IES ATENEA. GLOBAL/RECUPERACIÓN. MATEMÁTICAS B. 4º ESO.

Nombre: ____

Evaluación: **Primera**. Fecha: 24 de enero de 2011

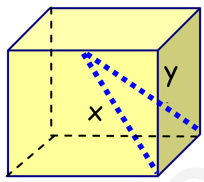
NOTA	

Ejercicio nº 1. - a) Expresar como un solo radical $2\sqrt{45} - \dfrac{\sqrt{20}}{3}$.

b) Racionaliza la expresión $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}$, simplificando el resultado.

1,5 puntos

Ejercicio nº 2. - En un cubo de arista 1, calcula las distancias que aparecen en la figura expresando el resultado en forma de radical. ¿Cuánto vale $x^2 - y^2$?



2 puntos

Ejercicio nº 3. - Halla el cociente y el resto de esta división: $(3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 + 2)$.

1 punto

Ejercicio nº 4. - Calcula el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x) = 7x^3 - mx^2 + 3x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

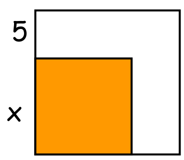
1 punto

Ejercicio nº 5. - Factoriza el siguiente polinomio e indica cuáles son sus raíces:

$$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10.$$

1 punto

Ejercicio nº 6. - Si el lado de un cuadrado aumenta 5 cm, su área se multiplica por 4. ¿Cuál era el lado inicial del cuadrado?



1,5 puntos

Ejercicio nº 7. - Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones, expresando la solución en forma gráfica, de intervalo o semirrecta y de conjunto de números reales:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2x+2}{3} > \dfrac{3x-7}{6} \\[2ex] \dfrac{2x-1}{4} + 2x < \dfrac{2x-9}{4} \end{cases}.$$

2 puntos

SOLUCIONES

E.1. a) Expresar como un solo radical $2\sqrt{45}-\dfrac{\sqrt{20}}{3}$.

b) Racionaliza la expresión $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$, simplificando el resultado.

---

a) Sacamos todos los factores que podamos de la raíz y restamos:

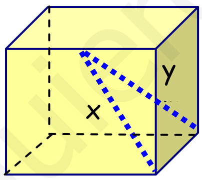
$$2\sqrt{45}-\frac{\sqrt{20}}{3}=2\sqrt{3^2\cdot 5}-\frac{\sqrt{2^2\cdot 5}}{3}=2\cdot 3\sqrt{5}-\frac{2\sqrt{5}}{3}=6\sqrt{5}-\frac{2\sqrt{5}}{3}=\frac{18\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{3}=\boxed{\frac{16\sqrt{5}}{3}}.$$

b) Debemos multiplicar el numerador y el denominador por la expresión conjugada del denominador. Eso sí, después hay que hacer operaciones, extraer factor común y simplificar como indica el enunciado:

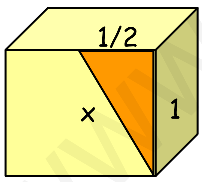
$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}{6-3}=$$

$$=\frac{6-2\sqrt{18}+3}{3}=\frac{9-6\sqrt{2}}{3}=\frac{\cancel{3}\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)}{\cancel{3}}=\boxed{3-2\sqrt{2}}.$$

E.2. En un cubo de arista 1, calcula las distancias que aparecen en la figura expresando el resultado en forma de radical. ¿Cuánto vale x^2-y^2?

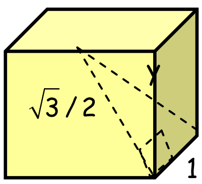


Para calcular x formamos un triángulo rectángulo en el que x es la hipotenusa, el cateto vertical mide 1 y el cateto horizontal, 1/2, y aplicamos el T^ma^ de Pitágoras:



$$x^2=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow x^2=1+\frac{1}{4}\Rightarrow x^2=\frac{3}{4}\Rightarrow \boxed{x}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\,u}.$$

Para calcular y formamos otro triángulo rectángulo y volvemos a aplicar el T^ma^ de Pitágoras:



$$y^2=1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\Rightarrow y^2=1+\frac{3}{4}\Rightarrow y^2=\frac{7}{4}\Rightarrow \boxed{y}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\boxed{\frac{\sqrt{7}}{2}\,u}.$$

Ahora, obtener la diferencia de sus cuadrados resulta sencillo:

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{4}{4} = \boxed{-1}.$$

E.3. Halla el cociente y el resto de esta división: $(3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 + 2)$.

---

a) Ordenamos el dividendo en forma decreciente, dejando un hueco en la columna de los términos de grado 1:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -5x^3 & +4x^2 & & -1 & x^2+2 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & & -6x^2 & & & 3x^2-5x-2 \\ \cline{1-3}
 & -5x^3 & -2x^2 & & & \\
 & +5x^3 & & +10x & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^2 & +10x & & \\
 & & +2x^2 & & +4 & \\ \cline{3-5}
 & & & 10x & +3 &
\end{array}$$

<u>Cociente</u>: $\boxed{C(x) = 3x^2 - 5x - 2}$; <u>Resto</u>: $\boxed{R(x) = 10x + 3}$.

E.4. Calcula el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x) = 7x^3 - mx^2 + 3x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

Para resolver este ejercicio aplicamos el T^ma^ del Resto, que dice que el resto de la división de un polinomio P(x) entre $(x - a)$ coincide con P(a) (valor numérico del polinomio para $x = a$). Por lo tanto disponemos de dos caminos diferentes para calcular el parámetro m:

- Hacer la división y obligar a que el resto sea cero, pues nos exigen que sea divisible:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 7 & -m & +3 & -2 \\
-1 & \downarrow & -7 & m+7 & -m-10 \\ \hline
 & 7 & -m-7 & m+10 & \boxed{-m-12}
\end{array}$$

$$r = 0 \Rightarrow -m - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -12}.$$

- Calcular el valor numérico del polinomio para $x = -1$:

$r = 0 \Rightarrow P(-1) = 0 \Rightarrow 7 \cdot (-1)^3 - m \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 2 = 0 \Rightarrow -7 - m - 3 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -12}$.

Yo creo que resulta bastante más cómoda la segunda opción.

E.5. Factoriza el siguiente polinomio e indica cuáles son sus raíces:

$$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10.$$

Aplicamos la regla de Ruffini para factorizar, probando con los divisores del término independiente, 10:

	2	- 3	- 9	+ 10
+ 1	↓	+ 2	- 1	- 10
	2	- 1	- 10	0
- 2	↓	- 4	+ 10	
	2	-5	0	

Entonces, $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = (x-1)\cdot(x+2)\cdot(2x-5)$.

Las raíces del polinomio son los valores que lo anulan, es decir, las soluciones de la ecuación:

$$2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x+2)\cdot(2x+5) = 0$$

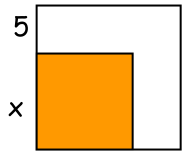
$x = 1$

$x = -2$

$x = 5/2$

(*) Para que el producto de varios factores sea cero, alguno de ellos ha de ser cero.

E.6. Si el lado de un cuadrado aumenta 5 cm, su área se multiplica por 4. ¿Cuál era el lado inicial del cuadrado?



Planteamos una ecuación:

Área del cuadrado pequeño (anaranjado): x^2.

Área del cuadrado grande (blanco): $(x+5)^2$.

Ecuación:

$$(x+5)^2 = 4x^2 \Rightarrow x^2 + 10x + 25 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 - 10x - 25 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100+300}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{400}}{6} = \frac{10 \pm 20}{6} = \begin{cases} 5 \\ \cancel{-5/3} \end{cases}.$$

Se rechaza el valor negativo por tratarse de una medida de longitud.

Solución.- El cuadrado inicial tiene 5 cm de lado.

E.7. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones, expresando la solución en forma gráfica, de intervalo o semirrecta y de conjunto de números reales:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2x+2}{3} > \dfrac{3x-7}{6} \\ \dfrac{2x-1}{4} + 2x < \dfrac{2x-9}{4} \end{cases}.$$

Resolveremos cada una de las inecuaciones por separado y la solución del sistema será la parte común de ambas soluciones.

- $(I_1) \rightarrow \frac{x-1}{2} + \frac{2x+2}{3} > \frac{3x-7}{6}$

Resolvemos la ecuación asociada a la inecuación, representamos la solución en la recta real $\mathbb{R}$ y analizamos en que tramo se cumple la desigualdad:

$$\frac{x-1}{2} + \frac{2x+2}{3} = \frac{3x-7}{6} \Rightarrow \frac{3x-3+4x+4}{6} = \frac{3x-7}{6} \Rightarrow 7x+1 = 3x-7 \Rightarrow 4x = -8 \Rightarrow x = -2\,.$$

$(0) \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} > -\frac{7}{6} \Rightarrow \frac{-3+4}{6} > -\frac{7}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} > -\frac{7}{6}$ (cierto) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ es la semirrecta donde se encuentra el 0.

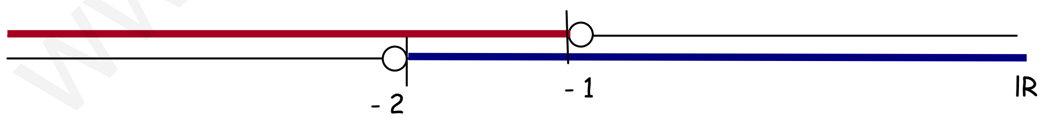
- $(I_2) \rightarrow \frac{2x-1}{4} + 2x < \frac{2x-9}{4}$

Repetimos el procedimiento anterior:

$$\frac{2x-1}{4} + 2x = \frac{2x-9}{4} \Rightarrow \frac{2x-1+8x}{4} = \frac{2x-9}{4} \Rightarrow 10x-1 = 2x-9 \Rightarrow 8x = -8 \Rightarrow x = -1\,.$$

$(0) \rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{9}{4}$ (falso) $\Rightarrow$ se trata de la semirrecta donde no está el valor 0.

- La parte común de ambas soluciones es "azulgrana", si la pintáramos de "blanco" no se vería:



<u>Solución</u>: $(-2,-1) = \left\{ x \in \mathbb{R} / -2 < x < -1 \right\}$.