

BLOQUE IV

Geometría

11. Semejanza. Teoremas de Thales y Pitágoras
12. Cuerpos en el espacio
13. Áreas y volúmenes

Contenidos del bloque

El bloque comienza con el estudio de la semejanza y dos de los teoremas más importantes de las Matemáticas: el de Thales y el de Pitágoras, y sus aplicaciones.

Los contenidos del bloque continúan introduciendo los elementos básicos del espacio y el estudio de los cuerpos geométricos en el espacio.

Finaliza el bloque con el estudio de las unidades de volumen y el cálculo de las áreas y los volúmenes de cuerpos en el espacio.

El ordenador y los programas GeoGebra y Cabri se convierten en este bloque en unas buenas herramientas para realizar dibujos geométricos y resolver problemas. En este sentido, y sin perder de vista su uso moderado, se facilita su empleo como herramienta instrumental básica para el estudio de los contenidos del bloque.

Pinceladas de historia

Aunque en la cultura egipcia y en la mesopotámica se resolvieron problemas geométricos notables, fue en la cultura griega donde se consiguió un mayor avance. Se describen tres etapas:

En la primera (siglos VI y V a.C.) sobresalen matemáticos como Thales, Zenón, Hipócrates y Pitágoras. En este tiempo se introdujeron y perfeccionaron los métodos de demostración geométrica. Se consideraron, en particular, el teorema de Pitágoras, los problemas sobre la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo.

En la segunda etapa (siglos IV a.C.) se fundan las dos escuelas más importantes de Atenas: la Academia de Platón y el Liceo de Aristóteles. Los dos matemáticos más famosos son Platón, con sus poliedros regulares llamados «platónicos», y Eudoxo.

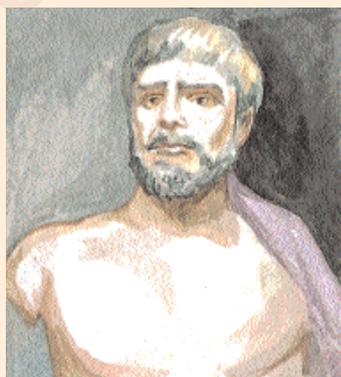
En la tercera etapa (siglos III-I a.C.) se llega a la culminación matemática en Grecia, con los tres geómetras más famosos de la Antigüedad: Euclides, Arquímedes y Apolonio. La obra más conocida es *Elementos*, de Euclides. En esta obra se recogen una serie de axiomas o postulados que sirvieron de base para el posterior desarrollo de la geometría.

De la época del dominio romano hay que destacar la fórmula de Herón para calcular el área del triángulo, conocidos los tres lados.

Durante el Imperio musulmán es importante la obtención del número π con 17 cifras exactas, realizada por Kashi (s. XV) mediante polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia. Después de más de 150 años, en 1593, Viète encontró solamente nueve cifras exactas. Hubo que esperar a fines del siglo XVI y comienzos del XVII para repetir el cálculo de Kashi.

En el continente europeo se puede considerar la obra *Practica Geometriae*, de Fibonacci, el punto de arranque de la geometría renacentista. Esta obra está dedicada a resolver especialmente problemas geométricos de medida de áreas de polígonos y volúmenes de cuerpos.

Desde el siglo XIX se produce una transformación en la geometría por la influencia del álgebra, de la mano de Gauss, Riemann o Lobachewski. Es destacable el trabajo de Alicia Boole Stott sobre la geometría cuatridimensional. Introdujo la palabra «*polytope*» para describir un cuerpo sólido convexo cuatridimensional e hizo dos importantes descubrimientos relativos a la construcción de poliedros.



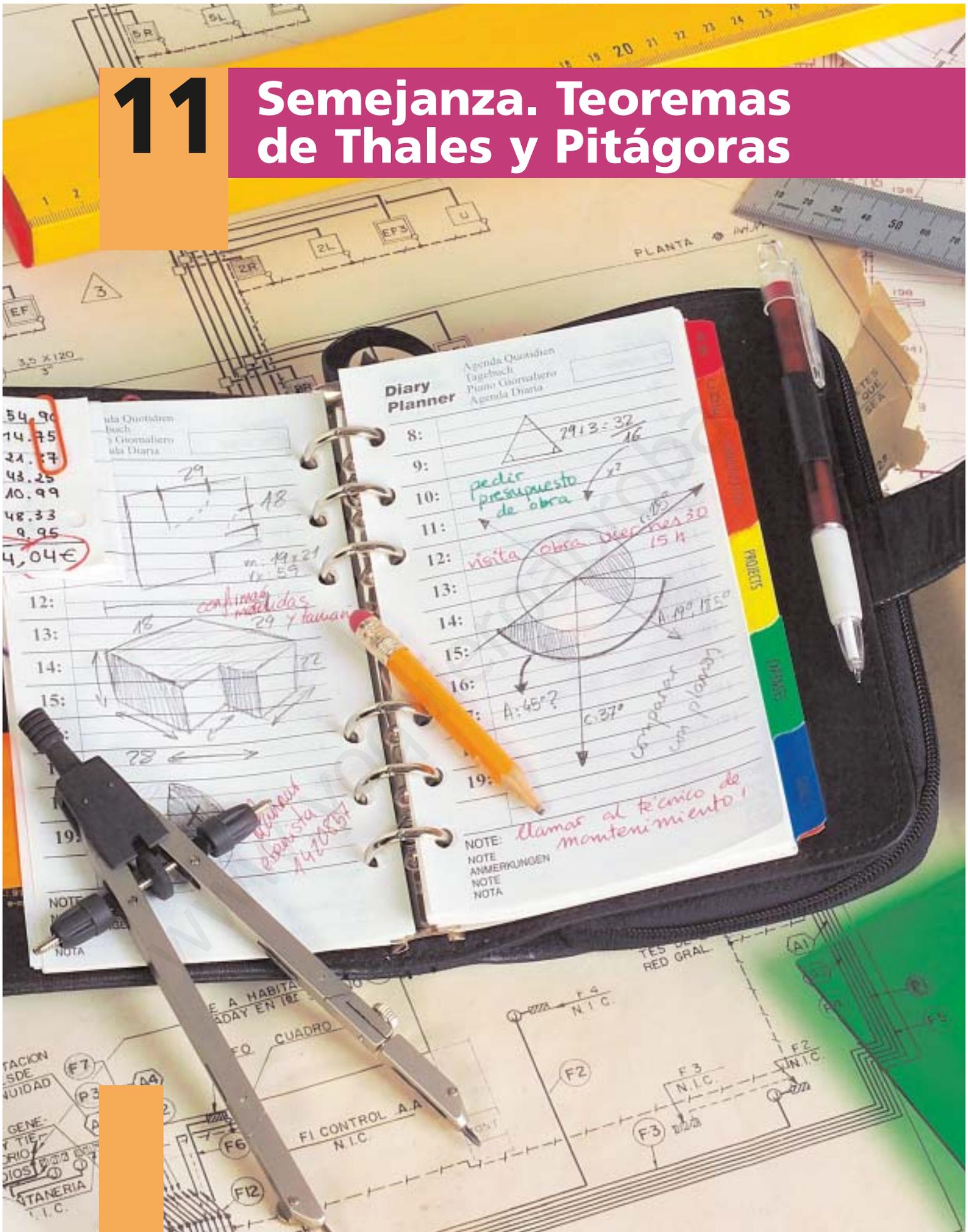
Thales de Mileto
(S. aprox. 624-548 a.C.)



Alicia Boole Stott
(1860-1940)

11

Semejanza. Teoremas de Thales y Pitágoras



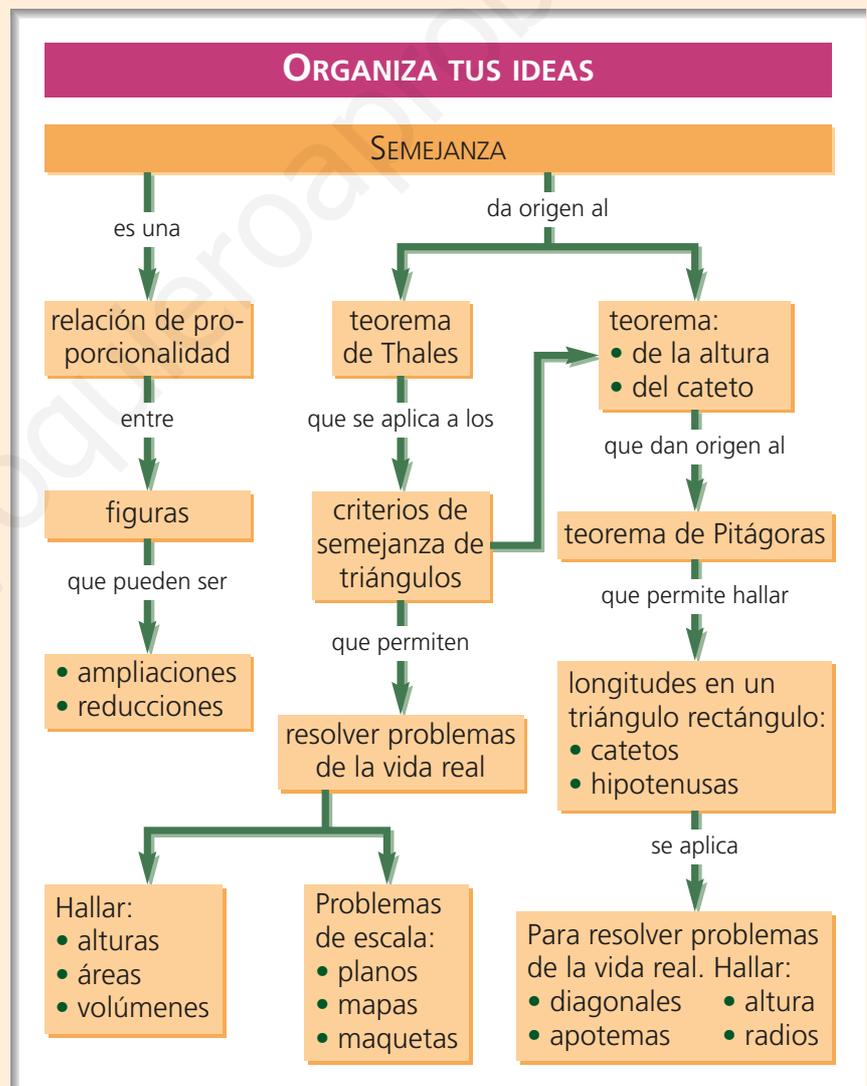


En este tema se desarrollan dos de los teoremas más importantes de las Matemáticas: el de Thales y el de Pitágoras.

En primer lugar se estudian las figuras semejantes, como son las ampliaciones y las reducciones.

A continuación se exponen las aplicaciones del teorema de Thales —cómo dividir geoméricamente un segmento en partes proporcionales a otros, los criterios de semejanza de triángulos y aplicaciones a la vida real—. Con referencia al teorema de Thales, se estudia también la relación entre perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes, y los planos, mapas y maquetas.

Finaliza el tema con la introducción al teorema de Pitágoras y sus aplicaciones a la resolución de problemas.



1. Figuras semejantes

PIENSA Y CALCULA



Si la Torre del Oro mide aproximadamente 20 m de alto, ¿cuánto mide aproximadamente de alto la Giralda de Sevilla?



Carné calculista

$$25,6 : 0,68$$

Evitar errores

En la razón de semejanza r siempre se divide a' entre a

1.1. Figuras semejantes

Dos **figuras son semejantes** si tienen la misma forma, aunque el tamaño sea distinto. En dos figuras semejantes las longitudes de segmentos correspondientes son proporcionales.

Se llama **razón de semejanza o escala** al cociente entre dos longitudes correspondientes:

$$r = \frac{a'}{a}$$

En dos figuras semejantes, los ángulos correspondientes son iguales.

Ejemplo

Son semejantes un plano y el objeto que representa, un mapa y el terreno que representa, una maqueta y el objeto que representa, una foto y la imagen que representa.

1.2. Ampliación y reducción

Una **ampliación** es una figura semejante a otra, pero mayor; es decir, $r > 1$

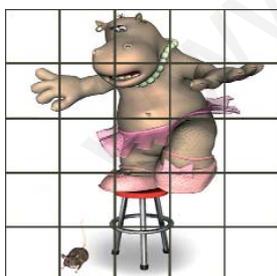
Una **reducción** es una figura semejante a otra, pero menor; es decir, $r < 1$

Ejemplo

En una fotocopiadora hacen ampliaciones y reducciones de los originales.

Una reducción al 50% es $r = 50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 1:2$

1:2 quiere decir que 2 unidades se convierten en 1



1.3. Construcción de figuras semejantes mediante cuadrícula

Se puede construir una figura semejante a otra mediante una cuadrícula.

- Se dibuja una cuadrícula en el objeto inicial.
- Se dibuja una cuadrícula en blanco con la escala correspondiente.
- Se dibuja en cada nueva celda el recuadro correspondiente.

Ejemplo

Haz el dibujo del margen a escala 1:2, es decir, con una reducción al 50%

1.4. Construcción de figuras semejantes mediante proyecciones

Se puede construir una figura semejante a otra mediante una proyección:

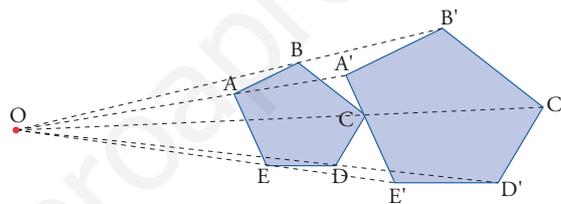
- Se toma el objeto inicial.
- Se toma un punto exterior cualquiera, que se llama centro de proyección.
- Se dibujan semirrectas desde el centro de proyección que pasen por cada uno de los vértices del objeto inicial.
- La distancia desde el centro de proyección a cada vértice del objeto inicial se toma como unidad y se multiplica por la razón de semejanza. El resultado obtenido se lleva desde el centro de proyección.
- Se unen los puntos obtenidos.

Ejemplo

Dado el polígono ABCDE, dibuja otro polígono A'B'C'D'E' mediante una ampliación al 150%

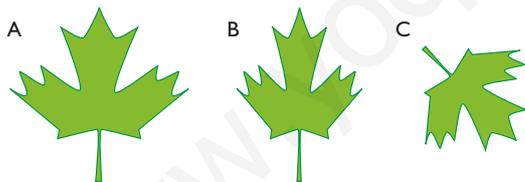
Se toma un punto cualquiera O como centro de proyección, se une con cada uno de los vértices del polígono ABCDE y se prolonga.

Como la ampliación es del 150%, se multiplica el segmento OA por 1,5 y el resultado se lleva desde el centro de proyección y es el punto A'.

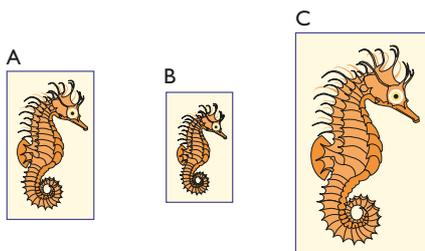


APLICA LA TEORÍA

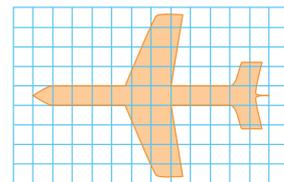
- 1 De las figuras siguientes, hay dos semejantes. ¿Cuáles son?



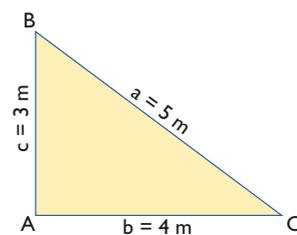
- 2 De las figuras siguientes, A es la original. ¿Cuál de las siguientes es ampliación y cuál es reducción? Halla el tanto por ciento de ampliación y reducción correspondientes.



- 3 Mediante la técnica de cuadrículado, haz un avión semejante al siguiente, pero con el doble de tamaño.



- 4 Mediante una proyección que tenga como centro el vértice A, dibuja otro triángulo rectángulo que sea una ampliación al 150%. ¿Cuánto mide cada uno de los lados?



2. Teorema de Thales

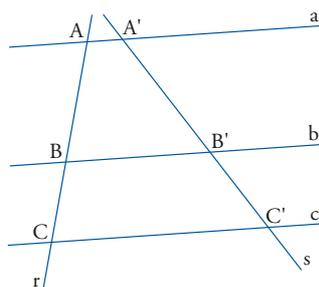
PIENSA Y CALCULA



Si una persona que mide 1,75 m proyecta una sombra de 1,75 m, y en el mismo lugar, el mismo día y a la misma hora la sombra de un árbol mide 6,5 m, ¿cuánto mide la altura del árbol?

Carné calculista

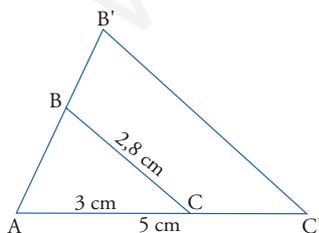
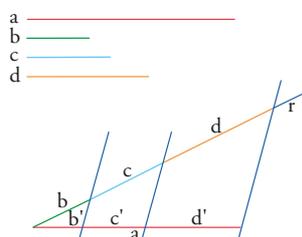
$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} : \frac{7}{10}$$



$$1,44 \times 1,8 \div 1,2 = 2,16$$

Ejemplo

Dividir el segmento **a** en partes proporcionales a los segmentos **b**, **c** y **d**



$$5 \times 2,8 \div 3 = 4,67$$

2.1. Teorema de Thales

El **teorema de Thales** dice que si se traza un conjunto de rectas paralelas entre sí, **a**, **b**, **c**..., que cortan a otras dos rectas, **r** y **s**, los segmentos que se determinan sobre las rectas **r** y **s** son proporcionales:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

Ejemplo

Sabiendo que $AB = 1,8$ cm, $BC = 1,2$ cm y $B'C' = 1,44$ cm, halla la longitud del segmento $A'B'$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{A'B'}{1,8} = \frac{1,44}{1,2} \Rightarrow A'B' = 2,16$$

2.2. División de un segmento en partes proporcionales

Para dividir un segmento **a** en partes proporcionales a otros segmentos **b**, **c**, **d**... se aplica el siguiente procedimiento:

- Se dibuja una semirecta oblicua, **r**, por uno de los extremos del segmento **a**
- Se llevan con el compás, sobre dicha semirecta, los segmentos dados **b**, **c**, **d**..., uno a continuación de otro.
- Se dibuja la recta que une el extremo del último segmento con el otro extremo del segmento **a**
- Se trazan paralelas a dicha recta por los extremos de los segmentos **b**, **c**, **d**..., respectivamente.

2.3. Triángulos en posición de Thales

Dos **triángulos están en posición de Thales** si tienen un ángulo común, y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Dos triángulos en posición de Thales son semejantes, es decir:

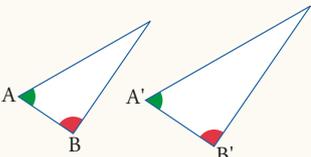
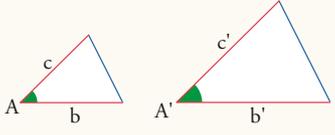
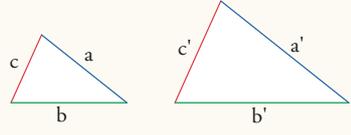
- Los ángulos son iguales.
- Los lados correspondientes son proporcionales.

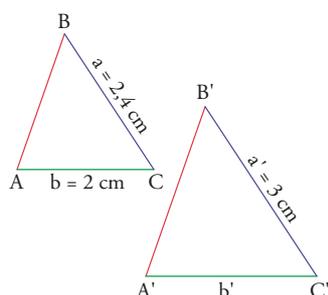
Ejemplo

Sabiendo que $AC = 3$ cm, $AC' = 5$ cm y $BC = 2,8$ cm, halla la longitud del lado $B'C'$ y redondea a dos decimales el resultado.

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{B'C'}{2,8} \Rightarrow B'C' = 4,67$$

2.4. Criterios de semejanza de triángulos

1 ^{er} criterio	2 ^o criterio	3 ^{er} criterio
Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.	Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que los forman son proporcionales.	Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales.
		
$A = A'$ y $B = B'$	$A = A'$ y $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$	$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$



Ejemplo

Los triángulos ABC y A'B'C' del margen son semejantes. Halla:

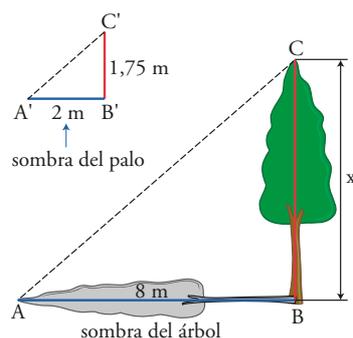
a) La razón de semejanza.

b) La medida del lado b'

$$a) r = \frac{a'}{a} = \frac{3}{2,4} = 1,25 \quad b) \frac{b'}{b} = r \Rightarrow \frac{b'}{2} = 1,25 \Rightarrow b' = 1,25 \cdot 2 = 2,5 \text{ cm}$$

2.5. Aplicaciones de los criterios de semejanza de triángulos

Cálculo de alturas midiendo la sombra.



Ejemplo

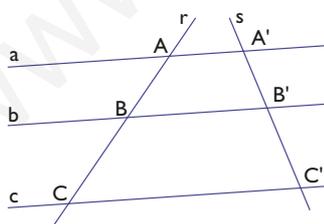
Un palo vertical que mide 1,75 m proyecta una sombra de 2 m. ¿Cuánto mide de alto un árbol cuya sombra mide 8 m el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar? Redondea el resultado a dos decimales.

$$\frac{2}{1,75} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 7 \text{ m}$$

$$\boxed{8} \times \boxed{1,75} \div \boxed{2} = \boxed{7}$$

APLICA LA TEORÍA

- 5 Sabiendo que $AB = 9 \text{ cm}$, $BC = 12 \text{ cm}$ y $A'B' = 7,5 \text{ cm}$, halla la longitud del segmento $B'C'$. ¿Qué teorema has aplicado?



- 6 Divide el segmento **a** en partes proporcionales a los segmentos **b**, **c** y **d**



- 7 Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 cm y 4 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo en posición de Thales, de forma que el cateto menor mida 6 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

- 8 Dos ángulos de un triángulo miden 55° y 65° , y dos ángulos de otro triángulo miden 55° y 60° . ¿Son semejantes ambos triángulos?

- 9 En una fotografía están Pablo y su padre. Se sabe que Pablo mide en la realidad 1,50 m. Las medidas en la fotografía son: Pablo, 6 cm, y su padre, 7,2 cm. ¿Cuánto mide su padre en la realidad?

3. Relaciones en figuras semejantes

PIENSA Y CALCULA



Un cuadrado tiene 9 m² de área. Calcula el área de otro cuadrado cuyo lado mide el doble.

Carné calculista

$$36,89 : 5,9$$

3.1. Relaciones entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras semejantes

Razón de las longitudes	Razón de las áreas	Razón de los volúmenes
La razón de las longitudes de dos figuras semejantes es igual a la razón de semejanza.	La razón de las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.	La razón de los volúmenes de dos cuerpos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.
$\frac{L'}{L} = r$	$\frac{A'}{A} = r^2$	$\frac{V'}{V} = r^3$

Evitar errores

- Si una figura es semejante a otra y las medidas son el doble, el área no es el doble, sino el cuádruplo, porque:

$$r = 2 \Rightarrow r^2 = 2^2 = 4$$

- Si un cuerpo es semejante a otro y las medidas son el doble, el volumen no es el doble, sino 8 veces mayor, porque:

$$r = 2 \Rightarrow r^3 = 2^3 = 8$$

Ejemplo

Un rectángulo tiene 12 m de perímetro. Calcula el perímetro de otro rectángulo semejante sabiendo que la razón de semejanza es $r = 1,5$

$$\frac{P'}{P} = r \Rightarrow \frac{P'}{12} = 1,5 \Rightarrow P' = 12 \cdot 1,5 = 18 \text{ m}$$

Ejemplo

Un rectángulo tiene 7 m² de área. Calcula el área de otro rectángulo semejante sabiendo que la razón de semejanza es $r = 1,5$

$$\frac{A'}{A} = r^2 \Rightarrow \frac{A'}{7} = 1,5^2 \Rightarrow A' = 7 \cdot 1,5^2 = 15,75 \text{ m}^2$$

$$7 \times 1,5^2 = 15,75$$

3.2. Escalas

La **escala** de un objeto es el cociente entre una longitud medida en el dibujo y la medida de la longitud correspondiente en el objeto, es decir, es la razón de semejanza. Siempre se escribe en un cociente en el que el dividendo es uno; por ejemplo, 1:200, y se lee «uno es a doscientos».

Ejemplo

Halla la escala a la que está construido un plano en el que 6 cm equivalen a 18 m en la realidad.

$$6 \text{ cm} : 1800 \text{ cm} = 1:300$$

$$6 \text{ ab/c} : 1800 = 1 : 300$$

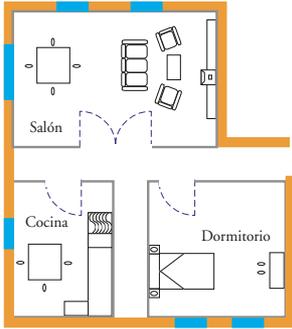
Esto quiere decir que 1 cm en el plano corresponde a 300 cm = 3 m en la realidad.

Evitar errores

La escala en un plano es mayor que en un mapa.

Ejemplos

- Escala de un piso:
 $1:200 = 0,005$
- Escala de un mapa:
 $1:5\,000\,000 = 0,0000002$



Escala 1:200



Escala 1:25 000 000



3.3. Planos

Un **plano** es la representación de una casa, un piso, un terreno, una pieza, etc., en la que la escala es superior a 1:10 000

Ejemplo

El plano de un piso está construido a escala 1:200. Si la longitud de un pasillo mide en el plano 4 cm, ¿cuánto mide en la realidad?

$$4 \cdot 200 = 800 \text{ cm} = 8 \text{ m}$$

3.4. Mapas

Un **mapa** es la representación de toda la Tierra o parte de ella, en la que la escala es inferior a 1:10 000

Ejemplo

El mapa del margen está a escala 1:25 000 000. Halla la distancia que hay en línea recta desde Madrid a Sevilla.

Al medir con la regla la distancia que hay en el mapa, ésta es aproximadamente de 1,6 cm

$$1,6 \cdot 25\,000\,000 = 40\,000\,000 \text{ cm} = 400 \text{ km}$$

3.5. Maquetas

Una **maqueta** es la representación de un objeto real en tres dimensiones.

Ejemplo

La maqueta del avión del margen está construida a escala 1:800. ¿Cuánto mide de largo en la realidad?

Midiendo con la regla la longitud del avión del margen, se obtiene 3,5 cm

$$3,5 \cdot 800 = 2\,800 \text{ cm} = 28 \text{ m}$$

APLICA LA TEORÍA

- 10 Un lado de un triángulo mide 3,5 m, y el lado correspondiente de otro triángulo semejante mide 8,75 cm. Si el perímetro del primer triángulo mide 12 m y el área mide 4,6 m²:
 - a) ¿cuánto mide el perímetro del triángulo semejante?
 - b) ¿cuánto mide el área del triángulo semejante?
- 11 Una arista de un ortoedro mide 2,5 m, y la arista correspondiente de otro ortoedro semejante mide 3,75 m. El área del primer ortoedro mide 71,5 m², y el volumen, 39,375 m³. Halla en el ortoedro semejante:
 - a) El área.
 - b) El volumen.
- 12 ¿Qué escala es mayor, 1:200 o 1:20 000? ¿Cuál corresponde a un mapa y cuál a un plano?
- 13 Un terreno tiene forma rectangular y mide 3 km de largo. Se dibuja un rectángulo semejante de 6 cm de longitud.
 - a) Halla la escala.
 - b) ¿El objeto dibujado es un plano o un mapa?
- 14 En el plano de la parte superior de la página, el salón mide 3 cm × 2 cm. Calcula sus dimensiones y el área en la realidad.
- 15 Midiendo con la regla en el mapa de la parte superior, calcula la distancia que hay en línea recta entre:
 - a) Barcelona y La Coruña.
 - b) Bilbao y Cádiz.
 - c) Huelva y Oviedo.
 - d) Valencia y Madrid.
- 16 Las dimensiones de una maqueta de un coche a escala 1:50 son 9 cm × 3,6 cm × 3 cm. Calcula sus dimensiones en la realidad.

4. Teorema de Pitágoras

PIENSA Y CALCULA

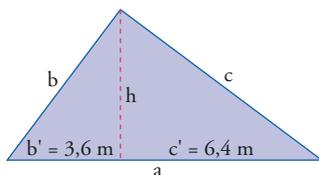


Sustituye los puntos suspensivos por el signo de igualdad, =, o de desigualdad, ≠:

- a) $5^2 \dots 3^2 + 4^2$ b) $6^2 + 7^2 \dots 8^2$ c) $6^2 + 8^2 \dots 10^2$ d) $13^2 \dots 5^2 + 12^2$

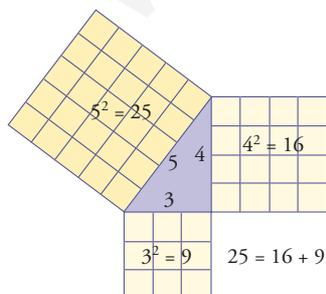
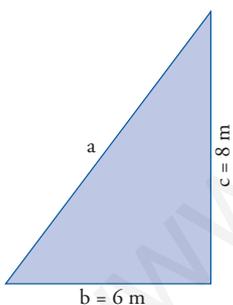
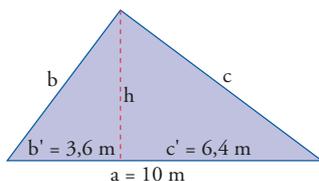
Carné calculista

$$\left(\frac{1}{5} - 2\right) : \frac{3}{10}$$



Evitar errores

Los teoremas de la altura, del cateto y de Pitágoras se pueden aplicar únicamente cuando el triángulo es rectángulo.



4.1. Teorema de la altura

El **teorema de la altura** dice que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados sobre ella:

$$h^2 = b' \cdot c'$$

Ejemplo

$$h^2 = b' \cdot c' = 3,6 \cdot 6,4 = 23,04$$

$$h = \sqrt{23,04} = 4,8 \text{ m}$$

$$\sqrt{(3,6 \times 6,4)} = 4,8$$

4.2. Teorema del cateto

El **teorema del cateto** dice que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de cada cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud de la proyección de dicho cateto sobre ella:

$$b^2 = a \cdot b' \quad c^2 = a \cdot c'$$

Ejemplo

$$b^2 = a \cdot b' = 10 \cdot 3,6 = 36$$

$$b = \sqrt{36} = 6 \text{ m}$$

$$c^2 = a \cdot c' = 10 \cdot 6,4 = 64$$

$$c = \sqrt{64} = 8 \text{ m}$$

4.3. Teorema de Pitágoras

El **teorema de Pitágoras** dice que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ejemplo

En un triángulo rectángulo un cateto mide 6 m, y el otro, 8 m. Halla cuánto mide la hipotenusa.

$$a^2 = b^2 + c^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$a = \sqrt{100} = 10$$

$$a = 10 \text{ m}$$

$$\sqrt{(6^2 + 8^2)} = 10$$

4.4. Interpretación geométrica del teorema de Pitágoras

El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Reconocimiento de triángulos rectángulos

Dados los tres lados de un triángulo, éste es rectángulo si el cuadrado del mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.

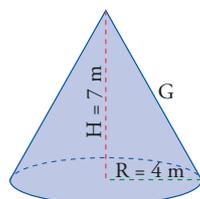
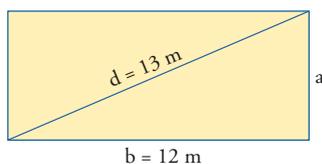
Si **a** es el lado mayor, se tiene:

T. rectángulo si: $a^2 = b^2 + c^2$

T. acutángulo si: $a^2 < b^2 + c^2$

T. obtusángulo si:

$a^2 > b^2 + c^2$



4.5. Ternas pitagóricas

Una **terna pitagórica** son tres números enteros que verifican el teorema de Pitágoras. Si una terna es pitagórica, todos sus múltiplos también lo son.

Ejemplo

a) $3, 4 \text{ y } 5 \Rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2$

b) $6, 8 \text{ y } 10 \Rightarrow 6^2 + 8^2 = 10^2$

4.6. Aplicaciones del teorema de Pitágoras

La aplicación del teorema de Pitágoras es la resolución de triángulos rectángulos en los que se conocen dos lados y hay que hallar el tercero.

Ejemplo

Halla la altura de un rectángulo sabiendo que la base mide 12 m, y la diagonal, 13 m

$$12^2 + a^2 = 13^2 \Rightarrow 144 + a^2 = 169 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} = 5 \text{ m}$$

$$\sqrt{(13^2 - 12^2)} = 5$$

Ejemplo

Halla la generatriz de un cono en el que el radio de la base mide 4 m, y la altura, 7 m. Redondea el resultado a dos decimales.

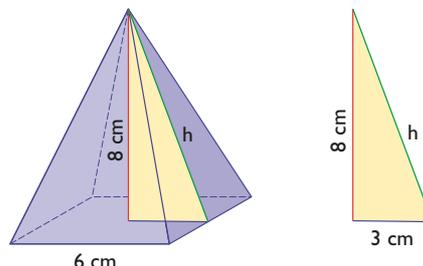
$$G^2 = 4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65$$

$$G = \sqrt{65} = 8,06 \text{ m}$$

$$\sqrt{(4^2 + 7^2)} = 8,06$$

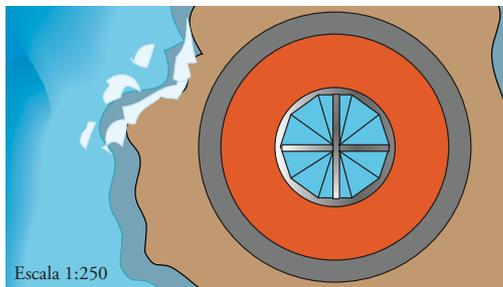
APLICA LA TEORÍA

- 17** En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos con longitudes de 3 cm y 12 cm. Halla la longitud de dicha altura y dibuja el triángulo rectángulo.
- 18** En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 5 m y la proyección del cateto **b** sobre ella mide 1,8 m. Halla:
- La longitud del cateto **b**
 - La longitud de la proyección del cateto **c** sobre la hipotenusa.
 - La longitud del cateto **c**
 - La longitud de la altura relativa a la hipotenusa **h**
 - Dibuja el triángulo rectángulo.
- 19** En un triángulo rectángulo, los catetos miden 3,5 cm y 2,5 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa. Redondea el resultado a dos decimales.
- 20** En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 4,5 cm, y un cateto, 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.
- 21** Dibuja la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras en el caso en que los lados midan 6 cm, 8 cm y 10 cm
- 22** ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?
- 2, 3 y 4
 - 3, 4 y 5
 - 4, 5 y 6
 - 5, 12 y 13
- 23** En una pirámide cuadrangular, la arista de la base mide 6 cm, y la altura, 8 cm. Calcula cuánto mide la apotema de dicha pirámide. Redondea el resultado a dos decimales.



Ejercicios y problemas

- 36** El plano siguiente corresponde a la planta de un faro. Halla cuánto mide en la realidad el diámetro del faro.



- 37** Midiendo con la regla en el mapa siguiente, calcula la distancia que hay en línea recta entre:

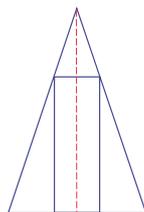
- a) Madrid y Bruselas. b) Madrid y Roma.
c) Londres y Roma. d) Londres y París.



- 38** Las dimensiones de la maqueta de un vagón de un tren a escala 1:50 son $24 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$. Calcula sus dimensiones en la realidad.

Para ampliar

- 45** Se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que la base del triángulo es $b = 2 \text{ cm}$, y la altura $h = 3 \text{ cm}$, y que la altura del rectángulo es $H = 2 \text{ cm}$, halla cuánto mide la base del rectángulo.

4. Teorema de Pitágoras

- 39** En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide $3,75 \text{ cm}$, y uno de los segmentos en que la divide la altura correspondiente mide 3 cm . Halla la longitud de dicha altura y dibuja el triángulo rectángulo.
- 40** En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden $b' = 16 \text{ cm}$ y $c' = 9 \text{ cm}$. Halla:
- a) el cateto b
b) el cateto c
- 41** En un triángulo rectángulo los catetos miden 4 cm y 3 cm . Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa.
- 42** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5 cm , y un cateto, $4,5 \text{ cm}$. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.
- 43** ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?
- a) $5, 7$ y 9 b) $6, 8$ y 10
c) $7, 9$ y 11 d) $10, 24$ y 26
- 44** Dibuja un cuadrado de 5 cm de lado y su diagonal. Halla la longitud de la diagonal, redondea el resultado a un decimal y comprueba el resultado midiendo con una regla.



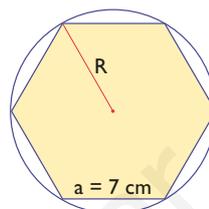
- 46** Dibuja dos triángulos equiláteros distintos. Razona si son semejantes.
- 47** Los lados de un triángulo miden $a = 7 \text{ cm}$, $b = 8,5 \text{ cm}$ y $c = 12 \text{ cm}$. Halla la medida de los lados a' , b' y c' de un triángulo semejante en el que $r = 1,75$
- 48** Un palo de 1 m de longitud colocado verticalmente proyecta una sombra de 1 m . Sabiendo que el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar la sombra de la torre Eiffel de París mide 320 m , calcula mentalmente lo que mide de alto la torre Eiffel.

Ejercicios y problemas

- 49** Dibuja un segmento de 5 cm y divídelo en tres partes iguales.
- 50** El radio de una circunferencia mide x metros, y el radio de otra circunferencia es el triple. Calcula cuántas veces es mayor la longitud de la segunda circunferencia y el área del círculo correspondiente.
- 51** La arista de un cubo mide x metros, y la arista de otro cubo mide $5x$ metros. Calcula cuántas veces son mayores el área y el volumen del segundo cubo respecto al primero.
- 52** De los siguientes triángulos, ¿cuáles son rectángulos?

- a) $a = 1$ cm, $b = 1,5$ cm, $c = 2$ cm
 b) $a = 1,5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2,5$ cm
 c) $a = 2$ cm, $b = 2,5$ cm, $c = 3$ cm
 d) $a = 2,5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 6,5$ cm

- 53** Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente hexágono:

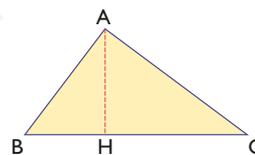


Problemas

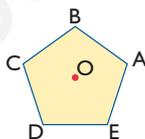
- 54** Mediante la técnica de cuadrículado dibuja un perro semejante al siguiente, pero que tenga el doble de tamaño.



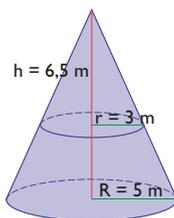
- 58** En el siguiente dibujo, ¿cuántos triángulos semejantes hay? Nómbralos por las letras de los vértices y escribe los ángulos que son iguales.



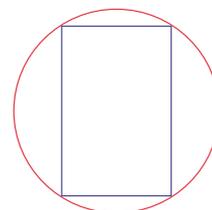
- 55** Dibuja un pentágono semejante al siguiente mediante una proyección que tenga como centro el centro de dicho pentágono, y cuya razón de semejanza sea 3



- 56** Dado el siguiente dibujo, calcula la medida de la altura H del cono grande.

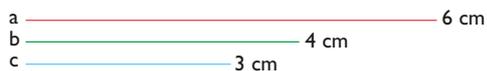


- 59** Se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el diámetro de la circunferencia es $R = 3$ cm y que la altura del rectángulo es $h = 2,5$ cm, halla cuánto mide la base del rectángulo.

- 60** Dados los segmentos a , b y c



resuelve los siguientes apartados:

- 57** Los lados de un triángulo miden $a = 4$ cm, $b = 5$ cm y $c = 7$ cm. Sabiendo que en otro triángulo semejante $a' = 6$ cm, halla la medida de los lados b' y c'

- a) Halla el cuarto proporcional de las medidas 6 cm, 4 cm y 3 cm
 b) Halla el cuarto proporcional geométrica-mente.

Ejercicios y problemas

c) Mide con la regla el segmento cuarto proporcional y comprueba que su longitud es el valor obtenido en el apartado a)

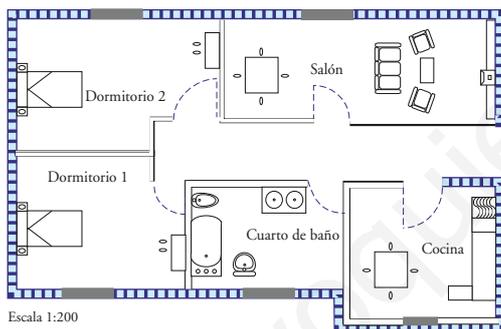
61 Dibuja un segmento de 7 cm y divídelo en cinco partes iguales.

62 En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden $b' = 1,8$ cm y $c' = 3,2$ cm. Halla:

- La longitud de la hipotenusa **a**
- La longitud de la altura relativa a la hipotenusa.
- El cateto **b**
- El cateto **c**
- El área de dicho triángulo rectángulo.

63 Un rectángulo mide 40 m de perímetro y su área mide 100 m^2 . Halla el área de otro semejante en el que el perímetro mide 80 m

64 En el plano siguiente:



calcula la superficie:

- Del salón.
- De la cocina.
- Del cuarto de baño.
- Del dormitorio 1
- Del dormitorio 2

65 En el siguiente mapa de Andalucía:



calcula la distancia que hay en línea recta entre:

- Sevilla y Almería.
- Jaén y Huelva.
- Córdoba y Cádiz.
- Málaga y Granada.

66 Se quiere hacer la maqueta de una urbanización en la que los 500 m de longitud de una calle equivalgan a 2 m en la maqueta.

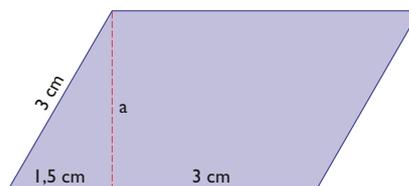
- Calcula la escala de la maqueta.
- Si un edificio mide 12 m de alto en la realidad, ¿cuánto medirá en la maqueta?
- Si una calle mide en la maqueta 3 cm de ancho, ¿cuánto medirá en la realidad?

67 Calcula la diagonal de un rectángulo en el que los lados miden 6 cm y 2,5 cm

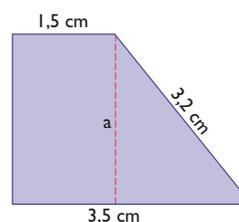
68 Halla la altura de un triángulo equilátero de 6 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.

69 Halla la longitud del lado de un rombo sabiendo que las diagonales miden 3 cm y 5 cm. Redondea el resultado a dos decimales.

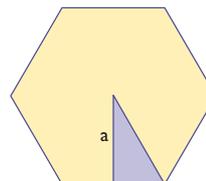
70 Halla el área del siguiente romboide:



71 Halla el área del siguiente trapecio rectángulo:



72 Halla la apotema de un hexágono regular de 9 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.



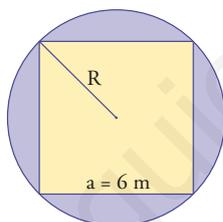
Ejercicios y problemas

- 73** Una escalera de bomberos que mide 20 m se apoya sobre la fachada de un edificio. La base de la escalera está separada 5 m de la pared. ¿A qué altura llegará?



- 74** Una torre de telefonía móvil proyecta una sombra de 23 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, Ana, que mide 1,72 m, proyecta una sombra de 2,10 m. Calcula la altura de la antena de telefonía móvil.

- 75** Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente cuadrado:



- 76** Halla la altura de un cono recto en el que el radio de la base mide 5 m, y la generatriz, 9 m. Redondea el resultado a dos decimales.

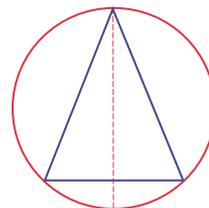
- 77** Calcula la diagonal de una habitación cuyas dimensiones son $6 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 3 \text{ m}$

Para profundizar

- 78** Mediante la técnica de cuadrículado dibuja un elefante semejante al siguiente, pero que tenga el doble de tamaño.



- 79** Se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el diámetro de la circunferencia es $D = 3,5 \text{ cm}$ y que la altura del triángulo es $h = 3 \text{ cm}$, halla cuánto mide la base del triángulo.

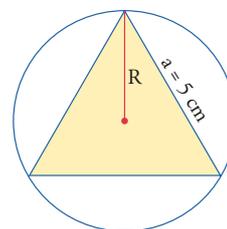
- 80** Una esfera cuyo radio es $r = x \text{ m}$ tiene un área de $314,16 \text{ m}^2$ y un volumen de $523,60 \text{ m}^3$. Halla el área y el volumen de otra esfera cuyo radio es $R = 2,5x$

- 81** Halla el lado de un cuadrado de 6 m de diagonal. Redondea el resultado a dos decimales.

- 82** Halla la diagonal de un cubo de 5 m de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

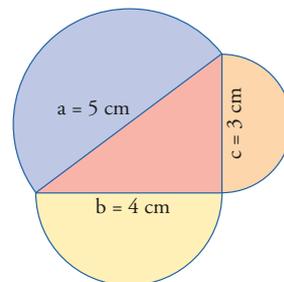
- 83** Un faro proyecta una sombra de 53 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un árbol de 1,5 m proyecta una sombra de 2,05 m. Calcula la altura del faro.

- 84** Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente triángulo equilátero:



- 85** La apotema de un hexágono regular mide 5 cm. Calcula cuánto mide el lado.

- 86** Un triángulo rectángulo tiene los siguientes lados: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ y $c = 3 \text{ cm}$. Cambia el cuadrado por un semicírculo en la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, calcula el área de los tres semicírculos y comprueba si se sigue verificando la interpretación geométrica.

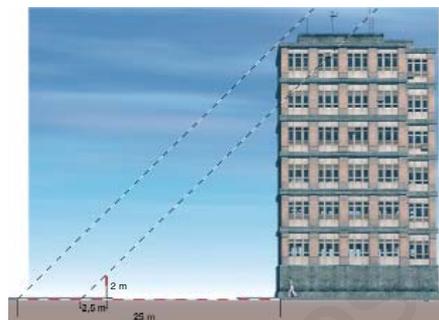


Aplica tus competencias



Medida de alturas inaccesibles

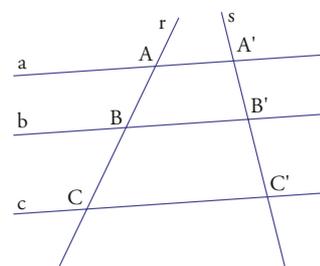
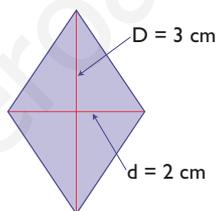
- 87** Un edificio proyecta una sombra de 25 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 2 m proyecta una sombra de 2,5 m. Calcula la altura del edificio.
- 88** Un árbol proyecta una sombra de 29,75 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 1,5 m proyecta una sombra de 2,15 m. Calcula la altura del árbol.
- 89** Una antena proyecta una sombra de 43 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 1,75 m proyecta una sombra de 2,5 m. Calcula la altura de la antena.
- 90** Un acantilado proyecta una sombra de 35 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 1,25 m proyecta una sombra de 1,5 m. Calcula la altura del acantilado.



Comprueba lo que sabes

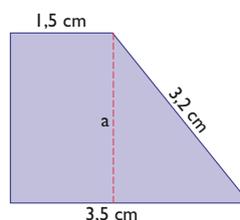


- 1** Escribe el enunciado del teorema de Pitágoras. Pon un ejemplo de una terna pitagórica.
- 2** Mediante una proyección que tenga como centro el centro del rombo, dibuja otro rombo que sea una ampliación al 250%. ¿Cuánto miden las nuevas diagonales?
- 3** Sabiendo que $AB = 18$ cm, $BC = 24$ cm y $A'B' = 15$ cm, halla la longitud del segmento $B'C'$. ¿Qué teorema has aplicado?
- 4** Divide el segmento **a** en partes proporcionales a los segmentos **b**, **c** y **d**



- a = 5 cm _____
- b = 2 cm _____
- c = 1,5 cm _____
- d = 1 cm _____

- 5** En una casa, un pasillo mide 6 m, y en su plano, 2,4 cm. Halla la escala.
- 6** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 13 m, y un cateto, 12 m. Halla cuánto mide el otro cateto.
- 7** Halla el área del siguiente trapecio rectángulo:



- 8** Un faro proyecta una sombra de 55 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 1,5 m proyecta una sombra de 1,75 m. Calcula la altura del faro.



11. SEMEJANZA. TEOREMAS DE THALES Y PITÁGORAS

Paso a paso

Elige en la barra de menús **Visualiza** y desactiva la opción **Ejes**

91 Dibuja tres puntos



Solución:

Elige **Nuevo Punto** y haz *click* en tres lugares diferentes.

92 Dibuja una recta *a*



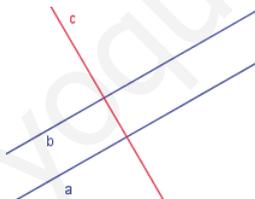
Solución:

- Elige **Recta que pasa por 2 puntos** y haz *click* en dos puntos A y B
- Coloca el puntero del ratón sobre la recta y pulsa el botón derecho para obtener su menú *Contextual*. Luego, en **Propiedades.../Color**, elige color azul.

Geometría dinámica: interactividad

- Elige **Desplaza** y *arrastra* el punto A, o el B, o la recta. Verás cómo va cambiando la recta.

93 Dibuja dos rectas paralelas, *a* y *b*, y una perpendicular, *c*



Solución:

- Dibuja la recta *a* de color azul.
- Elige **Recta Paralela**, haz *click* en la recta *a* y, luego, en otro punto cualquiera, que no esté en la recta *a*
- Elige **Recta Perpendicular**, haz *click* en la recta *a* y, luego, en un punto cualquiera que no esté en *a*

Geometría dinámica: interactividad

- Arrastra* un punto de la recta *a*; verás cómo van cambiando la recta paralela *b* y la perpendicular *c*

94 Dibuja una semirrecta horizontal de origen O



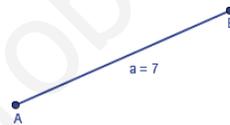
Solución:

- Elige **Semirrecta que pasa por dos puntos** y haz *click* en un extremo A, y luego en otro punto B

Geometría dinámica: interactividad

- Arrastra* uno de los puntos; verás cómo va cambiando la semirrecta.

95 Dibuja un segmento AB y muestra su longitud.



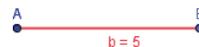
Solución:

- Elige **Segmento entre dos puntos** y haz *click* en el extremo A, y luego en el extremo B
- En el menú *Contextual* del segmento, en **Propiedades.../Básico/Expone rótulo**, elige **Nombre & valor**

Geometría dinámica: interactividad

- Arrastra* uno de los extremos; verás cómo va cambiando la medida del segmento.

96 Dibuja un segmento AB de 5 cm



Solución:

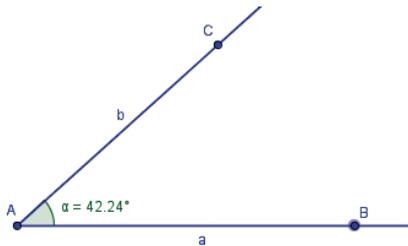
- En el **Campo de Entrada**, barra inferior, escribe $a = 5$ y pulsa [Intro]
- Elige **Segmento dados su longitud y punto extremo inicial**. Haz *click* en el punto A. En la ventana que aparece, escribe *a* y haz *click* en el botón **Aplicar**
- En el menú *Contextual* del segmento, en **Propiedades.../Básico/Expone rótulo**, elige **Nombre & valor**

Geometría dinámica: interactividad

- En el **Campo de Entrada**, escribe $a = 10$ y pulsa [Intro]

- e) Elige  **Desplaza**, y en la ventana **Algebraica** haz *click* sobre la medida $a = 10$. Pulsa reiteradamente en el teclado numérico las teclas $[+]$ y $[-]$; verás cómo el valor de a va cambiando de $0,1$ en $0,1$. Para cambiar de 1 en 1 , pulsa $[\text{Ctrl}] [+]$ o $[\text{Ctrl}] [-]$

- 97** Dibuja un ángulo y muestra su amplitud.



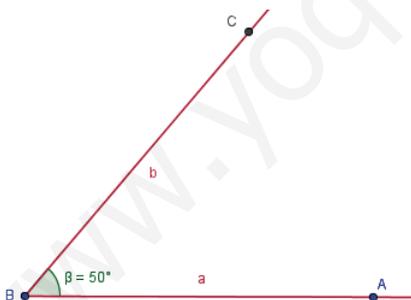
Solución:

- Elige  **Semirrecta que pasa por dos puntos**. Luego haz *click* en el origen A y en otro punto B para indicar la dirección.
- Dibuja otra semirrecta de origen A
- Elige  **Ángulo**, haz *click* sucesivamente en B, A y C

Geometría dinámica: interactividad

- d) *Arrastra* uno de los puntos B o C; verás cómo va cambiando la medida del ángulo.

- 98** Dibuja un ángulo de 50°



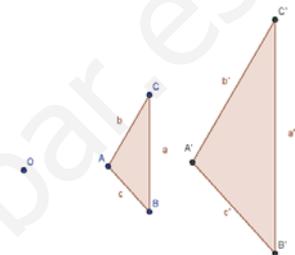
Solución:

- En el **Campo de Entrada**, barra inferior, escribe $\alpha = 50^\circ$, α y $^\circ$ los puedes elegir en la parte derecha. Pulsa $[\text{Intro}]$
- Elige  **Ángulo dada su amplitud**. Haz *click* en el punto A y en el punto B. En la ventana que aparece, introduce α y haz *click* en el botón **Aplicar**
- Dibuja los lados del ángulo.

Geometría dinámica: interactividad

- d) En el **Campo de Entrada** escribe $\alpha = 45^\circ$ y pulsa $[\text{Intro}]$
- e) Elige  **Desplaza** y en la ventana **Algebraica**, haz *click* sobre la amplitud $\alpha = 45^\circ$. Pulsa reiteradamente en el teclado numérico las teclas $[+]$ y $[-]$; verás cómo el valor de a va cambiando de 1 en 1 . Para cambiar de 10 en 10 pulsa $[\text{Ctrl}] [+]$ o $[\text{Ctrl}] [-]$

- 99** Dibuja un triángulo semejante a ABC de razón de semejanza 2



Solución:

- En el **Campo de Entrada**, barra inferior, escribe $k = 2$ y pulsa $[\text{Intro}]$
- Dibuja el punto O. En su menú *Contextual*, elige **Renombra** y cambia la letra A por O
- Dibuja el triángulo ABC, elige  **Polígono** y haz *click* en los vértices A, B, C. Luego pulsa otra vez en A para cerrarlo.
- Elige  **Dilata objeto desde el punto indicado, según factor**. Haz *click* dentro del triángulo y en el punto O. En la ventana que aparece, escribe k y haz *click* en el botón **Aplicar**

Geometría dinámica: interactividad

- Arrastra* un vértice del triángulo ABC y verás cómo va cambiando el triángulo semejante.
- Arrastra* el punto O y verás cómo se desplaza el 2º triángulo.
- Elige  **Desplaza**, y en la ventana **Algebraica** haz *click* sobre la constante $k = 2$. Pulsa reiteradamente en el teclado numérico las teclas $[+]$ y $[-]$; verás cómo cambia el 2º triángulo.

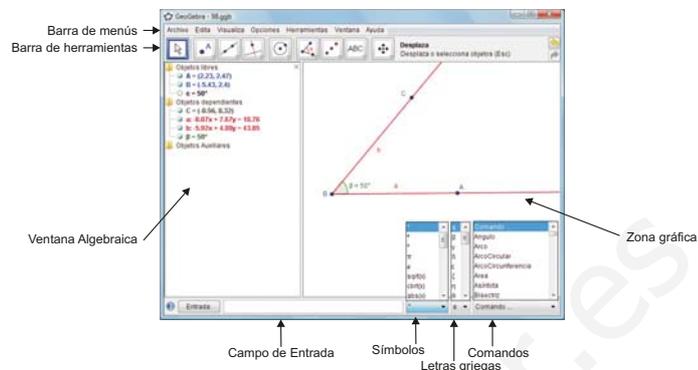
- 100** **Internet**. Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema**.



11. SEMEJANZA. TEOREMAS DE THALES Y PITÁGORAS

Así funciona

Partes de la ventana de GeoGebra



Barra de herramientas

Cada uno de los iconos tiene varias opciones; los iconos de esta barra van cambiando según la última opción elegida.

Seleccionar un objeto: se elige **Desplaza** y se hace *click* sobre el objeto.

Quitar selección: se pulsa la tecla [Esc], o se hace *click* con **Desplaza** en cualquier parte de la **Zona gráfica**, en la que no haya objetos.

Mover objeto: se selecciona y se *arrastra* con el ratón, o bien se selecciona y se mueve con las teclas cursoras. Si se mantiene pulsada la tecla [Ctrl] al pulsar las teclas cursoras, el desplazamiento se multiplica por **10**, y si se mantiene pulsada la tecla [Alt], se multiplica por **100**. **Si un objeto depende de otro, no se puede mover directamente.** También se pueden mover las etiquetas; se deben mover cuando están mal colocadas; por ejemplo, cuando se montan con otro objeto.

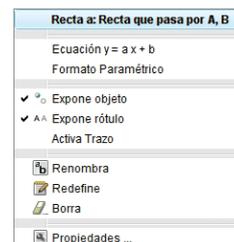
Borrar objeto: se selecciona y se pulsa la tecla [Supr]

Borrar todos los objetos: en la barra de menús se selecciona **Archivo/Nuevo** y se elige **No**

Deshacer/Rehacer las últimas acciones: se pulsán las teclas [Ctrl][Z], o bien, a la derecha de la barra de herramientas, se elige **Deshace** o **Rehace**.

Menú Contextual: es el menú asociado a cada objeto. Para obtenerlo se apunta con el ratón al objeto y se pulsa el botón derecho. Este menú se llama *Contextual* porque es relativo al objeto elegido. Por ejemplo, el menú *Contextual* de una recta es el de la parte derecha. Algunas de sus opciones son comunes a varios objetos.

Ocultar objetos o rótulos: en su menú *Contextual* se desactiva la opción **Exponer**. En la ventana **Algebraica** aparecen desactivados, y mediante su menú *Contextual* se pueden volver a mostrar, activando **Exponer objeto**

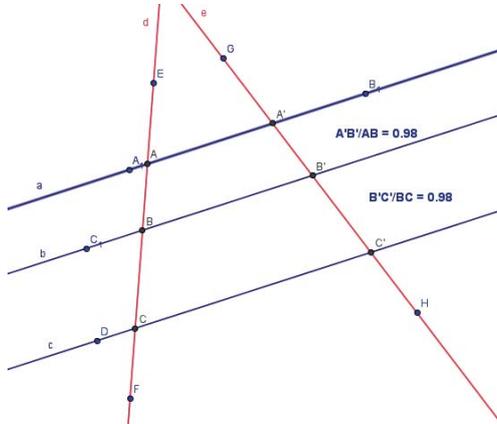


Propiedades de un objeto: primero se dibuja el objeto, después en su menú *Contextual* se elige **Propiedades...** y se modifican. **Las propiedades de cada elemento, como son el color, grosor, tipo de línea..., no se indican en los ejercicios; se ven directamente en el dibujo que hay que realizar.**

Modificar valores: cuando una medida o una amplitud se define a través del **Campo de Entrada**, se puede modificar volviendo a introducir un nuevo valor. Para modificar de forma continua una medida o amplitud, se elige **Desplaza** y en la ventana **Algebraica** se hace *click* sobre la medida o amplitud; al pulsar reiteradamente del teclado numérico las teclas [+] y [-] se va cambiando de **0,1** en **0,1** si es una medida, y de **1** en **1**, si es una amplitud. Para cambiar de **1** en **1** en caso de una medida, o de **10** en **10** si es una amplitud, se pulsa [Ctrl] [+] o [Ctrl] [-]

Practica

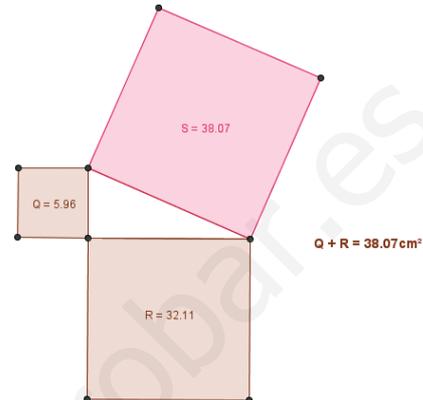
101 Comprueba el teorema de Thales.



- Dibuja tres rectas paralelas **a**, **b** y **c**
 - Dibuja dos rectas secantes **d** y **e**
 - Halla los puntos de intersección de la recta **d** con las tres rectas paralelas **a**, **b** y **c**
 - Renombra los tres puntos de intersección como **A**, **B** y **C**
 - Halla los puntos de intersección de la recta **e** con las tres rectas paralelas **a**, **b** y **c**
 - Renombra los tres puntos de intersección como **A'**, **B'** y **C'**
 - Mide los segmentos **AB** y **A'B'**
 - Halla el cociente de dividir **A'B'** entre **AB**; será **g/f**
 - Inserta el texto que está entre las rectas paralelas **a** y **b**. Para ello, elige **Insertar texto**, haz clic en la zona gráfica, y en la ventana **ABC Texto** escribe: "**A'B'/AB = "+ h**
 - Mueve el texto para que quede entre las dos rectas **a** y **b**
 - Mide los segmentos **BC** y **B'C'**
 - Halla el cociente de dividir **B'C'** entre **BC**; será **j/i**
 - Inserta el texto correspondiente y muévalo para que quede entre las rectas **b** y **c**
- Geometría dinámica: interactividad**
- Arrastra una de las rectas secantes o una de las rectas paralelas; verás cómo van cam-

biando los cocientes, pero siguen siendo iguales.

102 Comprueba el teorema de Pitágoras.



- Dibuja dos rectas perpendiculares.
- Dibuja un triángulo rectángulo que tenga un cateto en cada una de las rectas perpendiculares.
- Para dibujar los cuadrados sobre los catetos y sobre la hipotenusa, selecciona la opción **Polígono regular**.
- Ocultas todas las rectas.

Geometría dinámica: interactividad

- Arrastra los vértices correspondientes a los ángulos agudos y observa que cambia la longitud de los catetos y de la hipotenusa, pero se sigue verificando el teorema de Pitágoras.

103 Dibuja dos triángulos semejantes, calcula las razones entre sus perímetros y entre sus áreas, y comprueba que la segunda razón es el cuadrado de la primera.

Geometría dinámica: interactividad

- Elige **Desplaza**, y en la ventana **Álgebra** haz clic sobre la constante **k = 2**. Pulsa reiteradamente en el teclado numérico las teclas **[+]** y **[-]**; verás cómo la razón de los perímetros coincide con la razón de semejanza, y que la razón de las áreas es el cuadrado.



11. SEMEJANZA. TEOREMAS DE THALES Y PITÁGORAS

Paso a paso

- En la barra de menús elige **Ayuda**; en la parte inferior aparece la descripción de cada orden. Déjala siempre activa.
- En la barra de menús elige **Opciones/Mostrar los atributos**. Déjalos siempre visibles.
- Borrar todos los objetos**: pulsa las teclas [Ctrl] [A] para seleccionar todo, y luego pulsa la tecla [Supr] para borrar. Cada vez que termines un ejercicio, y antes de pasar al siguiente, borra todo.

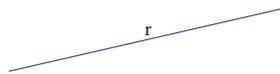
91 Dibuja un punto **A**

Solución:

Elige **Punto**, haz *click* en el lugar deseado y escribe la letra **A**

Se nombra con una letra un punto, una recta o una circunferencia. Se puede escribir directamente al terminar de crear el objeto, o bien elegir **Nombrar**, acercarse al objeto, hacer *click* y escribirla.

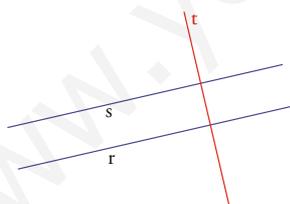
92 Dibuja una recta **r**



Solución:

Elige **Recta**, selecciona en la barra de atributos color azul, haz *click* en dos puntos y escribe la letra **r**

93 Dibuja dos rectas paralelas, **r** y **s**, y una perpendicular, **t**



Solución:

- Dibuja la recta **r** de color azul medio.
- Elige **Recta paralela**, haz *click* en la recta **r** y, luego, en otro punto cualquiera, que no esté en la recta **r**
- Elige **Recta perpendicular**, selecciona color rojo, haz *click* en la recta **r** y, luego, en otro punto cualquiera.

Geometría dinámica: interactividad

d) *Arrastra* la recta **r**; verás cómo van cambiando la recta paralela **s** y la perpendicular **t**

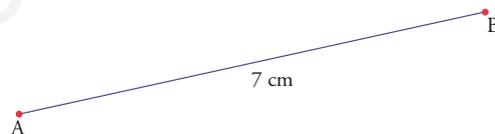
94 Dibuja una semirrecta horizontal de origen **O**



Solución:

- Elige **Semirrecta**, haz *click* en el origen y escribe la letra **O**
- Para que la semirrecta sea horizontal, mantén pulsada la tecla [⇧] **Mayúsculas** y haz *click* en otro punto a su derecha.

95 Dibuja un segmento **AB** y mide su longitud.



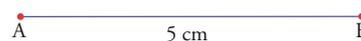
Solución:

- Elige **Segmento**, haz *click* en un extremo y escribe la letra **A**
- Haz *click* en el otro extremo del segmento y escribe la letra **B**
- Elige **Distancia o longitud** y haz *click* en el segmento.

Geometría dinámica: interactividad

d) *Arrastra* uno de los extremos; verás cómo va cambiando la medida del segmento. Haz que mida exactamente 7 cm

96 Dibuja un segmento **AB** de 5 cm



Solución:

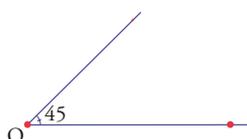
- Elige **Número** y escribe, en la parte superior izquierda, **5**

- b) Dibuja una semirrecta de origen **A**
- c) Elige  **Transferencia de medidas**. Haz *click* en la medida **5**, en un punto de la semirrecta y escribe la letra **B**
- d) Elige  **Ocultar/Mostrar** y haz *click* en la semirrecta.
- e) Dibuja el segmento **AB** y mídelo.

Geometría dinámica: interactividad

- f) Elige  **Apuntador**, haz *doble-click* sobre el número inicial para editarlo. Modifícalo por un **8,7**; verás cómo cambia automáticamente el segmento.

97 Dibuja un ángulo, márcalo y mídelo.



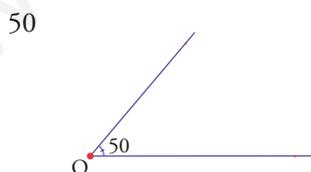
Solución:

- a) Elige  **Semirrecta**, haz *click* en el origen y escribe la letra **O** y haz *click* en otro punto para indicar la dirección.
- b) Dibuja otra semirrecta de origen **O**
- c) Elige  **Marcar un ángulo**; haz *click* en un punto de un lado; luego, en el vértice; y, por último, en un punto del otro lado.
- d) Elige  **Medida de ángulo** y haz *click* en la marca.

Geometría dinámica: interactividad

- e) *Arrastra* uno de los lados; verás cómo va cambiando la medida del ángulo. Haz que su amplitud sea exactamente 45°

98 Dibuja un ángulo de 50°



Solución:

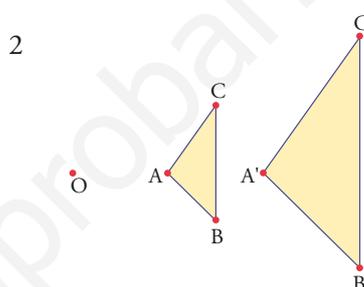
- a) Elige  **Número** y escribe, en la parte superior izquierda, **50**

- b) Dibuja una semirrecta horizontal de origen **O**
- c) Elige  **Rotación**. Haz *click* en la semirrecta, en el punto **O** y en el número **50**
- d) Marca el ángulo y mídelo.

Geometría dinámica: interactividad

- e) Edita el **50** inicial y cámbialo por un **30**; verás cómo cambia automáticamente el ángulo.

99 Dibuja un triángulo semejante a ABC de razón de semejanza **2**



Solución:

- a) Escribe, mediante edición numérica, **2**
- b) Dibuja el punto **O**
- c) Elige  **Triángulo**, haz *click* en tres puntos **A**, **B** y **C**
- d) Elige  **Llenar...**, selecciona color amarillo y haz *click* en el borde del triángulo.
- e) Elige  **Homotecia**, haz *click* en el borde del triángulo, en el centro **O** de homotecia y en el número **2**
- f) Elige  **Nombrar**, haz *click* en el punto **A'** y escribe la letra **A'**. Haz lo mismo con **B'** y **C'**

Geometría dinámica: interactividad

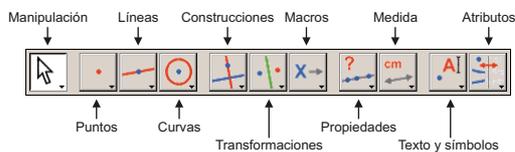
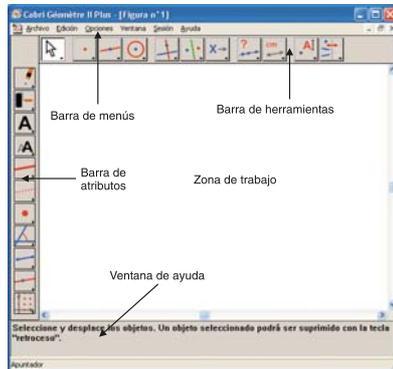
- g) *Arrastra* un vértice del triángulo ABC y verás cómo va cambiando el triángulo semejante.
- h) *Arrastra* el punto **O** y verás cómo se desplaza el 2° triángulo.
- i) Cambia el valor **2** y verás cómo cambia el 2° triángulo.

100 **Internet**. Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema**.



11. SEMEJANZA. TEOREMAS DE THALES Y PITÁGORAS

Así funciona



Partes de la ventana de CABRI

Arriba a la derecha hay tres iconos:

El central puede cambiar de forma.

Icono minimizar Icono restaurar

Icono maximizar Icono cerrar

Barra de menús

Cada una de las opciones tiene otro submenú.



Barra de herramientas

Cada uno de los iconos tiene varias opciones; los iconos de esta barra van cambiando según la última opción elegida.

Seleccionar: hay cuatro formas distintas de seleccionar objetos en CABRI

- Señalar directamente con el **Apuntador** en el **borde** del objeto.
- Señalar varios objetos. Primero uno con el **Apuntador**, y luego, manteniendo pulsada la tecla **[⇧] Mayúsculas**, se hace *click* en todos los objetos que se quieran seleccionar.
- Recuadro de selección. Con el **Apuntador** se hace *click* en una parte de la pantalla en la que no haya objetos, y *se arrastra* el ratón. Todos los objetos que estén dentro del recuadro quedan seleccionados.
- Seleccionar todos los objetos. Se pulsán las teclas **[Ctrl] [A]**, o bien se elige en el menú **Edición/Seleccionar todo**

Quitar selección: Se hace *click* con el **Apuntador** en cualquier parte de la **Zona de trabajo** en la que no haya ningún objeto.

[⇧] Mayúsculas: manteniendo pulsada esta tecla, se consigue:

- Seleccionar varios objetos haciendo *click* sobre cada uno de ellos.
- Cuando se dibujan segmentos, rectas y semirrectas, su inclinación cambia de 15° en 15°

Mover objeto: se selecciona y *se arrastra*. **Si un objeto depende de otro, no se puede mover directamente.**

Borrar objetos: se seleccionan y se pulsa la tecla **[Supr]**

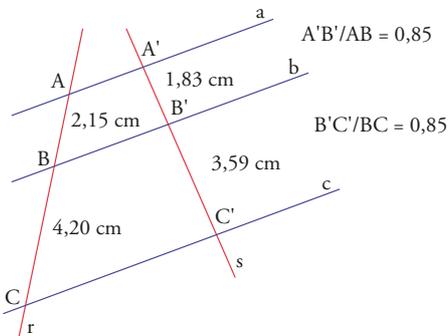
Borrar todo: se selecciona todo pulsando las teclas **[Ctrl] [A]** y luego se pulsa la tecla **[Supr]**

Deshacer/Rehacer la última acción: se pulsán las teclas **[Ctrl] [Z]**, o bien se elige en la barra de menús **Edición/Deshacer o Rehacer**

Paleta de atributos: la paleta de atributos permite modificar el aspecto de los objetos: color, grosor, punteado, etc. Para abrir la paleta de atributos, en la barra de menús se elige **Opciones/Mostrar atributos**. Para crear un objeto con un atributo, se elige primero la herramienta y luego el atributo, y se construye el objeto. Para cambiar los atributos de un objeto, se selecciona el objeto y se elige el atributo.

Practica

101 Comprueba el teorema de Thales.



- Dibuja tres rectas paralelas **a**, **b** y **c**
- Dibuja dos rectas secantes **r** y **s**
- Elige  **Punto(s) de intersección**, haz *click* en la recta **a** y en la recta **r**. Escribe la letra **A**. Haz lo mismo con las letras B, C, A', B' y C'
- Mide los segmentos AB, BC, A'B' y B'C'
- Halla mediante la calculadora de Cabri los cocientes $A'B'/AB$ y $B'C'/BC$. Para utilizar la calculadora elige  **Calculadora...**, haz *click* en la medida A'B', pulsa la tecla de dividir /, haz *click* en la medida AB, haz *click* en el signo =, *arrastra* el resultado de la calculadora al lado derecho y arriba del dibujo, edita la palabra **Resultado:** y sustitúyelo por $A'B'/AB$



- Haz lo mismo para los segmentos B'C' y BC de la parte de abajo.

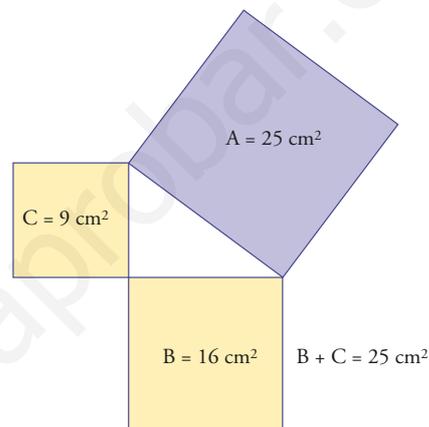
Geometría dinámica: interactividad

- Arrastra* una de las rectas secantes o una de las rectas paralelas; verás cómo van cambiando los cocientes, pero siguen siendo iguales.

102 Comprueba el teorema de Pitágoras.

- Dibuja dos rectas perpendiculares y un triángulo rectángulo que tenga un cateto en cada una de ellas.

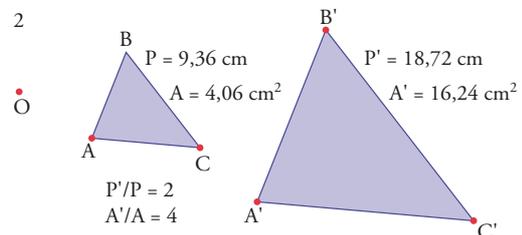
- Para dibujar los cuadrados sobre los catetos y sobre la hipotenusa, tienes que utilizar rectas paralelas o perpendiculares y dibujar circunferencias auxiliares.
- Para dibujar un cuadrado, elige  **Polígono** y haz *click* en los cuatro vértices de forma ordenada. Para cerrar la figura, haz *click* otra vez en el primer vértice elegido.
- Oculto todas las rectas y circunferencias.



Geometría dinámica: interactividad

Arrastra los vértices correspondientes a los ángulos agudos y observa que cambia la longitud de los catetos y de la hipotenusa, pero que se sigue verificando el teorema de Pitágoras.

103 Dibuja dos triángulos semejantes, calcula las razones entre sus perímetros y entre sus áreas, y comprueba que la segunda razón es el cuadrado de la primera.



Geometría dinámica: interactividad

Modifica la razón de semejanza; verás cómo la razón de los perímetros coincide con la razón de semejanza, y la razón de las áreas es el cuadrado.