

- 1°. Halla el término general de las sucesiones:
 - a) $-3, 0, 3, 6\dots$
 - b) $2, 5, 8, 11\dots$
 - c) $3, 6, 12\dots$
 - d) $4, -1, -6\dots$
- 2°. El sexto término de una progresión aritmética es 41 y el tercero es 23. ¿Cuánto vale el primer término? ¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros términos?
- 3°. Halla la suma de todos los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 2000.
- 4°. Calcula la suma de los múltiplos de 59 comprendidos entre 1000 y 2000.
- 5°. Halla el cuadragésimo tercer término de una progresión aritmética sabiendo que el tercer término es 19 y el octavo 54.
- 6°. Calcula la suma de los múltiplos de 27 comprendidos entre 500 y 3000.
- 7°. Halla la suma de los primeros 30 múltiplos de 3.
- 8°. Halla la suma de todos los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 250.
- 9°. Halla la suma de todos los números pares de 3 cifras.
- 10°. Interpola 4 medios aritméticos entre 3 y 18.
- 11°. Interpola 5 medios aritméticos entre -4 y 12.
- 12°. Interpola tres medios aritméticos entre 8 y -12.
- 13°. Escribe ocho medios aritméticos entre 3 y 23.
- 14°. La diferencia de una progresión aritmética es 4. El producto de los cuatro primeros términos es 585. Halla los términos.
- 15°. La suma de los 6 primeros términos de una progresión aritmética es 26 y el producto de los términos extremos es 11. Calcula el primer término y la diferencia.
- 16°. Demuestra que cada término de una progresión aritmética es la semisuma del anterior y el siguiente.
- 17°. Demuestra que una sucesión del tipo $a_n = An + B$, siendo A y B números reales, es una progresión aritmética.

(P)

a) $0 - (-3) = +3$

$3 - 0 = +3$

$6 - 3 = +3$

...

la diferencia entre dos términos consecutivos es constante, por lo tanto:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = -3 \\ d = 3 \end{array} \right\} \rightarrow a_n = -3 + (n-1) \cdot 3 = -3 + 3n - 3 \Rightarrow \boxed{a_n = +3n - 6}$$

b) $5 - 2 = +3$; $8 - 5 = +3$; $11 - 8 = +3$ \rightarrow la diferencia es constante, se trata de una progresión aritmética.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ d = 3 \end{array} \right\} \rightarrow a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 2 + 3n - 3 \Rightarrow \boxed{a_n = 3n - 1}$$

c) $6 - 3 = +3$; $12 - 6 = +6$ \rightarrow No es una progresión aritmética.

$\frac{6}{3} = 2$, $\frac{12}{6} = 2$ \rightarrow el cociente entre 2 términos consecutivos es constante \rightarrow es una progresión geométrica.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad a_1 = 3, r = 2 \rightarrow \boxed{a_n = 3 \cdot 2^{n-1}}$$

d) $-1 - 4 = -5$; $-6 - (-1) = -5$ \rightarrow la diferencia es constante, se trata de una progresión aritmética.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 4 \\ d = -5 \end{array} \right\} \rightarrow a_n = 4 + (n-1) \cdot (-5) = 4 - 5n + 5 \Rightarrow \boxed{a_n = -5n + 9}$$



2º

Fórmulas

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

a) Este problema se resuelve mediante un sistema.

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5 \cdot d \rightarrow 41 = a_1 + 5d \\ a_3 = a_1 + 2 \cdot d \rightarrow 23 = a_1 + 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 41 = a_1 + 5d \\ -23 = -a_1 - 2d \\ \hline 18 = 3d \rightarrow d = \frac{18}{3} = 6. \end{array}$$

$$\Rightarrow 41 = a_1 + 5 \cdot 6 \rightarrow a_1 = 41 - 30 = 11.$$

Solución: $a_1 = 11$, $d = 6 \Rightarrow a_n = 11 + (n-1) \cdot 6$

b) $S_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100} \Leftrightarrow$

$$a_{100} = 11 + 99 \cdot 6 = 605$$

$$S_{100} = 11 + 17 + \dots + 605 = \frac{11 + 605}{2} \cdot 100 = 30800$$

3º Fórmulas necesarios

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Además: los múltiplos consecutivos de un número forman una progresión aritmética.

PASO 1. ¿Cuál es el 1º múltiplo de 7 posterior a 100?

$$\begin{array}{r} 100 \\ 30 \\ \underline{3} \end{array} \begin{array}{l} \overline{)7} \\ 14 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 14 \cdot 7 = 98 \\ 15 \cdot 7 = \boxed{105} \end{array}$$

PASO 2. ¿Cuál es el último múltiplo anterior a 2000?

$$\begin{array}{r} 2000 \\ 60 \\ 40 \\ \underline{5} \end{array} \begin{array}{l} \overline{)7} \\ 285 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 285 \cdot 7 = \boxed{1995} \\ 286 \cdot 7 = 2002 \end{array}$$

PASO 3 ¿Cuántos sumandos tiene la suma?

$$105 + 112 + \dots + 1995 = S_n = \frac{105 + 1995}{2} \cdot n \quad ?n?$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \\ a_n = 105 \\ d = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 1995 = 105 + (n-1) \cdot d \Rightarrow \boxed{d = 271}$$

$$\Rightarrow S_{271} = 105 + 112 + \dots + 1995 = \frac{105 + 1995}{2} \cdot 271 = 284550$$

M

Departamento de Matemáticas

4°

PASO 1. ¿Cuál es el 1º múltiplo de 59 mayor que 1000?

$$\begin{array}{r} 1000 \\ 410 \\ 56 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \overline{) 59} \\ 16 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 16 \cdot 59 = 944 < 1000 \\ 17 \cdot 59 = 1003 > 1000 \end{array} \rightarrow \boxed{1003}$$

PASO 2. ¿Cuál es el último múltiplo de 59 menor que 2000?

$$\begin{array}{r} 2000 \\ 230 \\ 53 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \overline{) 59} \\ 33 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 33 \cdot 59 = 1947 < 2000 \\ 34 \cdot 59 = 2006 > 2000 \end{array} \rightarrow \boxed{1947}$$

PASO 3. ¿Cuántos sumandos tiene la suma?

$$1003 + 1062 + \dots + 1947 = \sum_n = \frac{1003 + 1947}{2} \cdot n \quad ?n?$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \\ a_1 = 1003, d = 59 \end{array} \right\} \Rightarrow 1947 = 1003 + (n-1) \cdot 59 \rightarrow \boxed{n = 17}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{17} = 1003 + \dots + 1947 = \frac{1003 + 1947}{2} \cdot 17 = 25075}$$

La suma pedida está formada por términos de una progresión ARITMÉTICA.

$$\begin{array}{ccccccc} 1003 & + & 1062 & + & \dots & + & 1888 & + & 1947 \\ \underbrace{\quad \quad} & & \underbrace{\quad \quad} & & & & \underbrace{\quad \quad} & & \\ +59 & & +59 & & & & +59 & & \end{array}$$

M

5°

Este problema se resuelve mediante un sistema.

El término general de una progresión aritmética es

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2 \cdot d \\ a_8 = a_1 + 7 \cdot d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19 = a_1 + 2 \cdot d \\ 54 = a_1 + 7 \cdot d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 19 - 2d \end{cases}$$

$$54 = 19 - 2d + 7d \Leftrightarrow 5d = 54 - 19 \rightarrow \boxed{d = \frac{35}{5} = 7}$$

$$\boxed{a_1 = 19 - 2 \cdot 7 = 5}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{43} = a_1 + 42 \cdot d = 5 + 42 \cdot 7 = 299}$$

⑥ PASO 1. ¿Cuál es el 1^{er} múltiplo de 27 mayor de 500?

$$\begin{array}{r} 500 \\ 230 \\ 14 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \overline{)27} \\ 18 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 27 \cdot 18 = 486 < 500 \\ 27 \cdot 19 = 513 > 500 \end{array} \rightarrow \boxed{513}$$

PASO 2. ¿Cuál es el último múltiplo de 27 menor que 3000?

$$\begin{array}{r} 3000 \\ 30 \\ 30 \\ 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \overline{)27} \\ 111 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 27 \cdot 111 = 2997 < 3000 \\ 27 \cdot 112 = 3024 > 3000 \end{array} \rightarrow \boxed{2997}$$

PASO 3. ¿Cuál es la suma y cuántos sumandos tiene?

$$513 + 540 + \dots + 2997 = S_n = \frac{513 + 2997}{2} \cdot n$$

¿n? los sumandos son los términos de una progresión aritmética de 1^{er} término 513 y diferencia 27.

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 513 + (n-1) \cdot 27 \\ a_n = 2997 \end{array} \right\} \Rightarrow 513 + (n-1) \cdot 27 = 2997 \Rightarrow \boxed{n = 93}$$

$$\Rightarrow S_{93} = 513 + \dots + 2997 = \frac{513 + 2997}{2} \cdot 93 = 163\,215.$$

M

- 7^o 1^{er} múltiplo $a_1 = 3$
2^o " $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
...
30^o " $a_3 = 3 \cdot 30 = 90$

$$S_{30} = 3 + 6 + 9 + \dots + 90$$

Son los 30 términos de una progresión aritmética de $a_1 = 3$ y $d = 3$. \Rightarrow

$$S_{30} = \frac{3+90}{2} \cdot 30 = 1395$$

- 8^o Paso 1. ¿Cuál es el 1^{er} múltiplo de 7 mayor que 100?

$$\begin{array}{r} 100 \overline{) 17} \\ 30 \quad 14 \\ \underline{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 \cdot 14 = 98 < 100 \\ 7 \cdot 15 = 105 > 100 \end{array} \rightarrow \boxed{105}$$

Paso 2. ¿Cuál es el último múltiplo de 7 menor que 250?

$$\begin{array}{r} 250 \overline{) 17} \\ 40 \quad 35 \\ \underline{5} \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 \cdot 35 = 245 < 250 \\ 7 \cdot 36 = 252 > 250 \end{array} \rightarrow \boxed{245}$$

Paso 3. ¿Cuál es la suma y el número de sumandos?

$$S_n = 105 + 112 + \dots + 245 = \frac{105 + 245}{2} \cdot n$$

$$\text{¿}n\text{? } a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Leftrightarrow 245 = 105 + (n-1) \cdot 7 \Rightarrow \boxed{n = 21}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{21} = \frac{105 + 245}{2} \cdot 21 = 3675}$$

Recuerda:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Si (a_n) es una progresión aritmética.

9º ¿Cuál es la suma?

¿Cuál es el 1º par de 3 cifras? 100

⇒ la suma $100 + 102 + 104 + \dots$

¿Cuál es el último? 998.

OBSERVACIONES

- la suma es

$$100 + 102 + 104 + \dots + 998.$$

- Forman una progresión aritmética de $a_1 = 100$ y diferencia $d = 2$.

- Nos falta averiguar cuántos sumandos tiene la suma.

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 998 \quad (\text{el último}) \\ a_n = 100 + (n-1) \cdot 2 \end{array} \right\} 998 = 100 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow \boxed{n = 450}$$

Aplicando la fórmula

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\boxed{100 + \dots + 998 = \frac{100 + 998}{2} \cdot 450 = 247050}$$

M

Departamento de Matemáticas

10° 3, —, —, —, —, 18

Hemos de buscar 4 números entre 3 y 18 de modo que estén en progresión aritmética.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_6 = 18 \end{array} \right\} \text{ DATOS.}$$

¿d? Averiguar la diferencia supone conocer la sucesión.

$$a_6 = a_1 + 5d \Leftrightarrow 18 = 3 + 5d \rightarrow \boxed{d = 3}$$

$$a_2 = 6, a_3 = 9, a_4 = 12, a_5 = 15 \Rightarrow \boxed{3, 6, 9, 12, 15, 18}$$

Recuerda $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

11° -4, —, —, —, —, —, 12.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = -4 \\ a_7 = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow a_7 = a_1 + 6 \cdot d \Leftrightarrow 12 = -4 + 6d \Rightarrow \boxed{d = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}}$$

$$a_2 = -4 + \frac{8}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$a_3 = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a_4 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$a_5 = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$$

$$a_6 = \frac{20}{3} + \frac{8}{3} = \frac{28}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{-4, \frac{-4}{3}, \frac{4}{3}, 4, \frac{20}{3}, \frac{28}{3}, 12}$$

12° $8, _, _, _, _, -12. \Leftrightarrow a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$

Forman una progresión aritmética: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Datos

$$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_5 = -12 \end{cases} \Rightarrow a_5 = a_1 + 4d \Leftrightarrow -12 = 8 + 4 \cdot d \Rightarrow \boxed{d = \frac{-20}{4} = -5}$$

$$a_2 = 8 + (-5) = 3 \quad a_3 = 3 + (-5) = -2, \quad a_4 = -2 + (-5) = -7.$$

$$\Rightarrow \boxed{8, 3, -2, -7, -12}$$

13° $3, _, _, _, _, _, _, _, _, 23$

Datos

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{10} = 23 \end{cases} \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d \Leftrightarrow 23 = 3 + 9d \Rightarrow \boxed{d = \frac{20}{9}}$$

$$a_2 = 3 + \frac{20}{9} = \frac{47}{9};$$

$$a_6 = \frac{107}{9} + \frac{20}{9} = \frac{127}{9}$$

$$a_3 = \frac{47}{9} + \frac{20}{9} = \frac{67}{9}$$

$$a_7 = \frac{127}{9} + \frac{20}{9} = \frac{147}{9} = \frac{49}{3}$$

$$a_4 = \frac{67}{9} + \frac{20}{9} = \frac{87}{9} = \frac{29}{3}$$

$$a_8 = \frac{49}{3} + \frac{20}{9} = \frac{167}{9}$$

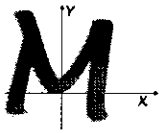
$$a_5 = \frac{29}{3} + \frac{20}{9} = \frac{107}{9}$$

$$a_9 = \frac{167}{9} + \frac{20}{9} = \frac{187}{9}$$

La clave está en que conocemos el último y el 1° \rightarrow podemos averiguar la diferencia \Rightarrow se conoce TODA la progresión.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 3, & _ & _ & _ & _ & _ & _ & _ & _ & _ & 23 \\ \downarrow & & & & & & & & & & \downarrow \\ a_1 & & & & & & & & & & a_{10} \end{array}$$

(8)



14° Datos

$$d = 4$$

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a + 4$$

$$a_3 = a + 4 + 4 = a + 8$$

$$a_4 = a + 8 + 4 = a + 12$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = a \\ a_2 = a + 4 \\ a_3 = a + 8 \\ a_4 = a + 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a \cdot (a+4) \cdot (a+8) \cdot (a+12) = 585}$$

$$a \cdot (a+4) = a^2 + 4a$$

$$(a+8) \cdot (a+12) = a^2 + 20a + 96 \left\} \Rightarrow$$

$$(a^2 + 4a) \cdot (a^2 + 20a + 96) = a^4 + 20a^3 + 96a^2 + 4a^3 + 80a^2 + 384a$$

la ecuación resultante será:

$$\boxed{a^4 + 24a^3 + 176a^2 + 384a - 585 = 0}$$

Las soluciones enteras son los divisores del término independiente:

$$-585: \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

$a=1$ es una solución. Aplicando la regla de Ruffini:

	1	24	176	384	-585	
1		1	25	201	+585	$\rightarrow a^3 + 25a^2 + 201a + 585 = 0$
	1	25	201	585	<u>0</u>	
-13		-13	-156	-585		$\rightarrow a^2 + 12a + 45 = 0$
	1	12	45	<u>0</u>		

Aplicando el teorema del resto se obtiene otra solución $a = -13$.

Resolviendo la ec. de 2° grado.

$$a = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 45}}{2 \cdot 1} = \frac{-12 \pm \sqrt{-36}}{2} \text{ no tiene.}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a=1 \rightarrow (1, 5, 9, 13) \\ a=-13 \rightarrow (-13, -9, -5, -1) \end{array}} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a=1 \\ a=-13 \end{array}} \right\} \text{ SOLUCIÓN}$$



15° Datos: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ forman una progresión geométrica

$$\rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

En nuestro problema

$$\left. \begin{aligned} S_6 = 26 &\Leftrightarrow \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = 26 \\ a_1 \cdot a_6 &= 11 \end{aligned} \right\} \text{ sistema.}$$

Ordenando y colocando el sistema.

$a_1 = x$	$a_6 = y$
-----------	-----------

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{52}{6} = \frac{26}{3} \\ x \cdot y = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{26}{3} - y \\ \leftarrow \end{cases}$$

$$\left(\frac{26}{3} - y\right) \cdot y = 11 \Leftrightarrow \frac{26}{3}y - y^2 = 11 \Leftrightarrow y^2 - \frac{26}{3}y + 11 = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow \boxed{3y^2 - 26y + 33 = 0}$$

$$y = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 33}}{2 \cdot 3} = \frac{26 \pm \sqrt{280}}{6} = \frac{26 \pm \sqrt{4 \cdot 70}}{6}$$

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{70}}{3}$$

$$\bullet \text{ si } y = a_6 = \frac{13 + \sqrt{70}}{3} \rightarrow a_1 = x = \frac{26}{3} - \frac{13 + \sqrt{70}}{3} = \frac{13 - \sqrt{70}}{3}$$

$$\bullet \text{ si } y = a_6 = \frac{13 - \sqrt{70}}{3} \rightarrow a_1 = x = \frac{26}{3} - \frac{13 - \sqrt{70}}{3} = \frac{13 + \sqrt{70}}{3}$$

16°

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$$

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \equiv \text{semisuma del anterior y el siguiente. al término general.}$$

$$\begin{cases} a_{n-1} = a_1 + (n-1-1) \cdot d = a_1 + (n-2) \cdot d \\ a_{n+1} = a_1 + (n+1-1) \cdot d = a_1 + n \cdot d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \boxed{\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}} &= \frac{a_1 + (n-2) \cdot d + a_1 + n \cdot d}{2} = \frac{a_1 + nd - 2d + a_1 + nd}{2} \\ &= \frac{2a_1 + 2nd - 2d}{2} = a_1 + nd - d = a_1 + (n-1) \cdot d = \boxed{a_n} \end{aligned}$$

17° Hemos de probar que la diferencia entre 2 términos consecutivos no depende de n.

$$\begin{cases} a_{n+1} = A \cdot (n+1) + B = An + A + B \\ a_n = An + B \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_{n+1} - a_n = An + A + B - (An + B) = \underline{An} + A + \underline{B} - \underline{An} - \underline{B}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = A \quad \bullet$$

La diferencia es A. El 1° término $a_1 = A \cdot 1 + B = A + B$.

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = A + B + (n-1) \cdot A = \underline{A+B} + nA - \underline{A} = \underline{An + B}$$