Ejercicio nº 1.- a) Calcula el dominio de definición de función $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$.

b) Calcula la tasa de variación media de $[f(x)]^2$ en el intervalo $[1,3]$.

1,5 puntos

Ejercicio nº 2.- Dada la función cuadrática $f(x)=-x^2+x+2$, se pide:

a) Calcular las coordenadas del vértice indicando si se trata de un máximo o de un mínimo.

b) Calcular los puntos de corte con el eje X.

c) Representar la parábola y su eje de simetría.

d) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Es cóncava o convexa?

2 puntos

Ejercicio nº 3.- a) Representa la función $y=\dfrac{2}{x-3}+1$, indicando el nombre de su gráfica, las ecuaciones de sus asíntotas y la tendencia de la función. Dibuja, en los mismos ejes de coordenadas, la recta de ecuación $y=2x-5$.

b) Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y=2x-5 \\ y=\dfrac{2}{x-3}+1 \end{cases}$ y explica, razonadamente que relación hay entre las soluciones obtenidas y la representación gráfica del apartado anterior.

3 puntos

Ejercicio nº 4.- Dada la función definida a trozos $y=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2-4x+3 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$, se pide:

a) Su representación gráfica.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y estudiar su continuidad.

2 puntos

Ejercicio nº 5.- Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $3^{1-x^2}=\dfrac{1}{27}$ b) $5^{3x+1}=\sqrt[4]{125}$ c) $\log_2(x^2-16)=0$ d) $\log\dfrac{5x+3}{x}=1$

1,5 puntos

Ejercicio nº 6.- Cierto tipo de árbol crece durante los cinco primeros años, según la función $y=2^{x-1}$, llegando a esa edad a su máxima altura. A los diez años de vida, su madera alcanza la máxima calidad y es talado para su aprovechamiento en la industria del mueble. Representa la función que define la altura del árbol a partir del primer año de vida. Indica sus características.

1,5 puntos

Nota.- Los cuatro primeros ejercicios son obligatorios, y el alumno elegirá uno entre el 5 y el 6.

SOLUCIONES

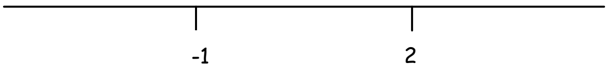
E.1. a) El dominio de definición de una función radical son los valores de x que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero:

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - x - 2 \geq 0\}$$

Por lo tanto, se trata de resolver la inecuación $x^2 - x - 2 \geq 0$.
Para ello, resolvemos su ecuación asociada:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}.$$

Representamos las soluciones en la recta real IR y comprobamos en qué intervalos se cumple la inecuación:



$(-10) \to (-10)^2 - (-10) - 2 = 100 + 10 - 2 \geq 0 \to$ cierto

$(0) \to (0)^2 - (0) - 2 = -2 \geq 0 \to$ falso

$(10) \to (10)^2 - (10) - 2 = 100 - 10 - 2 \geq 0 \to$ cierto.

Luego

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - x - 2 \geq 0\} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

b) $[f(x)]^2 = \left(\sqrt{x^2 - x - 2}\right)^2 = x^2 - x - 2$. Calculamos la tasa de variación media en el intervalo pedido:

$$\text{T.V.M.}[1,3] = \frac{y(3) - y(1)}{3 - 1} = \frac{(3^2 - 3 - 2) - (1^2 - 1 - 2)}{2} = \frac{4 - (-2)}{2} = 3.$$

Coincide con la pendiente del segmento que une el punto (1, f(1)) con el punto (3,f(3)).

E.2. $f(x) = -x^2 + x + 2$

a) Vértice

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}; \quad f(x_0) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{4} \Rightarrow V\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right).$$

Como $a = -1 < 0 \Rightarrow$ V es un máximo.

b) Puntos de corte con el eje X.

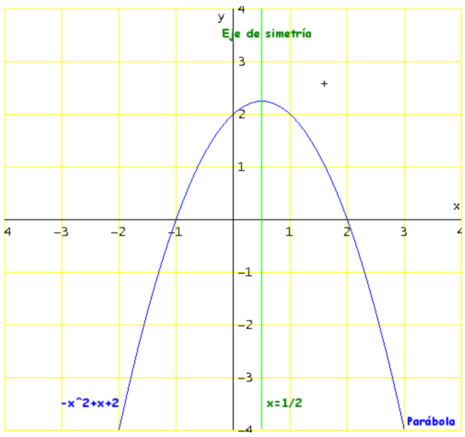
Su segunda coordenada ha de ser cero, por lo tanto serán las soluciones de la ecuación $-x^2 + x + 2 = 0$, es decir,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow$$ Los puntos son $(-1,0)$ y $(2,0)$.

c) Representación gráfica.

Tabla

x	y
0,5	2,25
-1	0
2	0
-2	-4
3	-4



d) Crecimiento y decrecimiento. Concavidad.

- f es CRECIENTE cuando $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.
- f es DECRECIENTE cuando $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
- f es CONVEXA.

E.3. a) Representación gráfica.

Asíntota vertical: $x = 3$

Asíntota horizontal: $y = 1$

Tabla de valores

x	y
4	3
5	2
7	3/2
2	-1
1	0
-1	1/2

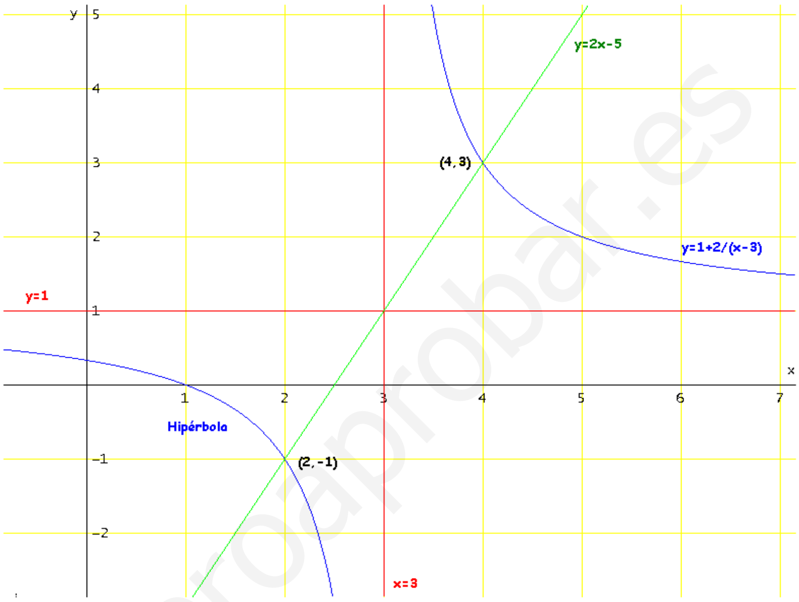


Tabla de la recta

x	y
0	-5
2	-1
3	1

Nombre de la gráfica: Hipérbola.

Tendencia: Tanto por la derecha como por la izquierda, la función se acerca a la altura 1, es decir, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x-3}+1\right) = 1$.

b) Resolución algebraica del sistema.

$$\left\{\begin{array}{l} y = 2x-5 \ ^{(*)} \\ y = \dfrac{2}{x-3}+1 \end{array}\right. \overset{\text{IGUALACIÓN}}{\Rightarrow} 2x-5 = \frac{2}{x-3}+1 \Rightarrow 2x-6 = \frac{2}{x-3} \Rightarrow (2x-6)(x-3) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x - 6x + 18 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \left\{\begin{array}{l} 4 \\ 2 \end{array}\right..$$

- Si $x = 4 \overset{(*)}{\Rightarrow} y = 2\cdot 4 - 5 = 3$.
- Si $x = 2 \overset{(*)}{\Rightarrow} y = 2\cdot 2 - 5 = -1$.

SOLUCIÓN: $P_1(4,3)$ y $P_2(2,-1)$

La solución obtenida son los puntos de intersección entre la recta y la hipérbola. También se llaman puntos de corte entre las gráficas.

E.4. $y=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2-4x+3 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

a) Representación gráfica.

Debemos dibujar una semirrecta en el intervalo $\left(-\infty,0\right]$ y una rama parábola en el intervalo $(0,+\infty)$.

Para la recta $y_1 = x+1$ hacemos una tabla de valores con tres puntos:

x	0	-1	-2
y	1	0	-1

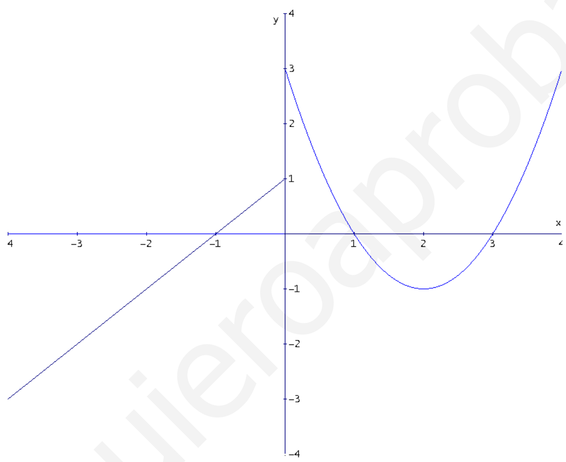
Para la parábola $y_2 = x^2-4x+3$ necesitamos localizar el vértice y los puntos de corte con el eje X:

Vértice: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$; $y_0 = 2^2-4\cdot 2+3 = -1 \Rightarrow V(2,-1)$.

Puntos de corte con el eje X: $x^2-4x+3=0 \Rightarrow x = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right.$

Tabla de valores

x	y
0	1
-1	0
0	3
3	0
1	0
2	-1



El punto donde acaba la recta, (0,1), es cerrado (“relleno”); el punto donde comienza la parábola, (0,3) es abierto (“hueco”).

b) Crecimiento, decrecimiento y continuidad.

- La función es CRECIENTE si $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.
- La función es DECRECIENTE si $x\in(0,2)$.
- La función presenta un PUNTO DE DISCONTINUIDAD (de salto finito y tamaño 2) en $x=0$.

E.5. a) $3^{1-x^2} = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^{1-x^2} = \frac{1}{3^3} \Rightarrow 3^{1-x^2} = 3^{-3} \Rightarrow 1-x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$.

b) $5^{3x+1} = \sqrt[4]{125} \Rightarrow 5^{3x+1} = \sqrt[4]{5^3} \Rightarrow 5^{3x+1} = 5^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 3x+1 = \frac{3}{4} \Rightarrow 3x = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{12}$.

c) $\log_2(x^2-16) = 0 \Rightarrow 2^0 = x^2-16 \Rightarrow x^2 = 17 \Rightarrow x = \pm\sqrt{17}$.

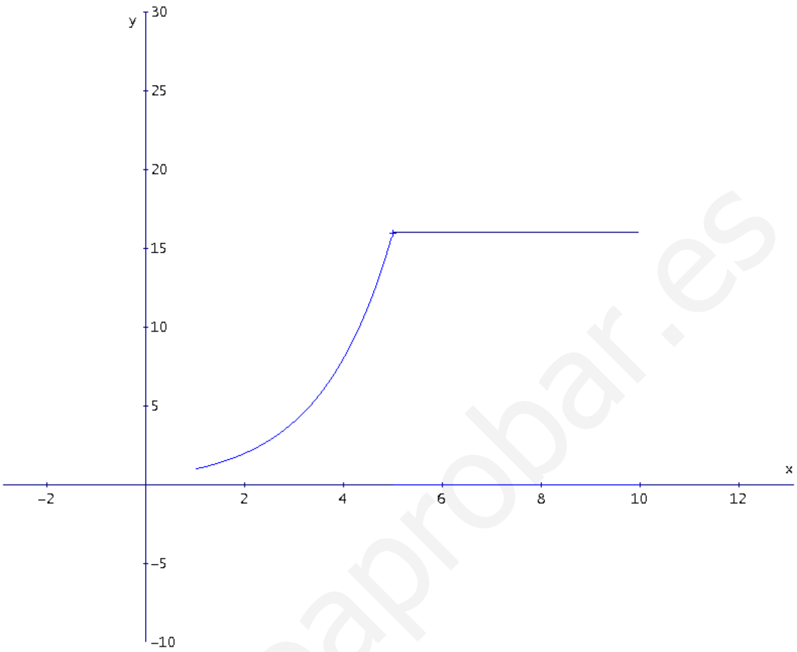
d) $\log\frac{5x+3}{x} = 1 \Rightarrow 10^1 = \frac{5x+3}{x} \Rightarrow 10x = 5x+3 \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$.

E.6. La función que describe la altura del árbol entre el primer y el décimo año de vida es

$$y = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } 1 \le x \le 5 \\ 16 & \text{si } 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

<u>Tabla de valores</u>

x	y
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
8	16
10	16



<u>Características de la función</u>:

- Se trata de una función definida a trozos, cuyo dominio es $\text{Dom } f = [1,10]$.
- Es CRECIENTE en el intervalo $[1,5]$ y CONSTANTE en el intervalo $[5,10]$.
- Es CONTINUA en todo su dominio de definición.