

3. Proporcionalidad directa e inversa

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1 Halla el valor de x para que se cumplan las siguientes proporciones.

a) $\frac{12}{3} = \frac{4}{x}$

b) $\frac{9}{60} = \frac{x}{40}$

c) $\frac{15}{x} = \frac{3}{36}$

a) $x = \frac{12}{4 \cdot 3} = 1$

b) $x = \frac{9 \cdot 40}{60} = 6$

c) $x = \frac{15 \cdot 36}{3} = 180$

3.2 Luis y Carlos cambian divisas. Luis cambia 5 500 soles del Perú y le dan 1 270 euros. A Carlos le dan 1 062 euros.

a) ¿Cuántos soles ha cambiado Carlos?

b)Cuál es el cambio euro-sol?

a) $\frac{5\,500}{1\,270} = \frac{x}{1\,062} \Rightarrow 5\,500 \cdot 1\,062 = 1\,270 \cdot x \Rightarrow x = \frac{5\,841\,000}{1\,270} = 4\,599,2$

Carlos ha cambiado 4 599,20 soles. (No hay monedas de un céntimo de soles del Perú, la menor es de 20 céntimos.)

b) $\frac{5\,500}{1\,270} = \frac{1}{x} \Rightarrow 5\,500 \cdot x = 1\,270 \Rightarrow x = 0,2$

Un sol del Perú equivale a 20 céntimos de euro.

3.3 Indica si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.

a) Millones de euros que se dedican a combatir el hambre en el mundo y número de personas fallecidas a causa del hambre.

b) Velocidad de un coche y tiempo que tarda en recorrer una distancia determinada.

c) Kilogramos de pintura y superficie pintada.

Razona la respuesta.

a) No son directamente proporcionales. Cuanto más dinero se destine a combatir el hambre, menos personas morirán.

b) No son directamente proporcionales. Si se dobla la velocidad, el tiempo en recorrer una distancia determinada se reduce a la mitad.

c) Son directamente proporcionales. Si doblamos la cantidad de pintura, podremos pintar el doble de superficie.

3.4 Reparte 450 de forma directamente proporcional a 25, 50 y 75.

$$25k + 50k + 75k = 450 \Rightarrow 150k = 450 \Rightarrow k = 3$$

De las 450 unidades, la parte proporcional a 25 es 75, la parte proporcional a 50 es 150 y la parte proporcional a 75 es 225.

3.5 Reparte 10 650 en proporción directa a 3, 5 y 7.

$$3k + 5k + 7k = 10\,650 \Rightarrow 15k = 10\,650 \Rightarrow k = 710$$

De las 10 650 unidades, la parte proporcional a 3 es 2 130; la parte proporcional a 5, 3 550, y la parte proporcional a 7, 4 970.

3.6 Un padre quiere repartir 140 sellos entre sus dos hijos de forma directamente proporcional a sus edades, que son 13 y 15 años.

¿Cuántos sellos recibirá cada uno?

$$13k + 15k = 140 \Rightarrow 28k = 140 \Rightarrow k = 5$$

El hijo de 13 años recibirá $13 \cdot 5 = 65$ sellos, y el de 15 años se quedará con $15 \cdot 5 = 75$ sellos.

3.7 Una máquina, A, fabrica 280 tornillos y salen 14 defectuosos. Otra máquina, B, fabrica 275 tornillos y salen 11 defectuosos.

a) ¿Cuál es el porcentaje de tornillos defectuosos fabricados por cada máquina?

b) ¿Cuál de las dos máquinas trabaja mejor?

$$\text{a) } \frac{14}{280} = \frac{x}{100} \Rightarrow 1\,400 = 280x \Rightarrow x = 5.$$

$$\frac{11}{275} = \frac{x}{100} \Rightarrow 1\,100 = 275x \Rightarrow x = 4.$$

El porcentaje de tornillos defectuosos hechos por la máquina A es del 5% y el de B es del 4%.

b) Trabaja mejor la máquina B. El porcentaje de tornillos que salen defectuosos es menor.

3.8 Un análisis realizado en una granja a 7 200 animales ha permitido detectar un 24% de animales enfermos. Se emplea como tratamiento una dosis de vitamina A en 2 de cada 3 animales.

¿Cuántas dosis de vitamina A se necesitan?

Animales enfermos: $7\,200 \cdot 0,24 = 1\,728$

Para el tratamiento planteamos la siguiente proporción: $\frac{2}{3} = \frac{x}{1\,728} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 1\,728}{3} = 1\,152$.

Se necesitan 1 152 dosis de vitamina A.

3.9 Aumenta las siguientes cantidades en los porcentajes que se indican.

a) 134 en un 8%.

c) 45,76 en un 12%.

b) 4 563 en un 17,3%.

d) 896,32 en un 0,4%.

$$\text{a) } 134 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 144,72$$

$$\text{c) } 45,76 \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right) = 51,25$$

$$\text{b) } 4\,563 \cdot \left(1 + \frac{17,3}{100}\right) = 5\,352,4$$

$$\text{d) } 896,32 \cdot \left(1 + \frac{0,4}{100}\right) = 899,9$$

3.10 Disminuye las siguientes cantidades en los porcentajes que se indican.

a) 54 en un 5%.

c) 98,7 en un 79%.

b) 762 en un 9,6%.

d) 2 369,83 en un 0,68%.

$$\text{a) } 54 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 51,3$$

$$\text{c) } 98,7 \cdot \left(1 - \frac{79}{100}\right) = 20,73$$

$$\text{b) } 762 \cdot \left(1 - \frac{9,6}{100}\right) = 688,85$$

$$\text{d) } 2\,369,83 \cdot \left(1 - \frac{0,68}{100}\right) = 2\,353,715$$

- 3.11 La cantidad 12 500 se incrementa primero en un 12 % y el resultado se vuelve a incrementar en otro 4 %. ¿Cuál es la cantidad final resultante?

$$\text{Primer incremento: } 12\,500 \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right) = 14\,000$$

$$\text{Segundo incremento: } 14\,000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 14\,560$$

La cantidad final es 14 560.

- 3.12 El precio de una bicicleta es 175 euros. En rebajas hacen un descuento del 25 %, pero, además, hay que pagar el 16 % de IVA.

¿Cuánto cuesta entonces?

$$\text{El precio de la bicicleta con el descuento es de } 175 \cdot \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 131,25 \text{ euros.}$$

Al precio tenemos que añadirle el IVA para saber cuánto nos costará finalmente. Con lo cual, el precio final de la bicicleta es de

$$131,25 \cdot \left(1 + \frac{16}{100}\right) = 152,25 \text{ euros.}$$

- 3.13 ¿Es lo mismo rebajar primero un artículo un 3 % y luego encarecerlo un 4 % que encarecerlo primero un 4 % y luego rebajarlo un 3 %?

Sea el precio del artículo x euros.

$$\text{En el caso I tenemos: } \left(x \cdot \left(1 - \frac{3}{100}\right)\right) \left(1 + \frac{4}{100}\right)$$

Por las propiedades asociativa y conmutativa tenemos:

$$\left(x \cdot \left(1 - \frac{3}{100}\right)\right) \left(1 + \frac{4}{100}\right) = x \left(1 - \frac{3}{100}\right) \left(1 + \frac{4}{100}\right) = x \left(1 + \frac{4}{100}\right) \left(1 - \frac{3}{100}\right) = \left(x \left(1 + \frac{4}{100}\right)\right) \left(1 - \frac{3}{100}\right)$$

Llegamos al caso II, donde primero se encarece un 4 % y luego se rebaja un 3 %.

Por tanto, es lo mismo rebajar primero un artículo un 3 % y luego encarecerlo un 4 %, que encarecerlo primero un 4 % y luego rebajarlo un 3 %.

- 3.14 Los productos de cierta empresa subieron un 10 % en 2002 y un 12 % en 2003, y bajaron un 4 % en 2004. ¿Cuál fue el porcentaje de variación de los precios en esos tres años?

Tomamos 100 como valor inicial para calcular los porcentajes.

$$\text{Valor final de 100 euros: } 100 \cdot 1,10 \cdot 1,12 \cdot 0,96 = 118,272$$

Por tanto, ha habido una variación positiva del 18,272 %

- 3.15 La tabla representa cantidades de dos magnitudes inversamente proporcionales. Halla la constante de proporcionalidad y completa la tabla, calculando x e y

M	2	3	4	y
M'	12	8	x	5

$$\text{Constante de proporcionalidad: } 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot x = y \cdot 5 = 24.$$

$$\text{De donde obtenemos que } x = \frac{24}{4} = 6, \text{ e } y = \frac{24}{5} = 4,8.$$

- 3.16 La constante de proporcionalidad de dos magnitudes inversamente proporcionales es 18. Escribe cuatro parejas de cantidades que cumplan esa condición.

M	1	2	3	4
M'	18	9	6	4,5

3.17 Con un depósito de agua se llenan 36 jarras. ¿Cuántas jarras se podrán servir si solo se llenan hasta tres cuartos de su capacidad?

Si se llenan menos, se podrán servir más jarras. Son magnitudes inversamente proporcionales.

$$36 \cdot 1 = (\text{N.º de jarras}) \cdot \frac{3}{4}. \text{ Se podrán llenar 48 jarras.}$$

3.18 Para abonar un campo de cultivo se han necesitado 42 300 kilogramos de un cierto abono que contiene un 25 % de nitratos.

¿Cuántos kilogramos se necesitarían de otro tipo de abono que contiene un 36 % de nitratos, para que el campo recibiese la misma cantidad de nitratos?

Buscamos la constante: $42\,300 \cdot 25 = 1\,057\,500$

Para el abono al 36 %: $x \cdot 36 = 1\,057\,500$, luego $x = 29\,375$ kilogramos

3.19 Reparte 93 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 5.

$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{3}k + \frac{1}{5}k = 93 \Rightarrow \frac{15k + 10k + 6k}{30} = 93 \Rightarrow 31k = 93 \cdot 30 \Rightarrow k = \frac{2\,790}{31} = 90$$

De las 93 unidades, la parte inversamente proporcional a 2 es 45, la correspondiente a 3 es 30 y la correspondiente a 5 es 18.

3.20 Reparte 168 de modo inversamente proporcional a 3, 5 y 6.

$$\frac{1}{3}k + \frac{1}{5}k + \frac{1}{6}k = 168 \Rightarrow \frac{10k + 6k + 5k}{30} = 168 \Rightarrow 21k = 168 \cdot 30 \Rightarrow k = \frac{5\,040}{21} = 240$$

De las 168 unidades, la parte inversamente proporcional a 3 es 80, la correspondiente a 5 es 48 y la correspondiente a 6 es 40.

3.21 Al repartir 60 de forma inversamente proporcional a los números 2 y x , se sabe que la parte correspondiente a 2 es 36. Halla x .

Por un lado, tenemos $\frac{1}{2}k + \frac{1}{x}k = 60$. Y por otro, sabemos que $\frac{1}{2}k = 36$. Con esta última igualdad tenemos que $k = 72$.

Sustituyendo este dato en la primera igualdad resulta: $\frac{1}{2}72 + \frac{1}{x}72 = 60$. De donde $x = \frac{72}{60 - 36} = 3$.

3.22 Se reparten 60 euros entre el primer y segundo clasificado de una carrera, de manera inversamente proporcional al puesto alcanzado.

¿Cuántos euros recibirá cada uno?

Tenemos que realizar un reparto inversamente proporcional al puesto.

$$\frac{1}{2}k + 1k = 60 \Rightarrow \frac{3}{2}k = 60 \Rightarrow k = 40$$

El primer clasificado recibirá $1 \cdot 40 = 40$ euros, y el segundo, $\frac{1}{2} \cdot 40 = 20$ euros.

3.23 Para construir un puente de 1 200 metros se dispone de 300 vigas, que se colocarían cada 40 metros. Después de un estudio de carga, se decide reforzar la obra y utilizar 100 vigas más.

¿A qué distancia se deben colocar las vigas?

Si ponemos más vigas en el mismo espacio, la distancia entre ellas será menor.

$$40 \cdot 300 = \text{Distancia} \cdot 400 \Rightarrow \text{Distancia} = \frac{40 \cdot 300}{400} = 30 \text{ m}$$

Las vigas se deben colocar a 30 metros de distancia entre ellas.

3.24 Si 10 grifos tardan 12 horas en llenar un depósito de 15 metros cúbicos, ¿cuánto tardarán 8 grifos en llenar otro depósito de 7 metros cúbicos?

10 grifos llenan 15 m³ en 12 horas.

1 grifo llena 15 m³ en $12 \cdot 10 = 120$ horas.

1 grifo llena 1 m³ en $\frac{120}{15} = 8$ horas.

8 grifos llenan 1 m³ en $\frac{8}{8} = 1$ hora.

8 grifos llenan 7 m³ en $1 \cdot 7 = 7$ horas.

3.25 El alquiler de 3 coches para 7 días cuesta 630 euros. ¿Cuántos coches se podrán alquilar con 900 euros durante 5 días?

7 días ————— 3 coches ————— 630 euros

5 días ————— x coches ————— 900 euros

Proporcionalidad inversa

Proporcionalidad directa

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{7} \cdot \frac{630}{900} = \frac{3150}{6300} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3 \cdot 2 = 6$$

Se pueden alquilar 6 coches.

PROBLEMAS PROPUESTOS

3.26 El número de alumnos y alumnas de un centro escolar matriculados en Secundaria está comprendido entre 1 650 y 1 700. Se sabe que exactamente el 54 % está matriculado en Educación Secundaria. ¿Cuántos alumnos están matriculados en el centro?

La solución tiene que ser un número natural, puesto que el número de personas es natural.

Lo mismo pasa con el 54 % de la solución.

Tiene que ser un natural, porque corresponde al número de alumnos y alumnas de Secundaria.

Tenemos que encontrar un natural entre 1 650 y 1 700 que cumpla que su 54 % es un natural.

$$\frac{54}{100} = \frac{1728}{3200} = \frac{1674}{3100} = \frac{1620}{3000} = \frac{1701}{3150} = \frac{1647}{3050}$$

Hay matriculados en el centro 3 100 alumnos.

3.27 Un jugador de baloncesto ha obtenido en sus lanzamientos de dos puntos un porcentaje de acierto del 80 %. ¿Cuál será el mínimo número de lanzamientos que debe realizar para poder obtener ese porcentaje?

El número de lanzamientos es un natural.

Debemos encontrar el menor natural que cumple que el 80 % es un natural.

Se debe cumplir la relación: $\frac{80}{100}$.

Hallando la fracción irreducible encontramos los menores naturales que están en esa proporción: $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$.

El mínimo número de lanzamientos que debe realizar el jugador de baloncesto es de 5.

Proporcionalidad directa. Repartos

3.28 Los números 3, 5, 18 y x forman una proporción. Calcula el valor de x .

$$\frac{3}{5} = \frac{18}{x} \Rightarrow x = \frac{18 \cdot 5}{3} = 30$$

3.29 La tabla corresponde a dos magnitudes directamente proporcionales M y M' . Halla la constante de proporcionalidad y completa la tabla.

M	4	12	...	2
M'	5	...	25	...	1	100

Constante de proporcionalidad: $\frac{4}{5} = 0,8$. Tenemos entonces:

$$\frac{12}{x} = 0,8 \Rightarrow x = 15$$

$$\frac{y}{25} = 0,8 \Rightarrow y = 20$$

$$\frac{2}{z} = 0,8 \Rightarrow z = 2,5$$

$$\frac{t}{1} = 0,8 \Rightarrow t = 0,8$$

$$\frac{a}{100} = 0,8 \Rightarrow a = 80$$

M	4	12	20	2	0,8	80
M'	5	15	25	2,5	1	100

3.30 La constante de proporcionalidad directa de dos números es 1,25. El mayor es 45. Calcula el menor.

Como el resultado del cociente es mayor que 1, el mayor es dividido por el menor, de modo que $\frac{45}{x} = 1,25 \Rightarrow x = 36$.

El menor es 36.

3.31 Tres fotografías valen 5 euros, 6 fotografías cuestan 9 euros. Razona si el número de fotografías es directamente proporcional a su precio.

Si es directamente proporcional, se tiene que conservar la constante de proporcionalidad.

$$0,6 = \frac{3}{5} \neq \frac{6}{9} = 0,6$$

Por tanto, el número de fotografías no es directamente proporcional a su precio.

3.32 Un coche consume 5,5 litros de gasolina cada 100 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros podrá recorrer con 110 litros?

Los litros de gasolina y los kilómetros recorridos son directamente proporcionales. Entonces:

$$\frac{5,5}{100} = \frac{110}{x} \Rightarrow x = 2000$$

El coche podrá recorrer 2000 kilómetros.

3.33 Se sabe que de 15 gramos de remolacha se extraen 2 de azúcar. ¿Cuánta remolacha hay que adquirir para obtener 2376 kilogramos de azúcar?

Podemos establecer la proporción: $\frac{2}{15} = \frac{2376}{x}$.

De modo que $x = 17820$ kilogramos de remolacha.

3.34 Por un grifo salen 38 litros de agua en 5 minutos. ¿Cuántos litros salen en una hora y cuarto?

Como existe una proporcionalidad directa entre los litros de agua que salen del grifo y los minutos, podemos calcular los litros que saldrán en hora y cuarto, que son 75 minutos:

$$\frac{5}{38} = \frac{75}{x} \Rightarrow x = \frac{75 \cdot 38}{5} = 570 \text{ L}$$

En una hora y cuarto salen por el grifo 570 litros.

3.35 María, Nuria y Paloma han cobrado por un trabajo 344 euros. María ha trabajado 7 horas; Nuria, 5 horas y Paloma, 4 horas. ¿Qué cantidad le corresponde a cada una?

Para que todas cobren por una hora lo mismo, tenemos que hacer un reparto proporcional del dinero según las horas trabajadas. Entonces:

$$7k + 5k + 4k = 344 \Rightarrow 16k = 344 \Rightarrow k = 21,5$$

De modo que María cobrará $21,5 \cdot 7 = 150,50$ euros; a Nuria le corresponden $21,5 \cdot 5 = 107,50$ euros, y Paloma ha ganado por el trabajo $21,5 \cdot 4 = 86$ euros.

Porcentajes y proporcionalidad

3.36 Expresa las siguientes razones en tantos por ciento, en tantos por uno y en tantos por mil.

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{9}{10}$

c) $\frac{20}{12}$

d) $\frac{5}{3}$

	Tanto por uno	Tanto por ciento (%)	Tanto por mil (‰)
a)	0,4	40	400
b)	0,9	90	900
c)	1,6667	166,67	1 666,7
d)	1,6667	166,67	1 666,7

3.37 Calcula el tanto por ciento de café que hay en una mezcla de 4 litros de café y 7 litros de agua.

La proporción que se cumple es $\frac{4}{7} = \frac{57,14}{100}$. Hay un 57,14 % de café en la mezcla.

3.38 Luis prepara una limonada con 12 litros de agua y 8 litros de zumo de limón. ¿Cuál es el porcentaje de zumo de limón que hay en la limonada?

Volumen total: $12 + 8 = 20$ L

De los 20 litros, 8 son de zumo de limón. Tenemos la relación: $\frac{8}{20} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 40\%$

El porcentaje de zumo de limón es del 40 %.

3.39 Un teléfono móvil cuesta 85 euros. Halla su nuevo precio si:

a) Se rebaja un 6 %.

b) Se encarece un 4 %.

a) En este caso hay que restarle un 6 % a 85. $85 \cdot \left(1 - \frac{6}{100}\right) = 79,90 \text{ €}$

El nuevo precio es de 79 euros y 90 céntimos.

b) En este caso hay que sumarle un 4 % a 85. $85 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 88,40 \text{ €}$

El nuevo precio es de 88 euros y 40 céntimos.

3.40 La subida salarial de una empresa en los últimos tres años ha sido del 3 %, 2 % y 4 %.

a) ¿Cuánto cobra actualmente un empleado que cobraba hace tres años 1600 euros?

b) ¿En qué porcentaje se ha incrementado su sueldo después de las tres subidas?

a) Tenemos que ver qué resulta después de aplicarle un 3, un 2 y un 4 % a 1600:

$$\left(\left(1600 \cdot \left(1 + \frac{3}{100} \right) \right) \left(1 + \frac{2}{100} \right) \right) \left(1 + \frac{4}{100} \right) = 1600 \cdot 1,03 \cdot 1,02 \cdot 1,04 = 1748,20 \text{ €}$$

El sueldo del empleado después de estos tres años será de 1748 euros con 20 céntimos.

b) Veamos con qué porcentaje se corresponde la subida a 1748,20 de 1600.

$$1600 \cdot \left(1 + \frac{x}{100} \right) = 1748,20 \Rightarrow \frac{1600x}{100} = 1748,20 - 1600 \Rightarrow x = \frac{148,20}{16} = 9,26$$

El porcentaje total en que ha subido el sueldo del empleado en estos tres años es del 9,26 %.

3.41 El precio de un litro de combustible experimentó diversas variaciones. En enero costaba 0,95 euros y en febrero bajó su precio un 8 %. En marzo subió un 3 % y en abril subió un 2 %.

a) ¿Qué porcentaje ha variado su precio en total?

b) ¿Cuál es su precio en abril?

a) Veamos a qué porcentaje equivale la aplicación de los tres porcentajes.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{8}{100} \right) \left(1 + \frac{3}{100} \right) \left(1 + \frac{2}{100} \right) &= \left(1 - \frac{8}{100} + \frac{3}{100} - \frac{24}{10000} \right) \left(1 + \frac{2}{100} \right) = \\ &= 1 - \frac{5}{100} - \frac{24}{10000} + \frac{2}{100} - \frac{10}{10000} - \frac{48}{1000000} = 1 - \frac{3,3448}{100} \end{aligned}$$

Ha sido rebajado un 3,34 %.

b) Aplicamos el porcentaje calculado en el apartado anterior al precio inicial del litro de combustible para saber su precio en abril.

$$0,95 \cdot \left(1 - \frac{3,34}{100} \right) = 0,92$$

El precio del litro de combustible en abril es de 0,92 euros.

3.42 El Club del Libro tiene 100 socios y cada año aumenta su número en un 10 %.

a) ¿Cuántos socios tiene al cabo de 5 años?

b) Al cabo de 10 años, ¿consigue duplicar el número inicial de socios?

a) Como tenemos que aplicarle a 100 un porcentaje de subida del 10 por ciento 5 veces consecutivas, calculamos primero qué porcentaje final es:

$$\left(1 + \frac{10}{100} \right)^5 = 1,10^5 = 1,61 = 1 + \frac{61}{100}$$

El porcentaje de aumento de socios al cabo de 5 años es de un 61 %. Lo que quiere decir que después de 5 años el número de socios es:

$$100 \cdot \left(1 + \frac{61}{100} \right) = 161 \text{ socios}$$

b) Veamos cuál es el porcentaje de aumento después de 10 años.

$$\left(1 + \frac{10}{100} \right)^{10} = 2,59 = 1 + \frac{159}{100}$$

$$\text{El número de socios después de 10 años es: } 100 \cdot \left(1 + \frac{159}{100} \right) = 259$$

Así que después de 10 años el número de socios es más del doble de los que había inicialmente. No solo se duplica, sino que se pasa del doble.

Proporcionalidad inversa. Repartos

3.43 Di cuáles de las siguientes magnitudes son inversamente proporcionales.

- a) Tiempo que se tarda en limpiar un monte y número de personas que realizan la limpieza.
- b) Espacio recorrido por un móvil y tiempo empleado en recorrer dicho espacio.
- c) Tiempo que tarda en hacer un recorrido un avión y su velocidad.

- a) Son inversamente proporcionales. El doble de personas tardarían la mitad de tiempo en realizar la limpieza.
- b) No son inversamente proporcionales. En doble tiempo el móvil recorrería doble espacio, son directamente proporcionales.
- c) Son inversamente proporcionales. Si la velocidad fuera doble, el avión tardaría la mitad de tiempo en hacer ese recorrido.

3.44 Comprueba si la tabla representa cantidades de dos magnitudes inversamente proporcionales. En caso afirmativo, halla la constante de proporcionalidad y completa la tabla.

M	2	4	8	100
M'	5	2,5	1,25	...

Veamos cuáles son las constantes de proporcionalidad de cada columna:

$2 \cdot 5 = 10$; $4 \cdot 2,5 = 10$; $8 \cdot 1,25 = 10$. Sí son inversamente proporcionales. La constante de proporcionalidad es 10, y para completar la tabla, el valor de "..." tiene que ser 0,1 ($100 \cdot 0,1 = 10$).

3.45 El agua de un depósito se puede extraer en 200 veces con un bidón de 15 litros. Calcula en cuántas veces se extraería con un bidón de 25 litros.

Relación de proporcionalidad inversa: $200 \cdot 15 = x \cdot 25 \Rightarrow x = 120$ veces

Con un bidón de 25 litros se extraería en 120 veces.

3.46 Realizamos un trabajo en 2 meses entre 12 personas. Necesitamos hacerlo en solo 18 días. ¿Cuántas personas debemos contratar?

Dos meses son 60 días.

Tenemos una relación de proporcionalidad inversa: $60 \cdot 12 = 720 = 18 \cdot x \Rightarrow x = 40$

Como ya trabajamos 12, necesitamos contratar $40 - 12 = 28$

Debemos contratar 28 personas.

3.47 Tres niños se comen un pastel en 16 minutos. ¿En cuánto tiempo se lo comerían cuatro niños?

Relación de proporcionalidad inversa: $3 \cdot 16 = 4 \cdot x \Rightarrow x = 12$ minutos

Cuatro niños se lo comerían en 12 minutos.

3.48 Reparte 7 875 en partes inversamente proporcionales a 3, 5 y 6.

$$\frac{k}{3} + \frac{k}{5} + \frac{k}{6} = 7875 \Rightarrow \frac{21k}{30} = 7875 \Rightarrow k = 11250$$

A 3 le corresponde $\frac{11250}{3} = 3750$.

A 5 le corresponde $\frac{11250}{5} = 2250$.

A 6 le corresponde $\frac{11250}{6} = 1875$.

3.49 Reparte 578 en partes inversamente proporcionales a 4, 4 y 18.

$$\frac{1}{4}k + \frac{1}{4}k + \frac{1}{18}k = 578 \Rightarrow \frac{9k + 9k + 2k}{36} = 578 \Rightarrow k = \frac{578 \cdot 36}{20} = 1040,4$$

La parte que le corresponde a cada 4 es 260,1, y la que le corresponde a 18 es 57,8.

3.50 Una ganadera tiene pienso para alimentar 320 vacas durante 45 días. Pero debe dar de comer a los animales durante 60 días, por lo que decide vender aquellas a las que no puede alimentar. ¿Cuántas vacas debe vender?

Relación de proporcionalidad inversa: $320 \cdot 45 = x \cdot 60 \Rightarrow x = 240$

Como puede alimentar a 240, debe vender $320 - 240 = 80$ vacas.

3.51 El número de vueltas que dan dos ruedas dentadas es inversamente proporcional al número de dientes de cada rueda.

Una rueda dentada tiene 24 dientes y engrana otra rueda que tiene 5 dientes.

¿Cuántas vueltas dará la primera mientras la segunda da 120 vueltas?

Por ser inversamente proporcionales se cumple que $5 \cdot 120 = 24 \cdot x \Rightarrow x = \frac{600}{24} = 25$

La rueda con 24 dientes da 25 vueltas mientras la que tiene 5 dientes da 120.

3.52 En una Olimpiada Europea de Matemáticas se conceden tres premios inversamente proporcionales a los tiempos empleados en la resolución de los ejercicios. Los tiempos de los tres primeros concursantes han sido 3, 5 y 6 horas.

Calcula cuánto dinero recibe cada uno si hay 42 000 euros para repartir.

Hacemos un reparto del dinero inversamente proporcional al tiempo tardado.

$$\frac{1}{3}k + \frac{1}{5}k + \frac{1}{6}k = 42000 \Rightarrow \frac{10k + 6k + 5k}{30} = 42000 \Rightarrow k = \frac{42000 \cdot 30}{21} = 60000$$

De modo que el primer premio, que se corresponde con un tiempo de 3 horas, es de 20 000 euros. El segundo premio, correspondiente a un tiempo de 5 horas, es de 12 000 euros. Y el tercer premio, para la persona que ha tardado 6 horas, es de 10 000 euros.

Proporcionalidad compuesta

- 3.53** Una casa de acogida necesita 5 400 euros para alojar y dar de comer a 40 personas durante 15 días. ¿Cuánto necesitará para alojar y alimentar a 50 personas durante 10 días?

Tenemos las siguientes correspondencias:

5 400 euros ————— 40 personas ————— 15 días
x euros ————— 50 personas ————— 10 días
Proporcionalidad directa Proporcionalidad inversa

$$\frac{40}{50} = \frac{5\,400}{x} \cdot \frac{10}{15} \Rightarrow x = 5\,400 \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{50}{40} = 4\,500 \text{ €}$$

Se necesitarán 4 500 euros para alimentar a 50 personas durante 10 días.

- 3.54** Si 18 camiones transportan 1 200 contenedores en 12 días, ¿cuántos días necesitarán 24 camiones para mover 1 600 contenedores?

Tenemos las siguientes correspondencias:

18 camiones ————— 1 200 contenedores ————— 12 días
24 camiones ————— 1 600 contenedores ————— x días
Proporcionalidad directa Proporcionalidad directa

$$\frac{1\,200}{1\,600} = \frac{18}{24} \cdot \frac{12}{x} \Rightarrow x = 12 \cdot \frac{18}{24} \cdot \frac{1\,600}{1\,200} = 12 \text{ días}$$

En 12 días, 24 camiones moverán 1 600 contenedores.

- 3.55** En un mes, un equipo de 22 albañiles ha enlosado una acera de 160 metros. ¿Cuántos metros enlosarán 15 albañiles en 22 días?

Tenemos las siguientes correspondencias:

1 mes (= 30 días) ————— 22 albañiles ————— 160 metros
22 días ————— 15 albañiles ————— x metros
Proporcionalidad inversa Proporcionalidad directa

$$\frac{22}{15} = \frac{22}{30} \cdot \frac{160}{x} \Rightarrow x = 160 \cdot \frac{22}{30} \cdot \frac{15}{22} = 80 \text{ m}$$

Quince albañiles en 22 días enlosarán 80 metros.

- 3.56** Un campamento de la Cruz Roja que alimenta a 1 800 refugiados tiene víveres para tres meses si se distribuyen raciones de 800 gramos por día.

¿Cuál debería ser la ración si hubiese 2 100 refugiados y estos víveres tuvieran que durar 4 meses?

Tenemos las siguientes correspondencias:

1 800 refugiados ————— 3 meses ————— 800 gramos
2 100 refugiados ————— 4 meses ————— x gramos
Proporcionalidad inversa Proporcionalidad inversa

$$\frac{3}{4} = \frac{2\,100}{1\,800} \cdot \frac{x}{800} \Rightarrow x = 800 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1\,800}{2\,100} = 514,28 \text{ g}$$

Las raciones para 2 100 refugiados durante 4 días serían de 514,28 gramos.

3.57 De las siguientes tablas, determina cuál o cuáles representan algún tipo de proporcionalidad (directa o inversa). Justifica tu respuesta.

a)

x	5	10	15	20	25
y	1	2	3	4	5

c)

x	1	4	5	10	20
y	20	5	4	2	1

b)

x	2	3	4	3	2
y	1	2	3	4	5

d)

x	18	15	13	10	9
y	20	15	14	2	1

a) Proporcionalidad directa.

Si hacemos para cada una de las columnas el cociente $\frac{x}{y}$, nos da siempre 5.

b) Ningún tipo de proporcionalidad.

No existe proporcionalidad directa. Si hacemos el cociente de la primera columna, tendremos como constante de proporcionalidad 2, pero dicha constante no se conserva al hacer el cociente de la segunda columna, ya que $\frac{3}{2} = 1,5$.

Tampoco existe proporcionalidad inversa, basta fijarnos también en las dos primeras columnas para ello. La primera columna nos daría como constante de proporcionalidad 2, mientras que la segunda nos daría que la constante es 6.

c) Proporcionalidad inversa.

Si hacemos para cada una de las columnas el producto $x \cdot y$, nos da siempre 20.

d) Ningún tipo de proporcionalidad.

Basta fijarnos en las dos primeras columnas para ver que no existe una constante de proporcionalidad, ni en el caso de proporcionalidad directa, donde tenemos $\frac{18}{20} = 0,9$ y $\frac{15}{15} = 1$, ni en el caso de proporcionalidad inversa, donde tenemos $18 \cdot 20 = 360$ y $15 \cdot 15 = 225$.

3.58 Pon tres ejemplos de magnitudes proporcionales directas. ¿A qué se llama constante de proporcionalidad directa?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Dinero para comprar libros y libros que puedo comprar.
- Volumen de un material y su peso.
- Altura de un árbol y la cantidad de madera que proporciona.

Se llama constante de proporcionalidad directa al cociente entre las dos magnitudes a tener en cuenta.

3.59 Pon tres ejemplos de magnitudes proporcionales inversas. ¿A qué se llama constante de proporcionalidad inversa?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Alumnos que recogen el aula y tiempo empleado en recogerla.
- Horas dedicadas a leer un libro y días que se tarda en leerlo.
- Presión de un gas y volumen que ocupa (a temperatura constante).

Se llama constante de proporcionalidad inversa al producto de las dos magnitudes que se están considerando.

3.60 En el campeonato escolar el equipo de 3.º de ESO del colegio jugó 50 partidos de los que ganó 20, perdió el 40 % y empató los restantes.

¿Ganó o perdió la mayoría de los partidos?

Veamos cuál es el porcentaje de partidos que ganó.

$$\frac{50 \cdot x}{100} = 20 \Rightarrow x = 40. \text{ Así que el porcentaje de partidos ganados es del } 40\%.$$

Ganó y perdió el mismo número de partidos.

3.61 Una mercancía se encareció un 10 % y luego se abarató también en un 10 %. ¿Cuándo vale menos, antes de encarecerla o después de abaratarla?

Sea x el precio inicial de la mercancía. Veamos qué ocurre tras las dos variaciones en el precio:

$$\left(x\left(1 + \frac{10}{100}\right)\right)\left(1 - \frac{10}{100}\right) = x\left(1 - \left(\frac{10}{100}\right)^2\right) = x\left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

Así que el precio después de abaratarla es de $x\left(1 - \frac{1}{100}\right)$. La mercancía vale menos después de abaratarla.

3.62 El salario de Rubén en los últimos 4 años ha tenido las siguientes subidas: 2 %, 2 %, 2 % y 2 %. ¿Gana ahora un 8 % más que hace 4 años?

La subida de sueldo de Rubén es el resultado de añadirle a su sueldo, x , un 2 % cuatro veces.

$$\text{Luego } x\left(1 + \frac{2}{100}\right)^4 = x \cdot 1,0824 = x\left(1 + \frac{8,24}{100}\right). \text{ Después de 4 años gana un 8,24 \% más.}$$

3.63 ¿Cómo se reparte un número N en partes directamente proporcionales a los números a , b y c ? Reparte 360 en partes directamente proporcionales a los números 2, 6 y 18.

Primero hallamos la constante de proporcionalidad que cumple lo siguiente:

$$a \cdot k + b \cdot k + c \cdot k = N$$

Una vez hallada la constante de proporcionalidad, la parte correspondiente a cada número se calcula multiplicando el número por la constante de proporcionalidad.

$$a \cdot k, b \cdot k, c \cdot k$$

Veamos ahora el reparto de 360 en partes proporcionales a 2, 6 y 18. Seguimos los pasos antes indicados.

Primero calculamos la constante de proporcionalidad: $2k + 6k + 18k = 360 \Rightarrow 26k = 360$.

$$k = \frac{360}{26} = 13,846$$

Ahora calculamos la parte correspondiente a cada número. La parte que corresponde a 2 es $2 \cdot 13,846 = 27,692$. La parte correspondiente a 6 es 83,076. Y la parte proporcional a 18 es 249,228.

3.64 ¿Cómo se reparte un número N en partes inversamente proporcionales a los números a , b y c ? Reparte 360 en partes inversamente proporcionales a los números 2, 6 y 18.

Primero hallamos la constante de proporcionalidad que cumple lo siguiente:

$$\frac{1}{a} \cdot k + \frac{1}{b} \cdot k + \frac{1}{c} \cdot k = N$$

Una vez hallada la constante de proporcionalidad, la parte correspondiente a cada número la calculamos haciendo el producto del número por la constante de proporcionalidad.

$$\frac{1}{a} \cdot k, \frac{1}{b} \cdot k, \frac{1}{c} \cdot k$$

Veamos ahora el reparto de 360 en partes proporcionales a 2, 6 y 18. Seguimos los pasos antes indicados.

Primero calculamos la constante de proporcionalidad:

$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{6}k + \frac{1}{18}k = 360 \Rightarrow \frac{13k}{18} = 360 \Rightarrow k = \frac{360 \cdot 18}{13} = 498,461$$

Ahora calculamos la parte correspondiente a cada número.

La parte que corresponde a 2 es $\frac{1}{2} \cdot 498,461 = 249,230$.

La parte correspondiente a 6 es 83,076. Y la parte proporcional a 18 es 27,692.

3.65 ¿Es lo mismo repartir una cantidad en partes directamente proporcionales a 10, 15 y 20, que en partes directamente proporcionales a 2, 3 y 4?

Si repartimos x en 10, 15 y 20 partes directamente proporcionales y K es la constante de proporcionalidad, tenemos que:
 $10K + 15K + 20K = x$

Si repartimos x en 2, 3 y 4 partes inversamente proporcionales y k es la constante de proporcionalidad, tenemos que: $2k + 3k + 4k = x$.
 $10K + 15K + 20K = 2k + 3k + 4k \Rightarrow 45K = 9k \Rightarrow 5K = k$

Si sustituimos en la segunda ecuación el valor de k con relación al valor de K :

$$2 \cdot 5K + 3 \cdot 5K + 4 \cdot 5K = x \Rightarrow 10K + 15K + 20K = x$$

Por tanto, sí es lo mismo.

PROBLEMAS PARA APLICAR

3.66 La producción de bolígrafos y cuadernos está en una relación de 8 a 5. Si la producción de bolígrafos disminuye en un 15 % y la de cuadernos aumenta en un 20 %.

¿En qué relación queda la producción? (Expresa la relación en números enteros)

Calculamos la disminución de la producción de bolígrafos: $5 \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 4,25$

Calculamos el aumento de la producción de cuadernos: $8 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 9,6$

La relación después de las variaciones de producción es: $\frac{9,6}{4,25} = \frac{960}{425} = \frac{192}{85}$

Así, la relación de la producción de bolígrafos y cuadernos es de 192 a 85.

3.67 Un cultivo de bacterias de un laboratorio tiene 120 000 bacterias. Una enfermedad produce la muerte del 16 % de su población. Tratadas las bacterias supervivientes con un producto muy eficaz se consigue aumentar la población en un 14 %.

Entonces, ¿cuántas bacterias forman la población finalmente?

Las bacterias que quedan después de la enfermedad son: $120\,000 \cdot \left(1 - \frac{16}{100}\right) = 100\,800$

Tratando las bacterias con el producto ocurre que: $100\,800 \cdot \left(1 + \frac{14}{100}\right) = 114\,912$

Así, finalmente tenemos una población de 114 912 bacterias.

3.68 Observa el anuncio de rebajas.

a) ¿Están rebajados estos artículos proporcionalmente?

b) Si no es así, ¿cuál lo está más?

a) La relación entre los precios antes de las rebajas es: $\frac{59,85}{31,50} = 1,9$

La relación entre los precios después de las rebajas es de $\frac{50}{23,9} = 2,09$

Si los artículos estuviesen rebajados proporcionalmente, se conservaría la constante de proporcionalidad entre los precios, y no es así. Luego no están rebajados proporcionalmente.

b) Calculamos cuál es el descuento del pijama y el de los zapatos.

$$31,50 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 23,9 \Rightarrow 31,50 - 23,90 = 31,50 \cdot \frac{x}{100} \Rightarrow x = 24,13$$

$$59,85 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 50 \Rightarrow 59,85 - 50 = 59,85 \cdot \frac{x}{100} \Rightarrow x = 16,45$$

El descuento del pijama es de un 24,13 %, y el de los zapatos, de un 16,45 %. Es mayor el descuento del pijama.



- 3.69** En un centro escolar, de los 210 alumnos de 3.º de ESO se inscriben en una actividad extraescolar 170. Mientras que de los 160 alumnos de 4.º de ESO se apuntan 130.

¿Qué curso, 3.º o 4.º, ha mostrado más interés por la actividad?

$$\frac{170}{210} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 80,95\% \text{ participan en la actividad de 3.º de ESO.}$$

$$\frac{130}{160} = \frac{y}{100} \Rightarrow y = 81,25\% \text{ participan en la actividad de 4.º de ESO.}$$

Han mostrado más interés los alumnos de 4.º de ESO.

- 3.70** Una fiesta de disfraces tiene una relación chicos-chicas de 5 a 3. Llegan 3 chicas más y la relación pasa a ser de 10 a 7.

¿Cuántas personas hay en la fiesta?

Inicialmente tenemos una relación de $\frac{5}{3} = \frac{5x}{3x}$, donde $5x$ es el número de chicos, y $3x$, el de chicas.

$$\text{Cuando llegan las chicas: } \frac{5x}{3x+3} = \frac{10}{7} \Rightarrow 35x = 30x + 30 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6$$

Podemos ahora calcular el número de gente que hay en la fiesta: $5 \cdot 6 = 30$ chicos, y $3 \cdot 6 + 3 = 21$ chicas. Hay 51 personas en la fiesta.

- 3.71** Dos empresas alquilan un almacén por 3 500 euros. La primera guarda 40 contenedores y la segunda 300 sacos.

¿Cuánto tendría que pagar cada una si un contenedor ocupa lo mismo que 10 sacos?

Tenemos la relación $\frac{1 \text{ contenedor}}{10 \text{ sacos}} = \frac{40 \text{ contenedores}}{400 \text{ sacos}}$. Ahora que tenemos todo expresado en la misma unidad, podemos hacer un reparto proporcional.

$$400k + 300k = 3\,500 \Rightarrow 700k = 3\,500 \Rightarrow k = \frac{3\,500}{700} = 5$$

La empresa de los contenedores paga 2 000 euros, y la que guarda sacos, 1 500.

- 3.72** Entre tres pintores han pintado la fachada de un edificio, y han cobrado 4 160 euros. El primero ha trabajado 15 días, el segundo 12 días, y el tercero 25 días.

¿Cuánto dinero tiene que recibir cada uno?

Sea k la constante de proporcionalidad directa.

Al primero le corresponden $15k$; al segundo, $12k$, y al tercero, $25k$.

$$\text{Así, } 15k + 12k + 25k = 4\,160 \Rightarrow 52k = 4\,160 \Rightarrow k = 80$$

El primero recibe $15 \cdot 80 = 1\,200$ euros; el segundo, $12 \cdot 80 = 960$, y el tercero, $25 \cdot 80 = 2\,000$ euros.

- 3.73** Los ingredientes de una receta para un postre casero son: 1 vaso de mantequilla; 3 huevos; 1,5 vasos de azúcar; 2 vasos de harina.

Si solo tenemos 2 huevos, ¿cómo debemos modificar los restantes ingredientes de la receta para poder hacer el postre?

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ de vaso de mantequilla}$$

$$\frac{1,5}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ vaso de azúcar}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{3} \text{ de vaso de harina}$$

- 3.74** Dos empresas aceptan realizar un trabajo en colaboración cobrando entre las dos 3 000 euros. Una, con tres personas, trabajó 5 días. La otra, con 4 personas, trabajó 6 días.

¿Qué dinero debe recibir cada empresa?

La primera tuvo 3 personas trabajando 5 días, lo que supone 15 pagas. Le corresponden x euros.

La segunda tuvo 4 personas trabajando 6 días, lo que supone 24 pagas. Le corresponden $3\,000 - x$ euros.

$$\frac{15}{x} = \frac{24}{3\,000 - x} \Rightarrow 45\,000 - 15x = 24x \Rightarrow 45\,000 = 39x \Rightarrow x = \frac{45\,000}{39} = 1\,153,85 \text{ €}$$

La primera empresa tiene que recibir 1 153,85 euros, y la segunda, 1 846,15.

- 3.75** Un propietario alquila una finca de 105 000 metros cuadrados a tres labradores, distribuyéndola entre los tres proporcionalmente al número de personas de cada familia. La familia del labrador A se compone de 4 personas, la del B de 5 y la del C de 6.

Calcula la parte de terreno que le corresponde a cada uno.

Hacemos el reparto proporcional: $4k + 5k + 6k = 105\,000 \Rightarrow 15k = 105\,000 \Rightarrow k = 7\,000$

A la familia del labrador A le corresponden 28 000 metros cuadrados. La familia del labrador B tendrá un terreno de 35 000 metros cuadrados. Y la del labrador C se queda con 42 000 metros cuadrados.

- 3.76** En una prueba ciclista se reparte un premio de 16 650 euros, entre los tres primeros corredores, de modo inversamente proporcional al tiempo que han tardado en llegar. El primero tarda 12 minutos, el segundo 15 minutos y el tercero 18 minutos.

¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Sea k la constante de proporcionalidad inversa.

Al primero le corresponden $\frac{k}{12}$; al segundo, $\frac{k}{15}$, y al tercero, $\frac{k}{18}$.

$$\text{Así, } \frac{k}{12} + \frac{k}{15} + \frac{k}{18} = 16\,650 \Rightarrow \frac{37k}{180} = 16\,650 \Rightarrow k = 81\,000$$

El primero recibe $\frac{81\,000}{12} = 6\,750$ euros; el segundo, $\frac{81\,000}{15} = 5\,400$, y el tercero, $\frac{81\,000}{18} = 4\,500$.

- 3.77** Una persona leyendo 4 horas diarias, a razón de 15 páginas por hora, tarda en leer un libro 10 días. Si leyendo a razón de 12 páginas por hora tardase 20 días, ¿cuántas horas diarias leería?

A razón de 15 páginas por hora se tardan 10 días leyendo 4 horas diarias.

A razón de 1 página por hora se tardan 10 días leyendo $4 \cdot 15 = 60$ páginas diarias.

A razón de 1 página por hora se tarda 1 día leyendo $4 \cdot 15 \cdot 10 = 600$ páginas diarias.

A razón de 10 páginas por hora se tarda 1 día leyendo $\frac{600}{10} = 60$ horas diarias.

A razón de 10 páginas por hora se tardan 20 días leyendo $\frac{60}{20} = 3$ horas diarias.

Necesita 3 horas diarias.

- 3.78** Ocho bombillas iguales, encendidas durante 4 horas diarias, han consumido en 30 días, 49 kilovatios. ¿Cuánto consumirán 6 bombillas iguales a las anteriores, encendidas 3 horas diarias, durante 20 días?

8 bombillas — 4 horas — 30 días — 49 kWh

6 bombillas — 3 horas — 20 días — x kWh

Se puede pasar a proporcionalidad simple fácilmente:

4 horas en 30 días son 120 horas, 8 bombillas son 960 horas.

3 horas en 20 días son 60 horas, 6 bombillas son 360 horas.

Ahora, proporcionalmente:

$$\frac{360}{49} = \frac{360}{x} \Rightarrow \frac{49 \cdot 360}{960} = 18,38 \text{ kWh}$$

- 3.79** Se reparte un número N , en partes inversamente proporcionales a 4, 5 y 9. La parte correspondiente a 4 es 900. ¿Qué les corresponde a los otros dos números, y qué número es N ?

Sea k la constante de proporcionalidad inversa.

A 4 le corresponden $\frac{k}{4} = 900$, luego $k = 3600$.

A 5 le corresponden $\frac{3600}{5} = 720$.

A 9 le corresponden $\frac{3600}{9} = 400$.

Luego el número es $N = 900 + 720 + 400 = 2020$

REFUERZO

Proporcionalidad directa

- 3.80** Calcula x .

a) $\frac{3}{4} = \frac{9}{x}$

b) $\frac{10}{x} = \frac{15}{9}$

c) $\frac{8}{12} = \frac{x}{3}$

d) $\frac{x}{7} = \frac{18}{42}$

a) $3x = 9 \cdot 4 \Rightarrow x = 12$

b) $10 \cdot 9 = 15x \Rightarrow x = 6$

c) $8 \cdot 3 = 12x \Rightarrow x = 2$

d) $42x = 7 \cdot 18 \Rightarrow x = 3$

- 3.81** Daniel anduvo 6 kilómetros en una hora.

¿Cuánto recorrió en 10 minutos?

Los kilómetros que anda Daniel y el tiempo que tarda en recorrerlos están en relación directamente proporcional. Teniendo en cuenta que 1 hora = 60 minutos:

$$\frac{6}{60} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 1 \text{ km}$$

Daniel recorrió 1 kilómetro en 10 minutos.

- 3.82** En un mapa, 14 centímetros representan 238 kilómetros.

¿Cuántos centímetros representarán a otra carretera que mide 306 kilómetros?

Los kilómetros reales y los centímetros que los representan en un mapa están en proporción directa. Entonces:

$$\frac{14}{238} = \frac{x}{306} \Rightarrow x = 18 \text{ cm}$$

En el mapa, 18 centímetros equivalen a 306 kilómetros.

3.83 En una fiesta, tres invitados gastan en refrescos 40 euros. ¿Cuánto pagará cada uno si se llevan 10, 15 y 25 refrescos, respectivamente?

Hacemos un reparto proporcional del precio total en función de los refrescos que se lleva cada uno.

$$10k + 15k + 25k = 40 \Rightarrow 50k = 40 \Rightarrow k = \frac{40}{50} = 0,8$$

El que lleva 10 refrescos paga 8 euros, el que se lleva 15 paga 12 euros y el que se lleva 25 refrescos paga 20 euros.

Porcentajes

3.84 Calcula.

a) El 20 % de 650

c) El 20 % del 30 % de 10 000

b) El 0,80 % de 2 005

d) El 50 % del 40 % del 30 % de 1 000 000

a) $650 \cdot \frac{20}{100} = 130$

c) $10\,000 \cdot \frac{30}{100} = 3\,000; 3\,000 \cdot \frac{20}{100} = 600$

b) $2\,005 \cdot \frac{0,8}{100} = 16,04$

d) $1\,000\,000 \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{50}{100} = 60\,000$

3.85 Un jugador de baloncesto ha conseguido 15 encestes de 20 lanzamientos. ¿Cuál es su porcentaje de aciertos?

$$\frac{15}{20} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 75$$

El jugador tiene un porcentaje de aciertos del 75 %.

3.86 Ricardo compra en rebajas una lavadora cuya etiqueta marca 412 euros. Le hacen un descuento del 30 % y le aplican un IVA del 16 %.

¿Cuál es el coste final de la lavadora?

Sobre el precio de la lavadora aplicamos los dos porcentajes, el de descuento y el de aumento.

$$412 \left(1 - \frac{30}{100}\right) \left(1 + \frac{16}{100}\right) = 334,54 \text{ €}$$

El precio final de la lavadora es de 334,54 euros.

Proporcionalidad inversa

3.87 Estudia si las siguientes tablas de datos corresponden a magnitudes inversamente proporcionales. En caso afirmativo, halla la constante de proporcionalidad.

a)

A	4	3	6	5
B	15	20	10	12

b)

C	3	0,9	5	1
D	6	20	3,6	18

a) Veamos si se cumple que todas las columnas conservan el producto.

$$4 \cdot 15 = 3 \cdot 20 = 6 \cdot 10 = 5 \cdot 12 = 60$$

Sí, son inversamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es 60.

b) En este caso: $3 \cdot 6 = 0,9 \cdot 20 = 5 \cdot 3,6 = 1 \cdot 18 = 18$

Sí, son inversamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es 18.

3.88 Reparte 4 371 en partes inversamente proporcionales a 3, 4 y 5.

Hacemos el reparto inversamente proporcional:

$$\frac{1}{3}k + \frac{1}{4}k + \frac{1}{5}k = 4\,371 \Rightarrow \frac{20k + 15k + 12k}{60} = 4\,371 \Rightarrow k = 5\,580$$

La parte que corresponde a 3 es 1 860; la que corresponde a 4, 1 395, y la que corresponde a 5, 1 116.

3.89 En el colegio se quiere organizar una excursión Fin de Curso. Se contrata un autobús con conductor que dispone de 80 plazas y que cuesta 360 euros.

Si solo se ocupan la mitad de las plazas, ¿cuánto debe pagar cada alumno?

El precio y el número de plazas cubiertas son magnitudes inversamente proporcionales.

$$\text{Tenemos que } 360 \cdot 1 = x \cdot 40 \Rightarrow x = \frac{360}{40} = 9 \text{ €}$$

Cada alumno deberá pagar 9 euros.

Proporcionalidad compuesta

3.90 Transportar 720 cajas de libros a 240 kilómetros cuesta 4320 euros. ¿Cuántas cajas iguales se han transportado a 300 kilómetros, si hemos pagado 6187,50 euros?

Método de reducción a la unidad:

$$720 \text{ cajas} \quad \frac{240 \text{ km}}{720} \quad \frac{4320 \text{ €}}{720}$$

$$1 \text{ caja} \quad \frac{240 \text{ km}}{720} \quad \frac{4320}{720} = 6 \text{ €}$$

$$1 \text{ caja} \quad \frac{1 \text{ km}}{240} \quad \frac{6}{240} = 0,025 \text{ €}$$

$$1 \text{ caja} \quad \frac{300 \text{ km}}{240} \quad 300 \cdot 0,025 = 7,50 \text{ €}$$

$$x \text{ cajas} \quad \frac{300 \text{ km}}{240} \quad 7,50 \cdot x = 6187,50 \text{ €}$$

$$\text{Luego } x = \frac{6187,50}{7,50} = 825 \text{ cajas}$$

AMPLIACIÓN

3.91 Un hombre ha segado cinco octavos de un terreno, y su hijo un tercio de ese terreno. El hombre necesita 2 horas y 24 minutos para segar lo que le falta. ¿Cuánto tiempo le hubiera costado segar solo todo el terreno?

$$\text{Fracción de terreno segado: } \frac{5}{8} + \frac{1}{3} = \frac{23}{24}$$

$$\text{Terreno que falta por segar: } 1 - \frac{23}{24} = \frac{1}{24}$$

Si en segar $\frac{1}{24}$ tarda 2 h y 24 min, en segar el terreno completo tardará: $(2 \text{ h } 24 \text{ min}) \cdot 24 = 57 \text{ h } 36 \text{ min}$

Le hubiera costado 57 horas y 36 minutos.

3.92 Para elaborar 100 kilogramos de masa de pan se necesitan 40 litros de agua, medio kilogramo de levadura, tres cuartos de kilogramo de sal y cierta cantidad de harina. En la cocción la masa pierde el 15% del peso. ¿Cuántos kilogramos de harina hay que emplear para obtener 500 kilogramos de pan?

Calculamos la harina necesaria para elaborar 100 kilogramos de masa.

$$\left(40 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + x\right) \cdot \frac{85}{100} = 100$$

$$\left(\frac{160 + 2 + 3 + 4x}{4}\right) \cdot \frac{85}{100} = 100$$

$$14025 + 340x = 40000$$

$$x = 76,39 \text{ kg}$$

Para elaborar 500 kg de masa se necesitarían: $5 \cdot 76,39 = 381,95 \text{ kg}$ de harina

3.93 Durante la primera cuarta parte de la liga de baloncesto, el equipo del colegio ha obtenido un 40 % de los puntos posibles.

¿Qué porcentaje de puntos debe lograr en las tres cuartas partes restantes, para que al finalizar la liga tenga el 70 % de los puntos posibles?

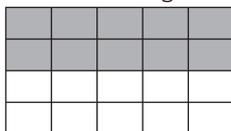
Total de puntos: T . 1.ª cuarta parte: $\frac{T}{4}$. En las otras tres cuartas partes: $\frac{3T}{4}$

$$\left. \begin{array}{l} 40\% \text{ de } \frac{T}{4} = \frac{T}{4} \cdot \frac{40}{100} \\ x\% \text{ de } \frac{3T}{4} = \frac{3T}{4} \cdot \frac{x}{100} \\ 70\% \text{ de } T = T \cdot \frac{70}{100} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{40T}{400} + \frac{3Tx}{400} = \frac{70T}{100} \Rightarrow T \left(\frac{40}{400} + \frac{3x}{400} \right) = T \cdot \frac{70}{100}$$

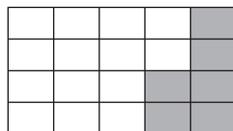
Luego debe hacer el 80 % de los puntos.

3.94 En una clase el 50 % de los estudiantes lleva gafas, el 30 % es rubio y el 10 % es rubio y lleva gafas. ¿Cuántos no son rubios y no llevan gafas?

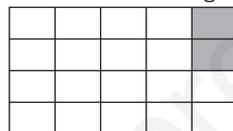
Estudiantes con gafas:



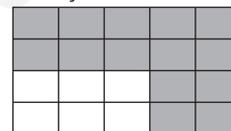
Estudiantes rubios:



Estudiantes rubios con gafas:



Todos juntos:



Los cuadros en blanco representan el porcentaje de estudiantes que no son rubios y no llevan gafas: $6 \cdot 5\% = 30\%$

3.95 En las Olimpiadas de 1948, Olga Gyarmati saltó 5,40 metros en longitud y ganó la medalla de oro. En las Olimpiadas de 1988, 40 años después, Jackie Joyner tuvo que saltar 7,20 metros para poder ganar la medalla de oro.

Si el porcentaje de aumento siguiera manteniéndose, ¿cuánto tendría que saltar para ganar la medalla de oro en longitud en las Olimpiadas del año 2028?

De 5,40 a 7,20 aumenta 1,80 metros: $\frac{5,40}{1,80} = \frac{100}{P} \Rightarrow P = \frac{180}{5,40} = 33,33\%$

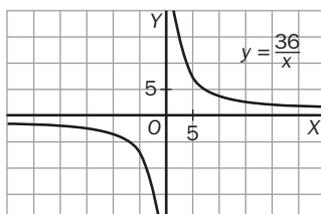
De 7,20 aumenta x : $\frac{7,20}{x} = \frac{100}{33,33} \Rightarrow x = \frac{239,37}{100} = 2,3997 \approx 2,40 \text{ m}$

Luego debería saltar $7,20 + x = 7,20 + 2,40 = 9,60 \text{ m}$

3.96 Representa gráficamente la relación que existe entre todos los números cuyo producto es 36.

a) ¿Es una relación proporcional?

b) ¿De qué tipo?



a) Sí

b) Es una relación de proporcionalidad inversa.

3.97 Índice de precios al consumo

Para calcular el IPC, índice que mide la subida de los precios, el instituto de estadística de un país utiliza dos tipos de encuestas.

La primera tabla refleja los datos correspondientes a la encuesta de presupuestos familiares; en ella se aprecia el peso que corresponde a cada grupo de productos consumidos por las familias. (Si una familia tiene un gasto total de 1000 unidades monetarias, 380 corresponden a alimentación.)

La segunda tabla muestra el alza sufrida durante ese mes en los precios de los productos correspondientes a esos mismos grupos.

El IPC es el promedio de las subidas de precios de los diferentes grupos, pero considerando el peso de cada uno de ellos.

Grupos	Peso
Alimentación	380
Vestido y calzado	135
Vivienda	250
Salud	45
Ocio y cultura	190
Total	1000

Grupos	Peso
Alimentación	2 %
Vestido y calzado	1,5 %
Vivienda	3 %
Salud	1 %
Ocio y cultura	5 %

- a) Calcula el IPC correspondiente a esos datos.
 b) Considerando este IPC, ¿cuánto debería subir un salario de 1200 euros para que no perdiera poder adquisitivo?

a)
$$IPC = \frac{380 \cdot 2 + 135 \cdot 1,5 + 250 \cdot 3 + 45 \cdot 1 + 190 \cdot 5}{1000} = 2,71 \%$$

b) $1200 \cdot 0,0271 = 32,52 \text{ €}$

AUTOEVALUACIÓN

3.A1 Entre los siguientes pares de magnitudes razona cuáles son directa o inversamente proporcionales y cuáles no.

- a) Número de kilogramos de peras y precio que se ha de pagar por ellos.
 b) Tiempo en recorrer 200 kilómetros y velocidad.
 c) Peso y edad de una persona.
 a) Son directamente proporcionales. Si doblamos el número de kilos de peras que compramos, también se dobla el precio que debemos pagar por ellas.
 b) Son inversamente proporcionales. Si doblamos la velocidad el tiempo se verá reducido a la mitad.
 c) No son directamente proporcionales.

3.A2 Halla el valor de x para que se cumpla la proporción $\frac{x}{24} = \frac{60}{288}$.

$$288 \cdot x = 60 \cdot 24 \Rightarrow x = \frac{1440}{288} = 5$$

3.A3 Tres grupos de alumnos de tercero deciden ir al teatro y pagan en total por las entradas 120 euros. Calcula lo que paga cada grupo sabiendo que del primero van 20 alumnos, del segundo, 15, y del tercero, 25.

Hacemos un reparto proporcional: $20k + 15k + 25k = 120 \Rightarrow 60k = 120 \Rightarrow k = 2$

Los alumnos del primer grupo deben pagar 40 euros; los del segundo, 30, y los del tercero, 50.

- 3.A4 Luis afirma que disminuir una cantidad en un 25 % equivale a multiplicar dicha cantidad por 0,75. ¿Es cierta su afirmación?

$$x\left(1 - \frac{25}{100}\right) = x\left(\frac{100 - 25}{100}\right) = x\frac{75}{100} = x \cdot 0,75 \quad \text{La afirmación es cierta.}$$

- 3.A5 El precio de una mercancía este mes sube un 10 % y al mes siguiente un 5 %. ¿Qué porcentaje ha subido en total?

$$\left(x\left(1 + \frac{10}{100}\right)\right)\left(1 + \frac{5}{100}\right) = \left(x + \frac{10x}{100}\right)\left(1 + \frac{5}{100}\right) = x + \frac{10x}{100} + \frac{5x}{100} + \frac{50x}{10000} = x\left(1 + \frac{15,5}{100}\right)$$

Sube un 15,5 %.

- 3.A6 El precio de un libro antiguo es 24 euros. A un cliente habitual el librero le hace un 25 % de descuento y le cobra el 4 % de IVA.

¿Cuánto tiene que pagar este cliente por el libro?

$$\text{Aplicamos al precio del libro el descuento y luego el IVA: } \left(24\left(1 - \frac{25}{100}\right)\right)\left(1 + \frac{4}{100}\right) = 18,72 \text{ €}$$

El cliente paga por el libro 18,72 euros.

- 3.A7 El depósito de la calefacción de un bloque de viviendas tiene combustible para 30 días, si se enciende 10 horas diarias.

¿Para cuántos días tendrá combustible si se enciende en las mismas condiciones 12 horas diarias?

Las magnitudes son inversamente proporcionales, de modo que: $30 \cdot 10 = x \cdot 12 \Rightarrow x = 25$ días

Habrà combustible para 25 días.

- 3.A8 Para recoger en 16 días la aceituna de una finca de olivos, se necesita un grupo de 30 personas. ¿Cuánto tiempo necesitarán 20 personas?

Las magnitudes son inversamente proporcionales: $30 \cdot 16 = 20 \cdot x \Rightarrow x = 24$ días

Tardarán 24 días en recoger las aceitunas de la finca de olivos.

- 3.A9 Cinco máquinas iguales envasan 20 000 botellas de agua funcionando 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardarían 6 máquinas en envasar 40 000 botellas?

5 máquinas envasan 20 000 botellas en 5 horas.

1 máquina envasa 20 000 botellas en $5 \cdot 5 = 25$ horas.

1 máquina envasa 1 botella en $\frac{25}{20\,000} = 1,25 \cdot 10^{-3}$ horas.

6 máquinas envasan 1 botella en $\frac{1,25 \cdot 10^{-3}}{6} = 2,08 \cdot 10^{-4}$ horas.

6 máquinas envasan 40 000 botellas en $2,08 \cdot 10^{-4} \cdot 40\,000 = 8,3$ horas.

- 3.A10 Para pintar una pared de 8 metros de largo y 2,5 metros de altura se han utilizado 2 botes de 1 kilogramo de pintura.

¿Cuántos botes de 5 kilogramos de pintura se necesitarán para pintar una pared de 50 metros de largo y 2 metros de alto?

Calculamos el área de las paredes: $8 \cdot 2,5 = 20 \text{ m}^2$; $50 \cdot 2 = 100 \text{ m}^2$

20 m² ————— 2 botes ————— 1 kilogramo

100 m² ————— x botes ————— 5 kilogramos

Proporcionalidad directa Proporcionalidad inversa

$$\frac{2}{x} = \frac{20}{100} \cdot \frac{5}{1} \Rightarrow x = 2 \cdot \frac{100}{20} \cdot \frac{1}{5} = 2$$

Hacen falta dos botes de 5 kilogramos de pintura para pintar una pared de 100 metros cuadrados.