1 Múltiplos y divisores de un número

- Un número es **múltiplo** de otro número si se obtiene multiplicando este último por un natural cualquiera.
- Un número, a, es **divisor** de otro, b, si es exacta la división b : a.
- Un número es **primo** si solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.
- Un número es **compuesto** si tiene más de dos divisores.

PASO A PASO

1 ***Comprueba si son ciertas las siguientes frases.***

a) 35 es múltiplo de 7 ⇒ *Cierta, ya que 7 · 5 = 35.*

b) 7 es divisor de 35 ⇒ *Cierta, ya que 37 : 7 = 5.*

c) 13 es un número primo ⇒ *Cierto, ya que solo tiene dos divisores, 1 y 13.*

d) 8 es un número compuesto ⇒ *Cierto, ya que tiene como divisores 1, 2, 4 y 8.*

2 Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) 49 es múltiplo de 9 ....

b) 16 es un número primo ....

c) 3 y 4 son divisores de 24 ....

d) 3 es múltiplo de 21 ....

3 *Completa la siguiente tabla.*

Números / Divisores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	X									
12		X								
15										
18						X				

4 Indica, de entre los números 2, 3, 4 y 5:

a) Los divisores de 12 son: ....

b) Los divisores de 18 son: ....

c) Los divisores de 30 son: ....

d) Los divisores de 50 son: ....

5 Rodea con un círculo los números que son primos en la siguiente tabla.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

6 Expresa los siguientes números compuestos en forma de producto de dos formas diferentes.

Ejemplo: $60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20$

a) 28 = ...

b) 45 = ...

c) 54 = ...

7 Comprueba si los siguientes números son primos o compuestos.

a) 53

b) 71

8 Escribe los siguientes números como suma de dos números primos.

a) 20 =

b) 64 =

c) 52 =

d) 82 =

UN PASO MÁS

9 En el Instituto El Encinar, los alumnos de 2.º de ESO van a organizar una *gymkhana* para celebrar el Día Universal del Niño. Hay 72 alumnos de ESO y se tienen que formar grupos con el mismo número de alumnos sin que sobre ninguno.

a) ¿Se pueden formar grupos de 6 alumnos? ¿Cuántos grupos se forman?

b) Escribe otras dos formas de componer equipos con el mismo número de alumnos sin que sobre ninguno. Di en cada caso cuántos alumnos forman los equipos y cuántos equipos puedes formar.

10 Laura va a realizar unos adornos para el festival del instituto y tiene un rollo de papel de 120 centímetros de largo. Quiere cortarlo en trozos de igual longitud sin que sobre ni falte nada.

a) ¿Se pueden cortar trozos de 15 centímetros? ¿Cuántos trozos salen?

b) Escribe otras dos formas de cortar el papel sin que sobre ni falte nada. Di en cada caso la longitud del papel y cuántos trozos obtiene Laura.

11 Luis y Maika han participado en una campaña de recogida de libros. Han hecho lotes de 5 libros y calculan que tienen más de 70 lotes y menos de 75. Escribe todas las cantidades posibles de libros que han podido recoger.

12 Ana tiene una colección de sellos en un álbum. Cada página tiene 20 sellos y Ana sabe que tiene completas entre 30 y 36 páginas. ¿Cuántos sellos puede tener Ana?

2 Criterios de divisibilidad

- Un número b es **divisible** por otro a si la división $b : a$ es exacta.
- Para saber si un número es divisible por otro sin necesidad de realizar la división, se utilizan los **criterios de divisibilidad.**

PASO A PASO

14 ***Razona por qué números es divisible 2 310.***

Es divisible por 2 porque termina en cifra par.

Es divisible por 3, ya que la suma de sus cifras, 2 + 3 + 1 = 6, es múltiplo de 3.

Es divisible por 5, ya que su última cifra es 0.

Es divisible por 11, porque la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar par (2 + 1 = 3) y la suma de las cifras que ocupan lugar impar (3 + 0 = 3) es 0.

2 310 es divisible por 2, 3, 5 y 11.

15 Clasifica a partir de los criterios de divisibilidad los siguientes números.

408 9 100 312 6 131 80 22 102 12 26

a) Los que solo son divisibles por 2 son: ....

b) Los que solo son divisibles por 3 son: ....

c) Los que son divisibles a la vez por 2 y por 3 son: ....

d) Los que no son múltiplos ni de 2 ni de 3 son: ....

16 Averigua el valor de la cifra que falta en cada caso para que el número sea divisible por 11.

a) 6*N*85

b) 37*N*

c) *N*76

d) *N*9

e) 89*N*

f) 23*N*1

17 Averigua el valor de la cifra que falta en cada caso para que el número sea divisible entre 3 y 5 a la vez.

a) $28N$

b) $70N$

c) $96N$

d) $121N$

18 Escribe tres números que sean:

a) Múltiplo de 2, pero no de 5 ....

b) Múltiplo de 5, pero no de 2 ....

c) Múltiplo de 11 y de 3...

19 María está haciendo la mudanza y quiere guardar sus 60 CD en cajas iguales. ¿De cuántas maneras puede colocarlos?

20 La cosecha de patatas de este año ha sido de 1 000 kilogramos. Para venderlas se desean envasar en sacos o contenedores de forma que en cada uno haya un número entero de kilogramos. Busca todas las formas posibles en que se pueden envasar.

21 Tengo una colección con más de 400 pero menos de 500 miniaturas. No recuerdo el número exacto, pero sé que no puedo hacer grupos exactos colocándolas de 3 en 3 o de 11 en 11. Pero sí puedo colocarlas de 20 en 20. ¿Cuál es la cantidad de miniaturas que tengo?

3

3 Descomposición en factores primos

Descomponer un número en **factores primos** es obtener la expresión del número como un producto de factores primos.

PASO A PASO

22 ***Descompón en factores primos el número 120.***

Dividimos el número entre el menor número primo que sea posible. Los cocientes obtenidos se siguen dividiendo igualmente entre el menor número primo que sea posible, hasta obtener la unidad.

$$\begin{array}{l} 120 \,\underline{|\,2} \\ \;00 \quad 60 \,\underline{|\,2} \\ \quad 0 \quad 00 \quad 30 \,\underline{|\,2} \\ \qquad\qquad 00 \quad 15 \,\underline{|\,3} \\ \qquad\qquad\qquad 00 \quad 5 \,\underline{|\,5} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\boxed{120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5}$$

En la práctica se expresa así:

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

23 Descompón en factores primos los siguientes números.

a) 90

90 =

b) 54

54 =

c) 200

200 =

d) 360

360 =

24 Escribe el número que falta en las siguientes igualdades

a) $80 = 2^{\square} \cdot 5$ b) $110 = 2 \cdot 5 \cdot \square$ c) $250 = 2 \cdot 5^{\square}$

25 Tenemos las siguientes expresiones de los números A, B, C y D en factores primos.

$A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad B = 2^3 \cdot 5^2 \quad C = 2^3 \cdot 3 \quad D = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Responde a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuáles de estos cuatro números se pueden dividir entre 8? ¿Por qué?

b) ¿Cuáles de los números se pueden dividir entre 12? ¿Por qué?

26 Tenemos las siguientes expresiones de los números A, B, C y D en factores primos.

$A = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \quad B = 2^2 \cdot 5^2 \quad C = 2^3 \cdot 3 \quad D = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

Responde a las siguientes cuestiones.

a) ¿Es divisible *A* entre *B*? ¿Por qué?

b) ¿Cuáles de los cuatro números se pueden dividir entre todos los demás?

c) ¿Qué factor o factores le faltan a *C* para poder ser divisible entre *A*? Si tuviese ese factor *C*, ¿cuál sería el cociente de la división?

4 Múltiplos comunes a varios números: m.c.m.

El **mínimo común múltiplo** de varios números es el menor de los múltiplos comunes de dichos números. Se escribe de forma abreviada, **m.c.m.**

PASO A PASO

27 ***Calcula el mínimo común múltiplo de 9 y 12.***

Múltiplos de 9: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81…
Múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84… ⇒ *Múltiplos comunes de 9 y 12 son: 36, 72…*

El menor de los múltiplos es 36, es decir, $\boxed{m.c.m.(9,\ 12) = 36.}$

28 Calcula los 10 primeros múltiplos que se piden en los siguientes casos.

Múltiplos de 4: ……………………………………………………………………………

Múltiplos de 6: ……………………………………………………………………………

Múltiplos comunes de 4 y de 6: …………………………………………………………

El menor de los múltiplos comunes de 4 y 6 es: ………………………………………

29 Busca los 3 múltiplos menores comunes de 50 y 75. ¿Cuál de ellos es el menor?

30 Encuentra los 3 múltiplos menores comunes de 9 y 18. ¿Cuál de ellos es el mínimo común múltiplo?

El **m.c.m.** es el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

31 ***Calcula el mínimo común múltiplo de 36, 60 y 72.***

1.° Descomponemos los números en sus factores primos:

36	2	60	2	72	2
18	2	30	2	36	2
9	3	15	3	18	2
3	3	5	5	9	3
1		1		3	3
				1	

$36 = 2^2 \cdot 3^2$ $\quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$

2.° El m.c.m. es el producto de los factores primos comunes y de los no comunes elevados al mayor exponente: $\boxed{\text{m.c.m.}(36, 60, 72) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360}$

32 Calcula el mínimo común múltiplo de los siguientes números.

a) 30 y 40

30 | 40 |

30 = ... 40 = ...

m.c.m.(30, 40) = ...

b) 660 y 825

33 Calcula el mínimo común múltiplo de los siguientes números.

a) 50, 54 y 55

50 | 54 | 55 |

50 = ... 54 = ... 55 = ...

m.c.m.(50, 54, 55) = ...

b) 100, 125 y 150

UN PASO MÁS

34 El autobús A pasa por la parada cada 12 minutos; el B, cada 16 minutos, y el C, cada 20 minutos.

a) Si acaban de coincidir los tres en la parada, ¿cuánto tiempo ha de transcurrir para que vuelvan a coincidir los tres?

b) ¿Cuántos autobuses de la línea A pasan desde que coinciden una vez hasta la siguiente?

a) El autobús A pasa por la parada cada múltiplo de 12; el de la línea B, cada múltiplo de 16, y el de la línea C, cada múltiplo de 20. Luego coinciden en la parada en los múltiplos de los tres. Dado que buscamos la primera vez que vuelvan a coincidir, calculamos el mínimo común múltiplo de 12, 16 y 20:

$12 = 2^2 \cdot 3 \quad 16 = 2^4 \quad 20 = 2^2 \cdot 5 \qquad \text{m.c.m.}\ (12, 16, 20) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$

Los tres autobuses volverán a coincidir por primera vez dentro de 240 minutos.

b) Como los autobuses de la línea A pasan cada 12 minutos, pasarán $240 : 12 = \boxed{20 \text{ autobuses.}}$

35 Tres comerciales de tres empresas farmacéuticas visitaron a los médicos de un determinado hospital. El representante de la empresa *A* realiza visitas cada 4 semanas; el de la empresa *B*, cada 5 semanas, y el de la empresa *C*, cada 6 semanas. ¿Cuándo volverán a coincidir en ese hospital?

36 La rueda delantera de una bicicleta tiene una longitud de 120 centímetros, y la trasera, de 150. Hacemos una marca en la parte de ambas ruedas que toca el suelo y empezamos a dar pedales.

a) ¿Qué distancia hay que recorrer para que coincidan de nuevo las dos marcas tocando el suelo?

b) ¿Cuántas vueltas da cada rueda hasta que coinciden las marcas?

37 Tenemos tres cubos cuyas diferentes capacidades son de 8, 10 y 12 litros. Con un número exacto de cualquiera de ellos por separado conseguimos llenar un bidón. ¿Cuántos litros tiene como mínimo el bidón? ¿Con cuántos cubos de cada tipo se llena?

5 Divisores comunes a varios números: m.c.d.

El **máximo común divisor** de varios números es el mayor de los divisores comunes de dichos números. Se escribe de forma abreviada, **m.c.d.**

PASO A PASO

39 ***Calcula el máximo común divisor de 16 y 36.***

Divisores de 16: 1, 2, 4, 8 y 16
Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36
$\Rightarrow$ *Divisores comunes de 16 y 36 son: 1, 2 y 4.*

El mayor de los divisores es 8, es decir, $\boxed{\text{m.c.d.}(16, 36) = 4.}$

40 Calcula:

Todos los divisores de 24: ....

Todos los divisores de 54: ....

Todos los divisores comunes de 24 y de 54: ....

El mayor de los divisores comunes de 24 y 54 es: ....

41 Busca todos los divisores comunes de 21 y 35. ¿Cuál es el máximo común divisor?

42 Encuentra el máximo común divisor de 30 y 40.

El **m.c.d.** es el producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente.

43 ***Calcula el máximo común divisor de 18, 24 y 60.***

1.° Descomponemos los números en sus factores primos:

18	2	24	2	60	2
9	3	12	2	30	2
3	3	6	2	15	3
1		3	3	5	5
		1		1	

$18 = 2 \cdot 3^2$ $\quad 24 = 2^3 \cdot 3$ $\quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

2.° El m.c.d. es el producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente:

$\boxed{\text{m.c.d.}(18, 24, 60) = 2 \cdot 3 = 6}$

44 Calcula el máximo común divisor de los siguientes números.

a) 72 y 90

72 |

90 |

72 = ... 90 = ...

m.c.d.(72, 90) = ...

b) 100 y 120

45 Calcula el máximo común divisor de los siguientes números.

a) 45, 60 y 75

45 |

60 |

75 |

45 = ... 60 = ... 75 = ...

m.c.d.(45, 60, 75) = ...

b) 80, 180 y 200

UN PASO MÁS

46 ***Tres clases de 24, 30 y 36 alumnos van a formar equipos para jugar un torneo. Los equipos deben estar compuestos por el mayor número posible de jugadores, con igual número de jugadores en cada equipo, no pudiéndose mezclar alumnos de dos clases y debiendo participar todos los alumnos. ¿Cuántos equipos se harán de la segunda clase?***

Como no se pueden mezclar alumnos de dos clases, el número de jugadores de cada equipo debe ser un divisor de 24, 30 y 36. Además, como los equipos deben estar formados por el mayor número posible de jugadores, calculamos el máximo común divisor de estos números:

$24 = 2^3 \cdot 3 \qquad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{m.c.d. } (24, 30, 36) = 2 \cdot 3 = 6$

Como la segunda clase está formada por 30 alumnos, se harán $30 : 6 = \boxed{\text{5 equipos.}}$

47 El suelo de una habitación de 360 centímetros de largo y 300 centímetros de ancho se quiere cubrir con baldosas cuadradas lo más grandes posible y sin tener que romper ninguna. ¿Cuántas baldosas entrarán a lo largo? ¿Y a lo ancho?

48 En un almacén tienen 900 envases de zumo de naranja, 750 de zumo de melocotón y 600 de zumo de pera. Queremos almacenarlos en contenedores iguales lo más grandes posible sin mezclar en el mismo contenedor sabores diferentes. ¿Cuántos envases caben en cada contenedor? ¿Cuántos contenedores haremos de cada sabor?

49 Una fábrica de caramelos hace dados de caramelo de 2 centímetros de lado de tres sabores diferentes: café con leche, menta y limón, y para hacer el reparto dispone de un camión de 6 metros de largo, 2,40 de alto y 2,24 de ancho. El propietario de la fábrica quiere que en cada viaje el camión vaya lleno de cajas cúbicas lo más grandes posible llenas de caramelos, pero sin mezclar estos en la misma caja. ¿Cuántos caramelos cabrán en cada caja?

6 Números enteros

Los números enteros son:
- Los números **negativos:** –1, –2, –3…
- Los números **positivos:** +1, +2, +3… (suelen escribirse sin el signo +).
- **El cero:** 0, no es negativo ni positivo.

Los **números negativos** sirven para expresar cantidades menores que 0.

PASO A PASO

51 ***Expresa el significado de las siguientes cantidades.***

a) –13 metros ⇒ *13 metros de profundidad.*

b) –4 euros ⇒ *Una deuda de cuatro euros.*

52 Expresa el significado de las siguientes cantidades.

a) –11° ....

b) 1 250 metros ....

c) Planta (–6) ....

53 Escribe el número entero que representa cada una de las siguientes situaciones.

a) La temperatura mínima de ayer fueron tres grados bajo cero. ....

b) Tengo aparcado el coche en el sótano quinto. ....

c) En mi libreta de ahorros tengo cien euros. ....

d) Estoy buceando en el mar a cinco metros de profundidad. ....

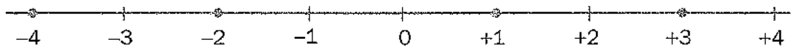
e) Debo a mi amigo diez euros. ....

f) Mi equipo ha marcado cuatro goles. ....

g) Los ciclistas deben escalar un puerto que está a una altitud de dos mil metros. ....

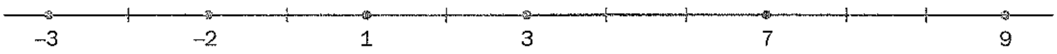
h) María está en la cuarta planta. ....

54 ***Representa sobre una recta los números –4, –2, +1, +3***



Para **representar** los **números enteros** sobre una recta, se representan hacia la izquierda del cero los números negativos, y hacia la derecha, los positivos.

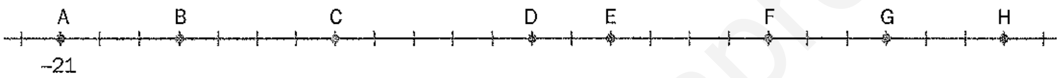
55 Dos de los números representados en esta recta numérica están mal situados con respecto a los demás.



a) ¿De qué números se trata? ....

b) ¿Qué números deberían situarse en su lugar? ....

56 Indica qué valor debe tomar cada una de las letras.



B = *C* = *D* = *E* = *F* = *G* = *H* =

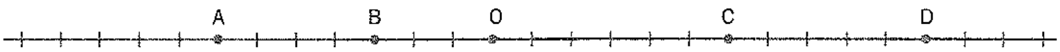
57 Sabiendo que la letra *H* representa en la siguiente recta al número +17:

a) ¿Qué valores representan las demás letras?

A = *B* = *C* = *D* = *E* = *F* = *G* =

b) ¿Entre qué dos letras se encontrará situado el número 0? ....

58 Indica qué números deben situarse a la derecha y a la izquierda de cada una de las letras.



Ejemplo: *A la derecha de A se sitúa –6, y a la izquierda, –8.*

....

....

....

59 Completa las siguientes frases.

a) El valor absoluto de –5 es ....

b) El valor absoluto de –125 es ....

c) Los números .... y .... tienen valor absoluto 8.

d) El valor absoluto de +3 y de –3 es ....

RECUERDA
El **valor absoluto** de un número entero es el número que resulta al suprimir el signo.

60 Completa las siguientes expresiones.

a) |–16| = ...

b) |+ ....| = 4

c) |– ....| = 9

d) |+ ....| = 110

e) |– ....| = 13

f) |+46| = ...

g) |–105| = ...

h) |+ ....| = 8

RECUERDA
El **opuesto** de un número entero es el número que resulta de cambiarle el signo. Se representa op( ).

61 Completa las siguientes frases.

a) El opuesto de –17 es ....

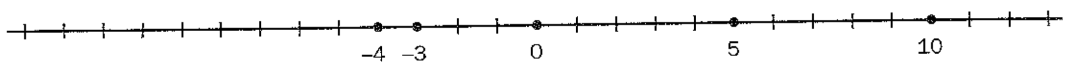
b) El opuesto de .... es +34.

c) El opuesto del número situado 11 lugares a la izquierda del cero es ....

d) El opuesto del número situado 3 lugares a la derecha del cero es ....

62 Indica cuáles son los números que están a la misma distancia del cero y separados por 12 unidades.

63 En la siguiente recta, sitúa los opuestos de los números que hay señalados.



a) ¿Cuál es el número que has señalado más cercano al cero? ....

b) ¿Cuál es el número que has señalado más alejado del cero? ....

UN PASO MÁS

64 ***Sustituye la letra n por números en cada caso.***

a) $n - |-4| = 6 \Rightarrow n - 4 = 6 \Rightarrow \boxed{n = 10}$ ***b)*** $op(-9) + n = 4 \Rightarrow 9 + n = 4 \Rightarrow \boxed{n = -5}$

65 Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros representándolos en la recta numérica.

+5 −11 +7 +4 −3 0 −7 +2 −9 −1

RECUERDA
Al representar dos números en la recta numérica, es **menor** el **que** se sitúa más a la izquierda.

66 Escribe los números enteros que faltan.

a) −12 < −10 < −8 < −6 < .... < .... < .... < .... < ....

b) +10 > +7 > +4 > .... > .... > .... > .... > ....

67 Escribe el signo < o > según corresponda.

a) −12 .... −13

b) −10 .... −9

c) +1 .... −55

d) +80 .... −80

e) −90 .... +5

f) −88 .... −8

68 Razona si los siguientes apartados son verdaderos o falsos.

Ejemplo: *−2 < −13 ⇒ Es falso, −2 > −13, ya que son dos números negativos y el valor absoluto de −13 es mayor que el de −2.*

a) +1 > +5 ....

b) +30 < −300 ....

69 Sustituye la letra n por números en cada caso.

a) $5 + |n| = 7 \Rightarrow n =$ ....

b) $7 + op(n) + 2 = 3 \Rightarrow n =$ ....

c) $|op(-6)| = 5 + n \Rightarrow n =$ ....

d) $|op(7)| - n + |-4| = 8 \Rightarrow n =$ ....

7 Operaciones con números enteros

- Para **sumar** dos **números enteros:**
  - Si los dos tienen el **mismo signo,** se suman sus valores absolutos y se pone al resultado el signo que tienen ambos.
  - Si los dos tienen **distinto signo,** se restan sus valores absolutos y se pone al resultado el signo del número que tiene mayor valor absoluto.
- Para **restar** dos **números enteros,** se suma al primero el opuesto del segundo.

PASO A PASO

70 ***Realiza las siguientes operaciones.***

a) (+15) + (+23) = $\boxed{38}$

b) (+15) + (–23) = $\boxed{-8}$

c) (–15) + (+23) = $\boxed{8}$

d) (–15) + (–23) = $\boxed{-38}$

e) (+11) – (–19) = *(+11) + (+19) =* $\boxed{30}$

f) (–11) – (–19) = *(–11) + (+19) =* $\boxed{8}$

71 Efectúa las siguientes operaciones.

a) (+12) + (+13) = ...

b) (+17) – (–19) = ...

c) (+7) – (+9) = ...

d) (+11) + (+8) = ...

e) (+10) + (–5) = ...

f) (–19) + (+7) = ...

g) (–63) + (+25) = ...

h) (–13) – (–10) = ...

i) (–42) – (+22) = ...

j) (+57) – (–17) = ...

72 Encuentra el número que falta en cada una de las siguientes expresiones para que sean ciertas.

a) (+12) + ... = +19

b) .... – (+1) = +8

c) (+7) – .... = –10

d) .... – (+15) + = –5

e) .... + (+7) = +17

f) .... – (+8) = –1

g) .... – (+5) = –3

h) (+6) – .... = –6

73 Encuentra el número que falta en cada una de las siguientes expresiones para que sean ciertas.

a) .... $- 2 = 1 - 9$

b) $(-7) +$ .... $= -10 + 3$

c) $(-3) +$ .... $= -16 + 8$

d) .... $- (-5) = 3 - 7$

74 ***Realiza la operación $-17 + 15 + 8 - 6 + 9 - 4$ de formas distintas.***

1.° Sumamos y restamos sucesivamente los números de izquierda a derecha.

$-17 + 15 + 8 - 6 + 9 - 4 = -2 + 8 - 6 + 9 - 4 = +6 - 6 + 9 - 4 = 0 + 9 - 4 = \boxed{5}$

2.° Sumamos, por un lado, los positivos y, por otro, los valores absolutos de los negativos, y restamos los resultados.

$-17 + 15 + 8 - 6 + 9 - 4 = (+15 + 8 + 9) - (17 + 6 + 4) = +32 - 27 = \boxed{5}$

75 Efectúa las siguientes operaciones de izquierda a derecha de una en una.

a) $-14 + 6 - 4 + 12 - 18 - 9 =$

b) $+2 - 9 + 18 - 2 + 7 - 17 =$

76 Efectúa las siguientes operaciones agrupando primero los números de igual signo.

a) $+6 - 2 - 9 + 13 - 4 - 15 =$

b) $18 + 26 - 7 - 3 - 12 + 9 - 14 =$

77 Calcula el resultado de las siguientes operaciones resolviendo en primer lugar los paréntesis.

a) $2 - (13 - 7) + (28 - 32) =$

b) $-10 + (17 - 10 - 6) =$

c) $(5 - 7 - 8) + (18 + 4) - (16 - 6) =$

d) $-(-6 - 11 - 5) - (-3 + 15) - (7 - 8) =$

10

78 *Realiza los siguientes productos de números enteros.*

a) $3 \cdot 4 = \boxed{12}$

b) $3 \cdot (-4) = \boxed{-12}$

c) $-3 \cdot (-4) = \boxed{12}$

d) $-3 \cdot 4 = \boxed{-12}$

Multiplicación: se multiplican los valores absolutos y se pone el signo que corresponda según la **regla de los signos.**

$+ \cdot + = +$ $- \cdot - = +$

$+ \cdot - = -$ $- \cdot + = -$

79 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $(+2) \cdot (+3) =$ ....

b) $(+9) \cdot (-7) =$ ....

c) $(-11) \cdot (+8) =$ ....

d) $(-7) \cdot (-7) =$ ....

e) $(+5) \cdot (-4) =$ ....

f) $(-10) \cdot (+3) =$ ....

g) $(-2) \cdot (-6) =$ ....

h) $(+9) \cdot (+3) =$ ....

80 Averigua qué número falta para que sean ciertas las siguientes expresiones.

a) $(+2) \cdot$ .... $= +14$

b) .... $\cdot (-1) = +8$

c) $(+7) \cdot$ .... $= -21$

d) $-3 \cdot$ .... $= +27$

e) .... $\cdot (-7) = +14$

f) $(+3) \cdot$ .... $= -27$

g) .... $\cdot (+3) = +6$

h) $9 \cdot$ .... $= -45$

81 Razona si cada una de las siguientes igualdades es verdadera o falsa.

a) $-6 \cdot (-3) = 18$ ....

b) $5 \cdot (-4) = 20$ ....

c) $(-3) \cdot (-10) = -30$ ....

82 Realiza las siguientes operaciones.

Ejemplo: $(-2) \cdot 5 \cdot (-7) = (-10) \cdot (-7) = 70$

a) $5 \cdot (-2) \cdot 3 =$ ....

b) $(-4) \cdot (-7) \cdot 3 =$ ....

c) $(-5) \cdot 3 \cdot (-4) =$ ....

d) $(-4) \cdot (-3) \cdot (-4) =$ ....

e) $2 \cdot (-8) \cdot (-2) =$ ....

f) $(-3) \cdot (-7) \cdot (-3) =$ ....

UN PASO MÁS

83 ***Calcula el cociente de los siguientes números enteros.***

a) $18 : 3 = \boxed{6}$

b) $18 : (-3) = \boxed{-6}$

c) $-18 : (-3) = \boxed{6}$

d) $-18 : 3 = \boxed{-6}$

División: se dividen los valores absolutos y se pone el signo que corresponda según la **regla de los signos.**

+ : + = +   – : – = +

+ : – = –   – : + = –

84 Efectúa las siguientes divisiones de números enteros.

a) $-30 : (-6) =$ ....

b) $\dfrac{14}{-7} =$ ....

c) $-21 : (-3) =$ ....

d) $\dfrac{-15}{3} =$ ....

e) $\dfrac{-18}{-6} =$ ....

f) $25 : (-5) =$ ....

85 Averigua qué número falta para hacer ciertos los resultados de las siguientes divisiones de números enteros.

a) $\dfrac{-30}{\square} = -6$

b) $\dfrac{24}{\square} = -3$

c) $-24 : \square = -3$

d) $33 : \square = 11$

e) $\square : (-4) = 9$

f) $\dfrac{\square}{-4} = 4$

g) $-50 : \square = 5$

h) $28 : \square = -7$

86 Razona si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

a) $(-12) : (-2) = -6$ ....

b) $24 : (-8) = -3$ ....

87 Realiza las siguientes operaciones.

Ejemplo: $[(-24) : 2] : (-4) = (-12) : (-4) = 3$

a) $15 : (-3) : 5 =$ ....

b) $(-24) : (-3) : 4 =$ ....

c) $(-36) : (-6) : (-2) =$ ....

d) $42 : (-3) : (-7) =$ ....

8 Operaciones combinadas con números enteros

Para resolver operaciones combinadas con números enteros se debe seguir este **orden:**

1.° Paréntesis.

2.° Multiplicaciones y divisiones.

3.° Sumas y restas.

Si hay varias operaciones del mismo nivel, se deben hacer de **izquierda a derecha.**

PASO A PASO

88 ***Realiza la operación –12 – (–6 – 2 + 5).***

Eliminamos el paréntesis y cambiamos el signo de cada número que hay dentro del mismo:

$-12 - (-6 - 2 + 5) = -12 + 6 + 2 - 5 = -6 + 2 - 5 = -4 - 5 = \boxed{-9}$

Si **delante de un paréntesis** hay un **signo –**, se elimina el paréntesis y se cambia el signo de cada uno de los números que hay dentro del mismo.

89 Efectúa las siguientes operaciones quitando paréntesis.

a) $22 + (13 - 17) =$

b) $-2 + (-17 - 20) - 16 =$

c) $2 + (13 - 7) + 4 =$

d) $(5 - 25) + (-18 + 8) + (6 + 6) =$

e) $-(10 + 3 - 9) - (7 - 17) - (17 - 7) =$

f) $-15 - (-5 - 15 - 5) - (-15 - 5) - (5 - 15) =$

90 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $20 - (17 - 20) - 16 =$

b) $-(18 + 12 - 21) - 2 - (8 + 7 - 19) =$

c) $-4 - (-5 + 6 - 7) - (8 - 9) + (20 - 15) =$

d) $-(2 + 6 - 9) + (18 - 18) - (17 - 7) + 16 =$

e) $-(15 - 25) + (7 - 18) - (16 + 9) =$

f) $(-12 + 2 - 1) - 12 + (10 + 17 - 27) =$

91 Realiza las siguientes operaciones.

a) $-(12 - 8) - (27 - 36) - (-9 + 52) =$

b) $-(-5 - 20) + (17 - 28) - (-16 + 10) =$

c) $-(-22 + 16 - 19) + (17 - 7) - (-8 - 28) =$

d) $(-32 + 29 - 10) - 12 - 4 + (27 - 38) =$

12

92 ***Realiza la operación $[(-6 - 2 + 5) \cdot (-2)] \cdot (12 - 2) : (-6) - (4 \cdot 3)$.***

1.° Eliminamos paréntesis: $[(-6 - 2 + 5) \cdot (-2)] \cdot (12 - 2) : (-6) - (4 \cdot 3) =$
$= [(-3) \cdot (-2)] \cdot 10 : (-6) - 12 =$

2.° Realizamos las multiplicaciones y divisiones: $= 6 \cdot 10 : (-6) - 12 = 60 : (-6) - 12 = -10 - 12$

3.° Realizamos las sumas y restas: $= \boxed{-22}$

93 Realiza las siguientes operaciones.

a) $8 + 8 : 4 =$

b) $-18 - 3 : 3 =$

c) $-8 - 3 + 3 \cdot 4 =$

d) $-24 : 4 \cdot 3 =$

e) $21 : (-7 + 4) =$

f) $7 \cdot (-7 + 4) =$

94 Calcula el resultado de las siguientes operaciones.

a) $6 + (-18) : (-3) \cdot (-2) =$

b) $32 - 7 - 25 \cdot 4 =$

c) $10 : 2 \cdot (-3) + 6 =$

d) $36 : 4 - 2 \cdot (-2) =$

95 Calcula el resultado de las siguientes operaciones.

a) $(16 - 10) : (-3) \cdot (-2) =$

b) $12 - (7 - 15) \cdot 4 =$

c) $20 : 2 \cdot (-8 + 6) =$

d) $18 : 2 - [2 \cdot (-9)] =$

e) $6 - 2 \cdot [3 + 4 \cdot (5 - 6) - 1] + 9 : 3 =$

f) $7 + 12 : [8 - 3 \cdot (4 - 2) + 1] - 15 : 5 =$

96 Realiza las siguientes operaciones.

a) $-22 - 2 \cdot (1 - 7) : [(-2) \cdot (-3)] =$

b) $8 - [(-7 - 2) \cdot (1 - 11)] + 6 \cdot (-4) =$

c) $6 \cdot [5 \cdot (-12 + 4) - (5 - 13)] : (-2) =$

d) $(18 - 14) : [(17 - 12) + (5 - 6)] \cdot 10 =$

UN PASO MÁS

97 Realiza las siguientes operaciones.

a) $3 \cdot (5 - 4 \cdot 2) + 28 : (16 : 8 + 2) + 6 : (-2) =$

b) $-17 + [3 \cdot 5 + 4 : (7 - 9) + 3] + 25 : (-5) =$

c) $-10 - 2 \cdot (15 : 3 - 8 : 4) + 9 : (4 \cdot 2 + 1) - 3 \cdot (-2) =$

d) $26 : (15 : 5 - 2 \cdot 8) - 7 \cdot (8 - 3 \cdot 3) + 16 : (-8) + 7 =$

e) $-3 \cdot [14 : (-2) + 8] - (6 \cdot 4 - 8 : 2) : 5 - 9 \cdot 2 =$

f) $3 \cdot 2 + [4 : (-2) + 5 : (17 - 12) - 1] + 4 \cdot (-2) =$

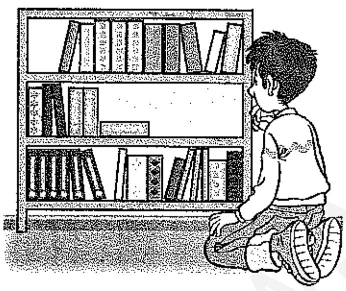
g) $18 : (-9) - [5 \cdot 3 - 8 : (6 - 10) - 7] - 7 \cdot 3 =$

98 Tales de Mileto nació en el año 624 a. C. y murió en el 548 a. C. ¿Cuántos años vivió?

99 Se lanza una cometa al aire y, cuando se encuentra a 10 metros sobre el suelo, se eleva 5 metros más, luego desciende 8, sube 4 y baja 2. ¿A cuántos metros se encuentra del suelo?

100 A final de mes, en una cuenta corriente hay un saldo de 1 000 euros. Si se ingresa la nómina, que son 1 225 euros, y se pagan las facturas del teléfono, la comunidad, la luz y la hipoteca de la casa, que ascienden a 52, 85, 60 y 450 euros, respectivamente, ¿qué saldo queda en la cuenta?

101 En una librería de 3 estanterías hay 10 libros en la superior, 6 en la del medio y 15 en la inferior. Si cambiamos los libros de modo que de la estantería superior pasamos 2 a la del medio y 3 a la inferior, y luego, de la del medio pasamos 3 a la superior y 4 a la inferior, ¿cómo queda la nueva distribución? Compara el resultado con la distribución inicial.



102 Manuel está practicando parapente. Cuando despega, sube 100 metros, y planeando desciende 135. Aprovecha una corriente de aire y asciende 72 metros. De nuevo empieza a planear por falta de aire y desciende 147 metros. ¿A qué altura aterriza?

14

103 ***El submarino Nautilus está estudiando la fauna que existe en una fosa marina. Para ello permanece sumergido a una profundidad de 4 000 metros; asciende después 1 500 metros, vuelve a descender 900 y por último asciende 2 300. Expresa con una suma de números enteros los movimientos del Nautilus y calcula a qué profundidad se encuentra.***

Profundidad inicial: –4 000 m

Representamos las subidas con números positivos: +1 500 m, +2 300 m.

Representamos las bajadas con números negativos: –900 m.

Profundidad final: –4 000 + 1 500 – 900 + 2 300 = –1 100 m.

El Nautilus se encuentra a una profundidad de 1 100 metros.

104 Un avión que transporta vacunas para un campamento está volando a 5 550 metros de altura. Desciende 300 metros para evitar turbulencias, vuelve a ascender 500 metros y, para evitar una tormenta, baja 1 000 metros, manteniendo su altitud. Expresa con una suma de números enteros los movimientos del avión y calcula su altura final.

105 El termómetro del Ayuntamiento de Las Moreras marca 4 °C a las 7 de la tarde. Cada hora que pasa, la temperatura baja 2 °C. ¿Qué temperatura habrá a las 12 de la noche? Escribe una operación combinada del cálculo que hagas.

106 Vicente tiene ahorrados 275 euros. Cada mes se gasta en libros 15 euros. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 6 meses? Escribe una operación combinada del cálculo que hagas.

107 Analía tiene en su hucha 194 euros. Cada mes, su madre le da 24 para sus gastos y ella dona 10 a una ONG. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 8 meses? Escribe una operación combinada del cálculo que hagas.

9 Potencias

- Una **potencia** es una forma abreviada de escribir un producto de factores iguales. $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots\dots \cdot a}_{n \text{ veces}} = a^n$
- La **notación científica** sirve para expresar números muy grandes y muy pequeños como producto de un número por una potencia de base 10.

PASO A PASO

Las potencias de base negativa y:
—**exponente par** son positivas.
—**exponente impar** son negativas.

109 ***Expresa en forma de potencia las siguientes multiplicaciones e indica, sin resolverlas, el signo que tiene el resultado en cada caso.***

a) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) =$ $\boxed{(-2)^3 = -8 \Rightarrow \text{Signo negativo.}}$

b) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) =$ $\boxed{(-4)^4 = 256 \Rightarrow \text{Signo positivo.}}$

c) $(-100) \cdot (-100) =$ $\boxed{(-100)^2 = 10\,000 \Rightarrow \text{Signo positivo.}}$

110 Completa las siguientes igualdades.

a) $(-2)^{\square} = 4$

b) $\square^3 = 8$

c) $(-4)^{\square} = 16$

d) $10^{\square} = 100$

e) $\square^3 = 27$

f) $\square^3 = 1\,000$

g) $(-2)^{\square} = 16$

h) $\square^3 = -27$

i) $\square^3 = -8$

j) $\square^4 = 16$

111 Completa las siguientes frases.

a) Con cualquier exponente, si la base es positiva, el resultado es ....

b) Con la base negativa y el exponente ...., el resultado es negativo.

c) Un resultado positivo se obtiene con una base .... y un exponente par.

d) Con un exponente impar, la base debe ser .... para obtener un resultado negativo.

Operaciones con potencias de la misma base

Producto: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Cociente: $a^n : a^m = a^{n-m}$

112 ***Realiza las siguientes operaciones.***

a) $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+2+3} = 2^7 = \boxed{128}$

b) $(-3)^5 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^2 = (-3)^{5+3+2} = (-3)^{10} = \boxed{59049}$

c) $\dfrac{6^5}{6^3} = 6^{5-3} = 6^2 = \boxed{36}$

d) $(-3)^5 : (-3)^2 = (-3)^{5-2} = (-3)^3 = \boxed{-27}$

113 Expresa el resultado en forma de una sola potencia.

a) $6^4 \cdot 6^4 =$ ....

b) $3^3 \cdot 3 =$ ....

c) $(-2)^3 \cdot (-2)^3 =$ ....

d) $4^4 \cdot 4^5 \cdot 4 =$ ....

e) $9^2 \cdot 9^3 \cdot 9^2 =$ ....

f) $(-6)^3 \cdot (-6)^3 \cdot (-6)^3 \cdot (-6)^3 =$ ....

114 Escribe los términos que faltan para que se cumplan las siguientes igualdades.

a) $5^5 \cdot 5 \cdot \square^{\square} \cdot 5^4 = 5^{15}$

b) $(-5)^4 \cdot \square^{\square} \cdot (-5) = (-5)^{11}$

c) $\square^{\square} \cdot (-8) \cdot (-8)^2 \cdot (-8)^6 = (-8)^{12}$

d) $(-3)^7 \cdot \square^{\square} = (-3)^9$

e) $\square^{\square} \cdot (-12)^5 = (-12)^{13}$

f) $2^6 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot \square^{\square} = 2^{17}$

115 Expresa el resultado de las siguientes operaciones en forma de una sola potencia.

a) $\dfrac{25^6}{25^4} =$ ....

b) $(-4)^6 : (-4)^4 =$ ....

c) $(-2)^{10} : (-2)^6 =$ ....

d) $100^9 : 100^5 =$ ....

e) $\dfrac{10^8}{10^5} =$ ....

f) $(-5)^8 : (-5)^4 =$ ....

g) $(-9)^5 : (-9)^2 =$ ....

h) $\dfrac{78^{19}}{78^{11}} =$ ....

116 Escribe los términos que faltan para que se cumplan las siguientes igualdades.

a) $9^6 : \square^{\square} = 9^4$

b) $\dfrac{7^5}{\square^{\square}} = 7^3$

c) $\square^{\square} : (-50)^5 = (-50)^2$

d) $\dfrac{\square^{\square}}{10^5} \cdot = 10^{10}$

e) $(-8)^8 : \square^{\square} = (-8)^3$

f) $\square^{\square} : (-13)^4 = (-13)^5$

Potencia de una potencia
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

117 ***Expresa como una sola potencia.***

a) $(10^2)^3 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^{2+2+2} = 10^{2 \cdot 3} = \boxed{10^6}$

b) $[(-6^4)]^2 = (-6)^4 \cdot (-6)^4 = (-6)^{4+4} = (-6)^{4 \cdot 2} = \boxed{(-6)^8}$

118 Expresa el resultado en forma de una sola potencia.

a) $[(-2)^2]^2 =$ ....

b) $[(-8)^4]^6 =$ ....

c) $[(-4)^5]^2 =$ ....

d) $[(-3)^2]^3 =$ ....

e) $[(-9)^3]^4 =$ ....

f) $[(-10)^3]^5 =$ ....

g) $(10^4)^4 =$ ....

h) $(4^6)^3 =$ ....

119 Escribe los términos que faltan para que se cumplan las siguientes igualdades.

a) $[(-2)^2]^{\square} = (-2)^8$

b) $[(\square)^6]^4 = (-12)$

c) $(9^{\square})^4 = 9^8$

d) $[(-3)^{\square}]^3 = (-3)^{15}$

e) $[(\square)^{\square}]^5 = (-10)^{10}$

f) $[(-4)^{\square}]^6 = (\square)^{24}$

g) $(4^6)^{\square} = \square^{18}$

h) $[(-11)^{\square}]^3 = (-11)^{12}$

i) $[(-20)^5]^{\square} = (\square)^{20}$

j) $(15^{\square})^6 = 15^{18}$

Producto de potencias con el mismo exponente
$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

120 ***Realiza los siguientes cálculos.***

a) $10^2 \cdot (-7)^2 = (-70)^2 = \boxed{4900}$

b) $(-5)^7 \cdot 2^7 = (-10)^7 = \boxed{-10\,000\,000}$

c) $(-2)^3 \cdot (-3)^3 = 6^3 = \boxed{216}$

d) $(-4)^2 \cdot 8^2 = (-32)^2 = \boxed{1024}$

121 Escribe los términos que faltan para que se cumplan las siguientes igualdades.

a) $(\square \cdot 3)^3 = (-7)^3 \cdot 3^3$

b) $(7 \cdot \square)^4 = 7^4 \cdot 8^4$

c) $[(-9) \cdot (-4)]^2 = \square^{\square} \cdot (-4)^2$

d) $[(-15) \cdot 19]^7 = (-15)^7 \cdot \square^{\square}$

e) $[(-18) \cdot (-23)]^7 = \square^{\square} \cdot (-23)^7$

f) $(\square \cdot 12)^{\square} = 13^{12} \cdot \square^{\square}$

16

122 Expresa en forma de producto de potencias las siguientes operaciones.

a) $[(-2) \cdot 4]^2 =$

b) $[6 \cdot (-5)]^4 =$

c) $[(-3) \cdot (-5)]^{12} =$

d) $[(-8) \cdot 9]^5 =$

e) $[5 \cdot (-6) \cdot (-7)]^8 =$

f) $[(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)]^7 =$

g) $[3 \cdot (-2) \cdot 7]^6 =$

h) $[11 \cdot (-8) \cdot 2]^9 =$

Cociente de potencias con el mismo exponente

$a^m : b^m = (a : b)^m$

123 ***Realiza los siguientes cálculos.***

a) $(-6)^3 : (2)^3 = [(-6) : 2]^3 = (-3)^3 = \boxed{-27}$

b) $24^4 : (-6)^4 = [24 : (-6)]^4 = (-4)^4 = \boxed{256}$

c) $(-144)^2 : (-18)^2 = [(-144) : (-18)]^2 = 8^2 = \boxed{64}$

124 Escribe los términos que faltan para que se cumplan las siguientes igualdades.

a) $\left(\dfrac{4}{\square}\right)^6 = \dfrac{\square^{\square}}{5^{\square}}$

b) $[\square : (-8)]^4 = 4^{\square} : \square^4$

c) $(\square : \square)^{10} = 10^{\square} : 5^{\square}$

d) $\left(\dfrac{13}{\square}\right)^9 = \dfrac{\square^{\square}}{5^{\square}}$

125 Expresa en forma de cociente de potencias las siguientes operaciones.

a) $(12 : 7)^3 =$

b) $\left(\dfrac{15}{7}\right)^4 =$

c) $\left(\dfrac{-8}{-4}\right)^6 =$

d) $(9 : 10)^{10} =$

e) $[8 : (-3)]^7 =$

f) $\left(\dfrac{5}{-4}\right)^4 =$

g) $(3 : 4)^8 =$

h) $\left(\dfrac{25}{-5}\right)^2 =$

126 ***Calcula las siguientes operaciones.***

a) $3^{-1} = \boxed{\frac{1}{3}}$

b) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \boxed{\frac{1}{64}}$

c) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \boxed{\frac{1}{16}}$

d) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \boxed{\frac{1}{49}}$

Potencia de exponente negativo

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; para todo, $n > 0$

127 Realiza las siguientes operaciones.

a) $4^{-2} =$

b) $3^{-3} =$

c) $2^{-8} =$

128 Opera y expresa como una potencia las siguientes operaciones.

Ejemplo: $(-2)^7 \cdot [(-2)^7 : (-2)^4] : (-2)^3 = (-2)^7 \cdot (-2)^3 : (-2)^3 = (-2)^4 : (-2)^3 = (-2)^1 = -2$

a) $3^5 \cdot 3^2 : 3^5 \cdot 3^4 =$

b) $7^4 : 7^3 \cdot 7^6 : 7^2 =$

c) $(-4)^8 : [(-4)^5 : (-4)^3] \cdot (-4)^2 =$

d) $(5^{12} : 5^9) : (5^8 : 5^6) \cdot 5^7 : 5^2 =$

129 ***Escribe en notación científica los siguientes números.***

a) **431 000 000 000 000 =** $\boxed{4{,}31 \cdot 10^{14}}$

b) **785 400 000 000 000 000 000 =** $\boxed{7{,}854 \cdot 10^{20}}$

c) **0,00000000386 =** $\boxed{3{,}86 \cdot 10^{-9}}$

En **notación científica**, los números se escriben como el producto de una potencia de 10 y un número decimal con una sola cifra entera distinta del cero.

130 Escribe en forma de potencia los siguientes números.

a) 45 610 000 000 = ...

b) 102 300 000 000 = ...

c) 0,0000032589 = ...

d) 0,0000000000079 = ...

131 Expresa las siguientes cantidades en notación científica.

a) La distancia de la Tierra al Sol es de 150 000 000 de kilómetros. ....

b) La masa de la Tierra es de 5 983 000 000 000 000 000 000 000 de kilogramos. ....

c) El radio de nuestra galaxia es de 142 000 000 000 000 000 000 000 de metros. ....

17

UN PASO MÁS

132 ***En un supermercado quedan 7 filas con cajas de botellas de leche. En cada fila hay 7 cajas, y en cada caja hay 7 botellas. ¿Cuántas botellas de leche quedan en el supermercado?***

1.º Leemos el enunciado e identificamos los datos: *7 filas, 7 cajas, 7 botellas*

2.º Planteamos el problema en términos de potencias: $7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$

3.º Calculamos el resultado: $7^3 = 343$

Quedan 343 botellas en el supermercado.

133 Calcula el área de una parcela cuadrada sabiendo que su lado mide 18 metros.

134 Se quiere formar un cubo con cubitos de forma que tenga tres cubos cada uno de los lados de la base y la altura. ¿Cuántos cubitos se necesitan para formar el cubo?

135 Dos lados de una parcela rectangular miden 2^5 y 7^5 metros, respectivamente. Expresa en forma de potencia de un producto el área de dicha parcela.

136 Un depósito de forma cúbica tiene 10^2 metros de lado. Expresa en forma de potencia su volumen.

RECUERDA
$V_{Cubo} = a^3$
a = arista

1 Las fracciones

PARA EMPEZAR

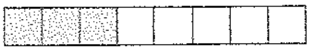
Qué es una fracción y cómo se llaman sus términos

Una **fracción** es una expresión numérica formada por dos términos:

$\frac{3}{8}$ → **Numerador:** Las partes iguales que tomamos de la unidad.
→ **Denominador:** Las partes iguales en que se ha dividido la unidad.

Una fracción nos puede indicar:

- Las **partes de un todo**



Tres octavas partes
(Tres partes de ocho)

- El **cociente** de dos números

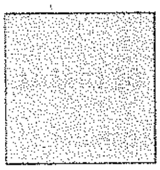
$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$

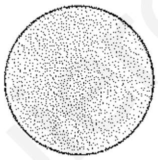
Valor numérico

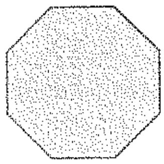
- Un **operador** que se aplica

$\frac{3}{8}$ de $24 = \frac{24 \times 3}{8} = 9$

1 En estas figuras representa $\frac{5}{8}$.

a) 

b) 

c) 

2 Calcula el valor numérico de estas fracciones:

a) $\frac{3}{5} =$ b) $\frac{10}{10} =$ c) $\frac{12}{4} =$ d) $\frac{11}{22} =$

3 Utilizando la función de operador, calcula:

a) $\frac{3}{5}$ de $75 = \frac{75 \times \square}{\square} =$

b) $\frac{13}{18}$ de $90 =$

4 Une las fracciones que tienen el mismo valor numérico (aunque tengan distintos términos).

1. $\frac{5}{4}$ a) $\frac{24}{15}$
2. $\frac{10}{25}$ b) $\frac{20}{16}$
3. $\frac{8}{5}$ c) $\frac{7}{20}$
4. $\frac{35}{100}$ d) $\frac{2}{5}$

18

Cómo se obtienen fracciones equivalentes

Dos **fracciones** son **equivalentes** cuando representan la misma parte del todo y tienen el **mismo valor numérico.**

Partes del todo **Valor numérico**

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3}{4} = 0{,}75 \\[2ex] \dfrac{6}{8} = 0{,}75\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{8}}$$

Para obtener fracciones equivalentes a una dada, se multiplican o dividen sus términos por el mismo número.

Ejemplos: $\dfrac{12 \times 2}{15 \times 2} = \dfrac{24}{30} \Rightarrow \dfrac{12}{15} = \dfrac{24}{30}$ $\qquad \dfrac{12 : 3}{15 : 3} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$

Una **fracción** es **irreducible** cuando sus términos son números primos entre sí y no pueden simplificarse.

Ejemplos: $\dfrac{4}{5}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{9}{7}$ son fracciones irreducibles

5 Entre estas parejas de fracciones coloca los signos = o ≠ según sean o no equivalentes:

a) $\dfrac{2}{5} \;\square\; \dfrac{24}{60}$

b) $\dfrac{11}{12} \;\square\; \dfrac{21}{22}$

c) $\dfrac{7}{5} \;\square\; \dfrac{11}{8}$

d) $\dfrac{3}{10} \;\square\; \dfrac{27}{90}$

RECUERDA
Dos fracciones equivalentes cumplen:
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow$
$\Rightarrow a \times d = b \times c$

6 Simplifica estas fracciones hasta averiguar la fracción irreducible equivalente a cada una.

a) $\dfrac{18}{42} = \dfrac{18 : 3}{42 : 3} =$

b) $\dfrac{40}{72} =$

7 En cada serie de fracciones equivalentes hay un término incorrecto. Localízalo y escribe a continuación la fracción correcta.

a) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{7}{13} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{12}{24}$

b) $\dfrac{4}{9} = \dfrac{8}{18} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{20}{45}$

c) $\dfrac{7}{8} = \dfrac{15}{16} = \dfrac{35}{40} = \dfrac{70}{80}$

Cómo se reducen fracciones a común denominador

- **Por ampliación de sus términos.** Se amplían sus términos (multiplicándolos por 2, 3, 4, 5, ...) hasta encontrar las que tienen igual denominador.

Ejemplo: $\frac{7}{6} = \boxed{\frac{14}{12}} = \frac{21}{18} = \boxed{\frac{28}{24}} = \frac{35}{30} = \boxed{\frac{42}{36}}$ ...

$\frac{5}{4} = \frac{10}{8} = \boxed{\frac{15}{12}} = \frac{20}{16} = \frac{25}{20} = \boxed{\frac{30}{24}} = \frac{35}{28} = \frac{40}{32} = \boxed{\frac{45}{36}}$ ...

8 Multiplica los términos de estas fracciones por 2, 3, 4, 5, 6, ..., hasta que encuentres dos fracciones equivalentes a cada una de ellas con los mismos denominadores.

a) $\frac{2}{9} = \frac{\quad}{\quad}$

b) $\frac{5}{6} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

9 Escribe los numeradores que faltan para que se cumplan las equivalencias.

a) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{20}$ b) $\frac{7}{5} = \frac{\square}{20}$ c) $\frac{9}{10} = \frac{\square}{20}$

10 Reduce a común denominador estas fracciones ampliando sus términos.

a) $\frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}$

$\frac{5}{3} = \frac{\quad}{\quad} =$

$\frac{7}{4} =$

$\frac{1}{2} =$

b) $\frac{9}{10}, \frac{7}{15}, \frac{5}{6}$

11 Multiplica o divide los términos de la fracción dada por el número indicado para buscar fracciones equivalentes:

$\frac{2}{3} \xrightarrow{\times 4} \frac{8}{12} \xrightarrow{\times 6} \frac{\quad}{\quad} \xrightarrow{:2} \frac{\quad}{\quad} \xrightarrow{:4} \frac{\quad}{\quad} \xrightarrow{\times 5} \frac{\quad}{\quad} \xrightarrow{\times 2} \frac{\quad}{\quad} \xrightarrow{:30} \frac{\quad}{\quad}$

- **Con el mínimo común múltiplo.** Para reducir fracciones a común denominador por este método, se efectúan los siguientes pasos:

$\frac{5}{9}$ y $\frac{11}{12}$ a común denominador

1.° Se **calcula** el **m.c.m.** de los denominadores.

$9 = 3^2$ y $12 = 2^2 \times 3$

$\text{m.c.m.}(9 \text{ y } 12) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

2.° Se **divide** el m.c.m. por cada denominador.

$36 : 9 = 4$

$36 : 12 = 3$

3.° Se **multiplican** los términos de cada fracción por el cociente obtenido.

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \times 4}{9 \times 4} = \boxed{\frac{20}{36}}$$

$$\frac{11}{12} = \frac{11 \times 3}{12 \times 3} = \boxed{\frac{33}{36}}$$

12 Reduce estas tres fracciones a común denominador por el método del m.c.m. siguiendo los pasos indicados:

$$\frac{1}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{15}$$

1.° Se calcula el m.c.m. de (5, 6, 15) $\begin{cases} 5 = 5^1 \quad 6 = \quad\quad 15 = \\ \text{m. c. m.}(5, 6, 15) = \boxed{} \end{cases}$

2.° Se divide el m.c.m. por cada denominador $\begin{cases} \boxed{} : 5 = \\ \boxed{} : 6 = \\ \boxed{} : 15 = \end{cases}$

3.° Se multiplica por los cocientes $\begin{cases} \frac{1}{5} = \frac{1 \times \boxed{}}{5 \times \boxed{}} = \\ \frac{7}{6} = \\ \frac{8}{15} = \end{cases}$

13 Reduce a mínimo común denominador $\frac{11}{18}$ y $\frac{13}{24}$.

Cómo se ordenan fracciones

- Cuando tienen un **término igual** (numerador o denominador).

El **mismo denominador**
Es **mayor** la de **mayor numerador**

$$\frac{6}{7} > \frac{4}{7}$$

El mismo **numerador**
Es **mayor** la de **menor denominador**

$$\frac{5}{9} > \frac{5}{12}$$

- Cuando tienen **ambos términos diferentes** se reducen a común denominador y se comparan después.

Ejemplo: Ordena de menor a mayor $\frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}$

$(4 = 2^2;\ 6 = 2 \times 3;\ 8 = 2^3) \Rightarrow \text{m.c.m.}(4, 6, 8) = 2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$

$\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$; $\frac{4}{6} = \frac{16}{24}$; $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$

Como $\frac{15}{24} < \frac{16}{24} < \frac{18}{24} \Rightarrow \boxed{\frac{5}{8} < \frac{4}{6} < \frac{3}{4}}$

14 Escribe el signo > o <, según corresponda en cada caso.

a) $\frac{8}{15} \square \frac{6}{15}$ c) $\frac{25}{40} \square \frac{30}{40}$ e) $\frac{3}{10} \square \frac{3}{14}$

b) $\frac{9}{7} \square \frac{9}{12}$ d) $\frac{15}{14} \square \frac{15}{9}$ f) $\frac{17}{100} \square \frac{21}{100}$

15 Ordena de menor a mayor $\frac{7}{10}, \frac{2}{5}, \frac{9}{20}, \frac{1}{4}$.

16 Coloca los numeradores y los denominadores indicados:

a) $\frac{\square}{15} < \frac{\square}{15} < \frac{\square}{15}$ (numeradores: 4, 7 y 14)

b) $\frac{8}{\square} < \frac{8}{\square} < \frac{8}{\square}$ (denominadores: 5, 9 y 15)

17 Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones: $\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{8}{9}$

18 Un premio de lotería se reparte entre tres socios. Al primero le corresponden los $\frac{3}{4}$ del total, al segundo $\frac{1}{6}$ y al tercero el $\frac{1}{12}$ restante. Establece un orden de mayor a menor en las cantidades cobradas.

19 En unos entrenamientos, los tiempos empleados por distintos vehículos de carreras en dar una vuelta a un circuito, medidos en minutos, han sido los siguientes: $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{5}{12}$. Indica cuál ha sido el vehículo más rápido.

20 Cuatro niños deben repartirse una determinada cantidad de caramelos. Al primero le corresponden $\frac{1}{3}$ del total, al segundo $\frac{2}{9}$ del total, al tercero $\frac{3}{81}$ del total y al cuarto los $\frac{4}{54}$ restantes. Indica un orden creciente en el número de caramelos que cada niño ha recibido.

2 Operaciones con fracciones

PARA EMPEZAR

Cómo se suman y restan fracciones con el mismo denominador

Para **sumar o restar fracciones** con el **mismo denominador**, se suman o restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

Ejemplos:

Suma

$$\frac{5}{12} + \frac{3}{12} + \frac{7}{12} = \frac{5+3+7}{12} = \boxed{\frac{15}{12}} = \frac{5}{4}$$

simplificada

Resta

$$\frac{14}{9} - \frac{6}{9} = \frac{14-6}{9} = \boxed{\frac{8}{9}}$$

21 Calcula el resultado de estas operaciones combinadas. Simplifica el resultado que puedas.

a) $\frac{13}{15} - \left(\frac{2}{15} + \frac{7}{15}\right) =$

b) $\left(\frac{9}{20} - \frac{3}{20}\right) + \frac{13}{20} =$

c) $\frac{4}{7} + \left(\frac{15}{7} - \frac{5}{7}\right) =$

d) $\left(\frac{7}{30} + \frac{18}{30}\right) - \frac{10}{30} =$

RECUERDA

La unidad equivale a una fracción con sus términos iguales:

$1 = \frac{3}{3} = \frac{17}{17} = \frac{125}{125} \dots$

Cómo se multiplica un número por una fracción

Para **multiplicar un número entero por una fracción**, se multiplica por el numerador y se deja el mismo denominador.

Ejemplos: $7 \times \frac{4}{5} = \frac{7 \times 4}{5} = \boxed{\frac{28}{5}}$ $\qquad \frac{3}{10} \times 19 = \frac{3 \times 19}{10} = \boxed{\frac{57}{10}}$

22 Calcula mentalmente el factor que falta.

a) $\square \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

b) $\square \times \frac{2}{9} = \frac{10}{9}$

c) $\frac{7}{8} \times \square = \frac{63}{8}$

d) $\frac{2}{15} \times \square = \frac{14}{15}$

e) $\frac{9}{20} \times \square = \frac{72}{20}$

f) $\square \times \frac{12}{25} = \frac{48}{25}$

Qué es la fracción inversa

Se llaman **fracciones inversas** a las que tienen sus **términos cambiados.**

Ejemplos: $\frac{5}{9}$ y $\frac{9}{5}$ $\quad$ $\frac{7}{10}$ y $\frac{10}{7}$ $\quad$ 3 y $\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{8}$ y 8

El **producto de dos fracciones inversas** siempre es igual a la unidad.

Ejemplos: $\frac{5}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{45}{45} = 1$ $\quad$ $\frac{7}{10} \times \frac{10}{7} = \frac{70}{70} = 1$ $\quad$ $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ $\quad$ $\frac{1}{8} \times 8 = \frac{8}{8} = 1$

23 Coloca el factor que falta.

a) $\frac{3}{4} \times \frac{\square}{\square} = 1$

b) $\frac{1}{10} \times \square = 1$

c) $\frac{\square}{\square} \times \frac{6}{5} = 1$

d) $\frac{\square}{\square} \times 4 = 1$

e) $12 \times \frac{\square}{\square} = 1$

f) $\frac{1}{15} \times \square = 1$

24 Escribe la fracción que falta en cada operación combinada.

a) $5 \times \left(\frac{7}{5} - \frac{\square}{\square}\right) = 1$

b) $\frac{\square}{\square} \times \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{4}\right) = 1$

c) $\left(\frac{8}{9} - \frac{\square}{\square}\right) \times \frac{9}{2} = 1$

d) $\left(\frac{\square}{\square} + \frac{6}{15}\right) \times \frac{15}{13} = 1$

e) $\left(\frac{\square}{\square} - \frac{12}{14}\right) \times 14 = 1$

f) $\frac{\square}{\square} \times \left(\frac{5}{4} + \frac{10}{4}\right) = 1$

25 Entre estas fracciones inversas coloca > o <, según proceda.

a) $\frac{3}{4}$ $\square$ $\frac{4}{3}$

b) $\frac{7}{5}$ $\square$ $\frac{5}{7}$

c) $\frac{9}{16}$ $\square$ $\frac{16}{9}$

d) $\frac{13}{25}$ $\square$ $\frac{25}{13}$

RECUERDA

Si el numerador es menor que el denominador, la fracción es menor que la unidad, y mayor en caso contrario.

Ejercicio resuelto

Calcula estas operaciones combinadas y simplifica el resultado (fracción irreducible).

a) $3 \times \left(\frac{5}{9} + \frac{2}{9}\right) = 3 \times \frac{7}{9} = \frac{21}{9} = \boxed{\frac{7}{3}}$

b) $5 \times \left(\frac{18}{20} - \frac{3}{20}\right) = 5 \times \frac{15}{20} = \frac{75}{20} = \boxed{\frac{15}{4}}$

c) $\left(\frac{16}{35} + \frac{8}{35}\right) \times 6 = \frac{24}{35} \times 6 = \boxed{\frac{144}{35}}$

d) $\left(\frac{24}{45} - \frac{9}{45}\right) \times 7 = \frac{15}{45} \times 7 = \frac{105}{45} = \boxed{\frac{7}{3}}$

26 Si tienes 6 euros para el fin de semana y el sábado te gastas los $\frac{3}{5}$, ¿cuánto dinero te queda para el domingo?

27 Juan, Luis y Marta están leyendo el mismo libro. Si Juan ha leído los $\frac{3}{8}$, Luis los $\frac{4}{9}$ y Marta los $\frac{2}{5}$, ¿quién ha leído menos y quién ha leído más?

28 Un agricultor contrata a tres obreros para recoger los tomates de su huerta. Uno recoge los $\frac{3}{9}$, otro los $\frac{4}{12}$ y el tercero los $\frac{6}{18}$. Al final les paga a los tres por igual. ¿Está bien hecho el pago? ¿Por qué?

29 Coloca el signo $>$, $<$ o $=$, según corresponda, en la siguiente operación.

$$2 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\right) \square \left(\frac{7}{10} - \frac{3}{10}\right) \times 4$$

22

Cómo se suman y restan fracciones con distinto denominador

Para **sumar o restar fracciones con distinto denominador**, se reducen a común denominador y después se suman o restan los numeradores dejando el denominador común.

Ejemplos:

Suma

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{6}$$

1.° m.c.m.(8, 6) = 24

2.° Se reducen a común denominador y se suman los numeradores.

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{6}=\frac{9}{24}+\frac{20}{24}=\boxed{\frac{29}{24}}$$

Resta

$$\frac{7}{6}-\frac{8}{9}$$

1.° m.c.m.(6, 9) = 18

2.° Se reducen a común denominador y se restan los numeradores.

$$\frac{7}{6}-\frac{8}{9}=\frac{21}{18}-\frac{16}{18}=\boxed{\frac{5}{18}}$$

30 Realiza estas operaciones simplificando los resultados si es posible.

a) $\frac{5}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{\quad}{\boxed{}}+\frac{\quad}{\boxed{}}+\frac{\quad}{\boxed{}}=$

m.c.m.(4, 3, 6) = $\boxed{}$

b) $\frac{11}{15}-\frac{4}{10}=$

c) $\frac{4}{5}+\frac{3}{4}+\frac{9}{10}=$

31 Para empaquetar los libros de mi estantería tengo tres cajas de diferente tamaño. En una guardo los $\frac{2}{5}$, y en otra $\frac{1}{4}$. ¿Qué fracción del total de libros me queda para la tercera caja?

32 Un depósito de agua está lleno hasta los $\frac{7}{8}$. Como tiene una fuga, por la noche se vierte $\frac{1}{6}$ de su capacidad. ¿Qué fracción queda en el depósito?

Cómo se multiplican y dividen fracciones

Para **multiplicar o dividir fracciones** se procede de la siguiente forma:

Multiplicación

1.º Se multiplican los numeradores.
2.º Se multiplican los denominadores.

División

1.º Se multiplica el dividendo por la fracción inversa del divisor.

Ejemplos:

$$\frac{6}{5} \times 2 \times \frac{1}{8} = \frac{6 \times 2 \times 1}{5 \times 8} = \boxed{\frac{12}{40}} = \frac{3}{10}$$

simplificada

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{2} = \frac{3 \times 7}{4 \times 2} = \boxed{\frac{21}{8}}$$

33 Calcula los productos y cocientes, simplificando los resultados que se puedan.

a) $\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} =$

b) $3 \times \frac{4}{7} \times \frac{8}{9} =$

c) $\frac{7}{4} : 3 =$

d) $8 : \frac{5}{9} =$

e) $2 \times \left(\frac{6}{5} : \frac{1}{3}\right) =$

f) $5 : \left(\frac{5}{3} \times \frac{2}{3}\right) =$

g) $\left(\frac{2}{5} : \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{13}{6} : 2\right) =$

h) $\left(\frac{1}{4} \times \frac{5}{2}\right) : \left(\frac{7}{10} \times \frac{5}{3}\right) =$

34 De una tarta nos hemos comido $\frac{1}{4}$ el primer día, y el día siguiente $\frac{1}{2}$ de lo que quedaba. ¿Qué parte de la tarta nos queda aún?

RECUERDA

Para calcular una fracción de otra, se multiplican ambas.

$\frac{1}{3}$ de $\frac{7}{5} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{7}{15}$

35 Una almazara elabora 3 615 litros de aceite de oliva que envasa en botellas de $\frac{3}{4}$ de litro. ¿Cuántas botellas se necesitarán?

Cómo se eleva una fracción a una potencia

Para calcular una potencia de una fracción, **se elevan al exponente el numerador y el denominador** por separado.

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{2^4}{3^4} = \boxed{\frac{16}{81}}$$

36 Escribe en forma de potencia o producto estas operaciones, según corresponda.

a) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$

b) $\frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} =$

c) $\frac{2}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} =$

d) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$

e) $\frac{7}{8} \times \frac{7}{8} =$

f) $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} =$

37 Coloca entre estas parejas de fracciones = o ≠, según proceda.

a) $\left(\frac{1}{10}\right)^3 \; \square \; \frac{3}{1000}$

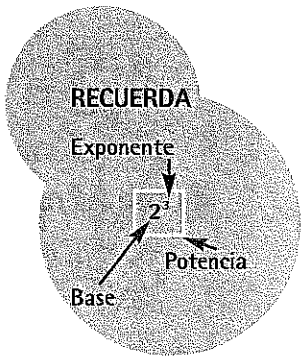
b) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \; \square \; \frac{4}{25}$

c) $\frac{1}{8} \; \square \; \left(\frac{1}{4}\right)^2$

d) $\frac{1}{5} : 5 \; \square \; \left(\frac{1}{5}\right)^2$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \; \square \; \left(\frac{1}{4}\right)^3$

f) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \; \square \; \left(\frac{1}{2}\right)^4$



38 Escribe la fracción que falta para que se cumpla la igualdad.

a) $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^2 = \frac{1}{64}$

b) $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^3 = \frac{1}{64}$

c) $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^6 = \frac{1}{64}$

d) $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^3 = \frac{8}{125}$

e) $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^4 = \frac{16}{10\,000}$

f) $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^2 = \frac{81}{64}$

Cómo se calcula la raíz cuadrada de una fracción

Para calcular la raíz cuadrada de una fracción, **se calcula la raíz del numerador y del denominador** por separado.

Ejemplos:

$$\sqrt{\frac{4}{81}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{81}} = \boxed{\frac{2}{9}} \qquad \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \boxed{\frac{5}{8}}$$

39 Calcula las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{\frac{100}{49}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{49}} =$

b) $\sqrt{\frac{81}{16}} =$

c) $\sqrt{\frac{1}{10\,000}} =$

d) $\sqrt{\frac{9}{36}} =$

40 Completa el ejercicio conforme el modelo:

Cálculo		Comprobación
a) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$	$\Rightarrow$	$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{4}{25}}$
b) $\sqrt{\frac{49}{100}} =$	$\Rightarrow$	
c) $\sqrt{\frac{9}{64}} =$	$\Rightarrow$	
d) $\sqrt{\frac{1}{81}} =$	$\Rightarrow$	

41 Une las raíces con las potencias que den el mismo resultado.

1. $\sqrt{\frac{16}{81}}$	a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$
2. $\sqrt{\frac{1}{64}}$	b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$
3. $\sqrt{\frac{1}{10\,000}}$	c) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$
4. $\sqrt{\frac{81}{256}}$	d) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$
5. $\sqrt{\frac{1}{256}}$	e) $\left(\frac{1}{10}\right)^2$

En qué orden se hacen las operaciones con fracciones

En **operaciones combinadas** debes seguir este orden en las operaciones:

$$\sqrt{\frac{9}{4}} : \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{7}{4} \times \frac{2}{5}$$

1.º Se resuelven las operaciones del **paréntesis**. $\sqrt{\frac{9}{4}} : \frac{5}{4} - \frac{7}{4} \times \frac{2}{5}$

2.º Se calculan las **potencias** y **raíces**. $\frac{3}{2} : \frac{5}{4} - \frac{7}{4} \times \frac{2}{5}$

3.º Se realizan las **multiplicaciones** y **divisiones**. $\frac{12}{10} - \frac{14}{20}$

4.º Se resuelven las **sumas** y **restas**. $\frac{24}{20} - \frac{14}{20} = \frac{10}{20}$

5.º Se **simplifica** el resultado (si es posible). $\frac{10}{20} = \boxed{\frac{1}{2}}$

42 Resuelve paso a paso estas operaciones combinadas, simplificando si es posible el resultado final.

a) $6 : \left(\frac{4}{5} + \frac{13}{15}\right) = 6 : \left(\frac{\square}{15} + \frac{\square}{15}\right) = 6 : \frac{\square}{15} = 6 \times \frac{15}{\square} =$

b) $6 : \frac{4}{5} + \frac{13}{15} =$

c) $\left(\frac{7}{10} + \frac{13}{20}\right) : \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{4}\right) =$

d) $\frac{7}{10} + \frac{13}{20} : \frac{5}{12} - \frac{1}{4} =$

43 Si es necesario, ¿dónde pondrías el paréntesis para que el resultado sea correcto?

a) $\frac{9}{10} - \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

b) $\frac{8}{5} - \frac{6}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

c) $\frac{5}{7} - \frac{1}{7} \times 2 = \frac{3}{7}$

d) $\frac{5}{7} - \frac{1}{7} \times 2 = \frac{8}{7}$

3 Qué son los números decimales

PARA EMPEZAR

Cómo se escribe y se lee un número decimal

Un **número decimal**, por ejemplo, 12,385, consta de dos partes separadas por la coma: 12 **(parte entera)** y 385 **(parte decimal)**. Para leer un número decimal:

1.° Se lee la parte entera seguida de la palabra unidades.

2.° Se lee la parte decimal nombrando el orden de unidades de la última cifra.

12,385 → Doce unidades, trescientas ochenta y cinco milésimas

Ejemplos:

UM	C	D	U	d	c	m	dm	
		1	4,	2	3			→ Catorce unidades, veintitrés centésimas.
	1	0	2,	0	4	8		→ Ciento dos unidades, cuarenta y ocho milésimas.
			6,	1	0	0	8	→ Seis unidades, mil ocho diezmilésimas.
			0,	3				→ Tres décimas.
2	1	0	0,	4				→ Dos mil cien unidades, cuatro décimas.

44 Completa la tabla escribiendo el número (colocando sus unidades de orden en la celda correspondiente o el nombre.

C	D	U	d	c	m	dm	Nombre
	8	3	2				
							Dos unidades, ochocientas dieciséis milésimas
							Doce unidades, siete centésimas
		0	5	0	4		
							Tres mil doscientas ochenta y seis diezmilésimas
3	1	4	2	5			
							Cuarenta unidades, noventa y cinco milésimas
		1	0	3	0	4	

45 Coloca y calcula las siguientes operaciones:

a) 3,18 + 25,9 + 579,245 =

b) 41,32 − 29,618 =

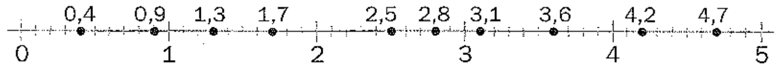
RECUERDA

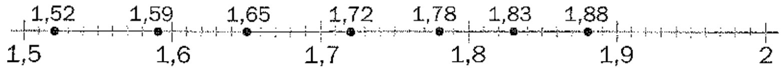
Para sumar y restar hay que colocar en columna las comas y las unidades del mismo orden.

25

Cómo se representan los números decimales sobre la recta

Para **representar números decimales** sobre la recta, hay que **dividir cada intervalo de unidades** en diez, cien, etc., **partes iguales** y representar sobre ellas los números.

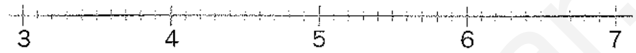




El número es menor cuanto más a la izquierda esté situado en la recta: 1,72 < 1,78

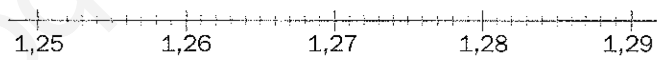
46 Representa estos números sobre la recta y escríbelos debajo ordenados de menor a mayor, según su situación en ella.

a) 6,8; 5,4; 3,2; 4,3; 6,1; 3,6; 5,9; 4,5.



b) 0,13; 0,42; 0,26; 0,35; 0,48; 0,19; 0,21; 0,30.

c) 1,283; 1,252; 1,264; 1,272; 1,258; 1,269; 1,276; 1,28.



47 Completa estas afirmaciones:

a) Cuanto más cerca del punto 0, el valor absoluto del número decimal es ....

b) Diez décimas forman una ....

c) Diez milésimas forman una ....

d) Cien diezmilésimas es igual que una ....

e) Treinta centésimas es lo mismo que .... décimas.

Cómo se ordenan los números decimales

Los números decimales se **ordenan** según estos criterios:

1.º Es mayor el que tiene mayor la **parte entera**. → 25,01 > 13,98

2.º Si la parte entera es igual, se ordenan por las **décimas**. → 8,63 > 8,49

3.º Si también son iguales las décimas, se ordenan por las **centésimas**. → 3,65 > 3,614

4.º Si son iguales hasta las centésimas, se ordenan por las **milésimas**. → 0,374 > 0,3712

Y así sucesivamente.

48 Ordena de menor a mayor estos decimales.

a) 2,5; 0,17; 3,8; 4,92; 3,75; 1,316 → 0,17 < .... < .... < .... < .... < ....

b) 1,73; 1,712; 1,719; 1,724; 1,78; 1,729 →

c) 0,38; 0,05; 0,19; 0,24; 0,02; 0,11 →

49 Coloca el signo > o < que sea adecuado.

a) 0,03 ☐ 0,031	d) 2,173 ☐ 2,1731	g) 29,1 ☐ 29,096
b) 2,7 ☐ 2,69	e) 0,002 ☐ 0,01	h) 8,5346 ☐ 8,5247
c) 12,04 ☐ 11,97	f) 0,264 ☐ 0,2639	i) 74,1 ☐ 74,11

50 Calcula el valor numérico de las siguientes fracciones y ordénalas de menor a mayor según esos valores.

a) $\frac{6}{5} =$ b) $\frac{83}{100} =$ c) $\frac{4}{6} =$ d) $\frac{14}{15} =$ e) $\frac{36}{37} =$

Ordenación:

51 Calcula el valor numérico de las siguientes fracciones y ordénalas de menor a mayor según esos valores.

a) $\frac{3}{4} =$ b) $\frac{95}{100} =$ c) $\frac{7}{8} =$ d) $\frac{12}{15} =$ e) $\frac{24}{25} =$

Ordenación: $\frac{3}{4}$ < .... < .... < .... < ....

26

Ejercicio resuelto

Intercala números decimales entre cada dos, de manera que se mantenga el orden:

$0,10 < \dots < 1,11 < \dots < 1,12 < \dots < 1,13$

Basta con intercalar números que contengan unidades de un orden inferior a la última del número anterior:

$\boxed{0,10 < 0,105 < 1,11 < 1,115 < 1,12 < 1,125 < 1,13}$

52 Coloca un número decimal entre cada dos, de manera que se mantenga el orden.

a) $1,2 < \dots < 1,22$

b) $0,17 < \dots < 0,18$

c) $2,45 < \dots < 2,456$

d) $0,32 < \dots < 0,321$

e) $16,5 < \dots < 16,51$

f) $96,19 < \dots < 96,20$

53 Intercala números decimales entre cada dos, de manera que se mantenga el orden.

a) $1,20 < \dots < 1,21 < \dots < 1,22 < \dots < 1,23$

b) $0,17 < \dots < 0,18 < \dots < 0,19 < \dots < 0,20$

c) $2,45 < \dots < 2,456 < \dots < 2,4567 < \dots < 2,45678$

54 Califica las siguientes frases como correctas o incorrectas.

a) Treinta diezmilésimas es mayor que dos milésimas.

b) El número 1,20001 es mayor que el número 1,19999.

c) 345 unidades es menor que 2 567 décimas.

d) El número decimal más pequeño es el que contiene más diezmilésimas.

55 Dados los siguientes números decimales, ordénalos de mayor a menor:

$1,145;\ \frac{8}{9};\ 1,367;\ \frac{11}{13};\ 1,3678;\ \frac{15}{18}$

4 Operaciones con números decimales

PARA EMPEZAR

Cómo se multiplica un número decimal por un número natural

Para **multiplicar un número decimal por un número natural**, se multiplican los dos números sin tener en cuenta la coma. Después se separa en el resultado tantas cifras decimales (por la derecha) como tiene el factor decimal.

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 2{,}365 \\ \times\ 14 \\ \hline 9460 \\ 2365 \\ \hline 33{,}110 \end{array} \quad \text{3 cifras decimales} \qquad\qquad \begin{array}{r} 837 \\ \times\ 0{,}29 \\ \hline 7533 \\ 1674 \\ \hline 242{,}73 \end{array} \quad \text{2 cifras decimales}$$

56 Calcula los productos.

a) 51,72 × 36 =

b) 3759 × 9,4 =

c) 83956 × 0,75 =

d) 0,4365 × 28 =

57 Por llamar con el móvil nos cobran 0,16 euros de establecimiento de llamada, más 0,13 euros por minuto. ¿Cuánto costará una llamada de un cuarto de hora?

58 En el año 2002 se recogió en un pueblo una media mensual de 17,74 litros de agua de lluvia por metro cuadrado en el primer semestre y 13,45 en el segundo. ¿Cuánta agua se recogió por metro cuadrado a lo largo del año?

27

Cómo se multiplica un número decimal por la unidad seguida de ceros

Para multiplicar un número decimal por 10, 100, 1000, etc., **se desplaza la coma** hacia la derecha tantos lugares como ceros acompañan a la unidad. Si faltan lugares, se añaden ceros.

Ejemplos:

$0{,}36 \times 10 = 3{,}6$ — 1 lugar

$0{,}36 \times 100 = 36$ — 2 lugares

$0{,}36 \times 1\,000 = 360$ — 3 lugares (añadimos un 0)

59 Calcula los productos.

a) $5{,}367 \times 10 =$

b) $5{,}367 \times 100 =$

c) $5{,}367 \times 1000 =$

d) $5{,}367 \times 10000 =$

e) $0{,}008 \times 10000 =$

f) $235{,}7 \times 100 =$

g) $0{,}0025 \times 1000 =$

h) $4{,}384 \times 10 =$

60 Un litro de aceite pesa aproximadamente 0,956 kilogramos. Un camión cisterna transporta 3 tanques de 1000 litros cada uno. Calcula el peso del aceite que lleva.

61 En una vaquería han recogido hoy 200 litros de leche. La mitad la venden a 0,24 euros el litro, y la otra mitad a 0,38 euros. ¿Cuánto han recaudado con la venta de la leche?

62 Completa estas multiplicaciones con el factor que falta.

a) $52{,}4 \times 100 = 5240$

b) $0{,}03 \times$ .... $= 300$

c) $6{,}5 \times$ .... $= 65$

d) $18{,}425 \times$ .... $= 1842{,}5$

e) $0{,}0369 \times$ .... $= 36{,}9$

f) .... $\times 100 = 16{,}3$

g) .... $\times 10 = 0{,}7$

h) .... $\times 1000 = 23$

i) .... $\times 100 = 738{,}4$

j) .... $\times 10000 = 3680$

Cómo se divide un número decimal por un número natural

Para dividir un número decimal por un número natural **se realiza la división sin tener en cuenta la coma.** Después se separa de la derecha del cociente tantas cifras decimales como tenga el dividendo. Si es necesario se añaden ceros.

Ejemplos:

```
     2 decimales                               4 decimales

2 4 3, 7 5 |16                      0, 3 6 8 9  |7
0 8 3       15,23                         1 8    0,0527
  0 3 7                                     4 9
    0 5 5                                     0
      0 7
```

63 Realiza estas divisiones:

a) 5,369 : 8 =

b) 1,9635 : 4 =

c) 6 317,5 : 25 =

64 Una casa tiene 6 ventanas iguales con dos cristales cada una. Poner todos los cristales ha costado 386,52 euros. ¿Cuánto ha costado cada cristal?

65 Calcula mentalmente estos productos y cocientes.

a) 0,8 × 3 =

b) 1,5 × 4 =

c) 2,6 × 2 =

d) 0,09 × 9 =

e) 25 × 0,3 =

f) 0,82 : 2 =

g) 3,6 : 3 =

h) 0,12 : 4 =

i) 7,2 : 9 =

j) 0,042 : 7 =

28

Cómo se divide un número decimal por la unidad seguida de ceros

Para dividir un número decimal por 10, 100, 1000, etc., **se desplaza la coma hacia la izquierda** tantos lugares como ceros acompañan a la unidad. Si es necesario se añaden ceros.

Ejemplos:

16,4 : 10 = 1,64 — 1 lugar

16,4 : 100 = 0,164 — 2 lugares (se añade un 0)

16,4 : 1000 = 0,0164 — 3 lugares (se añaden dos 0)

66 Calcula los resultados.

a) 253,2 : 10 = 25,32

b) 253,2 : 100 =

c) 253,2 : 1000 =

d) 253,2 : 10000 =

e) 0,84 : 10 =

f) 59,6 : 1000 =

g) 1238,4 : 100 =

h) 345,9 : 1000 =

67 Para ayuda humanitaria se van a envasar 3,50 metros cúbicos de agua potable en bidones de 100 litros. ¿Cuántos bidones se necesitarán?

RECUERDA

$1\ m^3 = 1000$ litros

68 Se está comprobando el consumo de un coche en la pista de pruebas. En el depósito lleva 70 litros de gasolina. Cuando ha recorrido 1000 kilómetros aún le quedan en el depósito 8,3 litros. ¿Cuál es el consumo por cada 100 kilómetros?

69 Escribe el término que falta (dividendo o divisor).

a) 45,4 : .... = 4,54

b) 132,2 : .... = 0,1322

c) 0,7 : .... = 0,007

d) 6345,2 : .... = 63,452

e) 136,9 : .... = 13,69

f) 74,5 : .... = 0,745

g) .... : 100 = 0,062

h) .... : 10 = 3,584

i) .... : 1000 = 0,0638

j) .... : 100 = 1,9632

k) .... : 10 = 0,531

l) .... : 1000 = 0,0085

Cómo se multiplican dos números decimales

Dos números decimales se **multiplican como enteros**, sin tener en cuenta las comas. Al finalizar **se separan a la derecha del producto** tantas cifras decimales como tienen los dos factores juntos.

Ejemplos:

$$\begin{array}{r l}
3{,}75 & \leftarrow \text{2 cifras} \\
\times\ 2{,}9 & \leftarrow \text{1 cifra} \\
\hline
3375 & \\
750 & \\
\hline
10{,}875 & \leftarrow \text{3 cifras}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r l}
19{,}62 & \leftarrow \text{2 cifras} \\
\times\ 0{,}034 & \leftarrow \text{3 cifras} \\
\hline
7848 & \\
5886 & \\
\hline
0{,}66708 & \leftarrow \text{5 cifras}
\end{array}$$

70 Realiza estas multiplicaciones.

a) $39{,}5 \times 0{,}017 =$

b) $4{,}836 \times 2{,}08 =$

71 Un campesino tiene dos cerezales. En uno de ellos recoge 183,25 kilogramos y en el otro 168,6 kilogramos. Ha desechado 36,75 kilogramos por estar en mal estado. Las buenas las ha vendido a 2,40 euros el kilo. Calcula el importe de la venta.

72 Calcula los resultados de estas operaciones combinadas.

a) $(18{,}5 + 37{,}24) \times 0{,}76 =$

c) $0{,}38 \times (1{,}316 : 2) =$

b) $2{,}5 \times (97{,}12 - 48{,}361) =$

d) $(0{,}2 + 1{,}6 + 3{,}71) \times 4{,}9 =$

73 Calcula mentalmente estos productos.

a) $0{,}2 \times 0{,}5 =$

c) $0{,}9 \times 0{,}08 =$

e) $0{,}05 \times 0{,}07 =$

b) $1{,}5 \times 2 =$

d) $2{,}5 \times 0{,}4 =$

f) $1{,}2 \times 0{,}03 =$

Cómo se dividen dos números decimales

Para dividir dos números decimales, primero **se convierte el divisor en un número natural**. Para eso se multiplican el dividendo y el divisor por 10, 100, 1000, etc., según las cifras decimales que tenga el divisor. Después se realiza la división.

Ejemplos:

$$\begin{array}{ccc} 12{,}6 & : & 0{,}34 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \times\, 100 & & \times\, 100 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1260 & : & 34 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} 2{,}638 & : & 1{,}4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \times\, 10 & & \times\, 10 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 26{,}38 & : & 14 \end{array}$$

74 Siguiendo el proceso descrito, realiza las siguientes divisiones:

a) 9,365 : 0,8 = 93,65 : 8

93,65 | 8

b) 473,9 : 1,25 =

c) 8,1063 : 0,024 =

d) 0,92675 : 3,06 =

75 Completa la tabla:

a	*b*	*a* × *b*	*a* : *b*
4,8	1,2		
0,06	0,2		
5,4	0,6		
0,25	0,05		
3,9	0,03		

76 Resuelve estas operaciones combinadas.

a) (9,25 + 13,6) : 0,7 =

b) 7,2 : (1,2 × 0,3) =

Cómo se aproxima por redondeo un número decimal

La **aproximación** de un número decimal **por redondeo** se realiza con los siguientes criterios:

1.º Se toma como **referencia** la cifra siguiente a la que se quiere redondear (por ejemplo, si se quiere redondear a las décimas, la de referencia es la cifra de las centésimas).

2.º Si la cifra de referencia es > **5** se redondea **hacia arriba**; si es < **5** se redondea **hacia abajo**.

3.º Si la cifra de referencia es **5**, se puede redondear hacia arriba (**por exceso**) o hacia abajo (**por defecto**).

Ejemplos:

Redondeo a la décima

Número		Décima más próxima
2,638	→	2,6
1,492	→	1,5
0,755	→	0,7 ó 0,8

Redondeo a la centésima

Número		Centésima más próxima
2,638	→	2,64
1,492	→	1,49
0,755	→	0,75 ó 0,76

Cifras de referencia

77 Completa las frases y redondea los números decimales indicados.

1) Para redondear a las unidades, la cifra de referencia es la de las ....

Redondea a las unidades: a) 7,94 → b) 23,1 →

2) Para redondear a las centésimas, la cifra de referencia es la de las ....

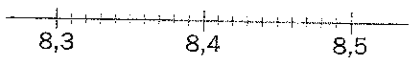
Redondea a las centésimas: a) 0,378 → b) 5,972 →

3) Para redondear a las décimas, la cifra de referencia es la de las ....

Redondea a las décimas: a) 17,925 → b) 0,834 →

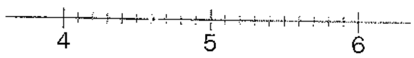
78 Dados los siguientes números:

1) Representa en esta recta 8,32; 8,37; 8,41 y 8,46, y redondéalos a la décima más próxima.



a) 8,32 → b) 8,37 → c) 8,41 → d) 8,46 →

2) Representa en esta recta 4,3; 4,9; 5,4 y 5,6, y redondéalos a la unidad más próxima.



a) 4,3 → b) 4,9 → c) 5,4 → d) 5,6 →

30

Cómo se eleva un número decimal a una potencia

Para calcular una potencia de un número decimal **se multiplica por sí mismo** tantas veces como indique el exponente.

Ejemplos:

$0{,}2^5 = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}00032$

$1{,}5^2 = 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$

$0{,}3^3 = 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}027$

79 Escribe en forma de potencia o producto.

a) $0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6 =$ ....

b) $2{,}3 + 2{,}3 + 2{,}3 + 2{,}3 =$ ....

c) $2{,}5 \times 2{,}5 \times 2{,}5 =$ ....

d) $19{,}25 + 19{,}25 =$ ....

e) $0{,}01 \times 0{,}01 \times 0{,}01 \times 0{,}01 =$ ....

f) $0{,}9 + 0{,}9 + 0{,}9 + 0{,}9 + 0{,}9 =$ ....

g) $5{,}2 \times 5{,}2 =$ ....

h) $7{,}25 \times 7{,}25 \times 7{,}25 =$ ....

i) $12{,}3 + 12{,}3 + 12{,}3 =$ ....

j) $14{,}3 \times 14{,}3 \times 14{,}3 \times 14{,}3 =$ ....

80 Completa la siguiente tabla:

Número	0,2	0,5	0,6	1,5	0,15
Cuadrado					
Cubo					

81 Calcula las potencias:

a) $0{,}2^4 =$

b) $1{,}2^2 =$

c) $0{,}09^2 =$

d) $0{,}1^6 =$

e) $5{,}4^2 =$

f) $0{,}4^3 =$

82 Completa el elemento que falta (base o exponente).

a) $\boxed{}^5 = 0{,}00001$

b) $0{,}4^{\boxed{}} = 0{,}16$

c) $5{,}2^{\boxed{}} = 5{,}2$

d) $0{,}03^{\boxed{}} = 0{,}0009$

e) $\boxed{}^4 = 0{,}0016$

f) $\boxed{}^2 = 0{,}25$

g) $1{,}1^{\boxed{}} = 1{,}331$

h) $0{,}007^{\boxed{}} = 0{,}000049$

1 Razones y proporciones

- Se llama **razón** de dos números, *a* y *b*, al cociente entre ellos $\frac{a}{b}$. Se puede expresar como cociente indicado o como cociente efectuado.
- Cuatro números (*a*, *b*, *c* y *d*) forman una **proporción** si la razón entre *a* y *b* es igual a la razón entre *c* y *d*. Se escribe: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En una proporción, la **constante de proporcionalidad** es el cociente entre cada pareja de valores.

PASO A PASO

Términos de una proporción

En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, los **extremos** son *a* y *d*, y los **medios**, *b* y *c*.

1 ***Comprueba que los números 3, 2, 6 y 4 forman una proporción. Halla la constante de proporcionalidad e identifica los extremos y los medios.***

Sí forman una proporción, ya que: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = 1{,}5$.

La constante de proporcionalidad es 1,5.
Los extremos son 3 y 4, y los medios, 2 y 6.

2 Calcula el valor de las letras en las siguientes razones.

a) $\frac{x}{13} = 2$ $x = \square$

b) $\frac{4}{5} =$ $k = \square$

c) $\frac{24}{y} = 0{,}6$ $y = \square$

d) $\frac{36}{z} = 2{,}4$ $z = \square$

3 Ahmed y tres amigos han recogido 145 kilogramos de papel para reciclar. Calcula la razón entre los kilogramos de papel recogido y los chicos que lo han hecho. Expresa la razón en forma decimal.

4 El gasto en medicinas en El Solar ha sido de 18 750 euros entre los 150 habitantes del pueblo. Calcula la razón entre el dinero gastado y los habitantes del pueblo, exprésala en forma decimal.

5 ***Halla el cuarto término de la proporción*** $\frac{12}{17} = \frac{48}{x}$.

1.º Aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones: $12 \cdot x = 48 \cdot 17 \rightarrow 12x = 816$

2.º Despejamos nuestra incógnita: $x = \frac{816}{12} = 68$

Nuestra solución es $\boxed{x = 68.}$

Propiedad de las proporciones

En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, producto de extremos es igual a producto de medios $\mathbf{a \cdot d = b \cdot c}$.

6 Calcula los valores de las letras en las siguientes proporciones aplicando la propiedad fundamental.

a) $\frac{45}{42} = \frac{x}{28}$

b) $\frac{72}{60} = \frac{18}{y}$

7 En Los Jaramillos, por cada 2 árboles que mueren o enferman se plantan 3 árboles distintos. Este año han enfermado 18 árboles. Calcula los árboles que se van a plantar este año si se mantiene la proporción.

8 En un partido de baloncesto, Alicia ha encestado 3 de cada 5 tiros triples que ha marcado su equipo. El equipo de Alicia ha anotado 30 puntos en triples. Calcula los puntos que ha anotado Alicia con sus tiros triples si se mantiene la proporción.

9 Para preparar un medicamento contra la gripe se mezclan dos componentes diferentes: *A* y *B*. Por cada 3 partes del componente *A* se ponen 8 partes del componente *B*. Calcula cuántos miligramos del componente *B* hay que añadir si se ponen 12 miligramos del componente *B* y se mantiene la proporción.

2 Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando el cociente o razón de las cantidades correspondientes es constante. Este cociente se llama **constante de proporcionalidad directa**.

PASO A PASO

10 ***La siguiente tabla proporciona el coste en euros de las fresas según el número de kilogramos. Comprueba que las magnitudes que aparecen en ella son directamente proporcionales e indica cuál es la constante de proporcionalidad directa.***

Coste (euros)	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*
Número de kg	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*

Si dividimos las cantidades correspondientes: $\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{3} = \frac{15}{5} = \frac{18}{6} = 3$*, el cociente es siempre 3, que es la constante de proporcionalidad directa.*

El coste es directamente proporcional al número de kilogramos, y la constante de proporcionalidad es 3.

11 Para cada una de las siguientes tablas, estudia si representan valores de magnitudes directamente proporcionales, y cuando sea así, indica cuál es la constante de proporcionalidad.

a)

x	4	6	8	14
y	2	3	4	7

b)

u	6	12	13	14
v	1	2	3	4

12 Completa la tabla para que represente valores de magnitudes directamente proporcionales, de constante de proporcionalidad $\frac{m}{n} = 3{,}5$.

m		14		105
n	2		12	

13 ***Las 7 entradas que compré para un concierto me costaron 36,40 euros. ¿Cuánto me costarán 13 entradas?***

1.º Calculamos el precio de una entrada. — *1 entrada ha costado 36,40 : 7 = 5,20 euros.*

2.º Multiplicamos el precio de una entrada por el número de entradas total. — *13 entradas costarán 13 · 5,20 = 67,60 euros.*

El precio total de las entradas es de 67,60 euros.

14 Pablo ha estudiado 22 horas durante 5 días. Si sigue así, ¿cuántas horas de estudio habrá hecho al cabo de 30 días?

15 Dos pintores han tardado 4 días en pintar 220 metros cuadrados de un piso. ¿Cuántos días tardarán en pintar 715 metros cuadrados?

16 Un trabajador recibió 180 euros por 6 días de trabajo. ¿Cuánto recibirá por 21 días de trabajo?

17 En la elaboración de un pastel para 4 personas se emplean 240 gramos de azúcar. ¿Cuántos gramos de azúcar serán necesarios en la fabricación de un pastel para 7 personas?

18 En una etapa contrarreloj, un ciclista tarda 30 minutos en recorrer los primeros 25 kilómetros. Si sigue a esta misma velocidad, ¿cuánto tardará en recorrer los 15 kilómetros siguientes?

3 Porcentajes

Un **porcentaje** es una cantidad de cada 100 unidades de una magnitud. Se expresa escribiendo la cantidad seguida del símbolo %.

Para **calcular el porcentaje** de una cantidad, se multiplica esta por el número decimal equivalente al porcentaje.

Ejemplo: El 8 % de 340 es: $340 \cdot \frac{8}{100} = 340 \cdot 0{,}08 = 27{,}2$

Tanto por ciento — Razón equivalente — Número decimal equivalente

PASO A PASO

19 ***Al aplicar un determinado porcentaje a 1 500 se obtiene 630. ¿Qué porcentaje se ha aplicado?***

1 500 · = 630; x = 630 · 100/150 = 42; $\boxed{x = 42\ \%}$

20 Calcula los siguientes porcentajes.

a) 13 % de 470

b) 16 % de 38

21 El 23 % de una cantidad da 144,67. ¿De qué cantidad se trata?

22 Al aplicar un determinado porcentaje a 2 000 se obtiene 500. ¿De qué porcentaje se trata?

23 Luisa pasa el 25 % de un día en el instituto. Calcula las horas que pasa dentro y fuera del centro.

Un **aumento** o una **disminución porcentual** consiste en añadir o disminuir, respectivamente, a una cantidad un cierto porcentaje de ella.

24 ***Halla la cantidad que resulta si a 365 euros le aplicamos:***

a) Un aumento del 18 %.

b) Una disminución del 14 %.

1.º Calculamos el porcentaje de la cantidad dada inicialmente.

2.º Sumamos o restamos el porcentaje a la cantidad inicial.

a) 18 % de $365 = 0{,}18 \cdot 365 = 65{,}70$; $365 + 65{,}70 = \boxed{430{,}70 \text{ euros}}$

b) 14 % de $365 = 0{,}14 \cdot 365 = 51{,}10$; $365 - 51{,}10 = \boxed{313{,}90 \text{ euros}}$

25 Calcula la cantidad final si a 875 euros le aplicamos las siguientes variaciones porcentuales.

a) Un aumento porcentual del 24 %.

b) Una disminución porcentual del 32 %.

26 Al efectuar la compra de un jersey nos han hecho un descuento del 15 %. Si el precio que marcaba el jersey era de 30 euros, ¿cuánto hemos pagado finalmente?

27 La cantidad de 500 euros, aumentada en un determinado porcentaje, da 580 euros. ¿En qué porcentaje se aumentó dicha cantidad?

28 Después de las lluvias, la capacidad de un embalse es de 517 hectómetros cúbicos. Calcula la cantidad de agua que tenía antes de las lluvias si ha aumentado su capacidad en un 10 %.

UN PASO MÁS

29 Una empresa ha consumido en la elaboración de papel 7 000 kilovatios de energía. Otra empresa que produce papel reciclado consume el 36 % de dicha energía. Calcula la cantidad de energía que consume la empresa que recicla papel, y la cantidad y el porcentaje de energía que ahorra.

30 En la obra de teatro del instituto se han ocupado 250 sillas de las 300 que tiene el salón de actos. Calcula el porcentaje de sillas ocupadas.

31 En Los Zarzales, los vecinos han votado para construir un centro cívico. Han votado a favor 420 vecinos de los 560 que hay en el pueblo. Calcula el porcentaje de vecinos que han votado a favor de la construcción.

32 La recaudación de un partido de fútbol de aficionados se va a dedicar a ayuda humanitaria para campamentos en África. El 35 % se destina a crear pozos de agua potable. Si se dedican 21 000 euros a crear pozos, calcula la recaudación total del partido.

33 En el pueblo de Adela, la población ha disminuido en los últimos 5 años un 30 %. Ahora hay allí 490 habitantes. Calcula cuántos había hace 5 años.

4 Regla de tres simple directa

La **regla de tres directa** es otro método para resolver problemas en los que se relacionan dos magnitudes directamente proporcionales.

PASO A PASO

35 ***Por 3 kilogramos de fruta hemos pagado 7,80 euros. ¿Cuánto habríamos pagado por 11 kilogramos?***

1.° Construimos un esquema con los datos del problema:

$$\begin{array}{lcl} 3\text{ kg} & \text{———} & 7{,}80\text{ €} \\ 11\text{ kg} & \text{———} & x \end{array}$$

2.° Escribimos la proporción:

$$\frac{3}{7{,}80} = \frac{11}{x}$$

3.° Despejamos la incógnita:

$$x = \frac{11 \cdot 7{,}80}{3} = 28{,}60$$

Habríamos pagado 28,60 €.

36 La pared de mi cuarto, que mide 3,2 metros, está representada en un plano en 2 centímetros. ¿Por cuántos centímetros está representada la pared del salón, que mide 5,6 metros?

37 Jaime ha comprado 12 libros de una serie de aventuras en una librería de segunda mano por 19,20 euros. ¿Cuánto habría tenido que pagar si hubiera comprado 31 libros?

38 Pepe ha comprado 12 metros de papel para hacer 8 gorros para la fiesta de disfraces del instituto. Calcula cuántos gorros podría hacer si tuviera 21 metros de papel.

39 Para hacer un bizcocho de chocolate hay que poner, por cada 150 gramos de harina, 25 gramos de cacao en polvo. Calcula la cantidad de cacao en polvo que hay que utilizar si se ponen 180 gramos de harina.

40 Por cada 7 000 periódicos que se usan para hacer papel reciclado se evita la tala de 15 árboles de tamaño medio. Calcula cuántos árboles evitaremos cortar si se recogen 126 000 periódicos.

41 Para ahorrar agua, Rocío se ducha en lugar de bañarse y cierra el grifo mientras se enjabona. En 10 días ha ahorrado 1 500 litros de agua. Calcula cuántos litros ahorrará en 25 días.

42 Raquel mide 1,58 metros de altura y su sombra en un determinado momento mide 0,70 metros. Calcula la altura de un árbol que en ese mismo momento proyecta una sombra de 2,10 metros.

43 Una empresa de instalación de paneles solares con una plantilla de 8 trabajadores es capaz de instalar 24 paneles solares diarios. En los siete próximos días debe montar 210 placas solares. ¿Cuántos nuevos trabajadores ha de contratar?

5 Repartos directamente proporcionales

Para **repartir** una cantidad T entre las cantidades x, y, z de forma **proporcional**:

1.º Calculamos la razón de proporcionalidad: $\dfrac{T}{x+y+z} = k$

2.º Las cantidades x', y', z', que corresponden a x, y, z, respectivamente, son:

$$x' = x \cdot k,\ y' = y \cdot k,\ z' = z \cdot k$$

Se cumple que: $x' + y' + z' = T$.

PASO A PASO

44 ***Berta, Álvaro y Carolina han comprado un paquete de 480 folios por 6 euros. Berta ha puesto 3 euros; Álvaro, 2, y Carolina, 1. ¿Cómo deben repartirse los folios, si lo hacen en forma directamente proporcional al dinero que han puesto?***

1.º Hacemos una tabla con las magnitudes directamente proporcionales y llamamos x, y, z a las cantidades que corresponden a cada uno, respectivamente.

	Berta	Álvaro	Carolina
Euros	3	2	1
Folios	x	y	z

2.º Hallamos la constante de proporcionalidad:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \frac{480}{6} = 80 \text{ folios por euro}$$

3.º Calculamos lo que le corresponde a cada uno:

$x = 80 \cdot 3 = 240$; *a Berta le corresponden 240 folios.*

$y = 80 \cdot 2 = 160$; *a Álvaro le corresponden 160 folios.*

$z = 80 \cdot 1 = 80$; *a Carolina le corresponden 80 folios.*

45 Reparte 3 600 euros de forma directamente proporcional a:

a) 2, 3 y 4

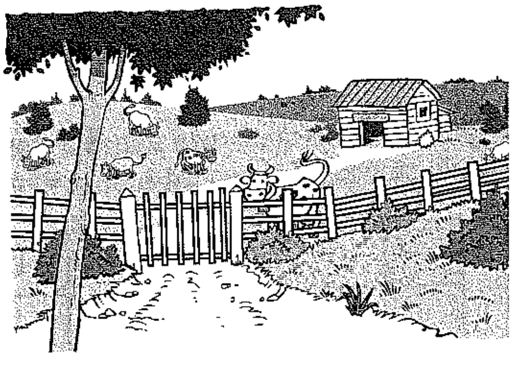
b) 2, 4, 5 y 7

46 Se va a repoblar un monte con 100 000 árboles dividido en tres parcelas de 500, 600 y 900 hectáreas. Calcula cuántos árboles se plantarán en cada parcela si se hace proporcionalmente a la superficie de cada una.

47 Luis, Andrea y Paco han creado una empresa de reciclaje de envases. Luis ha puesto 20 000 euros; Andrea, 30 000, y Paco, 50 000. Este año han obtenido unos beneficios de 400 000 euros. Calcula lc que le corresponde a cada uno si los beneficios se reparten proporcionalmente al dinero invertido.

48 Paula, Rosa y Miguel reparten folletos de propaganda en una campaña de ahorro de agua. Por el trabaj han cobrado 1 200 euros. Paula ha repartido 1 000 folletos; Rosa, 700, y Miguel, 300. Calcula cuánt dinero ha recibido cada uno si se divide de forma directamente proporcional a los folletos que h repartido cada uno.

49 Don Servando tiene una finca de 168 000 metros cuadrados que ya no trabaja. Ofrece alquilársela a 3 vecinos del pueblo para que pasten las vacas de cada uno. Decide repartir el terreno proporcionalmente al número de animales: Julián posee 33 vacas; Jacinto, 25, y Jacobo, 42. ¿Qué cantidad de terreno le corresponde a cada uno?



36

6 Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes, *a* y *b*, son **inversamente proporcionales** cuando el producto de las cantidades correspondientes es constante, *k*. Este producto se llama **constante de proporcionalidad inversa.**

$$k = a \cdot b$$

PASO A PASO

50 ***La siguiente tabla proporciona el número de horas que se precisan para hacer un trabajo según el número de operarios que lo realizan. Comprueba que son magnitudes inversamente proporcionales. Escribe la constante de proporcionalidad inversa.***

Horas	*1*	*2*	*3*	*6*
Operarios	*18*	*9*	*6*	*3*

1.º Multiplicamos las cantidades correspondientes: $1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 = 6 \cdot 3 = 18$

2.º Comprobamos que el producto es siempre 18, que es la constante de proporcionalidad inversa.

El número de horas es inversamente proporcional al número de operarios.

La constante de proporcionalidad inversa es 18.

51 Completa las siguientes tablas para que representen valores de magnitudes inversamente proporcionales. Escribe la constante de proporcionalidad en cada caso.

a)

x	2	3		6
y		24	18	

$x \cdot y =$ ....

b)

u		2	3	6
v	12		4	

$u \cdot v =$ ....

52 Completa la tabla para que represente valores de magnitudes inversamente proporcionales, de constante de proporcionalidad 144.

m		36		12
n	2		6	

53 ***Un tren que va a 120 kilómetros por hora tarda 8 horas en realizar un trayecto. ¿Qué velocidad debe llevar si quiere recorrer el trayecto en 6 horas?***

1.° Construimos un esquema con los datos del problema.

$$\begin{array}{l} 8\ h \text{ ——— } 120\ km/h \\ 6\ h \text{ ——— } x \end{array}$$

2° Hallamos la constante de proporcionalidad inversa: $6 \cdot x = 8 \cdot 120 = 960$

3° Despejamos la incógnita x: $x = \dfrac{960}{6} = 160$

El tren debería ir a 160 km/h.

54 Resuelve las siguientes reglas de tres simples inversas.

a) 4 ——— 12
6 ——— x

b) 3 ——— 50
5 ——— x

c) 14 ——— 22
4 ——— x

d) 48 ——— 36
20 ——— x

55 Para hacer el traslado de casa, María compra 180 cajas y empaqueta 12 libros en cada caja. ¿Cuántas cajas necesitaría si pudiera meter 20 libros en cada una?

56 En hacer un tramo de carretera, 18 máquinas han tardado 25 días. ¿Cuántas máquinas serían necesarias para hacer el mismo tramo de carretera en 15 días?

57 Para hacer una excursión, un centro escolar contrata 12 autobuses de 36 plazas cada uno, con lo que cubre todas las plazas. Pero la empresa les dice que también tiene autobuses de 48 plazas, y salen más baratos. ¿Cuántos de estos autobuses serían necesarios?

UN PASO MÁS

58 Cinco pintores tardaron 6 días en pintar la casa de mis padres. Si mi casa mide aproximadamente lo mismo y tardaron 3 días, ¿cuántos pintores trabajaron en ella?

59 Julián ha ido al pueblo de su madre a una velocidad de 90 kilómetros por hora y ha tardado 4 horas en llegar. Calcula cuánto tardará en el viaje de vuelta si lleva una velocidad de 60 kilómetros por hora.

60 Juana tarda 45 minutos en llenar el depósito de gasolina del camión cisterna que conduce con un surtidor que echa 30 litros por minuto. Calcula cuánto tardará en llenar un depósito igual con un surtidor que echa 25 litros por minuto.

61 En un campamento con 200 refugiados tienen alimentos para 28 días. Calcula para cuántos días tendrán alimentos si llegan 150 personas más y las raciones siguen iguales.

62 Beatriz y un grupo de amigos han ido a limpiar el monte de basura. Han recogido 1 200 kilogramos entre 45 personas y han tardado 8 horas. Calcula cuánto habrían tardado en recoger la misma cantidad de basura 60 personas.

1 Expresiones algebraicas

PARA EMPEZAR

Cuál es el lenguaje del álgebra

El **lenguaje algebraico** utiliza letras, números y signos de operaciones para expresar informaciones.

Ejemplo: Escribir en lenguaje algebraico la edad de Antonio, si sabemos que «la edad de Antonio es el doble de la edad de su hija más doce años».

Como no se conoce la edad de su hija se designa con una letra, por ejemplo, a. Entonces, la edad de Antonio en lenguaje algebraico se escribe:

$$\boxed{2 \cdot a + 12}$$

1 Escribe en lenguaje algebraico:

a) La edad de Juan, que es igual a la de su hijo más veintiocho años.

b) Un número, que es el doble de otro, n.

c) El perímetro de un triángulo equilátero de lado a centímetros.

d) El perímetro de un cuadrado.

2 Escribe en lenguaje algebraico:

a) La edad de Isabel, que es igual a la de su marido menos cuatro años.

b) El área de un rectángulo de base ocho centímetros.

c) La capacidad de una jarra, que es el triple de la de un vaso.

d) El número siguiente a otro.

38

Qué es una expresión algebraica

Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras unidos mediante las operaciones aritméticas de sumar, restar, multiplicar, dividir o elevar a una potencia.

Ejemplo: La fórmula del área de un triángulo, de base b y altura h, es una expresión algebraica: $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

El número que multiplica a una letra se llama **coeficiente** $\left(\text{como aquí } \frac{1}{2}\right)$ y las letras con sus exponentes son la **parte literal** (como aquí $b \cdot h$) de la expresión algebraica.

3 Escribe la expresión algebraica que corresponde al área de un rectángulo de base b y altura a.

RECUERDA

Es costumbre:
- No escribir el coeficiente cuando es 1, así como tampoco se escribe el exponente 1.
- No escribir el signo de multiplicar.

4 En la expresión algebraica $3mn^2$, indica:

a) ¿Cuál es el coeficiente?

b) ¿Cuál es la parte literal?

5 Escribe una expresión algebraica que tenga por coeficiente 5 y parte literal p^3q^2.

6 En una expresión algebraica que sea el doble del cuadrado de a.

a) ¿Cuál es su coeficiente?

b) ¿Cuál es su parte literal?

7 De la expresión algebraica que da el producto del área de un cuadrado de lado a por el volumen de un cubo de arista b.

a) ¿Cuál es su coeficiente?

b) ¿Cuál es su parte literal?

8 Completa la siguiente tabla:

Frase	Expresión algebraica
La diferencia de m y n	
El cuadrado del doble de c	
El triple de la suma de g y 8	
El cubo de la diferencia de v y z	

Cómo se halla el valor numérico de una expresión algebraica

El **valor numérico de una expresión algebraica** se calcula sustituyendo las letras por números y haciendo las operaciones indicadas.

Ejemplo: Para hallar el valor numérico de la expresión $7xm^2$ para $x = 5$ y $m = 3$ se sustituyen las letras por los números y se opera: $7 \cdot 5 \cdot 3^2 = 315$.

$\boxed{\text{El valor numérico es 315}}$

9 Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para $b = 3$:

a) $9b =$

b) $5b + 8 =$

c) $b^4 - 50 =$

d) $3(b^2 + 42b - 8) =$

10 Calcula el valor numérico de la expresión $5x^2 + 3x - 9$:

a) Para $x = -2$: $5 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 9 =$

b) Para $x = -1$:

c) Para $x = 0$:

d) Para $x = 3$:

11 Calcula los valores numéricos de las expresiones algebraicas para los valores de m y n que se indican:

Expresión algebraica	$m = 2$ $n = 3$	$m = -1$ $n = 4$	$m = -5$ $n = -2$
$(m + n)^2$			
$m^2 + n^2$			
$m^2 + n^2 + 2mn$			

12 Calcula los valores numéricos de las expresiones algebraicas para los valores de b y c que se indican:

Expresión algebraica	$b = 6$ $c = 4$	$b = -3$ $c = 2$	$b = -4$ $c = -5$
$(b - c)^2$			
$b^2 - c^2$			
$b^2 + c^2 - 2bc$			
$(b + c)(b - c)$			

Qué es un monomio. Cuándo dos monomios son semejantes

Una expresión algebraica en la que las letras solo están sometidas a la multiplicación y la potenciación se llama **monomio**. Dos monomios son **semejantes** si tienen las mismas letras con los mismos exponentes.

Ejemplo: Entre los siguientes monomios:

$3x^2y \qquad 8x^2 \qquad -4xy \qquad -57x^2y$

- El monomio $\boxed{3x^2y \text{ no es semejante a } 8x^2}$ porque tienen una letra distinta, tampoco es semejante a $-4xy$ porque tienen distinto un exponente.
- El monomio $\boxed{8x^2 \text{ no es semejante a } -4xy}$ porque tienen distinto un exponente y una letra.
- El monomio $\boxed{3x^2y \text{ es semejante a } -57x^2y}$ porque tienen las mismas letras con los mismos exponentes.

13 Indica, en cada caso, si son semejantes o no los siguientes monomios, y razona por qué.

a) $7a^2b$; $\quad -9a^2b$

b) $23mnp$; $\quad 45mn$

c) $-48uv^3$; $\quad 75uv^2$

d) $328c$; $\quad 409d$

14 Completa, en cada caso, los siguientes monomios para que sean semejantes:

a) $43rst$; $\quad 82st$

b) $59xyz$; $\quad -18xy^4z$

c) $4ab^3c$; $\quad 56a$

d) $-215mnp$; $\quad 497m^2n$

15 Modifica lo menos posible, en cada caso, los siguientes monomios de modo que resulten semejantes, y escribe a continuación los nuevos monomios.

a) ab^3c^5; $\quad 2a^2b^4c^3$:

b) $4m^4b^6d^2$; $\quad b^8d^5$:

c) $\frac{1}{2}x^3y^2$; $\quad x^2y^3c^4$:

d) $3ab^7$; $\quad \frac{3}{4}r^8s$:

2 Operaciones con expresiones algebraicas

PARA EMPEZAR

Cómo se suman monomios de una letra

Para **sumar** dos monomios semejantes se **suman sus coeficientes** y se pone la **misma parte literal**. Si los monomios no son semejantes, no se puede simplificar su suma, y hay que dejarla indicada.

Ejemplo: La suma de los monomios: $9a^2$; $2a^2$; $4a$ se escribe: $9a^2 + 2a^2 + 4a = \boxed{11a^2 + 4a}$

Observa que la suma del último monomio se ha dejado indicada, porque no es semejante a los anteriores.

16 Escribe el resultado de sumar, en cada caso, los siguientes monomios:

a) $3a^6 + 2a^6 =$

b) $4m^2 + 8m^2 =$

c) $7a^6 + 9a^6 =$

d) $48x^3 + 75x^3 =$

¡CUIDADO!
Antes de sumar monomios fíjate en si son semejantes.

17 Realiza las siguientes sumas, siempre que sea posible:

a) $2a + 3a + 4a =$

b) $37n^2 + 94n^2 + 68n^2 + n^2 =$

c) $3p^4 + p^4 + 21p^4 =$

d) $314z^4 + 735z =$

18 Simplifica lo más posible las siguientes sumas, sumando los monomios que sean semejantes:

a) $2a + 7a^2 + 12a =$

b) $m^5 + 4m^5 + 8m^2 =$

c) $7x^2 + 3x^3 + 8x^2 + 2x^3 =$

d) $6d^3 + 9d^2 + d^2 + 5d + 8d =$

40

Cómo se restan monomios de una letra

Para **restar** dos monomios semejantes se **restan sus coeficientes** y se pone la **misma parte literal**. Si los monomios no son semejantes no se puede simplificar su resta, y hay que dejarla indicada.

Ejemplos: Para restar los monomios $9a$ y $5a$ se escribe: $\boxed{9a - 5a = 4a}$; para restar los monomios $17b^2$ y $14b$ se escribe: $\boxed{17b^2 - 14b}$. (En este caso la operación se deja indicada porque los monomios no son semejantes.)

19 Resta, en cada caso, los siguientes monomios, siempre que sea posible:

a) $32b - 22b =$

b) $7a^3 - 4a^3 =$

c) $8n^2 - 3n^2 =$

d) $25z^4 - 17z^4 =$

¡CUIDADO!

Antes de restar monomios fíjate en si son semejantes.

20 Realiza las siguientes sumas y restas, siempre que sea posible:

a) $67a + 92a - 47a =$

b) $14m^2 - 6m^2 + 23m^2 - m^2 =$

c) $10q^4 - 7q^4 + 9q =$

d) $42y^5 - 13y^5 + y =$

21 Simplifica lo más posible las siguientes sumas y restas, sumando y restando los monomios que sean semejantes:

a) $5c + c^2 - c =$

b) $p^3 - p^3 + 9p =$

c) $29x^2 - 28x^3 - 43x^2 + 58x^3 =$

d) $39d^3 + 44d^2 + 8d^2 + d + 13d =$

PARA AVANZAR

Cómo se suman y se restan monomios

- La suma de varios monomios semejantes es otro monomio semejante. Para sumarlos **se suman sus coeficientes** y se pone **la misma parte literal**. Si los monomios no son semejantes no se puede realizar su suma, y hay que dejarla indicada.

  Ejemplo: Para sumar los monomios $8a^2b$; $4a^2b$; $2ab$, se escribe:

  $$8a^2b + 4a^2b + 2ab = \boxed{12a^2b + 2ab}$$

  Observa que la suma del último monomio se ha dejado indicada, porque no es semejante a los anteriores.

- Para **restar** dos monomios semejantes **se restan sus coeficientes** y se pone **la misma parte literal**. Si los monomios no son semejantes no se puede realizar su resta, y hay que dejarla indicada.

  Ejemplos: Para restar los monomios $12ab^2$ y $3ab^2$, se escribe: $12ab^2 - 3ab^2 = \boxed{9ab^2}$

  Para restar los monomios $7ab^2$ y $3ab$, se escribe: $\boxed{7ab^2 - 3ab}$

  Esta operación hay que dejarla indicada porque los monomios no son semejantes.

22 Suma, en cada caso, los siguientes monomios, siempre que sea posible:

a) $5ab + 32ab =$

b) $43m^2n + 87m^2n =$

c) $2ab + 5ap =$

d $37x^3yz^4 + 92x^3yz^4 =$

¡CUIDADO!
Antes de sumar o restar monomios fíjate en si son semejantes.

23 Realiza las siguientes sumas, siempre que sea posible:

a) $15ab + 73ab + 24ab =$

b) $83mn^2 + 25mn^2 + 37mn^2 + mn^2 =$

24 Resta, en cada caso, los siguientes monomios, siempre que sea posible:

a) $40ab - 30ab =$

b) $6ab - 4ap =$

c) $9mn^2 - 7mn^2 =$

d) $16x^3yz^4 - 18x^3yz^4 =$

25 Realiza las siguientes sumas y restas, siempre que sea posible:

a) $23ab + 45ab - 32ab =$

b) $12mn^2 - 41mn^2 + 36mn^2 - mn^2 =$

c) $6b^2pq^4 - 2b^2pq^4 + 9b^2pq^4 =$

d) $12x^3yz^4 - 8x^3yz + x^3yz =$

41

Cómo se multiplican monomios

El **producto de monomios** es otro monomio que tiene por coeficiente el **producto de los coeficientes** y por parte literal el producto de las **partes literales** de los factores.

Ejemplos: Para multiplicar los monomios $3a^2$ y $7a^4$, se escribe: $3a^2 \cdot 7a^4 = (3 \cdot 7) \cdot (a^2 \cdot a^4) = \boxed{21a^6}$

Para multiplicar $2a^5b^3c$ y $9a^2b$, se escribe: $2a^5b^3c \cdot 9a^2b = (2 \cdot 9) \cdot (a^5b^3c \cdot a^2b) = \boxed{18a^7b^4c}$

26 Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $4a^3 \cdot 5a^6 =$

b) $6m^5 \cdot 8m^2 =$

c) $-2p^{12} \cdot 15p^{21} =$

d) $8x^{15} \cdot (-16\,x^{32}) =$

e) $-7x^4 \cdot 5x^5 \cdot x^2 =$

f) $2a^7 \cdot 8a \cdot 6a^3 =$

g) $-m^9 \cdot 3m^2 \cdot (-m^4) =$

h) $-3p^4 \cdot (-4p) \cdot (-5p^6) =$

27 Completa las siguientes expresiones para que sean una igualdad:

a) $7a^3 \cdot \square = 14a^{10}$

b) $\square \cdot y^7 = 60y^{37}$

c) $q^4 \cdot 12\,\square = \square\, q^{13}$

d) $2m^5 \cdot 24\,\square = \square\, m^{20}$

RECUERDA

Para multiplicar potencias de la misma base, se suman los exponent y se deja la misma base.

28 Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $2a^4b^2 \cdot 4a^6b^3 =$

b) $-9m^7n^5 \cdot 8m^2n^8 =$

c) $6p^9q^3 \cdot (-3p^4q^6) =$

d) $5xy^5 \cdot x^7y^4 =$

e) $-p^2q^4 \cdot (-7pq^3) \cdot p^5q =$

f) $8x^5y^2 \cdot (-xy^3) \cdot (-4x^2y^6) =$

29 Completa las siguientes expresiones para que sean una igualdad:

a) $3a^2 \cdot 5a^{\square} = 15a^9$

b) $9m^7n^{\square} \cdot 8m^{\square}n^8 = \square\, m^{12}n^{11}$

c) $6p^{\square}q^3 \cdot 3p^4q^{\square} = \square\, p^{16}q^{18}$

d) $5x^{\square}y^{\square} \cdot \square\, x^7y^4 = 60x^{28}y^{37}$

3 Resolución de ecuaciones

PARA EMPEZAR

Qué es una ecuación de primer grado con una incógnita

Una **ecuación** es una igualdad que contiene números, letras y operaciones. Las letras se llaman **incógnitas**.
Una ecuación de **primer grado con una incógnita,** es una ecuación que solo tiene una letra con exponente 1. La letra que más se utiliza es la ***x***, pero puede ser cualquier otra.

Ejemplo: La igualdad $\boxed{x + 4 = 7 \text{ es una ecuación de primer grado con una incógnita}}$.

30 Observa las igualdades y decide cuáles son ecuaciones:

a) $7 \cdot 4 + 6 = 34$

b) $14 - 2 \cdot b = 8$

c) $3 \cdot x + 5 = x - 5$

d) $2 + 3 \cdot 8 = 5 \cdot 4 + 6$

31 De las siguientes ecuaciones, indica cuáles tienen una sola incógnita y son de primer grado.

a) $5 \cdot m + 1 - m + 7 = 8 \cdot m - 3$

b) $6 \cdot r - 3 + 4 \cdot r = 2r + 15$

c) $7 \cdot t^2 + 2 - t = 14$

d) $y^3 - 7 + y = 23 - y$

32 Dados los números 1, -1, 2, -2, comprueba cuál de ellos, al sustituirlo en lugar de la x en la expresión: $4 \cdot x + 13 = 5$ hace que se cumpla la igualdad, es decir, produce el mismo resultado en los dos miembros.

33 Averigua si al sustituir la letra por el número 5, en las siguientes ecuaciones, da el mismo resultado en los dos miembros:

a) $m + 9 = 11$

b) $28 - 3 \cdot n = 18$

c) $p + 6 = 3 \cdot p - 4$

d) $2 \cdot x - 9 = 4 + x$

42

Qué es una solución de una ecuación

Una **solución de una ecuación** es el **número** que, sustituido en lugar de la incógnita, da el mismo resultado en los dos miembros de la ecuación. Las ecuaciones que tienen la misma solución se llaman **equivalentes.**

Ejemplo: La solución de la ecuación $5x - 2 = 10 - x$ es 2 porque, sustituyendo, queda:

Primer miembro: $5 \cdot 2 - 2 = 8$

Segundo miembro: $10 - 2 = 8$

El resultado es 8 en los dos miembros, así que $\boxed{\text{el número 2 es solución de la ecuación}}$.

La ecuación $x - 1 = 1$ cuya solución es $x = 2$ es equivalente a la anterior.

34 Completa la tabla:

Ecuación	Valor de x	Primer miembro	Segundo miembro	¿Son iguales?	¿Es solución?
$5x = 35$	7				
$3x - 1 = 6x - 4$	2				
$8 + 3x = 5 + 4x$	-3				

35 Averigua si 3 es solución de las ecuaciones:

a) $6t + 2 = 7t - 1$

b) $43 - 3m = 34$

c) $2r + 8 = 3r - 4$

d) $4x - 11 = x - 2$

36 Para los siguientes valores de x:

a) Averigua cuál es solución de cada ecuación.

Ecuación	-4	8
$\frac{1}{2}x + 5 = 3x - 15$		
$7 + 4x = -11 - 5x$		
$6x + 12 = -\frac{3}{2}x - 18$		
$\frac{5}{2} - \frac{7}{2}x = 5x + 8$		

b) ¿Cuáles de estas ecuaciones son equivalentes?

Cómo se resuelve una ecuación

Resolver una ecuación es hallar su solución. Para ello:

1.° Los números o letras que están **sumando** en un miembro se **pasan** al otro **restando** y los que están **restando** se **pasan sumando**.

Ejemplos: a) $x + 2 = 7 \Rightarrow x = 7 - 2 = \boxed{5}$ b) $x - 5 = 10 \Rightarrow x = 10 + 5 = \boxed{15}$

2.° Los números o letras que están **multiplicando** en un miembro se **pasan** al otro **dividendo** y los que están **dividiendo** se **pasan multiplicando.**

Ejemplos: a) $3x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{3} = \boxed{8}$ b) $\frac{x}{2} = 5 \Rightarrow x = 5 \cdot 2 = \boxed{10}$

37 Resuelve las ecuaciones:

a) $6x = 48 \Rightarrow x =$

b) $\frac{x}{4} = 6$

c) $-9x = 72$

d) $x - 3 = 20$

e) $5x = -100$

f) $\frac{x}{5} = -4$

g) $\frac{x}{-8} = 12$

h) $x + 8 = -12$

i) $5x + 4 = 34$

j) $7x - 8 = 6$

Ejercicio resuelto

Resuelve la ecuación: $6x + 3 = 2x + 15$

Primero se agrupan todos los sumandos con x y los números: $6x - 2x = 15 - 3$; se opera en cada miembro: $4x = 12$; y se pasa al segundo miembro el coeficiente de x: $x = \frac{12}{4} = 3$.

La solución es $\boxed{x = 3}$

38 Resuelve las ecuaciones:

a) $3x + 22 = 7x + 2$

b) $8x - 15 = 33 + 6x$

c) $25 - 12x = 4x - 23$

d) $10x + 4 = 28 - 2x$

Cómo se resuelven ecuaciones con un paréntesis

Para resolver una ecuación con paréntesis:

1.º Se **desarrollan** los **paréntesis.**

2.º Se **resuelve** la ecuación que resulta.

$7 - 20x = 6x - 3(4x + 7)$

$7 - 20x = 6x - 3 \cdot 4x - 3 \cdot 7$

$7 - 20x = 6x - 12x - 21$

$-20x - 6x + 12x = -21 - 7$

$-14x = -28$

$x = \dfrac{-28}{-14} = 2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

39 Resuelve las ecuaciones:

a) $5(2x - 6) = 4x$

b) $-13x = 4(x - 17)$

c) $4(2x + 1) = -4x + 40$

d) $12x + 2(1 - 7x) = 0$

e) $9x + 94 = 7(2 + 7x)$

f) $4x + 1 = 3(2 - 3x) + 8$

40 Resuelve las ecuaciones:

a) $7x = 1 - (3x + 21)$

b) $6x - (45 - 9x) = 0$

c) $3x - 1 + x = 3(1 - x) + 10$

d) $-8x + 7 = -11(2x - 7)$

¡CUIDADO!

Si hay un signo menos delante del paréntesis, hay que cambiar de signo todos los sumandos.

Cómo se resuelven ecuaciones con varios paréntesis

Si hay varios paréntesis en la ecuación:

1.° Se **desarrollan** los **paréntesis**, cada uno por separado.

2.° Se **resuelve** la ecuación que resulta.

$9(2x + 3) = 3(7x - 8)$

$9 \cdot 2x + 9 \cdot 3 = 3 \cdot 7x - 3 \cdot 8$

$18x + 27 = 21x - 24$

$18x - 21x = -24 - 27$

$-3x = -51$

$x = \dfrac{-51}{-3} = 17 \Rightarrow \boxed{x = 17}$

41 Resuelve las ecuaciones:

a) $4(x + 8) + 3(6 - 3x) = 0$

b) $6(12 - 5x) - 2(3x + 2) + 2x = 0$

c) $3(4 - x) - (5x + 1) + 6x = 0$

d) $3 + 6(x - 2) = 5x - 4(2x + 7) + 1$

e) $1 - 4(5x - 1) = 6 + 7(12 - 10x)$

f) $9 + 2(3x - 1) = 8x - (4x + 9) + 2$

42 Resuelve las ecuaciones:

a) $-3(4x + 5) + 10 = 4(3x - 6) - 5$

b) $3(2x - 4) = 4 - 3(5x - 2)$

c) $8x - 2 + 3(6x - 2) = 2(6x + 3,5) - x$

d) $-4 + 8(5x + 3) = 11(2x - 8) + 18$

44

Cómo se resuelven ecuaciones con denominadores

Una ecuación con denominadores **se resuelve quitando** primero los **denominadores**. Para ello, se realiza el siguiente proceso:

$$\frac{3x}{4} + \frac{x}{3} = \frac{x}{6} + 22$$

1.° Se calcula el **m.c.m.** de los denominadores. m.c.m.(4, 3, 6) = 12

2.° Se **multiplica** la ecuación por el m.c.m. $\frac{12 \cdot 3x}{4} + \frac{12x}{3} = \frac{12x}{6} + 12 \cdot 22$

3.° Se **simplifica** y se hacen las operaciones. $9x + 4x = 2x + 264$

4.° Se **resuelve** la ecuación que resulta. $9x + 4x - 2x = 264 \Rightarrow 11x = 264$

$$x = \frac{264}{11} = 24 \Rightarrow \boxed{x = 24}$$

43 Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{3x}{3} = \frac{x}{4} + 5$

b) $\frac{3x - 5}{4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

Ejercicio resuelto

Resuelve la ecuación $\frac{x+3}{6} - \frac{5+x}{2} = \frac{3x+4}{12}$

Primero se calcula el m.c.m. de los denominadores, que es m.c.m.(6, 2, 12) = 12. Se multiplica la ecuación por 12:

$\frac{12(x+3)}{6} - \frac{12(5+x)}{2} = \frac{12(3x+4)}{12}$ y se simplifica.

Por último, se resuelve la ecuación que resulta:

$$2(x+3) - 6(5+x) = 3x + 4$$

$$2x + 6 - 30 - 6x = 3x + 4$$

$$-4x - 24 = 3x + 4 \Rightarrow -7x = 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{28}{-7} = -4 \Rightarrow \boxed{x = -4}$$

44 Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{10x + 8}{10} - \frac{x+5}{2} = \frac{x+6}{5}$

b) $\frac{x-1}{10} - \frac{2-x}{6} = \frac{x-6}{15}$

4 Resolución de problemas con ecuaciones

PARA EMPEZAR

Cómo se traduce una relación a una ecuación y se resuelve el problema

Para traducir una relación a una ecuación, se busca la **incógnita** en el problema y se le imponen las **condiciones** del enunciado.

Un número aumentado en 31 unidades da 78. ¿Qué número es?

1.° ¿Qué te piden?	Un número: x
2.° ¿Qué se hace con lo que te piden?	Aumentarlo en 31: $x + 31$
3.° Se busca una **igualdad** en el enunciado.	Da 78: $x + 31 = 78$
4.° Se **resuelve** la **ecuación**.	$x = 78 - 31 = 47$
5.° Se escribe la **solución** del problema.	El número es 47

45 Un número aumentado en 256 da 932. ¿Qué número es?

1.° ¿Qué te piden? Un número x.

2.° ¿Qué se hace con lo que te piden?

3.° Busca una igualdad en el enunciado.

4.° Resuelve la ecuación.

5.° Escribe la solución del problema.

46 Un número disminuido en 87 unidades da 436. ¿Qué número es?

47 La mitad de la edad de una persona es 23. ¿Cuántos años tiene esa persona?

48 El doble del dinero que tiene Alicia es 86 euros. ¿Cuánto dinero tiene?

45

Ejercicio resuelto

La mitad de la edad de una persona incrementada en 5 años es igual a la edad de la persona. Determina dicha edad.

A la edad se la llama x. Se calcula su mitad y se le añade 5 años: $\frac{x}{2} + 5$

De acuerdo con el enunciado se escribe la ecuación: $\frac{x}{2} + 5 = x$, que se resuelve de este modo:

$$x + 10 = 2x; \quad 2x - x = 10 \Rightarrow x = 10$$

$\boxed{\text{La edad de la persona es 10 años}}$

49 Un número incrementado con su doble resulta igual a su mitad incrementada en 20 unidades. Determina el número.

50 El número de alumnos de un aula incrementado en 30 unidades es igual al triple de los alumnos del aula. Calcula cuántos alumnos son.

51 ¿Qué edad tiene una persona si al sumar 12 años a la que tiene actualmente se obtiene el doble de la que tiene?

PARA AVANZAR

Cómo se resuelven problemas con ecuaciones

Alberto ha pagado 7 euros por 5 refrescos y 3 bocadillos. Cada bocadillo vale un euro más que un refresco. ¿Cuánto vale cada refresco y cada bocadillo?

1.° Se **identifica** y da nombre a las cantidades que se piden.	Precio del refresco: x Precio del bocadillo: $x + 1$
2.° Se **escribe** las **cantidades** que intervienen.	Ha gastado en refrescos: $5x$ Ha gastado en bocadillos: $3(x + 1)$
3.° Se **busca** en el enunciado una relación entre las cantidades y se escribe una **ecuación**.	Ha pagado 7 euros. Ecuación: $5x + 3(x + 1) = 7$
4.° Se **resuelve** la ecuación.	$5x + 3x + 3 = 7;\quad 8x = 4 \Rightarrow x = 0,5$
5.° Se **escribe** la **solución** del problema.	Cada refresco vale 0,50 €. Cada bocadillo vale 1,50 €.

52 Halla un número tal que si lo multiplicas por 5 resulta el triple que si le sumas 12.

1.° Identifica y da nombre a las cantidades que te piden.	Un número: x
2.° Escribe las cantidades que intervienen.	Se multiplica por 5: Se le suma 12:
3.° Busca en el enunciado una relación entre las cantidades y escribe una ecuación.	El primero es el triple que el segundo. Ecuación:
4.° Resuelve la ecuación.	
5.° Escribe la solución del problema.	

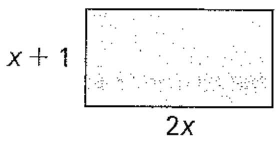
53 Dos hermanos se llevan tres años. Entre los dos tienen 33 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

54 ¿Cuántos años tiene Jorge si el triple de su edad aumentado en 7 años es 43?

55 Ana tiene un libro que va a terminar en 20 días, leyendo diariamente el mismo número de páginas. Si leyera dos páginas más cada día tardaría en leerlo 8 días menos. ¿Cuántas páginas lee cada día?

56 Un coche hace un viaje de 1100 kilómetros en dos tramos, de forma que el segundo mide 50 kilómetros más que el otro. ¿Cuánto recorrió en el primer tramo?

57 ¿Cuánto miden los lados de este rectángulo si su perímetro es 26 centímetros?



58 Andrés tiene 55 años y su hijo 20 años. ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la edad del padre sea doble de la del hijo?

59 Averigua qué número si le sumas 9 resulta el doble que si le restas 3.

5 Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

PARA EMPEZAR

Qué es una ecuación de segundo grado con una incógnita

Una ecuación con una incógnita es de **segundo grado** si el **mayor exponente** con que figura la incógnita es **2**.

Ejemplos: Entre las siguientes ecuaciones,

a) $3x + 7 = 8x - 4$

b) $5t^2 - 2t + 7 = 9t - 1$

c) $6 - 5x = 8 + 3x^2$

d) $5 + 4m - 1 = 12\,m + 5$

son de segundo grado las ecuaciones *b* y *c* porque la *t* y la *x* figuran con exponente 2, mientras que las incógnitas de las otras ecuaciones figuran con exponente 1.

60 Indica cuáles de las siguientes ecuaciones son de segundo grado:

a) $4x + 6 = 2x - 1$

b) $7m - 4 + m = 0$

c) $n^2 + 2 - 5n = 2n - 8$

d) $9a - 5a + 2 = 4 + 6a^2$

e) $2b - 3 + 4b = 14b + 6$

f) $8x - 9x^2 = 0$

g) $y^2 = 0$

h) $z^2 - 25 = 0$

61 Comprueba cuál de los siguientes números, al sustituirlo en lugar de la letra, da el mismo resultado en los dos miembros:

Ecuación	1	−1	3	−3
$x^2 + 2x = 3 + 4x$	$1^2 + 2 \cdot 1 = 3 + 4 \cdot 1$ $3 \neq 7$			

62 Averigua si al sustituir la incógnita por el número 2, en las siguientes ecuaciones, da el mismo resultado en los dos miembros:

a) $m^2 + 9 = 13$

b) $27 - 3n^2 = 7n$

c) $2p^2 + 4 = 5p + 2$

d) $7x^2 - 14x = 0$

Qué es una solución de una ecuación de segundo grado

Una **solución** de una ecuación de segundo grado es un número que sustituido en lugar de la incógnita da el mismo resultado en los dos miembros de la ecuación.

Ejemplo: Las soluciones de la ecuación $x^2 + 2 = 4 - x$ son 1 y -2, porque, sustituyendo, queda:

Para $x = 1$: Primer miembro: $1 + 2 = 3$ Segundo miembro: $4 - 1 = 3$

Sustituyendo 1, da 3 en los dos miembros, por tanto $\boxed{\text{1 es solución de la ecuación.}}$

Para $x = -2$: Primer miembro: $4 + 2 = 6$ Segundo miembro: $4 + 2 = 6$

Sustituyendo -2, da 6 en los dos miembros, por tanto $\boxed{\text{−2 es solución de la ecuación.}}$

Una ecuación de segundo grado **puede tener hasta dos soluciones distintas.**

63 Completa la tabla:

Ecuación	Valor de x	Primer miembro	Segundo miembro	¿Son iguales?	¿Es solución?
$5x^2 = 20$	7				
$x^2 = 2x$	2				
$x^2 = 2x - 3$	-3				

64 Averigua si -1 es solución de las ecuaciones:

a) $t^2 + 5 = 4t - 2$

b) $43 - 3m = 34 + 12m^2$

c) $7r + 7 = 5r^2 - 4r + 1$

d) $2x^2 + 9 = 8x - 3$

65 Averigua si los siguientes valores de x son o no soluciones de cada ecuación:

Ecuación	-4	8
$2x^2 + 8x = x + 4$		
$x^2 - 8x = 32 - 4x$		
$\frac{3}{2}x^2 - 3x = 4 - \frac{1}{2}x$		

Ecuaciones de segundo grado completas e incompletas

Cualquier **ecuación de segundo grado**, si pasamos todos sus términos al primer miembro, se puede escribir en la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Los números ***a***, ***b***, ***c*** se llaman **coeficientes** de la ecuación.

Ejemplo: Si en la ecuación de segundo grado: $3x^2 - 5x = 2 - 7x + 5 - 2x^2$, pasamos todos los términos al primer miembro: $3x^2 - 5x - 2 + 7x - 5 + 2x^2 = 0$, y operamos, se obtiene la ecuación $\boxed{5x^2 + 2x - 7 = 0}$, de coeficientes: $\boxed{a = 5,\ b = 2 \text{ y } c = -7}$.

- Los coeficientes ***b*** y ***c*** pueden ser cero, pero el coeficiente ***a*** no. Las ecuaciones de la siguiente tabla, donde los coeficientes ***b*** o ***c*** o ambos son cero, se llaman **incompletas**. Sus formas son:

$b = 0$	$c = 0$	$b = c = 0$
$ax^2 + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 = 0$

- Si ningún coeficiente es cero, las ecuaciones son **completas**, como la del ejemplo.

66 Indica cuánto valen los coeficientes de las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 + 4x - 12 = 0$, $a =$ $b =$ $c =$

b) $x^2 - 8x - 15 = 0$, $a =$ $b =$ $c =$

c) $x^2 + x + 1 = 0$, $a =$ $b =$ $c =$

67 Indica cuánto valen los coeficientes de las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 + 2 = 0$, $a =$ $b =$ $c =$

b) $x^2 + 15x = 0$, $a =$ $b =$ $c =$

c) $x^2 - 6x = 0$, $a =$ $b =$ $c =$

d) $8x^2 + 2x = 2x + 1 - x^2$, $a =$ $b =$ $c =$

e) $4x^2 + 8x - 7 = 3x - 7 + x^2$, $a =$ $b =$ $c =$

48

Ejercicio resuelto

Indica el valor de los coeficientes a, b y c en las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2 - 3x = x^2 - x - 2x + 5$ b) $-5x^2 + x - 2 = 4x - 5$

a) Se pasan todos los términos al primer miembro y se simplifica:

$4x^2 - 3x - x^2 + x + 2x - 5 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5 = 0$

Sus coeficientes son: $\boxed{a = 3,\ b = 0,\ c = -5}$. Es una ecuación de segundo grado incompleta.

b) De forma análoga:

$-5x^2 + x - 2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow -5x^2 - 3x + 3 = 0$

Sus coeficientes son: $\boxed{a = -5,\ b = -3,\ c = 3}$. Es una ecuación de segundo grado completa.

68 De las siguientes ecuaciones, indica cuáles son completas y cuáles son incompletas.

a) $5x^2 + 2x = 1 - 6x + 9 - 3x^2$

b) $7x^2 - 9x = 3x - 4x^2$

c) $x^2 + 2x - 8 = 2x - 3 - 9x^2$

69 Indica cuáles de las siguientes ecuaciones son de segundo grado y calcula los coeficientes a, b y c.

a) $\frac{1}{3}x^2 - 5x + \frac{1}{2}x^2 = 4 + \frac{5}{6}x^2$

b) $20 + 4x + 15x^2 = \frac{20}{2}x^2 + 5x^2 - 2$

c) $t + t^2 = t^2 - 1$

d) $2x - \frac{1}{5} = x^2 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{5}$

70 ¿Por qué una ecuación de segundo grado no puede tener el coeficiente $a = 0$?

Cómo se resuelven ecuaciones de segundo grado incompletas

La **forma de resolución** depende del tipo de ecuación incompleta.

- $ax^2 = 0$**:** Se despeja la incógnita. La solución siempre es $x = 0$.

  Ejemplo: $5x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

- $ax^2 + c = 0$**:** Se despeja la incógnita.

  Ejemplo: $2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = \frac{50}{2} = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5 \Rightarrow \boxed{x = 5,\ x = -5}$

- $ax^2 + bx = 0$**:** Se saca factor común a x y se igualan los factores resultantes a cero. Una solución es siempre $x = 0$.

  Ejemplo: $4x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(4x - 8) = 0$

  $\boxed{x = 0}$

  $4x - 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{4} \Rightarrow \boxed{x = 2}$

71 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 - 27 = 0;\quad 3x^2 = 27$

$x^2 =$

b) $7x^2 = 0$

c) $-6x^2 + 24 = 0$

d) $\frac{1}{2}x^2 = 0$

e) $5x^2 + 10x = 0$

f) $-11x^2 = 0$

g) $-2x^2 + 72x = 0$

h) $312x^2 = 0$

i) $\frac{1}{3}x^2 + x = 0$

j) $\frac{2}{3}x^2 = 0$

k) $4x^2 - 16 = 0$

l) $5x^2 = 2x$

72 Resuelve las siguientes ecuaciones, después de simplificarlas, operando lo más posible:

a) $x^2 + 3x + 1 = 2x + 50 + x$

b) $x(x - 6) + 3x - 1 = 2 + 4x - 3$

c) $3x^2 + 5 + x^2 = 2 - 3x + 3$

d) $x^2 - x + 2 = 6 - 2x + x$

e) $x(x - 8) - 3 + 4x = 2 + x - 5$

f) $2x^2 - 70 - x(x - 2) = x + x + 11$

g) $2x(x - 1) + 7 = 3 + x^2 + 4x + 4$

Cómo se resuelven ecuaciones de segundo grado completas

La ecuación de segundo grado **completa** es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se resuelve mediante la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo: Para resolver la ecuación $3x^2 - 9x + 6 = 0$, se identifican los coeficientes: $a = 3$, $b = -9$, $c = 6$.

y se aplica la fórmula: $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{6} = \dfrac{9 \pm 3}{6}$

Con el signo +: $\dfrac{9+3}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$

Con el signo −: $\dfrac{9-3}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$

Soluciones $\boxed{x = 1, x = 2}$

73 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$; $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$

$x =$

b) $x^2 - 7x + 12 = 0$

c) $x^2 - 3x + 2 = 0$

d) $x^2 - x - 12 = 0$

e) $x^2 - 6x + 5 = 0$

74 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $x^2 + 4x + 3 = 0$

c) $x^2 + 3x + 2 = 0$

d) $x^2 - 4x + 3 = 0$

e) $x^2 + x - 30 = 0$

75 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + x - 6 = 0$

b) $2x^2 + x - 1 = 0$

c) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

d) $8x^2 + 14x + 3 = 0$

6 Resolución de problemas con ecuaciones de segundo grado

PARA EMPEZAR

Cómo se resuelve un problema con una ecuación de segundo grado incompleta

El doble del cuadrado de un número distinto de cero es igual a seis veces el número. ¿Qué número es?

1.º Se **identifica y da nombre** a lo que se pide.
Un número: x

2.º Se **escriben** las cantidades que intervienen.
El doble del cuadrado: $2x^2$
Seis veces el número: $6x$

3.º Se **busca en el enunciado** una relación entre las cantidades y escribe una ecuación.
Las cantidades son iguales.
Ecuación: $2x^2 = 6x$

4.º Se **resuelve** la ecuación.
$2x^2 = 6x \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0$

$$x(2x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 6 = 0;\ x = 3 \end{cases}$$

5.º Se **escribe** la solución del problema.
El número es 3, ya que tiene que ser distinto de cero.

76 Quince veces un número distinto de cero es igual al triple de su cuadrado. ¿Qué número es?

1.º Identifica y da nombre a lo que te piden:

2.º Escribe las cantidades que intervienen:

3.º Busca en el enunciado una relación entre las cantidades y escribe una ecuación:

4.º Resuelve la ecuación:

5.º Escribe la solución del problema:

77 Un rectángulo tiene un lado doble del otro, y su área es 50 centímetros cuadrados. Halla la longitud de los lados del rectángulo.

51

78 Halla un número distinto de cero tal que la diferencia entre su cuadrado y su doble es igual a cinco veces el número.

79 De la hermana de Juan sabemos que si restamos su edad al cuadrado de su edad da su propia edad. ¿Cuántos años tiene la hermana de Juan?

80 Halla un número distinto de cero si sabes que la diferencia entre su cuadrado y su triple es cero.

81 ¿Cuántos euros tiene Rosana si restando 192 al doble del cuadrado de la cantidad de sus euros da 200?

82 ¿Qué número positivo multiplicado por su tercera parte da 48?

83 Un salón de forma rectangular tiene una pared de longitud cuádruple que otra. ¿Cuánto miden sus paredes, si su área es de 256 metros cuadrados?

PARA AVANZAR

Cómo se resuelve un problema con una ecuación de segundo grado completa

El producto de dos números consecutivos es 132. ¿Qué números son?

1.° Se **identifica y da** nombre a lo que se pide. — Dos números consecutivos: x y $x + 1$

2.° Se **escriben** las cantidades que intervienen. — El producto de los dos números: $x(x + 1)$
132

3.° Se **busca en el enunciado** una relación entre las cantidades y se escribe una ecuación. — Las cantidades son iguales.
Ecuación: $x(x + 1) = 132$

4.° Se **resuelve** la ecuación. — $x(x + 1) = 132 \Rightarrow x^2 + x - 132 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1\,(-132)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-1 \pm 23}{2} = \begin{cases} 11 \\ -12 \end{cases}$$

5.° Se **escribe** la solución del problema. — $\boxed{\text{Hay dos soluciones. Los números pueden ser: } 11 \text{ y } 12;\ -11 \text{ y } -12}$

84 El producto de dos números que se diferencian en tres unidades es 54. ¿Qué números son?

1.° Identifica y da nombre a lo que te piden: dos números, x y $x + 3$.

2.° Escribe las cantidades que intervienen:

3.° Busca en el enunciado una relación entre las cantidades y escribe una ecuación:

4.° Resuelve la ecuación:

5.° Escribe la solución del problema:

85 Halla dos números consecutivos cuya diferencia de cuadrados sea 15.

52

86 Un rectángulo tiene un lado tres unidades mayor que el otro, y su área es de 180 centímetros cuadrados. Halla la longitud de los lados del rectángulo.

87 Halla un número tal que la diferencia entre su cuadrado y su doble sea igual a 99.

88 La edad de Pedro sumada al doble de su cuadrado da 1 596. ¿Cuántos años tiene Pedro?

89 Halla un número del que sabes que la diferencia entre su cuadrado y su triple es 28.

90 ¿Cuántos euros tiene Eva si sumándolos al doble del cuadrado de su cantidad da un total de 500 500 euros?

91 ¿Qué número positivo multiplicado por su mitad da 144 unidades más que el propio número?

7 Ecuaciones con dos incógnitas

PARA EMPEZAR

Qué es una ecuación con dos incógnitas

Una **ecuación con dos incógnitas** es una ecuación de la forma:

$$ax + by = c$$

donde ***a***, ***b*** y ***c*** son números, mientras que ***x*** e ***y*** representan cantidades desconocidas.

Ejemplo: Unos amigos, por 3 bocadillos y 5 refrescos, han pagado 15 euros. Para saber cuánto ha costado cada bocadillo y cada refresco, se llama x al precio de un bocadillo, e y al precio de un refresco.

Se plantea la ecuación: $3x + 5y = 15$ y se despeja una incógnita como si la otra fuera un número:

$$y = \frac{15 - 3x}{5}$$

A continuación se realiza una tabla dando valores a x, obteniendo los correspondientes de y:

x	0	1	2	3	4	5	...
y	3	2,40	1,80	1,20	0,6	0	...

Cada **par de números** correspondientes de esta tabla es una **solución** de la ecuación.

Se trata de una ecuación con dos incógnitas, y tiene **infinitas soluciones**.

92 Escribe la ecuación correspondiente al siguiente enunciado: «Entre perros y palomas cuento 66 patas».

93 Calcula el valor de a para que el par de números $x = 2$, $y = 5$ sea solución de la ecuación $ax + 3y = 25$.

Sustituimos en la ecuación x e y por 2 y 5, respectivamente: $a \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 25$

Resolvemos esta ecuación, despejando a:

94 Calcula el valor de a para que el par de números $x = 4$, $y = 2$ sea solución de la ecuación $ax - 7y = 26$.

53

95 La suma de las edades de dos hermanas es 27 años.

a) Escribe la ecuación correspondiente.

Edad de una hermana: x

Edad de otra hermana: y

Ecuación:

b) Completa la tabla:

x	1	3	7		
y				16	12

96 Tres pantalones y dos camisetas cuestan 100 euros.

a) Escribe la ecuación correspondiente.

b) ¿Puede ser solución que cada pantalón cueste 25 euros y cada camiseta cueste 15 euros?

97 La diferencia de precios de 4 kilogramos de manzanas y 3 kilogramos de fresas es de 2 euros.

a) Escribe la ecuación correspondiente.

b) Completa la tabla:

x	2		8		
y		6		11	14

98 Entre mis dos abuelos suman 135 años.

a) Escribe la ecuación correspondiente.

b) ¿Puede ser que tenga 68 años mi abuelo y 65 mi abuela?

99 El cuádruple de un número menos el triple de otro da 40.

a) Escribe la ecuación correspondiente.

b) Completa la tabla:

x		7	4		
y	2			−16	4

100 El perímetro de cierto campo de fútbol es de 348 metros.

a) Escribe la ecuación correspondiente.

b) Completa la tabla:

x		114			99
y	50		65	70	

PARA AVANZAR

Qué es un sistema de ecuaciones con dos incógnitas

Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas forman un sistema de ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones se escribe así:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$$

Los números ***a, b, m, n,*** se llaman **coeficientes** del sistema, y los números ***c*** y ***p*** se llaman **términos independientes.**

Ejemplo: En el sistema $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 5x - 7y = 12 \end{cases}$

los coeficientes son: 4, 1, 5, −7; y los términos independientes son: 3 y 12.

Si hay algún par de números, x e y, que sea solución a la vez de las dos ecuaciones del sistema, a ese par de números se le llama **solución** del sistema.

Ejemplo: En el sistema anterior, la solución es $\boxed{x = 1,\ y = -1}$. Se comprueba sustituyendo:

$$4 \cdot 1 + (-1) = 4 - 1 = 3$$

$$5 \cdot 1 - 7 \cdot (-1) = 5 + 7 = 12$$

101 En los siguientes sistemas, indica cuáles son los coeficientes y cuáles los términos independientes.

a) $\begin{cases} 48x + 32y = 21 \\ 17x - 11y = 35 \end{cases}$ Coeficientes:

Términos independientes:

b) $\begin{cases} 4x - 63y = 78 \\ x + 27y = 94 \end{cases}$ Coeficientes:

Términos independientes:

c) $\begin{cases} 58x - y = 83 \\ 69x = 40y \end{cases}$ Coeficientes:

Términos independientes:

102 Comprueba cuál de los siguientes pares de valores es solución del sistema $\begin{cases} 6x + 8y = 12 \\ x - 3y = -11 \end{cases}$

a) $x = 2$
$y = -3$

b) $x = -2$
$y = 3$

103 El par de valores $x = 5$, $y = -4$, son la solución del sistema $\begin{cases} ax + 2y = 7 \\ 2x + by = -6 \end{cases}$

Halla a y b.

Cómo se plantea un problema mediante un sistema de ecuaciones

Cinco camisas y tres pantalones cuestan 114 euros. Dos camisas y cuatro pantalones cuestan 96 euros. ¿Cuánto cuesta cada camisa y cada pantalón?

1.° Se **identifica** y da nombre a lo que se pide.

Precio de una camisa: x
Precio de un pantalón: y

2.° Se **escriben** las cantidades que intervienen.

Cinco camisas y tres pantalones: $5x + 3y$
Dos camisas y cuatro pantalones: $2x + 4y$

3.° Se **busca** en el enunciado una relación entre las cantidades y se escribe un sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{l} \text{Cuestan } 114\ € \Rightarrow \\ \text{Cuestan } 96\ € \Rightarrow \end{array} \left\{ \boxed{\begin{array}{l} 5x + 3y = 114 \\ 2x + 4y = 96 \end{array}} \right.$$

104 Ocho entradas de cine y 5 envases de palomitas cuestan 45 euros, mientras que 6 entradas y 9 envases de palomitas cuestan 39 euros. Plantea el sistema de ecuaciones.

105 Entre mujeres y hombres, en una fiesta, suman 37, y la diferencia entre el número de mujeres y el número de hombres es 3. Plantea el sistema de ecuaciones.

106 El perímetro de un campo de fútbol mide 300 metros, siendo la diferencia entre el largo y el ancho de 30 metros. Plantea el sistema de ecuaciones.

107 Una botella y un corcho cuestan 1 euro con 10 céntimos. La botella cuesta un euro más que el corcho. Plantea el sistema de ecuaciones.

Cuándo dos sistemas de ecuaciones son equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones **son equivalentes** si tienen **las mismas soluciones.**

Ejemplo: El par de números $x = 3$, $y = 5$ es solución de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$

Sustituyendo esos valores, se ve que se cumplen las ecuaciones:

a) $3 + 5 = 8$
$2 \cdot 3 - 5 = 1$

b) $4 \cdot 3 - 5 = 7$
$2 \cdot 3 + 5 = 11$

Se trata de dos sistemas equivalentes.

115 Resuelve mediante tablas los siguientes sistemas de ecuaciones, e indica cuáles son equivalentes.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 12y = 39 \\ x + y = 5 \end{cases}$

116 Resuelve mediante una tabla el sistema $\begin{cases} 8x + 3y = 17 \\ 9x - y = 6 \end{cases}$ y, después, calcula los valores de a y b para que sea equivalente al siguiente sistema: $\begin{cases} 5x + ay = 8 \\ bx + 2y = 1 \end{cases}$

55

117 Calcula m y n para que los siguientes sistemas sean equivalentes:

a) $\begin{cases} 2x = 8 \\ 3y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + my = -3 \\ nx + my = 1 \end{cases}$

118 Resuelve mediante tablas los siguientes sistemas de ecuaciones, e indica cuáles son equivalentes.

a) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 8x + 21y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 14 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x - y = 33 \\ 5x + 2y = 18 \end{cases}$

119 Resuelve mediante tablas el sistema $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ 4x + 3y = 23 \end{cases}$ y, después, calcula los valores de a y b para que sea equivalente al sistema: $\begin{cases} ax + y = 19 \\ 3x + by = -6 \end{cases}$

120 Calcula p y q para que los siguientes sistemas sean equivalentes:

a) $\begin{cases} x + 8 = 14 \\ 12 + y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} px + 15y = 14 \\ 3x + qy = 2 \end{cases}$

PARA AVANZAR

Cómo se resuelve un sistema por sustitución

Para resolver un sistema por sustitución: $\begin{cases} 7x + y = 10 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases}$

1.° Se **despeja** una incógnita en una ecuación: $\left.\begin{aligned} y &= 10 - 7x \\ 3x - 2y &= 14 \end{aligned}\right\}$

2.° Se **sustituye** en la otra ecuación: $\left.\begin{aligned} y &= 10 - 7x \\ 3x - 2(10 - 7x) &= 14 \end{aligned}\right\}$

3.° Se **resuelve** la ecuación que resulta: $\left.\begin{aligned} y &= 10 - 7x \\ 3x - 20 + 14x &= 14 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} y &= 10 - 7x \\ x &= 2 \end{aligned}\right\}$

4.° Se **calcula** la otra incógnita en la ecuación despejada: $\left.\begin{aligned} y &= 10 - 7 \cdot 2 = -4 \\ x &= 2 \end{aligned}\right\}$ Solución: $\boxed{x = 2, \quad y = -4}$

5.° Se **comprueba** la solución en el sistema inicial: $\left.\begin{aligned} 7 \cdot 2 + (-4) &= 10 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) &= 14 \end{aligned}\right\}$

121 Resuelve los siguientes sistemas por sustitución:

a) $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 6x + 5y = 14 \end{cases}$ $\left.\begin{aligned} x &= 11 - 3y \\ 6x + 5y &= 14 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x &= 11 - 3y \\ 6(11 - 3y) + 5y &= 14 \end{aligned}\right\}$

b) $\begin{cases} x + 5y = -8 \\ 2x - 4y = 26 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + y = -22 \\ 3x - 7y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x - y = 23 \\ 3x + 2y = 29 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x + 3y = 36 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

122 Resuelve los siguientes sistemas por sustitución:

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 4x - 3y = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 12 = 0 \\ 5x - 7y - 26 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0{,}8x - 0{,}5y = 3{,}2 \\ x + y - 17 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 2 + y = 9 \\ 6x + y - 3y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x + 4) + 5y = 1 \\ x - 4(3 + y) = -10 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2(x - 1) - y = 9 \\ 3(x + 1) - 3y = 2 - y \end{cases}$

Cómo se resuelve un sistema por reducción

Para resolver un sistema por reducción: $\begin{cases} 5x + 4y = 8 \\ 2x - 3y = 17 \end{cases}$

1.° Se **hacen opuestos** los coeficientes de una incógnita, si no lo son ya: $\left.\begin{aligned} 3(5x + 4y) &= 3 \cdot 8 \\ 4(2x - 3y) &= 4 \cdot 17 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} 15x + 12y &= 24 \\ 8x - 12y &= 68 \end{aligned}\right\}$

2.° Se **suman** las dos ecuaciones para dar una nueva ecuación: $\left.\begin{aligned} 23x &= 92 \\ 5x + 4y &= 8 \end{aligned}\right\}$

3.° Se **resuelve** la ecuación de una incógnita: $\left.\begin{aligned} x &= \frac{92}{23} = 4 \\ 5x + 4y &= 8 \end{aligned}\right\}$

4.° Se **calcula** la otra incógnita en la otra ecuación: $\left.\begin{aligned} x &= 4 \\ 5 \cdot 4 + 4y &= 8 \end{aligned}\right\}$ Solución: $\boxed{x = 4, \quad y = -3}$

5.° Se **comprueba** la solución en el sistema inicial: $\left.\begin{aligned} 5 \cdot 4 + 4(-3) &= 8 \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-3) &= 17 \end{aligned}\right\}$

123 Resuelve los siguientes sistemas por reducción:

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 14 \\ 5x + 2y = 29 \end{cases}$ $\left.\begin{aligned} 2(4x - 3y) &= 2 \cdot 14 \\ 3(5x + 2y) &= 3 \cdot 29 \end{aligned}\right\}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 7x - 4y = -25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 3y = 16 \\ 9x + 7y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ 9x - 5y = -8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 7x + 4y = 2 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

124 Resuelve los siguientes sistemas por reducción, operando previamente los términos semejantes:

a) $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 5x + 7y - 17 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 9y - 11 = 0 \\ 7x - 8y + 4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x + 5y = 33 - 4x + 2y \\ 2x + 2y = 23 - 7x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 7 + 3y = 9 + 2(x + y) \\ 5x + 2y = 8 + 3y - x \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x + y + 4) = 2(49 - y) \\ x - 4(3 + y) = -40 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2(x - 1) - 5y = 9 - 4y \\ 3(x + 1 - y) = 23 - y \end{cases}$

Cómo se resuelve un problema mediante un sistema

Si me das 2 euros tendré el triple que tú. Si te doy 4 euros tú tendrás el triple que yo. ¿Cuántos euros tenemos cada uno?

1.° Se **identifica y da nombre** a lo que se pide:

Euros que tengo: x
Euros que tienes: y

2.° Se **escriben** las cantidades que intervienen:

Si me das 2 euros: Tendré $x + 2$
Tendrás $y - 2$

Si te doy 4 euros: Tendré $x - 4$
Tendrás $y + 4$

3.° Se **busca** en el enunciado una relación entre las cantidades y se escribe un sistema de ecuaciones:

Tendré el triple que tú: $x + 2 = 3(y - 2)$
Tendrás el triple que yo: $y + 4 = 3(x - 4)$

4.° Se **resuelve** el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2 = 3(y - 2) \\ y + 4 = 3(x - 4) \end{cases}$$

Por reducción: $x = 7$ $y = 5$

5.° Se **interpreta** y **comprueba** el resultado:

$\boxed{\text{Tengo 7 euros y tú tienes 5 euros.}}$

Comprobación: En el sistema: $\left.\begin{array}{l} 7 + 2 = 3(5 - 2) = 9 \\ 5 + 4 = 3(7 - 4) = 9 \end{array}\right\}$

En el problema: Si me das 2 euros, tendré 9, el triple que tú, que te quedarás con 3.

Si te doy 4 euros, tendrás 9, el triple que yo, que me quedaré con 3.

125 Halla dos números que sumen 70 y se diferencien en 6 unidades.

126 Vicente hace un viaje de 1300 kilómetros en coche. Divide el recorrido en dos etapas, de forma que en la primera recorre 72 kilómetros más que en la segunda. ¿Cuánto recorrió en cada etapa?

127 ¿Cuánto miden los lados de un rectángulo si su perímetro es 130 centímetros, y mide 19 centímetros más de largo que de alto?

128 Gonzalo tiene el triple de la edad de su hijo. Hace nueve años tenía doce veces más. ¿Cuántos años tienen el padre y el hijo?

129 Nueve entradas de cine y 5 refrescos cuestan 87 euros, mientras que 5 entradas y 9 refrescos cuestan 67 euros. ¿Cuánto cuesta cada entrada y cada refresco?

130 El perímetro de un campo de fútbol mide 288 metros, siendo la diferencia entre el largo y el ancho de 32 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del campo?

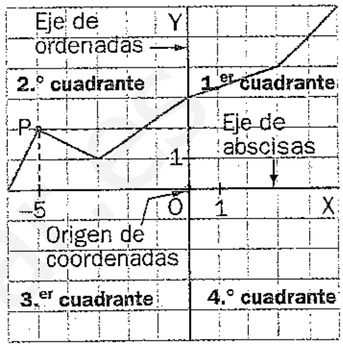
131 A Nuria le han cobrado 7 euros por 8 bolígrafos y 3 rotuladores. Javier pagó 13 euros por 12 bolígrafos y 7 rotuladores. Angélica va a comprar un bolígrafo y un rotulador, al mismo comercio. ¿Cuánto tendrá que pagar?

7 Gráficas y funciones

- Una **gráfica cartesiana** está formada por un conjunto de puntos representados en unos ejes de coordenadas. Estos puntos a menudo se unen formando una línea.
- Una **función** es una relación entre dos variables: **la variable independiente *x*** y **la variable dependiente *y***, de manera que a cada valor de ***x*** le corresponde un único valor de ***y*** que llamamos **imagen**.

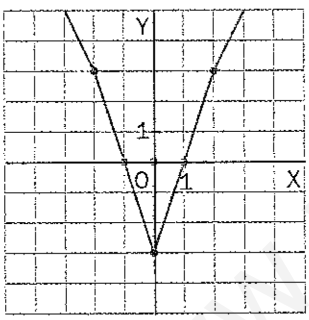
La variable dependiente se designa por ***y*** o también por ***f*(*x*)**.

- Si en una gráfica a cada valor de ***x*** le corresponde un único valor, ***y***, se dice que **la gráfica es una función**.

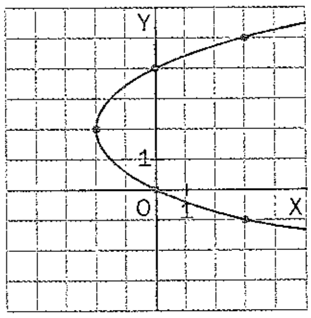


PASO A PASO

64 ***Indica si son funciones las siguientes gráficas. Razona la respuesta.***

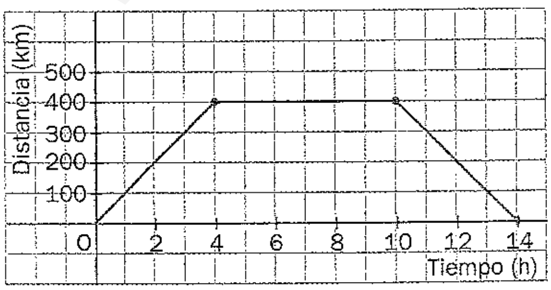


Esta gráfica es una función porque a cada valor de la abscisa x le corresponde un solo f(x).



Esta gráfica no es una función, pues para un valor de la abscisa x existen dos valores f(x).

65 La siguiente gráfica representa el recorrido de una excursión en autobús.



a) ¿Representa una función? ¿Por qué? ....

....

b) ¿Cuánto duró la excursión? ....

c) ¿Cuántos kilómetros había recorrido al iniciar la parada?

....

d) ¿Cuánto duró la parada? ....

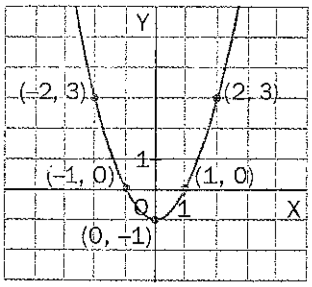
66 En la siguiente tabla de valores están representados los valores que se han registrado en un termómetro a lo largo de la mañana. Representa la siguiente función.

x	$f(x)$
–2	3
–1	0
0	–1
1	0
2	3

Si la función viene dada por una tabla de valores:

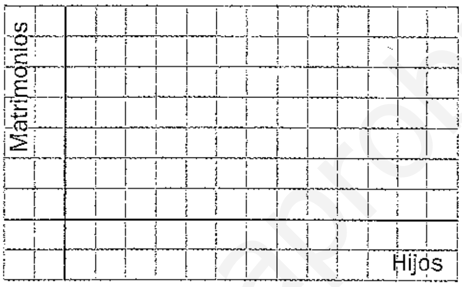
1.° Representamos los pares de valores en los ejes de coordenadas.

2.° Unimos los puntos, ya que la temperatura es una magnitud que para pasar de un valor a otro toma todos los valores intermedios.



67 Representa gráficamente la tabla en los ejes de coordenadas. ¿Es una función? ¿Se deben unir los puntos?

N.º de hijos	N.º de matrimonios
0	2
1	5
2	8
3	2
4	1
5	1
Total	20



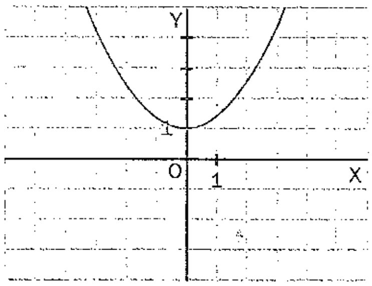
68 Representa la función $f(x) = x^2 + 1$.

Si la función viene dada por una fórmula:

1.° Damos valores a la variable x en la fórmula y formamos una tabla de valores.

2.° Representamos los pares de valores de la tabla en los ejes de coordenadas.

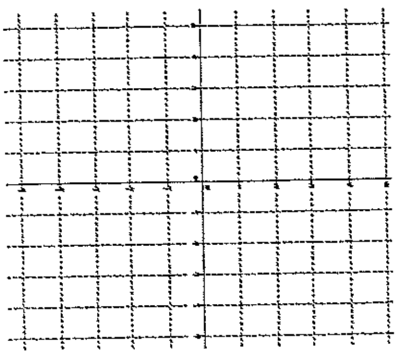
3.° Estudiamos si tiene sentido unir los puntos.



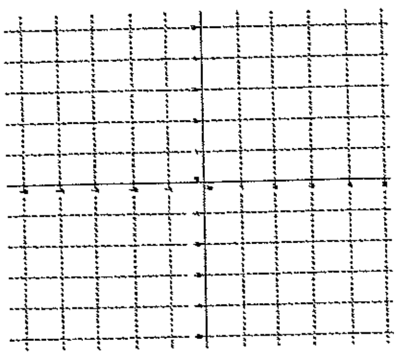
x	y
0	1
1	2
2	5
–1	2
–2	5

69 Representa las funciones definidas por las siguientes fórmulas.

a) $f(x) = 3x + 2$

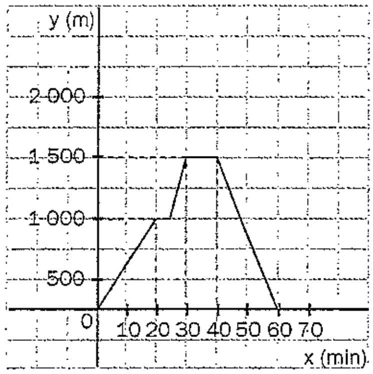


b) $f(x) = 2x^2 - 3$



UN PASO MÁS

70 Jesús y Margarita han salido de paseo. La siguiente gráfica representa la distancia a su casa.



¿Cuántas paradas hicieron? ¿Cuánto duró cada una?

....

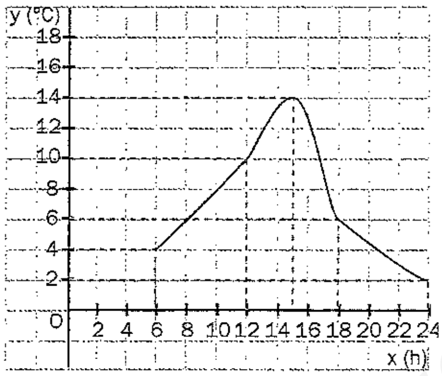
¿Cuánto duró la excursión?

....

¿A qué distancia de su casa se encontraban a los 20 minutos? ¿Y a los 30 minutos?

....

71 Carolina ha hecho un gráfico con las temperaturas de su ciudad tomadas desde las 6 de la mañana hasta las 12 de la noche.



¿Qué temperatura había a las 12 de la mañana?

....

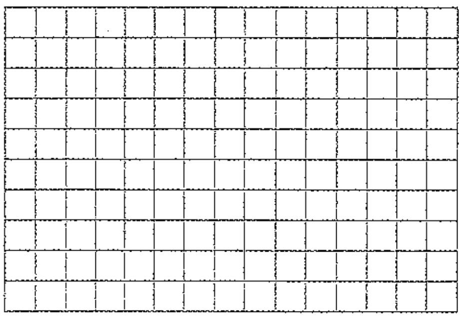
¿Qué temperatura había a las 3 de la tarde? ....

¿Qué temperatura había a las 12 de la noche? ....

¿A qué hora se alcanzó una temperatura de 6 °C?

....

72 Rafael ha salido a dar un paseo con su bici. Ha estado pedaleando durante dos horas y ha recorrido 30 kilómetros. Ha hecho una parada de media hora y ha seguido montado en la bici una hora y media más, recorriendo 15 kilómetros. Ha vuelto a parar una hora y luego ha vuelto a su casa, que estaba a 10 kilómetros tomando un atajo. En el recorrido de vuelta tarda sólo dos horas. Haz una gráfica que represente la distancia que recorre Rafael en bici en función del tiempo.



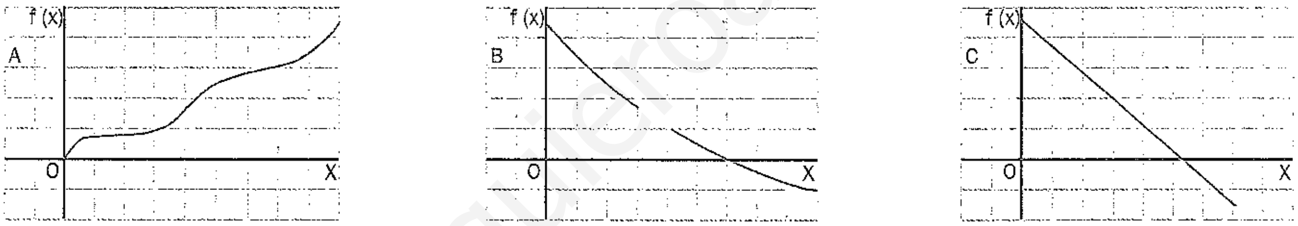
60

8 Propiedades de las funciones

- Una función es **continua** si podemos dibujarla sin levantar el lápiz del papel.
- Una función es **creciente/decreciente** si al aumentar los valores de la variable x aumentan/disminuyen, los de $f(x)$.
- **Máximos relativos** de una función son los puntos en los que su ordenada es mayor que la de los puntos situados a su alrededor, tanto a su izquierda como a su derecha.
- **Mínimos relativos** de una función son los puntos en los que su ordenada es menor que la de los puntos a su alrededor, tanto a su izquierda como a su derecha.

PASO A PASO

74 **Indica si las siguientes funciones son continuas o no, y si son crecientes o decrecientes.**

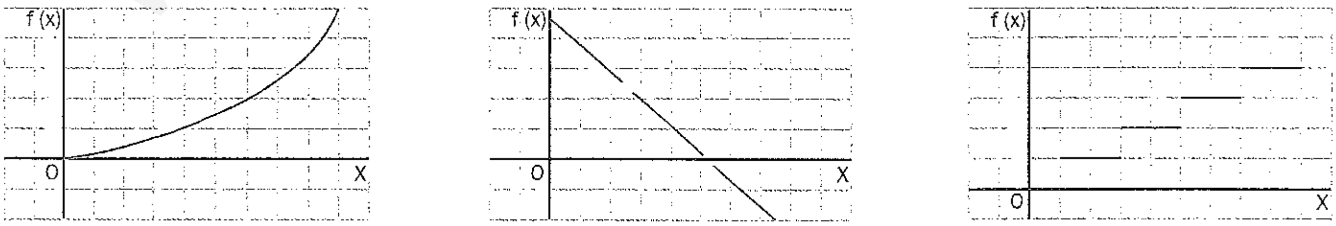


La función A es continua porque se puede dibujar sin levantar el lápiz, y es creciente.

La función B es discontinua, decreciente.

La función C es continua y decreciente.

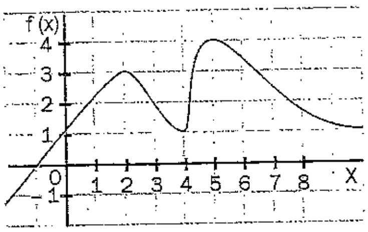
75 Indica si las siguientes funciones son continuas o no y si son crecientes o decrecientes.



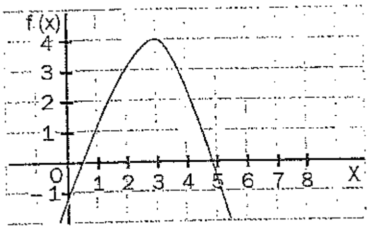
Una función puede tener varios máximos o mínimos relativos.

76 ***Indica en qué puntos las siguientes funciones presentan máximos***

A



B

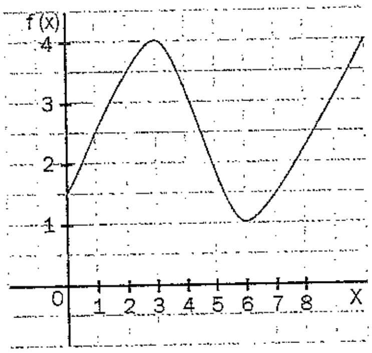


La función A presenta dos máximos en (2, 3) y (5, 4), y un mínimo en (4, 1).

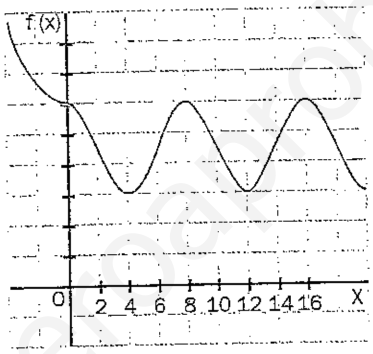
La función B solo presenta un máximo en el punto (3, 4).

77 Identifica los puntos donde las siguientes funciones presentan máximos y mínimos relativos.

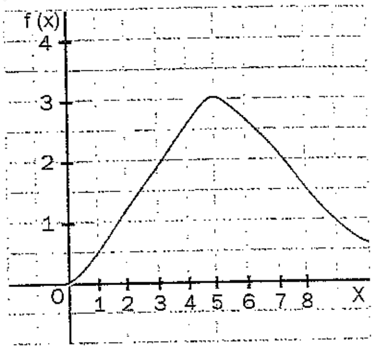
A



B



C

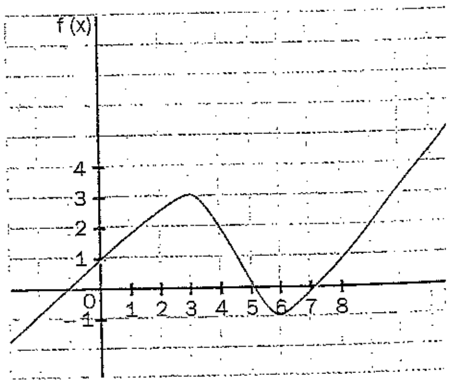


Función *A* ....

Función *B* ....

Función *C* ....

78 Dada la siguiente función, identifica las coordenadas de su máximo y su mínimo relativos e indica cuándo es creciente y decreciente.

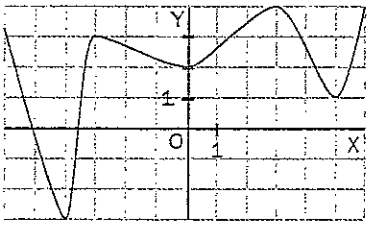


61

UN PASO MÁS

El **máximo absoluto** es el mayor de los máximos relativos.
El **mínimo absoluto** es el menor de los mínimos relativos.

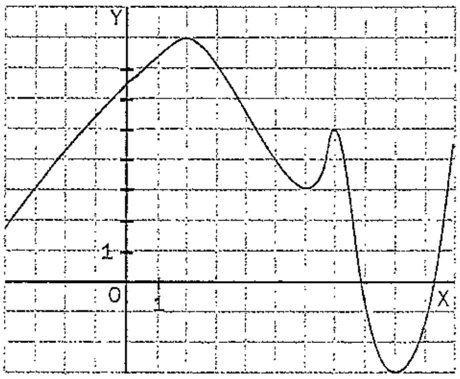
79 ***A partir de la gráfica de la siguiente función, identifica los puntos donde presenta máximos y mínimos relativos y absolutos.***



La función presenta un mínimo absoluto y relativo a la vez en el punto (–4, –3), un mínimo relativo en (0, 2), un mínimo relativo en (5, 1), un máximo relativo en (–3, 3) y un máximo absoluto y relativo en (3, 4).

80 Identifica los puntos donde las siguientes funciones presentan máximos y mínimos relativos.

a)



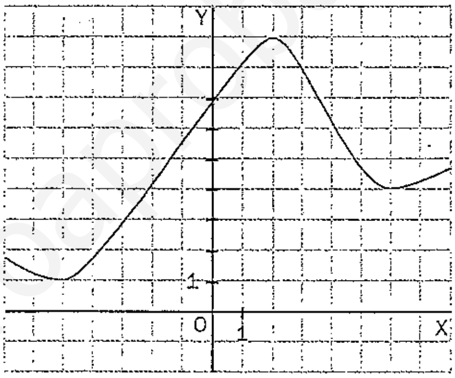
Máximos relativos ....

Máximos absolutos ....

Mínimos relativos ....

Mínimos absolutos ....

b)



Máximos relativos ....

Máximos absolutos ....

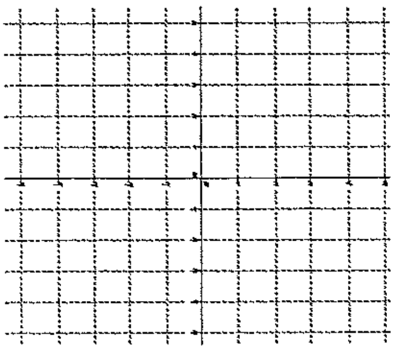
Mínimos relativos ....

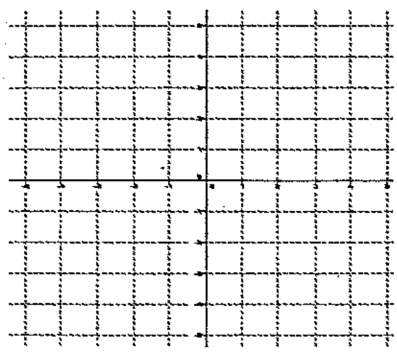
Mínimos absolutos ....

81 Dibuja dos funciones continuas con las siguientes características.

a) Una función con un máximo absoluto en (0, 5) y un máximo relativo en (2, –3)

b) Una función con un mínimo absoluto en (0, 0) y un mínimo relativo en (3, –3)

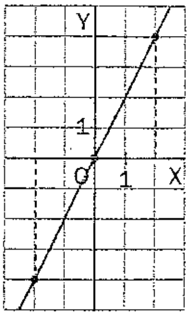




9 Funciones lineales

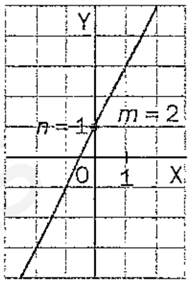
Las **funciones de proporcionalidad directa** son las definidas por una fórmula del tipo ***y = mx***.

Su gráfica es una **recta que pasa por el origen** de coordenadas.



Las **funciones afines** son las definidas por una fórmula del tipo ***y = mx + n***.

Su gráfica es una **recta** que **no necesariamente pasa** por el origen de coordenadas.



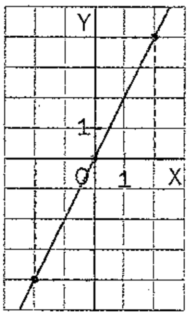
PASO A PASO

83 ***Representa la función de proporcionalidad directa dada por la fórmula*** **y = 2x.** ***¿Cuál es el valor de su pendiente?***

1.º Construimos la tabla de valores correspondiente.

2.º Representamos los valores en unos ejes de coordenadas y unimos los puntos.

x	***y***
–2	*–4*
0	*0*
2	*4*



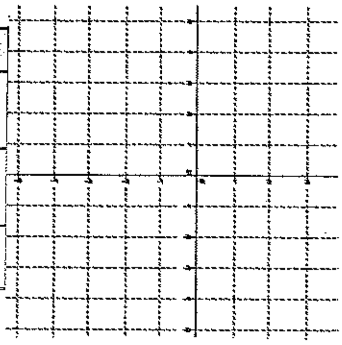
$\boxed{\text{La pendiente es 2.}}$

En una recta ***y = mx***, La constante de proporcionalidad ***m*** es su **pendiente** y nos da una idea de su inclinación.

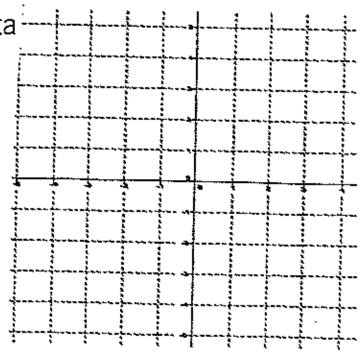
84 Representa la siguiente función de proporcionalidad directa e indica el valor de la pendiente.

$y = \frac{1}{2}x$

x	***y***



85 Represента en los ejes de coordenadas las funciones de proporcionalidad directa que pasan por el origen de coordenadas y cuya pendiente es $m = -4$.



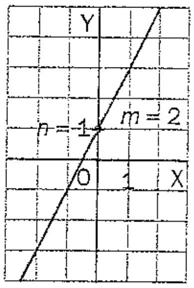
62

86 ***Representa la función de ecuación $y = 2x + 1$ e indica su pendiente y la ordenada en el origen.***

1.º Construimos la tabla de valores correspondiente.

2.º Representamos los valores en unos ejes de coordenadas y unimos los puntos.

x	*y*
0	*1*
1	*3*
2	*5*



Es una recta de pendiente 2 y ordenada en el origen 1.

En una recta $y = mx + n$:

- m es la **pendiente** de la recta.
- n es la **ordenada en el origen**, nos indica por dónde corta al eje de ordenadas.

87 Indica la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes rectas.

a) $y = 18x - 12$ $m =$ ...... $n =$ ......

b) $y = -35x + 41$ $m =$ ...... $n =$ ......

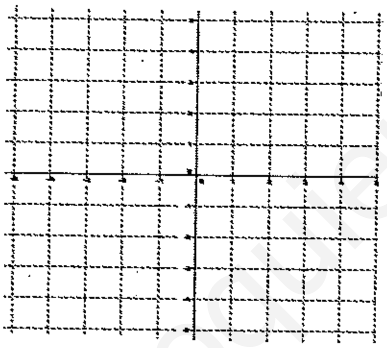
c) $y = x + 3$ $m =$ ...... $n =$ ......

c) $y = -x - 5$ $m =$ ...... $n =$ ......

88 Representa las siguientes funciones.

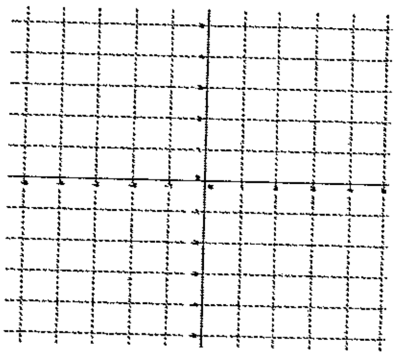
a) $y = 3x - 1$

x	*y*



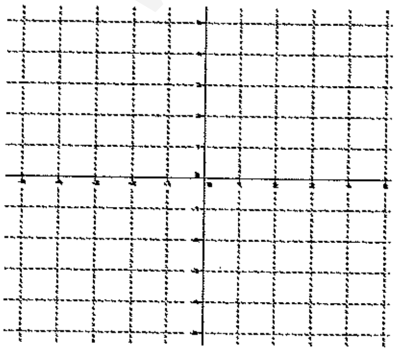
b) $y = -2x + 2$

x	*y*

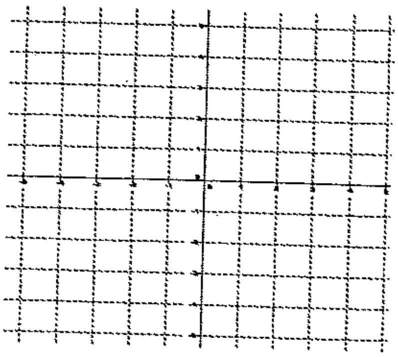


88 Representa las siguientes funciones.

a) $m = -4$, $n = 3$

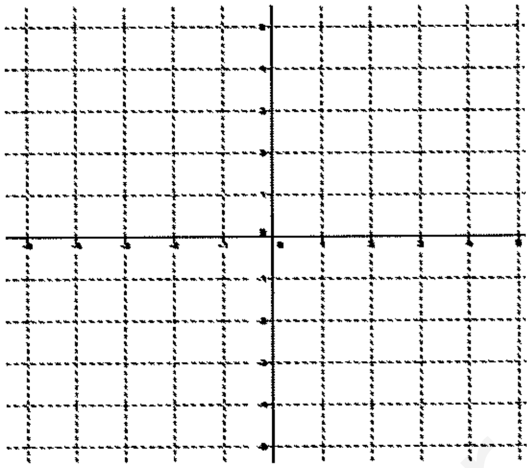


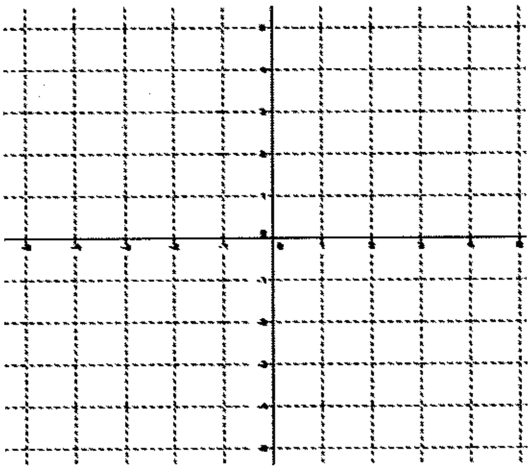
b) $m = \frac{1}{2}$, $n = -1$



Representa las siguientes funciones de segundo grado:

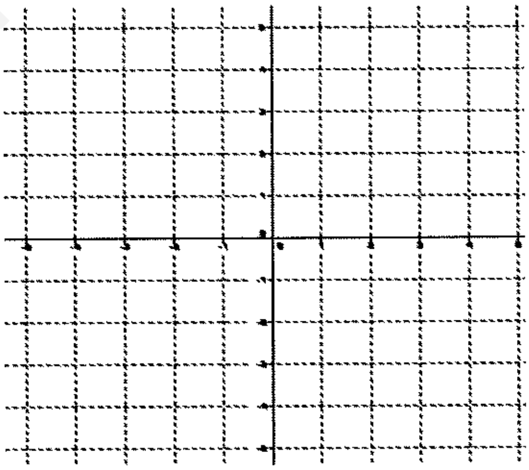
$y= -x^2+1$

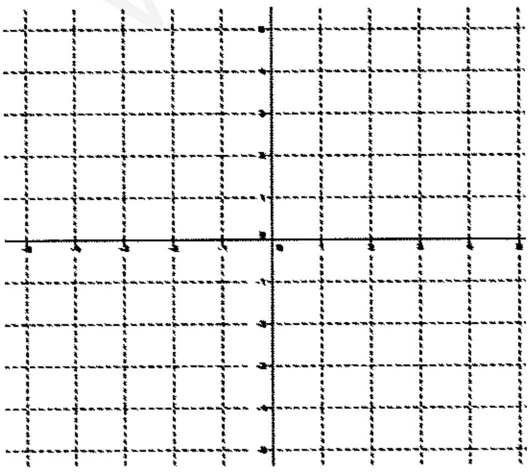




$y=-2x^2-1$

$y= 3x^2+2$





$y= x^2-4$