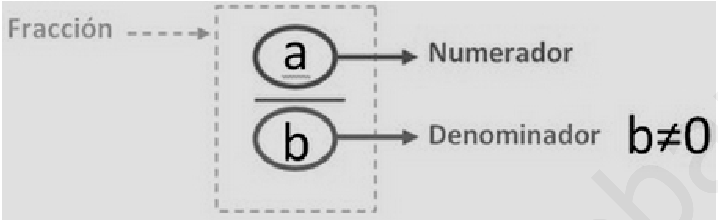
1.- Fracciones equivalentes

Una fracción es el cociente indicado de dos números enteros:



Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ es una fracción

Dos fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad.

Ejemplo: $\frac{3}{4}$  $\frac{6}{8}$ 

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ porque representan la misma parte de rectángulo.

Si las fracciones son equivalentes los productos cruzados valen lo mismo: $\begin{cases} 3 . 8 = 24 \\ 6 . 4 = 24 \end{cases}$

La regla es: $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \leftrightarrow \quad a.d = b.c}$

Amplificación de fracciones

Amplificar una fracción es obtener otra fracción equivalente con números más grandes, multiplicando el numerador y denominador por un mismo número entero distinto de 0.

La regla es: $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a.c}{b.c}}$, siendo $c \neq 0$ *Ejemplo*: $\frac{-3}{5} = \frac{-3.2}{5.2} = \frac{-6}{10}$

Fracciones de denominador negativo

Observa:

$$\frac{2}{-3}=\frac{2.(-1)}{(-3).(-1)}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$ En general, $\boxed{\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}}$

$$\frac{-7}{-5}=\frac{(-7).(-1)}{(-5).(-1)}=\frac{7}{5}$$ En general, $\boxed{\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}}$

Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción es obtener una fracción equivalente con números más pequeños, dividiendo numerador y denominador por un mismo divisor común.

La regla es: $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{a:d}{b:d}}$, siendo d un divisor común de a y b.

Ejemplo:

$$\frac{-132}{198}\xrightarrow{:2}\frac{-66}{99}\xrightarrow{:3}\frac{-22}{33}\xrightarrow{:11}\frac{-2}{3}$$

Las fracciones que no se pueden simplificar se llaman **fracciones irreducibles**.

En el ejemplo, $\frac{-2}{3}$ es una fracción irreducible

Se puede obtener la fracción irreducible en un solo paso dividiendo numerador y denominador entre el mcd de los mismos

Ejemplo: $\frac{-132}{198}\xrightarrow{:66}\frac{-2}{3}$, pues 66 es el mcd(132,198)

Reducción de fracciones a común denominador

Dadas dos o más fracciones, reducirlas a común denominador consiste en obtener otras fracciones equivalentes que tengan todas el mismo denominador.

Ejemplo: Vamos a reducir a común denominador las fracciones $\frac{1}{4}, \frac{7}{6}$ y $\frac{5}{8}$.

Paso 1: Calcular el mcm de los denominadores. Este será el denominador común: Como mcm(4,6 y 8) = 24

$$\frac{\quad}{24}, \frac{\quad}{24} \text{ y } \frac{\quad}{24}$$

Paso 2: Se calculan los numeradores dividiendo el común denominador entre cada denominador y multiplicando el resultado por el numerador:

24:4.1 = 6   24:6.7 = 28   24:8.5 = 15   Las fracciones reducidas a común denominador son $\frac{6}{24}, \frac{28}{24}$ y $\frac{15}{24}$

ACTIVIDAD RESUELTA

1 Reduce a común denominador: $2\ ,\ -\frac{7}{18}\ ,\ \frac{4}{9}\ ,\ \frac{-5}{12}\ ,\ \frac{1}{6}$ y -1

RESOLUCIÓN

$\frac{2}{1}, \frac{-7}{18}, \frac{8}{9}, \frac{-5}{12}, \frac{1}{6}$ y $\frac{-1}{1}$ $\rightarrow$ mín.c.m.(1 , 18 , 9 , 12 y 6) = **36** $\rightarrow$ $\boxed{\frac{72}{36}, \frac{-14}{36}, \frac{32}{36}, \frac{-15}{36}, \frac{6}{36} \text{ y } \frac{-36}{36}}$

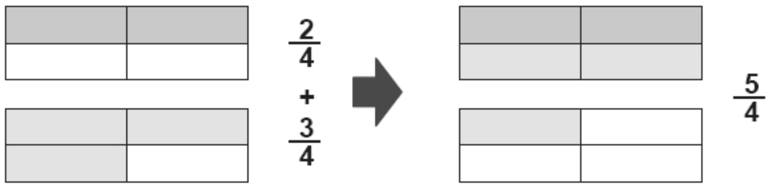
2.- Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones

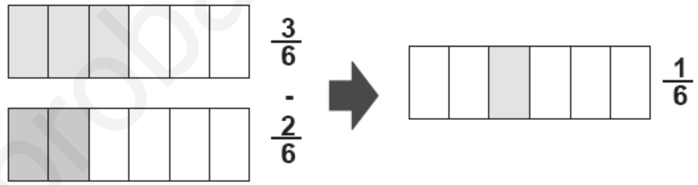
Con el mismo denominador

En este caso se deja el mismo denominador y se suman o restan los numeradores:

Ejemplos:



$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$



$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

Con distinto denominador

En este caso se reducen a común denominador y se aplica el caso anterior.

Ejemplo: $\frac{-1}{9} - 3 + \frac{-7}{18} - \frac{-5}{8}$

Paso 1: Se pone denominador 1 a los términos sin denominador: $\frac{-1}{9} - \mathbf{\frac{3}{1}} + \frac{-7}{18} - \frac{-5}{8}$

Paso 2: Se reducen las fracciones a común denominador: mín.c.m.(9,18 y 8) = 72, $\frac{-18}{72} - \frac{216}{72} + \frac{-84}{72} - \frac{-45}{72}$

Paso 3: Se realizan las operaciones con los numeradores y se deja el mismo denominador. Luego se simplifica.

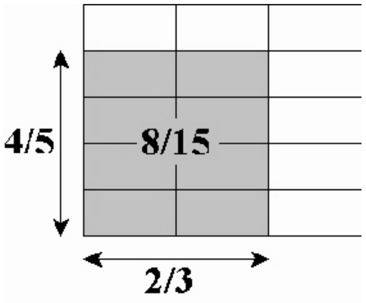
$$\frac{-18-216-84+45}{72}=\frac{-273}{72}\xrightarrow{:3}\frac{-91}{24}$$

Multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador

Ejemplos:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2.4}{3.5}=\frac{8}{15}$$



$$\frac{-3}{2}\cdot\frac{-5}{6}=\frac{(-3)(-5)}{2\cdot 6}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

En general: $\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}}$

Fracción de una fracción

Para calcular la fracción de una fracción debemos multiplicar las fracciones.

Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ de $\frac{9}{10}$ de 80 = $\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{10}$ de 80 = $\frac{27}{40}$ de 80 = 54

Fracción inversa

La inversa de una fracción se obtiene intercambiando el numerador y denominador.

Ejemplo:

La inversa de $\frac{-3}{8}$ es $\frac{8}{-3}=\frac{-8}{3}$; Si el numerador es 0 no existe la fracción inversa.

En general: La inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$

El producto de una fracción por su inversa siempre da 1. *Ejemplo* $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{15}{15}=1$

Inverso de un número

El inverso de un número entero se puede obtener por la regla anterior poniéndolo primero en forma de fracción

Por ejemplo, para hallar el inverso de 7, lo ponemos en forma de fracción: $7 = \frac{7}{1}$. Por tanto, el inverso es $\frac{1}{7}$.

En general, el inverso de "a" es $\frac{1}{a}$

El producto de un número por su inverso siempre da 1. *Ejemplo*: $4.\frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

División de fracciones

Para dividir dos fracciones se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda.

Ejemplo: $\frac{3}{2}:\frac{-5}{6} = \frac{3}{2}.\frac{6}{-5} = \frac{18}{-10} = \frac{-18}{10} = \frac{-9}{5}$

Se puede hacer directamente multiplicando en cruz. *Ejemplo*: $\frac{3}{2}:\frac{-5}{6} = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot (-5)} = \frac{18}{-10} = \frac{-18}{10} = \frac{-9}{5}$

En general: $\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$

Operaciones combinadas con fracciones

Para realizar varias operaciones se realizan primero los paréntesis y se sigue el siguiente orden:
1º) Se hacen las multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha
2º) Se hacen las sumas y restas

Ejemplo: $2-\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{2}:3$

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{2}:\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}=\frac{2}{1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{4}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)+\frac{3}{6}=\frac{2}{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\cdot\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}+\frac{3}{6}=\frac{2}{1}-\frac{3}{12}+\frac{3}{6}=\frac{24}{12}-\frac{3}{12}+\frac{6}{12}=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$$

ACTIVIDADES RESUELTAS

2 En el cumpleaños de Paula, la tarta se repartió de la siguiente manera:

Blanca tomo $\frac{1}{4}$, María $\frac{1}{5}$, Jorge $\frac{1}{3}$ y Paula $\frac{1}{6}$. Calcula la fracción de tarta que sobró.

RESOLUCIÓN

Se calcula la fracción de tarta que comieron entre los 4 sumando las fracciones:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{15}{60}+\frac{12}{60}+\frac{20}{60}+\frac{10}{60}=\mathbf{\frac{57}{60}}$$

Como se comieron $\frac{57}{60}$ de tarta, sobró $\frac{3}{60}=\boxed{\mathbf{\frac{1}{20}}}$ de tarta

$\boxed{3}$ **Calcula:** **a)** $\frac{1}{4}:\frac{1}{18}:\frac{5}{2}.10$ **b)** $\frac{2/3}{-4/9}$ **c)** $\frac{18/5}{-6}$ **d)** $\frac{-3}{-6/7}$ **e)** $\frac{35/83}{-7/83}$

RESOLUCIÓN

a) $\frac{1}{4}:\frac{1}{18}:\frac{5}{2}.\frac{10}{1} = \frac{18}{4}:\frac{5}{2}.\frac{10}{1} = \frac{36}{20}.\frac{10}{1} = \frac{360}{20} = \boxed{18}$

b) $\frac{2/3}{-4/9} = \frac{2}{3}:\frac{-4}{9} = \frac{2.9}{3.(-4)} = \frac{18}{-12} = \frac{3}{-2} = \boxed{\frac{-3}{2}}$

c) $\frac{18/5}{-6} = \frac{18}{5}:\frac{-6}{1} = \frac{18.1}{5.(-6)} = \frac{18}{-30} = \frac{3}{-5} = \boxed{\frac{-3}{5}}$

d) $\frac{-3}{-6/7} = \frac{-3}{1}:\frac{-6}{7} = \frac{-21}{-6} = \boxed{\frac{7}{2}}$

e) $\frac{35/83}{-7/83} = \frac{35}{83}:\frac{-7}{83} = \frac{35.\cancel{83}}{-7.\cancel{83}} = \frac{35}{-7} = \boxed{-5}$

$\boxed{4}$ **Una vasija tiene una capacidad de $\frac{12}{5}$ de litro y está llena de agua en $\frac{5}{6}$ de su capacidad. ¿Cuántos litros de agua contiene?**

RESOLUCIÓN

La vasija tiene $\frac{5}{6}$ de $\frac{12}{5}$ de litro $= \frac{5}{6}\cdot\frac{12}{5} = \frac{60}{30} =$ $\boxed{\textbf{2 litros}}$

$\boxed{5}$ **Con el agua de un bidón se llenan 65 botellas de $\frac{3}{5}$ de litro cada una.**

Si usamos botellas de $\frac{3}{4}$ de litro, ¿cuántas necesitaremos?

RESOLUCIÓN

Agua del bidón: $65 . \frac{3}{5} = \frac{195}{5} =$ **39 litros** Número de botellas de $\frac{3}{4}$ de litro: $39 : \frac{3}{4} = \frac{156}{3} =$ $\boxed{\textbf{52 botellas}}$

6 Efectúa: $\left(\dfrac{3}{5}-1\right)(-5)-\left(\dfrac{-5}{6}+\dfrac{-1}{2}-\dfrac{-5}{4}\right):\dfrac{-1}{2}$

RESOLUCIÓN

$$\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{1}\right)\cdot\frac{-5}{1}-\left(\frac{-5}{6}+\frac{-1}{2}-\frac{-5}{4}\right):\frac{-1}{2}=\left(\frac{3}{5}-\frac{5}{5}\right)\cdot\frac{-5}{1}-\left(\frac{-10}{12}+\frac{-6}{12}-\frac{-15}{12}\right):\frac{-1}{2}=$$

$$=\frac{-2}{5}\cdot\frac{-5}{1}-\frac{-1}{12}:\frac{-1}{2}=\frac{10}{5}-\frac{-2}{-12}=\frac{2}{1}-\frac{1}{6}=\frac{12}{6}-\frac{1}{6}=\boxed{\frac{11}{6}}$$

3.- Relación entre fracciones y decimales

Expresión decimal de una fracción

La expresión decimal de una fracción es el resultado de dividir el numerador entre el denominador.

Por ejemplo, si repartimos 25 € entre 4 personas, la fracción $\frac{25}{4}$ representa la división 25 **:** 4 = 6,25 €

Al calcular la expresión decimal de una fracción se puede obtener:

a) Un número **entero o un decimal exacto**.
Esto ocurre cuando la división es exacta o da como resultado un número finito de decimales.

Ejemplos: $\frac{-12}{3} = -12 : 3 = -4$ $\qquad$ $\frac{7}{8} = 7 : 8 = 0{,}875$

b) Un **<u>decimal periódico</u>**.

Esto ocurre cuando la división da lugar a un decimal con cifras que se repiten indefinidamente.

La cifra o grupo de cifras que se repite se llama **periodo**.

Si el periodo empieza a partir de la coma el decimal se llama **periódico puro** y si no **periódico mixto**.

En los decimales periódicos mixtos la parte comprendida entre la coma y el periodo se llama **anteperiodo**

<u>Ejemplos</u>:

$\frac{-8}{3}$ = -8 **:** 3 = –2,666… = $-2,\overline{6}$ es un decimal periódico puro. La parte entera es –2 y el periodo es 6

$\frac{5}{6}$ = 5 **:** 6 = 0,8333… = $0,8\overline{3}$ es periódico mixto. La parte entera es 0, el periodo es 3 y el anteperiodo es 8

Podemos observar que dos fracciones que dan el mismo decimal son equivalentes.

<u>Ejemplo</u>: $\frac{3}{4}$ = 3 **:** 4 = 0,75 $\frac{6}{8}$ = 6 **:** 8 = 0,75 . Son equivalentes porque dan el mismo valor

Fracción generatriz de un decimal

Fracción generatriz de un decimal es la fracción que tiene como expresión decimal el decimal dado.
Veamos cómo se halla la fracción generatriz:

Decimales exactos: Ejemplo: x = – 3,25

Paso 1: Como tiene dos cifras decimales, multiplicamos por 100 los dos miembros: 100x = – 325

Paso 2: Despejamos x, pasando 100 dividiendo al segundo miembro: $x = \frac{-325}{100} = \frac{-13}{4}$.

En general: $\begin{cases} \text{Numerador: Número sin coma} \\ \text{Denominador: 1 seguido de tantos 0 como cifras decimales haya} \end{cases}$

Ejemplo: $0{,}875 = \frac{875}{1000} = \frac{7}{8}$

Decimales periódicos puros: Ejemplo: x = 2,666...

Paso 1: Como el periodo tiene una cifra decimal, multiplicamos por 10 los dos miembros: 10x = 26,666...

Paso 2: Restamos los dos igualdades:

$$- \left[\begin{aligned} 10x &= 26{,}666.... \\ x &= 2{,}666.... \end{aligned} \right.$$
$$\overline{}$$
$$9x = 24$$

Paso 3: Despejamos x, pasando 9 dividiendo al segundo miembro: $x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$

En general: $\begin{cases} \text{Numerador: Número sin coma menos la parte entera} \\ \text{Denominador: Tantos 9 como cifras tenga el periodo} \end{cases}$

Ejemplo: $2{,}\overline{15} = \frac{215-2}{99} = \frac{213}{99} = \frac{71}{33}$

<u>Decimales periódicos mixtos</u>: Ejemplo: $x = 0{,}458333\ldots$

Paso 1: Como anteperiodo+periodo tiene 4 cifras, multiplicamos por 10 000 los dos miembros:

$$10\,000x = 4\,583{,}333\ldots$$

Paso 2: Como anteperiodo tiene 3 cifras, multiplicamos por 1 000 los dos miembros: $1\,000x = 458{,}333\ldots$

Paso 3: Restamos los dos igualdades:

$$-\left[\begin{array}{l} 10\,000x = 4\,583{,}333\ldots. \\ \quad 1\,000x = 458{,}333\ldots. \end{array}\right.$$
$$-----------$$
$$9\,000x = 4\,125$$

Paso 4: Despejamos x, pasando 9 000 dividiendo al segundo miembro: $x = \frac{4\,125}{9\,000} = \frac{11}{24}$

En general: $\begin{cases} \text{Numerador : Número sin coma menos la parte no periódica} \\ \text{Denominador : Tantos 9 como cifras tenga el periodo seguidos de tantos 0} \\ \text{como cifras tenga el anteperiodo} \end{cases}$

<u>Ejemplo</u>: $3{,}1\overline{6} = \frac{316-31}{90} = \frac{285}{90} = \frac{19}{6}$

ACTIVIDAD RESUELTA

7 Realiza pasando los decimales a fracción irreducible: $\left[0,5-0,333\ldots\left(\frac{21}{4}-5\right)\right]+\left(\frac{7}{35}:0,1\overline{6}\right)$

RESOLUCIÓN

Hallamos la fracción generatriz de cada decimal:

$$0,5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2} \qquad 0,333\ldots=0,\overline{3}=\frac{3-0}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3} \qquad 0,1\overline{6}=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$$

Sustituimos cada decimal por su fracción generatriz y después hacemos las operaciones:

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\cdot\left(\frac{21}{4}-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{1}}\right)\right]+\left(\frac{7}{35}:\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\right)=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{4}}-\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{4}}\right)\right]+\frac{\mathbf{42}}{\mathbf{35}}=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right]+\frac{42}{35}=\left[\frac{1}{2}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\right]+\frac{42}{35}=$$

$$=\left[\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{12}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\right]+\frac{42}{35}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}+\frac{42}{35}=\frac{175}{420}+\frac{504}{420}=\frac{679}{420}\xrightarrow{:7}\boxed{\frac{\mathbf{97}}{\mathbf{60}}}$$

4.- Números racionales e irracionales. Conjuntos numéricos

Los números enteros, decimales exactos y periódicos se llaman **números racionales**, porque se pueden expresar en forma de fracción

Hay números decimales que no son exactos ni periódicos y, por tanto, no se pueden expresar en forma de fracción. Estos decimales tienen infinitas cifras que no se repiten y se llaman **números irracionales**.

Los números irracionales más famosos son:

* El <u>número π</u> = 3,141592654...... . Se obtuvo al dividir la longitud de una circunferencia entre su diámetro.

Las primeras cifras de ® se pueden obtener con la calculadora así: **SHIFT** **EXP** **=**

El resultado es 3,141592654....

* El <u>número $\sqrt{\mathbf{2}}$</u> = 1,414213562....... . Se obtuvo al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1.

* El <u>número de oro</u> o número áureo: $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,61803398...... .

Se obtuvo al dividir la diagonal del pentágono regular entre su lado

Las raíces cuadradas no exactas de números naturales son números irracionales.

Por ejemplo, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$, etc son números irracionales

También son números irracionales: 3,1010010001.... ; 0,3737737773.....; ... pues tienen infinitas cifras no periódicas.

Los números que son racionales o irracionales se llaman **<u>números reales</u>**.

Números reales (R)

- Racionales (Q)
  - Números enteros (Z). Ejemplos : 7 , -2
  - Decimales exactos. Ejemplo : 2,75
  - Decimales periódicos
    - Periódicos puros. Ejemplo : $5,333... = 5,\overline{3}$
    - Periódicos mixtos. Ejemplo : $7,4666... = 7,4\overline{6}$
- Irracionales (decimales no periódicos). Ejemplo : 3,1010010001....

5.- Aplicaciones de los números y sus operaciones

Fracción de una cantidad

Si queremos calcular, por ejemplo, $\frac{2}{3}$ de 12 € podemos dividir el total en 3 partes y tomar 2

$$12 \xrightarrow{:3} 4 \xrightarrow{.2} 8$$

4	4	4

También se puede calcular así: $12 \xrightarrow{.2} 24 \xrightarrow{:3} 8$

De las dos formas, obtenemos que $\frac{2}{3}$ de 12 € = 8 €

Fracción de una cantidad: Cálculo del total

Si los $\frac{3}{5}$ del peso de una persona son 54 kg. ¿Cuánto pesa?

$$P \xrightarrow{:5} \quad \xrightarrow{.3} 54$$

Pesa 90 kg

$$90 \xleftarrow{.5} 18 \xleftarrow{:3} 54$$

De otra forma: $\frac{3}{5}$ de P = 54 → $\frac{3P}{5}$ = 54 → P = $\frac{54.5}{3}$ = 90 kg

Los porcentajes

Un porcentaje es una fracción de denominador 100. Por ejemplo, 75% significa 75 de cada 100

$$75\% = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Como podemos ver los porcentajes, las fracciones y los decimales están relacionados:
Para pasar un porcentaje a decimal se divide entre 100 y para pasar el decimal a porcentaje se multiplica por 100

Porcentaje de una cantidad

Puesto que un porcentaje es una fracción, para hallar el porcentaje de una cantidad podemos usar la fracción como operador

Ejemplo:

$$2{,}5\% \text{ de } 300\ € = \frac{2{,}5}{100} \text{ de } 300 = 2{,}5 : 100 \cdot 300 = 0{,}025 \cdot 300 = 7{,}5\ €$$

Porcentaje como proporción

Usando proporciones (reglas de tres directas) se pueden resolver muchos problemas de porcentajes:

Ejemplo:

El 30% de los peces que tenía Juan murieron por una enfermedad. Si murieron 6 peces, ¿cuántos peces tenía Juan?

100% ______ x

30% ______ 6 peces $\qquad x = \frac{6 \cdot 100}{30} = 20$ peces

ACTIVIDADES RESUELTAS

8 En una encuesta realizada al alumnado de un centro escolar sobre sus preferencias en deportes se obtuvieron los siguientes resultados que indica la tabla:

Preferencias	Número de alumnos/as
Fútbol	$\frac{5}{7}$ del total
Baloncesto	267
Otros deportes	$\frac{2}{14}$ del total

a) ¿Cuántos alumnos realizaron la encuesta?

b) Halla el número de alumnos que prefieren fútbol y los que prefieren otros deportes

RESOLUCIÓN

a) Fútbol y otros deportes: $\frac{5}{7}+\frac{2}{14}=\frac{5}{7}+\frac{1}{7}=\mathbf{\frac{6}{7}}$ Baloncesto: $1-\frac{6}{7}=\mathbf{\frac{1}{7}}$

Si x es el total de alumnos: $\frac{1}{7}\ de\ x=267 \rightarrow \frac{1.x}{7}=267 \rightarrow x=267\ .\ 7=\boxed{\text{1869 alumnos}}$

b) Fútbol: $\frac{5}{7} de\ 1869=\frac{5\ .\ 1869}{7}=\boxed{\text{1335 alumnos}}$ Otros deportes: $\frac{2}{14} de\ 1869=\frac{2\ .\ 1869}{14}=\boxed{\text{267 alumnos}}$

9 **De una cosecha de aceituna, en Febrero se vendieron las $\frac{2}{3}$ partes y luego en Marzo las $\frac{3}{5}$ partes de lo que quedaba.**

a) ¿Qué fracción de cosecha se vendió?

b) Si aún quedan por vender 400 kg, ¿cuantos kg de aceituna había en total?

RESOLUCIÓN

a) En febrero se vendió: $\mathbf{\frac{2}{3}}$ (y quedó $\frac{1}{3}$) En marzo se vendió: $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3} = \frac{3}{15} = \mathbf{\frac{1}{5}}$ (y quedó $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{2}{15}$)

En total se vendió: $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \boxed{\mathbf{\frac{13}{15}}}$

b) Si x es el total de kg de aceituna: $\frac{2}{15}$ $de\ x = 400 \rightarrow \frac{2.x}{15} = 400 \rightarrow x = \frac{400\ .\ 15}{2} = \boxed{3000\ \text{kg}}$

10 **He comprado en una tienda 2,75 kg de plátanos a 1,50 €/kg, 1,25 kg de manzanas a 1,65 €/kg y tres cuartos de kilo de judías a 1,20 €/kg.**

Halla cuánto tengo que pagar si me hacen un descuento que supone la décima parte del importe total

RESOLUCIÓN

Plátanos: 2,75 kg a 1,50 €/kg → 2,75 . 1,50 = **4,125 €**

Manzanas: 1,25 kg a 1,65 €/kg → 1,25 . 0,65 = **2,0625 €** ⇒ Total: 4,125+2,0625+0,90 = **7,0875 €**

Judías: 0,75 kg a 1,20 €/kg → 0,75 . 1,20 = **0,90 €**

Descuento: $\frac{1}{10}$ de 7,0875 = **0,70875 €** Tendré que pagar: 7,0875 – 0,70875 = 6,37875 → $\boxed{\textbf{6,38 €}}$

$\boxed{11}$ Una señora, cuyo peso era de 70,5 kg, se sometió a un tratamiento en el que redujo 3/4 kg cada semana y cuya duración fue de tres semanas. ¿Cuánto pesaba la señora al finalizar el tratamiento?

RESOLUCIÓN

En tres semanas redujo: $\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4} =$ **2,25 kg** Al final pesaba: 70,5 – 2,25 = $\boxed{\textbf{68,25 kg}}$

$\boxed{12}$ En un instituto, el 40% de los alumnos de 3º ESO van a Refuerzo de Lengua, el 80% de los restantes a Refuerzo de Matemáticas y los que quedan, 42 alumnos, van a Francés. Averigua cuántos alumnos hay en 3º ESO y cuántos hay en cada optativa.

RESOLUCIÓN

Refuerzo Lengua: **40%** (Queda un 60%) Refuerzo Matemáticas: 80% del 60% = 0,8 . 0,6 = 0,48 $\rightarrow$ **48%**

Refuerzo Lengua + Refuerzo Matemáticas = 40% + 48% = **88%** (Queda un 12% de Francés)

$$\begin{array}{l} 12\% \rightarrow 42 \text{ } alumnos \\ 100\% \rightarrow x \end{array} \qquad x = \frac{42 \, . \, 100}{12} = \boxed{\text{350 alumnos en total}}$$

Refuerzo Lengua: 40% de 350 = $\boxed{\textbf{140 alumnos}}$ Refuerzo Matemáticas: 48% de 350 = $\boxed{\textbf{168 alumnos}}$

Francés: $\boxed{\textbf{42 alumnos}}$

6.- Aproximaciones de números

Una aproximación de un número es otro número que está relativamente próximo a él.
Por ejemplo, si una camisa cuesta 29,95 € y decimos que nos ha costado unos 30 €, entonces 30 es una **aproximación por exceso** del precio real de la camisa, pues es mayor que el valor exacto.

Redondeo de números

La aproximación que se suele utilizar en la mayoría de los casos es el redondeo.

Para redondear un número a una determinada cifra:

- Dejamos igual las cifras anteriores a esa cifra.

- Si la cifra que le sigue es menor que 5, dejamos igual la cifra por la que estamos redondeando y si es mayor o igual que 5, le sumamos 1.

- Sustituimos por ceros todas las cifras que le siguen

Ejemplos:

31,52 $\xrightarrow{\text{redondeado a la cifra de las unidades}}$ 32,00 = 32, pues la cifra después del 1 es 5

7,5324 $\xrightarrow{\text{redondeado a la cifra de las milésimas}}$ 7,5320 = 7,532, pues la cifra después del 2 es 4

3161 $\xrightarrow{\text{redondeado a la cifra de las centenas}}$ 3200, pues la cifra después del 1 es 6

Truncamiento de números

Algunas veces, en lugar del redondeo se usa el truncamiento que consiste en sustituir por ceros las cifras a partir de una dada . Por ejemplo, el truncamiento del número 3,72634 a las centésimas es 3,72000 = 3,72

Errores en una aproximación

Siempre que tomemos una medida esta nunca puede ser exacta. Cualquier instrumento de medida que cojamos siempre tendrá una precisión limitada por lo que siempre habrá un error, por muy mínimo que sea. Por lo tanto, cualquier resultado numérico obtenido experimentalmente debe presentarse siempre acompañado de un número que indique cuanto puede alejarse dicho resultado del valor exacto.

A ese número le llamamos error absoluto.

En una aproximación, llamamos **error absoluto** (E) a la diferencia (tomada en valor absoluto) entre el valor real (V_R) y el valor aproximado (V_A):

$$\boxed{E = |V_R - V_A|}$$

Se expresa en las mismas unidades que el valor exacto. Se ve claramente que cuanto mayor es el error absoluto, más baja es la precisión de la aproximación.

El **error relativo** es el cociente entre el error absoluto y el valor real: $\boxed{E_R = \left|\frac{E}{V_R}\right|}$

El error relativo no lleva unidades y se suele expresar en forma de porcentaje (llamado entonces "error porcentual"). Para ello se multiplica el valor obtenido por 100.

El error relativo proporciona más información que el error absoluto acerca de la precisión de la aproximación decimal, al relacionar la desviación observada con la magnitud del propio valor exacto.
Se usa principalmente para comparar aproximaciones y poder saber qué aproximación es la mejor.

Siempre es más precisa la aproximación que nos dé menor error relativo.

13 **Realiza la siguiente operación con tu calculadora, redondea el resultado tomando una cifra decimal e indica si la aproximación obtenida es por defecto o por exceso:** $12\sqrt{18}-3\sqrt{2}\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN

$$12\sqrt{18}-3\sqrt{2}\sqrt{5} = 41{,}42485526 \rightarrow \boxed{\textbf{41,4 aproximación por defecto}}$$

14 **Calcula el error absoluto y relativo que se comete al truncar $\frac{123}{21}$ a las centésimas**

RESOLUCIÓN

$$\frac{123}{21} = 5{,}857142857 \rightarrow 5{,}85$$

$$E = |V_R - V_A| = \left|\frac{123}{21} - 5{,}85\right| = \boxed{\mathbf{0{,}007}}$$

$$E_R = \left|\frac{E}{V_R}\right| = \left|\frac{0{,}007}{123/21}\right| = \left|\frac{0{,}007 \cdot 21}{123}\right| = \boxed{0{,}0012 \uparrow 1{,}2\%}$$

15 **Antes del verano, Luisa pesaba 60 kg y Pedro 75 kg.**
Cada uno ha engordado 3 kg. ¿Cuál es el aumento relativo de peso de cada uno?

RESOLUCIÓN

Luisa: $\frac{3}{60} = 0{,}05 \rightarrow \boxed{5\% \text{ de aumento}}$ Pedro: $\frac{3}{75} = 0{,}04 \rightarrow \boxed{4\% \text{ de aumento}}$

$\boxed{16}$ Cuando medimos con una cinta métrica la precisión es de 5 mm.
Si medimos una barra de hierro y obtenemos 70 cm, ¿entre qué valores esta la longitud real?

RESOLUCIÓN

Como 5 mm = 0,5 cm, la longitud de la barra estará entre 70 cm – 0,5 cm y 70 cm + 0,5 cm .

O sea, $\boxed{\textbf{entre 69,5 cm y 70,5 cm}}$

$\boxed{17}$ Al pesar un remolque cuyo peso exacto es de 400 kg hemos obtenido 395 kg.
Al pesar a Esteban cuyo peso exacto es de 80 kg hemos obtenido 85 kg.
Halla el porcentaje de error relativo en cada caso e indica qué medida es más precisa

RESOLUCIÓN

Remolque: $E_R = \left|\dfrac{E}{V_R}\right| = \left|\dfrac{400-395}{400}\right| = \left|\dfrac{5}{400}\right| = 0{,}0125 \rightarrow \boxed{1{,}25\%}$

Esteban: $E_R = \left|\dfrac{E}{V_R}\right| = \left|\dfrac{80-85}{80}\right| = \left|\dfrac{-5}{80}\right| = 0{,}0625 \rightarrow \boxed{6{,}25\%}$

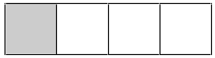
La medida más precisa es la del peso de Esteban porque nos da menor error relativo

7.- Ordenación de números

Ordenación de fracciones

Si las fracciones tienen el mismo denominador, es menor la que tiene menor numerador.

Por ejemplo, $\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$ porque 1 < 3.

$\frac{1}{4}$ 

$\frac{3}{4}$ 

Cuando las fracciones no tengan el mismo denominador, se pueden comparar reduciéndolas a común denominador.

Por ejemplo, vamos a comparar $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ $\rightarrow$ $\frac{9}{12}$ y $\frac{10}{12}$. Como $\frac{9}{12} < \frac{10}{12}$, pues 9 < 10, entonces $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$

Ordenación de decimales

Dados dos números decimales, es mayor el que tenga mayor parte entera. *<u>Ejemplo</u>*: 234,65 > 136,76

Si tienen la misma parte entera, se compara la primera cifra decimal distinta.

146,82 > 146,74   357,56 > 357,53   634,128 > 634,125

Si no tienen el mismo número de cifras decimales puedes ponerlos con el mismo número de cifras decimales añadiendo ceros.

<u>Ejemplos</u>:

207,12 > 207,00   43,28 > 43,20   72,10 > 72,09

(**Observación**: Se pueden ordenar fracciones pasándolas a decimal y luego ordenando los decimales)

ACTIVIDADES RESUELTAS

$\boxed{18}$ Ordena de mayor a menor: $\frac{7}{6}$, $\frac{-3}{10}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{-3}{8}$ y -1

RESOLUCIÓN

Primero reducimos a común denominador: $\frac{7}{6}, \frac{-3}{10}, \frac{9}{5}, \frac{-3}{8}$ y $\frac{-1}{1}$, mín.c.m.(6,10,5,8 y 1) = 120

$$\frac{140}{120}, \frac{-36}{120}, \frac{219}{120}, \frac{-45}{120} \text{ y } \frac{-120}{120}$$

Como 219 > 140 > – 36 > – 45 > – 120 , $\frac{9}{5} > \frac{7}{6} > \frac{-3}{10} > \frac{-3}{8} > \frac{-1}{1}$

$\boxed{19}$ Ordena de menor a mayor: –3,1 ; – π ; $\frac{-10}{3}$ y $-\sqrt{10}$

RESOLUCIÓN

Tomamos para todos los números la expresión decimal:

$$-3{,}1 = -3{,}10 \qquad -\pi = -3{,}14.... \qquad \frac{-10}{3} = -3{,}33.... \qquad -\sqrt{10} = -3{,}16...$$

Ordenamos según la expresión decimal: –3,33.... < –3,16.... < –3,14.... < –3,10

Por tanto, $\frac{-10}{3} < -\sqrt{10} < -\pi < -3{,}1$

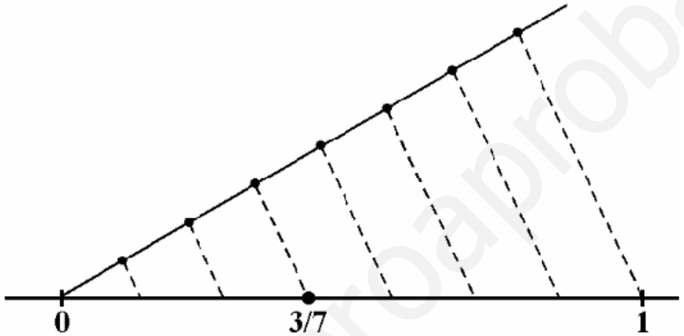
$\boxed{20}$ Un coche recorre 30 km en 18 minutos y una moto 40 km en 25 minutos. ¿Cuál ha ido más rápido?

Velocidad del coche: $\frac{30 \text{ km}}{18 \text{ min}} = 1{,}666... \text{ km/min}$ Velocidad de la moto: $\frac{40 \text{ km}}{25 \text{ min}} = 1{,}6 \text{ km/min}$ Luego, **$\boxed{\text{el coche es más rápido}}$**

8.- Representación gráfica de números en la recta

Representación de fracciones en la recta

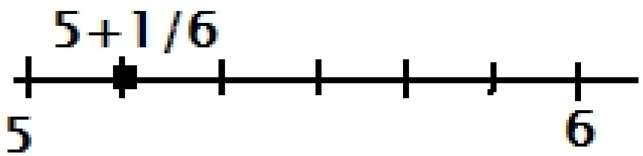
Para representar la fracción propia $\frac{3}{7}$ en la recta dividimos el segmento [0,1] en 7 partes iguales y tomamos 3 partes a partir de 0



También se pueden representar fracciones impropias (numerador > denominador) pasándolas a forma mixta

Ejemplo:

$\frac{31}{6} \rightarrow \begin{array}{r|l} 31 & 6 \\ \cline{2-2} 1 & 5 \end{array} \rightarrow \frac{31}{6} = 5 + \frac{1}{6} \rightarrow$ 5 unidades y 1/6 del segmento [5,6]



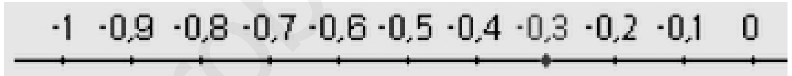
<u>Representación de decimales en la recta</u>

Para representar números decimales se divide el segmento correspondiente en 10 partes iguales

<u>Ejemplos</u>:

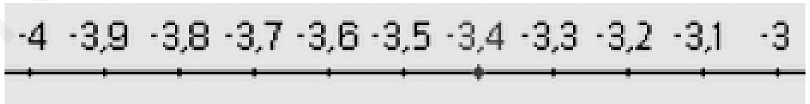
Números decimales en el segmento [0,1]

Números decimales en el segmento [–1,0]

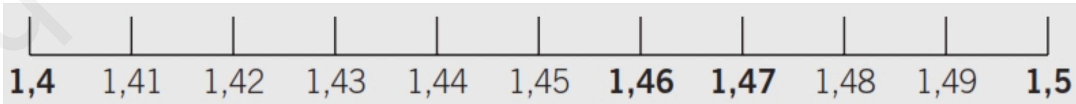


Números decimales en el segmento [2,3]

Números decimales en el segmento [–4, –3]



Números decimales en el segmento [1,4 ; 1,5]



Observaciones:

Se pueden representar fracciones pasándolas a decimal y luego representando los decimales

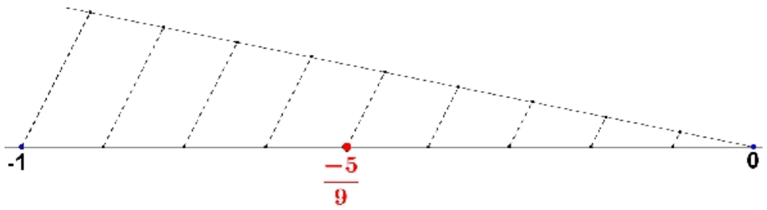
Se puede representar de forma aproximada un decimal redondeándolo. Esto se suele hacer cuando el decimal tiene más de dos cifras decimales o cuando queramos representar un número irracional

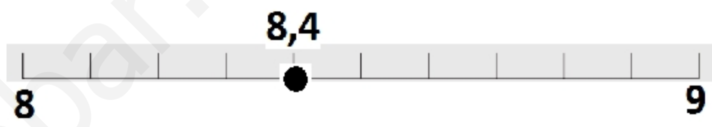
ACTIVIDADES RESUELTAS

21 **Representa en la recta los siguientes números, cada uno en una recta diferente:**

a) $\frac{-5}{9}$ **b)** $\sqrt{70}$ **redondeando a las décimas**

RESOLUCIÓN

a) 

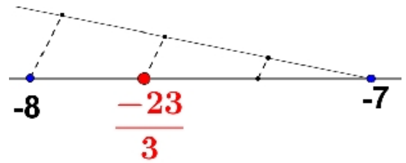
b) $\sqrt{70} \rightarrow 8{,}4$ 

22 **Escribe en forma mixta la fracción** $\frac{-23}{3}$ **y represéntala de forma exacta en la recta:**

RESOLUCIÓN

$\frac{23}{3} \rightarrow \begin{array}{l|l} 23 & 3 \\ \hline 2 & 7 \end{array} \rightarrow \frac{23}{3} = 7 + \frac{2}{3} \rightarrow$ 7 unidades y 2/3 del segmento [7,8] .

Luego, $\frac{-23}{3} = -7 - \frac{2}{3} \rightarrow$ 7 unidades a la izquierda de 0 y 2/3 del segmento [–8, –7]



9.- Intervalos de la recta

Un intervalo es un segmento o una semirrecta de la recta real. Hay 8 tipos de intervalos:

Intervalo abierto (a, b) $(-1, 3) \Rightarrow -1 < x < 3$	Intervalo cerrado $[a, b]$ $[-1, 3] \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$	Semirrecta abierta positiva (a, ∞) $(2, \infty) \Rightarrow x > 2$	Semirrecta cerrada positiva $[a, \infty)$ $[2, \infty) \Rightarrow x \geq 2$
Intervalo abierto por la izquierda $(a, b]$ $(-1, 3] \Rightarrow -1 < x \leq 3$	Intervalo abierto por la derecha $[a, b)$ $[-1, 3) \Rightarrow -1 \leq x < 3$	Semirrecta abierta negativa $(-\infty, a)$ $(-\infty, 2) \Rightarrow x < 2$	Semirrecta cerrada negativa $(-\infty, a]$ $(-\infty, 2] \Rightarrow x \leq 2$