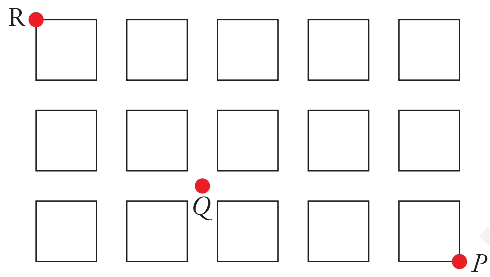
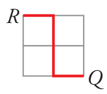
PÁGINA 226

Ruperto sale de su casa, *R*, pasa por el quiosco, *Q*, y va a buscar a su amiga Pilar (*P*).

En el quiosco compra 3 cómics (*A*, *B*, *C*), un diario (*D*) y una revista (*E*).

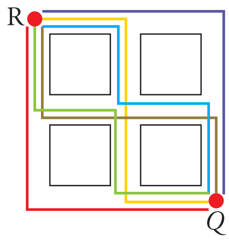


1 **Describe sobre una cuadrícula los distintos caminos de recorrido mínimo que puede seguir para ir de su casa al quiosco.**

Por ejemplo: 

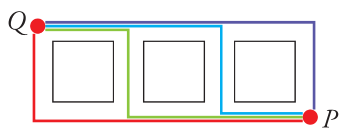
¿Cuántos son?

Hay 6 caminos para ir de casa de Ruperto al quiosco.



2 **¿Cuántos posibles caminos hay para ir de *Q* a *P*? ¿Cuántos para ir de *R* a *P* pasando por *Q*?**

Para ir del quiosco a casa de Pilar hay 4 caminos:



3 **Ruperto ofrece a Pilar sus cinco adquisiciones para que elija 3.**

A*, *B*, *C*, *D* y *E

¿De cuántas formas puede hacerlo?

Puede escoger cualquiera de estas combinaciones:

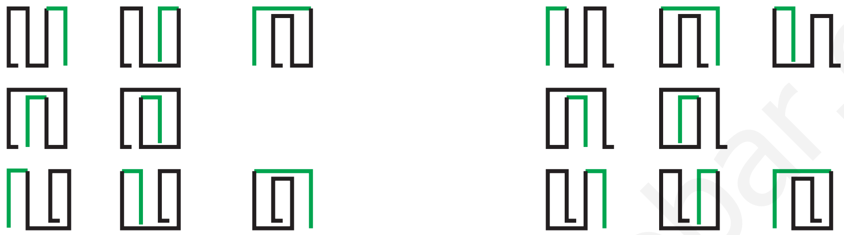
ABC	*ABD*	*ABE*	*ACD*	*ACE*
ADE	*BCD*	*BCE*	*BDE*	*CDE*

PÁGINA 227

ANTES DE COMENZAR, RECUERDA

1 Construye el árbol completo para llegar a todos los posibles plegados de cuatro sellos.

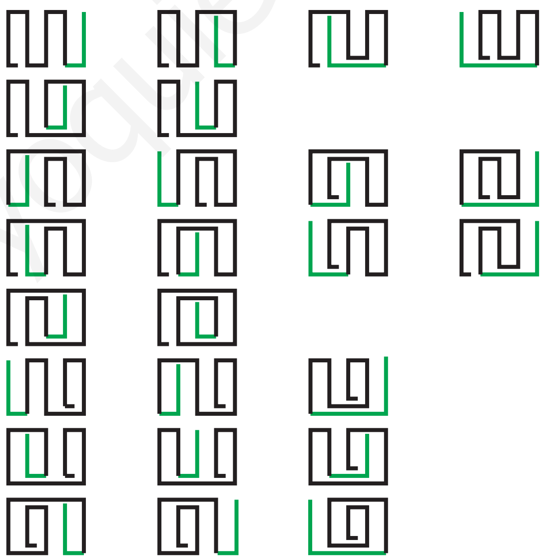
Partiendo de tres sellos, hacemos los dobleces para cuatro sellos:



Hay 16 formas de plegar cuatro sellos sin doblar ninguno.

2 Prolonga el árbol anterior para ver los posibles plegados de cinco sellos.

Para plegar cinco sellos partimos de cada una de las posibilidades de plegar cuatro sellos:



Con las otras ocho posibilidades salen los mismos casos, es decir, otros 25 casos.

Hay 25 + 25 = 50 formas de plegar cinco sellos sin doblar ninguno.

PÁGINA 228

1 **Resuelve razonadamente los enunciados 2, 3, 4 y 5 anteriores.**

2. ***Hay conversaciones bilaterales entre la UE y Japón. Los europeos acuden con 8 representantes y los japoneses, con 11. Al encontrarse, cada miembro de una delegación saluda, estrechando la mano, a cada miembro de la otra. ¿Cuántos apretones de manos se dan?***

3. ***Vamos a merendar a un bar. Nos ofrecen 5 tipos de bocadillos y 8 tipos de bebidas. ¿Cuántos menús podemos confeccionar?***

4. ***¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar un dado de color rojo y otro verde?***

5. ***Lanzamos un dado y extraemos una carta de una baraja de 40 cartas. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?***

2. Cada representante europeo da la mano a cada uno de los once japoneses. Como hay 8 representantes europeos, en total hay $8 \cdot 11 = 88$ apretones de mano.

3. Con cada bocadillo podemos tomar 8 bebidas. Como hay 5 tipos de bocadillos, en total hay $8 \cdot 5 = 40$ menús distintos.

4. Con cada resultado del dado rojo hay 6 resultados del dado verde. Como hay 6 resultados del dado rojo, en total hay $6 \cdot 6 = 36$ resultados distintos.

5. Con cada resultado del dado hay 40 cartas de la baraja. Como hay 6 resultados del dado, en total existen $6 \cdot 40 = 240$ posibles resultados.

PÁGINA 229

2 **Resuelve razonadamente los enunciados 2b, 3b, 4b y 5b.**

2b. ***Los japoneses y los europeos se saludan, estrechándose la mano, no solamente al conocerse, sino cada día al juntarse y al separarse (¡qué pesados!). Las conversaciones duran 3 días. ¿Cuántos apretones de manos se darán?***

3b. ***En el bar donde fuimos a merendar, además de bocadillos y bebidas, decidimos pedir postre. Los hay de 4 tipos distintos. ¿Cuántos menús distintos salen ahora?***

4b. ***¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar un dado rojo, uno verde y uno azul?***

5b. ***¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar un dado, extraer una carta de una baraja de 40 cartas y lanzar una moneda?***

2b. Cada día se dan 2 apretones de manos durante los tres días. Por lo tanto, cada pareja se saludan $2 \cdot 3 = 6$ veces. En total se dan $88 \cdot 6 = 528$ apretones de manos.

3b. Hay cuatro postres para cada menú. Entonces hay $40 \cdot 4 = 160$ menús distintos ahora.

4b. Lanzando dos dados obtenemos $6 \cdot 6 = 36$ resultados.

Lanzando tres dados obtenemos $36 \cdot 6 = 216$ resultados distintos.

5b. Extrayendo una carta y lanzando un dado, conseguimos 240 resultados distintos. Para cada resultado hay dos posibilidades al lanzar una moneda, luego hay $240 \cdot 2 = 480$ resultados distintos.

PÁGINA 231

3 Alberto, Beatriz y Claudia van a ver a su abuelo. Al irse, este les dice: "Escoged cada uno el libro que queráis de estos", y les muestra 10 libros distintos. ¿De cuántas formas pueden hacer su elección?

El primer nieto: elegirá 1 libro de entre 10 libros distintos.

El segundo nieto: por cada una de las 10 posibilidades que ha tenido el primer nieto tiene 9 posibilidades: $10 \cdot 9 = 90$ posibilidades.

El tercer nieto: por cada una de las 90 posibilidades que hay al haber elegido ya el segundo nieto tiene 8 posibilidades.

En total tienen $90 \cdot 8 = 720$ formas de hacer la elección.

PÁGINA 232

4 Luis, Carlos, Gonzalo, Paco y Jorge han quedado en encontrarse en la puerta del cine con sus amigas, Carmen, Elena, Marta y Cristina. Al encontrarse, se saludan como es habitual: dos besos en la mejilla entre un chico y una chica. ¿Cuántos besos se dan entre todos?

Cada chico da dos besos a cada chica. Cada chico da $2 \cdot 4 = 8$ besos.

Como hay 5 chicos, en total dan $5 \cdot 8 = 40$ besos.

5 ¿Cuántos partidos de Primera División se juegan en una temporada de la Liga española de fútbol? (Son 20 equipos que juegan todos contra todos dos veces).

Cada equipo juega 19 partidos de ida y 19 partidos de vuelta. En total juegan 38 partidos.

Como hay 20 equipos, se jugarán $20 \cdot 38$ partidos. Pero estamos contando dos veces cada partido, por lo tanto se jugarán $10 \cdot 38 = 380$ partidos de fútbol.

6 ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener al lanzar un dado y dos monedas distintas?

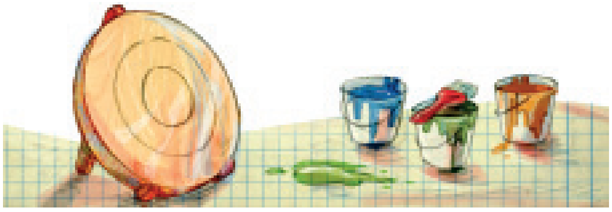
Al lanzar dos monedas tenemos 4 posibles resultados:

CC CX XC XX

Por cada una de estas 4 posibilidades, hay 6 resultados al lanzar un dado.

En total hay $6 \cdot 4 = 24$ posibles resultados.

7 **Quiero pintar una diana como la de la figura, para jugar a los dardos.**



¿De cuántas formas la puedo pintar si tengo pintura de colores azul, verde y naranja?

¿Y si tuviera 6 colores?

COLOR EXTERNO	COLOR INTERMEDIO	COLOR INTERNO
A	V	N
	N	V
V	A	N
	N	A
N	A	V
	V	A

Hay 6 posibilidades con tres colores.

Si hay 6 colores (enumeramos los colores del 1 al 6):

1

2 3 4 5 6

3 4 5 6 | 2 4 5 6 | 2 3 5 6 | 2 3 4 6 | 2 3 4 5

$5 \cdot 4 = 20$ posibilidades con el color 1 en primer lugar. Si hacemos este árbol para los otros cinco colores, obtendremos: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ posibilidades.

Hay 120 formas de pintar la diana.

8 **En el pub "El Sabrosón" son especialistas en combinados de zumos y en café. Tienen 5 tipos de zumos de frutas y 3 tipos de cafés. ¿Cuántas combinaciones distintas se pueden hacer eligiendo un zumo y una taza de café?**

Si, además, se añade a cada combinación un bombón de chocolate blanco o negro, ¿cuántas se podrán preparar de esta forma?

Por cada zumo se pueden hacer tres combinaciones con café.

En total habrá $5 \cdot 3 = 15$ combinaciones de zumo y café.

A cada una de estas 15 combinaciones se le puede añadir un bombón a elegir entre dos tipos. Luego ahora habrá $15 \cdot 2 = 30$ combinaciones distintas.

9 **La Asociación de Libreros va a entregar los premios “Pluma de Oro” y “Pluma de Plata”. Para ello ha seleccionado 10 libros entre los publicados este año. ¿De cuántas formas pueden repartirse los dos premios entre esos libros?**

Por cada libro que reciba la “Pluma de Oro” hay 9 posibilidades de otorgar a otro libro distinto de este la “Pluma de Plata”.

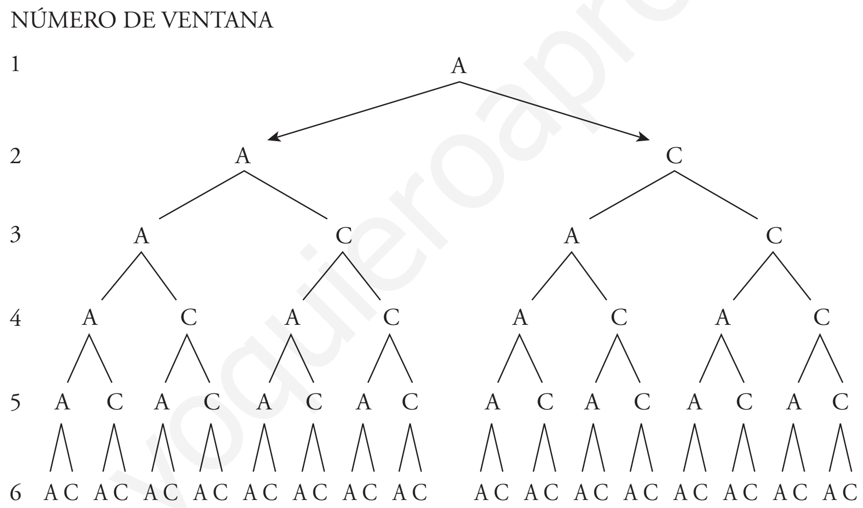
Como hay 10 posibilidades para otorgar la “Pluma de Oro”, en total habrá:

$10 \cdot 9 = 90$ formas distintas de repartirse los dos premios entre los 10 libros.

10 **En un aula hay 6 ventanas que pueden estar abiertas (A) o cerradas (C), indistintamente. Esta mañana su posición era esta: ACAACA, es decir, estaban abiertas la 1.ª, 3.ª, 4.ª y 6.ª, y cerradas, la 2.ª y 5.ª. ¿Cuántas posiciones distintas pueden tener las ventanas?**

Hacemos un diagrama en árbol.

Supongamos que la primera ventana está abierta (A):



Hay 32 posiciones distintas de tener las ventanas.

Si la primera ventana está cerrada (C), habrá otras 32 posiciones.

En total hay 64 posiciones distintas.

PÁGINA 233

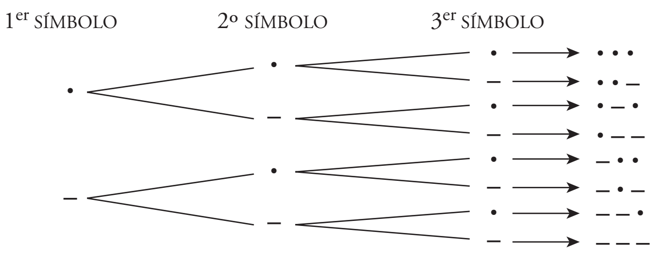
11 **En el alfabeto Morse se utilizan dos símbolos: el punto (.) y la raya (–), para representar letras y números. Por ejemplo, las vocales se representan así:**

A .–   E .   I ..   O –––   U ..–

a) ¿Cuántas tiras de tres símbolos de estos (entre puntos y rayas) se pueden formar?

b) Si utilizamos tiras de 1, 2, 3 ó 4 símbolos, ¿cuántas letras o números podremos representar en total?

a)



Se pueden hacer 8 tiras.

b) Número de tiras de 1 símbolo: 2

Número de tiras de 2 símbolos: 4

Número de tiras de 3 símbolos: 8

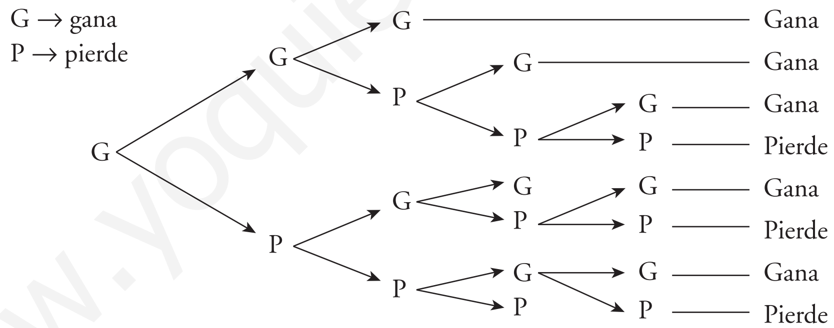
Número de tiras de 4 símbolos: 16

En total se representarán: 2 + 4 + 8 + 16 = 30 letras o números.

12 **Dos amigos juegan un torneo de ajedrez en el que será vencedor el primero que logre ganar tres partidas. (No se tienen en cuenta las partidas que terminan en tablas).**

¿De cuántas formas posibles puede desarrollarse el encuentro?

Basta ver lo que hace uno de los amigos (ya que, si este gana, el otro pierde).



Si el primer amigo ha ganado la primera partida, hay 8 formas distintas de desarrollarse el torneo. Si pierde la primera partida, hay otras 8 formas distintas.

En total hay 8 + 8 = 16 formas distintas de desarrollarse el encuentro.

13 **Además de la locomotora, que va delante, un tren lleva 5 vagones: 3 de segunda clase y 2 de primera clase, que pueden ordenarse de cualquier forma. Un día, su posición era así: 21122; otro día, así: 11222. ¿De cuántas formas pueden ordenarse los vagones?**

Las posiciones posibles son:

11222	21122	22112	22211
12122	21212	22121	
12212	21221		
12221			

En total hay 10 formas de ordenar los vagones.

14 **a) Se ha jugado un partido de fútbol de máxima rivalidad en nuestra ciudad y solo sabemos que el resultado fue un empate: 2-2. ¿Cuál sería el resultado del marcador en el descanso? Escribe todas las posibilidades.**

b) Si en el descanso el resultado era 1-0, ¿de cuántas formas posibles pudo ir variando el marcador hasta llegar al resultado final 2-2?

a)

1er EQUIPO	2º EQUIPO	RESULTADOS
0	→ 0	→ 0 – 0
	→ 1	→ 0 – 1
	→ 2	→ 0 – 2
1	→ 0	→ 1 – 0
	→ 1	→ 1 – 1
	→ 2	→ 1 – 2
2	→ 0	→ 2 – 0
	→ 1	→ 2 – 1
	→ 2	→ 2 – 2

Hay 9 posibilidades

b)

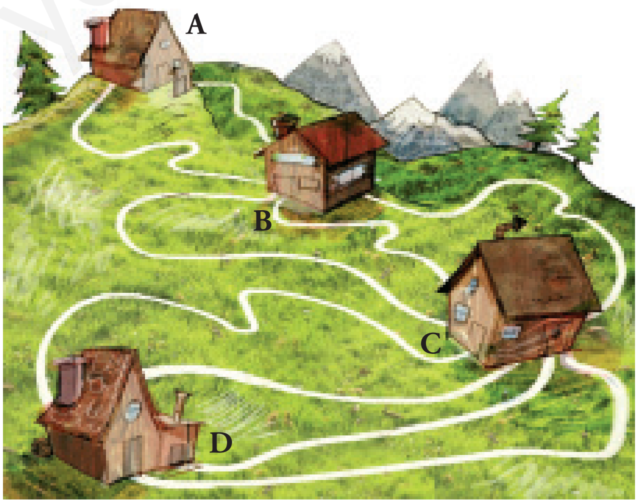
1 – 0 → 2 – 0 → 2 – 1 — 2 – 2

1 – 0 → 1 – 1 → 2 – 1 — 2 – 2

1 – 0 → 1 – 1 → 1 – 2 — 2 – 2

En total hay 3 formas distintas de variar el marcador.

15 **Cuatro refugios de montaña, A, B, C, D, están comunicados por los caminos indicados en el dibujo.**



¿Cuántas rutas posibles se pueden seguir para ir de A a D?

Hay 2 formas de llegar de A a B, 3 de llegar de B a C y 4 de llegar de C a D.

En total hay $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ formas distintas de ir desde A hasta D.

16 **¿Cuántos capicúas de tres cifras existen?**

Como empiezan y terminan por el mismo número, sólo podemos variar la cifra central. Por ejemplo:

101	111	121	131	141
151	161	171	181	191

Por cada cifra del 1 al 9 hay diez números capicúas (010 no se considera un número de tres cifras).

Entonces hay 9 · 10 = 90 números capicúas de tres cifras.

17 **Elvira es la mediana de 5 hermanos.**

¿Qué posibles distribuciones chico-chica-chica-chico-chico hay en esa familia, de la que solo conocemos a ella?

Elvira (E) es la tercera. La otra chica (A) queda fija, entonces, en el segundo lugar. Solo podemos hacer cambios en los lugares de los chicos.

Si numeramos a los chicos del 1 al 3, podemos colocarlos así:

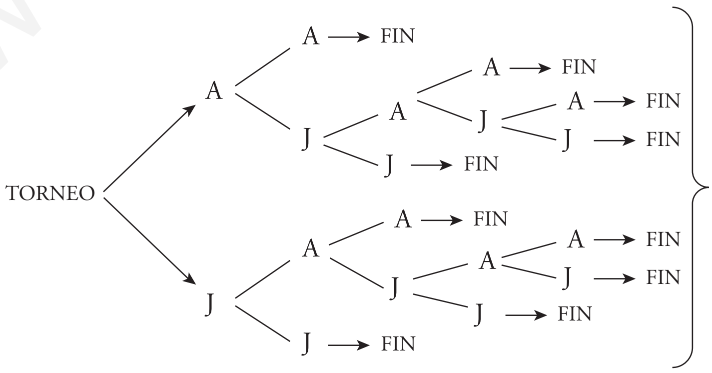
1 A E 2 3	2 A E 1 3	3 A E 1 2
1 A E 3 2	2 A E 3 1	3 A E 2 1

Hay 6 posibles distribuciones.

18 **Álvaro y Javier juegan un torneo de tenis que ganará el que consiga dos sets seguidos o tres alternos.**

¿Cuáles son los posibles desarrollos del torneo?

Hacemos el diagrama en árbol. En cada ramificación indicamos quién gana un juego [Álvaro (A) o Javier (J)]:

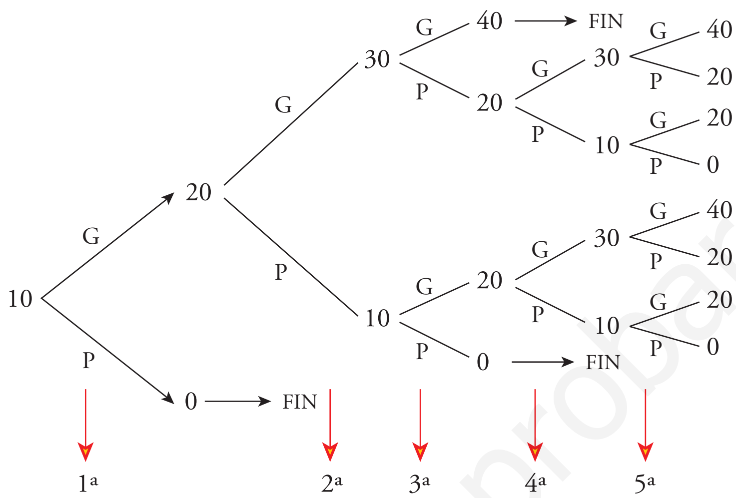


A A
A J A A
A J A J A
A J A J J
A J J
J A A
J A J A A
J A J A J
J A J J
J J

Hay 10 posibles desarrollos del torneo.

19 **Carlos tiene 10 €. Va a un casino dispuesto a jugar, como máximo, cinco veces a la ruleta. Cada apuesta es de 10 €, y dejará de jugar si se queda sin dinero o si gana 30 €. Escribe todos los posibles resultados que pueden darse.**

Para ganar 30 €, debe quedarse con 40 €, ya que él empieza con 10 €.



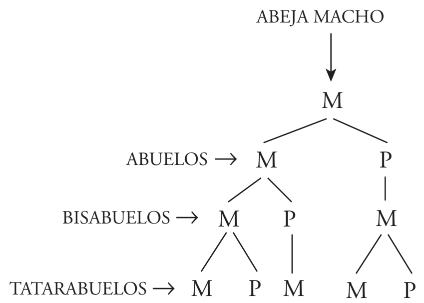
Salen las siguientes combinaciones:

G G G
G G P G G
G G P G P
G G P P G
G G P P P
G P G G G
G P G G P
G P G P G
G P G P P
G P P
P

En total son 11 posibles resultados.

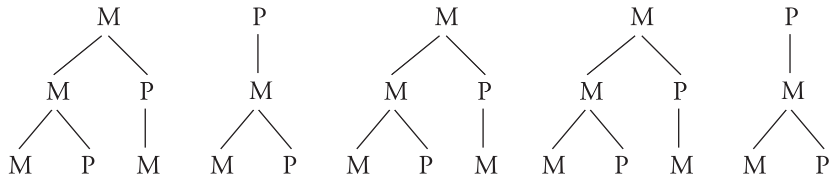
20 **Las abejas macho nacen de huevos sin fecundar y, por tanto, tienen madre, pero no padre. Las abejas hembras nacen de huevos fecundados y, por ello, tienen padre y madre. ¿Cuántos tatarabuelos tendrá una abeja macho? Si los tatarabuelos son los antepasados de la 4.ª generación, ¿cuántos antepasados tendrá en la 6.ª generación?**

M → madre
P → padre



La abeja macho tiene cinco tatarabuelos.

Ahora seguimos con dos generaciones más:



Hay 13 antepasados en la sexta generación.

PÁGINA 234

Resuelve cada uno de los siguientes enunciados de dos formas:

a) Realizando un diagrama en árbol o razonando como si lo realizaras.

b) Reconociendo el modelo de variaciones con repetición y aplicando la fórmula.

1 **¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con las cifras impares?**

a) Para cada cifra del número hay 5 posibilidades, las cinco cifras impares. Fijada la primera cifra, hay 5 posibles resultados para la segunda; fijadas las dos primeras, hay 5 resultados para la tercera, y así sucesivamente.

En total habrá $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ posibles números de cuatro cifras.

b) Disponemos de 5 cifras impares (1, 3, 5, 7, 9). Podemos repetirlos y el orden influye.

Son $VR_{5,4} = 5^4 = 625$ números de cuatro cifras.

2 **Lanzamos un dado 4 veces. Importa el orden en que salen los números. ¿Cuántos resultados distintos pueden darse?**

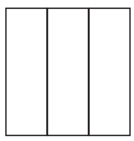
a) Hay 6 posibilidades en cada tirada, lo que significa que, fijado el primer lanzamiento, hay 6 posibilidades para el segundo, y así sucesivamente.

En total habrá $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,296$ resultados.

b) Hay 6 posibilidades en cada tirada. Puede repetirse el resultado e influye el orden. Hemos de hacer grupos de 4.

Son $VR_{6,4} = 6^4 = 1\,296$ resultados.

3 **Disponemos de 7 colores con los que hemos de pintar las tres franjas adjuntas. ¿Cuántas banderas salen?**



Notas: 1. Cada franja hay que llenarla con un solo color.

2. Dos o las tres franjas pueden ser del mismo color.

3. Dos banderas con los mismos colores colocados en distinto orden son distintas.

a) Para cada franja disponemos de 7 colores, es decir, fijado el color de la primera franja, hay 7 colores para la segunda y otros 7 para la tercera.

En total habrá $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ banderas.

b) Tenemos 7 elementos (los 7 colores) y hacemos grupos de tres elementos.

Influye el orden y podemos repetirlos, luego son $VR_{7,3}$.

Salen: $VR_{7,3} = 7^3 = 343$ banderas.

4 **¿Cuántas quinielas hemos de rellenar para acertar, con seguridad, los 15 resultados?**

a) Para acertar un partido hay 3 posibilidades (1, X o 2); a cada una de esas tres posibilidades le corresponden las tres que se necesitan para acertar otro partido, habrá pues 9 posibilidades; a cada una de estas 9 le corresponden otras tres y así sucesivamente.

Como hay 15 partidos, en total habrá que hacer:

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{15 \text{ veces}} = 3^{15} = 14\,348\,907 \text{ quinielas.}$$

b) Disponemos de tres elementos (1, X, 2) y hemos de hacer grupos de 15 elementos. Podemos repetirlos e influye el orden.

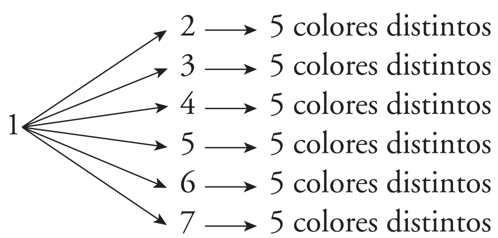
Son $VR_{3,15} = 3^{15} = 14\,348\,907$ quinielas.

PÁGINA 235

5 **Enuncia un problema similar al de las banderas de la página anterior que se resuelva mediante variaciones ordinarias y resuélvelo razonadamente (diagrama en árbol) y aplicando la fórmula.**

Disponemos de 7 colores y hemos de hacer banderas con tres franjas. ¿Cuántas banderas salen si no podemos repetir colores?

Enumerando los colores del 1 al 7:



Empezando por el 1 han salido $6 \cdot 5 = 30$ posibilidades distintas.

Como hay seis más, tendremos $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ posibles banderas.

Otra forma de resolverlo es por variaciones ordinarias:

Disponemos de 7 colores y tres franjas para pintar, pero no podemos repetir colores.

Con la fórmula: $V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ banderas distintas.

6 **En los ejercicios 4 al 20 del apartado anterior, identifica cuáles responden al modelo de variaciones con repetición, de variaciones ordinarias o de permutaciones, y resuélvelos mediante las fórmulas.**

4. No responde a ningún modelo.

5. Son 20 equipos y juegan de dos en dos, importando el orden. No pueden repetirse los equipos en cada partido: $V_{20,2} = 20 \cdot 19 = 380$ partidos.

6. No responde a ningún modelo.

7. Hay 3 colores y hacemos elecciones de 3 colores distintos: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas distintas.

   Hay 6 colores y hacemos elecciones de 3 colores distintos:

   $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas de pintar la diana.

8. No responde a ningún modelo.

9. Hay 10 libros y se eligen de dos en dos para dar los premios:

   $V_{10,\,2} = 10 \cdot 9 = 90$ formas distintas.

10. Hay 2 posiciones y hacemos agrupaciones de 6 en 6 y podemos repetir las posiciones de la ventana: $VR_{2,6} = 2^6 = 64$ posiciones distintas.

11. a) Hay dos elementos (·, –) y hacemos grupos de tres elementos y podemos repetirlos: $VR_{2,3} = 2^3 = 8$.

12. No responde a ningún modelo.

13. No responde a ningún modelo.

14. a) Hay tres posibilidades para cada uno de los dos equipos. Podemos repetir el resultado de cada equipo e influye el orden: $VR_{3,2} = 3^2 = 9$ resultados distintos.

15. No responde a ningún modelo.

16. No responde a ningún modelo.

17. Como A y E están fijas, disponemos de los tres chicos para colocarlos en tres lugares distintos.

    No podemos repetirlos y sí influye el orden: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ posibilidades distintas.

18. No responde a ningún modelo.

19. No responde a ningún modelo.

20. No responde a ningún modelo.

PÁGINA 236

1 **En un monte hay 7 puestos de vigilancia contra incendios y cada uno de ellos está unido a los demás por un camino. ¿Cuántos caminos habrá en total?**

De cada puesto salen 6 caminos. Como hay 7 puestos en total, habría $7 \cdot 6 = 42$ caminos, pero están contados dos veces (el camino A $\to$ B es el mismo que el camino B $\to$ A).

Entonces, el total de caminos será: $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ caminos.

2 **Vicente le quiere regalar a su amigo Carlos 3 discos, y los quiere elegir entre los 10 que más le gustan. ¿De cuántas formas puede hacerlo?**

Si influyera el orden en que él regala los tres discos, sería $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ formas. Como no influye el orden y hay $3 \cdot 2 = 6$ formas distintas de ordenar tres discos, tiene $\frac{720}{3 \cdot 2} = 120$ formas de regalarle los tres discos.

PÁGINA 237

3 **Los alumnos y las alumnas de 1.° H quieren elegir una comisión de tres de ellos. ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar con los 30 de la clase?**

Se hacen grupos de tres sin repetirse ninguno: $V_{30,3} = 30 \cdot 29 \cdot 28$

Como no influye el orden en cada grupo: $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4\,060$ comisiones distintas.

4 **¿De cuántas formas se pueden elegir dos cartas de una baraja española de 40 cartas?**

Hay 40 cartas tomadas de dos en dos, sin influir el orden de estos grupos:

$$\frac{40 \cdot 39}{3 \cdot 2} = 780 \text{ formas}$$

5 **Vas a preparar un batido de frutas de tres sabores. Tienes 6 clases de fruta que vas a utilizar en cantidades iguales. ¿Cuántos batidos diferentes podrás hacer?**

Tenemos 6 elementos y hacemos grupos de 3 elementos sin que influya el orden.

Podemos hacer: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ batidos diferentes.

6 **Recuerda que hay 5 poliedros regulares:**

— Tetraedro: 4 caras triangulares. En cada vértice concurren 3.

— Hexaedro o cubo: 6 caras cuadradas. En cada vértice concurren 3.

— Octaedro: 8 caras triangulares. En cada vértice concurren 4.

— Dodecaedro: ya lo hemos descrito más arriba.

— Icosaedro: 20 caras triangulares. En cada vértice concurren 5.

Con estos datos, cuenta el número de vértices y de aristas de cada uno de ellos y comprueba que, en todos los casos, se cumple la fórmula de Euler:

$$\mathbf{C + V = A + 2}$$

(n.° de caras + n.° de vértices = n.° de aristas + 2)

• Tetraedro:

$$\left.\begin{array}{l}\text{CARAS: } 4\\ \text{VÉRTICES: } \dfrac{3 \cdot 4}{3} = 4\\ \text{ARISTAS: } \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6\end{array}\right\}\ 4 + 4 = 6 + 2$$

• Hexaedro o cubo:

$$\left.\begin{array}{l}\text{CARAS: } 6\\ \text{VÉRTICES: } \dfrac{4 \cdot 6}{3} = 8\\ \text{ARISTAS: } \dfrac{4 \cdot 6}{2} = 12\end{array}\right\}\ 6 + 8 = 12 + 2$$

• Octaedro

$$\left.\begin{array}{l}\text{CARAS: } 8\\ \text{VÉRTICES: } \dfrac{8 \cdot 3}{4} = 6\\ \text{ARISTAS: } \dfrac{8 \cdot 3}{2} = 12\end{array}\right\}\ 8 + 6 = 12 + 2$$

• Dodecaedro:

$$\left.\begin{array}{l}\text{CARAS: } 12\\ \text{VÉRTICES: } \dfrac{12 \cdot 5}{3} = 20\\ \text{ARISTAS: } \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30\end{array}\right\}\ 12 + 20 = 30 + 2$$

• Icosaedro:

$$\left.\begin{array}{l}\text{CARAS: } 20\\ \text{VÉRTICES: } \dfrac{20 \cdot 3}{5} = 12\\ \text{ARISTAS: } \dfrac{20 \cdot 3}{2} = 30\end{array}\right\}\ 20 + 12 = 30 + 2$$

PÁGINA 238

1 **Tenemos 6 puntos en el espacio de tal modo que no hay tres alineados ni cuatro coplanarios. ¿Cuántas rectas podemos trazar uniendo dos de estos puntos? ¿Cuántos planos que se apoyen en tres de ellos?** (**ALINEADOS: Sobre la misma línea recta; COPLANARIOS: Sobre el mismo plano).**

Para trazar una recta se necesitan dos puntos:

NÚMERO DE RECTAS: $C_{6,2} = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ rectas.

Para definir un plano se necesitan tres puntos no alineados:

NÚMERO DE PLANOS: $C_{6,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ planos.

2 **¿Cuántas posibles mezclas de dos colores, en idénticas cantidades, se pueden hacer con 8 tarros de pintura de distintos colores? ¿Cuántas mezclas de tres colores? ¿Y de cuatro colores?**

No importa el orden en que se mezclen los colores:

DOS COLORES: $C_{8,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ mezclas.

TRES COLORES: $C_{8,3} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ mezclas.

CUATRO COLORES: $C_{8,4} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ mezclas.

PÁGINA 239

1 **Extraemos tres cartas de una barja de 40. Calcula la probabilidad de que sean oros.**

Extraer 3 OROS de un total de 10: C_{10}^{3}

Extraer 3 cartas de un total de 40: C_{40}^{3}

Por tanto:

$$P[3 \text{ OROS}] = \frac{C_{10}^{3}}{C_{40}^{3}} = \frac{\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\dfrac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{40 \cdot 39 \cdot 38} = \frac{3}{247}$$

2 **Extraemos cuatro cartas de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de que sean bastos o espadas?**

Extraer 4 BASTOS o ESPADAS de un total de 20: C_{20}^{4}

Extraer 4 cartas de 40: C_{40}^{4}

Así:

$$P[4\ \text{BASTOS o ESPADAS}] = \frac{C_{20}^4}{C_{40}^4} = \frac{\dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\dfrac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37} = \frac{51}{962}$$

3 **Tiramos 3 dados. Calcula la probabilidad de que el valor mediano sea "2".**

Casos posibles al tirar 3 dados:

$$VR_6^3 = 6^3 = 216$$

Casos favorables a "el 2 es el valor mediano":

- $a\ 2\ b \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 3, 4, 5 \text{ ó } 6 \end{array}\right\}$ 4 casos

  Como 124 podría ser 412, o cualquier otra permutación, cada caso anterior admite $P_3 = 6$ ordenaciones distintas; es decir:

  $$4 \cdot 6 = \mathbf{24\ casos}$$

- $2\ 2\ b \rightarrow$ Hay 4 posibilidades con 3 ordenaciones cada una, es decir:

  $$4 \cdot 3 = \mathbf{12\ casos}$$

- $a\ 2\ 2 \rightarrow$ Hay 1 posibilidad con 3 ordenaciones, es decir:

  $$1 \cdot 3 = \mathbf{3\ casos}$$

- $2\ 2\ 2 \rightarrow$ **1 caso**

Por tanto, 24 + 12 + 3 + 1 = 40 casos favorables.

Así:

$$P[\text{valor mediano } 2] = \frac{40}{216} = \frac{5}{27}$$

4 **Tiramos 3 dados. Calcula la probabilidad de que el valor mediano sea "4". ¿Por qué es igual que para "3"?**

Podemos darnos cuenta, observando cómo se ha solucionado el ejercicio resuelto 2 de la página 239, que el caso del "valor mediano 3" es simétrico al del "valor mediano 4", porque uno tiene dos valores menores (el 1 y el 2) y tres mayores (el 4, 5 y 6), y el otro tiene tres valores menores (el 1, 2 y 3) y dos mayores (el 5 y el 6).

Por tanto, la probabilidad de que el valor mediano sea 4 es de $\frac{52}{216}$.

11 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 240

PRACTICA

Formar agrupaciones

1 □□□ a) En una urna hay una bola blanca, una roja y una negra. Las extraemos de una en una y anotamos ordenadamente los resultados. Escribe todos los posibles resultados que podemos obtener.

b) Haz lo mismo para cuatro bolas distintas.

c) Lo mismo para ROJA, ROJA, BLANCA, NEGRA.

d) Lo mismo para ROJA, ROJA, NEGRA, NEGRA.

a) Llamando B $\to$ extracción de bola blanca

R $\to$ extracción de bola roja

N $\to$ extracción de bola negra

1ª EXTRACCIÓN	2ª EXTRACCIÓN	3ª EXTRACCIÓN	RESULTADO
B	R	N	BRN
	N	R	BNR
R	B	N	RBN
	N	B	RNB
N	B	R	NBR
	R	B	NRB

Tenemos 6 posibles resultados.

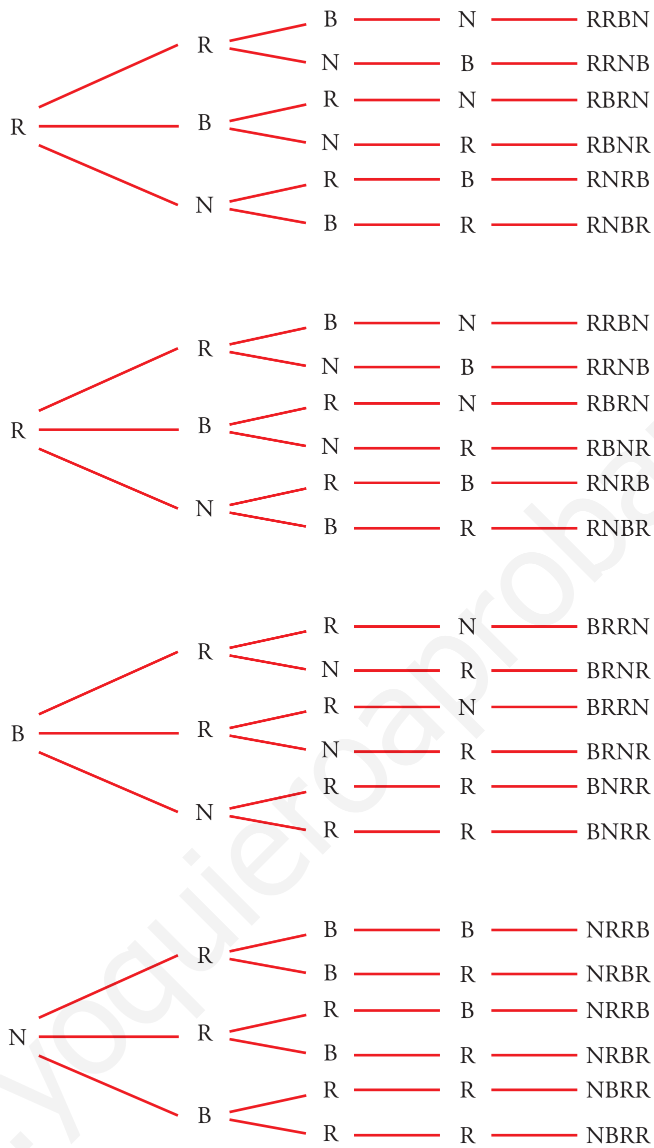
b) Añadimos, por ejemplo, una bola azul (A).

B	R	N	A	BRNA
		A	N	BRAN
	N	R	A	BNRA
		A	R	BNAR
	A	R	N	BARN
		N	R	BANR

Hacemos lo mismo empezando con R, con N y con A.

Al final tenemos $6 \cdot 4 = 24$ resultados posibles.

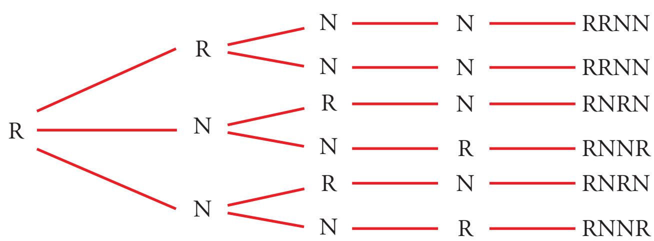
c)



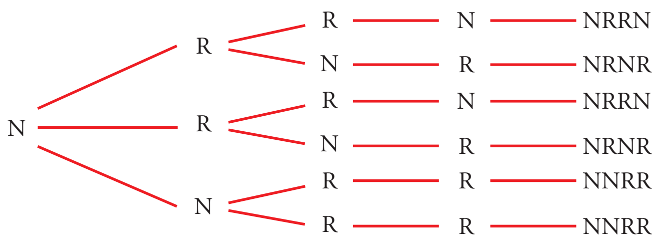
Como hay dos bolas del mismo color, ahora tenemos menos resultados que en el apartado b). En concreto:

$$6 + 3 + 3 = 12 \text{ resultados}$$

d)



Para la segunda roja, igual.

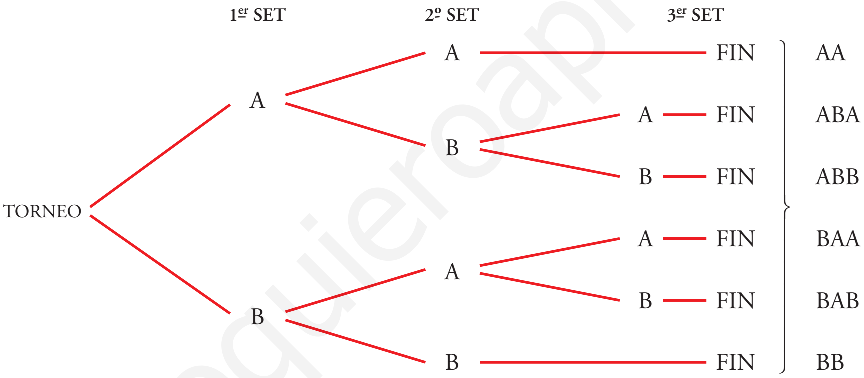


Ahora solo tenemos:

$$3 + 3 = 6 \text{ resultados}$$

2 **Dos amigos juegan al tenis y acuerdan que será vencedor el primero que logre ganar dos sets. Escribe todas las formas en que puede desarrollarse el partido.**

Hacemos un diagrama de árbol. En cada ramificación indicamos quién gana un set, el jugador A o el jugador B.

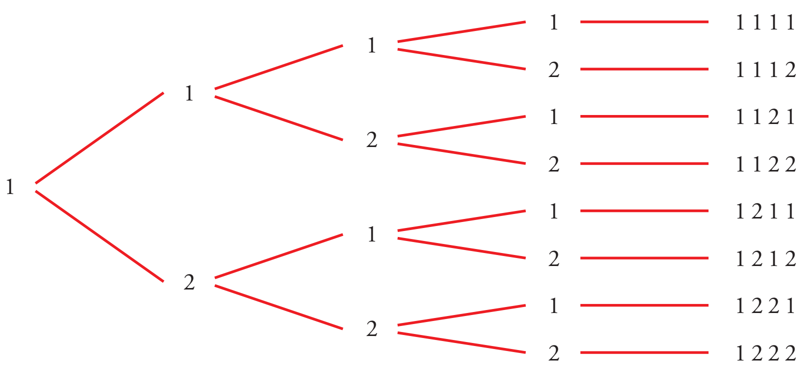


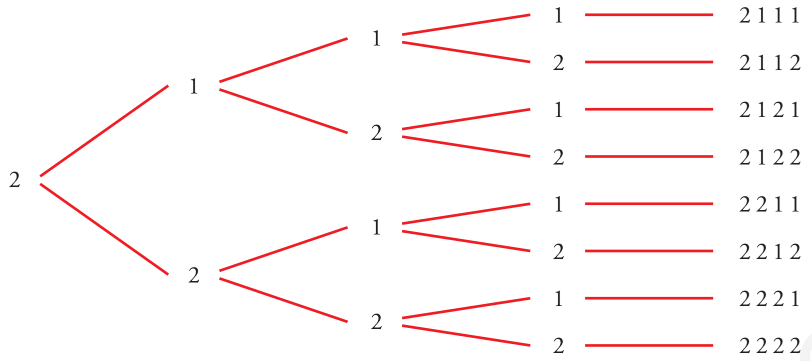
Hay 6 posibles desarrollos del torneo.

3 **a) Forma todos los números de cuatro cifras que se puedan hacer con los dígitos 1 y 2. ¿Cuántos son?**

b) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden hacer con los dígitos 0 y 1? Ten en cuenta que 01101 = 1 101 no es un número de cinco cifras.

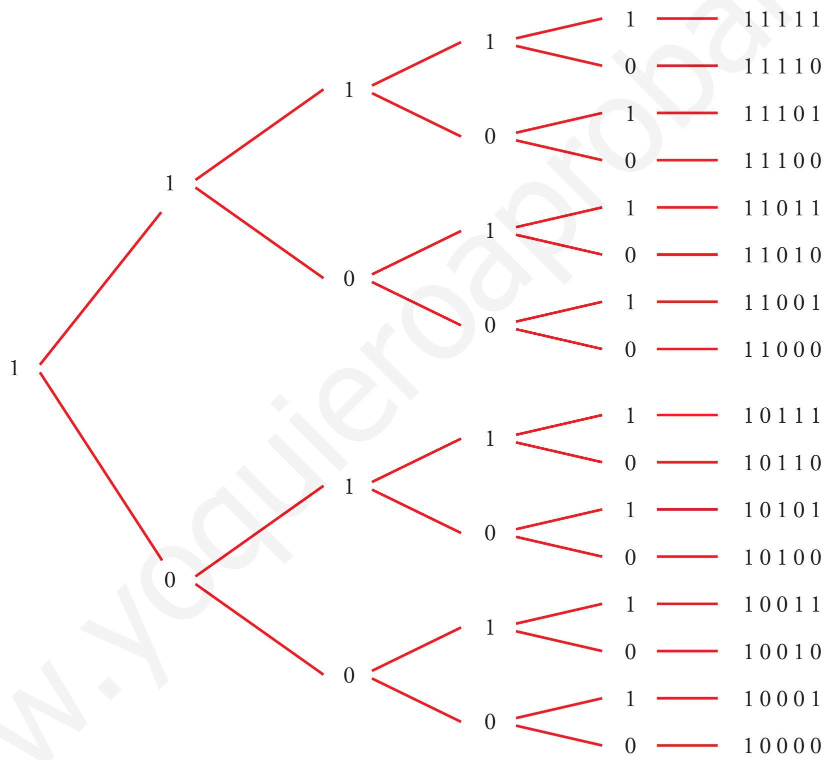
a) Hacemos un diagrama de árbol:





En total hay 16 números de cuatro cifras con los dígitos 1 y 2.

b)



Hay 16 números de 5 cifras compuestos solo por 0 y 1.

4 **Si queremos hacer lápices bicolores de doble punta y disponemos de los colores rojo, azul, negro, verde y amarillo, ¿cuántos modelos se pueden formar? Escríbelos todos.**

Llamamos: R - ROJO; A - AZUL; N - NEGRO, V - VERDE; M - AMARILLO

El lápiz bicolor de punta RA, por ejemplo, es el mismo que el de punta AR.

Los modelos de lápices bicolor son:

RA	AN	NV	VM
RN	AV	NM	
RV	AM		
RM			

En total hay 10 modelos.

5 ■□□ **¿Qué números de dos cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5?**

Los números son:

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

6 ■□□ **Queremos construir un dominó con los números 1, 2, 3, 4 y 5. Describe sus fichas.**

Cada ficha tiene dos números que podemos repetir, pero el orden no influye:

1 1	2 2	3 3	4 4	5 5	
1 2	2 3	3 4	4 5		
1 3	2 4	3 5			5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 fichas
1 4	2 5				
1 5					

7 ■□□ **Describe todos los partidos que han de jugarse en una liguilla con cinco equipos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*.**

Suponemos que juegan a una sola vuelta.

Los partidos serán:

A-B	A-C	A-D	A-E	
B-C	B-D	B-E		10 partidos
C-D	C-E			
D-E				

Si la liguilla fuera a ida y vuelta, el número de partidos sería 20.

8 ■□□ **Si tienes tres pantalones (AZUL, NEGRO, BLANCO) y cuatro camisetas (AZUL, ROJA, VERDE, BLANCA), describe todas las indumentarias que puedes vestir sin que coincidan el color de las dos prendas.**

Llamamos A, N y B a los pantalones, y A, R, V y B a las camisetas. Las posibles combinaciones son:

AA	AR	AV	AB	
NA	NR	NV	NB	Te puedes vestir de 12 formas diferentes.
BA	BR	BV	BB	

Utilizar las fórmulas

9 **Calcula:**

a) $VR_{4,\,3}$ **b)** $VR_{3,\,4}$ **c)** $V_{7,\,3}$ **d)** P_7

e) $C_{6,\,4}$ **f)** $V_{9,\,5}$ **g)** $\dfrac{P_{10}}{P_8}$ **h)** $C_{10,\,8}$

a) $VR_{4,3} = 4^3 = 64$

b) $VR_{3,4} = 3^4 = 81$

c) $V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

d) $P_7 = 7! = 5\,040$

e) $C_{6,4} = \dfrac{V_{6,4}}{P_4} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$

f) $V_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$

g) $\dfrac{P_{10}}{P_8} = \dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90$

h) $C_{10,8} = \dfrac{V_{10,8}}{P_8} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{90}{2} = 45$

10 **Calcula:**

a) $V_{5,\,2} - C_{5,\,3}$ **b)** $\dfrac{VR_{6,\,2}}{C_{4,\,2}}$ **c)** $\dfrac{P_4}{V_{4,\,3}}$

d) $\dfrac{P_5}{P_3}$ **e)** $\dfrac{P_{10}}{P_9}$ **f)** $\dfrac{P_{12}}{P_9}$

a) $V_{5,2} - C_{5,3} = 5 \cdot 4 - \dfrac{V_{5,3}}{P_3} = 20 - \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 - 10 = 10$

b) $\dfrac{VR_{6,2}}{C_{4,2}} = \dfrac{6^2}{\dfrac{V_{4,2}}{P_2}} = \dfrac{36}{\dfrac{12}{2}} = \dfrac{36}{6} = 6$

c) $\dfrac{P_4}{V_{4,3}} = \dfrac{4!}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1$

d) $\dfrac{P_5}{P_3} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$

e) $\dfrac{P_{10}}{P_9} = \dfrac{10!}{9!} = 10$

f) $\dfrac{P_{12}}{P_9} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 1\,320$

11 □□□ **Las expresiones $VR_{8,2}$; P_8; $V_{8,2}$; $C_{8,2}$ son las soluciones de los siguientes apartados a), b), c), d), pero no en ese orden. Asigna a cada apartado su solución:**

a) Palabras de ocho letras, con o sin sentido, que se pueden hacer con las letras de PELÍCANO.

b) Posibles parejas que se pueden formar para jugar un torneo de ajedrez entre 8 personas.

c) Números de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

d) Posibles formas de dar el primer y segundo premios de un concurso literario en el que participan 8 personas.

a) P_5 b) $C_{8,2}$ c) $VR_{4,2}$ d) $V_{8,2}$

12 □□□ **Ocho problemas muy parecidos. En cada uno de los siguientes problemas la pregunta es: *¿De cuántas formas se puede hacer?***

a) 3 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 6 clases de polos.

b) 6 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 3 clases de polos.

c) Repartir 3 polos distintos entre 6 chicos.

d) Repartir 3 polos iguales entre 6 chicos.

e) Un chico escoge 3 polos entre 6 distintos.

f) Un chico escoge 3 polos entre 6 iguales.

g) Repartir 6 polos distintos entre 6 chicos.

h) Repartir 3 polos de fresa y 3 de vainilla entre 6 chicos.

Sus soluciones son: C_6^3, P_6, VR_6^3, 1, VR_3^6, V_6^3. Están dadas en otro orden y se pueden repetir.

a) $VR_6^3 = 6^3 = 216$ formas.

b) $VR_3^6 = 3^6 = 729$ formas.

c) $V_6^3 = 120$ formas.

d) $C_6^3 = 120$ formas.

e) $V_6^3 = 120$ formas.

f) 1 forma.

g) $P_6 = 720$ formas.

h) $C_6^3 = 20$ formas.

13 ■■□ **¿De cuántas formas pueden repartirse 3 entradas para un concierto de rock entre 6 amigos y amigas sin que ninguno pueda llevarse más de una?**

Hay $V_6^3 = 120$ formas de repartirse las entradas.

PÁGINA 241

14 ■■□ **Para formar un equipo de baloncesto hacen falta 5 jugadores y el entrenador dispone de 10.**

a) ¿Cuántos equipos distintos puede formar?

b) Si elige a dos jugadores y los mantiene fijos, ¿cuántos equipos distintos podrá hacer con los ocho que le quedan?

a) Con 10 jugadores se quieren formar equipos de 5.

El orden no influye y no se pueden repetir.

$$C_{10,5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252 \text{ equipos distintos}$$

b) Si el entrenador decide mantener dos jugadores fijos, habrá:

$$C_{8,3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ equipos distintos}$$

15 ■■□ **Se van a celebrar elecciones en la Asociación de Padres y hay que elegir al presidente, al secretario y al tesorero. ¿De cuántas maneras se pueden elegir estos tres cargos, si se presentan ocho candidatos?**

No se pueden repetir y, además, influye el orden porque no es lo mismo ser presidente, que secretario, que tesorero.

Son variaciones ordinarias: $V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ formas distintas.

16 ■■□ **Se van a repartir tres regalos entre seis personas. Calcula de cuántas formas se pueden repartir en cada uno de los siguientes casos:**

a) Los regalos son distintos (una bicicleta, unos patines y un chándal) y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

b) Los regalos son iguales y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

c) Los regalos son distintos y puede tocarle más de uno a la misma persona.

a) No se pueden repetir los regalos y sí influye el orden porque no es lo mismo que toque una bicicleta, que unos patines, que un chándal.

Son variaciones ordinarias $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas

b) Ahora el orden no influye: $C_{6,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ formas.

c) Pueden repetirse e influye el orden: $VR_{6,3} = 6^3 = 216$ formas.

17 **Los participantes de un concurso tienen que ordenar a ciegas seis tarjetas en las que está escrita cada una de las letras de la palabra PREMIO.**

a) ¿Cuántas ordenaciones distintas pueden salir?

b) Les ofrecen fijar la P en el lugar que le corresponde y reducir el premio a la mitad. ¿Cuántas ordenaciones posibles se pueden obtener de esta forma?

a) Disponemos de las 6 letras de la palabra PREMIO para agruparlas; ninguna letra está repetida y el orden influye.

$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ ordenaciones distintas.

b) Como P está fija, ahora se disponen de 5 letras:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ordenaciones distintas.

18 **¿De cuántas formas pueden sentarse tres personas en un banco de 5 asientos? ¿Y si el banco es de 3 asientos?**

No se pueden repetir y el orden influye:

Si el banco es de 5 asientos: $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas.

Si el banco es de 3 asientos: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas.

19 **Estás haciendo la maleta para irte de vacaciones y quieres llevarte cuatro de las ocho camisetas que tienes.**

¿De cuántas formas las puedes seleccionar?

No puedes repetirlas y no influye el orden:

$$C_{8,4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \text{ formas distintas.}$$

20 **El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencias de dígitos formados por ceros y unos. Un *byte* es una de estas secuencias y está formado por 8 dígitos.**

Por ejemplo: $\boxed{0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1}$

¿Cuántos *bytes* diferentes se pueden formar?

Disponemos de dos elementos y los agrupamos de 8 en 8:

$VR_{2,8} = 2^8 = 256$ bytes diferentes se pueden formar.

21 **Las 28 fichas de un dominó se reparten entre cuatro jugadores. ¿Cuántos juegos distintos podrá tener cada jugador?**

Se reparten 7 fichas a cada uno. No se pueden repetir y no influye el orden:

$$C_{28,7} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,184\,040$$

22 **a) ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra PALOTE?**

b) ¿Cuántas empiezan por P?

c) ¿En cuántas de ellas ocupan las consonantes los lugares impares y las vocales los pares? (Por ejemplo: PATELO).

d) ¿En cuántas están alternadas vocales y consonantes?

Las letras son distintas y el orden influye:

a) $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas.

b) Si empiezan por P, ahora disponemos de 5 letras y 5 lugares:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas.

c) Si las consonantes están en los lugares impares: $P_3 = 3 \cdot 2 = 6$ formas.

Las vocales están en los lugares pares: $P_3 = 3 \cdot 2 = 6$ formas.

Por cada forma de las consonantes hay 6 formas de las vocales.

En total hay: $6 \cdot 6 = 36$ formas.

d) Hay 72 formas, porque puede ser

C V C V C V (apartado c))

V C V C V C $\rightarrow$ otras 36 formas.

23 **Seis amigos, 3 chicos y 3 chicas, van al cine. ¿De cuántas formas pueden sentarse si quieren estar alternados?**

Este problema es idéntico al apartado d) del problema 22. Por tanto, tienen 72 formas distintas de sentarse.

24 **Señala 8 puntos en una circunferencia. Traza las cuerdas que unen cada punto con todos los demás.**

a) ¿Cuántas cuerdas tendrás que dibujar?

b) ¿Cuántas diagonales tiene un octógono?

a) Tomamos los puntos de dos en dos.

No se pueden repetir y no influye el orden: $C_{8,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ cuerdas

b) $C_{16,2} = \dfrac{16 \cdot 15}{2 \cdot 1} = 120$ cuerdas

25 **En unos almacenes emplean el siguiente código para marcar los artículos:**

- **La primera cifra indica la sección correspondiente y es un número entre el 1 y el 9.**
- **Después, hay tres cifras, cada una de ellas del 0 al 9, que corresponden al número del proveedor.**

¿Cuántas marcas distintas se pueden hacer?

Por cada cifra correspondiente a la sección habrá $VR_{10,3} = 1\,000$ marcas distintas.

Como hay 9 cifras correspondientes a la sección, en total se podrán hacer $9 \cdot 1\,000 = 9\,000$ marcas distintas.

26 **Para matricularte en un curso, tienes que elegir dos asignaturas entre las siguientes:**

Música	**Tecnología**
Teatro	**Dibujo**
Informática	**Periodismo**

a) ¿De cuántas formas puedes hacer la elección?

b) Si en secretaría te advierten de que las seis asignaturas las escribas por orden de preferencia, ¿de cuántas formas las puedes escribir?

a) No influye el orden y no podemos repetirlas:

$C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ formas distintas

b) $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas diferentes

27 **El profesor de Matemáticas nos ha propuesto diez problemas de los que tenemos que resolver cinco.**

a) ¿Cuántas formas hay de seleccionarlos?

b) De los 10 problemas propuestos hay 2 de los que no tienes "ni idea". ¿Se reducen mucho las posibilidades de selección?

a) No podemos repetirlos y no influye el orden:

$C_{10,5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$ formas

b) En lugar de elegir entre 10, ahora elegimos entre 8:

$C_{8,5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ formas

Se reduce mucho la selección, aproximadamente en un 77,8%.

PÁGINA 242

28 **¿Cuántos grupos de 4 cartas distintas se pueden hacer con una baraja española? ¿Cuántos de ellos están formados por 4 FIGURAS? ¿En cuántos serán OROS las 4 cartas?**

La baraja tiene 40 cartas. Se hacen grupos de 4 cartas donde no se pueden repetir y no influye el orden:

$C_{40,4} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 91\,390$ grupos.

Hay 16 figuras:

$C_{16,4} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,820$ grupos están formados solo por figuras.

Hay 10 oros: $C_{10,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ grupos serán solo de oros.

29 ■■□ **Como sabes, una quiniela consta de 14 partidos, en cada uno de los cuales se puede poner 1, X o 2.**

¿Cuántas quinielas distintas se pueden rellenar?

Al hacer una quiniela es importante el orden y podemos repetir resultados. Por tanto:

$VR_{3,14} = 3^{14} = 478\,969$ quinielas distintas.

30 ■■□ **Las matrículas de los automóviles de cierto país llevan cuatro números y tres letras.**

Para ello, se utilizan los dígitos del 0 al 9 y 26 letras de nuestro alfabeto. ¿Cuántas matrículas pueden hacerse de esta forma?

- Con 10 dígitos, agrupados de 4 en 4, y teniendo en cuenta que se pueden repetir y que el orden influye, se pueden formar $VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000$ agrupaciones distintas.
- Con 26 letras, formando grupos de 3 y considerando que el orden influye y que las letras se pueden repetir, habrá:

  $VR_{26,3} = 26^3 = 17\,576$ grupos distintos

Por cada grupo de 4 dígitos habrá 17 576 formas de agrupar las letras.

En total habrá: $VR_{10,4} \cdot VR_{26,3} = 175\,760\,000$ matrículas.

31 ■■□ **Me van a regalar 3 libros y 2 discos por mi cumpleaños.**

He hecho una lista con los que me gustaría tener, y en ella anoté 5 libros y 8 discos.

¿De cuántas formas distintas pueden elegir mi regalo?

El número de formas que hay de elegir los tres libros de entre 5 es:

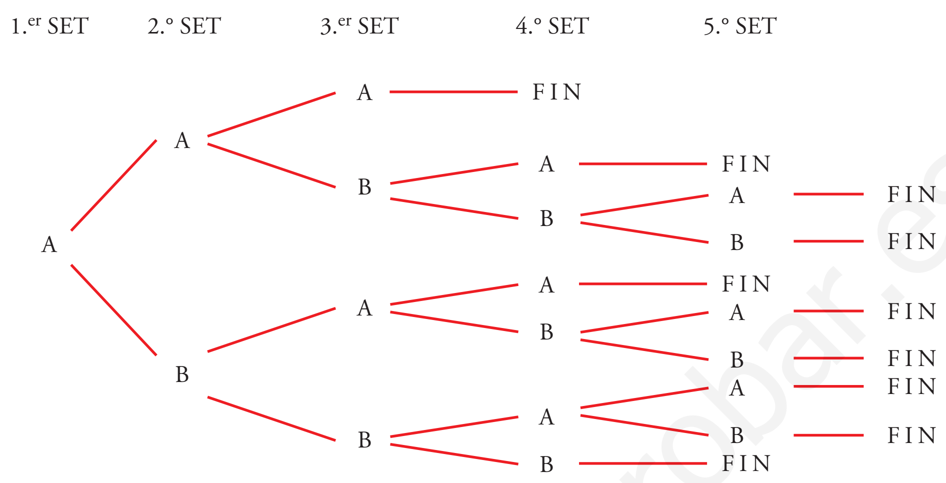
$$C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ formas}$$

El número de formas que hay de elegir los dos discos de entre 8 es:

$$C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ formas}$$

Para cada una de las formas que hay de elegir los tres libros tenemos 28 formas de elegir los discos, luego en total hay $28 \cdot 10 = 280$ formas de elegir los tres libros y los dos discos.

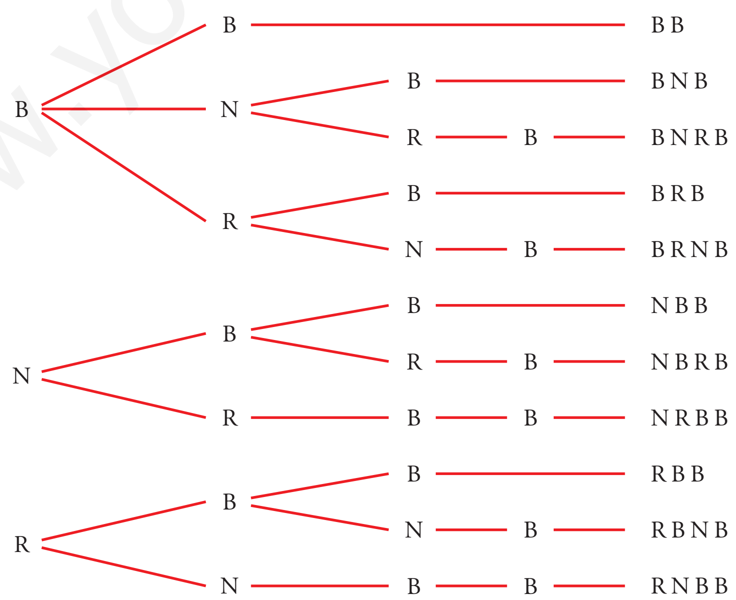
32 **Dos amigos se enfrentan en un torneo de tenis, en el que será vecedor el primero que logre ganar tres sets. ¿De cuántas formas posibles puede desarrollarse el encuentro?**



Si el primer set lo gana el jugador B, tenemos un esquema análogo. Por tanto, hay 20 maneras distintas de acabar un partido.

33 **En una urna hay dos bolas blancas, una negra y una roja. Extraemos sucesivamente una bola cada vez y paramos cuando tengamos las dos blancas. ¿Cuáles son los posibles resultados?**

Anotamos en un diagrama de árbol la bola que se saca en cada extracción: blanca (B), negra (N), roja (R)

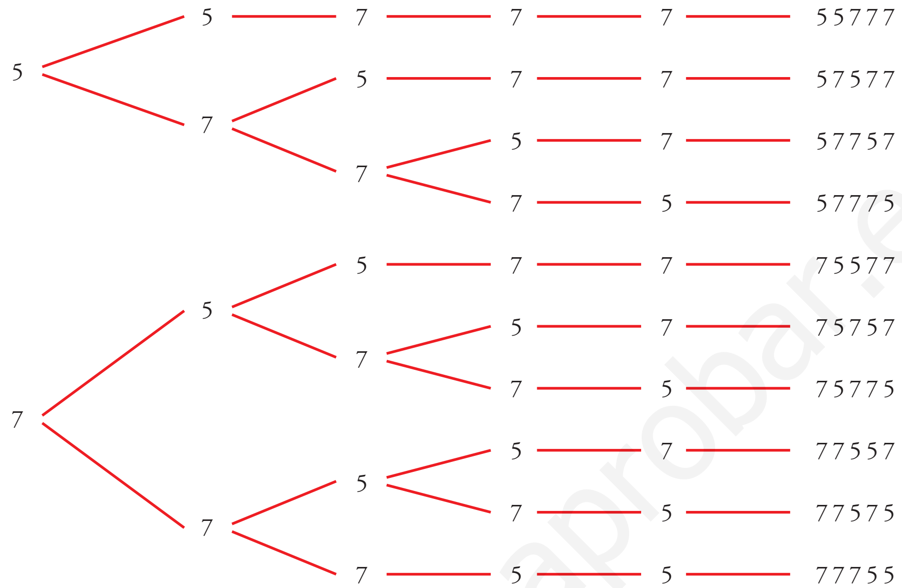


En total hay 11 posibles resultados.

11 Soluciones a los ejercicios y problemas

34 **El número 75775 está formado por dos cincos y tres sietes. ¿Cuáles son los números que podemos formar con dos cincos y tres sietes?**

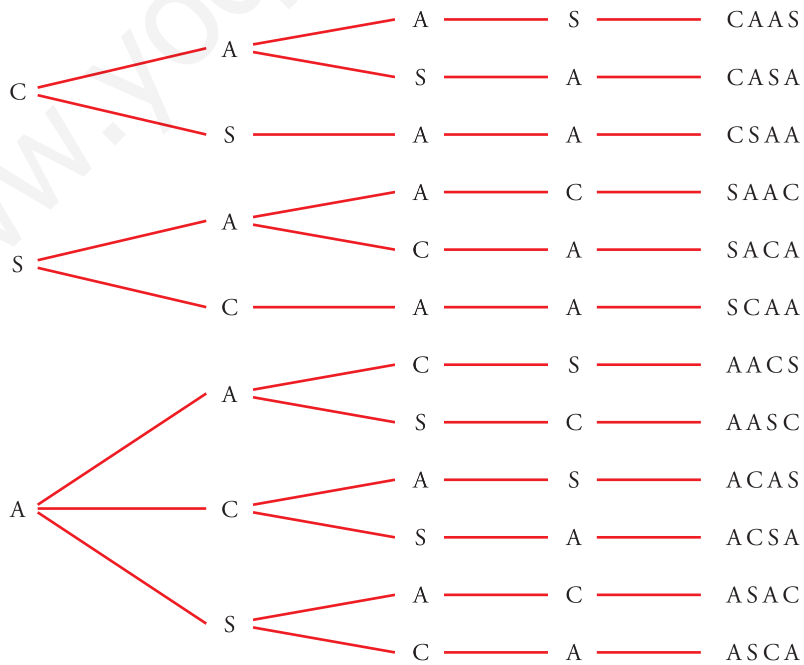
Anotamos, en un diagrama de árbol, las posibilidades de cada cifra del número:



En total hay 10 números formados por dos cincos y tres sietes.

35 **Con las letras de la palabra CASA, ¿cuántas ordenaciones, con o sin sentido, podemos formar? Escríbelas todas.**

Anotamos en un diagrama de árbol las posibilidades de cada letra de la palabra:



En total, podemos formar 12 ordenaciones.

PROFUNDIZA

36 **Tenemos 5 pesas de 1 g, 2 g, 4 g, 8 g y 16 g. ¿Cuántas pesadas diferentes se pueden hacer tomando dos de ellas? ¿Y con tres?**

Calcula cuántas pesadas se pueden hacer, en total, tomando 1, 2, 3, 4 o las 5 pesas.

No influye el orden y no se pueden repetir:

$C_{5,2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ pesadas.

$C_{5,3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ pesadas también.

Tomando 1 pesa = 5 pesadas.

Tomando 2 pesas: $C_{5,2} = 10$ pesadas.

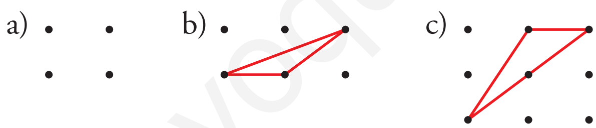
Tomando 3 pesas: $C_{5,3} = 10$ pesadas.

Tomando 4 pesas: $C_{5,4} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$ pesadas.

Tomando 5 pesas: 1 pesada

En total se podrán hacer: 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31 pesadas

37 **¿Cuántos triángulos se pueden hacer de modo que tengan los vértices en los puntos de estas redes?**



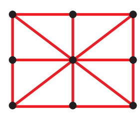
a)  $C_{4,3} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$ triángulos

b)  $C_{6,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

Necesitamos tres puntos no alineados para construir un triángulo.

En dos de los 20 casos los puntos están alineados, es decir, se pueden construir 20 – 2 = 18 triángulos.

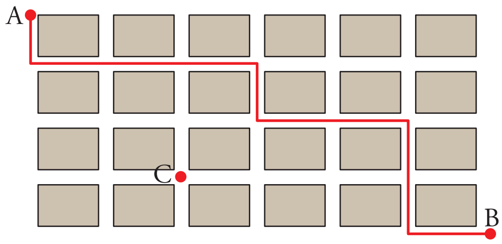
c)  $C_{9,3} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$



En este caso nos encontramos con 8 casos que no son posibles.

En total podemos construir 84 – 8 = 76 triángulos.

38 □□□ **Esta cuadrícula representa el plano de un barrio de una ciudad.**



a) ¿Cuántos caminos de longitud mínima hay para ir de A a C?

b) ¿Cuántos caminos hay para ir de C a B?

c) ¿Cuántos caminos hay para ir de A a B, pasando por C?

d) ¿Cuántos caminos hay para ir de A a B?

a) Para ir de A a C solo puede irse dos veces a la derecha (D) y tres veces hacia abajo (I). Los caminos serán de la forma DDIID, por ejemplo. Se trata de colocar dos I en cinco lugares. Es decir:

$$C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ caminos}$$

b) Análogamente, hay:

$$C_{5,1} = \frac{5}{1} = 5 \text{ caminos}$$

c) Para ir de A a C, pasando por B, hay $10 \cdot 5 = 50$ caminos.

d) Para ir de A a B hay:

$$C_{10,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ caminos}$$

39 □□□ **En una pizzería preparan pizzas con, al menos, 4 ingredientes. Si disponen de 6 tipos de ingredientes, ¿cuántos tipos de pizza se pueden preparar? (Ten en cuenta que las pueden hacer de 4, 5 ó 6 ingredientes).**

Con 4 ingredientes: $C_{6,4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$ tipos

Con 5 ingredientes: $C_{6,5} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$ tipos

Con 6 ingredientes: $C_{6,6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$ tipo

En total se pueden hacer $15 + 6 + 1 = 22$ tipos de pizzas.

40 ■■■ **Un secretario ha escrito cinco cartas distintas dirigidas a cinco personas. También escribe los cinco sobres correspondientes y mete al azar cada carta en un sobre.**

a) ¿De cuántas formas posibles se pueden meter las cartas en los sobres?

b) ¿En cuántos casos la carta del señor Pérez estará dentro de su sobre?

a) No puede repetirlas y sí influye el orden:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas posibles

b) Si fijamos la carta del señor Pérez en el sobre del señor Pérez, nos quedan libres cuatro cartas y cuatro sobres:

$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ casos habrá en que la carta del señor Pérez estará dentro del sobre del señor Pérez.

41 ■■■ **Calcula cuántos productos de tres factores distintos podemos formar con estas cifras:**

1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7

No influye el orden $(3 \cdot 4 = 4 \cdot 3)$ y no podemos repetirlos:

$C_{7,3} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ productos.

PÁGINA 243

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

42 ■■□ **En una bolsa tenemos 4 bolas rojas, 5 verdes y 1 azul. Extraemos 3 bolas. Calcula la probabilidad de que:**

a) Las tres sean rojas.

b) Las tres sean verdes.

c) Cada una de las tres sea roja o verde.

d) Una de las tres sea azul.

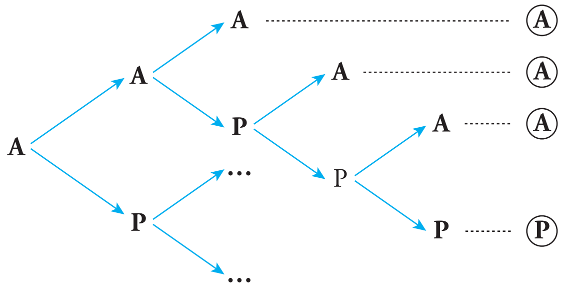
a) $P[3 \text{ ROJAS}] = P[\text{ROJA}] \cdot P[\text{ROJA}] \cdot P[\text{ROJA}] = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{2}{8} = \dfrac{3}{90} = \dfrac{1}{30}$

b) $P[3 \text{ VERDES}] = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{12}$

c) $P[\text{ROJAS o VERDES}] = \dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{8}{9} \cdot \dfrac{7}{8} = \dfrac{7}{10}$

d) $P[\text{una AZUL}] = P[1.^{a} \text{ AZUL}] + P[2.^{a} \text{ AZUL}] + P[3.^{a} \text{ AZUL}] = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{10}$

43 **Andrés y Pablo están jugando al tenis. Ambos son igual de buenos. El partido es a cinco sets y el primero lo ha ganado Andrés. ¿Cuál es la probabilidad de que acabe ganando Pablo?**



Completa el diagrama y utilízalo para resolver el problema.

Si Andrés gana el primer set, se pueden dar estos resultados:

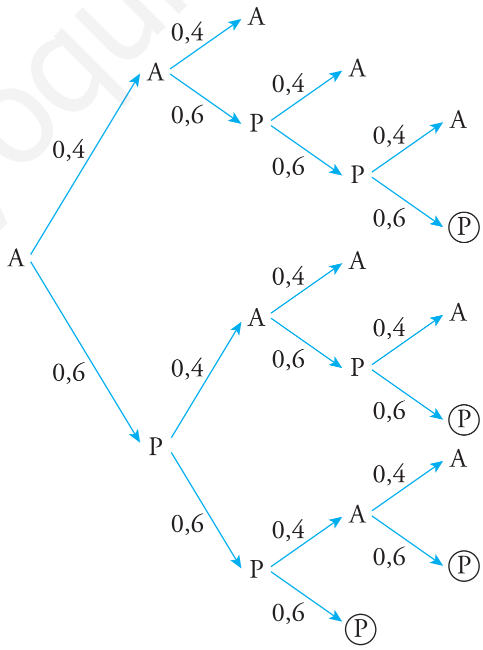
A A A A A P A A A P P A **A A P P P**

A P A A A P A P A **A P A P P**

A P P A A **A P P A P** **A P P P**

Por tanto, $P[\text{gane Pablo}] = \dfrac{4}{10}$

44 **Repite el problema anterior suponiendo que en cada set, la probabilidad de que lo gane Pablo es 0,6.**



$$
\begin{aligned}
P[\text{gane Pablo}] &= 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6\ + \\
&+ 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6\ + \\
&+ 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6\ + \\
&+ 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}4752
\end{aligned}
$$

45 Cinco amigos y amigas van juntos al cine y se reparten los asientos (consecutivos) al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que Alberto quede junto a Julia?

Hay $P_5 = 5! = 120$ formas en que pueden sentarse los cinco amigos en el cine. De ellas, hay 8 en las que Julia se sentará al lado de Alberto.

Por tanto, la probabilidad pedida es $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$.

46 Tiramos tres dados. Calcula estas probabilidades:

a) El valor mediano es 6.

b) La suma es 10.

c) El menor es 2.

d) La diferencia entre el mayor y el menor es 2.

a) Eso significa que los tres son 6.

$P[\text{valor mediano } 6] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

b) Para que los tres dados sumen 10, debe darse alguna de estas combinaciones:

$$\left.\begin{matrix}(1\ 3\ 6)\\(1\ 4\ 5)\\(2\ 2\ 6)\\(2\ 3\ 5)\\(2\ 4\ 4)\\(3\ 3\ 4)\end{matrix}\right\}\ \text{6 posibilidades}$$

Por tanto:

$P[\text{sumen } 10] = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

c) $P[\text{menor es } 2] = P[\text{no sale ningún 1 y por lo menos un 2}] = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

d) • Si el menor es 1 $\rightarrow$ (1 1 3)
(1 2 3)
(1 3 3)

• Si el menor es 2 $\rightarrow$ (2 2 4)
(2 3 4)
(2 4 4)

• Si el menor es 3 $\rightarrow$ (3 3 5)
(3 4 5)
(3 5 5)

• Si el menor es 4 $\rightarrow$ (4 4 6)
(4 5 6)
(4 6 6)

Por tanto, $P[\text{diferencia de } 2] = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$

47 ■■□ **Si juegas un boleto de la Lotería Primitiva, ¿qué probabilidad tienes de ganar el primer premio? (En un boleto se marcan 6 números entre el 1 y el 49).**

En la Primitiva se pueden rellenar $C_{49,6} = 13\,983\,816$ boletos distintos, de los que solo gana el premio máximo uno. Así:

$$P[\text{ganar}] = \frac{1}{13\,983\,816}$$

48 ■■□ **¿Cuántas quinielas hay que hacer para asegurarse ocho resultados? Una persona que siga esa estrategia y rellena los restantes al azar, ¿qué probabilidad tiene de acertar los 14?**

a) Para asegurar 8, hay que hacer $VR_3^8 = 3^8 = 6\,561$ quinielas distintas.

b) Como quedan 6 casillas por rellenar, la probabilidad de acertar las 6 restantes será:

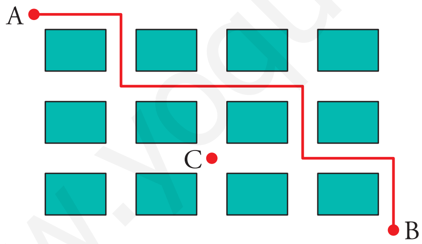
$$P[\text{acertar } 14] = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$$

49 ■■■ **Una oposición consta de 50 temas. Salen 3 de ellos al azar y se debe elegir uno de ellos. Un opositor sabe 30. ¿Cuál es la probabailidad de que salga uno de los que sabe?**

☞ ***Acaso te convenga calcular la probabilidad de que no salga ninguno que se sepa.***

$$P[\text{sabe}] = 1 - P[\text{no sabe}] = 1 - \frac{20}{50} \cdot \frac{19}{49} \cdot \frac{18}{48} = 1 - \frac{6\,840}{117\,600} = \frac{923}{980} = 0{,}94$$

50 ■■■



Para ir de A a B, hay que dar 7 pasos en cada uno de los cuales se puede escoger → o ↓. Por ejemplo, el recorrido marcado en rojo se puede describir así:

$$\rightarrow\ \downarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \downarrow\ \rightarrow\ \downarrow$$

Cada recorrido es una combinación de cuatro pasos así → y tres pasos así ↓. El número total de caminos es C_7^3.

a) ¿Cuántos posibles caminos hay para ir de A a C? ¿Cuántos para ir de C a B?

b) ¿Cuántos caminos hay para ir de A a B pasando por el punto C?

c) Una persona va de A a B decidiendo aleatoriamente el camino. ¿Cuál es la probabilidad de que pase por el punto C?

a) Para ir de A a C, hay:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ caminos}$$

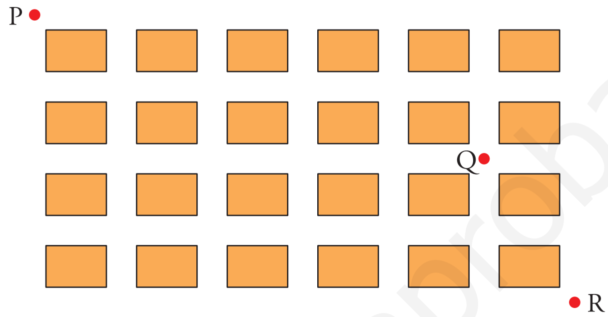
Para ir de C a B, hay:

$C_3^1 = \dfrac{3}{1} = 3$ caminos

b) Hay $6 \cdot 3 = 18$ caminos.

c) P[A a B, pasando por C] $= \dfrac{18}{C_7^3} = \dfrac{18}{35} = 0{,}51$

51 **Sergio sabe que Lupe va a ir de P a R. Decide esperarla en Q. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?**



Caminos totales para ir de P a R:

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ caminos}$$

Para ir de P a Q:

$$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \text{ caminos}$$

Para ir de Q a R:

$$C_3^1 = 3 \text{ caminos}$$

Para ir de P a R, pasando por Q:

$$21 \cdot 3 = 63 \text{ caminos}$$

P[encontrarse en Q] $= \dfrac{63}{210} = 0{,}3$