Progresiones geométricas

4.72. (TIC) Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, halla el término general.

a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, ...$ **c)** $4, 8, 12, 16, 20, ...$ **e)** $5, -1, \frac{1}{5}, \frac{-1}{25}, ...$

b) $1, 2, 4, 8, 16, ...$ **d)** $5, 3, \frac{9}{5}, \frac{27}{25}, \frac{81}{125}, ...$ **f)** $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{75}, \frac{1}{375}, ...$

a) $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{1}{3} = r$. Sí es una progresión geométrica; $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}$

b) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = ... = 2 = r$. Sí es una progresión geométrica; $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

c) $\frac{c_2}{c_1} \neq \frac{c_3}{c_2} \Rightarrow$ No es una progresión geométrica.

d) $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_3}{d_2} = ... = \frac{3}{5} = r$. Sí es una progresión geométrica; $d_n = 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \frac{3^{n-1}}{5^{n-2}}$

e) $5, -1, \frac{1}{5}, \frac{-1}{25} ...$ Sí es una progresión geométrica; $a_n = 5\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1}$

f) $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{75}, \frac{1}{375} ...$ Sí es una progresión geométrica; $a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

4.73. Explica qué puede decirse de una sucesión recurrente que se puede expresar como:

a) $a_n = a_{n-1} + 10$ **c)** $a_n = a_{n-1} \cdot 10$

b) $a_n = a_{n-1} - 10$ **d)** $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{10}$

a) $a_n = a_{n-1} + 10 = a_{n-2} + 10 + 10 = \ldots = a_1 + (n-1) \cdot 10$.Progresión aritmética con diferencia 10

b) $a_n = a_{n-1} - 10 = a_{n-2} - 10 - 10 = \ldots = a_1 + (n-1) \cdot (-10)$. Progresión aritmética con diferencia –10

c) $a_n = a_{n-1} \cdot 10 = a_{n-2} \cdot 10 \cdot 10 = \ldots = a_1 \cdot (10)^{n-1}$. Progresión geométrica con razón 10

d) $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{10} = \dfrac{a_{n-2}}{10 \cdot 10} = \ldots = \dfrac{a_1}{10^{n-1}}$.Progresión geométrica con razón $\dfrac{1}{10}$

4.74. ¿Cómo es una progresión geométrica de razón igual a 1?

Una progresión geométrica de razón 1 también es constante: $a_n = a_1 \cdot 1^{n-1} = a_1$.

4.75. ¿Puede existir alguna progresión geométrica que tenga todos sus términos negativos? Razona la respuesta.

Sí existe, y la condición que ha de cumplir es que el primer término de la progresión sea negativo y que la razón sea un número positivo.

Si a_1 es negativo, entonces:

$$a_2 = a_1 \cdot r \quad \Rightarrow \quad a_2 \begin{cases} < 0 & si \quad r > 0 \\ > 0 & si \quad r < 0 \end{cases}$$

Con r negativo, $a_3 = a_2 \cdot r$ será negativo, y así sucesivamente.

4.76. ¿La sucesión que resulta al multiplicar término a término dos progresiones geométricas es una progresión geométrica? En caso afirmativo, ¿cuál es su razón?

Sí lo es.

Sean las progresiones geométricas: $\begin{cases} a_n = a_1 r^{n-1} \\ b_n = b_1 s^{n-1} \end{cases}$ de razones r y s, respectivamente.

$a_n \cdot b_n = (a_1 \cdot b_1) \cdot (r \cdot s)^{n-1}$ es una progresión geométrica de razón $r \cdot s$.

4.77. ¿Cómo ha de ser la razón de una progresión geométrica para que todos sus términos vayan cambiando alternativamente de signo?

Negativa

4.78. (TIC) Calcula el primer término de una progresión geométrica cuyo tercer término es 192 y la razón es 8.

$$a_3 = a_1 r^2 = a_1 \cdot 8^2 = 192 \Rightarrow a_1 = \frac{192}{64} = 3$$

4.79. (TIC) De una progresión geométrica sabemos que su cuarto término es $\frac{27}{8}$ y que la razón es $\frac{3}{2}$. Halla el primer término.

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow a_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow a_1 = 1$$

4.80. (TIC) El primer término de una progresión geométrica es 2 y la razón es 4. ¿Qué lugar ocupa en la progresión el término cuyo valor es 131 072?

$$a_n = 2 \cdot 4^{n-1} = 131072 \Rightarrow 4^{n-1} = 65536 = 4^8 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$$

4.81. (TIC) El tercer término de una progresión geométrica es 144 y la razón es 6. ¿Qué posición ocupa dentro de la progresión el número 5184?

$$a_3 = a_1 r^2 = a_1 \cdot 6^2 = 144 \Rightarrow a_1 = \frac{144}{36} = 4.$$

Buscamos un n que verifique: $a_n = 4 \cdot 6^{n-1} = 5184 \Rightarrow 6^{n-1} = 1296 = 6^4 \Rightarrow n-1 = 4 \Rightarrow n = 5$.

4.82. Halla el término general de una progresión geométrica sabiendo que $a_2 = 12$ y $a_5 = 324$.

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = 12 \Leftrightarrow a_1 \cdot r = 12 \Rightarrow a_1 = \dfrac{12}{r} \\ a_5 = 324 \Leftrightarrow a_1 \cdot r^4 = 324 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{12}{r} \cdot r^4 = 324 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{3} = 4$$

El término general es $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$.

4.83. Calcula la suma de los 30 primeros términos de la progresión geométrica $1, 2, 4, 8, 16...$

La razón de la progresión geométrica es $r = 2$.

$$S_{30} = \frac{a_1 \cdot \left(2^{30} - 1\right)}{2-1} = 2^{30} - 1 = 1073741823.$$

4.84. (TIC) Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica 63, 21, 7, $\frac{7}{3}$...

$$a_{10} = 63 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{63}{3^9} = \frac{3^2 \cdot 7}{3^9} = \frac{7}{3^7}; \quad S_{10} = \frac{\frac{7}{3^7} \cdot \frac{1}{3} - 63}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{413336}{4374} \approx 94,5$$

4.85. El cuarto término de una progresión geométrica es 225 y la razón es 3. Halla la suma de los 8 primeros términos.

$$a_4 = a_1 r^3 = 27a_1 = 225 \Rightarrow a_1 = \frac{25}{3}; \quad a_8 = a_1 r^7 = 25 \cdot 3^6 = 18225$$

$$S_8 = \frac{a_8 r - a_1}{r-1} = \frac{18225 \cdot 3 - \frac{25}{3}}{3-1} = \frac{82000}{3} = 27333,\widehat{3}$$

4.86. (TIC) Calcula $\dfrac{1+3+3^2+...+3^9}{3^{10}-1}$

El numerador es la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica de razón

$$r = 3 \Rightarrow \frac{1+3+3^2+....+3^9}{3^{10}-1} = \frac{\frac{3^9 \cdot 3 - 1}{3-1}}{3^{10}-1} = \frac{3^{10}-1}{2\left(3^{10}-1\right)} = \frac{1}{2}.$$

4.87. La suma de los términos primero y tercero de una progresión geométrica es 10, y la suma de los términos segundo y cuarto es 20. Calcula el primer término y la razón.

$$\left.\begin{matrix} a_1 + a_3 = 10 \\ a_2 + a_4 = 20 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} a_1 + a_1 r^2 = 10 \\ a_1 r + a_1 r^3 = 20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1\left(1+r^2\right) = 10 \\ a_1 r\left(1+r^2\right) = 20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{10}{a_1} = \frac{20}{a_1 r} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow a_1 = 2$$

4.88. Varios términos de una sucesión están en progresión geométrica. ¿Qué le ocurre al producto de dos términos que estén a la misma distancia del primero y del último término?

Sean los términos en progresión aritmética $a_1, a_2, ..., a_n$. Dos términos que estén a la misma distancia del primero y último término pueden ser $a_2 = a_1 \cdot r$ y $a_{n-1} = \frac{a_n}{r}$.

El producto de ambos es igual a: $a_2 \cdot a_{n-1} = a_1 \cdot r \cdot \frac{a_n}{r} = a_1 \cdot a_n$, es decir, el producto del primero y último término.

4.89. Interpolar *m* medios proporcionales entre dos números dados cualesquiera es hallar *m* números que formen junto con esos dos una progresión geométrica cuyo primero y último término sean los números conocidos. Así, interpola dos medios proporcionales entre 1 y 16.

$$a_1 = 1;\ a_4 = 16 = a_1 \cdot r^3 = r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2} \qquad a_2 = 2\sqrt[3]{2};\ a_3 = 4\sqrt[3]{4}$$

4.90. Encuentra cuatro números entre el 5 y el 1215 de forma que los seis números estén en progresión geométrica

Los números son 15, 45, 135, 405 y 1215.