3 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 59

PARA EMPEZAR…

▼ Una progresión asombrosa

Supón que tienes una hoja de papel de 0,14 mm de grosor. Cada vez que la pliegas se duplica su grosor. Cuando has hecho seis o siete dobleces, ya no puedes doblarla más, pero imagina que pudieras hacerlo diez, veinte e, incluso, cincuenta veces. ¿Qué grosor crees que llegaría a alcanzar ese papel?

■ **Comprueba que con 10 dobleces superarías el grosor del libro más gordo de la biblioteca. Y, más asombroso, con 22 dobleces obtendrías un grosor mayor que la altura de la torre Eiffel (324 m).**

Para realizar tus cálculos, utiliza el *factor constante* en la calculadora. Recuerda:

— Si tienes calculadora con PANTALLA SENCILLA, con la secuencia:

$$2 \boxed{\times} \boxed{\times} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=} \dots$$

se obtienen los resultados 4, 8, 16, …

Cada vez que das a la tecla $\boxed{=}$, se multiplica por 2 (se duplica) el número que hay en la pantalla.

Si efectúas $2 \boxed{\times} \boxed{\times} 0{,}14 \underbrace{\boxed{=} \boxed{=} \dots \boxed{=}}_{n \text{ veces}}$, obtienes, en milímetros, el grosor alcanzado por el papel tras n dobleces.

— Con calculadora de PANTALLA DESCRIPTIVA, la secuencia es:

$$2 \boxed{=} \boxed{\text{Ans}} \boxed{\times} 0{,}14 \boxed{=} \boxed{=} \dots \boxed{=}$$

La hoja tiene un grosor de 0,14 mm. Al doblarla 10 veces, el grosor sería de:

$2^{10} \cdot 0{,}14 \text{ mm} = 1\,024 \cdot 0{,}14 \text{ mm} = 143{,}36 \text{ mm} = 14{,}336 \text{ cm}$

Al hacer 22 dobleces, tendríamos:

$2^{22} \cdot 0{,}14 = 4\,194\,304 \cdot 0{,}14 = 587\,202{,}56 \text{ mm} = 587{,}20256 \text{ m}$

■ **¿Cuántos dobleces necesitarías para superar la altura del Everest (8 848 m)?**

26 dobleces.

■ **¿Cuál sería el grosor si lo pudieras doblar 50 veces? Compáralo con la distancia de la Tierra al Sol (150 millones de kilómetros).**

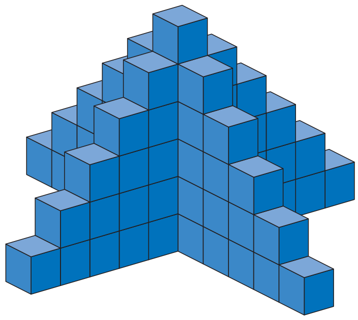
157 626 000 km > distancia de la Tierra al Sol

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 60

Una actividad

¿A cuál de las sucesiones de la derecha corresponde esta torre?



a) 1, 5, 9, 13, 17, …
b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …
c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, …
d) 1, –3, 9, –27, 81, –243, …
e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, …
f) 170, 120, 70, 20, –30, –80, …
g) 1, 3, 6, 8, 16, 18, 36, …

Corresponde a la sucesión a).

1 Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las sucesiones de arriba y añade tres términos más a cada una.

a) Criterio: cada término se obtiene sumando 4 al anterior.

21, 25, 29, …

b) Criterio: los términos son los cuadrados de los números naturales.

49, 64, 81, …

c) Criterio: cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2, o bien, son las sucesivas potencias de 2: 2^1, 2^2, 2^3, …

128, 256, 512, …

d) Criterio: cada término se obtiene multiplicando el anterior por –3.

729, –2 187, 6 561, …

e) Criterio: cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

13, 21, 34, …

f) Criterio: cada término se obtiene restando 50 al anterior.

–130, –180, –230, …

g) Criterio: los términos pares se obtienen sumando 2 al anterior, y los términos impares se obtienen multiplicando el anterior por 2.

38, 76, 78, …

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

2 **Forma cinco sucesiones con criterios similares a los anteriores. En algún caso, invéntate el criterio.**

Respuesta abierta.

Ejemplo:

a) Criterio: obtenemos cada término multiplicando el anterior por –2.

3, –6, 12, –24, 48, …

b) Criterio: obtenemos cada término sumando 1,5 al término anterior.

1; 2,5; 4; 5,5; 7; 8,5; …

c) Criterio: obtenemos los términos pares multiplicando el anterior por –3, y los impares, sumando –3 al anterior.

1, –3, –6, 18, 15, –45, –48, …

d) Criterio: los términos son los cubos de los números naturales.

1, 8, 27, 64, 125, 216, …

e) Criterio: obtenemos cada término restando 8 del anterior.

100, 92, 84, 76, 68, 60, …

3 **Indica cuál es la relación** $\frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = \dots$ **de la sucesión c) de arriba.**

La relación es 2.

4 **Establece la relación (cociente) entre cada dos términos consecutivos de la sucesión d) que aparece arriba.**

La relación es –3.

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 61

6 **Escribe los cinco primeros términos de:**

$$g_n = n^3 \qquad h_n = n^2 - 3n + 7 \qquad i_n = \frac{n-3}{n+4}$$

g_n: 1, 8, 27, 64, 125, …

h_n: 5, 5, 7, 11, 17, …

i_n: $\frac{-2}{5}, \frac{-1}{6}, 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{9}, \ldots$

7 **Forma una sucesión recurrente con estos datos:**

$$j_1 = 2 \qquad j_2 = 3 \qquad j_n = j_{n-2} + j_{n-1}$$

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

8 **Inventa otras dos sucesiones recurrentes con datos distintos a los anteriores.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$

Sucesión: 3, 5, 13, 31, 75, 181, …

b) $b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_n = b_{n-1} + (b_{n-2})^2$

Sucesión: 1, 3, 4, 13, 29, 198, 1 039, …

9 **Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen por término general:**

a) $a_n = 3 + 5(n-1)$

b) $b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $c_n = (n-1)(n-2)$

d) $d_n = n^2 - n$

a) 3, 8, 13, 18, …

b) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$

c) 0, 0, 2, 6, …

d) 0, 2, 6, 12, …

10 **Descubre la ley de recurrencia y añade un nuevo término a cada una de las siguientes sucesiones:**

a) 1, –4, 5, –9, 14, –23, … (Diferencia)

b) 1, 2, 3, 6, 11, 20, … (Relaciona cada elemento con los tres anteriores)

c) 1; 2; 1,5; 1,75; … (Semisuma)

d) 1, 2, 2, 1, 1/2, 1/2, 1, … (Cociente)

a) Nuevo término: 37

Ley de recurrencia: $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

b) Nuevo término: 37

Ley de recurrencia: $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$

c) Nuevo término: 1,625

Ley de recurrencia: $c_n = \dfrac{c_{n-1} + c_{n-2}}{2}$

d) Nuevo término: 2

Ley de recurrencia: $d_n = \dfrac{d_{n-1}}{d_{n-2}}$

11 **Construye una sucesión cuya ley de recurrencia sea $a_n = a_{n-1} + n$. (Dale al primer término el valor que quieras).**

Respuesta abierta.

Ejemplo: 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, …

12 **a) Comprueba que el término general de la sucesión –1, 1, –1, 1, –1, 1, … es $s_n = (-1)^n$.**

b) Halla el término general de estas sucesiones:

$a_n \to 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

$b_n \to 1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$

a) $s_1 = (-1)^1 = -1$

$s_2 = (-1)^2 = 1$

$s_3 = (-1)^3 = -1$

$s_4 = (-1)^4 = 1$

Los términos s_n con n par son 1, y cuando n es impar son iguales a –1. Coincide con los términos de la sucesión descrita.

b) $a_n = (-1)^{n+1}$

$b_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

PÁGINA 62

Con calculadora

Añade cuatro términos a cada una de estas sucesiones. Si decimos que en a) la diferencia es 3, ¿cuál será la diferencia en las demás?

a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, … **b) 120, 140, 160, 180, 200, 220, …**

c) 9, 7, 5, 3, 1, –1, –3, –5, … **d) 5,83; 5,87; 5,91; 5,95; 5,99; 6,03; …**

a) 20, 23, 26, 29, … diferencia: 3

b) 240, 260, 280, 300, … diferencia: 20

c) –7, –9, –11, –13, … diferencia: –2

d) 6,07; 7,11; 6,15; 6,19; … diferencia: 0,04

1 **El primer término de una progresión aritmética es $s_1 = 5$ y la diferencia es $d = 2{,}5$. Escribe sus diez primeros términos.**

Haz lo mismo para otra cuyo primer término es $t_1 = 20$ y cuya diferencia es $d = -3$.

Progresión s_n: 5; 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5; 25; 27,5; …

Progresión t_n: 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, –1, –4, –7, …

2 **Calcula, para las progresiones de arriba:**

$$b_{36} \qquad c_{31} \qquad d_{1000}$$

b) $b_1 = 120$ y $d = 20 \rightarrow b_n = b_1 + (n-1) \cdot d = 120 + (n-1) \cdot 20 =$

$= 120 + 20n - 20 = 100 + 20n$

Así: $b_{36} = 100 + 20 \cdot 36 = 820$

c) $c_1 = 9$ y $d = -2 \rightarrow c_n = 9 + (n-1) \cdot (-2) = 9 - 2n + 2 = 11 - 2n$

Así: $c_{31} = 11 - 2 \cdot 31 = -51$

d) $d_1 = 5{,}83$ y $d = 0{,}04 \rightarrow d_n = 5{,}83 + (n-1) \cdot 0{,}04 = 5{,}83 + 0{,}04n - 0{,}04 =$

$= 5{,}79 + 0{,}04n$

Así: $d_{1\,000} = 5{,}79 + 0{,}04 \cdot 1\,000 = 45{,}79$

3 **Halla el término general de las progresiones b), c) y d). (Intenta hacerlo sin aplicar la fórmula, simplemente razonando).**

$b_n = 100 + 20 \cdot n$ $\qquad c_n = 11 - 2 \cdot n$ $\qquad d_n = 5{,}79 + 0{,}04 \cdot n$

4 **a) Si dos términos de una progresión son:**

$$s_1 = 6 \text{ y } s_3 = 9$$

averigua el valor de la diferencia, d.

b) Halla el término general de la progresión, s_n.

a) $d = 1{,}5$

b) $s_n = 6 + 1{,}5\,(n-1) = 6 + 1{,}5n - 1{,}5 = 4{,}5 + 1{,}5n$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 63

5 **Halla la suma de todos los números impares menores que 100.**

El término general de los números impares es $a_n = 2n - 1$. El último impar menor que 100 es 99, que resulta ser a_{50}. Así, la suma es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

6 **a) Si $a_1 = 5$ y $a_2 = 7$, calcula a_{40} y S_{40}.**

b) Si $b_1 = 5$ y $b_2 = 12$, calcula S_{32}.

a) $a_1 = 5$ y $d = 2 \;\rightarrow\; a_n = 5 + (n - 1) \cdot 2 = 3 + 2n$

Luego: $a_{40} = 3 + 2 \cdot 40 = 83$ y $S_{40} = \dfrac{(5 + 83) \cdot 40}{2} = 1\,760$

b) $b_1 = 5$ y $d = 7 \;\rightarrow\; b_n = 5 + (n - 1) \cdot 7 = -2 + 7n$

Así: $b_{32} = -2 + 7 \cdot 32 = 222$

Luego: $S_{32} = \dfrac{(5 + 222) \cdot 32}{2} = 3\,632$

7 **Si el primer término de una progresión es $c_1 = 17$ y el quinto es $c_5 = 9$, halla la suma S_{20}.**

Como $c_1 = 17$ y $c_5 = 9 \;\rightarrow\; c_1 = 17$ y $d = -2$

Así: $c_n = 17 + (n - 1)(-2) = 19 - 2n$; $c_{20} = 19 - 2 \cdot 20 = -21$

Luego: $S_{20} = \dfrac{(17 - 21) \cdot 20}{2} = -40$

8 **Los primeros términos de una progresión aritmética son $a_1 = 4$, $a_2 = 7$. Halla esta suma:**

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{19} + a_{20}$$

Como $a_1 = 4$ y $a_5 = 7$, tenemos que la diferencia de esta progresión es $d = 3$.

Nos piden la suma de los términos del décimo al vigésimo. Lo que vamos a hacer es calcular S_{20} y restarle S_9:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + 19 \cdot 3) \cdot 20}{2} = \frac{(4 + 4 + 57) \cdot 20}{2} = 650$$

$$S_9 = \frac{(4 + 4 + 8 \cdot 3) \cdot 9}{2} = 144$$

Por tanto, la suma pedida es:

$650 - 144 = 506$

3 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 65

1 **Construye una progresión geométrica cuyo primer término es 125 y cuya razón es 0,4.**

125; 50; 20; 8; 3,2; 1,28; 0,512; …

2 **De una progresión geométrica conocemos $a_1 = 0{,}625$ y $a_3 = 0{,}9$. Halla r y los seis primeros términos.**

$0{,}9 = 0{,}625r^2 \rightarrow r^2 = 1{,}44 \rightarrow r = \pm 1{,}2$

Por tanto, hay dos progresiones:

- $r = 1{,}2$

  0,625; 0,75; 0,9; 1,08; 1,296; 1,5552; …

- $r = -1{,}2$

  0,625; –0,75; 0,9; –1,08; 1,296; –1,5552; …

3 **En una progresión geométrica de términos positivos, $a_1 = 2$ y $a_3 = 6$. Halla a_n, a_{11} y a_{12}.**

$6 = 2 \cdot r^2 \rightarrow r^2 = 3 \rightarrow r = \pm\sqrt{3}$

Como es una progresión de términos positivos, la razón también lo es.

$r = \sqrt{3}$

$a_n = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$

$a_{11} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{10} = 2 \cdot 3^5 = 486$

$a_{12} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{11} = 2 \cdot 3^5 \cdot \sqrt{3} = 486\sqrt{3}$

4 **En una progresión geométrica, el primer término es $a_1 = 5$ y la razón es $r = 1{,}4$. Averigua, con ayuda de la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es inferior a 1 000 000.**

$$\left.\begin{array}{l} a_{37} = 911\,127{,}781 \\ a_{38} = 1\,275\,578{,}893 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Es } a_{37}.$$

5 **En una progresión geométrica, $a_1 = 1\,000$ y $r = 0{,}8$. Averigua, con la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es mayor que 1.**

$$\left.\begin{array}{l} a_{31} = 1{,}237 \\ a_{32} = 0{,}99 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Es } a_{31}.$$

Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 66

6 Siguiendo el procedimiento utilizado para hallar S_n, calcula:

$$\mathbf{3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384}$$

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 = \frac{3 \cdot 2^8 - 3}{2 - 1} = 765$$

7 ¿Cuántos denarios se llevó, en total, el centurión del problema resuelto 4 de la página anterior?

$$S_{16} = \frac{1 \cdot 2^{16} - 1}{2 - 1} = 65\,535 \text{ denarios}$$

8 Calcula la suma de los diez primeros términos de una progresión geométrica que cumpla $a_1 = 8{,}192$ y $r = 2{,}5$.

$$S_{10} = \frac{8{,}192 \cdot 2{,}5^{10} - 8{,}192}{2{,}5 - 1} = 52\,077{,}872$$

9 Efectúa la suma $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^7$.

$$1 + 3 + 9 + \ldots + 3^7 = \frac{1 \cdot 3^8 - 1}{3 - 1} = 3\,280$$

3 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 67

10 **En una progresión geométrica, $a_1 = 8$ y $r = 0,75$. Calcula la suma de sus infinitos términos.**

$$S_\infty = \frac{8}{1 - 0,75} = \frac{8}{0,25} = 32$$

11 **En una progresión geométrica, $a_1 = 30$ y $r = -0,2$. Calcula la suma de "todos" sus términos.**

$$S_\infty = \frac{30}{1 - (-0,2)} = \frac{30}{1,2} = 25$$

12 **En una progresión geométrica, su cuarto término es $a_4 = 10$ y el sexto es $a_6 = 0,4$. Halla: la razón, r; el primer término, a_1; el octavo término, a_8; la suma de los ocho primeros términos, S_8; y la suma de sus infinitos términos, S_∞.**

$a_6 = a_4 \cdot r^2 \;\rightarrow\; 0,4 = 10 \cdot r^2 \;\rightarrow\; r^2 = 0,04 \;\rightarrow\; r = \pm 0,2$

$r = 0,2 \;\rightarrow\; 10 = a_1 \cdot 0,2^3 \;\rightarrow\; 10 = a_1 \cdot 0,008 \;\rightarrow\; a_1 = 1\,250$

$a_8 = a_1 \cdot 0,2^7 \;\rightarrow\; a_8 = 1\,250 \cdot 0,2^7 \;\rightarrow\; a_8 = 0,016$

$$S_8 = \frac{1\,250 - 1\,250 \cdot 0,2^8}{1 - 0,2} = 1\,562,496$$

$$S_\infty = \frac{1\,250}{1 - 0,2} = 1\,562,5$$

$r = -0,2 \;\rightarrow\; 10 = a_1 \cdot (-0,2)^3 \;\rightarrow\; a_1 = -1\,250$

$a_8 = -1\,250 \cdot (-0,2)^7 = 0,016$

$$S_8 = \frac{-1\,250 - (-1\,250) \cdot (-0,2)^8}{1 - 0,2} = -1\,041,664$$

$$S_\infty = \frac{-1\,250}{1 - (-0,2)} = \frac{-1\,250}{1,2} = 1\,041,\widehat{6}$$

PÁGINA 68

Practica

Sucesiones: formación, término general

1 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) Cada término se obtiene sumando 7 al anterior. El primero es –10.

b) El primer término es 0,1. Los demás se obtienen multiplicando el anterior por 2.

c) El primero es 2; el segundo, 4, y los siguientes, la semisuma de los dos anteriores.

a) –10, –3, 4, 11, 18, …

b) 0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 1,6; …

c) 2; 4; 3; 3,5; 3,25; …

2 ▼▽▽ Escribe los términos a_{10} y a_{25} de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 3n - 1$ **b)** $b_n = \dfrac{n^2+1}{2}$ **c)** $c_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$

d) $d_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{10}$ **e)** $e_n = n(n-1)$ **f)** $f_n = \dfrac{n-2}{n+2}$

a) $\begin{cases} a_{10} = 29 \\ a_{25} = 74 \end{cases}$

b) $\begin{cases} b_{10} = \dfrac{101}{2} = 50{,}5 \\ b_{25} = \dfrac{624}{2} = 312 \end{cases}$

c) $\begin{cases} c_{10} = 1 + \dfrac{1}{10} = \dfrac{11}{10} \\ c_{25} = -1 + \dfrac{1}{25} = -\dfrac{24}{25} \end{cases}$

d) $\begin{cases} d_{10} = 1{,}1 \\ d_{25} = 0{,}9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} e_{10} = 10 \cdot 9 = 90 \\ e_{25} = 25 \cdot 24 = 600 \end{cases}$

f) $\begin{cases} f_{10} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \\ f_{25} = \dfrac{23}{27} \end{cases}$

3 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos de la siguiente sucesión:

$$a_1 = 1 \qquad a_n = 2a_{n-1} + 3$$

1, 5, 13, 29, 61, …

4 ▼▽▽ Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las siguientes sucesiones:

a) 11, 9, 7, 5, … **b)** $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dots$ **c)** 2,5; 2,9; 3,3; 3,7; …

d) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dots$ **e)** 8, 12, 18, 27, … **f)** 0, 3, 8, 15, …

a) Restando 2 unidades al término anterior: $a_n = 11 - (n-1)2 = 13 - 2n$

b) Multiplicando por $\dfrac{1}{2}$ el término anterior: $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c) Sumando 0,4 al término anterior: $a_n = 2{,}5 + (n - 1) \cdot 0{,}4 = 2{,}1 + 0{,}4n$

d) Dividiendo 1 por n, lugar que ocupa el término: $a_n = \frac{1}{n}$

e) Multiplicando por 1,5 el término anterior: $a_n = 8 \cdot 1{,}5^{n-1}$

f) Restando 1 a los cuadrados de los números naturales: $a_n = n^2 - 1$

5 ▼▼▽ **Halla el término general de estas sucesiones:**

a) 12, 14, 16, 18, … **b)** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

c) 1, 3, 9, 27, … **d) 1 · 2, 2 · 3, 3 · 4, 4 · 5, …**

a) $a_n = 10 + 2n$ b) $a_n = \frac{n}{n+1}$

c) $a_n = 3^{n-1}$ d) $a_n = n \cdot (n + 1)$

6 ▼▼▽ **Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:**

a) 8, 10, 2, –8, –10, … **b)** $3, 2, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$

a) $a_1 = 8$ $a_2 = 10$ $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ b) $a_1 = 3$ $a_2 = 2$ $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$

Progresiones aritméticas

7 ▼▽▽ **Escribe los cinco primeros términos y a_{20} de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) $a_1 = 1{,}5;\ d = 2$ **b)** $a_1 = 32;\ d = -5$

c) $a_1 = 5;\ d = 0{,}5$ **d)** $a_1 = -3;\ d = -4$

a) 1,5; 3,5; 5,5; 7,5; 9,5; $a_{20} = 1{,}5 + 19 \cdot 2 = 39{,}5$

b) 32, 27, 22, 17, 12; $a_{20} = 32 + 19 \cdot (-5) = -63$

c) 5; 5,5; 6; 6,5; 7; $a_{20} = 5 + 19 \cdot 0{,}5 = 14{,}5$

d) –3, –7, –11, –15, –19; $a_{20} = -3 + 19 \cdot (-4) = -79$

8 ▼▽▽ **Halla, en cada caso, el término general y calcula, después, a_{50}:**

a) 25, 18, 11, 4, … **b) –13, –11, –9, –7, …**

c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; … **d) –3, –8, –13, –18, …**

a) $a_1 = 25;\ d = -7;\ a_n = 25 + (n - 1)(-7) = 32 - 7n;\ a_{50} = -318$

b) $a_1 = -13;\ d = 2;\ a_n = -13 + (n - 1)2 = -15 + 2n;\ a_{50} = 85$

c) $a_1 = 1{,}4;\ d = 0{,}5;\ a_n = 1{,}4 + (n - 1)0{,}5 = 0{,}9 + 0{,}5n;\ a_{50} = 25{,}9$

d) $a_1 = -3;\ d = -5;\ a_n = -3 + (n - 1)(-5) = 2 - 5n;\ a_{50} = -248$

9 ▼▽▽ **Calcula la suma de los veinte primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) $a_1 = 5;\ d = 2$

b) $a_1 = -1;\ a_2 = -7$

c) Los números pares.

d) Los múltiplos de 3.

a) $a_{20} = 5 + 19 \cdot 2 = 43;\quad S_{20} = \dfrac{(5 + 43) \cdot 20}{2} = 480$

b) $d = -7 - (-1) = -6;\quad a_{20} = -1 + 19 \cdot (-6) = -115;\quad S_{20} = \dfrac{[-1 + (-115)] \cdot 20}{2} = -1\,160$

c) $d = 2,\ a_1 = 2,\ a_{20} = 2 + 19 \cdot 2 = 40;\quad S_{20} = \dfrac{(2 + 40) \cdot 20}{2} = 420$

d) $a_1 = 3,\ d = 3,\ a_{20} = 3 + 19 \cdot 3 = 60;\quad S_{20} = \dfrac{(3 + 60) \cdot 20}{2} = 630$

Progresiones geométricas

10 ▼▽▽ **Escribe los cinco primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:**

a) $a_1 = 0{,}3;\ r = 2$

b) $a_1 = -3;\ r = \dfrac{1}{2}$

c) $a_1 = 200;\ r = -0{,}1$

d) $a_1 = \dfrac{1}{81};\ r = 3$

a) 0,3; 0,6; 1,2; 2,4; 4,8; …

b) $-3, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{4}, -\dfrac{3}{8}, -\dfrac{3}{16}, \dots$

c) 200; –20; 2; –0,2; 0,02; …

d) $\dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{3}, 1, \dots$

11 ▼▽▽ **Halla, en cada una de las sucesiones siguientes, el término general:**

a) 20; 8; 3,2; 1,28; …

b) 40, 20, 10, 5, …

c) 6; –9; 13,5; –20,25; …

d) 0,48; 4,8; 48; 480; …

a) $a_n = 20 \cdot 0{,}4^{n-1}$

b) $a_n = 40 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $a_n = 6 \cdot (-1{,}5)^{n-1}$

d) $a_n = 0{,}48 \cdot 10^{n-1}$

12 ▼▽▽ **Calcula la suma de los diez primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $a_1 = 5;\ r = 1{,}2$

b) $a_1 = 5;\ r = -2$

a) $S_{10} = \dfrac{5 \cdot 1{,}2^{10} - 5}{1{,}2 - 1} = 129{,}8$

b) $S_{10} = \dfrac{5 \cdot (-2)^{10} - 5}{-2 - 1} = -1\,705$

13 ▼▽▽ **Halla la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $a_1 = 4;\ r = \dfrac{1}{3}$

b) $a_1 = 17;\ r = 0{,}95$

a) $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{4}{1 - (1/3)} = 6$

b) $S_\infty = \dfrac{17}{1 - 0{,}95} = 340$

3 Soluciones a “Ejercicios y problemas”

PÁGINA 69

Aplica lo aprendido

14 ▼▽▽ **Identifica las progresiones aritméticas, las geométricas y las que no son progresiones. Obtén el término general de cada una:**

a) $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \dots$

b) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$

c) $0,2; 0,02; 0,002; \dots$

d) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$

a) Progresión aritmética, $d = \frac{1}{8}$. Término general: $a_n = 1 + (n-1)\frac{1}{8} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8}n$

b) No es progresión. Término general: $a_n = \sqrt{n}$

c) Progresión geométrica, $r = 0,1$.

Término general: $a_n = 0,2 \cdot (0,1)^{n-1}$

d) No es progresión.

Los numeradores 2, 3, 4, 5, … forman una progresión aritmética cuyo término general es $n + 1$.

Los denominadores 1, 2, 3, 4, … forman una progresión aritmética de término general n.

Término general de la sucesión: $a_n = \frac{n+1}{n}$

15 ▼▽▽ **Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) $d = 5;\ a_8 = 37$

b) $a_{11} = 17;\ d = 2$

☞ ***Recuerda que*** $a_8 = a_1 + 7d$; ***sustituye y halla*** a_1.

a) $a_8 = a_1 + 7d \;\rightarrow\; 37 = a_1 + 7 \cdot 5 \;\rightarrow\; a_1 = 2$

$a_n = 2 + (n-1) \cdot 5 = -3 + 5n$

b) $a_{11} = a_1 + 10d \;\rightarrow\; 17 = a_1 + 10 \cdot 2 \;\rightarrow\; a_1 = -3$

$a_n = -3 + (n-1)2 \;\rightarrow\; a_n = -5 + 2n$

16 ▼▽▽ **Halla la diferencia y el primer término de las progresiones aritméticas siguientes:**

a) $a_2 = 18;\ a_7 = -17$

b) $a_4 = 15;\ a_{12} = 39$

☞ ***Ten en cuenta que*** $a_7 = a_2 + 5d$.

a) $a_7 = a_2 + 5d \;\rightarrow\; -17 = 18 + 5d \;\rightarrow\; d = -7$

$a_1 = a_2 - d \;\rightarrow\; a_1 = 18 - (-7) = 25$

b) $a_{12} = a_4 + 8d \;\rightarrow\; 39 = 15 + 8d \;\rightarrow\; d = 3$

$a_4 = a_1 + 3d \;\rightarrow\; 15 = a_1 + 9 \;\rightarrow\; a_1 = 6$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

17 ▼▼▽ **¿Qué lugar ocupa un término cuyo valor es 56 en la progresión aritmética definida por $a_1 = 8$ y $d = 3$?**

$56 = 8 + (n - 1) \cdot 3 \;\rightarrow\; 56 = 5 + 3n \;\rightarrow\; n = 17$

18 ▼▽▽ **Calcula la razón y el primer término de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $a_5 = \dfrac{1}{81}$; $a_3 = \dfrac{1}{9}$ **b)** $a_2 = 0{,}6$; $a_4 = 2{,}4$

a) $a_5 = a_3 \cdot r^2 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{81} = \dfrac{1}{9} \cdot r^2 \;\rightarrow\; r^2 = \dfrac{1}{9} \;\rightarrow\; r = \pm\dfrac{1}{3}$

Hay dos soluciones:

Si $r = \dfrac{1}{3}$: $a_1 = 1$

Si $r = -\dfrac{1}{3}$: $a_1 = 1$

b) $a_4 = a_2 \cdot r^2 \;\rightarrow\; 2{,}4 = 0{,}6 \cdot r^2 \;\rightarrow\; r = \pm 2$

Hay dos soluciones:

Si $r = 2$: 0,3; 0,6; 1,2; 2,4; 4,8; …

Si $r = -2$: –0,3; 0,6; –1,2; 2,4; –4,8; …

19 ▼▽▽ **Halla el primer término y escribe el término general de las siguientes progresiones:**

a) $a_3 = 3$; $r = \dfrac{1}{10}$ **b)** $a_4 = 20{,}25$; $r = -1{,}5$

a) $a_3 = a_1 r^2 \;\rightarrow\; 3 = a_1\left(\dfrac{1}{10}\right)^2 \;\rightarrow\; a_1 = 300;\; a_n = 300\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$

b) $a_4 = a_1 r^3 \;\rightarrow\; 20{,}25 = a_1\,(-1{,}5)^3 \;\rightarrow\; a_1 = -6;\; a_n = -6 \cdot (-1{,}5)^{n-1}$

20 ▼▼▽ **Calcula la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1\,000$ y $a_4 = 8$. ¿Se puede hallar la suma de sus infinitos términos?**

$a_4 = a_1 r^3 \;\rightarrow\; 8 = 1\,000 \cdot r^3 \;\rightarrow\; r = \sqrt[3]{\dfrac{8}{1\,000}} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

$$S_5 = \frac{a_1 r^5 - a_1}{r - 1} = \frac{1\,000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 - 1\,000}{\frac{1}{5} - 1} = 1\,249{,}6$$

Se puede hallar la suma de sus infinitos términos, porque la razón está comprendida entre –1 y 1.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{1\,000}{1 - 1/5} = 1\,250$$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

21 ▼▼▽ **Calcula las siguientes sumas:**

a) $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10}$**.**

b) Los números pares menores que 1 000.

c) Los números impares menores que 1 000.

a) Tenemos una progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = 2$. Nos piden calcular S_{10}:

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1} = \frac{2 \cdot 2^{10} - 2}{2 - 1} = \frac{2^{11} - 2}{1} = 2\,046$$

b) Los números pares forman una progresión aritmética con $a_1 = 2$ y $d = 2$.

Para sumar los números pares menores que 1 000, hay que calcular S_{499}, pues:

$$a_n = 2n \rightarrow 998 = 2 \cdot 499$$

Por tanto:

$$S_{499} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(2 + 998) \cdot 499}{2} = 249\,500$$

c) Para los impares:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{array}\right\} a_n = 2n - 1$$

Así, tenemos que calcular S_{500}, pues:

$$999 = 2n - 1 \rightarrow n = 500$$

$$S_{500} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 999) \cdot 500}{2} = 250\,000$$

Resuelve problemas

22 ▼▼▽ **En un teatro, la primera fila dista del escenario 4,5 m, y la octava, 9,75 m.**

a) ¿Cuál es la distancia entre dos filas?

b) ¿A qué distancia del escenario está la fila 17?

a) $a_8 = a_1 + 7d \rightarrow 9{,}75 = 4{,}5 + 7d \rightarrow d = 0{,}75$ m

La distancia entre dos filas es 0,75 m.

b) $a_{17} = a_1 + 16 \cdot d = 4{,}5 + 16 \cdot 0{,}75 = 16{,}5$ m está la fila 17.

23 ▼▼▽ **Para preparar una carrera, un deportista comienza corriendo 3 km y aumenta 1,5 km su re-corrido cada día. ¿Cuántos días tiene que entrenar para llegar a hacer un recorrido de 15 km?**

$a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow 15 = 3 + (n - 1) \cdot 1{,}5 \rightarrow 15 = 1{,}5 + 1{,}5n$

$n = 9$ días

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

24 ▼▼▽ **En el año 1986 fue visto el cometa *Halley* desde la Tierra, a la que se acerca cada 76 años. Esta era la cuarta vez que nos visitaba desde que el astrónomo Halley lo descubrió.**

a) ¿En qué año fue descubierto?

b) ¿Cuándo será visto en el siglo XXI?

a) $a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 1986 = a_1 + 3 \cdot 76 \rightarrow a_1 = 1758$. Fue descubierto en 1758.

b) $a_5 = 1986 + 76 = 2062$. Se verá en 2062.

25 ▼▼▽ **La dosis de un medicamento es 100 mg el primer día y 5 mg menos cada uno de los siguientes. El tratamiento dura 12 días. ¿Cuántos miligramos tiene que tomar el enfermo durante todo el tratamiento?**

$a_{12} = a_1 + 11d \rightarrow a_{12} = 100 + 11 \cdot (-5) = 45$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(100 + 45) \cdot 12}{2} = 870 \text{ mg}$$

26 ▼▼▽ **Un tipo de bacteria se reproduce por bipartición cada cuarto de hora. ¿Cuántas bacterias habrá después de 6 horas?**

La reproducción de las bacterias es una progresión geométrica de $r = 2$. Término general: $a_n = 2^{n-1}$.

Como $6 \cdot 4 = 24$ cuartos de hora, calculamos $a_{24} = 2^{24-1}$:

$a_{24} = 8\,388\,608$ bacterias habrá después de 6 horas.

27 ▼▼▽ **La población de un cierto país aumenta por término medio un 2,5% anual. Si la población actual es de 3 millones, ¿cuál será dentro de 10 años?**

$a_{10} = 3 \cdot 1{,}025^9 = 3\,746\,589$ dentro de 10 años.

28 ▼▼▽ **Una máquina envasadora pierde cada año un 15% de su valor. Si ha costado 20 000 €, ¿cuál será su valor dentro de 5 años?**

$a_5 = a_1 \cdot r^4 \rightarrow a_5 = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}15)^4 = 10\,440$ € será su valor dentro de 5 años.

29 ▼▼▽ **Una bola que rueda por un plano inclinado recorre 1 m durante el primer segundo, 4 m durante el segundo, 7 m durante el tercero, y así durante 10 segundos. ¿Qué distancia ha recorrido en total?**

1, 4, 7, … es una progresión aritmética con $d = 3$.

$a_{10} = a_1 + 9 \cdot 3 \rightarrow a_{10} = 1 + 9 \cdot 3 = 28$ m recorre en 10 s.

30 ▼▼▽ **Calcula el número de bloques necesarios para construir una torre como la de la figura de la página 60, pero que tenga 50 pisos.**

Los bloques de la torre están en progresión aritmética con $d = 4$: 1, 5, 9, 13, …

Hay que calcular la suma de 50 términos:

$a_{50} = a_1 + 49d \rightarrow a_{50} = 1 + 49 \cdot 4 = 197$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1 + 197) \cdot 50}{2} = 4\,950 \text{ bloques.}$$

PÁGINA 70

31 ▼▼▽ **Una pelota cae desde una cierta altura y rebota ascendiendo los 3/4 de la altura anterior. Después de dar en el suelo por tercera vez, alcanza 54 cm. ¿Desde qué altura se dejó caer? Calcula la distancia recorrida hasta que se para.**

Tenemos una progresión geométrica de la que conocemos su razón, $r = \frac{3}{4}$.

Nos piden su primer término, sabiendo que $a_3 = 54$.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow 54 = a_1\left(\frac{3}{4}\right)^2 \rightarrow a_1 = 96$$

La pelota se lanza desde 96 cm de altura.

Ahora nos piden la suma de las distancias; es decir, S_∞:

$$S_\infty = \frac{96}{1-3/4} = 384 \text{ cm}$$

32 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno.

33 ▼▼▽ **Calcula la fracción generatriz de estos números utilizando el método del ejercicio anterior:**

a) $7,\widehat{3}$ **b)** $3,5\widehat{4}$ **c)** $0,\widehat{23}$

a) $7,\widehat{3} = 7,3333\ldots = 7 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots$

Suma de los infinitos términos de la progresión $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1\,000} \ldots$

$$S_\infty = \frac{3/10}{1-1/10} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$7,\widehat{3} = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$$

b) $3,5\widehat{4} = 3,54444\ldots = 3,5 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + \ldots =$

$$= \frac{35}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \ldots$$

$$S_\infty = \frac{4/100}{1-1/10} = \frac{40}{900} = \frac{2}{45}$$

$$3,5\widehat{4} = \frac{35}{10} + \frac{2}{45} = \frac{319}{90}$$

c) $0,\widehat{23} = 0,23232323\ldots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \frac{3}{1\,000\,000} + \ldots$

$$S_\infty = \frac{23/100}{1-1/10} = \frac{23}{99}$$

$$0,\widehat{23} = \frac{23}{99}$$

34 ▼▼▽ **Las edades de 5 hermanos están en progresión aritmética y suman 35 años. El mayor tiene 13 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?**

Sabemos que $S_5 = 35$ y que $a_5 = 13$.

$$S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} \rightarrow 35 = \frac{a_1 + 13}{2} \cdot 5 \rightarrow a_1 + 13 = 14 \rightarrow a_1 = 1$$

Además:

$$a_5 = a_1 + 4 \cdot d \rightarrow 13 = 1 + 4d \rightarrow d = 3$$

Por tanto, las edades de los hermanos son 1, 4, 7, 10 y 13 años.

35 ▼▼▽ **Una rana da saltos en línea recta hacia delante, y cada vez salta los 2/3 del salto anterior. Quiere atravesar una charca circular de 5 m de radio, recorriendo su diámetro. Su primer salto es de 2 m. ¿Pasará por el centro de la charca? ¿Llegará al otro lado de la charca?**

Los saltos forman una progresión geométrica, con $a_1 = 2$ y $r = \frac{2}{3}$.

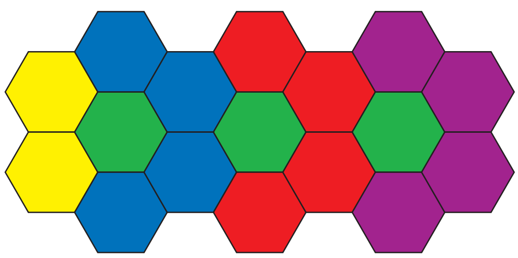
Si la rana salta infinitamente, en total recorrería:

$$S_\infty = \frac{2}{1 - 2/3} = 6 \text{ m}$$

Por tanto, sí pasaría del centro de la charca (5 m), pero no llegará nunca al otro lado (19 m).

36 ▼▼▽ **Para adornar un paseo se colocan a lo largo de su línea central una fila de jardineras hexagonales, rodeadas de baldosas de la misma forma, como muestra la figura. ¿Cuántas baldosas se necesitarán para poner 25 jardineras?**

Veamos un dibujo:



Así, es fácil entender que hacen falta:

— Para 1 jardinera, $1 \cdot 4 + 2$ baldosas.

— Para 2 jardineras, $2 \cdot 4 + 2$ baldosas.

— Para 3 jardineras, $3 \cdot 4 + 2$ baldosas.

— Para n jardineras, $n \cdot 4 + 2$ baldosas.

Soluciones a “Ejercicios y problemas”

Es una progresión aritmética con $a_1 = 6$ y $d = 4$, ya que:

$$a_n = 6 + (n - 1)4 = 4n + 2$$

Por tanto, para 25 jardineras hacen falta:

$$a_{25} = 4 \cdot 25 + 2 = 102 \text{ baldosas.}$$

Interés compuesto

37 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno.

38 ▼▼▽ **Depositamos 6 000 € al 5% anual, al comienzo de un cierto año. Averigua el capital disponible al final de cada año, durante 6 años.**

Se trata de una progresión geométrica, donde $a_1 = 6000$ y $r = 1,05$. Nos están preguntando por a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 y a_7.

Su término general es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 6000 \cdot 1,05^{n-1}$$

Por tanto:

$$a_2 = 6000 \cdot 1,05 = 6300 \text{ €}$$

$$a_3 = 6000 \cdot 1,05^2 = 6615 \text{ €}$$

$$a_4 = 6945,75 \text{ €}$$

$$a_5 = 7293,04 \text{ €}$$

$$a_6 = 7657,69 \text{ €}$$

$$a_7 = 8040,57 \text{ €}$$

39 ▼▼▽ **Depositamos en un banco 1 000 € al 2,5% semestral al comienzo de un cierto año. Averigua el capital disponible al final de cada semestre, durante 3 años, si no sacamos ningún dinero.**

Es una progresión geométrica de razón $\left(1 + \frac{2,5}{100}\right) = 1,025$.

3 años son 6 semestres. Sus términos son:

$1000 \cdot 1,025$; $1000 \cdot 1,025^2$; $1000 \cdot 1,025^3$; $1000 \cdot 1,025^4$; $1000 \cdot 1,025^5$; $1000 \cdot 1,025^6$ $\rightarrow$ 1 025; 1 050,63; 1 076,89; 1 103,81; 1 131,41; 1 158,69

40 ▼▼▽ Resuelto en el libro del alumno.

PÁGINA 71

41 ▼▼▽ **Al comienzo de cada año ingresamos 6 000 € al 5% anual. ¿De qué capital dispondremos al final del sexto año?**

1.^{er} AÑO | 2.º AÑO | 3.^{er} AÑO | 4.º AÑO | 5.º AÑO | 6.º AÑO

$$6\,000 \longrightarrow 6\,000 \cdot 1{,}05^6$$
$$6\,000 \longrightarrow 6\,000 \cdot 1{,}05^5$$
$$6\,000 \longrightarrow 6\,000 \cdot 1{,}05^4$$
$$6\,000 \longrightarrow 6\,000 \cdot 1{,}05^3$$
$$6\,000 \longrightarrow 6\,000 \cdot 1{,}05^2$$
$$6\,000 \longrightarrow 6\,000 \cdot 1{,}05$$

Los sumandos forman parte de una progresión geométrica de razón $r = 1{,}05$, con $a_1 = 6\,000 \cdot 1{,}05$. Lo que nos están pidiendo es S_6:

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{6\,000 \cdot 1{,}05^7 - 6\,000 \cdot 1{,}05}{0{,}05} = 42\,852{,}05 \text{ €}$$

Esta es la cifra que recibiremos al final del 6.º año.

42 ▼▼▽ **Una persona inicia un plan de pensiones ingresando, al principio de cada año, 3 000 € al 6% anual.**

¿Qué capital tendrá dentro de 10 años?

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 3\,000 \cdot 1{,}06$ y $r = 1{,}06$.

Lo que nos están pidiendo es S_{10}:

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{3\,000 \cdot 1{,}06^{11} - 3\,000 \cdot 1{,}06}{0{,}06} = 41\,914{,}93 \text{ €}$$

Problemas “+”

43 ▼▼▼ **Un comerciante recibe un pedido de 20 cajas de naranjas, 7 de clase extra y 13 de una calidad inferior. Quiere exponerlas al público formando una pirámide de base cuadrada con 12 naranjas de lado en la base, de forma que las naranjas visibles sean de la clase extra.**

Si en cada caja hay alrededor de 40 naranjas, ¿tendrá suficientes naranjas para ello?

El primer piso es un cuadrado de 12 naranjas de lado.

Las que se ven son: $12 \cdot 4 - 4 = 44$

En el 2.º piso se ven $11 \cdot 4 - 4 = 40$.

En el 3.^{er} piso se ven $10 \cdot 4 - 4 = 36$.

Las naranjas visibles son $44 + 40 + 36 + \ldots + 4 + 1$.

Los 11 primeros pisos forman una progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 44 - (n - 1) \cdot 4 = 48 - 4n$ y cuya suma es:

$$S_{11} = \frac{44 + 4}{2} \cdot 11 = 264$$

Añadimos la que corona la pirámide y son 265 las naranjas visibles.

Las 7 cajas de naranjas extras contienen $7 \cdot 40 = 280$ naranjas, que son suficientes para la parte visible.

Las naranjas que no se ven son:

$$10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 385$$

Como tiene $13 \cdot 40 = 520$, también son suficientes.

44 ▼▼▼ **Un agricultor debe echar un cubo de agua a cada uno de los veinte árboles que hay en su huerto. Estos están alineados a distancias regulares de 6 m a lo largo de un camino, y la distancia del primer árbol a la fuente es de 12 m.**

a) Si cada vez lleva un cubo, ¿qué distancia habrá recorrido hasta regar los 20 árboles y dejar el cubo en su posición inicial, junto a la fuente?

b) ¿Y si llevara dos cubos en cada viaje?

a) Para regar el primero y dejar el cubo donde estaba, recorre 12 metros de ida y 12 metros de vuelta $\rightarrow a_1 = 24$.

Para regar el segundo y dejar el cubo en la fuente, recorre 36 metros $\rightarrow a_2 = 36$.

Para regar el tercero y dejar el cubo en la fuente, recorre 48 metros $\rightarrow a_3 = 48$.

…

Es una progresión aritmética con $d = 12$.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 24 + (n - 1) \cdot 12 = 24 + 12n - 12 = 12n + 12$

$a_n = 12n + 12$

$a_{20} = 12 \cdot 20 + 12 = 252$

En total recorrerá:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(24 + 252) \cdot 20}{2} = 2\,760 \text{ m}$$

b) Para regar los árboles 1.º y 2.º, recorre (dejando el cubo en la fuente) 36 m: $b_1 = 36$.

Para regar los árboles 3.º y 4.º, recorre 60 m $\rightarrow b_2 = 60$.

Es una progresión aritmética con $d = 24$.

$b_n = 36 + (n - 1) \cdot 24 = 36 + 24n - 24 = 24n + 12$

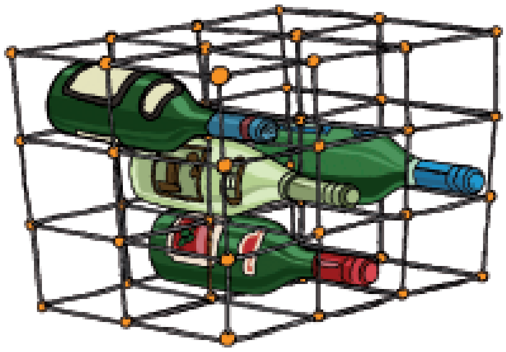
$b_{10} = 240 + 12 = 252$

En total recorrerá:

$$S_{10} = \frac{(b_1 + b_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(36 + 252) \cdot 10}{2} = 1\,440 \text{ m}$$

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

45 ▼▼▼ **Queremos construir un botellero como el de la figura, en el que cada botella ocupa dos celdillas. Observa que en este caben nueve botellas.**



¿Cuántas bolas y cuántos palos son necesarios para hacer uno en el que quepan doce botellas?

Para el primer piso se necesitan 24 bolas y 46 palos.

Para dos pisos se necesitan 36 bolas y 75 palos.

Las bolas forman una progresión aritmética con $a_1 = 24$ y $d = 12$. El término general es $a_n = 24 + (n - 1) \cdot 12 = 12 + 12n$.

Los palos forman una progresión aritmética con:

$a_1 = 46$ y $d = 29 \rightarrow a_n = 46 + (n - 1) \cdot 29 \rightarrow a_n = 17 + 29n$

Para 12 botellas necesitamos un piso más. Por tanto:

$a_4 = 12 + 12 \cdot 4 = 60$ bolas

$a_4 = 17 + 29 \cdot 4 = 133$ palos

46 ▼▼▼ **El día 1 de cierto mes, un amigo le propuso a otro un trato:**

Cada día de este mes tú me das 100 000 € y yo duplico el dinero que hay en esta caja (un céntimo), que, a fin de mes, te podrás llevar. El otro, después de pensar y echar cuentas con la calculadora, contestó riendo: ¿Por qué no me lo propones dentro de un año, exactamente?

Intenta averiguar en qué fecha pudo tener lugar esta conversación y justifica la respuesta.

Era el día uno de febrero de un año anterior a un bisiesto. Es decir, el mes actual tiene 28 días y el del año que viene, 29.

Así, este año las cuentas salen como sigue:

— Una aportación de 100 000 € al día supone $100\,000 \cdot 28 = 2\,800\,000$ €.

— Doblando cada día una cantidad inicial de 0,01 €, se obtiene:

$0{,}01 \cdot 2^{28} = 2\,684\,354{,}56$, cantidad inferior a la primera.

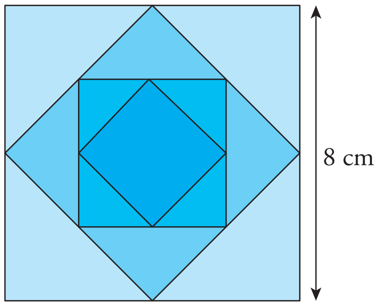
Sin embargo, febrero del año que viene tendrá un día más (29):

— Una aportación de 100 000 € al día supone $100\,000 \cdot 29 = 2\,900\,000$ €.

— Doblando cada día una cantidad inicial de 0,01 €, se obtiene:

$0{,}01 \cdot 2^{29} = 5\,368\,709$ €, cantidad muy superior a la anterior.

47 ▼▼▼ **Estos cuadrados se han obtenido uniendo los puntos medios de dos lados contiguos:**



a) Halla las áreas de los seis primeros cuadrados de esta sucesión. ¿Cuál será su término general?

b) Escribe la sucesión formada por las longitudes de los lados.

c) Calcula la suma de las áreas de los infinitos cuadrados generados de esa forma.

a) Observamos que el área de cada cuadrado es la mitad del área del cuadrado anterior. Por tanto, la sucesión de las áreas es:

$a_1 = 64 \text{ cm}^2,\ a_2 = 32 \text{ cm}^2,\ a_3 = 16 \text{ cm}^2,\ a_4 = 8 \text{ cm}^2,\ a_5 = 4 \text{ cm}^2,\ a_6 = 2 \text{ cm}^2, \dots$

Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. El término general es:

$$a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^6 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^6}{2^{n-1}} = 2^{6-(n-1)} = 2^{6-n+1} = 2^{7-n}$$

$$a_n = 2^{7-n}$$

b) El lado de un cuadrado es igual a la raíz cuadrada de su área. Por tanto, la sucesión de las longitudes de los lados será: $\sqrt{64}, \sqrt{32}, \sqrt{16}, \sqrt{8}, \sqrt{4}, \sqrt{2}, \dots$

Es decir: $8, 4\sqrt{2}, 4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, \dots$

c) Como $a_1 = 64$ y $r = \frac{1}{2}$, tenemos que: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{64}{1-\frac{1}{2}} = \frac{64}{\frac{1}{2}} = 128 \text{ cm}^2$

Reflexiona sobre la teoría

48 ▼▽▽ **En la progresión $2, \frac{5}{2}, \frac{25}{8}, \frac{125}{32}, \dots$ ¿se puede hallar la suma de sus infinitos términos? Justifícalo.**

No se puede hallar la suma de los infinitos términos de esa progresión geométrica porque su razón es $\frac{5}{4}$, que es mayor que 1.

Soluciones a "Ejercicios y problemas"

49 ▼▽▽ **Si en una progresión aritmética $a_2 + a_{13} = 32$, ¿podemos saber cuánto vale $a_8 + a_7$? ¿Por qué?**

$a_8 + a_7$ suma lo mismo que $a_2 + a_{13} = 32$, porque:

$a_2 + a_{13} = (a_1 + d) + (a_1 + 12d) = 2a_1 + 13d$

$a_8 + a_7 = (a_1 + 7d) + (a_1 + 6d) = 2a_1 + 13d$

50 ▼▼▽ **Euclides, en sus *Elementos*, utiliza la siguiente fórmula para las progresiones geométricas:**

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

A partir de ella, obtén la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica, tal como la hemos estudiado en esta unidad.

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} \rightarrow a_1(a_{n+1} - a_1) = S(a_2 - a_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow S = \frac{a_1(a_{n+1} - a_1)}{a_2 - a_1} = \frac{a_1(a_n r - a_1)}{a_1 r - a_1} = \frac{a_1(a_n r - a_1)}{a_1(r - 1)} \rightarrow S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

PÁGINA 72

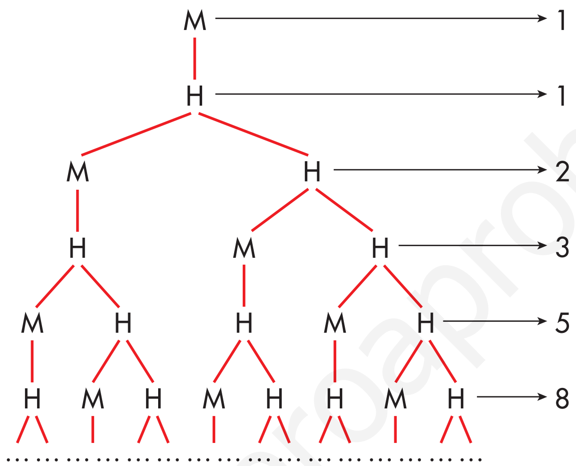
Lee y comprende

Una sucesión famosa

Las abejas macho nacen de huevos no fertilizados; es decir, tienen madre pero no padre.

Las abejas hembra nacen de huevos fertilizados.

El siguiente esquema nos permite observar el número de antepasados de una abeja macho en las distintas generaciones:



- **¿Cuántos antecesores tiene una abeja macho en la décima generación de antepasados?**
- **¿Cuál es la ley de formación de la sucesión obtenida: 1, 1, 2, 3, 5, …?**
- **¿Recuerdas cómo se llama esta sucesión?**

• El número de antepasado en cada una de las diez primeras generaciones es:

$$1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 89$$

• Ley de formación: Cada término se obtiene sumando los dos que le preceden:

$$a_1 = 1; \ a_2 = 2; \ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

• Sucesión de Fibonacci.

3 Soluciones a “Y para terminar”

PÁGINA 73

▼ Conjetura y generaliza

- **OBSERVA:** $1^3 = 1 \rightarrow 1^2 = 1^2$

  $1^3 + 2^3 = 9 \rightarrow 3^2 = (1 + 2)^2$

  $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \rightarrow 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$

- **HAZ UNA CONJETURA: ¿Puedes predecir el valor de las siguientes expresiones?**

  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = ?$ $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = ?$ $\quad$ **¡Compruébalo!**

- **GENERALIZA TUS CONCLUSIONES:**

  — ¿Cuál sería el valor de $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$?

  — Elabora una fórmula que te permita calcular:

  $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ **cualquiera que sea el término natural n.**

La observación de los primeros casos sembrará la sospecha de que se cumple lo siguiente:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

$$(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 10^2 = 100$$

Se confirma lo supuesto. Y podemos seguir comprobando:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 15^2 = 225$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)^2 = \left[\frac{(1 + n) \cdot n}{2}\right]^2$$

Es decir, la suma de los cubos de los n primeros números naturales es igual al cuadrado de la suma de dichos números.

La demostración, aplicando el método de inducción, se puede encontrar en el libro digital.