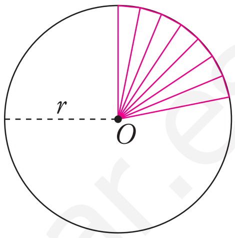
PÁGINA 191

PARA EMPEZAR…

▼ Calcula al estilo de Arquímedes

ÁREA DEL CÍRCULO



■ **¿Cuál es la suma de sus bases?**

¿Cuál es la altura de todos ellos?

Sustituye y obtendrás la superficie del círculo.

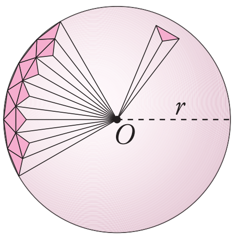
$$A = \frac{1}{2} \text{ (Suma de todas sus bases)} \cdot \text{Altura}$$

La suma de todas sus bases es la longitud de la circunferencia, $2\pi r$.

La altura de cada triángulo, para una base muy pequeña, es próxima al radio del círculo, r.

$$A = \frac{1}{2} \text{ (Suma de todas sus bases)} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$$

VOLUMEN DE LA ESFERA



■ **Aplica la fórmula:**

$$V = \frac{1}{3} \text{ (Suma de las superficies de las bases)} \cdot \text{Altura}$$

para obtener el volumen de la esfera.

La suma de la superficie de las bases coincide con la superficie esférica, $4\pi r^2$.

La altura de cada pirámide es muy próxima al radio de la esfera, r.

$$V = \frac{1}{3} \text{(Suma de las superficies de las bases)} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{3}(4\pi r^2) \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 193

1 **Haz una tabla, en tu cuaderno, con el número de caras, vértices y aristas de los cinco poliedros regulares.**

a) Comprueba que los cinco cumplen la fórmula de Euler.

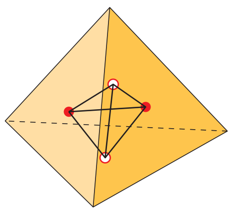
b) Comprueba que el dodecaedro y el icosaedro cumplen las condiciones necesarias para ser duales.

c) Comprueba que el tetraedro cumple las condiciones para ser dual de sí mismo.

	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
CARAS	4	6	8	12	20
VÉRTICES	4	8	6	20	12
ARISTAS	6	12	12	30	30

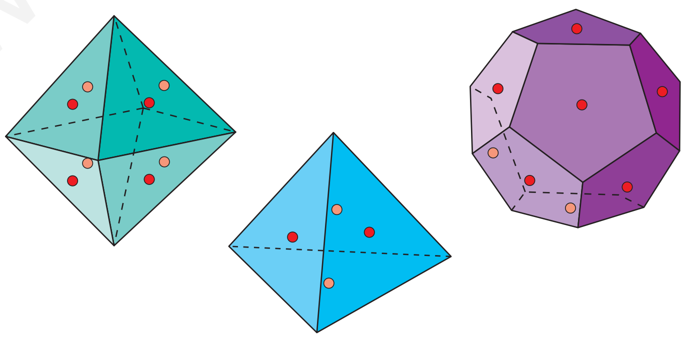
a) Tetraedro → $4 + 4 - 6 = 2$
Cubo → $6 + 8 - 12 = 2$
Octaedro → $8 + 6 - 12 = 2$
Dodecaedro → $12 + 20 - 30 = 2$
Icosaedro → $20 + 12 - 30 = 2$

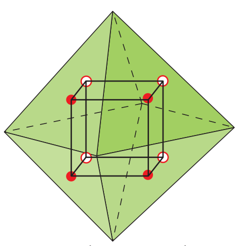
b) Al unir mediante segmentos los centros de cada dos caras contiguas de un dodecaedro, se forma un icosaedro. Si hiciéramos lo mismo con un icosaedro, obtendríamos un dodecaedro. Además, el número de caras del dodecaedro coincide con el número de vértices del icosaedro, y viceversa. Ambos tienen el mismo número de aristas. Por tanto, son poliedros duales.

c) 

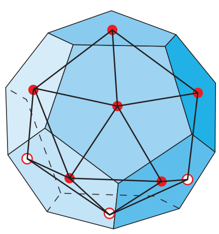
Al unir mediante segmentos los centros de cada dos caras contiguas de un tetraedro, se forma otro tetraedro. Además, el número de caras y de vértices en un tetraedro son iguales. El tetraedro es dual de sí mismo.

2 **Hemos señalado en rojo los centros de las caras "frontales" de estos poliedros, y más claro, los centros de algunas caras "ocultas". Uniéndolos convenientemente se obtienen los poliedros duales. Hazlo en tu cuaderno.**

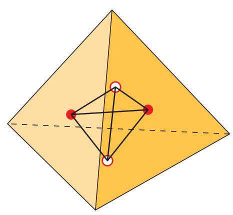




octaedro – cubo



dodecaedro – icosaedro



tetraedro – tetraedro

10 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 194

1 Vamos a truncar, dando cortes que pasen por los puntos medios de las aristas, los restantes poliedros regulares.

a) Al truncar de este modo un tetraedro, se obtiene una figura conocida. ¿Cuál?

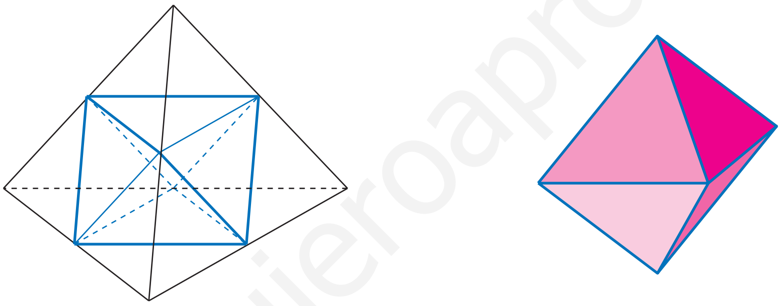
b) El resultado de truncar el octaedro también es conocido. ¿Comprendes, ahora, por qué a esta figura se la llama cuboctaedro?

c) Describe la figura que resulta de truncar (puntos medios de las aristas) un dodecaedro y explica por qué es un poliedro semirregular (se llama icosidodecaedro).

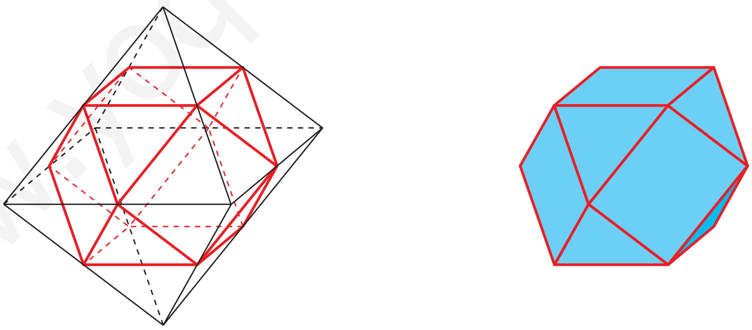
d) Describe la figura que resulta de truncar (puntos medios de las aristas) un icosaedro.

e) Relaciona los resultados anteriores con la dualidad de poliedros estudiada en la página anterior.

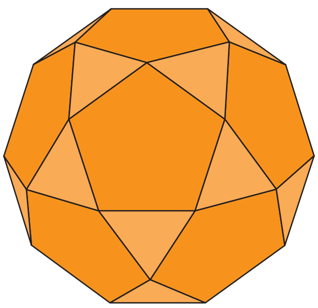
a) La figura que queda es un octaedro.



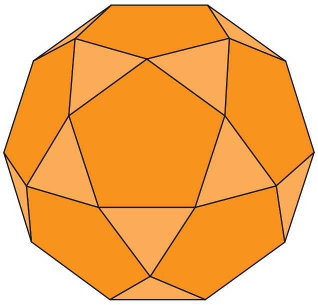
b) La figura que queda es un cuboctaedro.



c) El icosidodecaedro se compone de pentágonos regulares y de triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen dos pentágonos y dos triángulos.

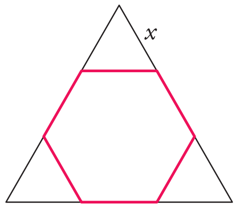


d) También sale un icosidodecaedro.



e) La figura que resulta al truncar dos poliedros duales es la misma.

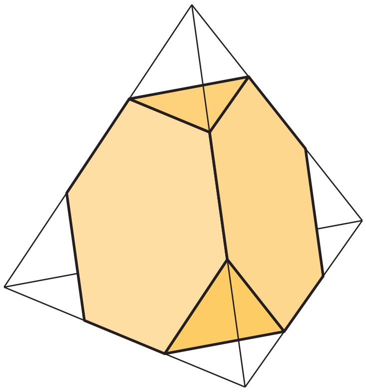
PÁGINA 195



2 **¿A qué distancia del vértice hemos de cortar los triángulos pequeños para que el hexágono resultante sea regular?**

$x = \frac{1}{3}l$, donde l es el lado del triángulo.

3



Describe el tetraedro truncado.

¿Cuántas caras tiene?

¿Cuántas son de cada tipo?

¿Cuántos vértices? ¿Cuántas aristas?

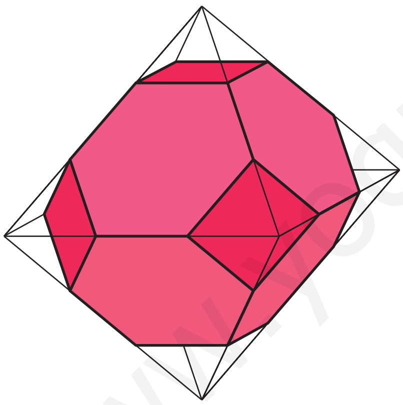
¿Cuánto mide la arista del tetraedro truncado con relación a la del tetraedro original?

Tiene 8 caras, 4 hexágonos regulares y 4 triángulos equiláteros.

Tiene 12 vértices donde concurren dos hexágonos y un triángulo.

Tiene 18 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del tetraedro original.

4 **Describe el octaedro truncado.**



Caras, tipos.

Vértices.

Aristas.

Tiene 14 caras, 8 hexágonos y 6 cuadrados.

Tiene 24 vértices donde concurren dos hexágonos y un cuadrado.

Tiene 36 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del octaedro original.

5 **Conociendo las características de un dodecaedro (caras, vértices), describe cómo será el dodecaedro truncado.**

Tiene 32 caras, 12 decágonos regulares y 20 triángulos equiláteros.

Tiene 60 vértices donde concurren dos decágonos y un triángulo.

Tiene 90 aristas.

6 **Conocidas las características de un icosaedro, describe cómo será el icosaedro truncado.**

Tiene 32 caras, 20 hexágonos y 12 pentágonos.

Tiene 60 vértices donde concurren dos hexágonos y un pentágono.

Tiene 90 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida del icosaedro original.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

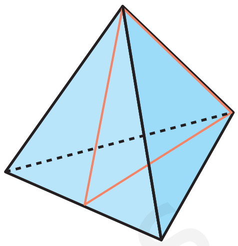
PÁGINA 196

1 **¿Qué condiciones debe cumplir un plano para ser plano de simetría del tetraedro?**

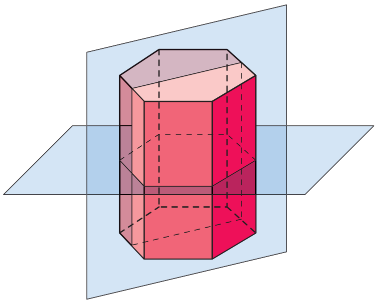
¿Cuántos planos de simetría tiene el tetraedro?

Para que un plano sea plano de simetría del tetraedro tiene que contener una arista y ser perpendicular a dos caras.

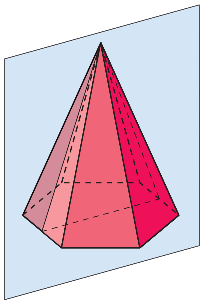
El tetraedro tiene 6 planos de simetría, uno por cada arista.



2 **Dibuja un prisma hexagonal regular. ¿Cuántos planos de simetría tiene? ¿Y cuántos tiene una pirámide hexagonal regular?**



El prisma hexagonal regular tiene seis planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases, y otro plano de simetría paralelo a las dos bases.

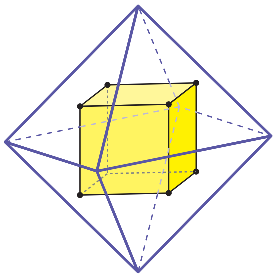


La pirámide hexagonal regular tiene seis planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases.

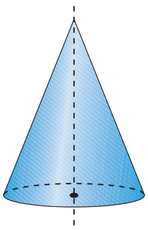
3 **Recuerda la relación de dualidad entre el cubo y el octaedro (caras-vértices).**

Basándote en los planos de simetría del cubo, describe todos los planos de simetría del octaedro.

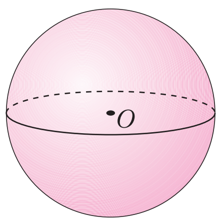
Todos los planos de simetría del cubo inscrito en el octaedro son también planos de simetría del octaedro. Por tanto, el octaedro y el cubo tienen el mismo número de planos de simetría.



4 **¿Qué planos de simetría tiene un cono? ¿Y una esfera?**



Cualquier plano que contiene al eje del cono es plano de simetría de este. Hay, pues, infinitos.



Cualquier plano que contenga al centro de la esfera es un plano de simetría de esta. Hay, pues, infinitos.

10 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

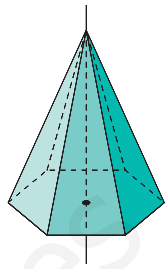
PÁGINA 197

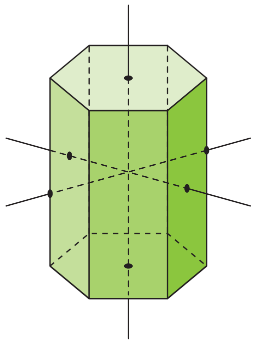
1 ¿Qué ejes de giro tiene una pirámide hexagonal regular? ¿De qué órdenes son? ¿Y un prisma hexagonal regular? (No pases por alto algunos de orden 2).

PIRÁMIDE HEXAGONAL

Hay solo un eje de giro de orden 6.

Pasa por el centro de la base y el vértice de la pirámide.

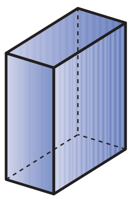




PRISMA HEXAGONAL

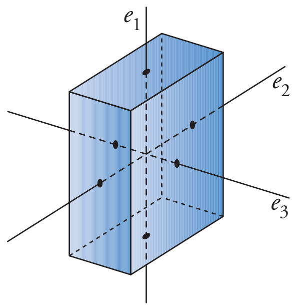
Hay un eje de giro de orden 6, el que pasa por el centro de las dos bases.

Hay 6 ejes de giro de orden 2: todos ellos son paralelos a las bases. 3 de ellos pasan por el punto medio de dos caras laterales opuestas, y los otros 3, por las aristas opuestas.

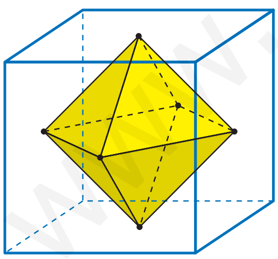
2 

¿Qué ejes de giro tiene un ortoedro con las tres dimensiones distintas? ¿De qué órdenes son?

Hay tres ejes de giro de orden 2, e_1, e_2 y e_3.



3 Estudia los ejes de giro del octaedro. Puedes basarte en los del cubo.



Todos los ejes de giro del cubo son también ejes de giro del octaedro inscrito en él. Por tanto, el octaedro y el cubo tienen el mismo número de ejes de giro y de los mismos órdenes. Es decir:

- Tres ejes de giro de orden cuatro, que pasan por dos vértices opuestos.
- Seis ejes de giro de orden dos, que pasan por los puntos medios de dos aristas opuestas.
- Cuatro ejes de giro de orden tres, que pasan por los centros de dos caras opuestas.

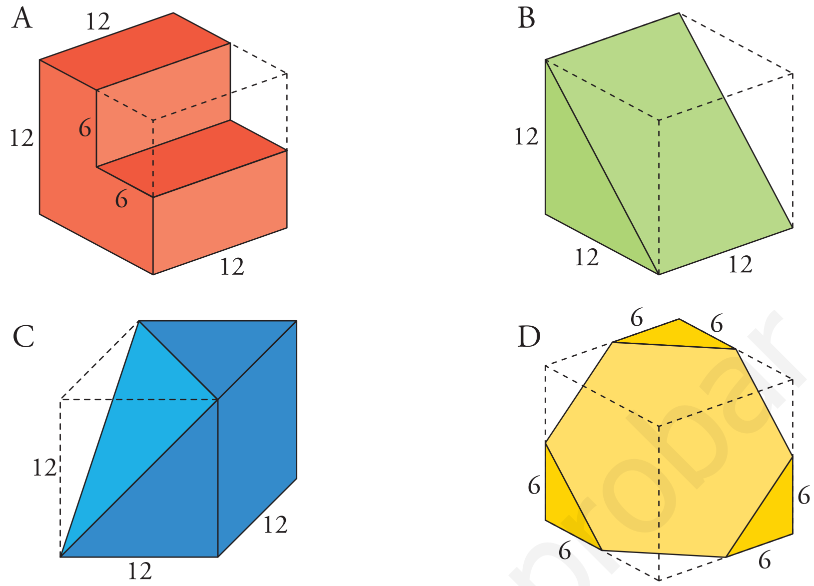
Al comparar estos ejes de giro con los del cubo, se puede observar la dualidad (caras ↔ vértices, aristas ↔ aristas):

- Los ejes que en el cubo pasan por los centros de caras opuestas, en el octaedro pasan por vértices opuestos.
- Los ejes que en el cubo pasan por aristas opuestas, en el octaedro pasan por aristas opuestas.
- Los ejes que en el cubo pasan por dos vértices opuestos del cubo, en el octaedro pasan por los centros de caras opuestas.

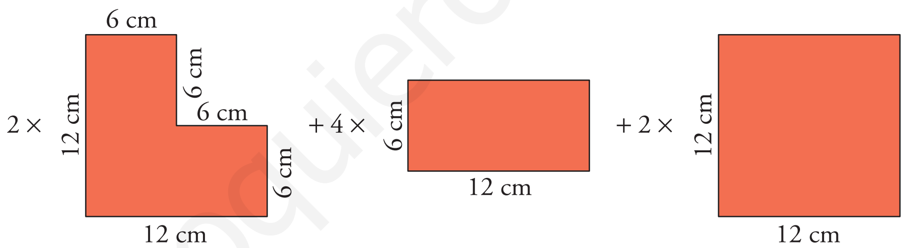
10 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 201

1 Calcula el área de estos poliedros obtenidos a partir de un cubo de 12 cm de arista:



Ⓐ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



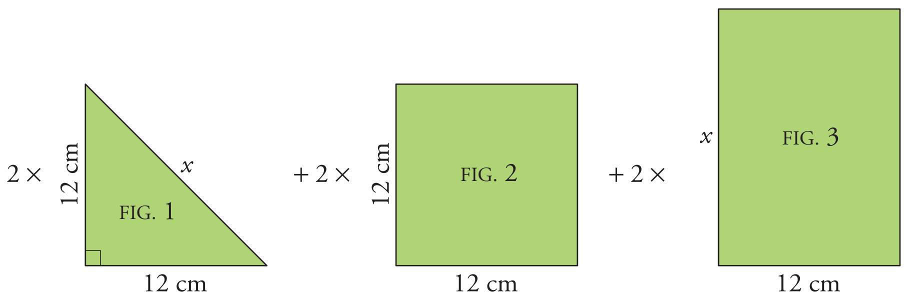
$A_{\text{FIG. 1}} = 12 \cdot 6 + 6 \cdot 6 = 108 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 2}} = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 108 + 4 \cdot 72 + 2 \cdot 144 = 792 \text{ cm}^2$

Ⓑ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



$x = \sqrt{12^2 + 12^2} \approx 16{,}97 \text{ cm}$

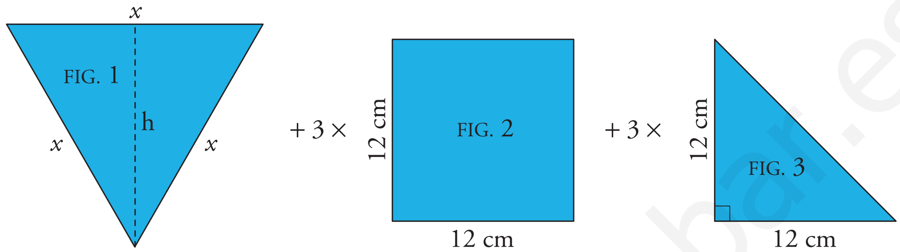
$A_{\text{FIG. 1}} = \dfrac{12^2}{2} = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 2}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 12 \cdot 16{,}97 = 203{,}64 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 72 + 2 \cdot 144 + 203{,}64 = 635{,}64 \text{ cm}^2$

Ⓒ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



$x \approx 16{,}97$ cm (ver Ⓑ); $\text{h} = \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \approx 14{,}70$ cm

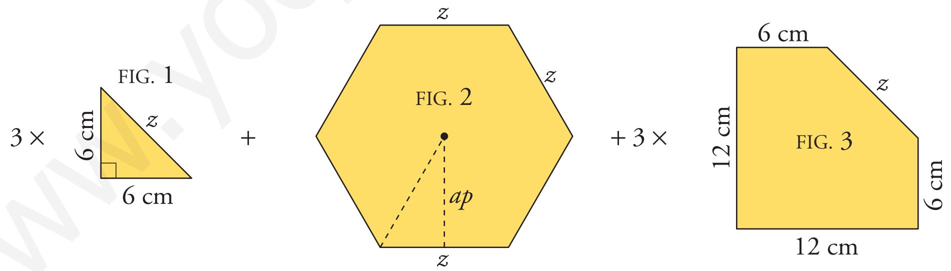
$A_{\text{FIG. 1}} = \dfrac{16{,}97 \cdot 14{,}70}{2} \approx 124{,}73 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 2}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 124{,}73 + 3 \cdot 144 + 3 \cdot 72 = 772{,}73 \text{ cm}^2$

Ⓓ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



$z = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}49$ cm

Apotema del hexágono regular: $ap = \sqrt{z^2 - \left(\dfrac{z}{2}\right)^2} = \dfrac{z\sqrt{3}}{2} \approx 7{,}35$ cm

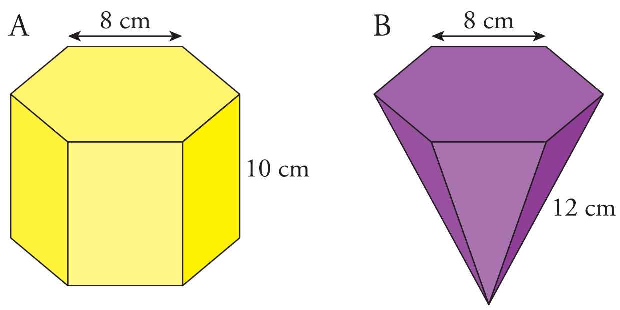
$A_{\text{FIG. 1}} = 18 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 2}} = \dfrac{6 \cdot 8{,}49 \cdot 7{,}35}{2} = 187{,}20 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 12 \cdot 12 - A_{\text{FIG. 1}} = 144 - 7{,}35 = 136{,}65 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 3 \cdot 7{,}35 + 187{,}20 + 3 \cdot 136{,}65 = 619{,}2 \text{ cm}^2$

2 **Obtén la medida de la superficie del prisma y de la pirámide. La base de ambos es un hexágono regular.**



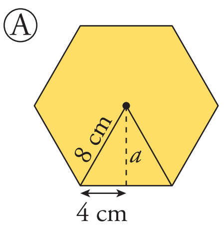
ARISTA BASE $\longrightarrow$ **8 cm**

ALTURA PRISMA $\longrightarrow$ **10 cm**

ARISTA BASE $\longrightarrow$ **8 cm**

ARISTA LATERAL $\longrightarrow$ **12 cm**

Ⓐ



$a = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93$ cm

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 = 166{,}32 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480 \text{ cm}^2$

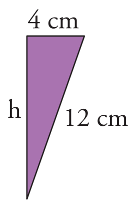
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 166{,}32 + 480 = 812{,}64 \text{ cm}^2$

Ⓑ $A_{\text{BASE}} = 166{,}32 \text{ cm}^2$

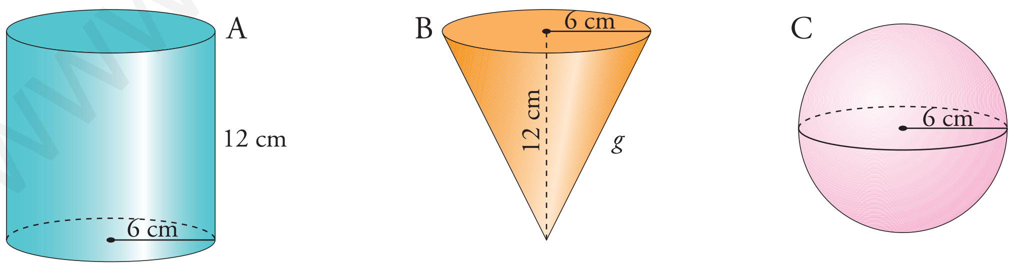
Apotema de la pirámide = h = $\sqrt{12^2 - 4^2} \approx 11{,}31$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{8 \cdot 11{,}31 \cdot 6}{2} = 271{,}44 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 166{,}32 + 271{,}44 = 437{,}76 \text{ cm}^2$



3 **Calcula el área de estos cuerpos:**



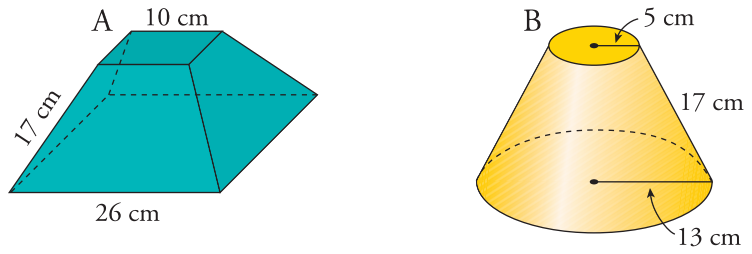
Ⓐ $A_{\text{TOTAL}} = 2\pi \cdot 6 \cdot 12 + 2\pi \cdot 6^2 \approx 678{,}58 \text{ cm}^2$

Ⓑ $g = \sqrt{12^2 + 6^2} \approx 13{,}42$ cm

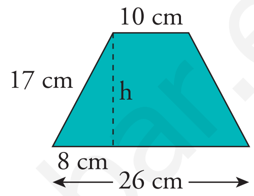
$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 6 \cdot 13{,}42 + \pi \cdot 6^2 \approx 366{,}06 \text{ cm}^2$

Ⓒ $A_{\text{TOTAL}} = 4\pi \cdot 6^2 \approx 452{,}39 \text{ cm}^2$

4 **Calcula el área de los siguientes cuerpos:**



Ⓐ $A_{\text{BASE GRANDE}} = 26^2 = 676 \text{ cm}^2$ $\qquad A_{\text{BASE PEQUEÑA}} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$



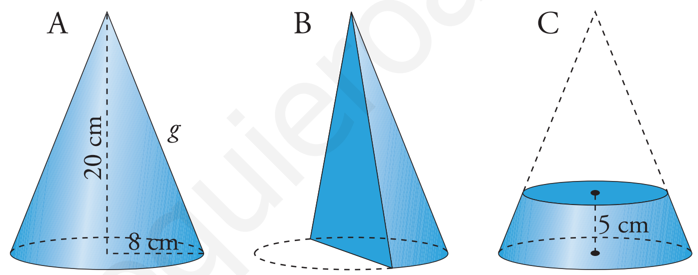
$h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 \text{ cm}$

$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \dfrac{26 + 10}{2} \cdot 15 = 1\,080 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 676 + 100 + 1\,080 = 1\,856 \text{ cm}^2$

Ⓑ $A = \pi \cdot 13^2 + \pi \cdot 5^2 + \pi(13 + 5) \cdot 17 = 530{,}93 + 78{,}54 + 961{,}33 = 1\,570{,}8 \text{ cm}^2$

5 **Calcula el área total del cono, del cuerpo que resulta de partirlo por la mitad y del tronco de cono obtenido al cortar por una sección paralela a la base, a 5 cm de la misma.**



Ⓐ $g = \sqrt{20^2 + 8^2} \approx 21{,}54 \text{ cm}$

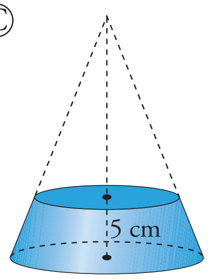
$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 8 \cdot 21{,}54 + \pi \cdot 8^2 = 742{,}42 \text{ cm}^2$

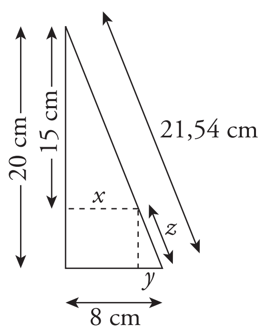
Ⓑ $A_{\text{BASE}} = \dfrac{\pi \cdot 8^2}{2} \approx 100{,}53 \text{ cm}^2$; $\quad A_{1/2 \text{ LATERAL}} = \dfrac{\pi \cdot 8 \cdot 21{,}54}{2} \approx 270{,}68 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{16 \cdot 20}{2} = 160 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 100{,}53 + 270{,}68 + 160 = 531{,}21 \text{ cm}^2$

Ⓒ





$\dfrac{20}{8} = \dfrac{15}{x} \rightarrow x = 6 \text{ cm}$

$y = 8 - 6 = 2 \text{ cm}$

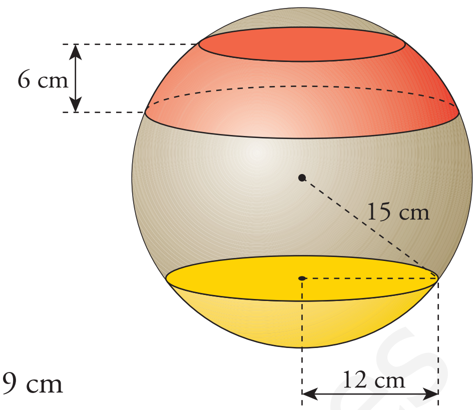
$z = \sqrt{5^2 + 2^2} \approx 5{,}39 \text{ cm}$

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot (8 + 6) \cdot 5{,}39 + \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 6^2 \approx 551{,}22 \text{ cm}^2$

6 **En una esfera de 30 cm de diámetro, calcula:**

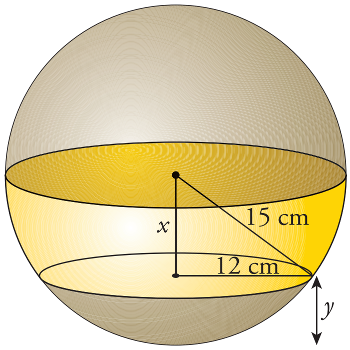
a) El área de una zona esférica de 6 cm de altura.

b) El área de un casquete esférico cuya base tiene un radio de 12 cm.



a) $A_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 \approx 565{,}49 \text{ cm}^2$

b)



$x = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ cm}$

$y = 15 - 9 = 6 \text{ cm}$

$A_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 \approx 565{,}49 \text{ cm}^2$

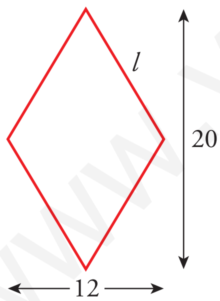
7 **Halla el área de:**

a) Un prisma recto cuya base es un rombo de diagonales 12 cm y 20 cm, sabiendo que su arista lateral mide 24 cm.

b) Una pirámide recta con la misma base y la misma arista lateral que el prisma anterior.

c) Un cuboctaedro de 10 cm de arista.

d) Un dodecaedro truncado de 10 cm de arista.



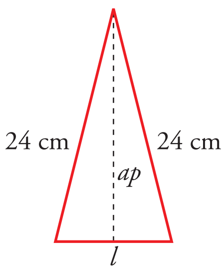
$l = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 11{,}66 \text{ cm}$

$A_{\text{ROMBO}} = \dfrac{20 \cdot 12}{2} = 120 \text{ cm}^2$

$P_{\text{ROMBO}} = 46{,}65 \text{ cm}$

a) $A_{\text{PRISMA}} = 2 \cdot A_{\text{ROMBO}} + P_{\text{ROMBO}} \cdot 24 = 1\,359{,}6 \text{ cm}^2$

b)



Cara lateral de la pirámide:

Apotema de la pirámide: $ap = \sqrt{24^2 + 34} = 4{,}97$

$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot l \cdot ap/2 = 115{,}90 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = 120 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PIRÁMIDE}} = 235{,}9 \text{ cm}^2$

c) 6 cuadrados $\rightarrow$ $A_1 = 6 \cdot 10^2 = 600 \text{ cm}^2$

8 triángulos $\rightarrow$ $A_2 = 8 \cdot (10 \cdot 10\sqrt{3}/2) : 2 = 346{,}41 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 946{,}41 \text{ cm}^2$

d) 12 pentágonos y 20 hexágonos.

Área de un pentágono de lado 10 cm:

$$A_1 = \frac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}88}{2} = 172 \text{ cm}^2$$

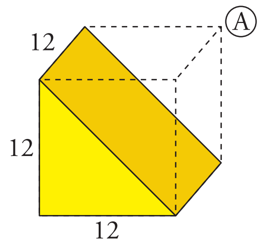
Área de un hexágono de lado 10 cm:

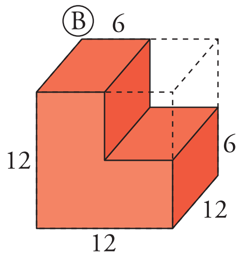
$$A_2 = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}80 \text{ cm}^2$$

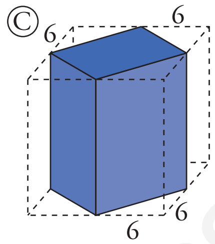
$A_{\text{TOTAL}} = 12 \cdot A_1 + 20 \cdot A_2 = 7\,260 \text{ cm}^2$

PÁGINA 203

1 Calcula el volumen de estos prismas, obtenidos cortando un cubo de 12 cm de arista:

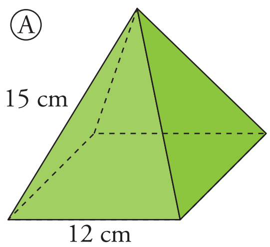


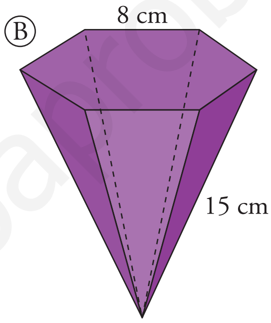


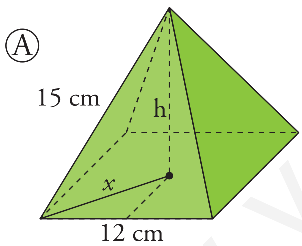


Ⓐ $V = \frac{12^3}{2} = 864 \text{ cm}^3$ Ⓑ $V = \frac{3}{4} \cdot 12^3 = 1\,296 \text{ cm}^3$ Ⓒ $V = \frac{12^3}{2} = 864 \text{ cm}^3$

2 Calcula el volumen de estas pirámides cuyas bases son polígonos regulares:



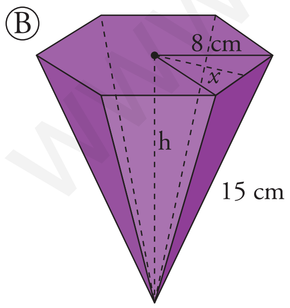




$x = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}49 \text{ cm}$

$h = \sqrt{15^2 - 8{,}46^2} \approx 12{,}37 \text{ cm}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 12{,}37 \approx 593{,}76 \text{ cm}^3$

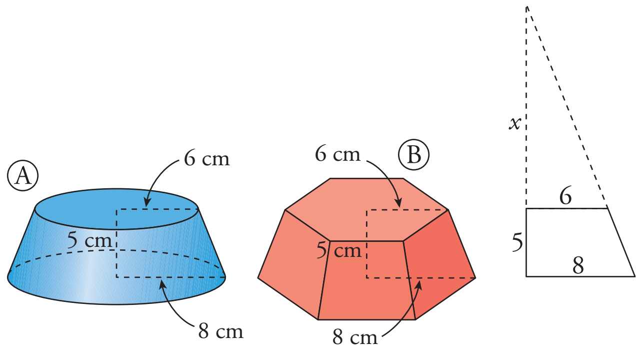


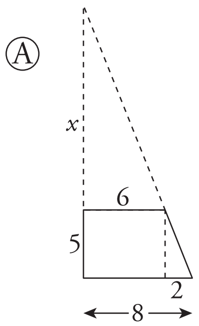
$h = \sqrt{15^2 - 8^2} \approx 12{,}69 \text{ cm}$

$x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93 \text{ cm}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 \cdot 12{,}69 \approx 703{,}53 \text{ cm}^3$

3 **Calcula el volumen del tronco de cono y el del tronco de pirámide.**



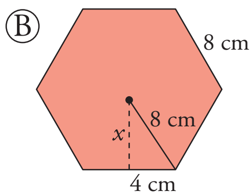


$$\frac{5}{2} = \frac{5 + x}{8} \rightarrow x = 15 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO MAYOR}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 20 = 1\,340{,}41 \text{ cm}^3$$

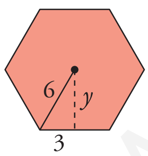
$$V_{\text{CONO MENOR}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 = 565{,}49 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 1\,340{,}41 - 565{,}49 = 774{,}92 \text{ cm}^3$$



$$x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93 \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 \cdot 20 = 1\,108{,}8 \text{ cm}^3$$



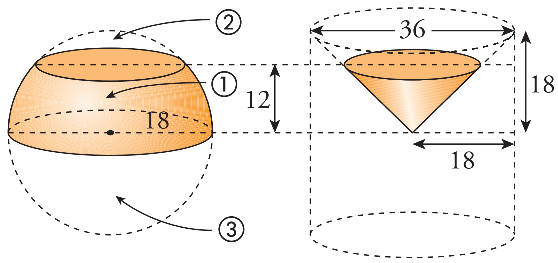
$$y = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}2 \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} \cdot 6 \cdot 15 = 468 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = 1\,108{,}8 - 468 = 640{,}8 \text{ cm}^3$$

4 **Se corta una esfera de 36 cm de diámetro por dos planos paralelos: uno pasa por el centro y el otro dista 12 cm del centro.**

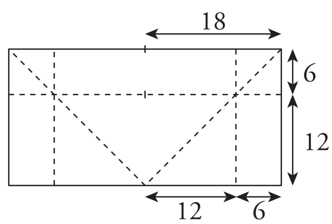
Calcula el volumen de cada una de las tres porciones en las que ha quedado dividida la esfera.



1) $V_{\text{PORCIÓN (1) CILINDRO}} = \pi \cdot 18^2 \cdot 12 = 3\,888\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO (1) CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 = 576\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (1) ESFERA}} = 3\,888\pi - 576\pi \approx 10\,404{,}95 \text{ cm}^3$



2) $V_{\text{PORCIÓN (2) CILINDRO}} = \pi \cdot 18^2 \cdot 6 = 1\,944\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (2) CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 18^2 \cdot 18 - \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 = 1\,368\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (2) ESFERA}} = 1\,944\pi - 1\,368\pi \approx 1\,809{,}56 \text{ cm}^3$

3) $V_{\text{PORCIÓN (3) ESFERA}} = \dfrac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 18^3}{2} = 12\,214{,}51 \text{ cm}^3$

PÁGINA 205

1 El metro, unidad de medida de longitud, se definía antiguamente como *la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre*. Es decir, un meridiano terrestre tiene 40 000 000 de metros. Según esto:

a) Calcula el radio de la Tierra en kilómetros.

b) Su superficie en kilómetros cuadrados.

c) Su volumen en kilómetros cúbicos.

d) Calcula el área de un huso horario.

a) Meridiano = Perímetro = $2\pi \cdot R$ = 40 000 000 m = 40 000 km

$R \approx 6\,366{,}2$ km

b) Superficie = $4\pi \cdot (6\,366{,}2)^2 = 509\,296\,182{,}1 \text{ km}^2$

c) Volumen = $\dfrac{4}{3}\pi \cdot (6\,366{,}2)^3 = 1{,}08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$

d) Área huso horario = $\dfrac{509\,296\,182{,}1}{24} = 21\,220\,674{,}25 \text{ km}^2$

2 Los paralelos son circunferencias menores. Calcula lo que mide el perímetro de los siguientes paralelos:

a) 60°

b) 30°

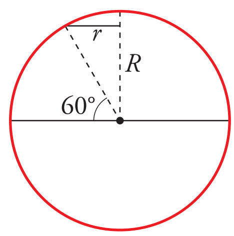
c) 45°

a) R = radio de la tierra = 6 366,2 km

r = radio del paralelo 60° = $\dfrac{R}{2}$ = 3 183,1 km

Perímetro = $2\pi \cdot 3\,183{,}1 \approx 20\,000$ km

$r = \dfrac{R}{2}$



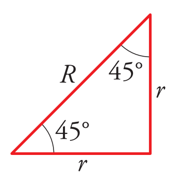
b) r = radio del paralelo 30° = $\sqrt{(6\,366{,}2)^2 - (3\,183{,}1)^2} \approx 5\,513{,}3$ km

Perímetro = $2\pi \cdot 5\,513{,}3 \approx 34\,641{,}1$ km

c) r = radio del paralelo 45°

$r^2 + r^2 = R^2 \;\rightarrow\; 2r^2 = 6\,366{,}2^2 \;\rightarrow\; r = 4\,501{,}58$ km

Perímetro = $2\pi \cdot 4\,501{,}58 = 28\,284{,}26$ km



3 Un barco va de un punto A, situado en las costas de África de 30° latitud norte y 10° longitud oeste, a otro B, en las costas de América de 30° latitud norte y 80° longitud oeste, siguiendo el paralelo común.

a) ¿Qué distancia ha recorrido?

b) ¿Qué distancia recorrería si la diferencia de longitudes de los dos puntos fuera de 180°?

c) ¿Qué distancia recorrería en este último caso si pudiera navegar de un punto a otro siguiendo un arco de círculo máximo?

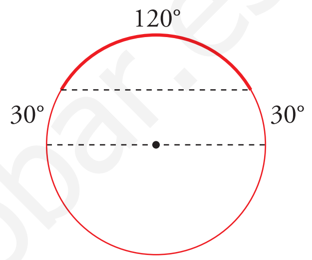
a) Entre A y B hay un arco de 80° – 10° = 70°.

Como hemos visto en el ejercicio anterior (ejercicio 2), el perímetro del paralelo 30° es 34 641,1 km.

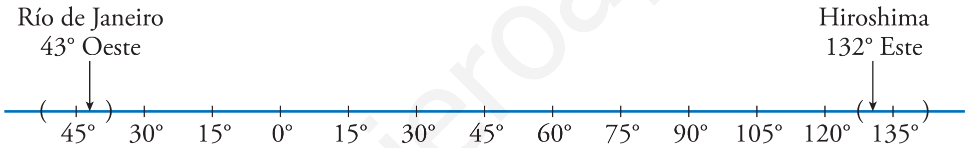
Por tanto, la distancia de A a B es $\dfrac{34\,641{,}1}{360°} \cdot 70° \approx 6\,735{,}77$ km.

b) $\dfrac{34\,641{,}1}{2} = 17\,320{,}55$ km

c) $40\,000 \cdot \dfrac{120°}{360°} = 13\,333{,}33$ km



4 En Río de Janeiro (43° O) son las 7 de la mañana. ¿Qué hora es en Hiroshima (132° E)?



Hay 12 horas de diferencia. Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde.

Otra forma de hacerlo es:

132° = 15° · 8 + 12

Hiroshima está en el huso horario número 9 al este.

43° = 15° · 2 + 13

Río de Janeiro está en el huso horario número 3 al oeste.

Están, pues, a 12 husos horarios de diferencia.

Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde (19 h).

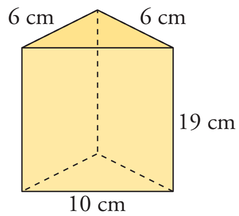
PÁGINA 209

Practica

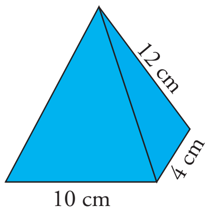
Desarrollos y áreas

1 ▼▽▽ **Dibuja el desarrollo plano y calcula el área total de los siguientes cuerpos geométricos:**

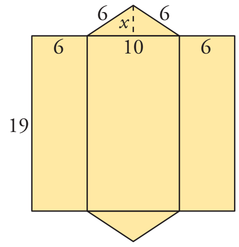
a)



b)



a)



Hallamos la altura de la base:

$6^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow 36 = x^2 + 25 \rightarrow x^2 = 36 - 25 = 11 \rightarrow$

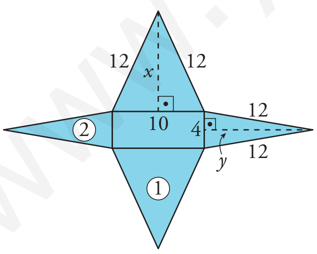
$\rightarrow x = \sqrt{11} \approx 3{,}3$ cm

Área base $= \dfrac{10 \cdot 3{,}3}{2} = 16{,}5$ cm^2

Área lateral = (Perímetro base) · altura = $22 \cdot 19 = 418$ cm^2

Área total = $418 + 2 \cdot 16{,}5 = 451$ cm^2

b) Hallamos x e y (alturas de las caras laterales):



$12^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow 144 = x^2 + 25 \rightarrow x^2 = 119 \rightarrow$

$\rightarrow x \approx 10{,}9$ cm

$12^2 = y^2 + 2^2 \rightarrow y^2 = 140 \rightarrow y \approx 11{,}8$ cm

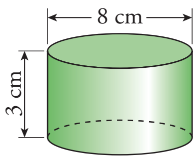
Área de las caras laterales:

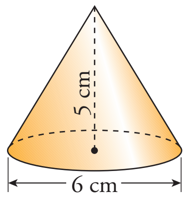
$A_{①} = \dfrac{10 \cdot 10{,}9}{2} = 54{,}5$ cm^2; $A_{②} = \dfrac{4 \cdot 11{,}8}{2} = 23{,}6$ cm^2

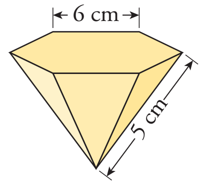
Área de la base = $10 \cdot 4 = 40$ cm^2

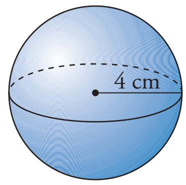
Área total = $40 + 2 \cdot 54{,}5 + 2 \cdot 23{,}6 = 196{,}2$ cm^2

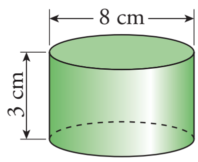
2 ▼▽▽ **Calcula la superficie total de cada cuerpo:**

a) 

b) 

c) 

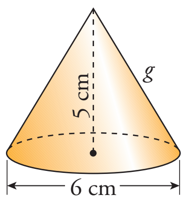
d) 

a) 

Área base = $\pi \cdot 4^2 \approx 50{,}27$ cm^2

Área lateral = $2\pi \cdot 4 \cdot 3 \approx 75{,}4$ cm^2

Área total = $2 \cdot 50{,}27 + 75{,}4 = 175{,}94$ cm^2

b) 

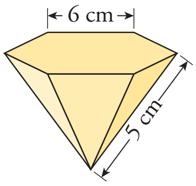
Área base = $\pi \cdot 3^2 \approx 28{,}27$ cm^2

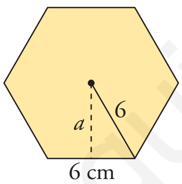
Hallamos la generatriz:

$g^2 = 5^2 + 3^2 \;\rightarrow\; g \approx 5{,}83$ cm

Área lateral = $\pi \cdot 3 \cdot 5{,}83 \approx 54{,}95$ cm^2

Área total = $28{,}27 + 54{,}95 = 83{,}22$ cm^2

c) 



Apotema del hexágono:

$a^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \;\rightarrow\; a = \sqrt{27} \approx 5{,}2$ cm

Área del hexágono:

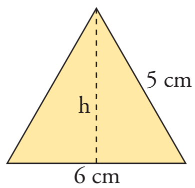
$\dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6$ cm^2

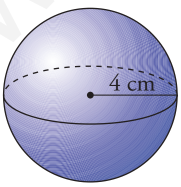
Altura del triángulo:

$h^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \;\rightarrow\; h = 4$ cm

Área de un triángulo = $\dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12$ cm^2

Área total = $93{,}6 + 6 \cdot 12 = 165{,}6$ cm^2



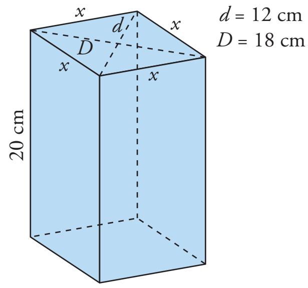
d) 

Área de la superficie esférica = $4\pi \cdot 4^2 = 201{,}1$ cm^2

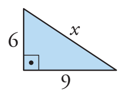
3 ▼▽▽ **Dibuja los siguientes cuerpos geométricos y calcula su área:**

a) Prisma de altura 20 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.

b) Pirámide hexagonal regular de arista lateral 18 cm y arista básica 6 cm.

a) 

Hallamos el lado del rombo:



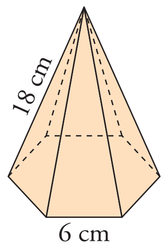
$x^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$

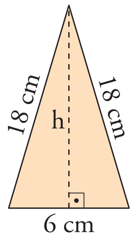
$x = \sqrt{117} \approx 10,82$ cm

Área lateral = $4(20 \cdot 10,82) = 865,6$ cm^2

Área base = $\dfrac{18 \cdot 12}{2} = 108$ cm^2

Área total = $865,6 + 108 \cdot 2 = 1\,081,6$ cm^2

b) 



Área de una cara lateral:

$h^2 = 18^2 - 3^2 \rightarrow$

$\rightarrow h^2 = 315 \rightarrow h = \sqrt{315} \approx 17,75$ cm

Área = $\dfrac{6 \cdot 17,75}{2} = 53,25$ cm^2

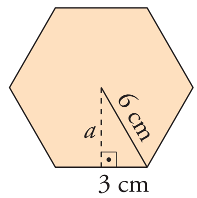
Área lateral = $6 \cdot 53,25 = 319,5$ cm^2

Área de la base:

$a^2 = 6^2 - 3^2 \rightarrow a^2 = 27 \rightarrow a = \sqrt{27} \approx 5,2$ cm

Área = $\dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5,2}{2} = 93,6$ cm^2

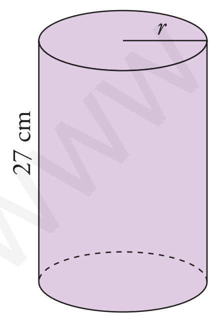
Área total = $319,5 + 93,6 = 413,1$ cm^2



4 ▼▽▽ **Dibuja los siguientes cuerpos geométricos y calcula su área:**

a) Cilindro de altura 27 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm.

b) Tronco de cono generado al girar, alrededor de su altura, un trapecio rectángulo de bases 10 cm y 12 cm y altura 5 cm.

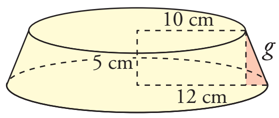
a) 

Radio de la base: $2\pi r = 44 \rightarrow r = \dfrac{44}{2\pi} = \dfrac{22}{\pi}$

Área base = $r^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{22}{\pi}\right)^2 = 154,1$ cm^2

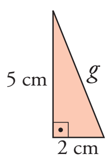
Área lateral = $(2\pi r) \cdot h = 2\pi \cdot \dfrac{22}{\pi} \cdot 27 = 1\,188$ cm^2

Área total = $2 \cdot 154,1 + 1\,188 = 1\,496,2$ cm^2

b) 

Área base menor = $\pi \cdot 10^2 = 100\pi \approx 314$ cm^2

Área base mayor = $\pi \cdot 12^2 = 144\pi \approx 452,16$ cm^2



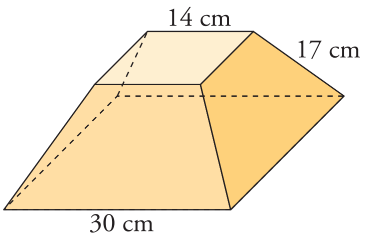
Área lateral = $\pi(r + r') \cdot g$

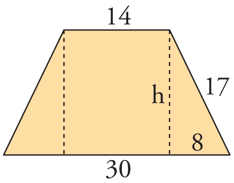
$g^2 = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29 \rightarrow g = \sqrt{29} \approx 5,39$ cm

Área lateral = $\pi(10 + 12) \cdot 5,39 \approx 372,34$ cm^2

Área total = $372,34 + 314 + 452,16 = 1\,138,50$ cm^2

5 ▼▽▽ **Halla el área total de un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas bases tienen de lado 30 cm y 14 cm y cuya arista lateral mide 17 cm.**





- Área base menor = $14^2 = 196$ cm^2
- Área base mayor = $30^2 = 900$ cm^2
- Área lateral:

$30 - 14 = 16 \quad 8 \quad 16 : 2 = 8$

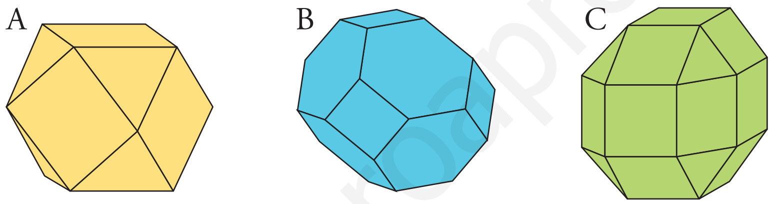
$h^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \quad \to \quad h = 15$ cm

Área trapecio $= \dfrac{(14 + 30) \cdot 15}{2} = 330$ cm^2

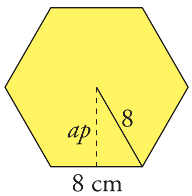
Área lateral $= 4 \cdot 330 = 1\,320$ cm^2

- Área total $= 196 + 900 + 1\,320 = 2\,416$ cm^2

6 ▼▽▽ **Calcula el área total de los siguientes poliedros semirregulares de arista 8 cm:**



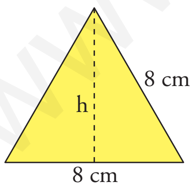
- Área de un hexágono regular de 8 cm de lado:



$ap^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \quad \to \quad ap = \sqrt{48} \approx 6{,}93$ cm

Área $= \dfrac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}93}{2} = 166{,}32$ cm^2

- Área de un triángulo equilátero de 8 cm de lado:

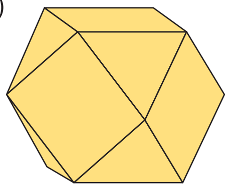


$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \quad \to \quad h = \sqrt{48} \approx 6{,}93$ cm

Área $= \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72$ cm^2

ÁREAS DE LOS POLIEDROS

A)

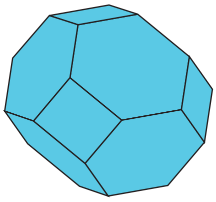


Seis cuadrados y ocho triángulos.

$A = 6 \cdot 8^2 + 8 \cdot 27{,}72 = 605{,}76$ cm^2

10 Soluciones a “Ejercicios y problemas”

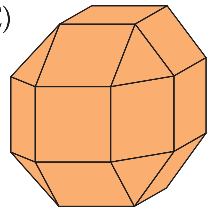
B)



Seis cuadrados y ocho hexágonos.

$A = 6 \cdot 8^2 + 8 \cdot 166{,}32 = 1\,714{,}56 \text{ cm}^2$

C)

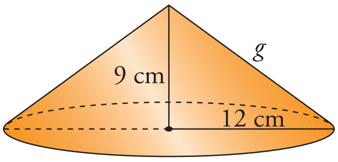


Tiene 18 cuadrados y 8 triángulos.

$A = 18 \cdot 8^2 + 8 \cdot 27{,}72 = 1\,373{,}76 \text{ cm}^2$

7 ▼▽▽ **Haciendo girar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 9 cm y 12 cm alrededor de cada uno de ellos, se obtienen dos conos. Dibújalos y halla el área total de cada uno de ellos.**

a)



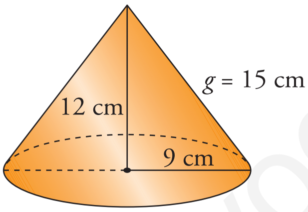
- Área base $= \pi \cdot 12^2 = 144\pi \text{ cm}^2$
- Área lateral:

  $g^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \;\rightarrow\; g = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$

  $A = \pi \cdot 12 \cdot 15 = 180\pi \text{ cm}^2$

- Área total $= 144 \cdot \pi + 180\pi = 324\pi \approx 1\,017{,}88 \text{ cm}^2$

b)

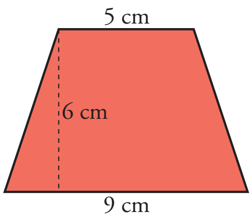


Área base $= \pi \cdot 9^2 = 81\pi \text{ cm}^2$

Área lateral $= \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi \text{ cm}^2$

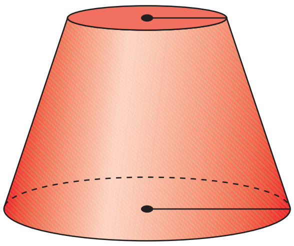
Área total $= 81\pi + 135\pi = 216\pi \approx 678{,}58 \text{ cm}^2$

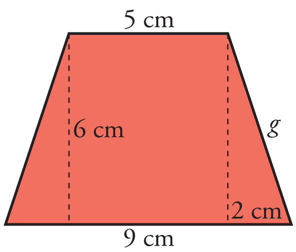
8 ▼▽▽ **Calcula el área total del tronco de cono generado al girar este trapecio isósceles alrededor de una recta perpendicular a sus bases en su punto medio:**



Calculamos la generatriz:

$g^2 = 6^2 + 2^2 \;\rightarrow\; g = \sqrt{40} \approx 6{,}32 \text{ cm}$



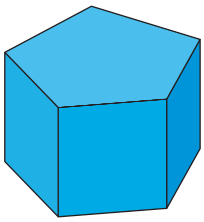


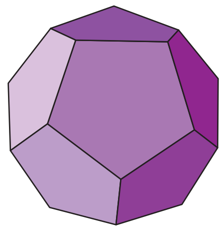
- Área lateral $= \pi(r + r')g = \pi(4{,}5 + 2{,}5) \cdot 6{,}32 = 138{,}98 \text{ cm}^2$
- Área de las bases $= \pi \cdot 4{,}5^2 + \pi \cdot 2{,}5^2 = 83{,}25 \text{ cm}^2$
- Área total $= 138{,}98 + 83{,}25 = 222{,}23 \text{ cm}^2$

9 ▼▽▽ **Calcula la superficie de:**

a) Un prisma recto pentagonal regular cuyas aristas miden, todas, 10 cm.

b) Un dodecaedro regular de arista 10 cm.





a) Apotema del pentágono = 6,88 cm

$S_{BASE} = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}88}{2} = 172 \text{ cm}^2$ $\qquad S_{LATERAL} = 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500 \text{ cm}^2$

$S_{TOTAL} = 172 \cdot 2 + 500 = 844 \text{ cm}^2$

b) $S_{TOTAL} = S_{PENTÁGONO} \cdot 12 = 172 \cdot 12 = 2\,064 \text{ cm}^2$

Volúmenes

10 ▼▽▽ **Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:**

a) Octaedro regular de arista 10 cm.

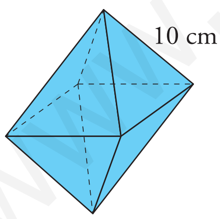
b) Pirámide hexagonal regular cuya arista lateral mide 15 cm y la arista de la base 8 cm.

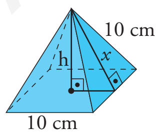
c) Cono de radio 9 cm y generatriz 15 cm.

d) Semiesfera de radio 10 cm.

e) Cilindro inscrito en un prisma recto de base cuadrada de lado 6 cm y altura 18 cm.

a) Podemos descomponerlo en dos pirámides cuadrangulares de arista 10 cm.





$x^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \;\rightarrow\; x = \sqrt{75}$ cm

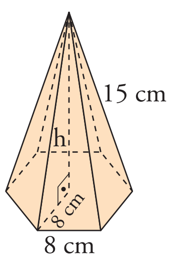
$h^2 = x^2 - 5^2 = 75 - 25 = 50 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; h = \sqrt{50} \approx 7{,}07$ cm

Volumen de la pirámide: $V = \dfrac{1}{3}(\text{Área base}) \cdot \text{altura} = \dfrac{1}{3}10^2 \cdot 7{,}07 \approx 235{,}67 \text{ cm}^3$

Volumen del octaedro = $2 \cdot 235{,}67 \approx 471{,}34 \text{ cm}^3$

b)



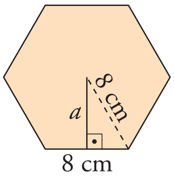
- Calculamos la altura de la pirámide:

  $h^2 = 15^2 - 8^2 = 161 \;\rightarrow\; h = \sqrt{161} \approx 12{,}69$ cm

- Hallamos el área de la base:

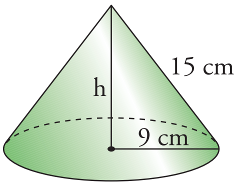
  $a^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \;\rightarrow\; a = \sqrt{48} \approx 6{,}93$ cm

- Área $= \dfrac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}93}{2} = 166{,}32 \text{ cm}^2$



• Volumen $= \frac{1}{3}(\text{Área base}) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 166{,}32 \cdot 12{,}69 \approx 703{,}53 \text{ cm}^3$

c)



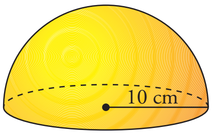
• Hallamos la altura:

$h^2 = 15^2 - 9^2 = 144 \rightarrow h = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$

• Área de la base $= \pi R^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$

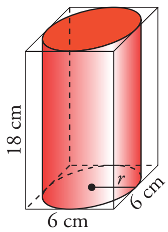
• Volumen $= \frac{1}{3}(\text{Área base}) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 12 = 36\pi \approx 113{,}1 \text{ cm}^3$

d)



$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4\,000\pi}{6} \approx 2\,094{,}4 \text{ cm}^3$

e)



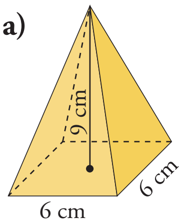
Radio del cilindro = 3 cm

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 18 = 162\pi \approx 508{,}94 \text{ cm}^3$

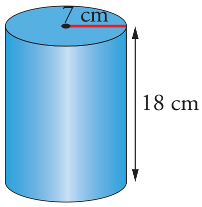
PÁGINA 210

11 ▼▽▽ **Calcula el volumen de estos cuerpos:**

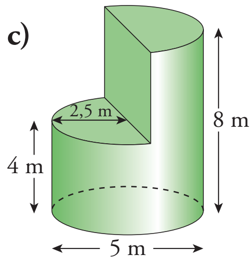
a)



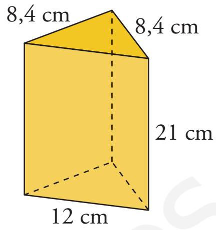
b)



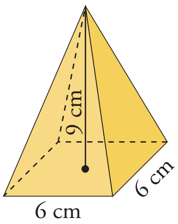
c)



d)



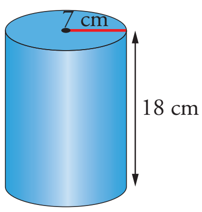
a)



$$V = \frac{1}{3} 6^2 \cdot 9 \text{ cm}^3$$

$$V = 108 \text{ cm}^3$$

b)

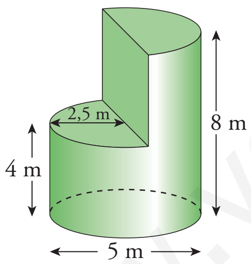


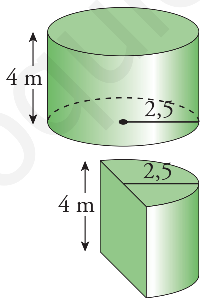
$$V = \pi R^2 \text{h}$$

$$V = \pi \cdot 7^2 \cdot 18 = 882\pi \text{ cm}^3$$

$$V = 2\,770{,}88 \text{ cm}^3$$

c)





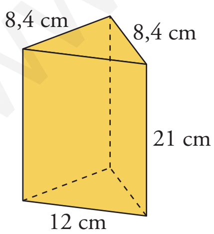
$$V_1 = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 4 = 25\pi \text{ m}^3$$

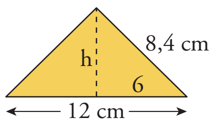
$$V_2 = \frac{\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 4}{2} = 12{,}5\pi \text{ m}^3$$

Volumen total:

$$25\pi + 12{,}5\pi \approx 117{,}81 \text{ m}^3$$

d)





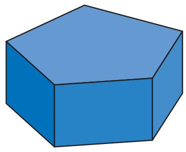
$$\text{h}^2 = 8{,}4^2 - 6^2 = 34{,}56 \;\rightarrow\; \text{h} \approx 5{,}88 \text{ cm}$$

$$\text{Área de la base} = \frac{12 \cdot 5{,}88}{2} = 35{,}28 \text{ cm}^2$$

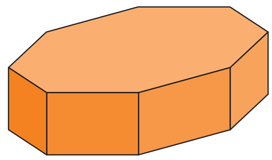
$$\text{Volumen} = \text{Área base} \cdot \text{altura} = 35{,}28 \cdot 25 = 740{,}88 \text{ cm}^3$$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

12 ▼▽▽ **Calcula el volumen de estos dos prismas regulares. En ambos, la arista de la base mide 10 cm y la altura, 8 cm.**



P. PENTAGONAL



P. OCTOGONAL

Apotema del pentágono = 6,88 cm

Apotema del octógono = 12,07 cm

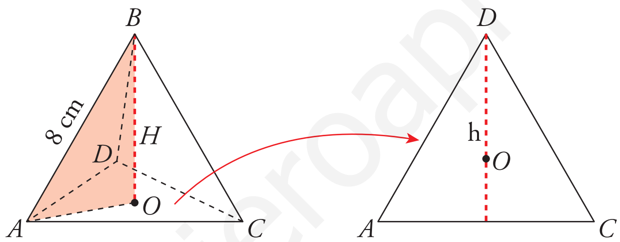
Superficie de la base del prisma pentagonal = $\dfrac{10 \cdot 5 \cdot 6{,}88}{2} \approx 172 \text{ cm}^2$

Superficie de la base del prisma octogonal = $\dfrac{10 \cdot 8 \cdot 12{,}07}{2} \approx 482{,}8 \text{ cm}^2$

$V_{\text{PRISMA PENTAGONAL}} = 172 \cdot 8 = 1\,376 \text{ cm}^3$

$V_{\text{PRISMA OCTOGONAL}} = 482{,}8 \cdot 8 = 3\,862{,}4 \text{ cm}^3$

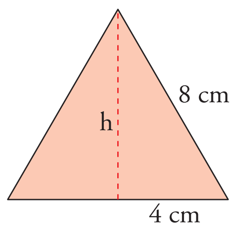
13 ▼▼▽ **Calcula el volumen de este tetraedro regular:**



☞ ***Para hallar la altura H, recuerda que $\overline{AO} = \frac{2}{3}$h, donde h es la altura de una cara.***

$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48$

$\left.\begin{array}{l} h = \sqrt{48} \approx 6{,}93 \\ \overline{AO} = \dfrac{2}{3} \cdot 6{,}93 = 4{,}62 \end{array}\right\}$ Área de la base: $A = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ cm}^2$

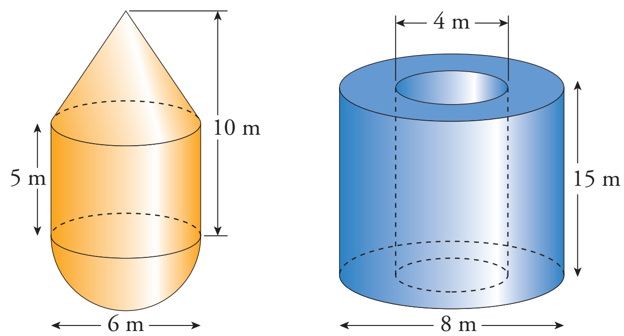


Calculamos la altura del tetraedro:

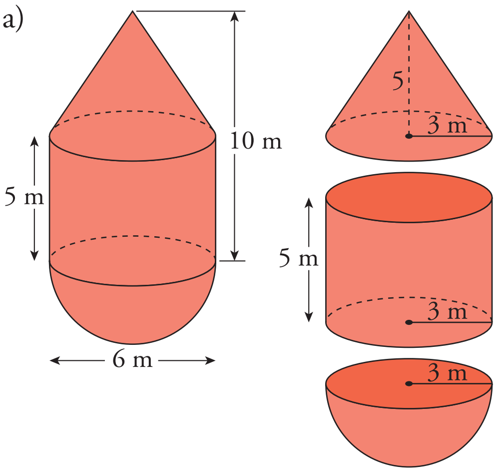
$H^2 = 8^2 - 4{,}62^2 \rightarrow H \approx 6{,}53 \text{ cm}$

Volumen = $\dfrac{1}{3} \cdot 27{,}72 \cdot 6{,}53 = 60{,}34 \text{ cm}^3$

14 ▼▽▽ **Calcula el volumen de estos cuerpos:**



a)



$$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 15\pi \text{ m}^3$$

$$V_{\text{CILINDRO}} = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 45\pi \text{ m}^3$$

$$V_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi \text{ m}^3$$

$$V_{\text{TOTAL}} = 15\pi + 45\pi + 18\pi = 78\pi \approx 245{,}04 \text{ m}^3$$

b) $V_{\text{CILINDRO GRANDE}} = \pi \cdot R^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 15 = 240\pi \text{ m}^3$

$V_{\text{CILINDRO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 2^2 \cdot 15 = 60\pi \text{ m}^3$

$V_{\text{TOTAL}} = 240\pi - 60\pi = 180\pi \approx 565{,}49 \text{ m}^3$

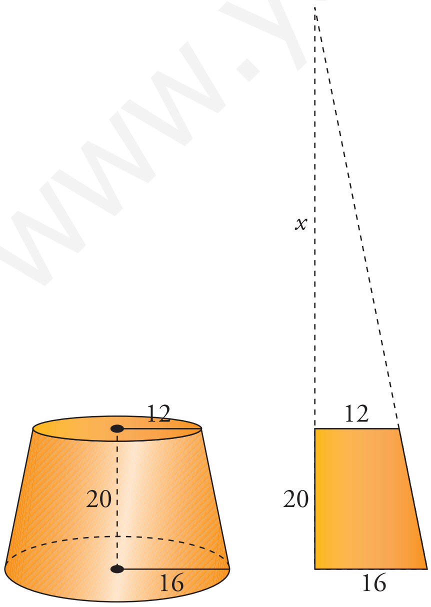
15 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno

16 ▼▼▽ **Calcula el volumen de un tronco de cono de radios 12 cm y 16 cm y altura 20 cm.**

Calculamos las alturas de los conos que forman el tronco:

$$\frac{x}{12} = \frac{x+20}{16} \rightarrow 16x = 12x + 240 \rightarrow 4x = 240 \rightarrow x = 60 \text{ cm} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = 20 + 60 = 80 \text{ cm}$$



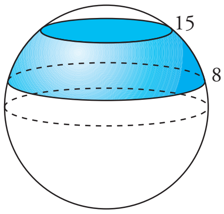
$$V_{\text{TRONCO}} = V_{\text{CONO MAYOR}} - V_{\text{CONO MENOR}} =$$

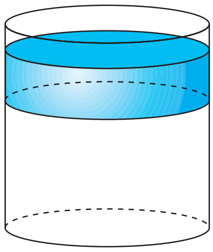
$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 80 - \frac{1}{3}\pi \cdot 12 \cdot 60 =$$

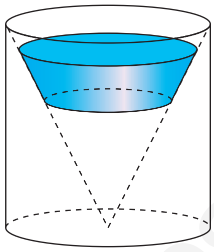
$$= \frac{560}{3}\pi \approx 586{,}43 \text{ cm}^3$$

17 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno

18 ▼▼▼ **Se corta una esfera de 50 cm de diámetro por dos planos paralelos a 8 cm y 15 cm del centro, respectivamente. Halla el volumen de la porción de esfera comprendida entre ambos planos.**







$V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 50^2(15 - 8) = 17\,500\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 50^2 \cdot 15 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 50^2 \cdot 8 = 5\,833{,}33\pi \text{ cm}^3$

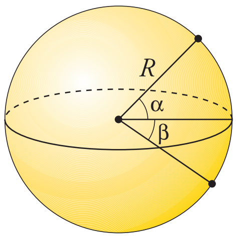
$V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO CONO}} =$

$= 17\,500\pi - 5\,833{,}33\pi = 11\,666{,}67\pi \text{ cm}^3 \approx 36\,651{,}9 \text{ cm}^3$

PÁGINA 211

Coordenadas geográficas

19 ▼▽▽ **Dos ciudades tienen la misma longitud, 15° E, y sus latitudes son 37° 25' N y 22° 35' S. ¿Cuál es la distancia entre ellas?**



$\alpha = 37°\ 25'$

$\beta = 22°\ 35'$

Tenemos que hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de $\alpha + \beta = 37°\ 25' + 22°\ 35' = 60°$

$$\text{Distancia} = \frac{2\pi R \cdot 60°}{360°} = \frac{2\pi \cdot 6\,370 \cdot 60}{360} \approx 6\,670{,}65 \text{ km}$$

20 ▼▽▽ **Cuando en el huso 0 son las 8 a.m., ¿qué hora es en el tercer huso al E? ¿Y en el quinto al O?**

En el huso 3° E son tres horas más, es decir, las 11 a.m.

En el huso 5° O son cinco horas menos, es decir, las 3 a.m.

21 ▼▽▽ **La “milla marina” es la distancia entre dos puntos del ecuador cuya diferencia de longitudes es 1'. Calcula la longitud de una “milla marina”.**

$1' = \frac{1}{60}$ grados; radio de la Tierra: $R \approx 6\,370$ km

$$\text{Milla marina} \;\rightarrow\; \frac{2\pi R \cdot \frac{1}{60}}{360} = \frac{2\pi R}{21\,600} \approx \frac{2\pi \cdot 6\,370}{21\,600} \approx 1{,}85 \text{ km}$$

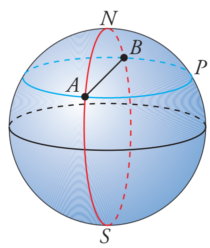
22 ▼▼▽ **Roma está en el primer huso al E y Nueva York, en el quinto al O. Si un avión sale de Roma a las 11 p.m. y el vuelo dura 8 h, ¿cuál será la hora local de llegada a Nueva York?**

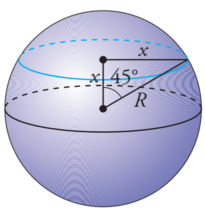
5 + 1 = 6 horas menos en Nueva York que en Roma.

11 p.m. + 8 = 19 $\rightarrow$ 7 a.m. hora de Roma.

19 – 6 = 13 p.m. = 1 a.m. es la hora de llegada a Nueva York.

23 ▼▼▽ **Un avión tiene que ir de *A* a *B*, dos lugares diametralmente opuestos en el paralelo 45°. Puede hacerlo siguiendo el paralelo (*APB*) o siguiendo la ruta polar (*ANB*). ¿Cuál es la más corta?**





• Hallamos el radio del paralelo 45°:

$$R^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{R^2}{2} \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{6\,370}{\sqrt{2}} \approx 4\,504{,}27 \text{ km}$$

Por tanto, la longitud del arco APB, es:

$$L_{APB} = \frac{2\pi \cdot 4\,504{,}27}{2} \approx \pi \cdot 4\,504{,}27 \approx 14\,143{,}41 \text{ km}$$

- El radio de la Tierra es $R \approx 6\,370$ km.

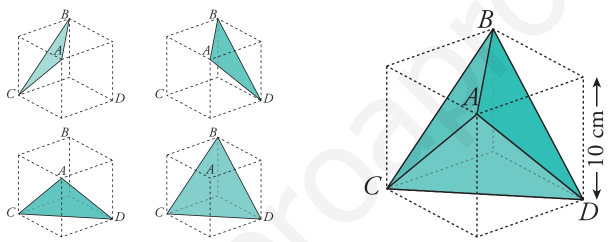
  Para ir de A a B por la ruta ANB, se abarca un ángulo de 45° + 45° = 90° sobre el meridiano. Por tanto, la longitud del arco ANB es:

$$L_{ANB} = \frac{2\pi R \cdot 90°}{360°} = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2} \approx \frac{\pi \cdot 6\,370}{2} \approx 10\,000{,}9 \text{ km}$$

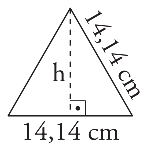
- La ruta más corta es la polar.

Piensa y resuelve

24 ▼▽▽ **¿Cuál es la superficie del mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo de 10 cm de arista?**



El lado, x, de los triángulos equiláteros que forman el tetraedro es la diagonal de una de las caras del cubo.



$x = \sqrt{10^2 + 10^2} \approx 14{,}14$ cm

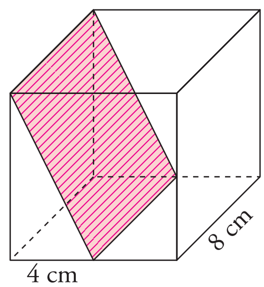
$h = \sqrt{14{,}14^2 - 7{,}07^2} \approx 12{,}25$ cm

El área del triángulo es: $A = \dfrac{14{,}14 \cdot 12{,}25}{2} \approx 86{,}61 \text{ cm}^2$

El área del tetraedro es: $A_T = 4 \cdot 86{,}61 = 346{,}44 \text{ cm}^2$

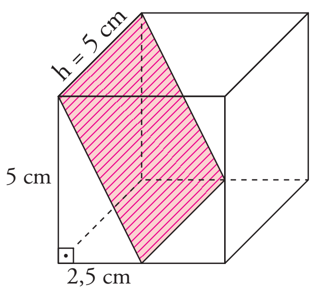
25 ▼▽▽ **Seccionamos un cubo como indica la figura.**

¿Cuál es el volumen de las partes seccionadas?



- Tomamos como base el triángulo rectángulo:

  Área base $= \dfrac{5 \cdot 2{,}5}{2} = 6{,}25 \text{ cm}^2$



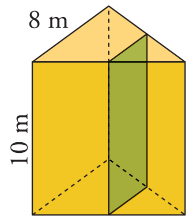
- El volumen de la menor parte seccionada será:

  $V = (\text{Área base}) \cdot h = 6{,}25 \cdot 5 = 31{,}25 \text{ cm}^3$

- Volumen de la parte mayor seccionada:

  $V = 5^3 - 31{,}25 = 93{,}75 \text{ cm}^3$

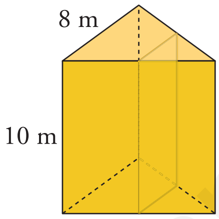
26 ▼▼▽ **Cortamos un prisma triangular regular por un plano perpendicular a las bases y que pasa por el punto medio de dos aristas. Calcula el volumen de los dos prismas que se obtienen.**

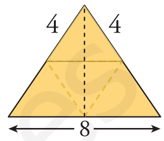


- Área del triángulo equilátero de lado 8 m:

$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \quad \rightarrow \quad h \approx 6{,}93$ m

$A = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} \approx 27{,}71 \text{ m}^2$





- Área del triángulo equilátero de lado 4 cm:

$A' = \dfrac{A}{4} = 6{,}93 \text{ m}^2$

- Volumen del prisma pequeño:

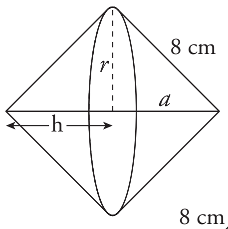
$V_1 = (A_{\text{BASE}}) \cdot h = 6{,}93 \cdot 10 = 69{,}3 \text{ m}^3$

- Para obtener el volumen del prisma grande, restamos V_1 al volumen del prisma triangular inicial:

$V = 27{,}71 \cdot 10 - 6{,}93 \cdot 10 = 207{,}8 \text{ m}^3$

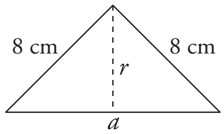
27 ▼▼▽ **Un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 8 cm, se hace girar alrededor de la hipotenusa. Halla el volumen del cuerpo que se forma.**

Se forman dos conos iguales cuya altura es la mitad de la hipotenusa.



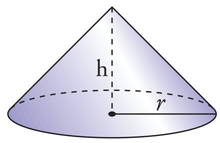
$a^2 = 8^2 + 8^2 = 128 \quad \rightarrow \quad a = 11{,}31$ cm

$r^2 = 8^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = 64 - 32 = 32 \quad \rightarrow \quad r \approx 5{,}66$ cm



Radio de la base: $r = 5{,}66$ cm

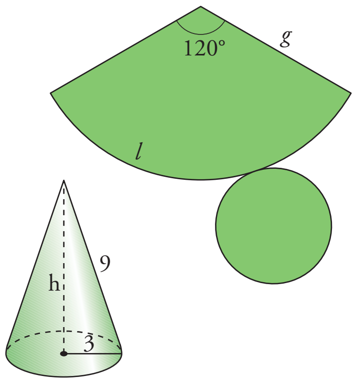
Altura $= h = \dfrac{a}{2} = \dfrac{11{,}31}{2} = 5{,}56$ cm



$V_{\text{CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5{,}66 \cdot 5{,}66 = 189{,}67 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 189{,}67 = 379{,}34 \text{ cm}^3$

28 ▼▼▽ **El desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector circular de 120° de amplitud y cuya área es 84,78 cm². Halla el área total y el volumen del cono.**



- Generatriz del cono:

$\dfrac{\pi g^2}{84{,}78} = \dfrac{360}{120} \quad \rightarrow \quad g^2 = \dfrac{3 \cdot 84{,}78}{\pi} \quad \rightarrow \quad g \approx 9$ cm

- Radio de la base: $2\pi r = l$

$\dfrac{2 \cdot \pi \cdot 9}{l} = \dfrac{360}{120} \quad \rightarrow \quad 18\pi = 3l \quad \rightarrow \quad l = 6\pi$ cm

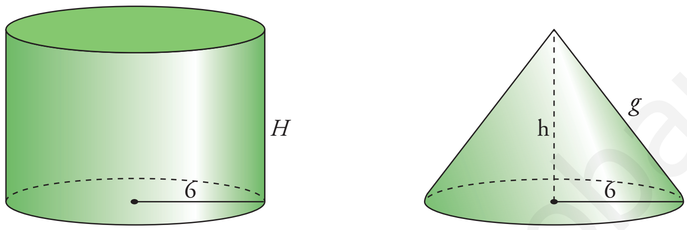
$2\pi r = 6\pi \quad \rightarrow \quad r = 3$ cm

- Área base $= \pi \cdot 3^2 = 9\pi \approx 28,27$
- Área lateral $= 84,78$

$\left.\right\}$ Área total $= 28,27 + 84,78 = 113,05 \text{ cm}^2$

- Altura del cono: $h^2 = 9^2 - 3^2 = 72 \quad \to \quad h \approx 8,49 \text{ cm}$
- Volumen cono $= \frac{1}{3}(\text{Área base}) \cdot h = \frac{1}{3} 28,27 \cdot 8,49 \approx 80 \text{ cm}^3$

29 ▼▼▽ **Un cilindro y un cono tienen la misma superficie total, 96π cm², y el mismo radio, 6 cm. ¿Cuál de los dos tendrá mayor volumen?**



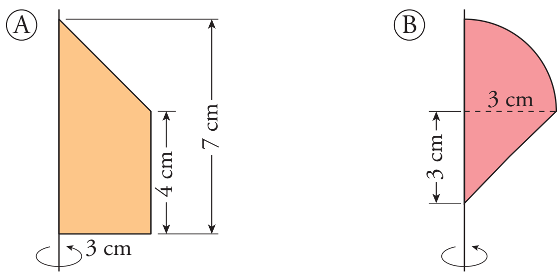
- Área total del cilindro $= 2\pi \cdot 6h + 2\pi \cdot 6^2$

  $84\pi H = 96\pi \quad \to \quad H = 1,14 \text{ cm}$
- Volumen del cilindro $= \pi \cdot 6^2 \cdot 1,14 = 128,93 \text{ cm}^3$
- Área total del cono $= \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6g \quad \to \quad 36\pi + 6\pi g = 96\pi \quad \to$

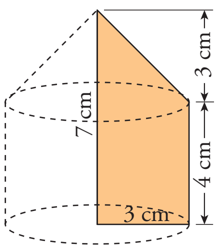
  $\to \quad 6\pi g = 60\pi \quad \to \quad g = 10 \text{ cm}$
- Altura del cono: $h^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \quad \to \quad h = 8 \text{ cm}$
- Volumen del cono $= \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 \approx 301,59 \text{ cm}^3$

Tiene mayor volumen el cono.

30 ▼▽▽ **Calcula el volumen de los cuerpos de revolución que genera cada una de estas figuras planas al girar alrededor del eje indicado:**



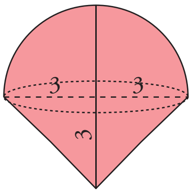
Ⓐ



Ⓐ

- $V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi \text{ cm}^3$
- $V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi \text{ cm}^3$
- $V_{\text{TOTAL}} = 36\pi + 9\pi = 45\pi = 141,37 \text{ cm}^3$

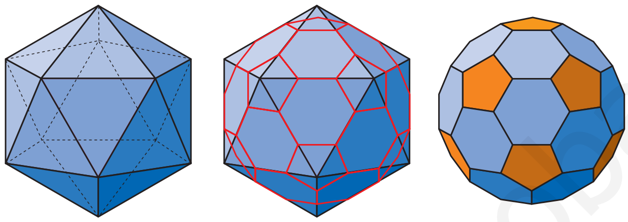
Ⓑ



Ⓑ

- $V_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi \text{ cm}^3$
- $V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi \text{ cm}^3$
- $V_{\text{TOTAL}} = 18\pi + 9\pi = 27\pi = 84{,}82 \text{ cm}^3$

31 ▼▼▽ **Truncando un icosaedro regular de 30 cm de arista hemos obtenido este poliedro semirregular (troncoicosaedro).**



a) ¿Cuántos vértices y caras tiene el icosaedro?

b) ¿Cuántos pentágonos y cuántos hexágonos forman la superficie del poliedro obtenido tras el truncamiento?

c) Calcula la superficie de este último.

a) El icosaedro tiene 12 vértices y 20 caras.

b) 20 hexágonos y 12 pentágonos.

c) Las aristas del poliedro truncado miden 10 cm.

Apotema de una cara hexagonal = 8,66 cm

Apotema de una cara pentagonal = 6,88 cm

Superficie de una cara hexagonal = $\frac{10 \cdot 6 \cdot 8{,}66}{2} \approx 259{,}8 \text{ cm}^2$

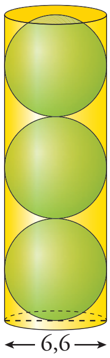
Superficie de una cara pentagonal = $\frac{10 \cdot 5 \cdot 6{,}88}{2} \approx 172 \text{ cm}^2$

Superficie del poliedro = $20 \cdot 259{,}8 + 12 \cdot 172 = 7\,260 \text{ cm}^2$

PÁGINA 212

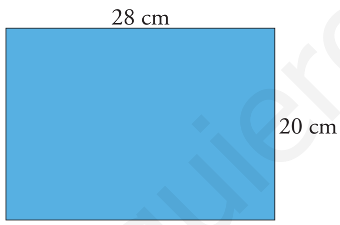
Resuelve problemas

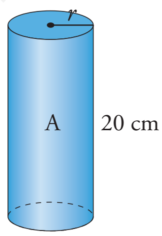
32 ▼▼▽ **Tres pelotas de tenis se introducen en una caja cilíndrica de 6,6 cm de diámetro en la que encajan hasta el borde. Halla el volumen de la parte vacía.**



- Altura del cilindro = 6,6 · 3 = 19,8 cm
- $V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 3{,}3^2 \cdot 19{,}8 \approx 677{,}4 \text{ cm}^3$
- $V_{\text{ESFERAS}} = 3\left(\frac{4}{3}\pi \cdot 3{,}3^3\right) = 451{,}6 \text{ cm}^3$
- $V_{\text{PARTE VACÍA}} = 677{,}4 - 451{,}6 = 225{,}8 \text{ cm}^3$

33 ▼▼▽ **Queremos construir un tubo cilíndrico soldando por los lados un rectángulo de 28 cm de largo y 20 cm de ancho. ¿Cómo se consigue mayor volumen, soldando por los lados de 28 cm o por los de 20 cm?**



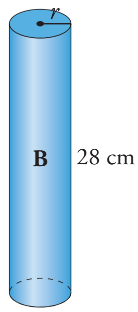


A • Radio: $2\pi r = 28 \rightarrow r = \frac{14}{\pi}$ cm

• Volumen: $\pi r^2 h = \pi\left(\frac{14}{\pi}\right)^2 \cdot 20 = 1\,247{,}77 \text{ cm}^3$

B • Radio: $2\pi r = 20 \rightarrow r = \frac{10}{\pi}$ cm

• Volumen: $\pi r^2 h = \pi\left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 28 = 891{,}27 \text{ cm}^3$



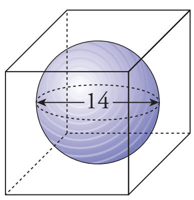
Se consigue mayor volumen soldando por los lados de 20 cm.

34 ▼▼▽ **Se introduce una bola de piedra de 14 cm de diámetro en un recipiente cúbico de 14 cm de arista lleno de agua y después se retira. Calcula:**

a) La cantidad de agua que se ha derramado.

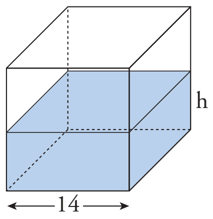
b) La altura que alcanza el agua en el recipiente después de sacar la bola.

a)



$V_{\text{CUBO}} = 14^3 = 2\,744 \text{ cm}^3$

$V_{\text{AGUA DERRAMADA}} = V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 7^3 \approx 1\,436{,}76 \text{ cm}^3$

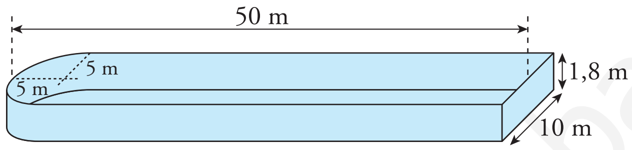
b) 

$V_{\text{AGUA NO DERRAMADA}} = 2\,744 - 1\,436{,}76 = 1\,307{,}24 \text{ cm}^3$

Altura que alcanza el agua:

$1\,307{,}24 = 14^2 \cdot \text{h} \quad \rightarrow \quad \text{h} = 6{,}67 \text{ cm}$

35 ▼▼▽ **Una finca se abastece de agua desde el pilón que ves en la figura, y que ahora está lleno. Para regar, se abre un desagüe que desaloja un caudal de 25 litros por segundo. ¿Se podrá mantener el riego durante diez horas sin reponer sus existencias?**

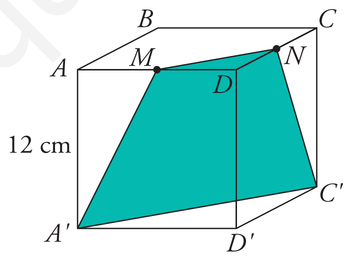


Capacidad del pilón $= 10 \cdot 1{,}8 \cdot 45 + \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 1{,}8}{2} \approx 880{,}69 \text{ m}^3 = 880\,690$ litros

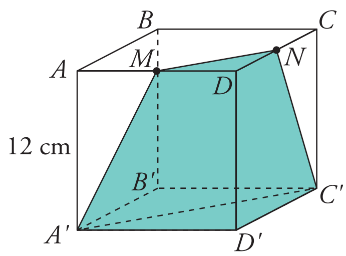
Gasto en diez horas $= 25 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10 = 900\,000$ litros

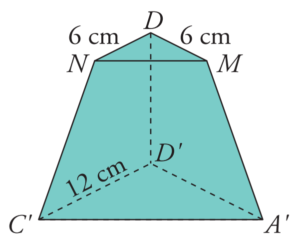
El gasto en diez horas es superior a la capacidad del pilón. Por tanto, no se puede regar durante diez horas sin reponer las existencias de agua.

36 ▼▼▼ **Cortamos un cubo por un plano que pasa por los puntos *MNC'A'* (*M* y *N* son los puntos medios de las aristas *AD* y *DC*, respectivamente).**



Calcula el área total y el volumen del menor de los poliedros que se forman.

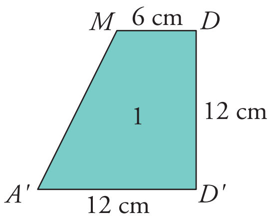




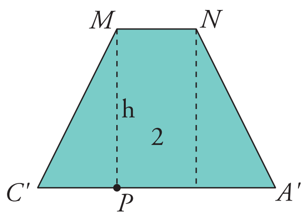
• Triángulo *MDN*: $A = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$

• Triángulo *A'D'C'*: $A = \dfrac{12 \cdot 12}{2} = 72 \text{ cm}^2$

Caras laterales: trapecios.



$$A_1 = \frac{(12 + 6) \cdot 12}{2} = 108 \text{ cm}^2$$



$$\overline{MN}^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \;\rightarrow\; \overline{MN} = \sqrt{72} \approx 8{,}49 \text{ cm}$$

$$\overline{A'C'}^2 = 12^2 + 12^2 = 288 \;\rightarrow\; \overline{A'C'} = \sqrt{288} = 16{,}97 \text{ cm}$$

$$\overline{A'P} = \frac{16{,}97 - 8{,}49}{2} = 4{,}24 \text{ cm}$$

$$\overline{MA'}^2 = 12^2 + 6^2 = 180 \;\rightarrow\; \overline{MA'} = 13{,}42 \text{ cm}$$

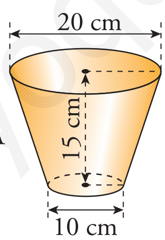
$$\text{h}^2 = 13{,}42^2 - 4{,}24^2 \;\rightarrow\; \text{h} \approx 12{,}73 \text{ cm}$$

$$\text{Área}_2 = \frac{(8{,}49 + 16{,}97) \cdot 12{,}73}{2} \approx 162{,}05 \text{ cm}^2$$

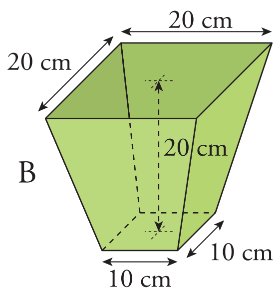
Área total del poliedro = $18 + 72 + 2 \cdot 108 + 162{,}1 = 468{,}1 \text{ cm}^2$

37 ▼▼▼ **En un cine, las palomitas se vendían hasta ahora en recipientes del tipo A, por 1,50 €. El gerente está pensando en ofertar también otro formato, B, más grande. ¿Cuál crees que debería ser el precio del formato B? Redondea a las décimas de euro.**

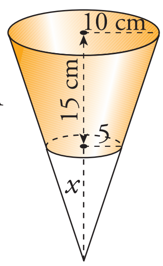
A



B



A

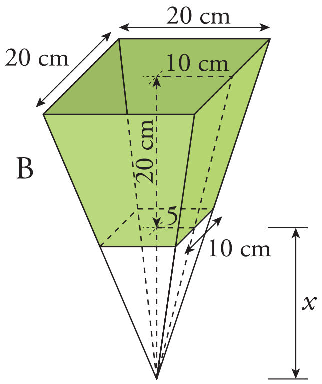


$$\frac{10}{5} = \frac{15 + x}{x} \;\rightarrow\; 10x = 75 + 5x \;\rightarrow\; x = 15 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 30 \approx 3\,141{,}6 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 15 \approx 392{,}7 \text{ cm}^3$$

$$V_A = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} \approx 2\,748{,}9 \text{ cm}^3$$



$$\frac{10}{5} = \frac{20 + x}{x} \rightarrow 10x = 100 + 5x \rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \frac{1}{3} 20^2 \cdot 40 \approx 5\,333{,}33 \text{ cm}^3$$

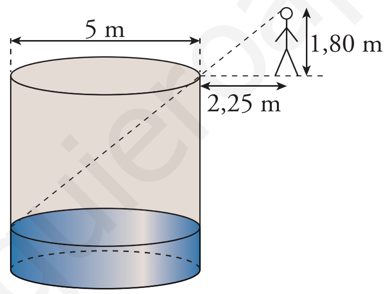
$$V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \frac{1}{3} 10^2 \cdot 20 \approx 666{,}67 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{B}} = V_{\text{P. GRANDE}} - V_{\text{P. PEQUEÑA}} \approx 4\,666{,}67 \text{ cm}^3$$

Precio del recipiente B $= \dfrac{4\,666{,}67 \cdot 1{,}5}{2\,748{,}9} \approx 2{,}546$

El recipiente B se venderá a 2,50 euros.

38 ▼▼▼ **Un agricultor tiene un pozo cilíndrico de 5 metros de diámetro y una capacidad de 100 metros cúbicos. Pero no está lleno; de hecho, si se aleja más de 2,25 metros del borde, ya no ve el agua. Calcula la profundidad del agua, sabiendo que el agricultor mide 1,80 m de estatura.**



Si h es la profundidad del pozo:

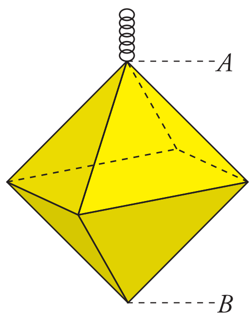
$$V_{\text{POZO}} = 100 = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot \text{h} \rightarrow \text{h} = 5{,}10 \text{ m}$$

Si x es la profundidad del agua:

$$\frac{1{,}80}{2{,}25} = \frac{5{,}10 - x}{5} \rightarrow x = 1{,}10 \text{ m}$$

Problemas “+”

39 ▼▼▼ **Cortando y soldando una varilla de 3 m de longitud, se ha construido la estructura de un farol con forma de octaedro regular. ¿Cuál es la altura *AB* del farol?**



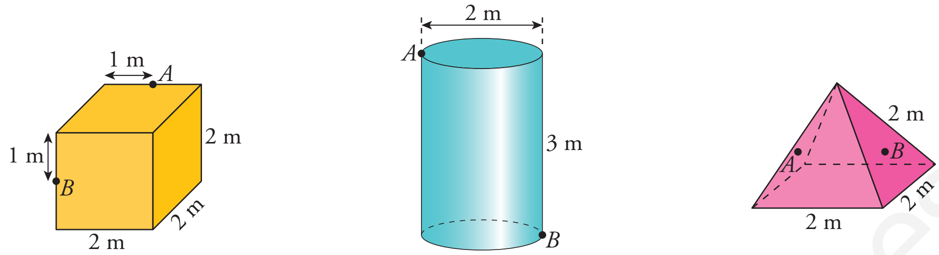
El octaedro tiene 12 aristas iguales. Cada una de ellas mide 300 : 12 = 25 cm.

La altura del octaedro coincide con la diagonal de un cuadrado de 25 cm de lado:

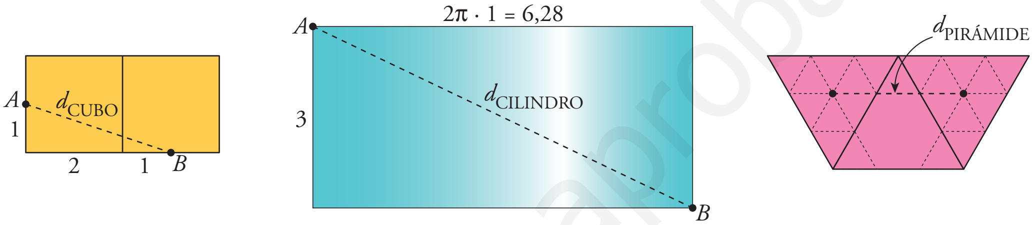
$$\overline{AB} = \sqrt{25^2 + 25^2} \approx 35{,}36 \text{ cm}$$

PÁGINA 213

40 ▼▼▼ **Describe y calcula la longitud del trayecto más corto que debe recorrer la lagartija para ir de *A* a *B* en cada caso.**



☞ *En el tercer caso,* A *y* B *son centros de dos caras en una pirámide recta cuadrangular cuyas aristas miden, todas, 2 metros.*



$d_{CUBO} = \sqrt{3^2 + 1^2} \approx 3{,}16$ m $\quad d_{CILINDRO} = \sqrt{6{,}28^2 + 3^2} \approx 7$ m $\quad d_{PIRÁMIDE} = 2$ m

41 ▼▼▼ **Averigua si cabe:**

a) Un tetraedro regular de arista 4 u, dentro de un cubo de arista 4 u.

b) Un cubo de arista 12 u, dentro de una esfera de diámetro 20 u.

c) Un cubo de arista 10 u, dentro de un cono de 15 u de altura y radio de la base $15\sqrt{2}$ u.

d) Una esfera de radio 4 u, dentro de un octaedro regular de arista 10 u.

a) Sí cabe. El mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo tiene como arista la diagonal del cubo, que mide 5,65 u.

$\text{Arista}_{TETRAEDRO} = \text{diagonal}_{CUBO} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$ u

b) La diagonal del lcubo mide $12\sqrt{3} = 20{,}78$ u. Por tanto, el cubo no cabe dentro de la esfera.

c) Sí cabe, porque la sección del cono, a 10 u de altura, tiene de radio $5\sqrt{2}$ u, que es igual a la mitad de la diagonal de la cara superior del cubo.

d) La distancia del centro del octaedro a cada cara es de 4,08 u, mayor que el radio de la esfera. Por tanto, sí cabe.

10 Soluciones a "Ejercicios y problemas"

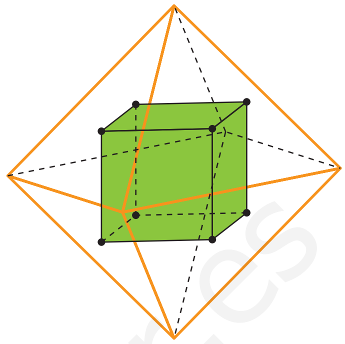
Reflexiona sobre la teoría

42 ▼▽▽ **a) ¿Qué poliedro obtienes si tomas como vértices los centros de las caras de un octaedro regular?**

b) ¿Qué relación hay entre dos poliedros duales?

a) Se obtiene un cubo.

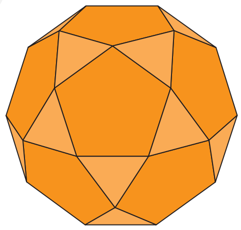
b) El número de caras de un poliedro coincide con el número de vértices de su dual, y ambos tienen el mismo número de aristas.



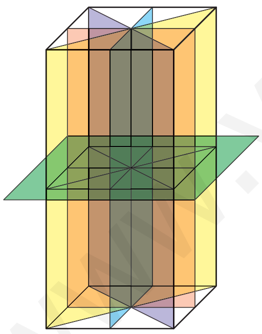
43 ▼▼▽ **Explica cómo hemos de truncar el dodecaedro para obtener el icosidodecaedro. ¿Es un poliedro semirregular?**

Por planos que pasan por los puntos medios de las aristas.

Es un poliedro semirregular, porque está formado por triángulos y pentágonos regulares y concurren 4 caras en cada vértice.



44 ▼▼▽ **¿Cuáles son los planos de simetría de un ortoedro de base cuadrada? ¿Y los ejes de giro? ¿De qué orden es cada uno de ellos?**



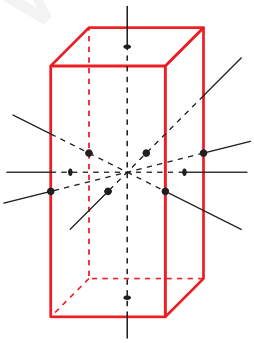
- Son 5 planos de simetría:

  Dos pasan por los puntos medios de las aristas de la base.

  Dos pasan por los vértices opuestos de las bases.

  (Estos cuatro planos corresponden a los ejes de simetría del cuadrado).

  Uno pasa por los puntos medios de las aristas laterales.



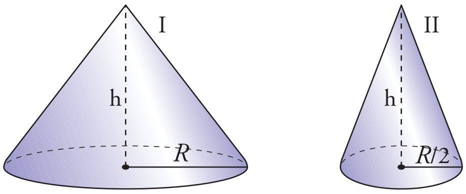
- Tiene 5 ejes de giro:

  Un eje de giro de orden cuatro: la recta perpendicular a las bases por su punto medio.

  Dos ejes de giro de orden dos: las rectas paralelas a las bases que pasan por el centro de cada dos caras paralelas.

  Dos ejes de giro de orden dos: las rectas que pasan por los puntos medios de dos aristas laterales opuestas.

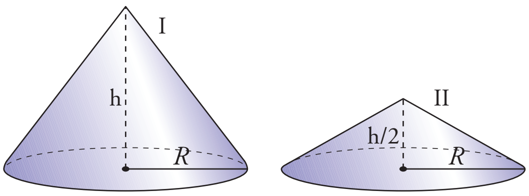
45 ▼▼▽ **Si en un cono reducimos a la mitad el radio de la base y mantenemos la misma altura, ¿el volumen se reduce a la mitad? ¿Y si mantenemos la misma base y reducimos la altura a la mitad?**



$$V_{\text{CONO I}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$V_{\text{CONO II}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3}\,\frac{\pi R^2 h}{4}$$

El volumen se reduce a la cuarta parte.



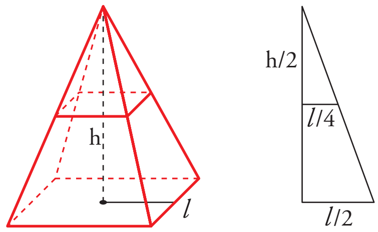
$$V_{\text{CONO I}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$V_{\text{CONO II}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{h}{2} = \frac{1}{3}\,\frac{\pi R^2 h}{2}$$

Sí, el volumen se reduce a la mitad.

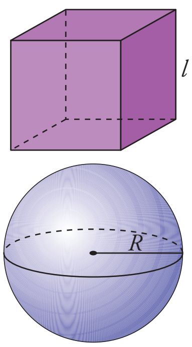
46 ▼▼▽ **Una pirámide de base cuadrada se corta por un plano paralelo a la base y que pasa por el punto medio de la altura. ¿Cuál será la relación entre los volúmenes de la pirámide grande y la pequeña?**

El lado de la nueva base es la mitad de la arista básica de la pirámide.



$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \dfrac{1}{3} l^2 h \\ V' = V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{h}{2} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{l^2 \cdot h}{8} \end{array}\right\} \dfrac{V}{V'} = \dfrac{1}{8}$$

47 ▼▼▽ **Un cubo y una esfera tienen la misma área. ¿Cuál tiene mayor volumen? Comprueba tu respuesta dando un valor cualquiera al radio de la esfera.**



Radio de la esfera: 10 cm

$4\pi R^2 = 6l^2 \rightarrow 4\pi \cdot 10^2 = 6l^2$

$l^2 = \dfrac{400\pi}{6} \rightarrow l = 14,47$ cm

Volumen cubo $= 14,47^3 = 3\,031,01$ cm^3

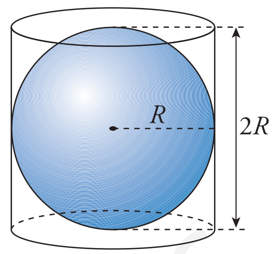
Volumen esfera $= \dfrac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = 4\,188,79$ cm^3

Tiene mayor volumen la esfera.

48 ▼▼▽ **Piensa en una esfera y en el cilindro que la envuelve.**

a) Calcula la relación:

$$\frac{\text{Superficie total del cilindro}}{\text{Superficie de la esfera}}$$



b) Calcula también la relación:

$$\frac{\text{Volumen del cilindro}}{\text{Volumen de la esfera}}$$

c) ¿Qué observas?

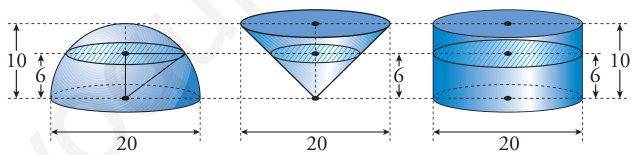
Has de saber que dichas relaciones ya las descubrió Arquímedes hace más de dos mil años.

a) $\dfrac{S_c}{S_e} = \dfrac{2\pi R \cdot 2R \cdot 2 \cdot \pi R^2}{4\pi R^2} = \dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{V_c}{V_e} = \dfrac{\pi R^2 \cdot 2R}{\dfrac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{S_c}{S_e} = \dfrac{V_c}{V_e}$

49 ▼▼▽ **Observa en la figura la semiesfera, el cono invertido y el cilindro, todos del mismo diámetro (20 cm) y altura (10 cm), que se han cortado por un plano horizontal a 6 cm de altura.**

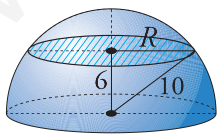


a) Calcula la superficie de las secciones obtenidas.

b) Comprueba que la sección obtenida en el cilindro equivale a la suma de las otras dos.

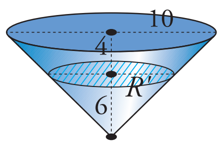
c) Comprueba que esa misma relación se cumple para cualquier altura del plano, h.

d) Comprueba que esa relación se cumple para cualquier radio, *r*, y cualquiera que sea la altura, h, a la que se corta el plano.

a) 

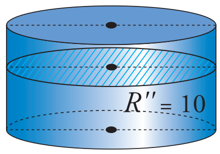
$R = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

$S_{\text{S. SEMIESFERA}} = \pi \cdot 8^2 \approx 201{,}06 \text{ cm}^2$



$\dfrac{10}{10} = \dfrac{R'}{6} \rightarrow R' = 6$ cm

$S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot 6^2 \approx 113{,}10 \text{ cm}^2$



$S_{\text{S. CILINDRO}} = \pi \cdot 10^2 \approx 314{,}16 \text{ cm}^2$

b) $S_{\text{S. SEMIESFERA}} + S_{\text{S. CONO}} = 64\pi + 36\pi = 100\pi = S_{\text{S. CILINDRO}}$

c) Para un h cualquiera: $R = \sqrt{10^2 - h^2}$; $R' = h$; $R'' = 10$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\text{S. SEMIESFERA}} = \pi\,(10^2 - h^2) \\ S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot h^2 \\ S_{\text{S. CILINDRO}} = \pi \cdot 10^2 \end{array}\right\} S_{\text{S. SEMIESFERA}} + S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot 10^2 = S_{\text{S. CILINDRO}}$$

d) Para r y h cualesquiera:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\text{S. SEMIESFERA}} = \pi\,(r^2 - h^2) \\ S_{\text{S. CONO}} = \pi \cdot h^2 \\ S_{\text{S. CILINDRO}} = \pi r^2 \end{array}\right\} S_{\text{S. SEMIESFERA}} + S_{\text{S. CONO}} = \pi r^2 = S_{\text{S. CILINDRO}}$$

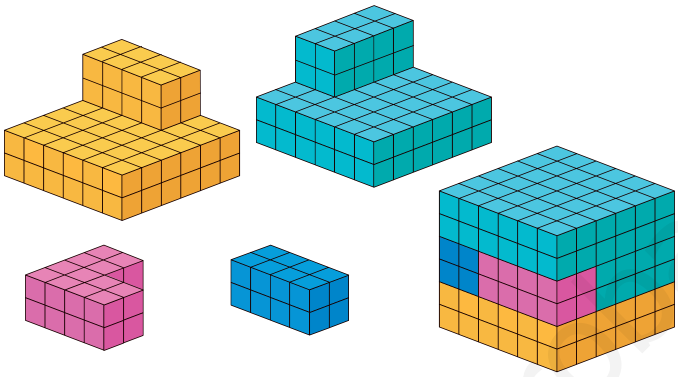
10 Soluciones a “Y para terminar…”

PÁGINA 215

▼ Imagina en el espacio

Cubo a trozos

Con estas cuatro piezas se construye el cubo que ves.



Copia este desarrollo del cubo en papel cuadriculado y completa las caras con su color correspondiente.