47$ m

$tg\ \hat{A} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \rightarrow \hat{A} = 0{,}\widehat{6}$ INV tan $67{,}38° = 33°\ 41'\ 24''$

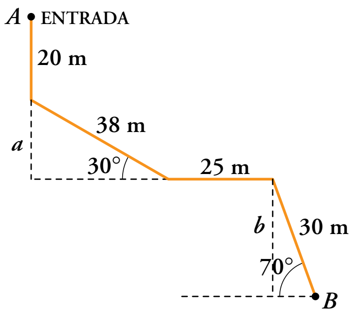
$\hat{C} = \hat{A} = 33°\ 41'\ 24''$

$\widehat{ABC} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 180° - 33{,}69° = 112{,}62° = 112°\ 37'\ 12''$

$tg\ \hat{B}' = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \hat{B}' = 26{,}57° \rightarrow \hat{B}' = 26°\ 34'\ 12''$

$\widehat{EBD} = 2\hat{B}' = 53{,}14° = 53°\ 8'\ 24''$

23 **Los espeleólogos utilizan un carrete para medir la profundidad. Sueltan hilo del carrete y miden la longitud y el ángulo que forma con la horizontal. Halla la profundidad del punto *B*.**



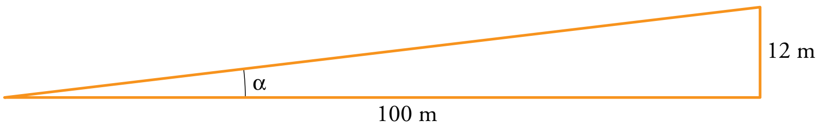
$sen\ 30° = \dfrac{a}{38} \rightarrow a = 38 \cdot sen\ 30° = 19$ m

$sen\ 70° = \dfrac{b}{30} \rightarrow b = 30 \cdot sen\ 70° = 28{,}19$ m

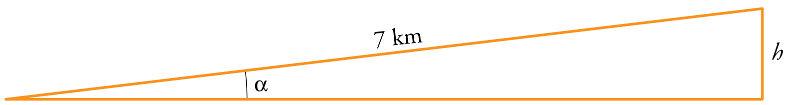
La profundidad es:

$20 + a + b = 20 + 19 + 28{,}19 = 67{,}19$ m

24 **Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?**



$tg\ \alpha = \dfrac{12}{100} = 0{,}12 \rightarrow \alpha = 6{,}84° = 6°\ 50'\ 34''$

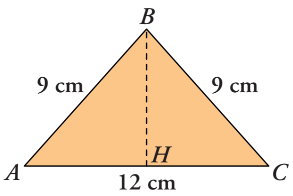


Si h son los metros que hemos descendido: $sen\ \alpha = \dfrac{h}{7\,000}$

$h = 7\,000\ sen\ (6°\ 50'\ 34'') = 834$ m $\rightarrow$ Hemos descendido 834 m.

Página 189

25 **En el triángulo isósceles *ABC*, halla:**



a) La altura $\overline{BH}$.

b) Los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

a) Por ser isósceles, $\overline{AH} = \overline{HC} = \frac{12}{2} = 6$ cm

Calculamos la altura $\overline{BH}$ aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\widehat{AHB}$:

$$9^2 = 6^2 + \overline{BH}^2 \to 81 = 36 + \overline{BH}^2 \to \overline{BH} = \sqrt{81-36} = \sqrt{45} \approx 6{,}71$$

La altura BH mide 6,71 cm.

b) $cos\ \hat{A} = \frac{6}{9} = 0{,}\widehat{6} \to \hat{A} = 48{,}19° \to \hat{A} = 48°\ 11'\ 24''$

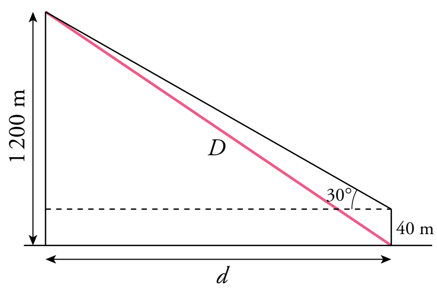
Por ser $\widehat{ABC}$ un triángulo isósceles, se cumple que $\hat{A} = \hat{C}$.

Luego: $\hat{C} = 48°\ 11'\ 24''$

$\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 180° - 2 \cdot 48{,}19° = 83{,}62° \to \hat{B} = 83°\ 37'\ 12''$

26 **Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento el avión se encuentra a una altura de 1 200 metros y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de 30°.**

¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si esta mide 40 m de altura?



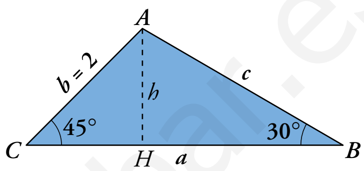
$$tg\ 30° = \frac{1\,200 - 40}{d} \to d = \frac{1\,160}{tg\ 30°} = 2\,009{,}2 \text{ m}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$D = \sqrt{(1\,200)^2 + (2\,009{,}2)^2} = 2\,340{,}3$ m

La distancia del avión al pie de la torre es de 2 340,3 m.

27 **Resuelve el siguiente triángulo** ABC**; es decir, averigua las medidas de sus elementos desconocidos. Empieza por trazar la altura** AH**.**



$\hat{A} = 180° - 45° - 30° = 105°$

$cos\ \hat{C} = \dfrac{\overline{CH}}{2} \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\overline{CH}}{2} \rightarrow \overline{CH} = \sqrt{2}$

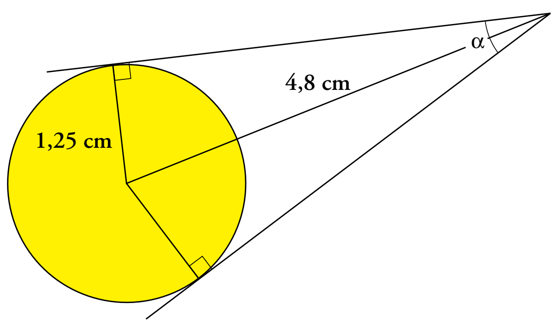
$tg\ 45° = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{CH}} \rightarrow 1 = \dfrac{\overline{AH}}{\sqrt{2}} \rightarrow \overline{AH} = \sqrt{2}$

$sen\ 30° = \dfrac{\overline{AH}}{c} \rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{c} \rightarrow c = 2\sqrt{2}$

$cos\ 30° = \dfrac{\overline{HB}}{c} \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\overline{HB}}{2\sqrt{2}} \rightarrow \overline{HB} = \sqrt{6}$

$$\begin{cases} \text{Ángulos:} \begin{cases} \hat{A} = 105° \\ \hat{B} = 30° \\ \hat{C} = 45° \end{cases} \\ \text{Lados:} \begin{cases} a = \sqrt{6} + \sqrt{2} \approx 3{,}9 \\ b = 2 \\ c = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8 \end{cases} \end{cases}$$

28 **El diámetro de una moneda de 2 € mide 2,5 cm. Averigua el ángulo que forman sus tangentes trazadas desde una distancia de 4,8 cm del centro, como indica la figura.**



$sen\ \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1{,}25}{4{,}8} \rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 15{,}09° = 15°\ 5'\ 41''$

$\alpha = 30{,}19° = 30°\ 11'\ 22''$

Página 202

PRACTICA

Media y desviación típica

1 **Las edades de los estudiantes de un curso de informática son:**

17	17	18	19	18	20
20	17	18	18	19	19
21	20	21	19	18	18
19	21	20	18	17	17
21	20	20	19	20	18

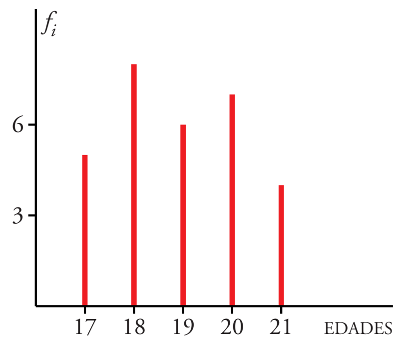
a) Haz una tabla de frecuencias y representa los datos con un diagrama adecuado.

b) Calcula la media y la desviación típica.

a) La variable x_i representa la edad de los estudiantes.

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
17	5	85	1 445
18	8	144	2 592
19	6	114	2 166
20	7	140	2 800
21	4	84	1 764
	30	567	10 767

Representamos los datos en un diagrama de barras:



b) $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{567}{30} = 18{,}9 \rightarrow$ La media es de 18,9 años

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2 f_i}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{10\,767}{30} - 18{,}9^2 = 1{,}69 \rightarrow \sigma = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3 \rightarrow$$

$\rightarrow$ La desviación típica es de 1,3.

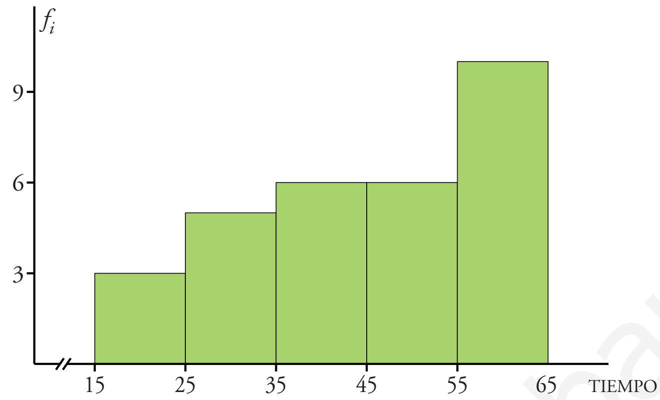
2 **El tiempo, en minutos, que un grupo de estudiantes ha empleado en la realización de un examen viene dado en la siguiente tabla:**

a) Representa los datos de la tabla en un diagrama adecuado.

b) Halla $\bar{x}$ y σ.

TIEMPO	Nº DE ESTUDIANTES
15 – 25	3
25 – 35	5
35 – 45	6
45 – 55	6
55 – 65	10

a) Representamos los datos en un histograma. Puesto que los intervalos son de la misma amplitud, la altura de cada barra coincidirá con la frecuencia (f_i).



b)

INTERVALO	MARCA DE CLASE (x_i)	f_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$
15 - 25	20	3	60	1 200
25 - 35	30	5	150	4 500
35 - 45	40	6	240	9 600
45 - 55	50	6	300	15 000
55 - 65	60	10	600	36 000
		30	1 350	66 300

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1\,350}{30} = 45$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{66\,300}{30} - 45^2 = 185 \quad \to \quad \sigma = \sqrt{185} \approx 13,6$$

La media es 45 y la desviación típica 13,6.

3 **El número de faltas de ortografía que cometieron un grupo de estudiantes en un dictado fue:**

0 3 1 2 0	2 1 3 0 4
0 1 1 4 3	5 3 2 4 1
5 0 2 1 0	0 0 0 2 1
2 1 0 0 3	0 5 3 2 1

a) Di cuál es la variable y de qué tipo es.

b) Haz una tabla de frecuencias y representa los datos en un diagrama adecuado.

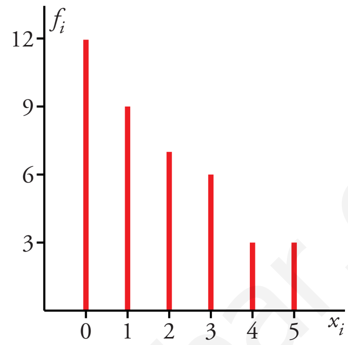
c) Calcula la media y la desviación típica.

a) Variable: "Número de faltas de ortografía". Es una variable cuantitativa discreta. Llamamos x_i a dicha variable y sus valores son 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

b) Tabla de frecuencias:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	12	0	0
1	9	9	9
2	7	14	28
3	6	18	54
4	3	12	48
5	3	15	75
	40	68	214

Diagrama de barras:



c) MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{68}{40} = 1{,}7$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{214}{40} - 1{,}7^2 = 2{,}46$$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{2{,}46} = 1{,}57$

4 **A un grupo de 30 personas se les ha tomado el número de pulsaciones por minuto (ritmo cardíaco) obteniéndose los siguientes resultados:**

87	**85**	**61**	**51**	**64**	**75**	**80**	**70**	**69**	**82**
80	**79**	**82**	**74**	**90**	**76**	**72**	**73**	**63**	**65**
67	**71**	**88**	**76**	**68**	**73**	**70**	**76**	**71**	**86**

a) Representa gráficamente esta distribución agrupando los datos en 6 intervalos.

b) Calcula la media y la desviación típica.

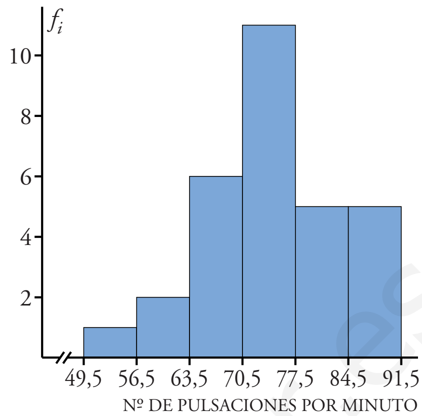
a) • Localizamos los valores extremos: 51 y 90 $\rightarrow$ recorrido = 39

• Buscamos un múltiplo de 6 (nº de intervalos) algo mayor que 39, por ejemplo $r' = 42$.

Así, cada intervalo tendrá una longitud de $\dfrac{42}{6} = 7$.

INTERVALOS	MARCAS DE CLASE (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
49,5 - 56,5	53	1	53	2 809
56,5 - 63,5	60	2	120	7 200
63,5 - 70,5	67	6	402	26 934
70,5 - 77,5	74	11	814	60 236
77,5 - 84,5	81	5	405	32 805
84,5 - 91,5	88	5	440	38 720
		30	2 234	168 704

Puesto que los intervalos son de la misma longitud, la altura de cada barra en este histograma coincide con la frecuencia (f_i).



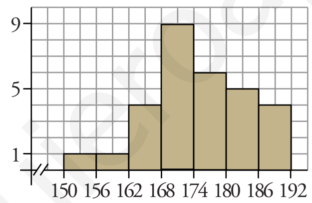
b) MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{2\,234}{30} = 74,47$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{168\,704}{30} - 74,47^2 = 77,69$$

DESVIACIÓN TÍPICA = $\sigma = \sqrt{77,69} = 8,81$

5 **Este gráfico muestra las alturas de los árboles de un parque. Haz la tabla de frecuencias corres-pondiente y calcula $\bar{x}$ y σ.**



INTERVALOS	MARCA DE CLASE (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
150 - 156	153	1	153	23 409
156 - 162	159	1	159	25 281
162 - 168	165	4	660	108 900
168 - 174	171	9	1 539	263 169
174 - 180	177	6	1 062	187 974
180 - 186	183	5	915	167 445
186 - 192	189	4	756	142 884
		30	5 244	919 062

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{5\,244}{30} = 174,8$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{919\,062}{30} - 174,8^2 = 80,36$$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{80,36} = 8,96$

6 **En una maternidad se han tomado los pesos (en kilogramos) de 50 recién nacidos:**

2,8	3,2	3,8	2,5	2,7	3,7	1,9	2,6	3,5	2,3
3,0	2,6	1,8	3,3	2,9	2,1	3,4	2,8	3,1	3,9
2,9	3,5	3,0	3,1	2,2	3,4	2,5	1,9	3,0	2,9
2,4	3,4	2,0	2,6	3,1	2,3	3,5	2,9	3,0	2,7
2,9	2,8	2,7	3,1	3,0	3,1	2,8	2,6	2,9	3,3

a) Construye una tabla con los datos agrupados en 6 intervalos de amplitud 0,4 kg.

b) Representa gráficamente esta distribución.

c) Calcula la media y la desviación típica.

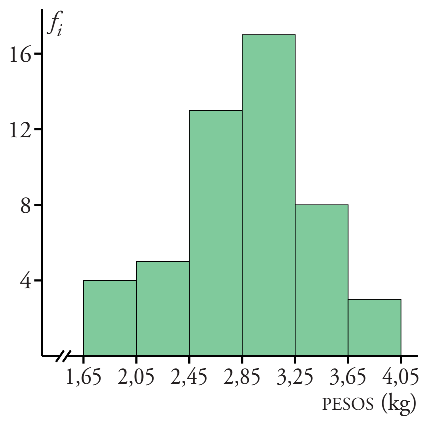
Localizamos los valores extremos: 1,8 y 3,9.

Recorrido = 3,9 – 1,8 = 2,1

a)

INTERVALOS	MARCA DE CLASE (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
1,65 - 2,05	1,85	4	7,4	13,69
2,05 - 2,45	2,25	5	11,25	25,31
2,45 - 2,85	2,65	13	34,45	91,29
2,85 - 3,25	3,05	17	51,85	158,14
3,25 - 3,65	3,45	8	27,6	95,22
3,65 - 4,05	3,85	3	11,55	44,47
		50	144,1	428,12

b) Representamos los datos en un histograma; al ser los intervalos de la misma amplitud, la altura de cada barra corresponde a la frecuencia (f_i) de cada intervalo.



c) $\overline{x} = \dfrac{144,1}{50} = 2,9$ kg

$$\sigma^2 = \frac{428,12}{50} - 2,8^2 = 0,1524$$

$$\sigma = \sqrt{0,1524} = 0,39 \text{ kg}$$

7 **El número de personas que acudieron a las clases de natación de una piscina municipal fueron:**

38	32	54	47	50	58	46
47	55	60	43	60	45	48
40	53	59	48	39	48	56
52	48	55	60	53	43	52
46	55	56	54	48	39	50

a) Haz una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos.

b) Representa gráficamente la distribución.

c) Halla $\bar{x}$ y σ.

Localizamos los valores extremos: 32 y 60.

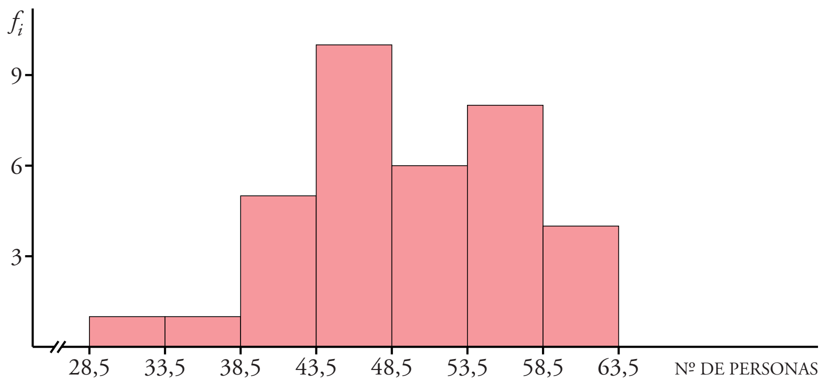
Recorrido = 60 – 32 = 28

Agrupamos los datos en 7 intervalos. Con el fin de que los extremos de los intervalos no coincidan con ninguno de los datos, tomamos cada intervalo de longitud 5, en vez de 4.

a)

INTERVALOS	MARCA DE CLASE (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
28,5 - 33,5	31	1	31	961
33,5 - 38,5	36	1	36	1 296
38,5 - 43,5	41	5	205	8 405
43,5 - 48,5	46	10	460	21 160
48,5 - 53,5	51	6	306	15 606
53,5 - 58,5	56	8	448	25 088
58,5 - 63,5	61	4	244	14 884
		35	1 730	87 400

b) Representamos los datos en un histograma. La altura de cada rectángulo coincidirá con la frecuencia absoluta, por ser los intervalos de igual amplitud.



c) MEDIA: $\overline{x} = \dfrac{1730}{35} \approx 49{,}43$

$\sigma^2 = \dfrac{87\,400}{35} - 49{,}43^2 = 53{,}82$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{53{,}82} \approx 7{,}34$

Página 203

Mediana, cuartiles y percentiles

8 Las urgencias atendidas durante un mes en un centro de salud fueron:

1 5 3 2 1   6 4 2 2 3

4 3 5 1 0   1 5 3 3 6

2 4 6 3 2   4 3 2 1 5

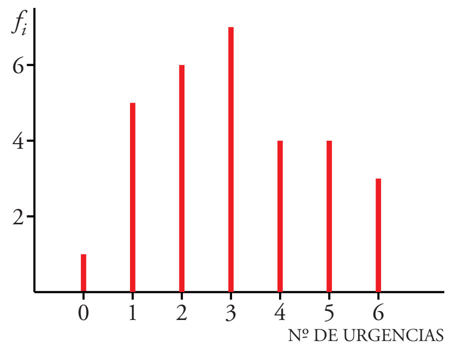
a) Haz una tabla de frecuencias y representa los datos.

b) Haz la tabla de frecuencias acumuladas y di cuál es la mediana.

a)

x_i = urgencias atendidas	f_i	F_i	en %
0	1	1	3,33
1	5	6	20
2	6	12	40
3	7	19	63,33
4	4	23	76,67
5	4	27	90
6	3	30	100

Representamos los datos en un diagrama de barras:



b) $Me = p_{50} = 3$ (para $x_i = 3$, F_i supera el 50%)

9 La altura, en centímetros, de un grupo de alumnos y alumnas de una misma clase es:

150, 169, 171, 172, 172, 175, 181

182, 183, 177, 179, 176, 184, 158

Calcula razonadamente la mediana y los cuartiles.

Colocamos los datos en orden creciente:

150 - 158 - 169 - 171 - 172 - 172 - 175 - 176 - 177 - 179 - 181 - 182 - 183 - 184

Hay 14 datos:

$\frac{14}{2} = 7 \rightarrow$ Mediana: $Me = \frac{175 + 176}{2} = 175{,}5$ cm

$\frac{14}{4} = 3{,}5 \rightarrow$ $Q_1 = 171$ cm (4º lugar)

$14 \cdot \frac{3}{4} = 10{,}5 \rightarrow$ $Q_3 = 181$ cm (posición 11)

10 **Calcula la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:**

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	12	9	7	6	3	3

Completamos la tabla con las frecuencias acumuladas:

x_i	f_i	F_i	en %
0	12	12	30
1	9	21	52,5
2	7	28	70
3	6	34	85
4	3	37	92,5
5	3	40	100

- $Me = 1$, porque para $x_i = 1$ la F_i supera el 50%
- $Q_1 = 0$, porque para F_i supera el 25% para $x_i = 0$
- $Q_3 = 3$, porque F_i supera el 75% para $x_i = 3$

11 **Halla la mediana, los cuartiles y el percentil 60 en cada una de las siguientes distribuciones, correspondientes a las notas obtenidas en un test que han hecho dos grupos de estudiantes:**

A: 25 – 22 – 27 – 30 – 23 – 22 – 31 – 18
24 – 25 – 32 – 35 – 20 – 28 – 30

B: 27 – 32 – 19 – 22 – 25 – 30 – 21
29 – 23 – 31 – 21 – 20 – 18 – 27

Colocamos en orden creciente los datos:

A 18 - 20 - 22 - 22 - 23 - 24 - 25 - 25 - 27 - 28 - 30 - 30 - 31 - 32 - 35

Hay 15 datos:

- La mediana es el valor central (posición 8) $\rightarrow$ $Me = 25$
- $\frac{15}{4} = 3{,}75 \rightarrow Q_1 = 22$ (4ª posición)
- $15 \cdot \frac{3}{4} = 11{,}25 \rightarrow Q_3 = 30$ (12ª posición)
- $15 - \frac{60}{100} = 9 \rightarrow$ p_{60} será el valor intermedio de los datos situados en 9ª y 10ª posición, es decir:

$$p_{60} = \frac{27 + 28}{2} \rightarrow p_{60} = 27{,}5$$

B 18 - 19 - 20 - 21 - 21 - 22 - 23 - 25 - 27 - 27 - 29 - 30 - 31 - 32

Hay 14 datos:

- Los dos valores centrales son 23 y 25 $\rightarrow$ $Me = \dfrac{23 + 25}{2} = 24$
- $\dfrac{14}{4} = 3{,}5 \rightarrow Q_1 = 21$ (4ª posición)
- $14 \cdot \dfrac{3}{4} = 10{,}5 \rightarrow Q_3 = 29$ (11ª posición)
- $14 \cdot \dfrac{60}{100} = 8{,}4 \rightarrow p_{60} = 27$ (9ª posición)

12 **En la fabricación de cierto tipo de bombillas, se han detectado algunas defectuosas. Se han estudiado 200 cajas de 100 bombillas cada una, obteniéndose la siguiente tabla:**

DEFECTUOSAS	Nº DE CAJAS
1	5
2	15
3	38
4	42
5	49
6	32
7	17
8	2

Calcula la mediana, el cuartil superior y el percentil 20.

Hacemos la tabla de frecuencias acumuladas.

x_i	f_i	F_i	en %
1	5	5	2,5
2	15	20	10
3	38	58	29
4	42	100	50
5	49	149	74,5
6	32	181	90,5
7	17	198	99
8	2	200	100

Para $x_i = 4$, F_i iguala el 50%, luego la mediana será el valor intermedio entre 4 y el siguiente, 5, esto es, $Me = 4{,}5$.

$Q_3 = p_{75} = 6$

$p_{20} = 3$

PIENSA Y RESUELVE

13 **Deseamos hacer una tabla con datos agrupados a partir de 384 datos, cuyos valores extremos son 19 y 187.**

a) Si queremos que sean 10 intervalos de amplitud 17, ¿cuáles serán esos intervalos?

b) Haz otra distribución en 12 intervalos de la amplitud que creas conveniente.

Recorrido: $r = 187 - 19 = 168$

a) Buscamos un número algo mayor que el recorrido y que sea múltiplo de 10. Por ejemplo, $r' = 170$. De este modo, cada intervalo tendrá una longitud de 17.

Los intervalos son:

[18, 35); [35, 52); [52, 69); [69, 86); [86, 103); [103, 120)
[120, 137); [137, 154); [154, 171); [171, 188)

b) Buscamos ahora un número que sea múltiplo de 12, que es el número de intervalos en este caso.

$168 = 12 \cdot 14 \quad \rightarrow$ la amplitud de cada intervalo será 14.

Los intervalos son:

[19, 33); [33, 47); [47, 61); [61, 75); [75, 89); [89, 103)
[103, 117); [117, 131); [131, 145); [145, 159); [159, 173); [173, 187)

14 Los gastos mensuales de una empresa A tienen una media de 100 000 euros y una desviación típica de 12 500 euros. En otra empresa B la media es 15 000 euros y la desviación típica 2 500 euros. Calcula el coeficiente de variación y di cuál de las dos tiene mayor variación relativa.

Empresa A: $\left.\begin{array}{l} \bar{x} = 100\,000 \text{ €} \\ \sigma = 12\,500 \text{ €} \end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{12\,500}{100\,000} = 0{,}125$ o bien 12,5%

Empresa B: $\left.\begin{array}{l} \bar{x} = 15\,000 \text{ €} \\ \sigma = 2\,500 \text{ €} \end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{2\,500}{15\,000} = 0{,}1\widehat{6}$ o bien 16,67%

Tiene mayor variación relativa la empresa B.

15 El peso medio de los alumnos de una clase es 58,2 kg y su desviación típica 3,1 kg. El de las alumnas de esa clase es 52,4 kg y su desviación típica es 5,1 kg. Calcula el coeficiente de variación y compara la dispersión de ambos grupos.

Alumnos $\left\{\begin{array}{l} \bar{x} = 58{,}2 \text{ kg} \\ \sigma = 3{,}1 \text{ kg} \end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{3{,}1}{58{,}2} = 0{,}053 \quad \rightarrow \quad 5{,}3\%$

Alumnas $\left\{\begin{array}{l} \bar{x} = 52{,}4 \text{ kg} \\ \sigma = 5{,}1 \text{ kg} \end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{5{,}1}{52{,}4} = 0{,}097 \quad \rightarrow \quad 9{,}7\%$

El peso medio de las alumnas es más variable que el peso de los alumnos.

16 Se han medido los pesos y las alturas de 6 personas, obteniéndose los siguientes datos:

Calcula el coeficiente de variación y di si están más dispersos los pesos o las alturas.

PESOS (kg)	ALTURAS (m)
65	1,7
60	1,5
63	1,7
63	1,7
68	1,75
68	1,8

PESOS (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
60	1	60	3 600
63	2	126	7 938
65	1	65	4 225
68	2	136	9 248
	6	387	25 011

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{387}{6} = 64{,}5 \text{ kg}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{25\,011}{6} - 64{,}5^2 = 8{,}25 \;\rightarrow\; \sigma = \sqrt{8{,}25} = 2{,}87 \text{ kg}$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2{,}87}{64{,}5} = 0{,}044 \text{ o bien } 4{,}4\%$$

ALTURAS (y_i)	f_i	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
1,5	1	1,5	2,25
1,7	3	5,1	8,67
1,75	1	1,75	3,06
1,8	1	1,8	3,24
	6	10,15	17,22

$$\bar{y} = \frac{\Sigma f_i y_i}{\Sigma f_i} = \frac{10{,}15}{6} = 1{,}69 \text{ m}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i y_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{y}^2 = \frac{17{,}22}{6} - 1{,}69^2 = 0{,}0139 \;\rightarrow\; \sigma = \sqrt{0{,}0139} = 0{,}12 \text{ m}$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{y}} = \frac{0{,}12}{1{,}69} = 0{,}071 \text{ o bien } 7{,}1\%$$

Están más dispersas las alturas que los pesos.

17 **En una regata de veleros, los tiempos, en minutos, empleados por los participantes en hacer el primer recorrido han sido:**

43,7	52	49,5	47,3	42,5
51,6	50,2	48,4	39,8	40,6
41,2	41,8	44	54	45,2
46,4	42,8	49	50,8	58

a) **Representa gráficamente los datos.**

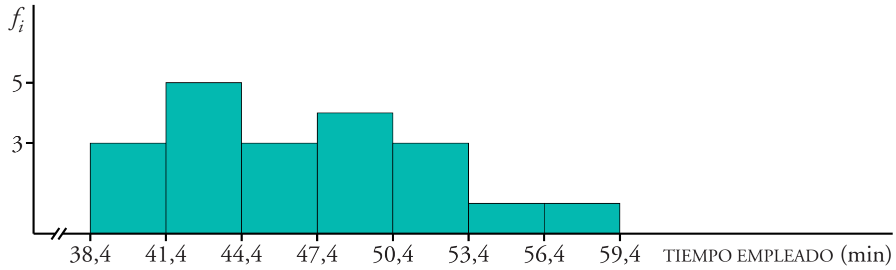
b) **Calcula $\bar{x}$ y σ.**

c) **Ordena los datos y calcula la mediana y los cuartiles.**

a) El número de valores distintos que hay es grande; luego, es adecuado agruparlos en intervalos.

Recorrido = 58 – 39,8 = 18,2

Tomamos 7 intervalos de amplitud 3.



b)

INTERVALO	f_i	MARCA (x_i)	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
38,4 - 41,4	3	39,9	119,7	4 776,03
41,4 - 44,4	5	42,9	214,5	9 202,05
44,4 - 47,4	3	45,9	137,7	6 320,43
47,4 - 50,4	4	48,9	195,6	9 564,84
50,4 - 53,4	3	51,9	155,7	8 080,83
53,4 - 56,4	1	54,9	54,9	3 014,01
56,4 - 59,4	1	57,9	57,9	3 352,41
	20		936	44 310,6

MEDIA $\rightarrow$ $\bar{x} = \dfrac{936}{20} = 46{,}8$ minutos

$$\sigma^2 = \frac{44\,310{,}6}{20} - 46{,}8^2 = 25{,}29$$

DESVIACIÓN TÍPICA $\rightarrow$ $\sigma = \sqrt{25{,}29} = 5{,}03$ minutos

c) Ordenamos los datos:

39,8 - 40,6 - 41,2 - 41,8 - 42,5 - 42,8 - 43,7 - 44 - 45,2 - 46,4

47,3 - 48,4 - 49 - 49,5 - 50,2 - 50,8 - 51,6 - 52 - 54 - 58

Hay 20 datos:

$\dfrac{20}{2} = 10$ $\rightarrow$ La mediana es el valor intermedio de los valores situados en las posiciones 10 y 11:

$$Me = \frac{46{,}4 + 47{,}3}{2} = 46{,}85$$

$\dfrac{20}{4} = 5$ $\rightarrow$ Q_1 es la media aritmética de 42,5 y 42,8, valores situados en 5ª y 6ª posición:

$$Q_1 = \frac{42{,}5 + 42{,}8}{2} = 42{,}65$$

$20 \cdot \dfrac{3}{4} = 15$ $\rightarrow$ Q_3 es el valor intermedio entre 50,2 y 50,8, valores que ocupan la posición 15 y 16, respectivamente:

$$Q_3 = \frac{50{,}2 + 50{,}8}{2} = 50{,}5$$

Página 204

18 **El número de errores cometidos en un test por un grupo de personas viene reflejado en la siguiente tabla:**

Nº DE ERRORES	0	1	2	3	4	5	6
Nº DE PERSONAS	10	12	8	7	5	4	3

a) Halla la mediana y los cuartiles inferior y superior, y explica su significado.

b) ¿Cuál es el número medio de errores por persona?

Construimos la tabla de frecuencias acumuladas:

Nº DE ERRORES (x_i)	Nº DE PERSONAS (f_i)	$x_i f_i$	F_i	EN %
0	12	0	12	23,53
1	12	12	24	47,06
2	8	16	32	62,75
3	7	21	39	76,47
4	5	20	44	86,27
5	4	20	48	94,12
6	3	18	51	100
	51	107		

a) $Me = 2$. Significa que el 50% de las personas cometen 0, 1 ó 2 errores.

$Q_1 = 1$. El 25% de las personas comete 1 error o ninguno.

$Q_3 = 3$. El 75% de las personas comente 3 errores o menos de 3 errores.

b) $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{107}{51} \approx 2,1$

El número medio de errores por persona es ligeramente superior a 2.

19 **Al preguntar a un grupo de personas cuánto tiempo dedicaron a ver televisión durante un fin de semana, se obtuvieron estos resultados:**

TIEMPO (en horas)	NÚMERO DE PERSONAS
[0; 0,5)	10
[0,5; 1,5)	10
[1,5; 2,5)	18
[2,5; 4)	12
[4, 8)	12

Dibuja el histograma correspondiente y halla la media y la desviación típica.

Como los intervalos no son de la misma longitud, para representar la distribución mediante un histograma pondremos en cada barra una altura tal que el área sea proporcional a la frecuencia:

$[0;\ 0{,}5) \quad \to \quad a_1 = 0{,}5 \quad f_1 = 10 \quad \to \quad h_1 = \dfrac{10}{0{,}5} = 20$

$[0{,}5;\ 1{,}5) \quad \to \quad a_2 = 1 \quad f_2 = 10 \quad \to \quad h_2 = 10$

$[1{,}5;\ 2{,}5) \quad \to \quad a_3 = 1 \quad f_3 = 18 \quad \to \quad h_3 = 18$

$[2{,}5;\ 4) \quad \to \quad a_4 = 1{,}5 \quad f_4 = 12 \quad \to \quad h_4 = \dfrac{12}{1{,}5} = 8$

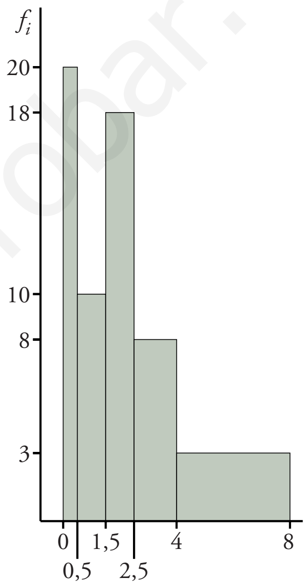
$[4;\ 8) \quad \to \quad a_5 = 4 \quad f_5 = 12 \quad \to \quad h_5 = \dfrac{12}{4} = 3$

$\bar{x} = \dfrac{159{,}5}{62} = 2{,}57$

$\sigma^2 = \dfrac{641{,}375}{62} - 2{,}57^2 = 3{,}74 \quad \to$

$\to \quad \sigma = \sqrt{3{,}74} = 1{,}93$

TIEMPO	MARCA (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
[0; 0,5)	0,25	10	2,5	0,625
[0,5; 1,5)	1	10	10	10
[1,5; 2,5)	2	18	36	72
[2,5; 4)	3,25	12	39	126,75
[4; 8)	6	12	72	432
		62	159,5	641,375



20 En una población de 25 familias se ha observado la variable X = "número de coches que tiene la familia" y se han obtenido los siguientes datos:

0	1	2	3	1
0	1	1	1	4
3	2	2	1	1
2	2	1	1	1
2	1	3	2	1

a) Construye la tabla de frecuencias de la distribución X.

b) Haz el diagrama de barras.

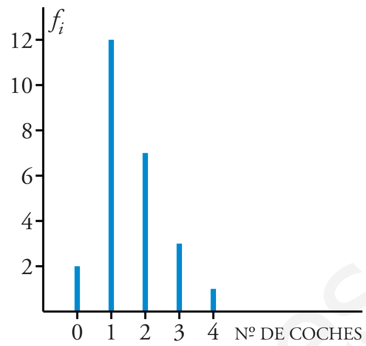
c) Calcula la media y la desviación típica.

d) Halla la mediana y los cuartiles.

a)

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	F_i	en %
0	2	0	0	2	8
1	12	12	12	14	56
2	7	14	28	21	84
3	3	9	27	24	96
4	1	4	16	25	100
	25	39	83		

b)



c) $\overline{x} = \dfrac{39}{25} = 1{,}56$

$$\sigma^2 = \frac{83}{25} - 1{,}56^2 = 0{,}89 \quad \to \quad \sigma = \sqrt{0{,}89} \approx 0{,}94$$

d) $Me = 1$, $Q_1 = 1$ y $Q_3 = 2$

21 **Se ha estudiado la edad de los usuarios de un videojuego y se han obtenido los siguientes datos:**

EDAD	Nº DE PERSONAS
12	85
13	72
14	63
15	60
16	52
17	48

Halla la mediana y los cuartiles superior e inferior, y explica su significado.

x_i = EDAD	f_i	F_i	EN %
12	85	85	22,4
13	72	157	41,3
14	63	220	57,9
15	60	280	73,7
16	52	332	87,4
17	48	380	100

$Me = p_{50} = 14$ porque para $x_i = 14$, F_i supera el 50%

$Q_1 = p_{25} = 13$ porque para $x_i = 13$, F_i supera el 25%

$Q_3 = p_{75} = 16$ porque para $x_i = 16$, F_i supera el 75%

Significado:

El 25% de los usuarios de videojuego tiene menos de 13 años; el 50% tiene menos de 14 años y el 75% tiene menos de 16 años.

22 **Un dentista observa el número de caries en cada uno de los 100 niños de un colegio y obtiene los resultados resumidos en esta tabla:**

NÚMERO DE CARIES	0	1	2	3	4
FRECUENCIA ABSOLUTA	25	20	y	15	x
FRECUENCIA RELATIVA	0,25	0,2	z	0,15	0,05

a) Completa la tabla obteniendo x, y, z.

b) Calcula el número medio de caries.

a) La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de individuos (100, en nuestro caso).

$0{,}05 = \dfrac{x}{100} \;\to\; x = 5$

$25 + 20 + y + 15 + 5 = 100 \;\to\; y = 35$

$z = \dfrac{y}{100} = \dfrac{35}{100} \;\to\; z = 0{,}35$

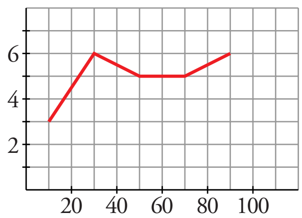
b)

Nº DE CARIES (x_i)	f_i	$f_i x_i$
0	25	0
1	20	20
2	35	70
3	15	45
4	5	20
	100	155

$\bar{x} = \dfrac{155}{100} = 1{,}55$

El número medio de caries es de 1,55.

23 **Este es el polígono de frecuencias correspondiente a una distribución de datos agrupados en intervalos:**



a) Escribe la tabla de frecuencias absolutas.

b) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

a)

INTERVALOS	MARCA DE CLASE (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
[0, 20)	10	3	30	300
[20, 40)	30	6	180	5 400
[40, 60)	50	5	250	12 500
[60, 80)	70	5	350	24 500
[80, 100)	90	6	540	48 600
		25	1 350	91 300

b) $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{1\,350}{25} = 54 \;\to\; \bar{x} = 54$

$\sigma^2 = \dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \dfrac{91\,300}{25} - 54^2 = 736 \;\to$

$\to\; \sigma = \sqrt{736} \approx 27{,}13 \;\to\; \sigma = 27{,}13$

24 **Completa la siguiente tabla estadística, donde *f*, *F* y *fr* representan, respectivamente, la frecuencia absoluta, la frecuencia absoluta acumulada y la frecuencia relativa.**

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	4	4	8	7	5	10	7	5
F	4	8	**16**	23	**28**	**38**	**45**	50
fr	**0,08**	0,08	**0,16**	**0,14**	0,1	0,2	0,14	0,1

☛ ***Recuerda que** $fr = f/n$ **y calcula** n.*

De la primera fila se obtiene fácilmente el valor de n:

$$fr = \frac{f}{n} \rightarrow 0{,}08 = \frac{4}{n} \rightarrow n = 50$$

25 **Completa la siguiente tabla:**

x_i	f_i	F_i	%
1		4	
2	5		10
3		16	
4	10		
5		41	
6			18

a) Calcula $\bar{x}$.

b) Halla la mediana de la distribución.

x_i	f_i	F_i	%	$f_i x_i$
1	4	4	4,4	4
2	5	9	10	10
3	7	16	17,8	21
4	10	26	28,9	40
5	15	41	45,6	75
6	49	90	100	294
	90			444

Si $F_i = 9$ equivale al 10%, el 100% será

$F_i = 9 \cdot 10 = 90$

a) $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{444}{90} \approx 4{,}93 \rightarrow \bar{x} = 4{,}93$

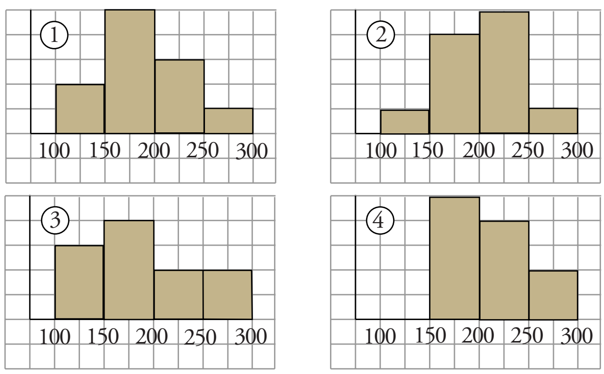
b) $Me = 6$ porque para $x_i = 6$, la F_i supera al 50%.

Página 205

26 **Se ha medido el nivel de colesterol en cuatro grupos de personas sometidas a diferentes dietas. Las medias y las desviaciones típicas son las que figuran en esta tabla:**

DIETA	A	B	C	D
$\bar{x}$	211,3	188,6	202,2	185
σ	37,4	52,6	39,1	43,6

Las gráficas son, no respectivamente:



Asocia a cada dieta la gráfica que le corresponde.

Fijándonos en las gráficas, se observa que los grupos 1 y 3 tienen una media inferior a 200, mientras que las medias de 2 y 4 son superiores a ese número. Luego podemos asociar:

$$\text{A y C} \rightarrow \text{2 y 4}$$
$$\text{B y D} \rightarrow \text{1 y 3}$$

Por otra parte, las personas de 2 tienen el nivel de colesterol más disperso que las de 4. Según esto, su desviación típica será mayor, por lo que C $\leftrightarrow$ 2 y A $\leftrightarrow$ 4. Análogamente, B $\leftrightarrow$ 3 y D $\leftrightarrow$ 1.

27 Las estaturas de los 40 alumnos y alumnas de una clase vienen dadas en la tabla adjunta. ¿En qué intervalo estará la mediana?

ALTURA	Nº DE ALUMNOS
158,5 - 163,5	1
163,5 - 168,5	5
168,5 - 173,5	11
173,5 - 178,5	14
178,5 - 183,5	6
183,5 - 188,5	3

El primer intervalo cuya F_i sea mayor que 20 (mitad del número de alumnos) es 173,5 - 178,5.

Concretamente, $F_i = 1 + 5 + 11 + 14 = 31$. Luego la mediana estará en el intervalo 173,5 - 178,5.

28 Completa la tabla de esta distribución en la que sabemos que su media es 2,7.

x_i	1	2	3	4
f_i	3	…	7	5

Llamamos z a la frecuencia absoluta del dato $x_i = 2$.

Aplicamos la definición de la media:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} \rightarrow 2{,}7 = \frac{3 + 2z + 21 + 20}{15 + z}$$

$$2{,}7 \cdot (15 + z) = 44 + 2z$$

$$40{,}5 + 2{,}7z = 44 + 2z \rightarrow 0{,}7z = 3{,}5 \rightarrow z = 5$$

29 Si a todos los datos de una distribución le sumamos un mismo número, ¿qué le ocurre a la media? ¿Y a la desviación típica? ¿Y si multiplicamos todos los datos por un mismo número?

Llamamos a al valor sumado a cada dato de la distribución:

- MEDIA

$$\frac{(x_1 + a)f_1 + (x_2 + a)f_2 + \ldots + (x_n + a)f_n}{n} =$$

$$= \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n + a(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)}{n} =$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{n} + a\frac{\Sigma f_i}{n} = \bar{x} + a, \text{ puesto que } \frac{\Sigma f_i}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

La nueva media es el valor de la media original más el valor que hemos sumado a cada dato.

- DESVIACIÓN TÍPICA:

$$\frac{\Sigma f_i (x_i + a)^2}{\Sigma f_i} - (\overline{x} + a)^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2 + \Sigma f_i a^2 + \Sigma f_i 2 x_i a}{\Sigma f_i} - \overline{x}^2 - a^2 - 2\overline{x}a =$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} + a^2 + 2a\overline{x} - \overline{x}^2 - a^2 - 2\overline{x}a =$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \overline{x}^2$$

La desviación típica no se ve alterada al sumar a todos los datos de la distribución un mismo número.

Supongamos ahora que todos los datos se multiplican por un mismo valor a:

- MEDIA $= \dfrac{ax_1 f_1 + ax_2 f_2 + \ldots + ax_n f_n}{n} = a\overline{x} \rightarrow$ la media queda multiplicada por dicho valor.

- DESVIACIÓN TÍPICA:

$$\frac{\Sigma f_i (x_i a)^2}{\Sigma f_i} - (\overline{x}a)^2 = \frac{a^2 \Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - a^2 \overline{x}^2 = a^2 \left(\frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \overline{x}^2 \right)$$

La varianza quedaría multiplicada por a^2, luego la desviación típica queda multiplicada por a.

Página 242

PRACTICA

Sucesos

1 **Lanzamos tres veces una moneda y anotamos si sale cara o cruz.**

a) Escribe el espacio muestral.

b) Escribe el suceso A = "la primera vez salió cara".

c) ¿Cuál es el suceso contrario de A? Escribe sus sucesos elementales.

d) Escribe el suceso B = "obtener el mismo resultado las tres veces".

e) Escribe los sucesos B', $A \cup B$ y $A \cap B$.

a) E = {CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++}

siendo C $\to$ cara y + $\to$ cruz

b) A = {CCC, CC+, C+C, C++}

c) A' = "la primera vez salió cruz" = {+CC, +C+, ++C, +++}

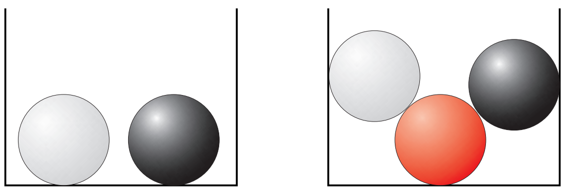
d) B = {CCC, +++}

e) B' = {CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C}

$A \cup B$ = {CCC, CC+, C+C, C++, +++}

$A \cap B$ = {CCC}

2 **Extraemos una bola de cada una de las urnas y anotamos su color.**



a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe los sucesos:

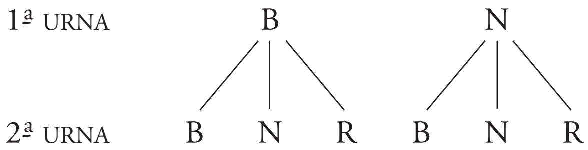
A = "la segunda es roja"

B = "alguna es blanca"

c) Escribe los sucesos A', B', $A \cup B$ y $A \cap B$.

d) ¿Cuál es el suceso contrario de: C = {BN, BR, NR}?

a)



Luego E = {BB, BN, BR, NB, NN, NR}

siendo: B → bola blanca, N → bola negra, R → bola roja.

b) A = {BR, NR}; B = {BB, BN, BR, NB}

c) A' = {BB, BN, NB, NN}; B' = {NN, NR}

$A \cup B$ = {BR, NR, BB, BN, NB}

$A \cap B$ = {BR}

d) C' = {BB, NB, NN}

3 **Escribimos cada una de las letras de la palabra PREMIO en una ficha y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.**

a) Escribe los sucesos elementales de este experimento aleatorio. ¿Tienen todos la misma probabilidad?

b) Escribe el suceso "obtener vocal", y calcula su probabilidad.

c) Si la palabra elegida fuera SUERTE, ¿cómo responderías a los apartados a) y b)?

a) Los sucesos elementales son: {P}, {R}, {E}, {M}, {I}, {O}.

Todas tienen la misma probabilidad, porque todas aparecen una sola vez.

b) V = "obtener vocal" → S = {E, I, O}

$P[\text{V}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) Los sucesos elementales son: {S}, {U}, {E}, {R}, {T}

$P[\text{V}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

En este caso el suceso elemental {E} tiene más probabilidad que el resto, por aparecer dos veces.

4 **Lanzamos dos monedas y anotamos el número de caras que obtenemos. El espacio muestral es $E = \{0, 1, 2\}$.**

a) ¿Tienen los tres sucesos elementales la misma probabilidad?

b) Calcula la probabilidad de:

"0 CARAS"   "1 CARA"   "2 CARAS"

Comprueba que su suma es igual a 1.

c) ¿Cuál es el suceso contrario de "0 CARAS"?

d) ¿Cuál es la probabilidad del suceso "ALGUNA CARA"?

a) No. El suceso {1} tiene más probabilidad que los sucesos {0} y {2}.

b) $\left.\begin{array}{l} P[0 \text{ CARAS}] = P[0] = \frac{1}{4} \\ P[1 \text{ CARA}] = P[1] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ P[2 \text{ CARAS}] = P[2] = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \quad P(0) + P(1) + P(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

c) S = "0 CARAS"; S' = "AL MENOS UNA CARA"

d) $P[\text{AL MENOS UNA CARA}] = 1 - P[\text{NINGUNA CARA}] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

5 **En un sorteo de lotería observamos la cifra en que termina el "gordo".**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe los sucesos: A = MENOR QUE 5; B = PAR

c) Halla los sucesos $A \cup B$; $A \cap B$; A'; B'; $A' \cap B'$.

a) El espacio muestral es: E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

b) A = "MENOR QUE 5" = {0, 1, 2, 3, 4}

B = "PAR" = {0, 2, 4, 6, 8}

c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

$A \cap B = \{0, 2, 4\}$

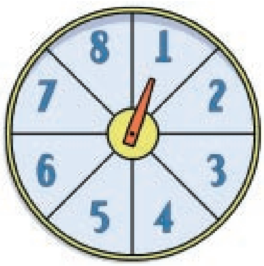
$A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$A' \cap B' = \{5, 7, 9\}$

Ley de Laplace

6 **Se hace girar la flecha y se observa sobre qué número se detiene. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:**



a) Obtener un número par.

b) Obtener un número primo.

c) Obtener 5 o más.

d) Que no salga el 7.

a) $P[\text{PAR}] = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

b) $P[\text{PRIMO}] = \dfrac{5}{8}$

c) $P[5 \text{ O MÁS}] = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

d) $P[\text{NO } 7] = 1 - P[7] = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$

7 **Hemos marcado las seis caras de un dado del siguiente modo: en tres caras hemos puesto un 1; en dos caras una X, y en la que queda, un 2.**

Si lanzamos ese dado una sola vez:

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Los sucesos elementales, ¿tienen la misma probabilidad?

c) Halla la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.

a) $E = \{1, \text{X}, 2\}$

b) No

c) $P[1] = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$; $P[\text{X}] = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$; $P[2] = \dfrac{1}{6}$

Página 243

8 **El dominó es un juego de fichas que llevan dos números, desde el 0-0 hasta el 6-6.**

a) Completa la tabla para obtener y contar las fichas del dominó:

b) Tomamos una ficha al azar. ¿Cuántos sucesos elementales hay?

c) Escribe los siguientes sucesos A = "la suma de puntos es igual a 5" y B = "tiene un 6".

d) ¿Son compatibles los sucesos A y B?

e) Calcula $P[A]$, $P[B]$ y $P[A \cap B]$.

a)

	0	1	2	3	4	5	6
0	0-0	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6
1	×	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-5
2	×	×	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	×	×	×	3-3	3-4	3-5	3-6
4	×	×	×	×	4-4	4-5	4-6
5	×	×	×	×	×	5-5	5-6
6	×	×	×	×	×	×	6-6

b) Hay 28 sucesos elementales.

c) $A = \{2\text{-}3, 1\text{-}4, 0\text{-}5\}$; $B = \{0\text{-}6, 1\text{-}6, 2\text{-}6, 3\text{-}6, 4\text{-}6, 5\text{-}6, 6\text{-}6\}$

d) No; no tienen en común ningún suceso elemental $(A \cap B = \varnothing)$

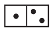
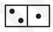
e) $P[A] = \frac{3}{28} \approx 0{,}11$; $P[B] = \frac{7}{28} = 0{,}25$; $P[A \cap B] = P[\varnothing] = 0$

9 **Extraemos una ficha de un dominó. Calcula la probabilidad de que:**

a) La suma de puntos sea igual a 6.

b) La suma de puntos sea menor que 4.

c) Sea una ficha "doble".

En el dominó hay 28 fichas; la ficha  es igual que la  (solo hay una ficha, no dos)

a) $P[\text{SUMA SEA IGUAL A } 6] = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

b) $P[\text{SUMA SEA MENOR QUE } 4] = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$

c) $P[\text{FICHA “DOBLE”}] = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	×	×	×	×	×	×
1	1	2	×	×	×	×	×
2	2	3	4	×	×	×	×
3	3	4	5	6	×	×	×
4	4	5	6	7	8	×	×
5	5	6	7	8	9	10	×
6	6	7	8	9	10	11	12

10 **Lanzamos dos dados y sumamos los puntos obtenidos. Con ayuda de una tabla como la de la primera página de la unidad, calcula la probabilidad de que la suma sea:**

a) Igual a 9 **b) Igual a 7** **c) Menor que 10** **d) 5 ó 6**

¿Cuál es la suma que tiene mayor probabilidad?

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) $P[\text{SUMA } 9] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

b) $P[\text{SUMA } 7] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) $P[\text{SUMA MENOR QUE } 10] = 1 - P[\text{SUMA } 10 \text{ O MÁS}] = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

d) $P[\text{SUMA } 5 \text{ O } 6] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

La suma con mayor probabilidad es $P[\text{SUMA MENOR QUE } 10]$.

11 **Lanzamos dos dados. Llamamos A, B y C a los siguientes sucesos:**

A: La suma de puntos es 5 **B: En uno de los dados ha salido 4**

C: En los dos dados salió el mismo resultado.

a) Escribe los sucesos elementales de A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \cap C$.

b) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos del apartado a).

a) $A = \{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)\}$

$B = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$A \cup B = \{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

$A \cap B = \{(4, 1), (1, 4)\}$

$A \cap C = \varnothing$

b) $P[A] = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

$P[B] = \dfrac{11}{36}$

$P[C] = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$P[A \cup B] = \dfrac{13}{36}$

$P[A \cap B] = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

$P[A \cap C] = 0$

12 **Lanzamos dos dados y anotamos la diferencia entre la mayor y la menor puntuación. Completa la tabla:**

Calcula la probabilidad de que la diferencia sea:

a) 0 **b) 5** **c) 2 como máximo.**

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	0	1	0	1	0	1
⚁	1	0	1	2	3	4
⚂	2	1	0	1	2	3
⚃	3	2	1	0	1	2
⚄	4	3	2	1	0	1
⚅	5	4	3	2	1	0

a) 0 $\rightarrow$ $P[\text{DIFERENCIA SEA } 0] = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

b) 5 $\rightarrow$ $P[\text{DIFERENCIA SEA } 5] = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

c) 2 como máximo:

$P[\text{DIFERENCIA SEA 2 O MENOS}] = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$

13 **Si señalamos al azar una página de este libro, ¿qué probabilidad hay de que sea una página de la unidad de PROBABILIDAD?**

El libro tiene 264 páginas y el tema de probabilidad tiene 18 páginas.

P [PÁGINA SEA DEL TEMA DE PROBABILIDAD] $= \dfrac{18}{264} = \dfrac{3}{44} \approx 0{,}07$

14 **Se extrae una carta de una baraja española. Di cuál es la probabilidad de que sea:**

a) REY o AS.

b) FIGURA y OROS.

c) NO sea ESPADAS.

a) P[REY O AS] $= \dfrac{8}{40} = \dfrac{1}{5}$

b) P[FIGURA Y OROS] = P(FIGURA DE OROS) $= \dfrac{3}{40} = \dfrac{1}{10}$

c) P[NO SEA ESPADAS] $= \dfrac{30}{40} = \dfrac{3}{4}$

15 **En la lotería primitiva se extraen bolas numeradas del 1 al 49. Calcula la probabilidad de que la primera bola extraída:**

a) Sea un número de una sola cifra.

b) Sea un número múltiplo de 7.

c) Sea un número mayor que 25.

a) $P[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] = \dfrac{9}{49}$

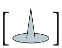
b) $P[7, 14, 21, 28, 35, 42, 49] = \dfrac{7}{49} = \dfrac{1}{7}$

c) $P[26, 27, 28, \ldots, 49] = \dfrac{24}{49}$

16 **Se han lanzado sobre una mesa las chinchetas que había en una caja y se han contado 303 con la punta hacia arriba**  **y 197 con la punta hacia un lado** **.**

Calcula P[**] y P[****].**

Nº total de lanzamientos = 303 + 197 = 500

P[] $= \dfrac{303}{500} = 0{,}606$ P[] $= \dfrac{197}{500} = 0{,}394$

PIENSA Y RESUELVE

17 **Una urna contiene 100 bolas numeradas así: 00, 01, 02 … 99. Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la cifra de las unidades del número que tiene cada bola.**

Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) $x = 3$ b) $y = 3$ c) $x \neq 7$

d) $x > 5$ e) $x + y = 9$ f) $x < 3$

g) $y > 7$ h) $y < 7$

DECENAS \ UNIDADES	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

a) $x = 3 \rightarrow P[x = 3] = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

b) $y = 3 \rightarrow P[y = 3] = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

c) $x \neq 7 \rightarrow P[x \neq 7] = \dfrac{90}{100} = \dfrac{9}{10}$

d) $x > 5 \rightarrow P[x > 5] = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$

e) $x + y = 9 \rightarrow P[x + y = 9] = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

f) $x < 3 \rightarrow P[x < 3] = \dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{10}$

g) $y > 7 \rightarrow P[y > 7] = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$

h) $y < 7 \rightarrow P[y < 7] = \dfrac{7}{100} = \dfrac{7}{10}$

Página 244

18 **En un centro escolar hay 1000 alumnos y alumnas repartidos así:**

	CHICOS	CHICAS
USAN GAFAS	147	135
NO USAN GAFAS	368	350

(Este tipo de tabla numérica se llama tabla de contingencia).

Se elige al azar uno de ellos. Calcula la probabilidad de que:

a) Sea chico **b) Sea chica** **c) Use gafas**

d) No use gafas **e) Sea una chica con gafas**

a) Sea chico $\rightarrow$ $P[\text{SEA CHICO}] = \dfrac{147 + 368}{1\,000} = 0{,}515$

b) Sea chica $\rightarrow$ $P[\text{SEA CHICA}] = 1 - P[\text{SEA CHICO}] = 1 - 0{,}515 = 0{,}485$

c) Use gafas $\rightarrow$ $P[\text{USE GAFAS}] = \dfrac{147 + 135}{1\,000} = 0{,}282$

d) No use gafas $\rightarrow$ $P[\text{NO USE GAFAS}] = 1 - P[\text{USE GAFAS}] = 1 - 0{,}282 = 0{,}718$

e) Sea una chica con gafas $\rightarrow$ $P[\text{SEA UNA CHICA CON GAFAS}] = \dfrac{135}{1\,000} = 0{,}135$

19 **En una empresa hay 200 empleados, 100 hombres y 100 mujeres. Los fumadores son 20 hombres y 15 mujeres.**

Completa la tabla como en el ejercicio anterior.

Se elige un empleado al azar.

Calcula estas probabilidades:

a) Sea fumador o fumadora.

b) Sea hombre y no fume.

c) Sea mujer y no fume.

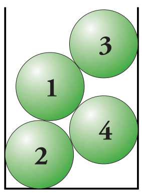
	FUMA	NO FUMA	
HOMBRE	20	80	100
MUJER	15	85	100
	35	165	200

a) $P[\text{FUMADOR O FUMADORA}] = \dfrac{35}{200} = 0{,}175$

b) $P[\text{HOMBRE Y NO FUME}] = \dfrac{80}{200} = 0{,}4$

c) $P[\text{MUJER Y NO FUME}] = \dfrac{85}{200} = 0{,}425$

20 **Luis saca una bola de la urna, observa su número y la vuelve a meter. Después Miguel hace lo mismo.**



a) Construye una tabla con los posibles resultados.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que Luis obtenga mayor puntuación que Miguel?

c) ¿Y la de que la puntuación de Miguel sea superior a la de Luis?

d) ¿Son contrarios los sucesos anteriores?

a)

LUIS	1				2				3				4			
MIGUEL	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
RESULTADOS	11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34	41	42	43	44

b) Nº TOTAL DE RESULTADOS = 16

Luis obtiene mayor puntuación que Miguel en los siguientes casos: 21, 31, 32, 41, 42, 43 $\rightarrow$ 6 posibilidades.

P[LUIS TENGA MAYOR PUNTUACIÓN QUE MIGUEL] $= \dfrac{6}{16} = 0{,}375$

c) Resultados en los que la puntuación de Miguel es superior a la de Luis: 12, 13, 14, 23, 24, 34 $\rightarrow$ 6 posibilidades.

P[MIGUEL TENGA MAYOR PUNTUACIÓN QUE LUIS] $= \dfrac{6}{16} = 0{,}375$

d) No; entre los dos no forman todos los elementos del espacio muestral. Faltarían los sucesos en los que ambos tienen la misma puntuación.

21 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

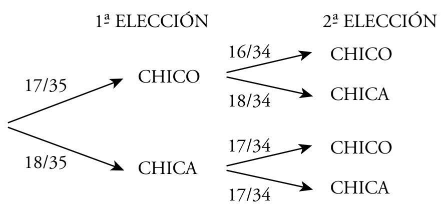
Experiencias compuestas

22 **En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase. Calcula la probabilidad de que:**

a) Los dos sean chicos.

b) Sean dos chicas.

c) Sean un chico y una chica.



a) P[DOS CHICOS] $= \dfrac{17}{35} \cdot \dfrac{16}{34} = \dfrac{8}{35}$

b) P[DOS CHICAS] $= \dfrac{18}{35} \cdot \dfrac{17}{34} = \dfrac{9}{35}$

c) P[UN CHICO Y UNA CHICA] $= \dfrac{17}{35} \cdot \dfrac{18}{34} + \dfrac{18}{35} \cdot \dfrac{17}{34} = \dfrac{18}{35}$

Página 245

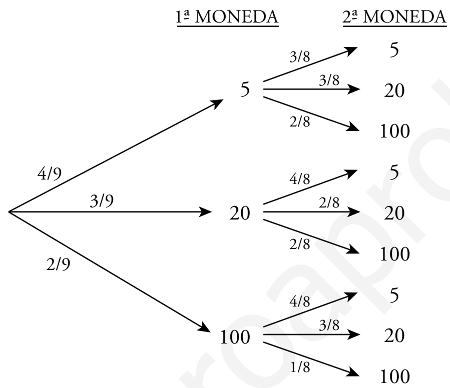
23 **Javier tiene en su monedero 4 monedas de cinco céntimos, 3 de veinte y 2 de un euro. Saca dos monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?**

a) Que las dos sean de cinco céntimos

b) Que ninguna sea de un euro

c) Que saque 1,20 €

En el diagrama de árbol, las monedas aparecen en céntimos. 1 € = 100 cent.



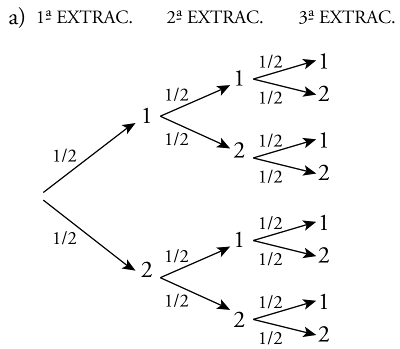
a) $P[\text{DOS DE 5 CENT.}] = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{NINGUNA DE 1 €}] = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right) + \frac{3}{9}\left(\frac{4}{8} + \frac{2}{8}\right) = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{12}$

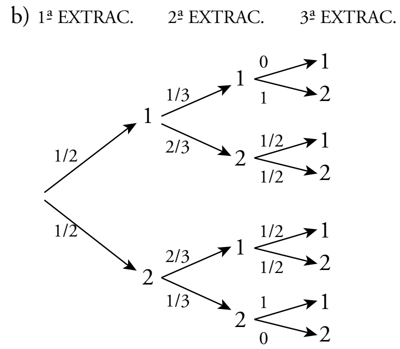
c) $P[\text{SACAR 1,20 €}] = P[100, 20] = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{6}$

24 **En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones. Calcula la probabilidad de que el número formado por las tres bolas sea el 121, suponiendo que:**

a) La bola se reintegra a la bolsa **b) La bola no se devuelve a la bolsa.**



$P[121] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$



$P[121] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

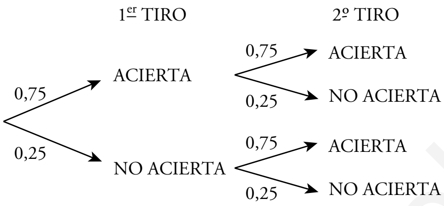
25 **Un jugador de baloncesto suele acertar el 75% de sus tiros desde el punto de lanzamiento de personales. Si acierta el primer tiro, puede tirar de nuevo. Calcula la probabilidad de que:**

a) Haga dos puntos.

b) Haga un punto.

c) No haga ningún punto.

P[ACERTAR] = 0,75



a) P[DOS PUNTOS] = 0,75 · 0,75 = 0,56

b) P[UN PUNTO] = 0,75 · 0,25 + 0,25 · 0,75 = 0,37

c) P[NO HAGA NINGÚN PUNTO] = 0,25 · 0,25 = 0,06

26 **En un laboratorio se somete un nuevo medicamento a tres controles. La probabilidad de pasar el primero es 0,89; la de pasar el segundo es 0,93 y la de pasar el tercero es 0,85.**

¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo producto pase las tres pruebas?

Las tres pruebas son independientes una de otra.

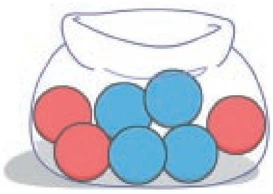
P[PASAR EL PRIMER CONTROL] = 0,89

P[PASAR EL SEGUNDO CONTROL] = 0,93

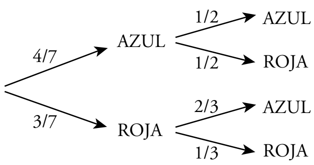
P[PASAR EL TERCER CONTROL] = 0,85

P[PASAR LOS TRES CONTROLES] = 0,89 · 0,93 · 0,85 = 0,703

27 **Se extraen dos bolas de esta bolsa.**



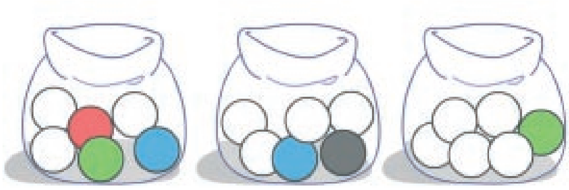
Calcula la probabilidad de que las dos sean del mismo color.

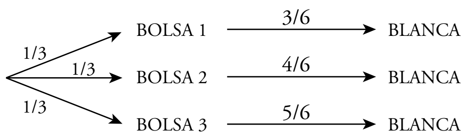


P[AZUL Y AZUL] = $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$ P[ROJA Y ROJA] = $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$

P[AMBAS DEL MISMO COLOR] = $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

28 **¿Cuál es la probabilidad de obtener bola blanca al elegir al azar una de estas bolsas y extraer de ella una bola?**





$$P\,[\text{BLANCA}] = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{6}+\frac{2}{9}+\frac{5}{18}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$