Página 207

Resuelve

1. Busca información sobre los sólidos arquimedianos:

a) ¿Cuántos triángulos y cuántos cuadrados forman la superficie de un rombicuboctaedro?

b) Escribe el nombre de otros tres sólidos arquimedianos.

a) La superficie de un rombicuboctaedro está formada por 8 triángulos y 18 cuadrados.

b) Cuboctaedro, icosidodecaedro, rombicosidodecaedro.

2. Calcula, al estilo de Arquímedes, la fórmula del volumen de una esfera, teniendo en cuenta las siguientes ayudas:

- **La suma de los volúmenes de varias pirámides con la misma altura es:**

$$A = \frac{1}{3}\,(\text{SUMA DE LAS SUPERFICIES DE LAS BASES}) \cdot \text{Altura}$$

- **El volumen de la esfera se calcula aplicando la fórmula anterior a la suma de todas las finísimas pirámides, de vértice O y altura r, en que se puede descomponer la esfera.**
- **El área de la superficie esférica es $4\pi r^2$.**

La suma de la superficie de las bases de las pirámides coincide con la superficie esférica, $4\pi r^2$.

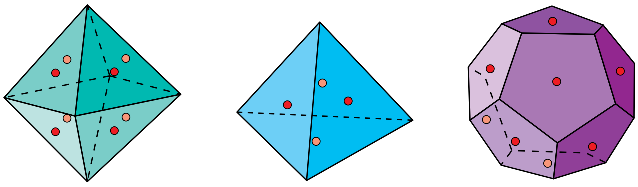
La altura de cada pirámide es muy próxima al radio de la esfera, r.

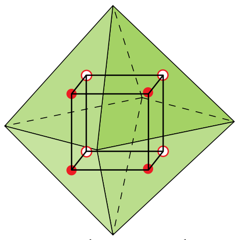
$$V = \frac{1}{3}\,(\text{Suma de las superficies de las bases}) \cdot \text{Altura} = \frac{1}{3}(4\pi r^2) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

1 Poliedros regulares y semirregulares

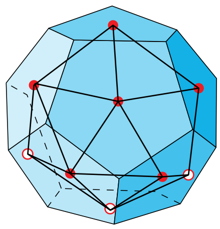
Página 208

1. **Hemos señalado en rojo los centros de las caras "frontales" de estos poliedros, y en color más claro, los centros de algunas caras "ocultas". Uniéndolos convenientemente se obtienen los poliedros duales. Hazlo en tu cuaderno.**

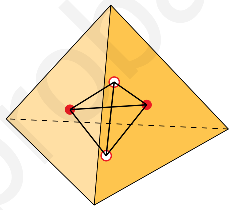




octaedro – cubo



dodecaedro – icosaedro



tetraedro – tetraedro

Página 209

2. Haz una tabla con el número de caras, vértices y aristas de los cinco poliedros regulares.

	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
CARAS					
VÉRTICES					
ARISTAS					

a) Comprueba que los cinco cumplen la fórmula de Euler.

b) Comprueba que el dodecaedro y el icosaedro cumplen las condiciones necesarias para ser duales.

c) Comprueba que el tetraedro cumple las condiciones para ser dual de sí mismo.

	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
CARAS	4	6	8	12	20
VÉRTICES	4	8	6	20	12
ARISTAS	6	12	12	30	30

a) Tetraedro $\rightarrow$ $4 + 4 - 6 = 2$

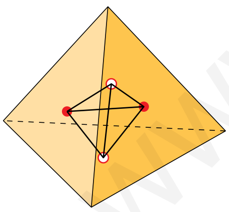
Cubo $\rightarrow$ $6 + 8 - 12 = 2$

Octaedro $\rightarrow$ $8 + 6 - 12 = 2$

Dodecaedro $\rightarrow$ $12 + 20 - 30 = 2$

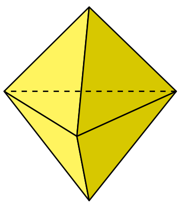
Icosaedro $\rightarrow$ $20 + 12 - 30 = 2$

b) Al unir mediante segmentos los centros de cada dos caras contiguas de un dodecaedro, se forma un icosaedro. Si hiciéramos lo mismo con un icosaedro, obtendríamos un dodecaedro. Además, el número de caras del dodecaedro coincide con el número de vértices del icosaedro, y viceversa. Ambos tienen el mismo número de aristas. Por tanto, son poliedros duales.

c) 

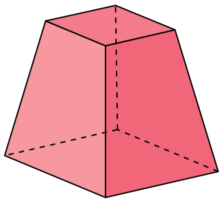
Al unir mediante segmentos los centros de cada dos caras contiguas de un tetraedro, se forma otro tetraedro. Además, el número de caras y de vértices en un tetraedro son iguales. El tetraedro es dual de sí mismo.

3. Hemos visto que esta figura no es un poliedro regular. ¿Es semirregular?



Esta figura no es un poliedro semirregular porque en todos los vértices no concurren los mismos polígonos.

4. **Esta pirámide truncada cuyas bases son cuadrados, ¿es un poliedro semirregular? ¿Por qué?**



No es un poliedro semirregular porque sus aristas no son todas iguales.

5. **Explica por qué las aristas de un poliedro semirregular tienen que ser todas iguales.**

Las aristas de un poliedro semirregular tienen que ser todas iguales porque son como poliedros regulares, solo se diferencian en que los primeros no tienen todas las caras iguales.

2 Truncando poliedros

Página 210

1. Vamos a truncar, dando cortes que pasen por los puntos medios de las aristas adyacentes, los restantes poliedros regulares.

a) Al truncar de este modo un tetraedro, se obtiene una figura conocida. ¿Cuál?

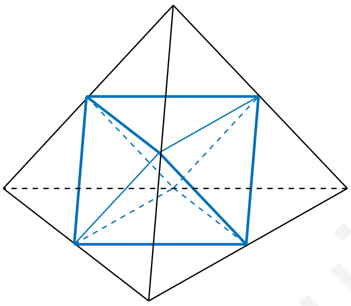
b) El resultado de truncar el octaedro también es conocido.

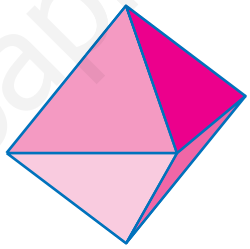
¿Comprendes, ahora, por qué a esta figura se le llama cuboctaedro?

c) ¿Qué figura resulta de truncar un icosaedro? Compárala con el resultado de truncar un dodecaedro que has visto antes y explica por qué es un poliedro semirregular (recuerda, se llama icosidodecaedro).

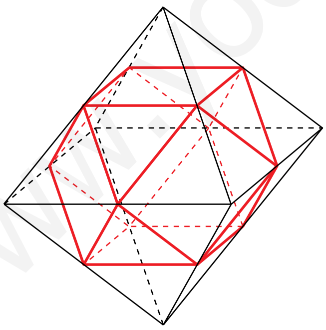
d) Relaciona los resultados anteriores con la dualidad de poliedros estudiada en el epígrafe anterior.

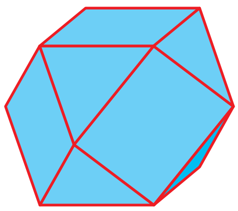
a) La figura que se obtiene es un octaedro.





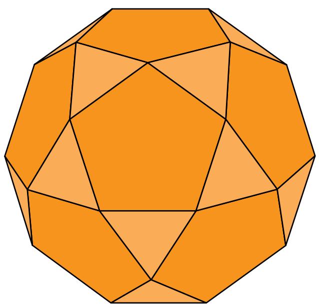
b) La figura que se obtiene es un cuboctaedro.





c) Al truncar un icosaedro se obtiene un icosidodecaedro, que se compone de pentágonos regulares y de triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen dos pentágonos y dos triángulos (es un poliedro semirregular).

Al truncar un dodecaedro también se obtiene un icosidodecaedro.



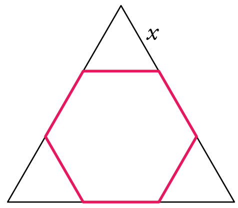
d) La figura que resulta al truncar dos poliedros duales es la misma.

2. Explica por qué al truncar los poliedros regulares, excepto el tetraedro, se obtienen siempre poliedros semirregulares.

Obtenemos poliedros semirregulares porque al truncar siguiendo el patrón que se indica en la teoría, las caras que aparecen son dos tipos de polígonos regulares y en todos los vértices concurren el mismo número de caras.

Página 211

3. **¿A qué distancia del vértice hemos de cortar los triángulos pequeños para que el hexágono resultante sea regular?**



$x = \frac{1}{3}l$, donde l es el lado del triángulo.

4. **Describe el tetraedro truncado.**

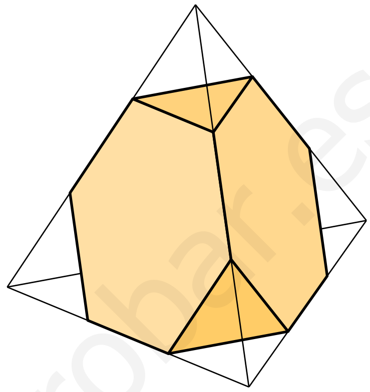
¿Cuántas caras tiene?

¿Cuántas son de cada tipo?

¿Cuántos vértices?

¿Cuántas aristas?

¿Cuánto mide la arista del tetraedro truncado con relación a la del tetraedro original?

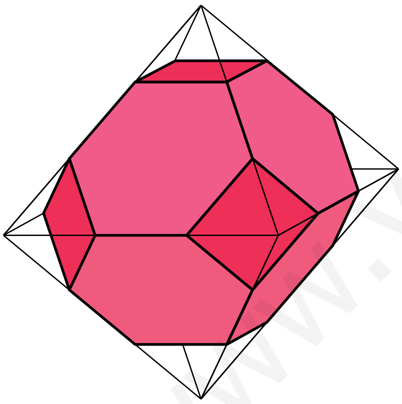


Tiene 8 caras, 4 hexágonos regulares y 4 triángulos equiláteros.

Tiene 12 vértices donde concurren dos hexágonos y un triángulo.

Tiene 18 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del tetraedro original.

5. **Describe el octaedro truncado.**



Caras, tipos.

Vértices.

Aristas.

Tiene 14 caras, 8 hexágonos y 6 cuadrados.

Tiene 24 vértices donde concurren dos hexágonos y un cuadrado.

Tiene 36 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del octaedro original.

6. **Conociendo las características de un dodecaedro (caras, vértices), describe cómo será el dodecaedro truncado.**

Tiene 32 caras, 12 decágonos regulares y 20 triángulos equiláteros.

Tiene 60 vértices donde concurren dos decágonos y un triángulo.

Tiene 90 aristas.

7. **Conocidas las características de un icosaedro, describe cómo será el icosaedro truncado.**

Tiene 32 caras, 20 hexágonos y 12 pentágonos.

Tiene 60 vértices donde concurren dos hexágonos y un pentágono.

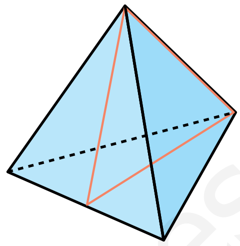
Tiene 90 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del icosaedro original.

3 Planos de simetría de una figura

Página 212

1. ¿Qué condiciones debe cumplir un plano para ser plano de simetría del tetraedro?

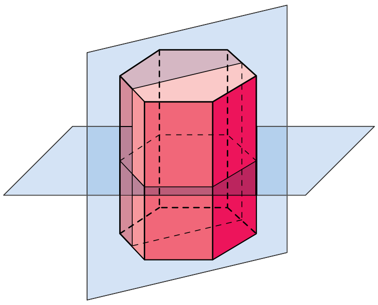
¿Cuántos planos de simetría tiene el tetraedro?



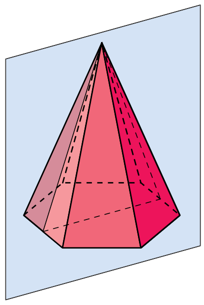
Para que un plano sea plano de simetría del tetraedro tiene que contener una arista y ser perpendicular a dos caras.

El tetraedro tiene 6 planos de simetría, uno por cada arista.

2. Dibuja un prisma hexagonal regular. ¿Cuántos planos de simetría tiene? ¿Y cuántos tiene una pirámide hexagonal regular?



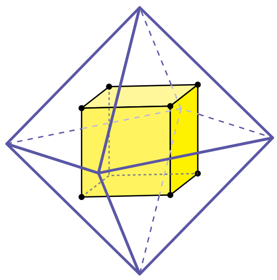
El prisma hexagonal regular tiene seis planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases, y otro plano de simetría paralelo a las dos bases.



La pirámide hexagonal regular tiene seis planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases.

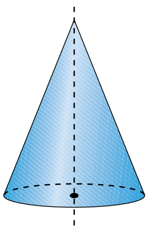
3. Recuerda la relación de dualidad entre el cubo y el octaedro (caras-vértices).

Basándote en los planos de simetría del cubo, describe todos los planos de simetría del octaedro.

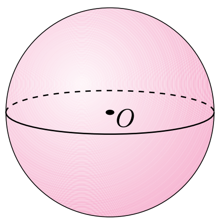


Todos los planos de simetría del cubo inscrito en el octaedro son también planos de simetría del octaedro. Por tanto, el octaedro y el cubo tienen el mismo número de planos de simetría.

4. ¿Qué planos de simetría tiene un cono? ¿Y una esfera?



Cualquier plano que contiene al eje del cono es plano de simetría de este. Hay, pues, infinitos.

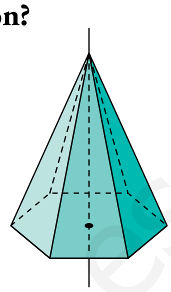


Cualquier plano que contenga al centro de la esfera es un plano de simetría de esta. Hay, pues, infinitos.

4 Ejes de giro de una figura

Página 213

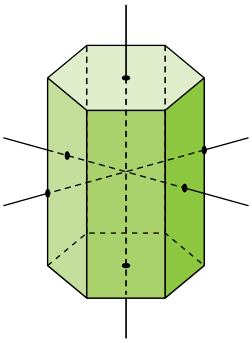
1. ¿Qué ejes de giro tiene una pirámide hexagonal regular? ¿De qué órdenes son?
¿Y un prisma hexagonal regular? (No pases por alto algunos de orden 2).



PIRÁMIDE HEXAGONAL

Hay solo un eje de giro de orden 6.

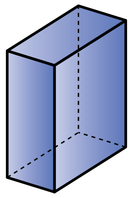
Pasa por el centro de la base y el vértice de la pirámide.



PRISMA HEXAGONAL

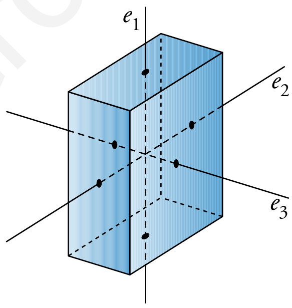
Hay un eje de giro de orden 6, el que pasa por el centro de las dos bases.

Hay 6 ejes de giro de orden 2: todos ellos son paralelos a las bases. 3 de ellos pasan por el punto medio de las dos caras latelares opuestas, y los otros 3, por las aristas opuestas.

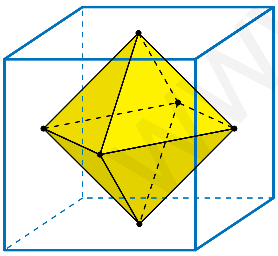


2. ¿Qué ejes de giro tiene un ortoedro con las tres dimensiones distintas?
¿De qué órdenes son?

Hay tres ejes de giro de orden 2, e_1, e_2 y e_3.



3. Estudia los ejes de giro del octaedro. Puedes basarte en los del cubo.



Todos los ejes de giro del cubo son también ejes de giro del octaedro inscrito en él. Por tanto, el octaedro y el cubo tienen el mismo número de ejes de giro y de los mismos órdenes. Es decir:

- Tres ejes de giro de orden cuatro, que pasan por dos vértices opuestos.
- Seis ejes de giro de orden dos, que pasan por los puntos medios de dos aristas opuestas.
- Cuatro ejes de giro de orden tres, que pasan por los centros de dos caras opuestas.

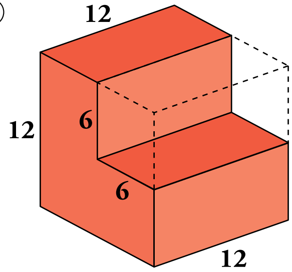
Al comparar estos ejes de giro con los del cubo, se puede observar la dualidad (caras $\leftrightarrow$ vértices, aristas $\leftrightarrow$ aristas):

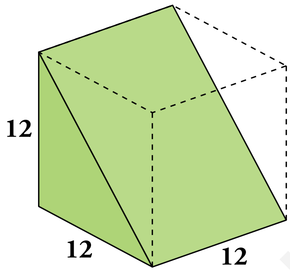
- Los ejes que en el cubo pasan por los centros de caras opuestas, en el octaedro pasan por vértices opuestos.
- Los ejes que en el cubo pasan por aristas opuestas, en el octaedro pasan por aristas opuestas.
- Los ejes que en el cubo pasan por dos vértices opuestos del cubo, en el octaedro pasan por los centros de caras opuestas.

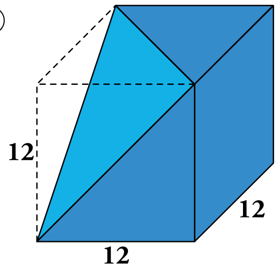
5 Superficie de los cuerpos geométricos

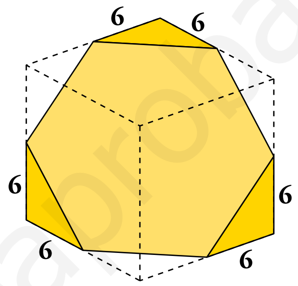
Página 217

1. Calcula el área de estos poliedros obtenidos a partir de un cubo de 12 cm de arista:

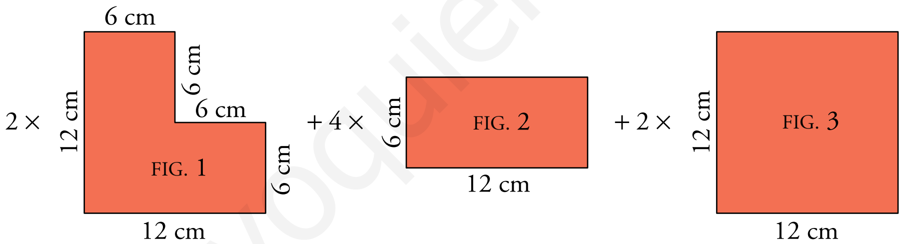
Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


Ⓐ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



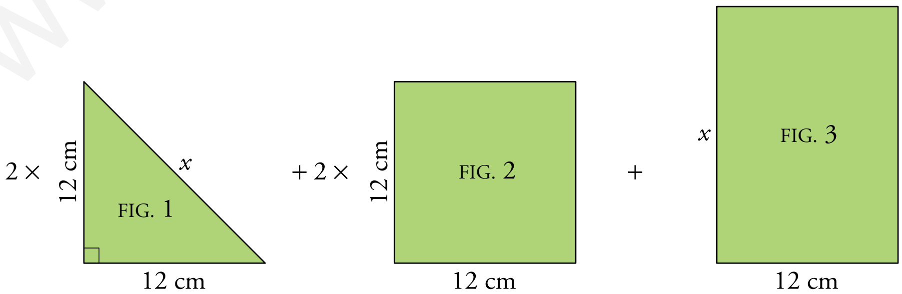
$A_{\text{FIG. 1}} = 12 \cdot 6 + 6 \cdot 6 = 108 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 2}} = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 108 + 4 \cdot 72 + 2 \cdot 144 = 792 \text{ cm}^2$

Ⓑ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



$x = \sqrt{12^2 + 12^2} \approx 16{,}97 \text{ cm}$

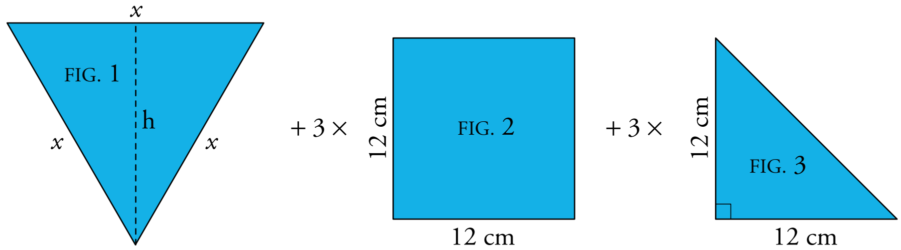
$A_{\text{FIG. 1}} = \dfrac{12^2}{2} = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 2}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 12 \cdot 16{,}97 = 203{,}64 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 72 + 2 \cdot 144 + 203{,}64 = 635{,}64 \text{ cm}^2$

Ⓒ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:

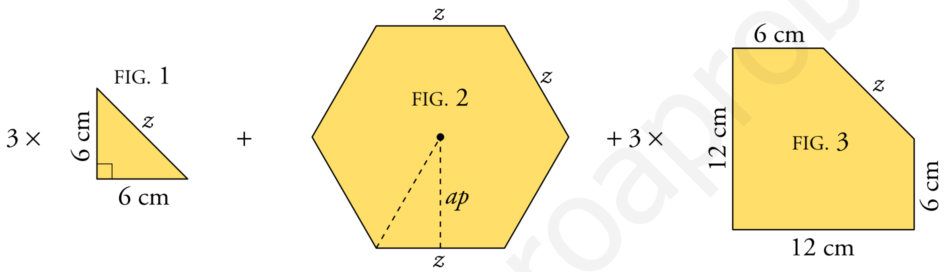


$x \approx 16{,}97$ cm (ver Ⓑ); $h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \approx 14{,}70$ cm

$A_{\text{FIG. 1}} = \frac{16{,}97 \cdot 14{,}70}{2} \approx 124{,}73 \text{ cm}^2$ $\qquad A_{\text{FIG. 2}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 72 \text{ cm}^2$ $\qquad A_{\text{TOTAL}} = 124{,}73 + 3 \cdot 144 + 3 \cdot 72 = 772{,}73 \text{ cm}^2$

Ⓓ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



$z = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}49$ cm

Apotema del hexágono regular: $ap = \sqrt{z^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \frac{z\sqrt{3}}{2} \approx 7{,}35$ cm

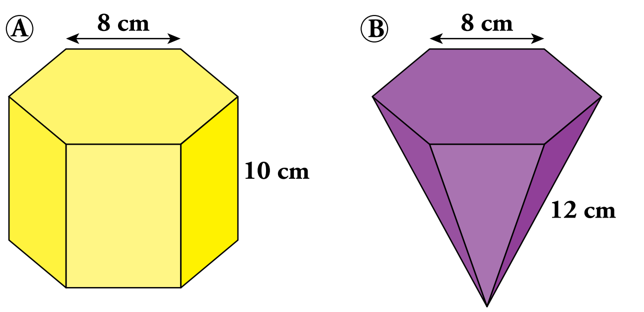
$A_{\text{FIG. 1}} = 18 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 2}} = \frac{6 \cdot 8{,}49 \cdot 7{,}35}{2} = 187{,}20 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 12 \cdot 12 - A_{\text{FIG. 1}} = 144 - 7{,}35 = 136{,}65 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 3 \cdot 7{,}35 + 187{,}20 + 3 \cdot 136{,}65 = 619{,}2 \text{ cm}^2$

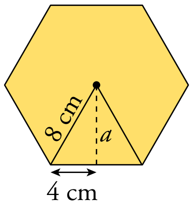
2. Obtén la medida de la superficie del prisma y de la pirámide. La base de ambos es un hexágono regular.



ARISTA BASE → **8 cm** $\qquad$ ARISTA BASE → **8 cm**

ALTURA PRISMA → **10 cm** $\qquad$ ARISTA LATERAL → **12 cm**

Ⓐ



$a = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93$ cm

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 = 166{,}32 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480 \text{ cm}^2$

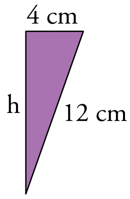
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 166{,}32 + 480 = 812{,}64 \text{ cm}^2$

Ⓑ $A_{\text{BASE}} = 166{,}32 \text{ cm}^2$

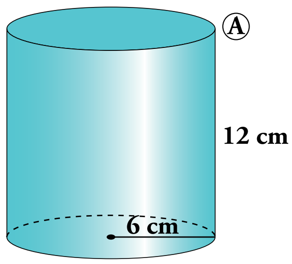
Apotema de la pirámide = h = $\sqrt{12^2 - 4^2} \approx 11{,}31$ cm

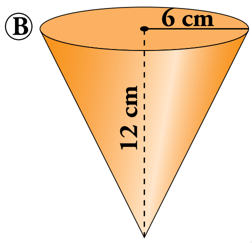
$A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{8 \cdot 11{,}31 \cdot 6}{2} = 271{,}44 \text{ cm}^2$

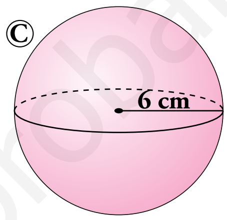
$A_{\text{TOTAL}} = 166{,}32 + 271{,}44 = 437{,}76 \text{ cm}^2$



3. **Calcula el área de estos cuerpos:**







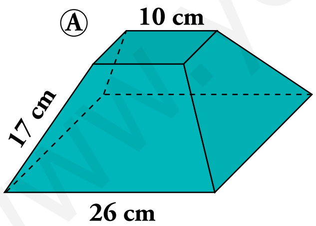
Ⓐ $A_{\text{TOTAL}} = 2\pi \cdot 6 \cdot 12 + 2\pi \cdot 6^2 \approx 678{,}58 \text{ cm}^2$

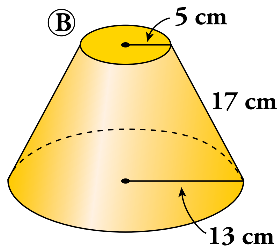
Ⓑ $g = \sqrt{12^2 + 6^2} \approx 13{,}42$ cm

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 6 \cdot 13{,}42 + \pi \cdot 6^2 \approx 366{,}06 \text{ cm}^2$

Ⓒ $A_{\text{TOTAL}} = 4\pi \cdot 6^2 \approx 452{,}39 \text{ cm}^2$

4. **Calcula el área de los siguientes cuerpos:**





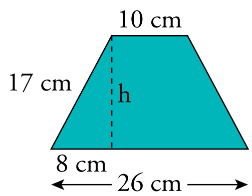
Ⓐ $A_{\text{BASE GRANDE}} = 26^2 = 676 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE PEQUEÑA}} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$

$h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ cm

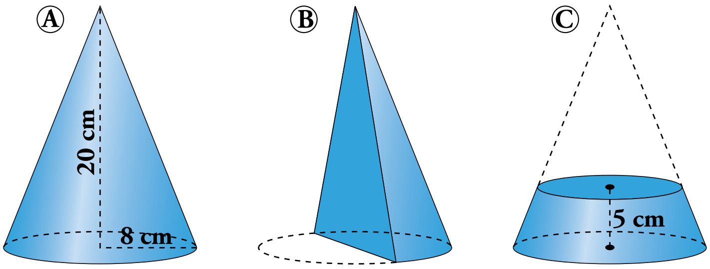
$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \dfrac{26 + 10}{2} \cdot 15 = 1\,080 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 676 + 100 + 1\,080 = 1\,856 \text{ cm}^2$



Ⓑ $A = \pi \cdot 13^2 + \pi \cdot 5^2 + \pi(13 + 5) \cdot 17 = 530{,}93 + 78{,}54 + 961{,}33 = 1\,570{,}8 \text{ cm}^2$

5. Calcula el área total del cono, del cuerpo que resulta de partirlo por la mitad y del tronco de cono obtenido al cortar por una sección paralela a la base, a 5 cm de la misma.



Ⓐ $g = \sqrt{20^2 + 8^2} \approx 21{,}54$ cm

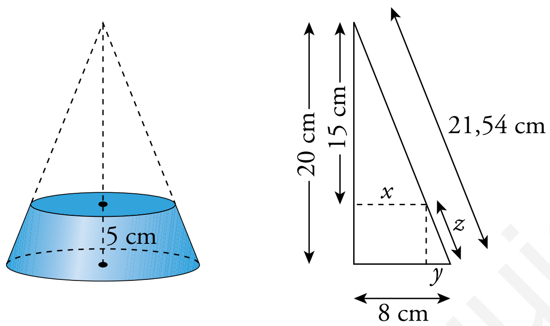
$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 8 \cdot 21{,}54 + \pi \cdot 8^2 = 742{,}42 \text{ cm}^2$

Ⓑ $A_{\text{BASE}} = \dfrac{\pi \cdot 8^2}{2} \approx 100{,}53 \text{ cm}^2$; $A_{1/2 \text{ LATERAL}} = \dfrac{\pi \cdot 8 \cdot 21{,}54}{2} \approx 270{,}68 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{16 \cdot 20}{2} = 160 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 100{,}53 + 270{,}68 + 160 = 531{,}21 \text{ cm}^2$

Ⓒ



$\dfrac{20}{8} = \dfrac{15}{x} \rightarrow x = 6$ cm

$y = 8 - 6 = 2$ cm

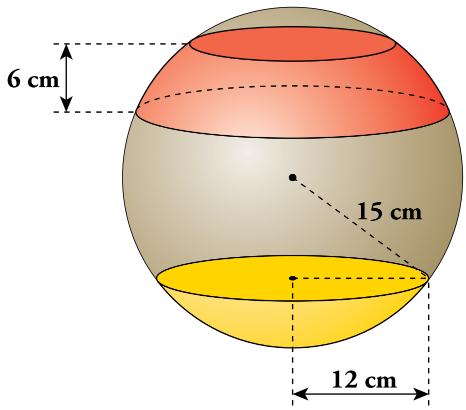
$z = \sqrt{5^2 + 2^2} \approx 5{,}39$ cm

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot (8 + 6) \cdot 5{,}39 + \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 6^2 \approx 551{,}22 \text{ cm}^2$

6. En una esfera de 30 cm de diámetro, calcula:

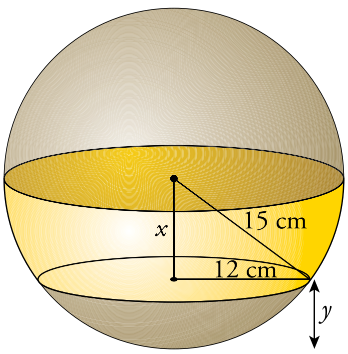
a) El área de una zona esférica de 6 cm de altura.

b) El área de un casquete esférico cuya base tiene un radio de 12 cm.



a) $A_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 \approx 565{,}49 \text{ cm}^2$

b)



$x = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm

$y = 15 - 9 = 6$ cm

$A_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 \approx 565{,}49 \text{ cm}^2$

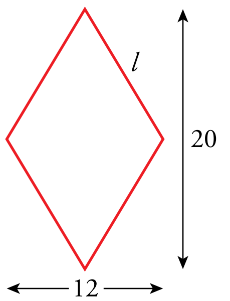
7. Halla el área de:

a) Un prisma recto cuya base es un rombo de diagonales 12 cm y 20 cm, sabiendo que su arista lateral mide 24 cm.

b) Una pirámide recta con la misma base y la misma arista lateral que el prisma anterior.

c) Un cuboctaedro de 10 cm de arista.

d) Un dodecaedro truncado de 10 cm de arista.



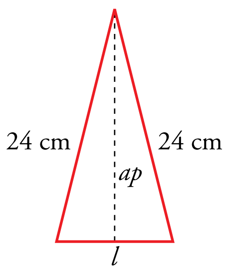
$l = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 11,66$ cm

$A_{\text{ROMBO}} = \dfrac{20 \cdot 12}{2} = 120 \text{ cm}^2$

$P_{\text{ROMBO}} = 46,65$ cm

a) $A_{\text{PRISMA}} = 2 \cdot A_{\text{ROMBO}} + P_{\text{ROMBO}} \cdot 24 = 1\,359,6 \text{ cm}^2$

b)



Cara lateral de la pirámide:

Apotema de la pirámide: $ap = \sqrt{24^2 + 34} = 4,97$

$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot l \cdot ap/2 = 115,90 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = 120 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PIRÁMIDE}} = 235,9 \text{ cm}^2$

c) 6 cuadrados $\rightarrow A_1 = 6 \cdot 10^2 = 600 \text{ cm}^2$

8 triángulos $\rightarrow A_2 = 8 \cdot (10 \cdot 10\sqrt{3}/2) : 2 = 346,41 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 946,41 \text{ cm}^2$

d) 12 pentágonos y 20 hexágonos.

Área de un pentágono de lado 10 cm:

$A_1 = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6,88}{2} = 172 \text{ cm}^2$

Área de un hexágono de lado 10 cm:

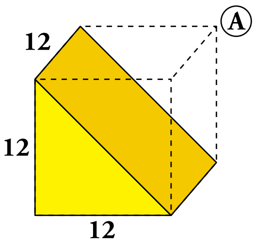
$A_2 = \dfrac{6 \cdot 10 \cdot 8,66}{2} = 259,80 \text{ cm}^2$

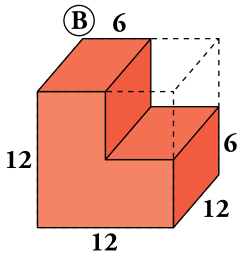
$A_{\text{TOTAL}} = 12 \cdot A_1 + 20 \cdot A_2 = 7\,260 \text{ cm}^2$

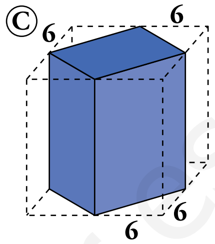
6 Volumen de los cuerpos geométricos

Página 219

1. Calcula el volumen de estos prismas, obtenidos cortando un cubo de 12 cm de arista:

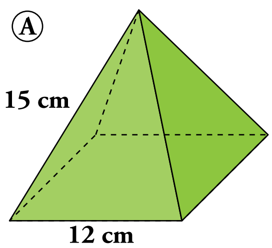


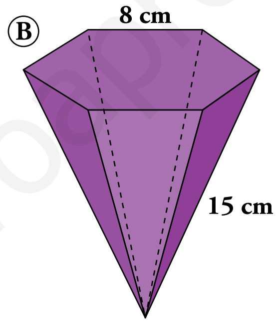




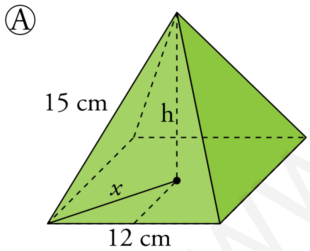
Ⓐ $V = \dfrac{12^3}{2} = 864 \text{ cm}^3$ Ⓑ $V = \dfrac{3}{4} \cdot 12^3 = 1\,296 \text{ cm}^3$ Ⓒ $V = \dfrac{12^3}{2} = 864 \text{ cm}^3$

2. Calcula el volumen de estas pirámides cuyas bases son polígonos regulares:





Ⓐ

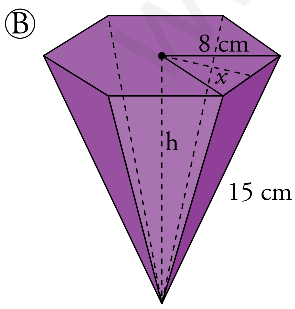


$x = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}49 \text{ cm}$

$h = \sqrt{15^2 - 8{,}46^2} \approx 12{,}37 \text{ cm}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 12{,}37 \approx 593{,}76 \text{ cm}^3$

Ⓑ

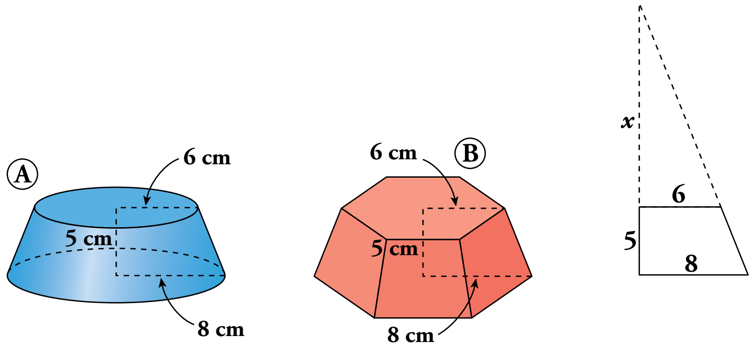


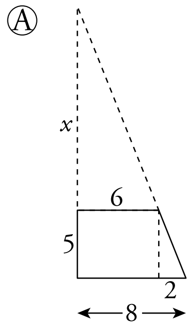
$h = \sqrt{15^2 - 8^2} \approx 12{,}69 \text{ cm}$

$x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93 \text{ cm}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 \cdot 12{,}69 \approx 703{,}53 \text{ cm}^3$

3. **Calcula el volumen del tronco de cono y el del tronco de pirámide.**



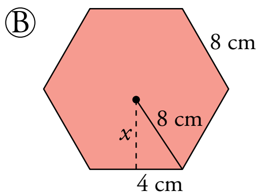


$$\frac{5}{2} = \frac{5 + x}{8} \ \rightarrow \ x = 15 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO MAYOR}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 20 = 1\,340{,}41 \text{ cm}^3$$

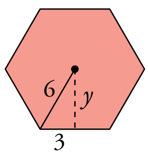
$$V_{\text{CONO MENOR}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 = 565{,}49 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 1\,340{,}41 - 565{,}49 = 774{,}92 \text{ cm}^3$$



$$x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93 \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 \cdot 20 = 1\,108{,}8 \text{ cm}^3$$

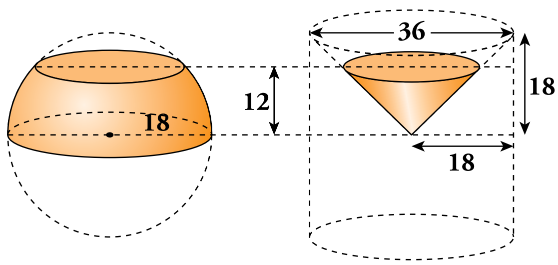


$$y = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}2 \text{ cm}$$

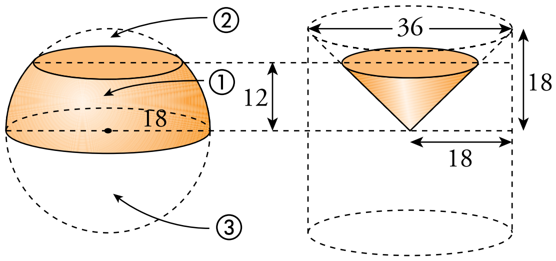
$$V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} \cdot 6 \cdot 15 = 468 \text{ cm}^3$$

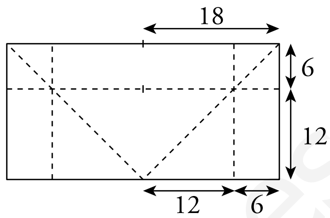
$$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = 1\,108{,}8 - 468 = 640{,}8 \text{ cm}^3$$

4. **Se corta una esfera de 36 cm de diámetro por dos planos paralelos: uno pasa por el centro y el otro dista 12 cm del centro.**



Calcula el volumen de cada una de las tres porciones en las que ha quedado dividida la esfera.





1) $V_{\text{PORCIÓN (1) CILINDRO}} = \pi \cdot 18^2 \cdot 12 = 3\,888\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO (1) CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 = 576\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (1) ESFERA}} = 3\,888\pi - 576\pi \approx 10\,404{,}95 \text{ cm}^3$

2) $V_{\text{PORCIÓN (2) CILINDRO}} = \pi \cdot 18^2 \cdot 6 = 1\,944\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (2) CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 18^2 \cdot 18 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 = 1\,368\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (2) ESFERA}} = 1\,944\pi - 1\,368\pi \approx 1\,809{,}56 \text{ cm}^3$

3) $V_{\text{PORCIÓN (3) ESFERA}} = \dfrac{\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 18^3}{2} = 12\,214{,}51 \text{ cm}^3$

7 Coordenadas geográficas

Página 221

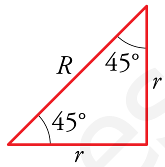
Hazlo tú

Halla, en kilómetros, la medida del paralelo 45°.

r = radio del paralelo 45°

$r^2 + r^2 = R^2 \to 2r^2 = 6\,366{,}2^2 \to r = 4\,501{,}58$ km

Perímetro = $2\pi \cdot 4\,501{,}58 = 28\,284{,}26$ km



1. **El metro, unidad de medida de longitud, se definía antiguamente como *la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre*. Es decir, un meridiano terrestre tiene 40 000 000 de metros.**

Según esto:

a) Calcula el radio de la Tierra en kilómetros.

b) Su superficie en kilómetros cuadrados.

c) Su volumen en kilómetros cúbicos.

d) Calcula el área de un huso horario.

a) Meridiano = Perímetro = $2\pi \cdot R = 40\,000\,000$ m $= 40\,000$ km

$R \approx 6\,366{,}2$ km

b) Superficie = $4\pi \cdot (6\,366{,}2)^2 = 509\,296\,182{,}1$ km^2

c) Volumen = $\frac{4}{3}\pi \cdot (6\,366{,}2)^3 = 1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3

d) Área huso horario = $\dfrac{509\,296\,182{,}1}{24} = 21\,220\,674{,}25$ km^2

2. **Un barco va de un punto A, situado en las costas de África a 30° latitud norte y 10° longitud oeste, a otro punto B, con la misma latitud y 80° de longitud oeste, siguiendo el paralelo común.**

a) ¿Qué distancia ha recorrido?

b) ¿Qué distancia recorrería si la diferencia de longitudes de los dos puntos fuera de 180°?

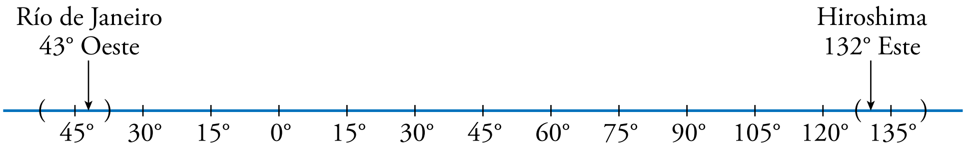
a) Entre A y B hay un arco de $80° - 10° = 70°$

Como hemos visto en el problema resuelto de esta página, el perímetro del paralelo 30° es 34 641,1 km.

Por tanto, la distancia de A a B es $\dfrac{34\,641{,}1}{360°} \cdot 70° \approx 6\,735{,}77$ km.

b) $\dfrac{34\,641{,}1}{2} = 17\,320{,}55$ km

3. En Río de Janeiro (43° O) son las 7 de la mañana. ¿Qué hora es en Hiroshima (132° E)?



Hay 12 horas de diferencia. Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde.

Otra forma de hacerlo es:

$132° = 15° \cdot 8 + 12$

Hiroshima está en el huso horario número 9 al este.

$43° = 15° \cdot 2 + 13$

Río de Janeiro está en el huso horario número 3 al oeste.

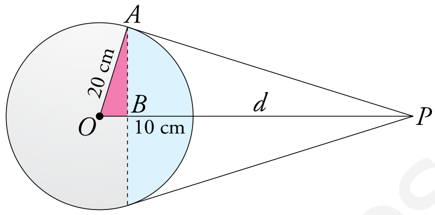
Están, pues, a 12 husos horarios de diferencia.

Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde (19 h).

Página 222

Hazlo tú

Calcula la distancia a la que tenemos que mirar una esfera de 40 cm de diámetro para ver la cuarta parte de su superficie.



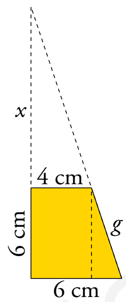
$\overline{AB} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300}$

$\dfrac{10}{\sqrt{300}} = \dfrac{\sqrt{300}}{d + 10} \rightarrow 10(d + 10) = 300 \rightarrow d = 20$

Tenemos que mirar a 20 cm de distancia.

Hazlo tú

Halla el área total y el volumen de un tronco de cono de 6 cm de altura cuyos radios miden 6 cm y 4 cm.



$\dfrac{x}{4} = \dfrac{x + 6}{6} \rightarrow 6x = 4x + 24 \rightarrow x = \dfrac{24}{2} = 12$

$V_{\text{TRONCO}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 18 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 12 \approx 477{,}52 \text{ cm}^3$

$g = \sqrt{6^2 + 2^2} \approx 6{,}32 \text{ cm}$

$A_{\text{TOTAL}} = \pi(6 + 4) \cdot 6{,}32 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 4^2 \approx 361{,}91 \text{ cm}^2$

Ejercicios y problemas

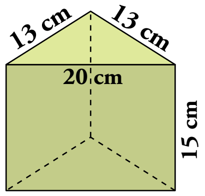
Página 223

Practica

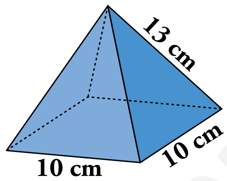
Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

1. Calcula el área y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

a)



b)



a) Calculamos primero la altura de la base, h.

$h = \sqrt{13^2 - 10^2} \approx 8{,}31$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = 2 \cdot \dfrac{20 \cdot 8{,}31}{2} = 166{,}2 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 20 \cdot 15 + 2 \cdot 13 \cdot 15 = 300 + 2 \cdot 195 = 690 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 166 + 690 = 856 \text{ cm}^2$$

$V = 8{,}31 \cdot 15 = 1\,246{,}5$ cm^3

b) Calculamos primero la apotema, m, y la altura, h, de la pirámide.

$m = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm; $h = \sqrt{12^2 - 5^2} \approx 10{,}91$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \dfrac{10 \cdot 12}{2} = 240 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 100 + 240 = 340 \text{ cm}^2$$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 100 \cdot 10{,}91 \approx 363{,}67$ cm^3

2. Calcula el área y el volumen de los cuerpos geométricos siguientes:

a) Prisma de altura 20 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.

b) Pirámide hexagonal regular de arista lateral 18 cm y arista básica 6 cm.

c) Octaedro regular de 10 cm de arista.

d) Cilindro de altura 27 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm de longitud.

e) Cono de radio 9 cm y generatriz 15 cm.

f) Semiesfera de 10 cm de radio.

g) Esfera inscrita en un cilindro de 1 m de altura.

h) Casquete esférico de 7 cm de altura de una esfera de radio 12 cm.

a) Calculamos primero el lado del rombo, l.

$l = \sqrt{6^2 + 9^2} \approx 10{,}82$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = 2 \cdot \dfrac{18 \cdot 12}{2} = 216 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot 10{,}82 \cdot 20 = 865{,}6 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 216 + 865{,}6 = 1\,081{,}6 \text{ cm}^2$$

$V = 108 \cdot 20 = 2\,160$ cm^3

b) Calculamos primero la apotema de la base, x, y la de la pirámide, m.

$x = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}2$ cm; $m = \sqrt{18^2 - 6^2} \approx 17$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot \dfrac{6 \cdot 17}{2} = 306 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 93{,}6 + 306 = 399{,}6 \text{ cm}^2$$

Calculamos la altura de la pirámide y el volumen:

$h = \sqrt{17^2 - 5{,}2^2} \approx 16{,}19$ cm $\rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 93{,}6 \cdot 16{,}19 = 505{,}128$ cm^3

c) Calculamos la altura de las caras, m, y el área:

$m = \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8{,}66$ cm $\rightarrow A = 8 \cdot \dfrac{10 \cdot 8{,}66}{2} = 346{,}4$ cm^2

Para calcular el volumen del octaedro calcularemos el volumen de una pirámide de base cuadrada y lo multiplicaremos por dos.

$h = \sqrt{8{,}66^2 - 5^2} \approx 7{,}1$ cm $\rightarrow V_{\text{PIRÁMIDE}} = \dfrac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 7{,}1 \approx 236{,}7$ cm^3

$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot 236{,}7 = 473{,}4$ cm^3

d) Calculamos primero el radio de la base, r.

$r = \dfrac{44}{2\pi} \approx 7$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = 2\pi \cdot 7^2 \approx 307{,}88 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 44 \cdot 27 = 1\,188 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 307{,}88 + 1\,188 = 1\,495 \text{ cm}^2$$

$V = 153{,}94 \cdot 27 = 4\,156{,}38$ cm^3

e) Calculamos primero la altura del cono, h.

$h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \pi \cdot 9^2 \approx 254{,}47 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 424{,}12 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 254{,}47 + 424{,}12 = 678{,}59 \text{ cm}^2$$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 254{,}47 \cdot 12 = 1\,017{,}88$ cm^3

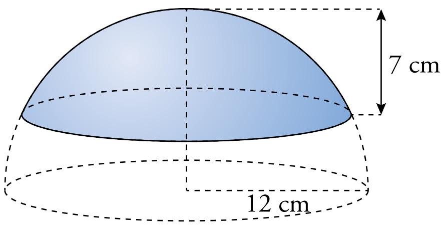
f) $A = \dfrac{4\pi \cdot 10^2}{2} \approx 628{,}32$ cm^2

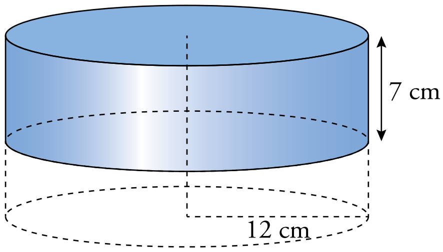
$V = \dfrac{\frac{4}{3}\pi \cdot 10^3}{2} \approx 2\,094{,}4$ cm^3

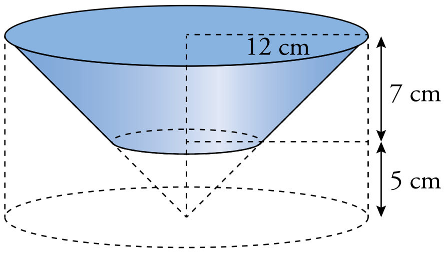
g) $A = 4\pi \cdot 50^2 \approx 31\,415{,}93 \text{ cm}^2$

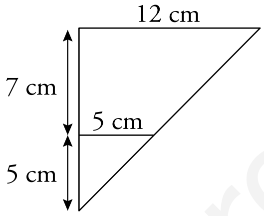
$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 50^3 \approx 523\,598{,}78 \text{ cm}^3$

h) $A = 2\pi \cdot 12 \cdot 7 \approx 527{,}79 \text{ cm}^2$









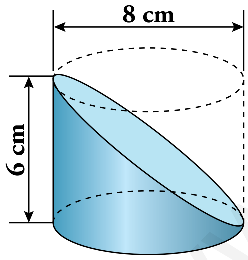
$V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 12^2 \cdot 7 \approx 3\,166{,}73 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 - \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 5 \approx 1\,678{,}66 \text{ cm}^3$

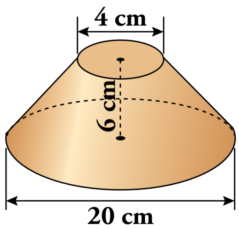
$V_{\text{CASQUETE}} = 3\,166{,}73 - 1\,678{,}66 = 1\,488{,}07 \text{ cm}^3$

3. **Halla el área y el volumen de estos cuerpos geométricos:**

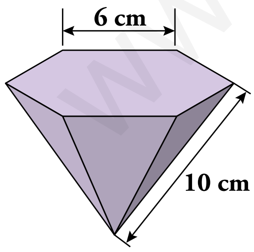
a)



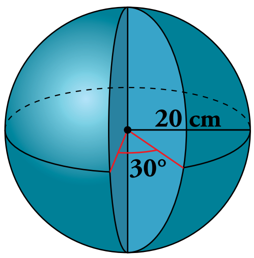
b)



c)



d)



a) Primero calculamos el radio de la base inclinada, r.

$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm} \rightarrow r = 5 \text{ cm}$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 5^2 \approx 128{,}81 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{2\pi \cdot 4 \cdot 6}{2} = 75{,}4 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 128{,}81 + 75{,}4 = 204{,}21 \text{ cm}^2$$

$V = \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 6}{2} = 150{,}8 \text{ cm}^3$

b) Calculamos primero la generatriz, g.

$$g = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = \pi \cdot 10^2 + \pi \cdot 2^2 \approx 326{,}73 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{2\pi \cdot 10 + 2\pi \cdot 2}{2} \cdot 10 \approx 376{,}99 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 326{,}73 + 376{,}99 = 703{,}72 \text{ cm}^2$$

Para calcular el volumen del tronco de cono restaremos el volumen del cono grande del volumen del cono pequeño. Para ello debemos conocer la altura del cono pequeño, x.

$$\frac{x}{2} = \frac{6 + x}{10} \rightarrow 10x = 12 + 2x \rightarrow x = 1{,}5 \text{ cm}$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 7{,}5 - \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 1{,}5 = \frac{1}{3}\pi \cdot 726 \approx 760{,}27 \text{ cm}^3$$

c) Calculamos la apotema de la base, ap, la apotema de la pirámide, m, y la altura de la pirámide, h.

$$ap = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}2 \text{ cm}$$

$$m = \sqrt{10^2 - 3^2} \approx 9{,}54 \text{ cm}$$

$$h = \sqrt{9{,}54^2 - 5{,}2^2} \approx 8 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot \dfrac{6 \cdot 9{,}54}{2} = 171{,}72 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 93{,}6 + 171{,}72 = 265{,}32 \text{ cm}^2$$

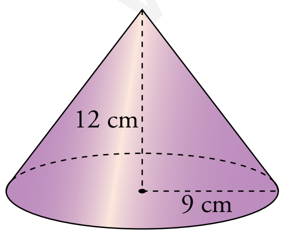
$$V = \frac{1}{3} \cdot 93{,}6 \cdot 8 = 249{,}6 \text{ cm}^3$$

d) Debemos observar que la porción de esfera que estamos eliminando es $\frac{30°}{360°} = \frac{1}{12}$ de la esfera completa, y que al calcular el área debemos añadir dos semicírculos de radio 20 cm.

$$A = \frac{11}{12} \cdot 4\pi \cdot 20^2 + \pi \cdot 20^2 \approx 4\,607{,}67 + 1\,256{,}64 = 5\,864{,}31 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{11}{12} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 20^3 \approx 30\,717{,}79 \text{ cm}^3$$

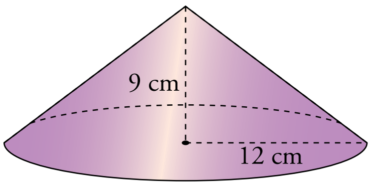
4. Haciendo girar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 9 cm y 12 cm alrededor de cada uno de ellos, se obtienen dos conos. Dibújalos y halla el área y el volumen de cada uno de ellos.



$$g = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \pi \cdot 9^2 \approx 254{,}47 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 9 \cdot 15 \approx 424{,}12 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 254{,}47 + 424{,}12 = 678{,}59 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 254{,}57 \cdot 12 \approx 1\,017{,}88 \text{ cm}^3$$



$g = 15$ cm

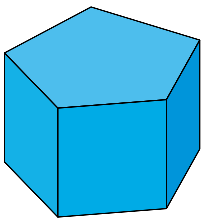
$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \pi \cdot 12^2 \approx 452{,}39 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 12 \cdot 15 \approx 565{,}49 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 452{,}39 + 565{,}49 = 1\,017{,}88 \text{ cm}^2$$

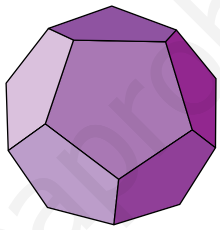
$$V = \frac{1}{3} \cdot 452{,}39 \cdot 9 \approx 1\,357{,}17 \text{ cm}^3$$

5. **Calcula la superficie de:**

a) Un prisma recto pentagonal regular cuyas aristas miden, todas, 10 cm.

b) Un dodecaedro regular de arista 10 cm.





Recuerda que la apotema de un pentágono regular de lado l mide 0,6882 l.

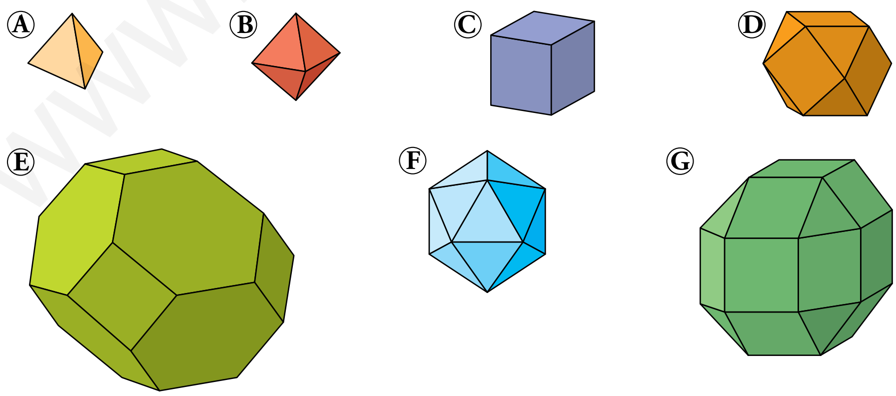
a) Apotema del pentágono = 6,88 cm

$S_{\text{BASE}} = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}88}{2} = 172 \text{ cm}^2$ $\qquad S_{\text{LATERAL}} = 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500 \text{ cm}^2$

$S_{\text{TOTAL}} = 172 \cdot 2 + 500 = 844 \text{ cm}^2$

b) $S_{\text{TOTAL}} = S_{\text{PENTÁGONO}} \cdot 12 = 172 \cdot 12 = 2\,064 \text{ cm}^2$

6. **Calcula el área total de los siguientes poliedros regulares y semirregulares de 8 cm de arista:**



Sabemos que la suma de las áreas de las figuras A y F es igual al triple del área de la figura B. Decimos, entonces que:

A + F = 3B

Comprueba cuáles de estas afirmaciones son ciertas:

a) 2C + D = G **b) B + 3C = G** **c) B + C = D** **d) 2F + B + C = E**

Para las figuras A y B, primero calculamos la altura de los triángulos de las caras, h.

$h = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93$ cm

Figura A $\rightarrow$ $A_A = 4 \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 4 \cdot 27{,}72 = 110{,}88 \text{ cm}^2$

Figura B $\rightarrow$ $A_B = 8 \cdot 27{,}72 = 221{,}76 \text{ cm}^2$

Figura C $\rightarrow$ $A_C = 6 \cdot 8^2 = 384 \text{ cm}^2$

Figura D $\rightarrow$ $A_D = 6 \cdot 8^2 + 8 \cdot 27{,}72 = 384 + 221{,}76 = 605{,}76 \text{ cm}^2$

Figura E $\rightarrow$ $ap_{\text{HEXÁGONO}} = h = 6{,}93$ cm

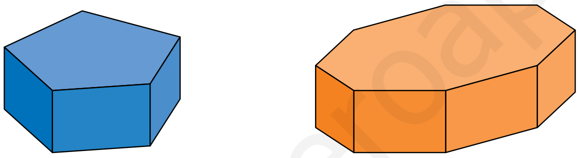
$$A_E = 8 \cdot \frac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}93}{2} + 6 \cdot 8^2 = 1\,330{,}56 + 384 = 1\,714{,}56 \text{ cm}^2$$

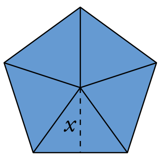
Figura F $\rightarrow$ $A_F = 20 \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 554{,}4 \text{ cm}^2$

Figura G $\rightarrow$ $A_G = 18 \cdot 8^2 + 8 \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 1\,373{,}76 \text{ cm}^2$

Todas las afirmaciones son ciertas.

7. Halla las áreas y los volúmenes de estos prismas regulares. En ambos, la arista básica mide 10 cm, y la altura, 8 cm.





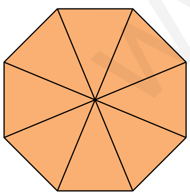
$x^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \rightarrow x = 8{,}66$ cm

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{10 \cdot 5 \cdot 8{,}66}{2} = 216{,}5 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = P \cdot h = 5 \cdot 10 \cdot 8 = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 216{,}5 + 400 = 833 \text{ cm}^2$

$V = A_{\text{BASE}} \cdot h = 216{,}5 \cdot 8 = 1\,732 \text{ cm}^3$



En este caso el apotema de este prisma es el mismo que el anterior.

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{8 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} = 346{,}4 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = P \cdot h = 8 \cdot 10 \cdot 8 = 640 \text{ cm}^2$

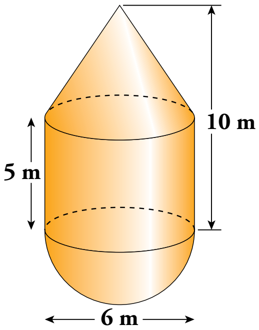
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 346{,}4 + 640 = 1\,332{,}8 \text{ cm}^2$

$V = A_{\text{BASE}} \cdot h = 346{,}4 \cdot 8 = 2\,771{,}2 \text{ cm}^3$

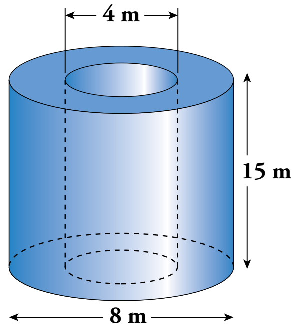
Página 224

8. Calcula las áreas y los volúmenes de los siguientes cuerpos geométricos:

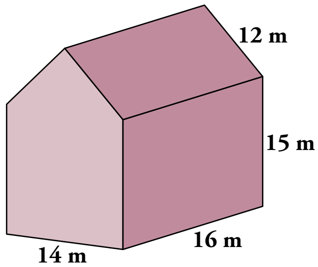
a)



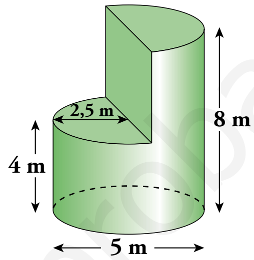
b)



c)



d)



a) Descomponemos el cuerpo en un cono, un cilindro y una semiesfera. Calculamos primero la generatriz del cono, g.

$$g = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5{,}83 \text{ cm}$$

$$A = \pi r g + 2\pi r h + \frac{4\pi r^2}{2} = \pi \cdot 3 \cdot 5{,}83 + 2\pi \cdot 3 \cdot 5 + \frac{4\pi 3^2}{2} \approx 205{,}74 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \pi r^2 h + \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{1}{3}\pi 3^2 5 + \pi 3^2 5 + \frac{\frac{4}{3}\pi 3^3}{2} \approx 207{,}35 \text{ cm}^3$$

b) Descomponemos el cuerpo en dos cilindros, uno dentro de otro.

$$A = 2(\pi R^2 - \pi r^2) + 2\pi R h + 2\pi r h = 2\pi(R^2 - r^2) + 2\pi h(R + r) =$$

$$= 2\pi(4^2 - 2^2) + 2\pi 15(4 + 2) \approx 640{,}88 \text{ cm}^2$$

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h(R^2 - r^2) = \pi 15(4^2 - 2^2) \approx 565{,}49 \text{ cm}^3$$

c) Descoponemos el cuerpo en un prisma y una pirámide triangular. Calculamos primero la altura de la base de la pirámide, h.

$$h = \sqrt{12^2 - 7^2} \approx 9{,}75 \text{ cm}$$

$$A = 14 \cdot 16 + 2 \cdot 16 \cdot 15 + 2 \cdot 16 \cdot 12 + 2 \cdot 14 \cdot 15 + 2 \cdot \frac{14 \cdot 9{,}75}{2} = 1\,644{,}5 \text{ cm}^2$$

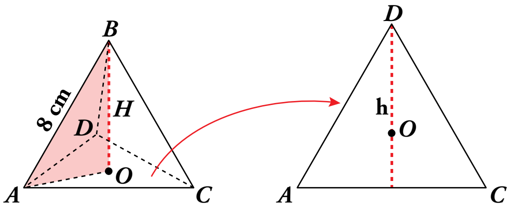
$$V = 14 \cdot 16 \cdot 15 + \frac{14 \cdot 9{,}75}{2} \cdot 16 = 4\,452 \text{ cm}^3$$

d) La figura resulta de quitarle al cilindro de radio 2,5 cm y altura 8 cm un cuarto del mismo.

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = 2\pi \cdot 2{,}5^2 \approx 39{,}27 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 8 + 5 \cdot 4 \approx 31{,}78 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 39{,}27 + 31{,}78 = 71{,}05 \text{ cm}^2$$

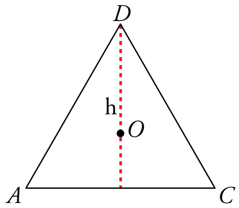
$$V = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 8 \approx 117{,}81 \text{ cm}^3$$

9. **Halla el área y el volumen de este tetraedro regular:**



Para hallar la altura H, recuerda que $\overline{AO} = \frac{2}{3}h$, donde h es la altura de una cara.

Calculamos lo que mide la altura h:



$$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \rightarrow h = 6{,}93 \text{ cm}$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ cm}^2$$

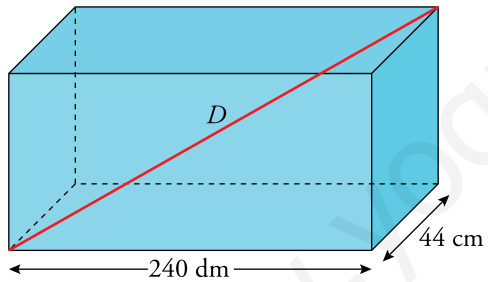
$$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot A_{\text{BASE}} = 110{,}88 \text{ cm}^2$$

Calculamos lo que mide la altura H del tetraedro:

$$H^2 = 8^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 6{,}93\right)^2 = 42{,}66 \rightarrow H = 6{,}53 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 27{,}72 \cdot 6{,}53 = 60{,}34 \text{ cm}^3$$

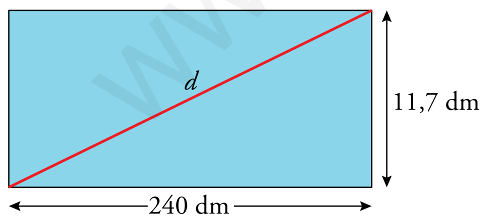
10. **La base de un ortoedro tiene dimensiones 240 cm × 44 cm. Su volumen es 1 235,52 dm³. Calcula las diagonales de sus caras y la diagonal principal.**



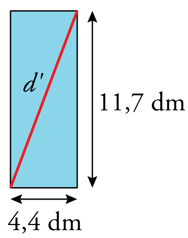
240 cm = 24 dm

44 cm = 4,4 dm

$$V = A_{\text{BASE}} \cdot h \rightarrow 1\,235{,}52 = 24 \cdot 4{,}4 \cdot h \rightarrow h = 11{,}7 \text{ dm}$$



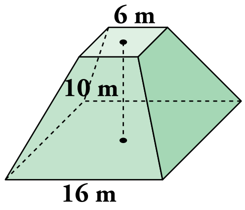
$$d^2 = 11{,}7^2 + 24^2 \rightarrow d = 26{,}7 \text{ dm}$$



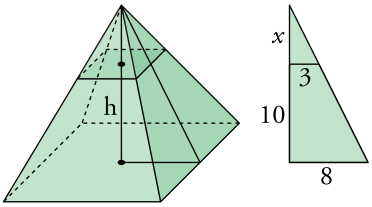
$$d'^2 = 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \rightarrow d' = 12{,}5 \text{ dm}$$

$$D = 24^2 + 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \rightarrow D = 27{,}06 \text{ dm}$$

11. **Calcula el volumen del siguiente tronco de pirámide de bases cuadradas:**



Calculamos las alturas de las pirámides que forman el tronco:



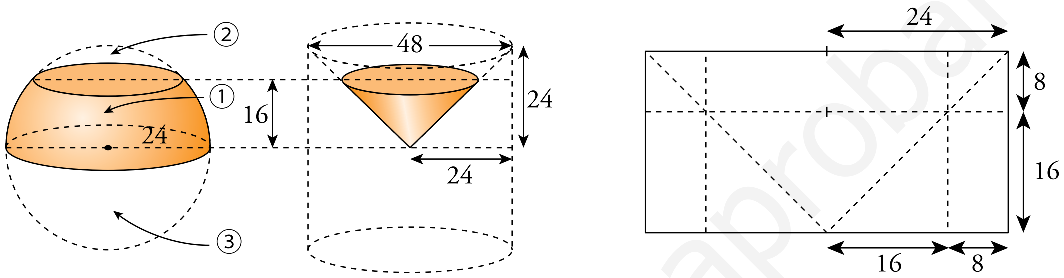
$$\frac{x}{3} = \frac{10 + x}{8}$$

$$8x = 30 + 3x$$

$$x = 6 \ \to \ \text{h} = 16$$

$$V_{\text{TRONCO}} = V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 6 = 1\,293{,}3 \text{ m}^3$$

12. **Cortamos una esfera de 24 cm de radio por dos planos paralelos: uno que pase por el centro y otro a 16 cm de este. Halla las superficies y los volúmenes de las tres porciones obtenidas.**



1) $A = 2\pi \cdot 24 \cdot 16 \approx 2\,412{,}74 \text{ cm}^2$

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 24^2 \cdot 16 = 9\,216\pi \text{ cm}^3 \\ V_{\text{TRONCO CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 16^2 \cdot 16 \approx 1\,365{,}33\pi \text{ cm}^3 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \ V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = 9\,216\pi - 1\,365{,}33\pi \approx 24\,663{,}61 \text{ cm}^3$$

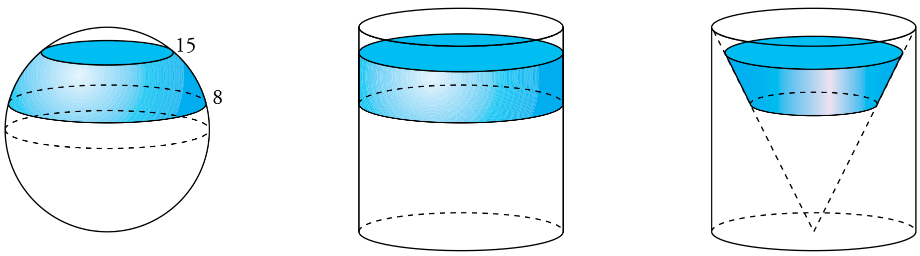
2) $A = 2\pi \cdot 24 \cdot 8 \approx 1\,206{,}37 \text{ cm}^2$

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 24^2 \cdot 8 = 4\,608\pi \text{ cm}^3 \\ V_{\text{TRONCO CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 24^2 \cdot 24 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 16^2 \cdot 16 \approx 3\,242{,}67\pi \text{ cm}^3 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \ V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = 4\,608\pi - 3\,242{,}67\pi \approx 4\,289{,}31 \text{ cm}^3$$

3) $A = \dfrac{4\pi \cdot 24^2}{2} \approx 3\,619{,}11 \text{ cm}^2$; $V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi \cdot 24^3}{2} \approx 28\,952{,}92 \text{ cm}^3$

13. **Se corta una esfera de 50 cm de diámetro por dos planos paralelos a 8 cm y 15 cm del centro, respectivamente. Halla el volumen de la porción de esfera comprendida entre ambos planos.**



$V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 50^2(15 - 8) = 17\,500\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 50^2 \cdot 15 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 50^2 \cdot 8 = 5\,833{,}33\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} =$

$= 17\,500\pi - 5\,833{,}33\pi = 11\,666{,}67\pi \text{ cm}^3 \approx 36\,651{,}9 \text{ cm}^3$

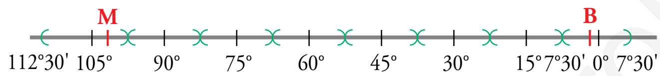
Coordenadas geográficas

14. Cuando en el huso 0 son las 8 a.m., ¿qué hora es en el tercer huso al E? ¿Y en el quinto al O?

En el huso 3° E son tres horas más, es decir, las 11 a.m.

En el huso 5° O son cinco horas menos, es decir, las 3 a.m.

15. Sabemos que en Bilbao (longitud 3° O) son las 9 de la mañana. Utilizando el siguiente esquema, indica qué hora será en Monterrey (longitud 100° O).



En Monterrey serán las 2 de la mañana.

16. Roma está en el primer huso al E y Nueva York, en el quinto al O. Si un avión sale de Roma a las 11 p.m. y el vuelo dura 8 h, ¿cuál será la hora local de llegada a Nueva York?

5 + 1 = 6 horas menos en Nueva York que en Roma.

11 p.m. + 8 = 19 → 7 a.m. hora de Roma.

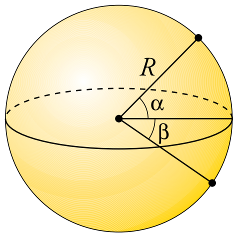
19 – 6 = 13 p.m. = 1 a.m. es la hora de llegada a Nueva York.

17. Si en La Habana (82° O) son las 8 p.m., asigna su hora a cada ciudad en tu cuaderno:

Maputo (Mozambique)	**2 p.m.**
Natal (Brasil)	**3 a.m.**
Astaná (Kazajistán)	**8 p.m.**
Temuco (Chile)	**0 a.m.**
Honolulú (Hawái)	**11 a.m.**
Dakar (Senegal)	**11 p.m.**
Katmandú (Nepal)	**6 a.m.**
Melbourne (Australia)	**7 a.m.**

Maputo (32° E) → 3 a.m.	Natal → 11 p.m.
Astaná (71° E) → 6 a.m.	Temuco (73° O) → 8 p.m.
Honolulú (158° O) → 2 p.m.	Dakar (16° O) → 0 a.m.
Katmandú (85° E) → 7 a.m.	Melbourne (144° E) → 11 a.m.

18. **Dos ciudades tienen la misma longitud, 15° E, y sus latitudes son 37° 25' N y 22° 35' S. ¿Cuál es la distancia entre ellas?**



$\alpha = 37° \ 25'$

$\beta = 22° \ 35'$

Tenemos que hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de $\alpha + \beta = 37° \ 25' + 22° \ 35' = 60°$

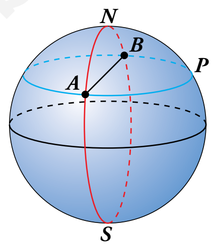
$$\text{Distancia} = \frac{2\pi R \cdot 60°}{360°} = \frac{2\pi \cdot 6\,370 \cdot 60}{360} \approx 6\,670{,}65 \text{ km}$$

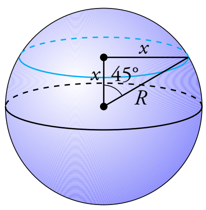
19. **La “milla marina” es la distancia entre dos puntos del ecuador cuya diferencia de longitud es 1'. Calcula la longitud de una milla marina.**

$1' = \frac{1}{60}$ grados; radio de la Tierra: $R \approx 6\,370$ km

$$\text{Milla marina} \rightarrow \frac{2\pi R \cdot \frac{1}{60}}{360} = \frac{2\pi R}{21\,600} \approx \frac{2\pi \cdot 6\,370}{21\,600} \approx 1{,}85 \text{ km}$$

20. **Un avión tiene que ir de A a B, dos lugares diametralmente opuestos en el paralelo 45°. Puede hacerlo siguiendo el paralelo (*APB*) o siguiendo la ruta polar (*ANB*). Calcula la distancia que se recorrería en cada trayecto.**





Hallamos el radio del paralelo 45°:

$$R^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{R^2}{2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{6\,370}{\sqrt{2}} \approx 4\,504{,}27 \text{ km}$$

21. **Alejandría, Nueva Orleans y Houston tienen todas la misma latitud, 30° N. Sus longitudes son, respectivamente, 30° E, 90° O y 95° O. ¿Qué distancia recorrería un avión que va de Alejandría a Nueva Orleans por el paralelo 30° N? ¿Y de Alejandría a Houston?**

Utilizando el ejercicio resuelto de la página 221, sabemos que el paralelo 30° tiene una longitud de 34 646 km aproximadamente.

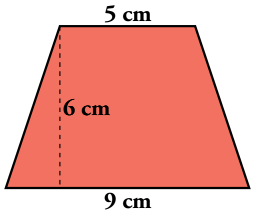
Entre Alejandría y Nueva Orleans hay un arco de 90° – 30° = 60°; por tanto, la distancia entre ellos es $\frac{34\,346}{360°} \cdot 60° \approx 5\,724{,}33$ km.

Entre Alejandría y Houston hay un arco de 95° – 30° = 65°, por lo que la distancia entre ellos es $\frac{34\,346}{360°} \cdot 65° \approx 6\,201{,}36$ km.

Página 225

Piensa y resuelve

22. **Calcula el área y el volumen del tronco de cono generado al girar este trapecio isósceles alrededor de una recta perpendicular a sus bases en sus puntos medios.**



Calculamos primero la generatriz del tronco de cono, g.

$g = \sqrt{6^2 + 2^2} \approx 6{,}32$ cm

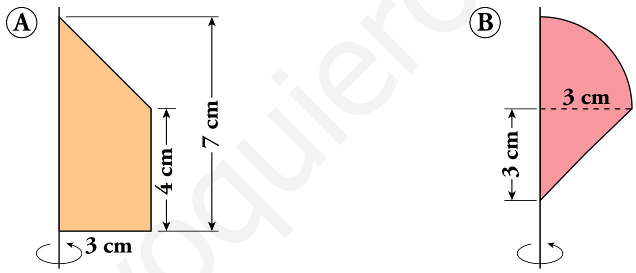
$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = \pi \cdot 4{,}5^2 + \pi \cdot 2{,}5^2 \approx 83{,}25 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot (4{,}5 + 2{,}5) \cdot 6{,}32 \approx 138{,}98 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 83{,}25 + 138{,}98 = 222{,}23 \text{ cm}^2$$

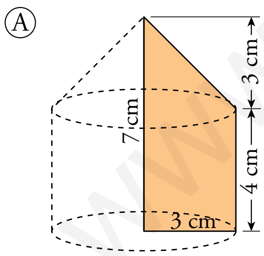
Hallamos el volumen del tronco de cono restando los volúmenes del cono grande y del cono pequeño. Hallamos antes la altura del cono pequeño.

$$\frac{x}{2{,}5} = \frac{x+6}{4{,}5} \to 4{,}5x = 2{,}5x + 15 \to x = 7{,}5 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot (6 + 7{,}5) - \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 7{,}5 \approx 237{,}19 \text{ cm}^3$$

23. **Calcula el volumen de los cuerpos de revolución que genera cada una de estas figuras planas al girar alrededor del eje indicado:**

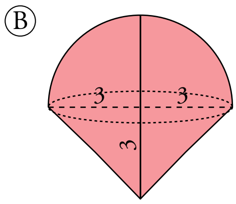




Ⓐ $V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{TOTAL}} = 36\pi + 9\pi = 45\pi = 141{,}37 \text{ cm}^3$

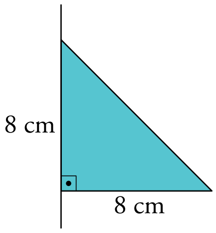


Ⓑ $V_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{TOTAL}} = 18\pi + 9\pi = 27\pi = 84{,}82 \text{ cm}^3$

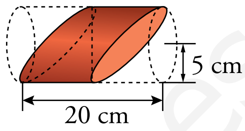
24. **Un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 8 cm, gira alrededor de la hipotenusa. Calcula el volumen del cuerpo de revolución que se genera.**



Se forma un cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 8 = 536,16$$

25. **Cortamos un salchichón con un cuchillo como ves en la figura. Halla la superficie y el volumen del trozo que queda.**



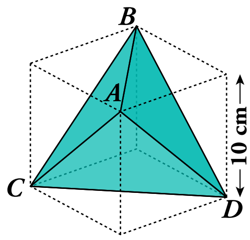
Observamos que hemos dejado la mitad del salchichón. Calculamos primero el radio del círculo que obtenemos al cortar.

$$d = \sqrt{10^2 + 10^2} \approx 14,14 \text{ cm} \rightarrow r = 7,07 \text{ cm}$$

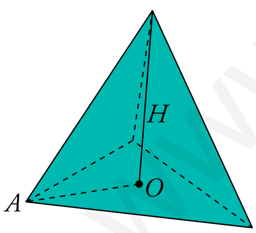
$$\left.\begin{aligned} A_{\text{BASES}} &= 2 \cdot \pi \cdot 7,07^2 \approx 314,06 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 20 \approx 314,16 \text{ cm}^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 314,06 + 314,16 = 628,22 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 20 \approx 785,4 \text{ cm}^3$$

26. **Este es el mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo de 10 cm de arista. Halla su superficie y su volumen.**



Calculamos el lado del tetraedro:



$$l^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \rightarrow l = 14,14 \text{ cm}$$

Recordamos que $\overline{AO} = \frac{2}{3}h$. Por tanto, tenemos que hallar la altura del triángulo.

$$h^2 = 14,14^2 - 7,07^2 \rightarrow h = 12,24 \text{ cm}$$

$$H^2 = 14,14^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 12,24\right)^2 = 133,29 \rightarrow H = 11,54 \text{ cm}$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 14,14 \cdot 12,24 = 86,54 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 86,54 = 346,15 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 86,54 \cdot 11,54 = 332,89 \text{ cm}^3$$

27. **Averigua si cabe:**

a) Un tetraedro regular de arista 4 u, dentro de un cubo de arista 4 u.

b) Un cubo de arista 12 u, dentro de una esfera de diámetro 20 u.

c) Un cubo de arista 10 u, dentro de un cono de 15 u de altura y radio de la base $15\sqrt{2}$ u.

d) Una esfera de radio 4 u, dentro de un octaedro regular de arista 10 u.

e) Un cilindro de 10 u de altura y 790 u^3 de volumen, dentro de un cubo de 10 u de arista.

a) Sí cabe. El mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo tiene como arista la diagonal del cubo, que mide 5,65 u.

$\text{Arista}_{\text{TETRAEDRO}} = \text{diagonal}_{\text{CUBO}} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$ u

b) La diagonal del cubo mide $12\sqrt{3} = 20{,}78$ u. Por tanto, el cubo no cabe dentro de la esfera.

c) Sí cabe, porque la sección del cono, a 10 u de altura, tiene de radio $5\sqrt{2}$ u, que es igual a la mitad de la diagonal de la cara superior del cubo.

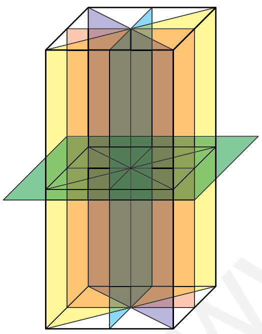
d) La distancia del centro del octaedro a cada cara es de 4,08 u, mayor que el radio de la esfera. Por tanto, sí cabe.

e) Calculamos el radio del cilindro utilizando su volumen: $790 = \pi \cdot r^2 \cdot 10 \rightarrow r = \sqrt{\dfrac{790}{10\pi}} \approx 5$ u.

Por lo tanto el cilindro quedaría encajado dentro del cubo.

28. **¿Cuáles son los planos de simetría de un ortoedro de base cuadrada? ¿Y los ejes de giro? ¿De qué orden es cada uno de ellos?**

Contesta a las mismas preguntas en el caso de un cubo.



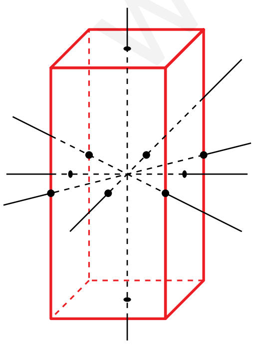
- Son 5 planos de simetría:

  Dos pasan por los puntos medios de las aristas de la base.

  Dos pasan por los vértices opuestos de las bases.

  (Estos cuatro planos corresponden a los ejes de simetría del cuadrado).

  Uno pasa por los puntos medios de las aristas laterales.



- Tiene 5 ejes de giro:

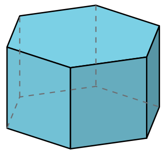
  Un eje de giro de orden cuatro: la recta perpendicular a las bases por su punto medio.

  Dos ejes de giro de orden dos: las rectas paralelas a las bases que pasan por el centro de cada dos caras paralelas.

  Dos ejes de giro de orden dos: las rectas que pasan por los puntos medios de dos aristas laterales opuestas.

El cubo tiene 9 planos de simetría, tres ejes de orden 4, cuatro de orden 3 y seis de orden 2. Se pueden encontrar gráficos en los epígrafes 3 y 4 de la unidad.

29. **Dibuja en tu cuaderno el poliedro dual del siguiente prisma hexagonal regular:**

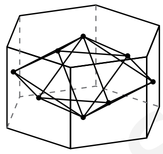


a) ¿Son el prisma o su dual poliedros semirregulares?

b) Indica los planos de simetría de cada uno.

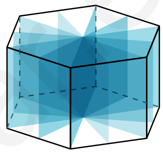
c) Indica los ejes de giro de cada poliedro (el prisma y su dual) y di de qué orden es cada uno.

a) El prisma sí es semirregular pero su dual no lo es, ya que no concurren el mismo número de caras en todos sus vértices.



b) El prisma tiene siete planos de simetría: seis planos, uno por cada eje de simetría de sus bases y otro plano paralelo a las dos bases y a la misma distancia de cada una.

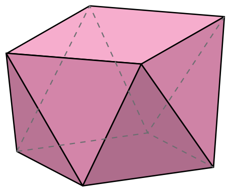
Su dual tiene los mismos.



c) El prisma tiene trece ejes de giro: uno de orden 6 que pasa por el centro de las dos bases; tres de orden 2, paralelos a las bases y que pasan por el punto medio de dos caras laterales opuestas; tres de orden 2, paralelos a las bases y que pasan por las aristas opuestas; y otros seis más de orden 2 que pasan por los vértices opuestos de las caras laterales.

Su dual tiene los mismos.

30. **Dibuja en tu cuaderno este antiprisma cuadrado:**



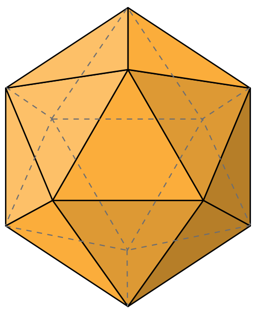
a) ¿Cuántos planos de simetría tiene?

b) Indica sus ejes de giro. ¿De qué orden son?

a) Cuatro planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases.

b) Un eje de giro de orden 4 que pasa por el centro de las dos bases.

31. **Sabemos que un icosaedro regular tiene varios planos de simetría. Por ejemplo, si te fijas en dos de sus caras opuestas, los tres planos que pasan por sus tres alturas serían planos de simetría del icosaedro.**



a) ¿También pasan planos de simetría por sus aristas opuestas? ¿Cuántos hay?

b) ¿Cuántos planos de simetría tiene en total?

c) Sabemos que el eje de giro que pasa por dos vértices opuestos del icosaedro tiene orden 5. ¿Qué orden tienen los que pasan por los centros de dos aristas opuestas? ¿Y los que pasan por los centros de dos caras opuestas?

a) Sí, son 15 planos.

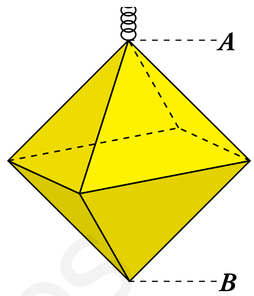
b) Tiene 15 planos de simetría, ya que los que nombra el enunciado y los del apartado a) son los mismos.

c) Los ejes de giro que pasan por los centros de dos aristas opuestas tienen orden 2, y los otros, orden 3.

Página 226

Resuelve problemas

32. **Cortando y soldando una varilla de 3 m de longitud, se ha construido la estructura de un farol con forma de octaedro regular. ¿Cuál es la altura *AB* del farol?**

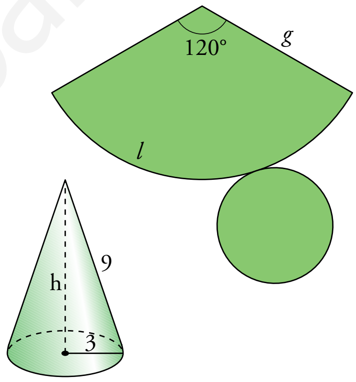


El octaedro tiene 12 aristas iguales. Cada una de ellas mide 300 : 12 = 25 cm.

La altura del octaedro coincide con la diagonal de un cuadrado de 25 cm de lado:

$\overline{AB} = \sqrt{25^2 + 25^2} \approx 35{,}36$ cm

33. **El desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector circular de 120° de amplitud y cuya área es 84,78 cm². Halla el volumen del cuerpo que se forma.**



- Generatriz del cono:

$$\frac{\pi g^2}{84{,}78} = \frac{360}{120} \rightarrow g^2 = \frac{3 \cdot 84{,}78}{\pi} \rightarrow g \approx 9 \text{ cm}$$

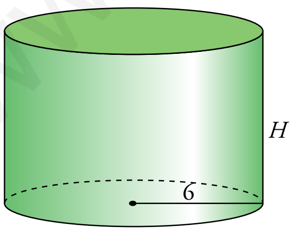
- Radio de la base: $2\pi r = l$

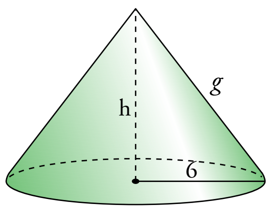
$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 9}{l} = \frac{360}{120} \rightarrow 18\pi = 3l \rightarrow l = 6\pi \text{ cm}$$

$$2\pi r = 6\pi \rightarrow r = 3 \text{ cm}$$

- Área base = $\pi \cdot 3^2 = 9\pi \approx 28{,}27$
- Altura del cono: $h^2 = 9^2 - 3^2 = 72 \rightarrow h \approx 8{,}49$ cm
- Volumen cono = $\frac{1}{3}$(Área base) · h = $\frac{1}{3} 28{,}27 \cdot 8{,}49 \approx 80$ cm³

34. **Un cilindro y un cono tienen la misma superficie total, 96π cm², y el mismo radio, 6 cm. ¿Cuál de los dos tendrá mayor volumen?**





- Área total del cilindro = $2\pi \cdot 6h + 2\pi \cdot 6^2$

$84\pi H = 96\pi \rightarrow H = 1{,}14$ cm

- Volumen del cilindro = $\pi \cdot 6^2 \cdot 1{,}14 = 128{,}93$ cm³
- Área total del cono = $\pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6g \rightarrow 36\pi + 6\pi g = 96\pi \rightarrow 6\pi g = 60\pi \rightarrow g = 10$ cm
- Altura del cono: $h^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \rightarrow h = 8$ cm
- Volumen del cono = $\frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 \approx 301{,}59$ cm³

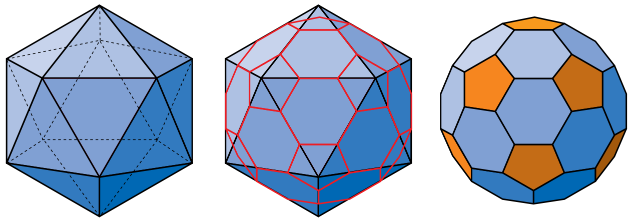
Tiene mayor volumen el cono.

35. **Truncando un icosaedro regular de 30 cm de arista se obtiene este poliedro semirregular (troncoicosaedro):**

a) ¿Cuántos vértices y caras tiene el icosaedro?

b) ¿Cuántos pentágonos y cuántos hexágonos forman la superficie del poliedro obtenido tras el truncamiento?

c) Calcula la superficie de este último.



a) El icosaedro tiene 12 vértices y 20 caras.

b) 20 hexágonos y 12 pentágonos.

c) Las aristas del poliedro truncado miden 10 cm.

Apotema de una cara hexagonal = 8,66 cm

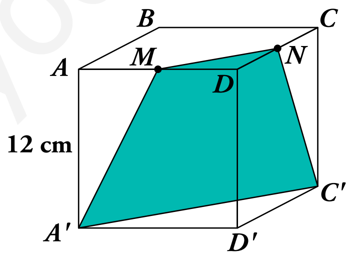
Apotema de una cara pentagonal = 6,88 cm

Superficie de una cara hexagonal = $\dfrac{10 \cdot 6 \cdot 8{,}66}{2} \approx 259{,}8 \text{ cm}^2$

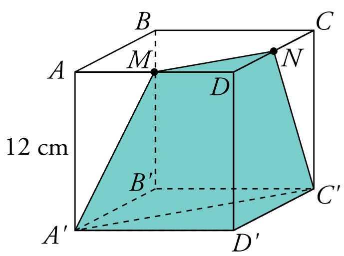
Superficie de una cara pentagonal = $\dfrac{10 \cdot 5 \cdot 6{,}88}{2} \approx 172 \text{ cm}^2$

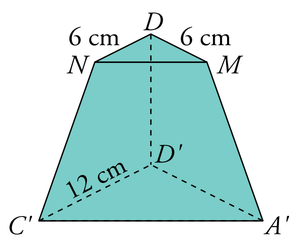
Superficie del poliedro = $20 \cdot 259{,}8 + 12 \cdot 172 = 7\,260 \text{ cm}^2$

36. **Cortamos un cubo por un plano que pasa por los puntos *MNC'A'* (*M* y *N* son los puntos medios de las aristas *AD* y *DC*, respectivamente).**



Calcula el área total y el volumen del menor de los poliedros que se forman.

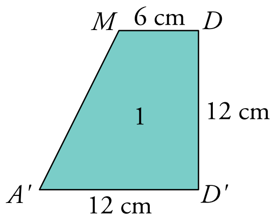




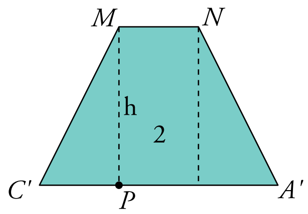
- Triángulo *MDN*: $A = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$

- Triángulo $A'D'C'$: $A = \dfrac{12 \cdot 12}{2} = 72 \text{ cm}^2$

Caras laterales: trapecios.



$$A_1 = \frac{(12+6)\cdot 12}{2} = 108 \text{ cm}^2$$



$$\overline{MN}^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \;\to\; \overline{MN} = \sqrt{72} \approx 8{,}49 \text{ cm}$$

$$\overline{A'C'}^2 = 12^2 + 12^2 = 288 \;\to\; \overline{A'C'} = \sqrt{288} \approx 16{,}97 \text{ cm}$$

$$\overline{A'P} = \frac{16{,}97 - 8{,}49}{2} = 4{,}24 \text{ cm}$$

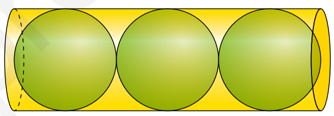
$$\overline{MA'}^2 = 12^2 + 6^2 = 180 \;\to\; \overline{MA'} = 13{,}42 \text{ cm}$$

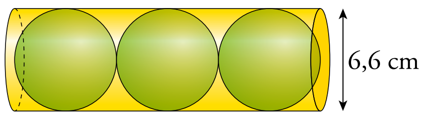
$h^2 = 13{,}42^2 - 4{,}24^2 \;\to\; h \approx 12{,}73$ cm

$$\text{Área}_2 = \frac{(8{,}49 + 16{,}97)\cdot 12{,}73}{2} \approx 162{,}05 \text{ cm}^2$$

Área total del poliedro = $18 + 72 + 2 \cdot 108 + 162{,}1 = 468{,}1$ cm^2

37. **Tres pelotas de tenis se introducen en un tubo cilíndrico de 6,6 cm de diámetro en el que encajan hasta el borde. Halla el volumen de la parte vacía.**





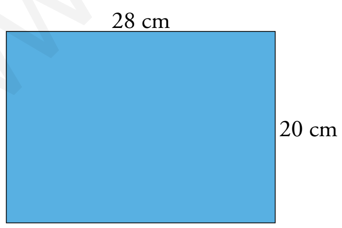
Altura del cilindro = $6{,}6 \cdot 3 = 19{,}8$ cm

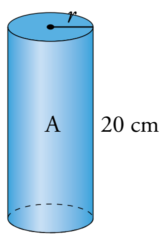
$$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 3{,}3^2 \cdot 19{,}8 \approx 677{,}4 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{ESFERAS}} = 3\left(\frac{4}{3}\pi \cdot 3{,}3^3\right) = 451{,}6 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{PARTE VACÍA}} = 677{,}4 - 451{,}6 = 225{,}8 \text{ cm}^3$$

38. **Queremos construir un tubo cilíndrico soldando por los lados un rectángulo de 28 cm de largo y 20 cm de ancho. ¿Cómo se consigue mayor volumen, soldando por los lados de 28 cm o por los de 20 cm?**



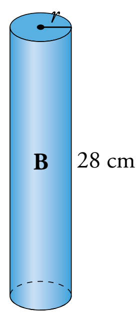


A • Radio: $2\pi r = 28 \;\to\; r = \dfrac{14}{\pi}$ cm

• Volumen: $\pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{14}{\pi}\right)^2 \cdot 20 = 1\,247{,}77$ cm^3

B • Radio: $2\pi r = 20 \;\to\; r = \dfrac{10}{\pi}$ cm

• Volumen: $\pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 28 = 891{,}27$ cm^3



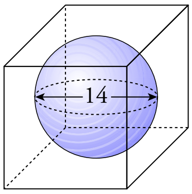
Se consigue mayor volumen soldando por los lados de 20 cm.

39. **Se introduce una bola de piedra de 14 cm de diámetro en un recipiente cúbico de 14 cm de arista lleno de agua y después se retira. Calcula:**

a) La cantidad de agua que se ha derramado.

b) La altura que alcanza el agua en el recipiente después de sacar la bola.

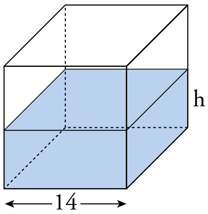
a)



$V_{\text{CUBO}} = 14^3 = 2744 \text{ cm}^3$

$V_{\text{AGUA DERRAMADA}} = V_{\text{ESFERA}} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 7^3 \approx 1\,436{,}76 \text{ cm}^3$

b)

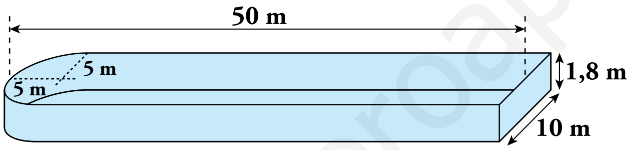


$V_{\text{AGUA NO DERRAMABA}} = 2744 - 1\,436{,}76 = 1\,307{,}24 \text{ cm}^3$

Altura que alcanza el agua:

$1\,307{,}24 = 14^2 \cdot \text{h} \;\rightarrow\; \text{h} = 6{,}67 \text{ cm}$

40. **Una finca se abastece de agua desde el pilón que ves en la figura, y que ahora está lleno. Para regar, se abre un desagüe que desaloja un caudal de 25 litros por segundo. ¿Se podrá mantener el riego durante diez horas sin reponer sus existencias?**



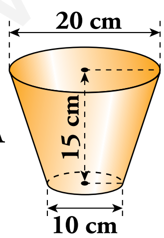
Capacidad del pilón $= 10 \cdot 1{,}8 \cdot 45 + \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 1{,}8}{2} \approx 880{,}69 \text{ m}^3 = 880\,690$ litros

Gasto en diez horas $= 25 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10 = 900\,000$ litros

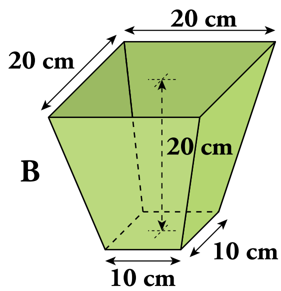
El gasto en diez horas es superior a la capacidad del pilón. Por tanto, no se puede regar durante diez horas sin reponer las existencias de agua.

41. **En un cine, las palomitas se vendían hasta ahora en recipientes del tipo A, por 1,50 €. El gerente está pensando en ofertar también otro formato, B, más grande. ¿Cuál crees que debería ser el precio del formato B? Redondea a las décimas de euro.**

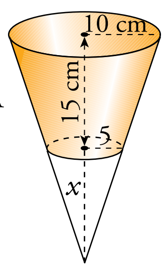
A



B



A

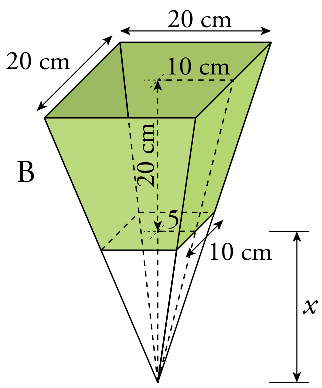


$\dfrac{10}{5} = \dfrac{15 + x}{x} \;\rightarrow\; 10x = 75 + 5x \;\rightarrow\; x = 15 \text{ cm}$

$V_{\text{CONO GRANDE}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 30 \approx 3\,141{,}6 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 15 \approx 392{,}7 \text{ cm}^3$

$V_A = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} \approx 2\,748{,}9 \text{ cm}^3$



$\frac{10}{5} = \frac{20 + x}{x} \to 10x = 100 + 5x \to x = 20$ cm

$V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \frac{1}{3}20^2 \cdot 40 \approx 5\,333{,}33$ cm^3

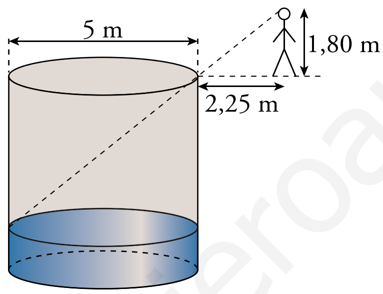
$V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \frac{1}{3}10^2 \cdot 20 \approx 666{,}67$ cm^3

$V_B = V_{\text{P. GRANDE}} - V_{\text{P. PEQUEÑA}} \approx 4\,666{,}67$ cm^3

Precio del recipiente B = $\frac{4\,666{,}67 \cdot 1{,}5}{2\,748{,}9} \approx 2{,}546$

El recipiente B se venderá a 2,50 euros.

42. **Paco tiene un pozo cilíndrico de 5 m de diámetro y 100 m^3 de capacidad. Pero no está lleno; de hecho, si se aleja más de 2,25 m del borde, ya no ve el agua. Halla la profundidad del agua, si Paco tiene los ojos a 1,80 m de altura.**



Si h es la profundidad del pozo:

$V_{\text{POZO}} = 100 = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot \text{h} \to \text{h} = 5{,}10$ m

Si x es la profundidad del agua:

$\frac{1{,}80}{2{,}25} = \frac{5{,}10 - x}{5} \to x = 1{,}10$ m

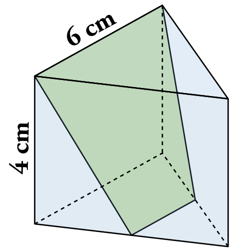
Página 227

Problemas "+"

43. **Cortamos un prisma triangular regular por un plano que pasa por el punto medio de dos aristas y por otra arista opuesta.**

Halla el volumen y la superficie total de cada una de las porciones.

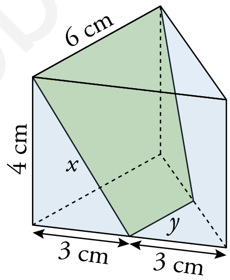
Observa que uno de los dos trozos es un tronco de pirámide.



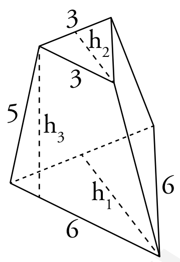
Lo primero que hacemos es hallar las longitudes de los cortes del plano.

$x = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ cm

$y = 3$ cm



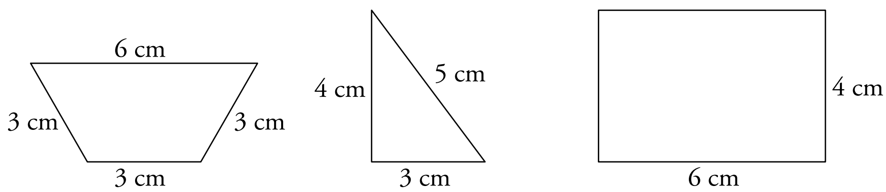
Comenzamos calculando el área del tronco de pirámide, y para ello necesitamos averiguar algunas longitudes, como las alturas de las bases grande, h_1, y pequeña, h_2, y de las caras laterales, h_3.



$$h_1 = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}2 \text{ cm}$$
$$h_2 = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} \approx 2{,}6 \text{ cm}$$
$$h_3 = \sqrt{5^2 - 1{,}5^2} \approx 4{,}8 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = \dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2} + \dfrac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 19{,}5 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 3 \cdot \dfrac{6+3}{2} \cdot 4{,}8 = 64{,}8 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 19{,}5 + 64{,}8 = 84{,}3 \text{ cm}^2$$

Calculamos ahora el área de la otra parte de la figura, veamos cómo son sus caras:

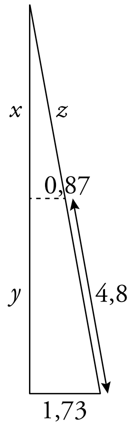


$$A_1 = \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} - \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 11{,}7 \text{ cm}^2; \quad A_2 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2; \quad A_3 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 11{,}7 + 2 \cdot 6 + 24 = 47{,}7 \text{ cm}^2$$

Para calcular el volumen del tronco de pirámide restamos al volumen de la pirámide grande la de la pirámide pequeña, y para eso tenemos que calcular sus alturas.

Resolvemos los siguientes triángulos semejantes que se forman entre las apotemas de las bases, las alturas de las caras laterales y las alturas de las pirámides. Recordamos que la longitud de la apotema de un triángulo equilátero es un tercio de la medida de su altura.



$\dfrac{z}{0,87} = \dfrac{z + 4,8}{1,73} \to 1{,}73z = 0{,}87z + 4{,}18 \to z \approx 4{,}86$ cm

$x = \sqrt{4,86^2 - 0,87^2} = 4{,}78$ cm

Observando que las medidas del triángulo pequeño son la mitad que las del grande, tenemos que $y = 4{,}78$ cm también.

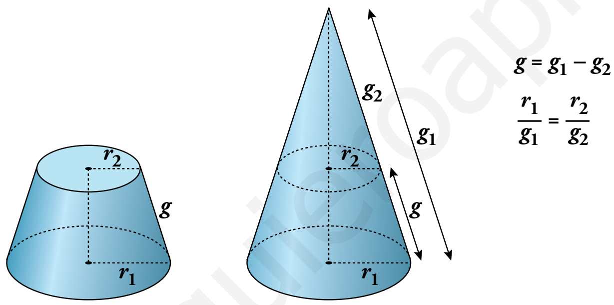
$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{6 \cdot 5,2}{2} \cdot (2 \cdot 4{,}78) - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3 \cdot 2,6}{2} \cdot 4{,}78 = 43{,}5 \text{ cm}^3$

Para calcular el volumen del otro trozo restaremos los volúmenes del cuerpo completo y el tronco de pirámide.

$V_{\text{PRISMA}} = \dfrac{6 \cdot 5,2}{2} \cdot 4 = 62{,}4 \text{ cm}^3 \to V = 62{,}4 - 43{,}5 = 18{,}8 \text{ cm}^3$

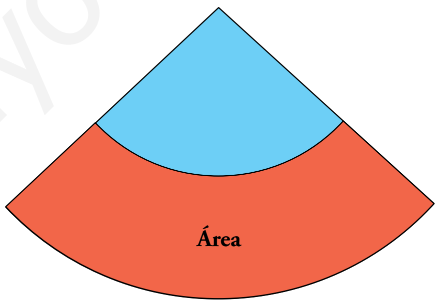
44. **Obtención del área lateral de un tronco de cono:**

a)



Explica qué son r_1, g_1, r_2, g_2 y g. Justifica las dos igualdades anteriores.

b)



Recordando que el área lateral de un cono es πrg, justifica que el área buscada (en rojo) es $A = \pi r_1 g_1 - \pi r_2 g_2$.

c) Observa la siguiente cadena de igualdades:

$A = \pi r_1 g_1 - \pi r_2 g_2 = \pi\,(r_1 g_1 - r_2 g_2) \overset{*}{=} \pi\,(r_1 g_1 \boxed{- r_1 g_2 + r_2 g_1} - r_2 g_2) =$

$= \pi\,[r_1(g_1 - g_2) + r_2(g_1 - g_2)] = \pi\,[r_1 g + r_2 g] = \pi\,(r_1 + r_2)\,g$

Repite la cadena de igualdades justificando cada paso. En la igualdad *, observa que $r_1 g_2 = r_2 g_1$. Explica por qué.

a) En la figura observamos que r_1 y g_1 son, respectivamente, el radio de la base y la generatriz del cono grande; r_2 y g_2 son, respectivamente, el radio de la base y la generatriz del cono pequeño; y g es la generatriz del tronco de cono.

También vemos que g_1 es igual a la suma de g y g_2, y de aquí obtenemos la primera igualdad.

Además, en la figura de la derecha aparecen dos triángulos rectángulos en posición de Tales, que justifican la segunda igualdad.

b) El área de la zona roja es el resultado de restar el área lateral del cono grande $(r_1$ y $g_1)$ menos el área lateral del cono pequeño $(r_2$ y $g_2)$. Así, la igualdad queda justificada.

c) $A = \pi r_1 g_1 - \pi r_2 g_2 \overset{(1)}{=} \pi\,(r_1 g_1 - r_2 g_2) \overset{(2)}{=} \pi\,(r_1 g_1 \boxed{- r_1 g_2 + r_2 g_1} - r_2 g_2) \overset{(3)}{=}$

$\overset{(3)}{=} \pi\,[r_1(g_1 - g_2) + r_2(g_1 - g_2)] \overset{(4)}{=} \pi\,[r_1 g + r_2 g] \overset{(5)}{=} \pi\,(r_1 + r_2)\,g$

(1). Sacamos factor común π.

(2). Sumamos y restamos la misma cantidad, por lo que la igualdad no varía.

$$\frac{r_1}{g_1} = \frac{r_2}{g_2} \;\rightarrow\; r_1 g_2 = r_2 g_1$$

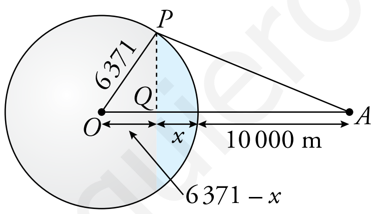
(3). Sacamos factor común r_1 y r_2.

(4). Utilizamos la igualdad $g = g_1 - g_2$ para sustituir los paréntesis por g.

(5). Sacamos factor común g.

45. **Si un avión vuela a 10 000 m de altura, ¿qué porción de superficie terrestre puede ver un pasajero?**

El radio de la Tierra es de unos 6371 km.



Observando el gráfico podemos deducir la longitud de PQ y que los triángulos POQ y PQA son semejantes. Por tanto:

$$\overline{PQ} = \sqrt{6\,371^2 - (6\,371 - x)^2}$$

$$\frac{\sqrt{6\,371^2 - (6\,371 - x)^2}}{6\,371 - x} = \frac{10 + x}{\sqrt{6\,371^2 - (6\,371 - x)^2}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 6\,371^2 - (6\,371 - x)^2 = (6\,371 - x) \cdot (10 + x) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 6\,371^2 - 6\,371^2 + 2 \cdot 6\,371x - x^2 = 6\,371 \cdot 10 + 6\,371x - 10x - x^2 \;\rightarrow$$

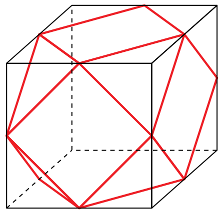
$$\rightarrow\; 6\,371x + 10x = 63\,710 \;\rightarrow\; x \approx 10 \text{ km}$$

Si el diámetro de la Tierra es 12 742 km, esta distancia será $\dfrac{10}{12\,472} \approx \dfrac{1}{1\,247}$

Reflexiona sobre la teoría

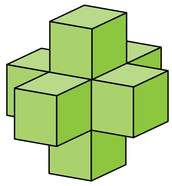
46. Recuerda todos los planos de simetría y los ejes de giro de un cubo. ¿Qué planos de simetría tiene el cuboctaedro (poliedro que resulta de truncar el cubo)? Estudia, también, sus ejes de giro.

El cuboctaedro tiene los mismos planos de simetría y los mismos ejes de giro que el cubo.

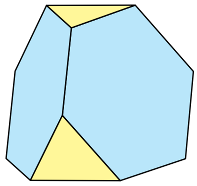


47. Explica por qué cada uno de los siguientes poliedros no es regular. ¿Son semirregulares? Comprueba si se verifica el teorema de Euler en cada uno:

a)



b)



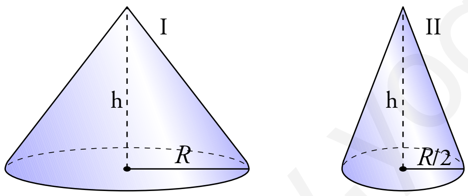
a) El poliedro no es semirregular y, por tanto, tampoco regular, ya que no en todos los vértices concurre el mismo número de caras.

Tiene 30 caras, 32 vértices y 60 aristas, por lo que sí cumple el teorema de Euler, $30 + 32 - 60 = 2$.

b) El poliedro no es regular porque todas sus caras no son iguales, pero sí es semirregular.

Tiene 8 caras, 12 vértices y 18 aristas; sí cumple el teorema de Euler, $8 + 12 - 18 = 2$.

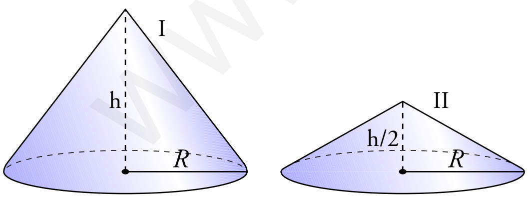
48. Si en un cono reducimos a la mitad el radio de la base y mantenemos la misma altura, ¿el volumen se reduce a la mitad? ¿Y si mantenemos la misma base y reducimos la altura a la mitad?



$$V_{\text{CONO I}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$V_{\text{CONO II}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi R^2 h}{4}$$

El volumen se reduce a una cuarta parte.



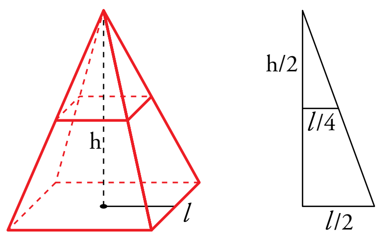
$$V_{\text{CONO I}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$V_{\text{CONO II}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{h}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi R^2 h}{2}$$

Sí, el volumen se reduce a la mitad.

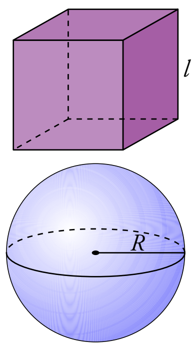
49. Una pirámide de base cuadrada se corta por un plano paralelo a la base y que pasa por el punto medio de la altura. ¿Cuál será la relación entre los volúmenes de la pirámide grande y la pequeña?

El lado de la nueva base es la mitad de la arista básica de la pirámide.



$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \dfrac{1}{3}l^2 h \\[2ex] V' = V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{h}{2} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{l^2 \cdot h}{8} \end{array}\right\} \dfrac{V}{V'} = \dfrac{1}{8}$$

50. **Un cubo y una esfera tienen la misma área. ¿Cuál tiene mayor volumen? Comprueba tu respuesta dando un valor cualquiera al radio de la esfera.**



Radio de la esfera: 10 cm

$4\pi R^2 = 6l^2 \;\rightarrow\; 4\pi \cdot 10^2 = 6l^2$

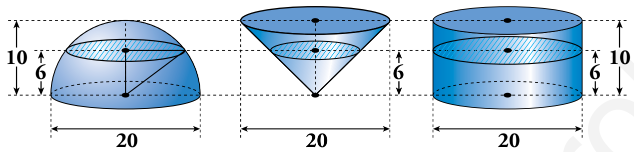
$l^2 = \dfrac{400\pi}{6} \;\rightarrow\; l = 14{,}47$ cm

Volumen cubo $= 14{,}47^3 = 3\,031{,}01$ cm^3

Volumen esfera $= \dfrac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = 4\,188{,}79$ cm^3

Tiene mayor volumen la esfera.

51. **Observa en la figura la semiesfera, el cono invertido y el cilindro, todos del mismo diámetro (20 cm) y altura (10 cm), que se han cortado por un plano horizontal a 6 cm de altura:**



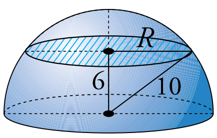
a) Calcula la superficie de las secciones obtenidas.

b) Comprueba que la sección obtenida en el cilindro equivale a la suma de las otras dos.

c) Comprueba que esa misma relación se cumple para cualquier altura del plano, h.

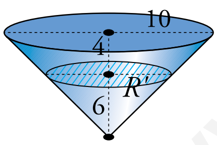
d) Comprueba que esa relación se cumple para cualquier radio, *r*, y cualquiera que sea la altura, h, a la que se corta el plano.

a)



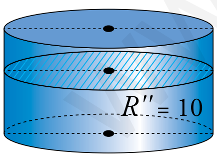
$R = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

$S_{\text{S. SEMIESFERA}} = \pi \cdot 8^2 \approx 201{,}06$ cm^2



$\dfrac{10}{10} = \dfrac{R'}{6} \;\rightarrow\; R' = 6$ cm

$S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot 6^2 \approx 113{,}10$ cm^2



$S_{\text{S. CILINDRO}} = \pi \cdot 10^2 \approx 314{,}16$ cm^2

b) $S_{\text{S. SEMIESFERA}} + S_{\text{S. CONO}} = 64\pi + 36\pi = 100\pi = S_{\text{S. CILINDRO}}$

c) Para un h cualquiera: $R = \sqrt{10^2 - \text{h}^2}$; $R' = \text{h}$; $R'' = 10$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\text{S. SEMIESFERA}} = \pi(10^2 - \text{h}^2) \\ S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot \text{h}^2 \\ S_{\text{S. CILINDRO}} = \pi \cdot 10^2 \end{array}\right\} \; S_{\text{S. SEMIESFERA}} + S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot 10^2 = S_{\text{S. CILINDRO}}$$

d) Para r y h cualesquiera:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\text{S. SEMIESFERA}} = \pi(r^2 - \text{h}^2) \\ S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot \text{h}^2 \\ S_{\text{S. CILINDRO}} = \pi r^2 \end{array}\right\} \; S_{\text{S. SEMIESFERA}} + S_{\text{S. CONO}} = \pi r^2 = S_{\text{S. CILINDRO}}$$

Página 229

Entrénate resolviendo problemas

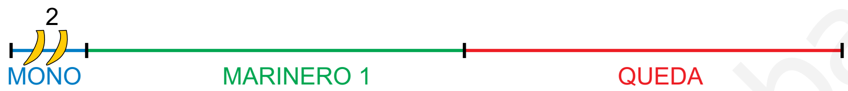
- **Al naufragar su barco, dos marineros y su mono llegan a una isla desierta. Como no tienen nada que comer, recogen plátanos y se van a dormir.**

  Por la noche, un marinero se despierta, da dos plátanos al mono y se come la mitad de los restantes. Después, se despierta el otro marinero, que también da dos plátanos al mono, hace tres partes con los que quedan y se come dos de esas partes.

  Por la mañana, se reparten, entre los tres, los plátanos que quedan.

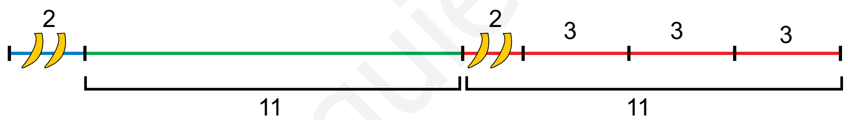
  En ningún momento ha sido necesario partir ningún plátano. ¿Cuál es el número mínimo de plátanos que podrían haber recogido? ¿Cuántos plátanos se ha comido cada uno?

  Se levanta el marinero 1:



  Se levanta el marinero 2:

  El número de plátanos que queda tiene que ser múltiplo de 3, ya que se los reparten entre los dos marineros y el mono. El más pequeño de esos múltiplos es 3. Ahora, vamos rellenando con números los gráficos hacia atrás:



  El número mínimo de plátanos es 11 + 11 + 2 = 24.

  El marinero que se despierta en primer lugar se ha comido 12 plátanos; el otro marinero, 7, y el mono, 5.

- **Tienes estas cinco monedas:**

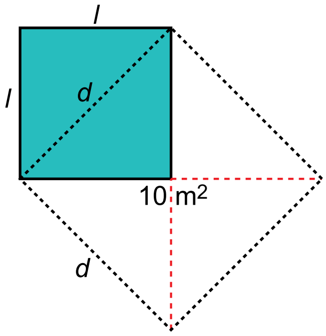
  ¿Cuántas cantidades distintas de dinero podrías formar?

  La menor cantidad de dinero que se puede formar con estas monedas es 10 céntimos, y la mayor, 190 céntimos (10 cts + 10 cts + 20 cts + 50 cts + 1 €).

  Se pueden formar todos los múltiplos de 10 entre esas cantidades:

10 céntimos → moneda de 10 cts	20 céntimos → moneda de 20 cts
30 céntimos → 20 + 10	40 céntimos → 20 + 10 + 10
50 céntimos → moneda de 50 cts	60 céntimos → 50 + 10
70 céntimos → 50 + 20	80 céntimos → 50 + 20 + 10
90 céntimos → 50 + 20 + 10 + 10	100 céntimos → 1 €

• **Calcula el área de un cuadrado cuya diagonal coincide con el lado de otro cuadrado de 10 m² de superficie.**



- El área del cuadrado de lado d es $A_1 = d^2 = 10$ m².
- El área del cuadrado de lado l es la mitad del área del cuadrado de lado d. Por tanto: $A_2 = l^2 = 10 : 2 = 5$ m².

El área del cuadrado de lado l es de 5 m².

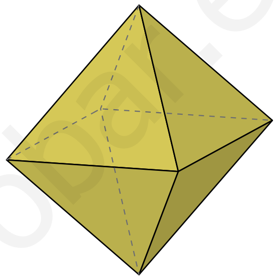
Autoevaluación

1. Describe el poliedro que se obtiene truncando un octaedro regular mediante planos que cortan las aristas a un tercio de su longitud. ¿Se trata de un poliedro semirregular? Explica por qué.

Se obtiene un cuerpo geométrico formado por 6 cuadrados, uno por cada vértice del octaedro y 8 hexágonos regulares, uno por cada cara del octaedro. En cada uno de sus vértices concurren un cuadrado y dos hexágonos.

El octaedro así truncado es un poliedro semirregular porque está compuesto por caras que son polígonos regulares de dos tipos, cuadrados y hexágonos, y en cada vértice concurren los mismos tipos de polígonos.

2. Describe los planos de simetría del octaedro regular. Di también cuáles son los ejes de giro y de qué orden es cada uno.



Planos de simetría. Tiene, en total, 9.

- De las 12 aristas del octaedro, cada cuatro están contenidas en un mismo plano.

  Cada uno de estos planos es un plano de simetría. De estos, hay 3.

- Cada par de aristas paralelas forman un plano. El plano perpendicular a cada uno de estos es un plano de simetría. De estos, hay 6.

Ejes de giro. Tiene, en total, 13.

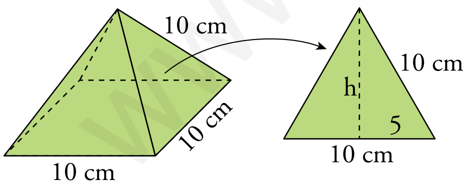
- Tres ejes de giro de orden cuatro, las rectas que unen vértices opuestos.
- Seis ejes de giro de orden dos, las rectas que unen los centros de aristas opuestas.
- Cuatro ejes de giro de orden tres, las rectas que unen los baricentros de caras opuestas.

3. Calcula la superficie total de:

a) Una pirámide de base cuadrada en la que la arista lateral y la arista de la base son iguales y miden 10 cm.

b) Un tronco de cono cuyas bases tienen radios de 9 m y 6 m, y la generatriz mide 5 m.

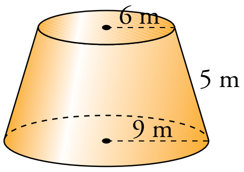
a)



$h = \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8{,}66$ cm

$S_{\text{PIRÁMIDE}} = 10^2 + 4\left(\dfrac{10 \cdot 8{,}66}{2}\right) \approx 273{,}21$ cm^2

b)



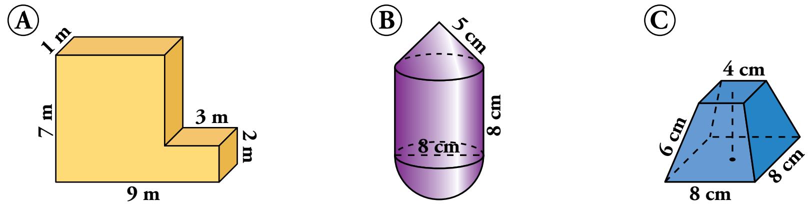
$S_{\text{TRONCO DE CONO}} = \pi(6 + 9) \cdot 5 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 9^2 = 192\pi \approx 603{,}19$ m^2

4. En una esfera de 8 cm de radio se dan dos cortes paralelos a distintos lados del centro, alejados de él 2 cm y 3 cm, respectivamente. Calcula la superficie de la zona esférica comprendida entre ambos cortes.

La altura de la zona esférica es $h = 5$ cm.

$S_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi \cdot 8 \cdot 5 = 80\pi \approx 251{,}33$ cm^2

5. Calcula el volumen de estos cuerpos:

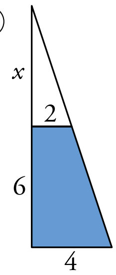


Ⓐ $V = 7 \cdot 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48 \text{ m}^3$

Ⓑ Altura del cono: $h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm}$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 + \pi \cdot 4^2 \cdot 8 + \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 \approx 50{,}27 + 402{,}12 + 134{,}04 = 586{,}43 \text{ cm}^3$$

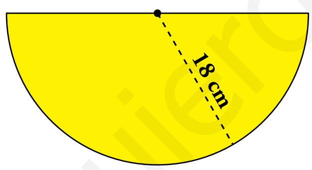
Ⓒ



$$\frac{4}{6+x} = \frac{2}{x} \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}8^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 6 = 224 \text{ cm}^3$$

6. Con este sector circular se construye un cono. Halla el radio de su base, su altura y su volumen.



La longitud de la semicircunferencia es $L = \frac{2\pi \cdot 18}{2} \approx 56{,}55$ cm, y coincide con la de la circunferencia de la base del cono. Por tanto:

Su radio es $56{,}55 = 2\pi r \rightarrow r = 9$ cm.

La altura es $h = \sqrt{18^2 - 9^2} \approx 15{,}69$ cm.

El volumen es $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 15{,}69 \approx 1\,330{,}87 \text{ cm}^3$

7. Dos ciudades están en el ecuador y sus longitudes se diferencian en 10°. ¿Cuál es la distancia entre ellas? (Radio de la Tierra: 6 371 km)

$$\frac{360}{40\,000} = \frac{10}{x} \rightarrow x \approx 1\,111$$

La distancia entre las ciudades es, aproximadamente, de 1 111 km.

8. Las coordenadas geográficas de San Petersburgo son 60° N 30° E, y de Oslo, 60° N y 11° E. Halla la longitud del arco del paralelo que va de la una a la otra.

Utilizando lo visto en el ejercicio resuelto de la página 221, el paralelo 60° mide, aproximadamente, 20 015 km.

Entre ambas ciudades hay un arco de 30° – 11° = 19°. Por tanto, la distancia entre ellos es $\frac{20\,015}{360°} \cdot 19° \approx 1\,056{,}35$ km.