# FUNCIONES Y GRÁFICAS

**INTRODUCCIÓN: EJEMPLOS**

Una **función** es una correspondencia (relación) entre dos conjuntos (magnitudes…), de forma que a cada elemento (objeto) del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo conjunto.

**Ejemplos:**

1) Si 1 botella de agua cuesta 60 cent., entonces 2 botellas nos costarán $2 \cdot 60 = 120$ cent., y si compramos 3 botellas nos costarán $3 \cdot 60 = 180$ cent.… Es decir, existe una relación entre el número de botellas que compramos y el precio que pagamos. Esta relación la podemos describir mediante una tabla como la que sigue:

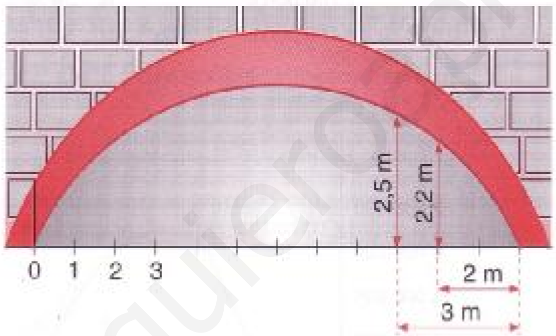
| Nº de botellas | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Precio (en cent.) | 60 | 120 | 180 | 240 |

Ahora bien, si llamamos $x$ al número de botellas que compramos e $y$ al precio que pagamos por ellas, la relación que hay entre estas dos magnitudes (variables) es:

$$y = 60x$$

(como el precio depende del número de botellas, también se suele escribir $p(x)$).

2) Los túneles tienen forma de parábola (como la figura)




Si estudiamos la relación que hay entre la distancia entre uno de los extremos (en metros) y la altura (también en metros), obtenemos la siguiente tabla:

| Distancia (en m) | 0 | 2 | 3 | … |
|---|---|---|---|---|
| Altura (en m) | 0 | 2,2 | 2,5 | … |

Esta relación también la podemos escribir mediante una expresión algebraica (aunque por ahora no nos interesa cómo obtenerla). Dicha expresión algebraica es:

$$h(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$$

donde $h(x)$ es la altura (en función de la distancia a uno de los extremos) y $x$ es la distancia del extremo al punto considerado.

3) Cuando hablamos de velocidad, decimos que vamos a 50 km/h, a 100 km/h,… ¿Qué nos dice esto? Pues simplemente, que recorremos 50 km en 1 h, o que recorremos 100 km en 1 h,… Para centrar ideas, vamos a suponer que queremos recorrer 100 km, y vamos a ver que relación hay entre la velocidad y el tiempo empleado en recorrer dicha distancia. Los datos los recogemos en la siguiente tabla:

| Velocidad (en km/h) | 100 | 50 | 25 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| Tiempo (en h) | 1 | 2 | 4 | 10 |

La expresión algebraica de esta relación es la siguiente:

$$v(t) = \frac{100}{t}$$

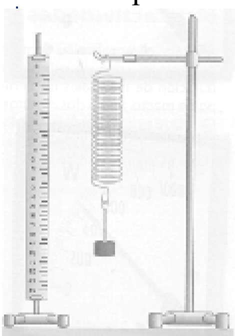
donde $v(t)$ es la velocidad, y $t$ el tiempo.

En general, la relación que hay entre la velocidad, el espacio y el tiempo, es la siguiente:

$$\text{velocidad} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} \Leftrightarrow v = \frac{e}{t}$$

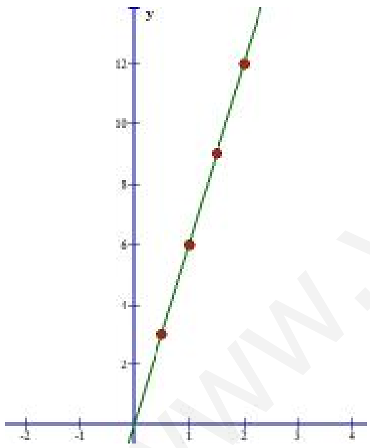
(es decir, la velocidad depende del espacio que se recorre y del tiempo que se emplea en recorrerlo).

4) Si colgamos una masa al final de un muelle, la longitud de éste aumenta. Los datos obtenidos en el experimento son los siguientes:



| Masa (kg) | Alargamiento (cm) |
|---|---|
| 0,5 | 3 |
| 1 | 6 |
| 1,5 | 9 |
| 2 | 12 |

Representamos gráficamente los datos de la tabla:




Vemos que la representación gráfica es la de una recta, es decir, hay una relación (correspondencia) lineal entre la masa y el alargamiento. La expresión algebraica de esta función es:

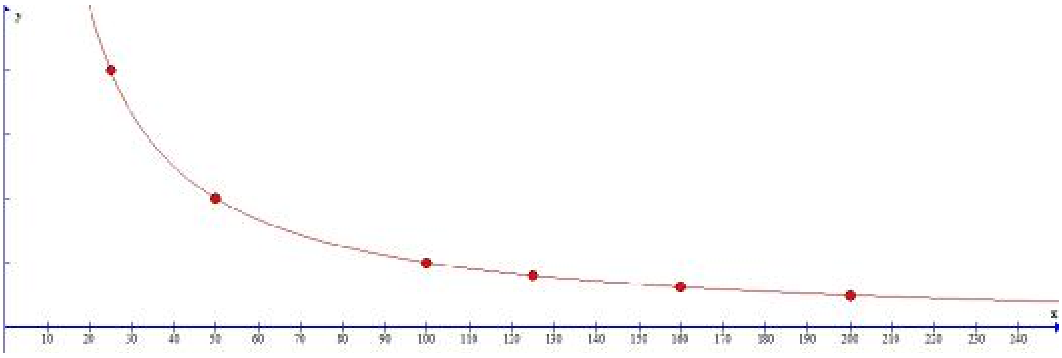
$$a(m) = 6m$$

donde hemos llamado $a(m)$ al alargamiento (hemos puesto entre paréntesis la masa $m$, para indicar que dicho alargamiento depende de la masa que colguemos del muelle).

5) La siguiente tabla recoge el volumen que ocupa un gas en función de su presión:

| V ($cm^3$) | 200 | 160 | 125 | 100 | 50 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p (atm) | 1 | 1,25 | 1,6 | 2 | 4 | 8 |

La representación gráfica de esta tabla es:



La función asociada a esta gráfica es

$$V = \frac{200}{p}$$

que es una función de proporcionalidad inversa.

## ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES Y SU REPRESENTACIÓN

### Funciones lineales

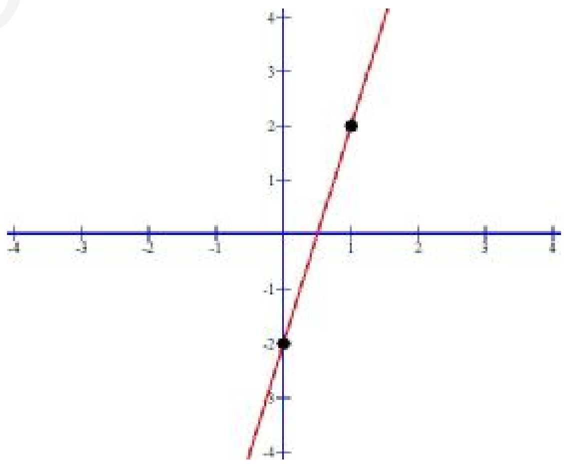
Son de la forma $y = ax + b$ donde $a$ y $b$ son números reales.

Geométricamente representan ***rectas***, y para dibujarlas basta con construir una tabla de valores con dos valores.

**Ejemplo:**

$$y = 4x - 2$$

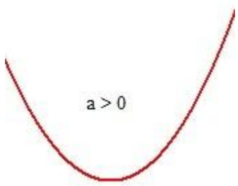
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | - 2 |
| 1 | 2 |

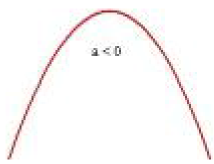


### Funciones cuadráticas

Son de la forma $y = ax^2 + bx + c$ donde $a,\ b$ y $c$ son números reales y $a \neq 0$.

Geométricamente representan ***parábolas***, que tienen la forma



y para dibujarlas distinguimos dos casos:

***Caso 1:***

Calculamos el ***vértice***: $V(x,y)\ \begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} \\ y = \text{ sustituir } x \text{ en la función} \end{cases}$

Calculamos los ***puntos de corte con el eje X*** resolviendo la ecuación $0 = ax^2 + bx + c$.

**<u>Ejemplo:</u>**

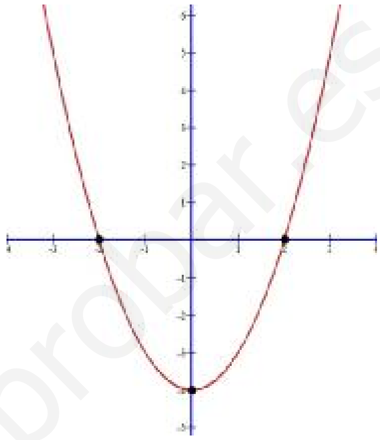
$$y = x^2 - 4$$

Vértice

$$V(x,y)\begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-0}{2\cdot 1} = 0 \\ y = 0^2 - 4 = -4 \end{cases} \to V(0,\ \text{-}4)$$

Puntos de corte con el eje X

$$0 = x^2 - 4 \to x = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases} \to (2,\ 0) \text{ y } (-2,\ 0)$$



***Caso 2:***

Calculamos el ***vértice***: $V(x,y)\ \begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} \\ y = \text{ sustituir } x \text{ en la función} \end{cases}$

Construimos una ***tabla de valores***, con dos valores a la izquierda del vértice y dos valores a la derecha.

**<u>Ejemplo:</u>**

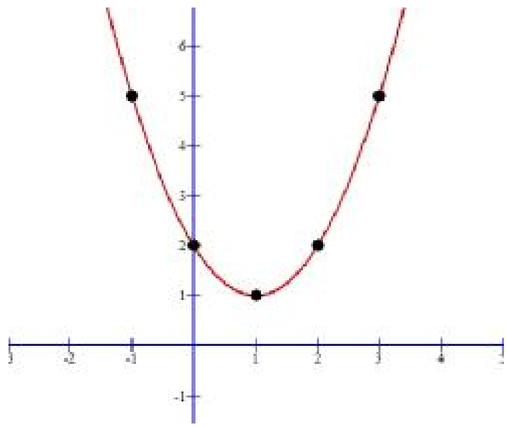
$$y = x^2 - 2x + 2$$

Vértice

$$V(x,y)\begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2\cdot 1} = 1 \\ y = 1^2 - 2\cdot 1 + 2 = 1 \end{cases} \to V(1,\ 1)$$

Tabla de valores

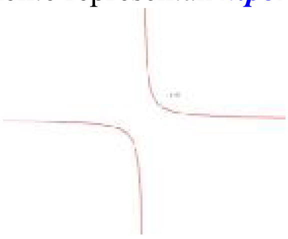
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| - 1 | 5 |
| 2 | 2 |
| 3 | 5 |

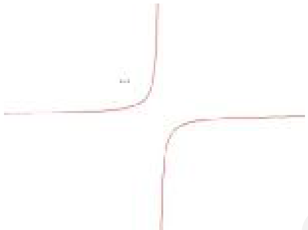


## Funciones de proporcionalidad inversa

Son de la forma $y = \frac{k}{x}$ donde $k \neq 0$.

Geométricamente representan ***hipérbolas***, que tienen la forma



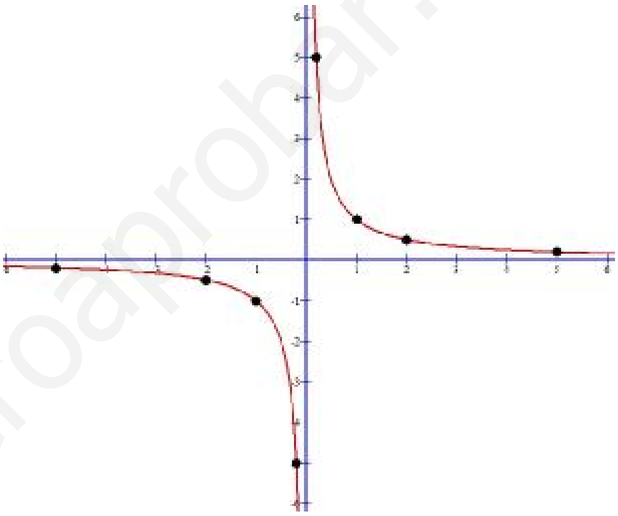


y para dibujarlas basta con construir una tabla de valores.

**Ejemplo:**

$$y = \frac{1}{x}$$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 0,5 |
| 5 | 0,2 |
| 0,2 | 5 |
| -1 | -1 |
| -2 | -0,5 |
| -5 | -0,2 |
| -0,2 | -5 |

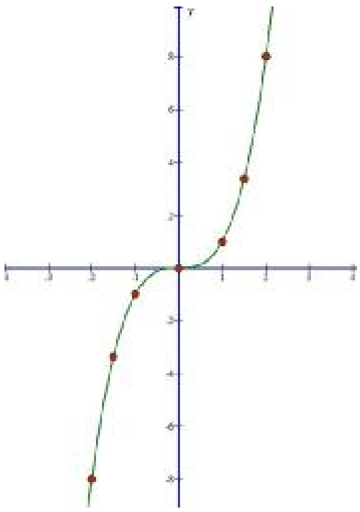




## Otras funciones

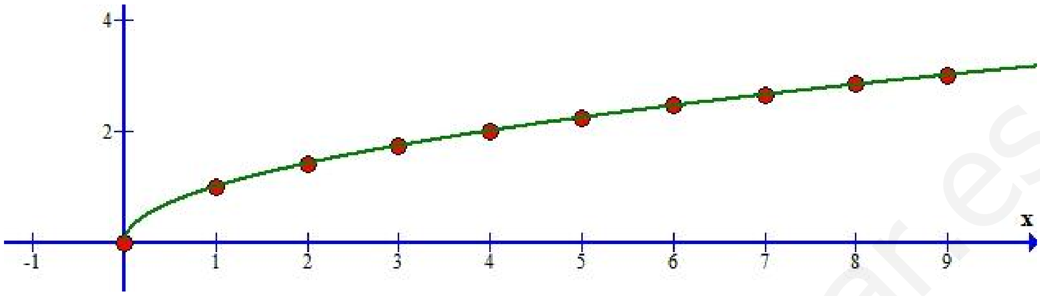
1) Vamos a representar la función $f(x) = x^3$ (función que aparece por ejemplo al ver la relación del lado de un cubo y su volumen). Como todavía no tenemos un procedimiento general para dibujar funciones, construiremos una tabla de valores:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| -2 | -8 |
| -1,5 | -3,375 |
| -1 | -1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 1,5 | 3,375 |
| 2 | 8 |

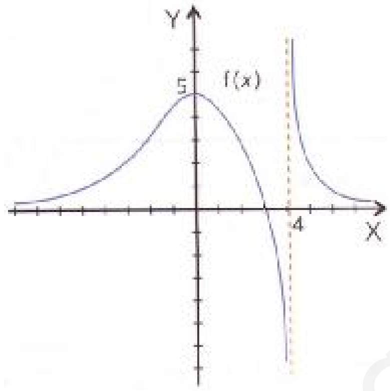
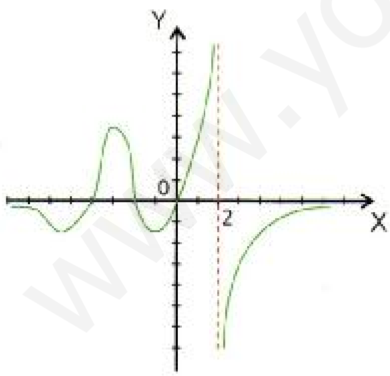
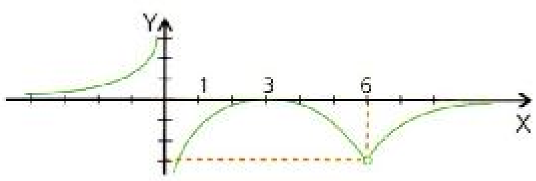


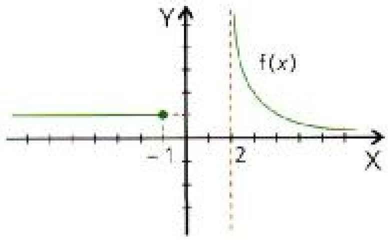
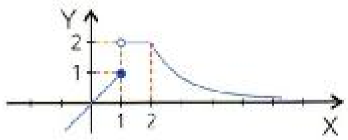
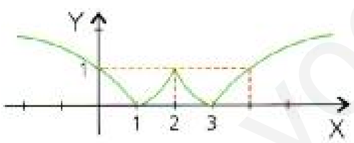
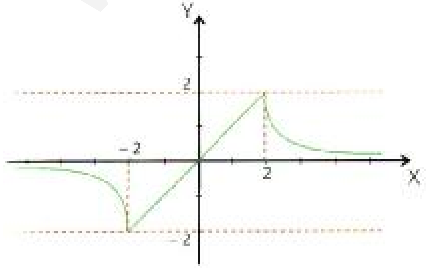
2) Por último, vamos a representar la función $g(x)=+\sqrt{x}$ (fíjate que sólo hemos considerado la raíz cuadrada positiva). Igual que antes, construimos una tabla de valores (recuerda que el dominio de esta función es $[0,+\infty)$ ).

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0 | 1 | 1,41 | 1,73 | 2 | 2,23 | 2,45 | 2,65 | 2,83 | 9 |




**CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN**

| | |
|---|---|
|   | $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,+\infty)-\{4\}=\mathbb{R}-\{4\}$<br>$\mathrm{Img}(f)=\mathrm{Rec}(f)=\mathbb{R}$<br>Es creciente en $(-\infty,0)$<br>Es decreciente en $(0,4)\cup(4,+\infty)$<br>Tiene un máx. relativo en $(0,5)$<br>Corta al eje X en 3 y al eje Y en 5<br>Es continua, donde está definida: $\mathbb{R}-\{4\}$<br>No es simétrica |
|   | $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,+\infty)-\{2\}=\mathbb{R}-\{2\}$<br>$\mathrm{Img}(f)=\mathrm{Rec}(f)=\mathbb{R}$<br>Es creciente en $(-5,-3)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$<br>Es decreciente en $(-\infty,-5)\cup(-3,-1)$<br>Tiene un máx. relativo en $(-3,3)$<br>Tiene un mín. relativo en $(-5,-1,5)$ y en $(-1,-1.5)$<br>Corta al eje X en $-4$, $-2$ y 0; y al eje Y en 0<br>Es continua, donde está definida: $\mathbb{R}-\{2\}$<br>No es simétrica |
|   | $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,0)\cup(0,6)\cup(6,+\infty)=\mathbb{R}-\{0,\ 6\}$<br>$\mathrm{Img}(f)=\mathrm{Rec}(f)=\mathbb{R}$<br>Es creciente en $(-\infty,0)\cup(0,3)\cup(6,+\infty)$<br>Es decreciente en $(3,6)$<br>Tiene un máx. relativo en $(3,0)$ |

| | |
|---|---|
| | El punto $(6,-3)$ no es un mín. relativo<br>Corta al eje X en 3; y no corta al eje Y<br>Es continua, donde está definida: $\mathbb{R}-\{0,6\}$<br>No es simétrica |
|   | $\text{Dom}(f)=(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)$<br>$\text{Img}(f)=\text{Rec}(f)=(0,+\infty)$<br>Es decreciente en $(2,+\infty)$<br>Es constante en $(-\infty,-1)$<br>No corta al eje X; y no corta al eje Y<br>Es continua en $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$<br>No es simétrica |
|   | $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$<br>$\text{Img}(f)=\text{Rec}(f)=(-\infty,2]$<br>Es creciente en $(-\infty,1)$<br>Es decreciente en $(2,+\infty)$<br>Es constante en $(1,2)$<br>No tiene extremos relativos<br>Corta al eje X en 0; y corta al eje Y en 0<br>Es continua, donde está definida: $\mathbb{R}-\{1\}$ |
|   | $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$<br>$\text{Img}(f)=\text{Rec}(f)=[0,+\infty)$<br>Es creciente en $(1,2)\cup(3,+\infty)$<br>Es decreciente en $(-\infty,1)\cup(2,3)$<br>Tiene un máx. relativo en $(2,1)$<br>Los puntos $(1,0)$ y $(3,0)$ son mín. relativos<br>Corta al eje X en 1 y en 3; y corta al eje Y en 1<br>Es continua, donde está definida: $\mathbb{R}$<br>No es simétrica |
|   | $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$<br>$\text{Img}(f)=\text{Rec}(f)=[-2,2]$<br>Es creciente en $(-2,2)$<br>Es decreciente en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$<br>Tiene un máx. relativo en $(2,2)$<br>Tiene un mín. relativo en $(-2,-2)$<br>Corta al eje X en 0; y corta al eje Y en 0<br>Es continua, donde está definida: $\mathbb{R}$<br>Si es simétrica: es impar |