EJERCICIOS

1 Indica qué rectángulos son semejantes:

a) Base 25 cm, altura 12 cm y base 30 cm, altura 14 cm.

b) Base 30 m, altura 24 m y base 10 m, altura 8 m.

c) Base 0,75 dm, altura 0,25 dm y base 1,50 m, altura 50 cm.

a) $\frac{30}{25} \neq \frac{14}{12}$ b) $\frac{30}{10} = \frac{24}{8}$ c) $\frac{0,75}{15} = \frac{0,25}{5}$

Son semejantes b) y c).

2 La razón de semejanza de dos cuadrados es 1,5. El cuadrado de menor tamaño tiene un perímetro de 20 cm. Calcula:

a) El perímetro del cuadrado mayor.

b) El área de cada uno de ellos.

a) $\frac{P}{20} = 1,5$; $P = 30$ cm

b) El lado de cada cuadrado es:

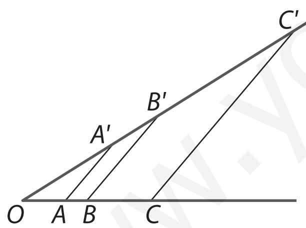
$\frac{30}{4} = 7,5$ cm y $\frac{20}{4} = 5$ cm respectivamente.

El área del cuadrado es $A = l^2$, por lo que:

$A = 7,5^2 = 56,25$ cm^2; $A = 5^2 = 25$ cm^2

3 Calcula las medidas de los segmentos *A′B′*, *OB′* y *B′C′*, si:

$OA = 2$ cm, $OA' = 5$ cm, $AB = 1$ cm, $BC = 3$ cm



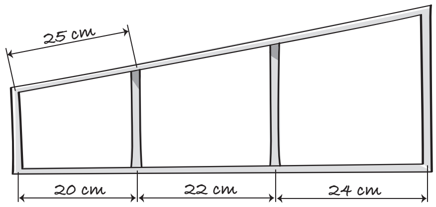
Aplicamos el teorema de Tales:

$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{1}{A'B'} \Leftrightarrow A'B' = 2,5$ cm

$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{OB'} \Leftrightarrow OB' = 7,5$ cm

$\frac{OA}{OA'} = \frac{BC}{B'C'} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{B'C'} \Leftrightarrow B'C' = 7,5$ cm

4 Observa la valla del dibujo. Si en el lado inclinado la medida correspondiente a 20 cm es 25 cm, calcula las medidas de las distancias de los restantes barrotes.



Llamamos *x* e *y* a las longitudes de los dos barrotes del lado inclinado y aplicamos el teorema de Tales:

$\frac{25}{20} = \frac{x}{22} \Leftrightarrow x = 27,5$ cm $\frac{25}{20} = \frac{y}{24} \Leftrightarrow y = 30$ cm

5 Aplicando los criterios de semejanza, justifica si los triángulos *ABC* y *MNP* son semejantes:

a) $A = 60°$ $B = 45°$
$M = 75°$ $N = 60°$

b) $AB = 10$ cm $AC = 12$ cm $A = 35°$
$MN = 20$ cm $MP = 16$ cm $M = 35°$

c) $AB = 10$ cm $AC = 12$ cm $BC = 15$ cm
$MN = 15$ cm $MP = 18$ cm $NP = 22,5$ cm

d) $AB = 10$ cm $AC = 12$ cm $BC = 15$ cm
$MN = 20$ cm $MP = 24$ cm $NP = 18$ cm

a) $C = 75°$. Son semejantes por tener dos ángulos iguales.

b) $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} \Leftrightarrow \frac{10}{20} \neq \frac{12}{16}$. No son semejantes.

c) $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} \Leftrightarrow \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{15}{22,5}$. Son semejantes.

d) $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} \Leftrightarrow \frac{10}{20} = \frac{12}{24} \neq \frac{15}{18}$. No son semejantes.

6 Construye en una cartulina dos triángulos, uno de lados 6 cm, 8 cm y 10 cm, y otro de lados 9 cm, 12 cm y 15 cm.

Comprueba que estos triángulos son semejantes situándolos en posición de Tales y calcula la razón de semejanza.

$\frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = 0,67$

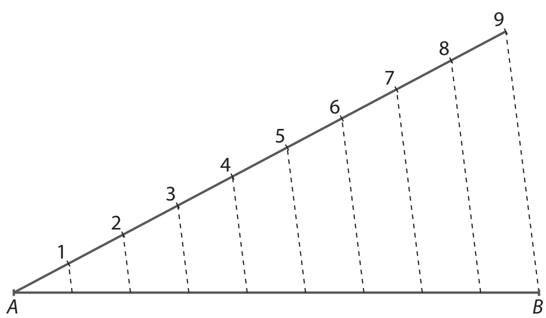
7 Los triángulos *ABC* y *MNP* son semejantes con razón de semejanza 3. Si:

$AB = 5$ cm, $AC = 10$ cm y $A = M = 40°$

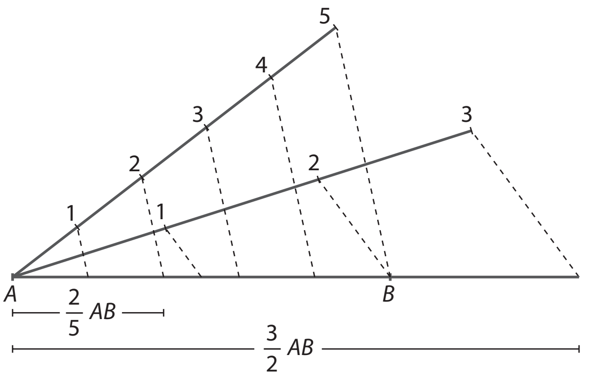
calcula la medida de los lados *MN* y *MP*.

$\frac{AB}{MN} = 3 \Leftrightarrow MN = \frac{5}{3}$ cm; $\frac{AC}{MP} = 3 \Leftrightarrow MP = \frac{10}{3}$ cm.

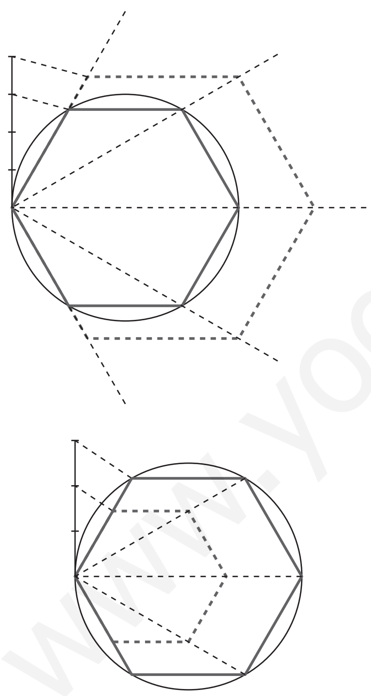
8 Utilizando el teorema de Tales, divide el segmento *AB* de 8 cm de longitud en nueve partes iguales.



9 **Empleando el teorema de Tales, construye los $\frac{3}{2}$ y los $\frac{2}{5}$ del segmento *AB* de longitud 10 cm.**



10 **Dibuja un hexágono inscrito en una circunferencia de 6 cm de radio. Construye uno semejante a él con razón de semejanza $\frac{4}{3}$ y otro de razón $\frac{2}{3}$.**



11 **Si un aula rectangular mide 10 metros de ancho y 14 metros de largo, ¿cuáles son las medidas del dibujo a escala 1:125?**

$\frac{1}{125} = \frac{x}{1\,000} \Leftrightarrow x = 8$ cm de ancho.

$\frac{1}{125} = \frac{y}{1\,400} \Leftrightarrow y = 11{,}20$ cm de largo.

12 **Dibuja un triángulo de lados 5, 6 y 7 cm. ¿Es un triángulo rectángulo? ¿Cumple el teorema de Pitágoras? Razona tus respuestas.**

$h = \sqrt{5^2 + 6^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{61} \Leftrightarrow h = 7{,}8$ cm. No cumple el teorema de Pitágoras.

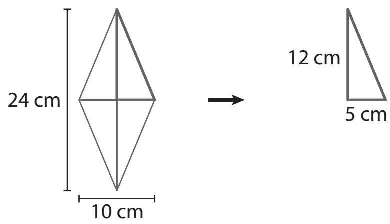
13 **En un triángulo rectángulo se conoce la medida de la hipotenusa, 17 cm, y de uno de los catetos, 15 cm, ¿cuál es la longitud del otro cateto?**

$c = \sqrt{h^2 - c^2} \Leftrightarrow c = \sqrt{17^2 - 15^2} \Leftrightarrow c = \sqrt{64} \Leftrightarrow c = 8$ cm

14 **Completa la tabla:**

Hipotenusa a	*Cateto b*	*Cateto c*
20	$b = \sqrt{20^2 - 16^2}$ $b = 12$	16
$h = \sqrt{5^2 + 12^2}$ $h = 13$	5	12
2	1	$c = \sqrt{2^2 - 1^2}$ $c = \sqrt{3}$
26	24	$c = \sqrt{26^2 - 24^2}$ $c = 10$

15 **Si las diagonales de un rombo miden 24 cm y 10 cm, calcula la longitud del lado.**



El triángulo rectángulo que se forma tiene como longitud de los lados 12 cm y 5 cm. La longitud del lado del rombo es la hipotenusa:

$h = \sqrt{12^2 + 5^2} \Leftrightarrow h = 13$ cm

16 **La diagonal de un cuadrado es 5,66 dm. ¿Cuál es la longitud del lado?**

La diagonal del cuadrado es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma con los lados.

$h = \sqrt{2l^2} \Leftrightarrow h = l\sqrt{2} \Leftrightarrow l = \frac{h}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow l = \frac{5{,}66}{1{,}41} \Leftrightarrow l = 4$ dm

17 **Calcula la apotema de un hexágono regular de lado 3 dm.**

$a = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ dm

18 **Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 8 cm.**

$h = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{64 - 16} \Leftrightarrow h = \sqrt{48} = 2\sqrt{6}$ cm

EJERCICIOS PROPUESTOS

FIGURAS SEMEJANTES

1 Una fotografía de tamaño 10 cm × 15 cm se amplía a un formato de 15 cm × 20 cm. ¿Son semejantes las fotografías?

$\frac{10}{15} = 0{,}67; \frac{15}{20} = 0{,}75$

La razón de semejanza no es igual. No son semejantes.

2 Si una fotografía de 10 cm × 15 cm se amplía un 25 %, ¿cuáles son las medidas de la fotografía ampliada?

$10 \cdot 1{,}25 = 12{,}5$ cm; $15 \cdot 1{,}25 = 18{,}75$ cm

3 ¿Cuál es la razón de semejanza entre una DIN A4 y una DIN A3?

El tamaño DIN A4 es 210 mm × 297 mm. El tamaño DIN A3 es 297 mm × 420 mm.

$\frac{210}{297} = 0{,}71; \frac{297}{420} = 0{,}71$. La razón de semejanza es 0,71.

4 Razona si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

a) Todos los cuadrados son semejantes.

b) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

c) Todos los hexágonos regulares son semejantes.

d) Dos polígonos son semejantes si tienen todos sus ángulos iguales dos a dos.

e) Dos polígonos son semejantes si sus lados homólogos son proporcionales.

a) Verdadero. b) Falso. c) Verdadero.
d) Verdadero. e) Verdadero.

5 Indica qué rectángulos son semejantes:

a) Base 75 cm, altura 36 cm y base 90 cm, altura 42 cm.

b) Base 15 m, altura 12 m y base 5 m, altura 4 m.

c) Base 1,50 dm, altura 0,50 dm y base 3 m, altura 100 cm.

d) Base 10 cm, altura 12 cm y base 6 cm, altura 8 cm.

a) $\frac{75}{36} \neq \frac{90}{42}$ no son semejantes.

b) $\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$ sí son semejantes.

c) $\frac{1{,}50}{0{,}5} = \frac{30}{10}$ sí son semejantes.

d) $\frac{10}{12} \neq \frac{6}{8}$ no son semejantes.

6 Las medidas de los lados de un triángulo son 3 cm, 4 cm y 5 cm. Si la razón de semejanza es 1,5, ¿cuáles son las medidas de los lados de los triángulos semejantes?

Llamamos x, y y z a los lados del triángulo semejante.

$\frac{x}{3} = 1{,}5 \Leftrightarrow x = 4{,}5$ cm $\quad \frac{y}{4} = 1{,}5 \Leftrightarrow y = 6$ cm

$\frac{z}{5} = 1{,}5 \Leftrightarrow z = 7{,}5$ cm

7 Los lados de un hexágono miden 4, 6, 10, 12, 16 y 20 cm. Si en un hexágono semejante el lado menor mide 10 cm, calcula la medida de los otros lados.

Calculamos la razón de semejanza:

$\frac{10}{4} = 2{,}5$. La razón de semejanza es 2,5.

La medida de los otros lados de menor a mayor es:

$6 \cdot 2{,}5 = 15$ cm; $10 \cdot 2{,}5 = 25$ cm; $12 \cdot 2{,}5 = 30$ cm;

$16 \cdot 2{,}5 = 40$ cm; $20 \cdot 2{,}5 = 50$ cm.

8 Utiliza papel cuadriculado para dibujar dos octógonos semejantes de razón 2.

Un octógono es el doble de grande que el otro.

9 La razón de semejanza de dos triángulos es 0,75. El triángulo de menor tamaño tiene un perímetro de 36 cm. Calcula el perímetro del triángulo mayor.

$\frac{36}{P} = 0{,}75 \Leftrightarrow P = \frac{36}{0{,}75} \Leftrightarrow P = 48$ cm

10 Los lados de un triángulo miden 12, 8 y 6 cm. Calcula la medida de los lados del triángulo semejante cuyo perímetro es 18 cm.

El perímetro del triángulo es: $12 + 8 + 6 = 26$ cm.

$\frac{26}{18} = \frac{12}{x} \Leftrightarrow x = \frac{108}{13}$ cm $\quad \frac{26}{18} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = \frac{72}{13}$ cm

$\frac{26}{18} = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x = \frac{54}{13}$ cm

11 El perímetro del rectángulo *A* es 24 cm y el perímetro del rectángulo *B* es 12 cm. Si ambos rectángulos son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza de los lados homólogos?

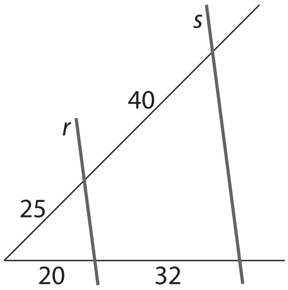
$\frac{P}{P'} = k \Leftrightarrow \frac{24}{12} = k \Leftrightarrow k = 2$

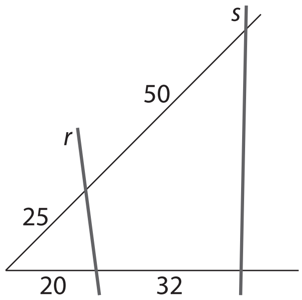
12 El área de un rectángulo *A* es 32 cm² y el área de un rectángulo *B* es 288 cm². Si los dos rectángulos son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza de los lados homólogos?

$\frac{A}{A'} = k^2 \Leftrightarrow \frac{288}{32} = k^2 \Leftrightarrow 9 = k^2 \Leftrightarrow k = 3$

TEOREMA DE TALES

13 **¿En qué casos las rectas *r* y *s* son paralelas?**

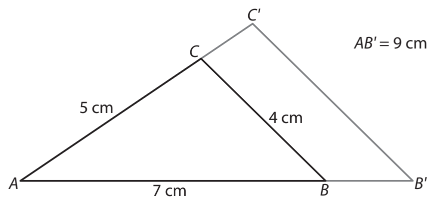




En el primer caso: $\frac{25}{20} = \frac{40}{32} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$. Son paralelas.

En el segundo caso: $\frac{25}{20} \neq \frac{50}{32} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \neq \frac{25}{16}$. No son paralelas.

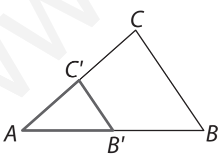
14 **Observa la figura y calcula la medida de los lados del triángulo *AB′C′*.**



$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{4}{B'C'} \Leftrightarrow B'C' = \frac{36}{7}\ cm$

$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{5}{AC'} \Leftrightarrow AC' = \frac{45}{7}$ cm

15 **Construye un triángulo de lados *AB* = 12 cm, *AC* = 10 cm y *BC* = 8 cm. Une los puntos medios de los lados *AB* y *AC* y comprueba que el triángulo que se obtiene es semejante al triángulo *ABC*.**



El lado *AB′* mide 6 cm, y el lado *AC′* mide 5 cm.

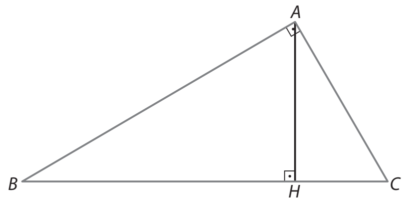
$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \Leftrightarrow \frac{12}{6} = \frac{10}{5} \Leftrightarrow 2$

La razón de semejanza es 2. Son semejantes.

16 **Construye en una cartulina un triángulo cuyos lados midan 4 cm y 7 cm y el ángulo comprendido sea 50°. Construye otro semejante con razón de semejanza 1,5. Comprueba la semejanza de los dos triángulos situándolos en posición de Tales.**

Aplicando el teorema de Tales, en el triángulo semejante los lados homólogos miden 6 cm y 10,5 cm respectivamente.

17 **¿Son semejantes los triángulos *ABC* y *AHC* de la figura? Razona la respuesta.**



Sí son semejantes.

18 **Traza diez líneas rectas paralelas y separadas entre sí 1 cm. Recorta una tira de papel en forma de rectángulo de longitud 8 cm y sobre ella marca dos puntos *A* y *B* como se indica en el dibujo.**

Utiliza el teorema de Tales para determinar cómo se debe situar la tira del papel sobre las rectas paralelas para que puedas dividir el correspondiente segmento *AB* en 5, 6, 8 y 10 partes iguales.

Se comprueba haciendo la experiencia.

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

19 **Aplicando los criterios de semejanza, justifica si los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes:**

a) *ABC* y *DEF* son triángulos rectángulos con $\hat{A} = 55°$ y $\hat{F} = 35°$.

b) *AB* = 6 cm	***AC* = 8 cm**	**$\hat{A} = 60°$**
***DE* = 4 cm**	***DF* = 5 cm**	**$\hat{D} = 60°$**
c) *AB* = 6 cm	***AC* = 9 cm**	***BC* = 12 cm**
***DE* = 8,4 cm**	***DF* = 12,6 cm**	***EF* = 16,8 cm**
d) *BC* = 5 cm	***BA* = 10 cm**	**$\hat{B} = 22°$**
***EF* = 2,5 cm**	***ED* = 5 cm**	**$\hat{E} = 22°$**

a) El triángulo *ABC* tiene los ángulos de 90º, 55º y 35º. Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos iguales.

b) $\frac{8}{5} \neq \frac{6}{4} \Leftrightarrow 1{,}6 \neq 1{,}25$. No son semejantes.

c) Calculamos la razón de semejanza:

$\frac{8{,}4}{6} = k \Leftrightarrow k = 1{,}4;$ $\frac{12{,}6}{9} = k \Leftrightarrow k = 1{,}4;$

$\frac{16{,}8}{12} = k \Leftrightarrow k = 1{,}4$. Son semejantes.

d) El ángulo comprendido entre los lados es el mismo, y la razón de semejanza entre los lados es:

$\frac{10}{5} = \frac{5}{2{,}5}$. Son semejantes.

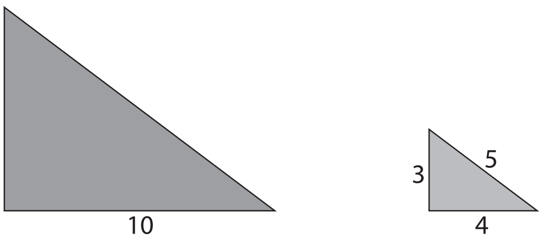
20 **Las medidas de los lados de un triángulo son 6 cm, 8 cm y 10 cm. Determina los lados de los triángulos semejantes a él si la razón de semejanza es 0,5.**

Llamamos x, y y z a los lados del triángulo semejante. Entonces se cumple que:

$\frac{6}{x} = 0{,}5 \Leftrightarrow x = 12$ cm; $\frac{8}{y} = 0{,}5 \Leftrightarrow x = 16$ cm;

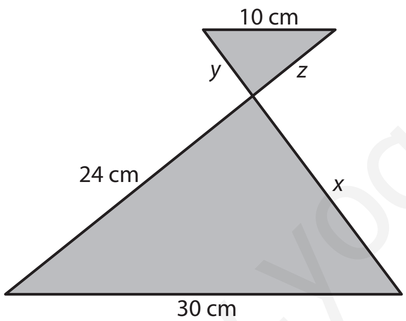
$\frac{10}{z} = 0{,}5 \Leftrightarrow x = 20$ cm

21 **Si los triángulos de la figura son semejantes, calcula la medida de los lados desconocidos.**



$\frac{10}{4} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = 7{,}5$; $\frac{10}{4} = \frac{y}{5} \Leftrightarrow y = 12{,}5$

22 **Calcula el valor de los segmentos indicados:**



$\frac{30}{10} = \frac{24}{z} \Leftrightarrow z = \frac{24 \cdot 10}{30} \Leftrightarrow z = 8$ cm

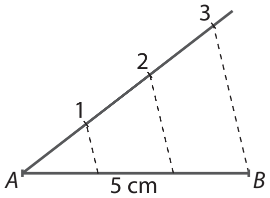
El lado x lo calculamos por el teorema de Pitágoras, ya que es un triángulo rectángulo:

$x = \sqrt{30^2 - 24^2} \Leftrightarrow x = 18$ cm

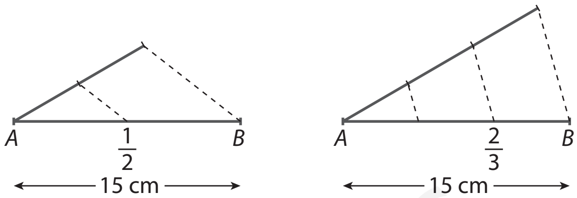
$\frac{30}{10} = \frac{18}{y} \Leftrightarrow y = \frac{18 \cdot 10}{30} \Leftrightarrow y = 6$ cm

APLICACIONES DE LA SEMEJANZA

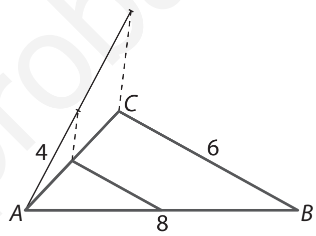
23 **Utilizando el teorema de Tales, divide un segmento *AB* de 5 cm de longitud en 3 partes iguales.**



24 **Empleando el teorema de Tales, señala $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ del segmento *AB* de longitud 15 cm.**

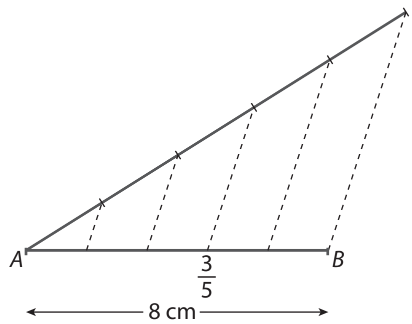


25 **Dibuja con regla y compás un triángulo de lados 8 cm, 6 cm y 4 cm. Obtén otro triángulo semejante al anterior con razón de semejanza $\frac{1}{2}$. Calcula la razón entre los perímetros de los dos triángulos.**

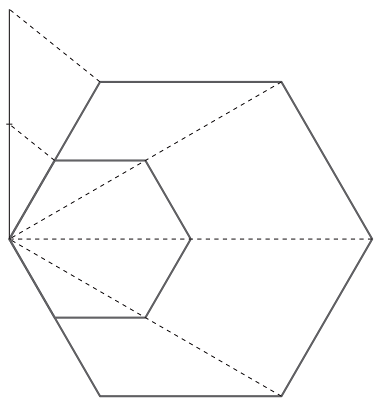


$\frac{P'}{P} = \frac{4+3+2}{8+6+4} \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{9}{18} \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{1}{2}$

26 **Utiliza el teorema de Tales para calcular gráficamente los $\frac{3}{5}$ de un segmento de 8 cm de longitud.**



27 **Utiliza papel cuadriculado para dibujar dos hexágonos semejantes de razón 1,5.**



28 **Si se unen los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero se obtiene un triángulo semejante. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuál es la razón entre las áreas de los dos triángulos?**

Un triángulo equilátero tiene todos los lados iguales. Llamamos x al lado del triángulo mayor.

El lado del triángulo menor es $\frac{x}{2}$. La razón de semejanza es:

$\frac{x}{\frac{x}{2}} = k \Leftrightarrow 2 = k$. La razón de semejanza de las áreas es $k^2 = 4$.

29 **Calcula la altura de una casa que proyecta una sombra de 5 metros sabiendo que un árbol de 3 m de alto proyecta una sombra de 1 metro.**

$\frac{x}{5} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow x = 15$ m

30 **Dibuja un pentágono inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio. Construye uno semejante a él con razón de semejanza $\frac{1}{3}$ y otro de razón $\frac{3}{4}$.**

Para construir un pentágono semejante al inscrito en la circunferencia con razón de semejanza $\frac{1}{3}$, se elige un vértice del pentágono y desde él se trazan semirrectas que pasan por los restantes vértices.

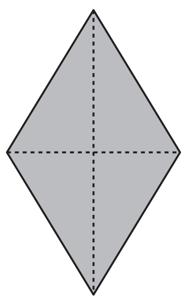
La relación entre los lados del pentágono es:

$$\frac{AE'}{AE} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow AE' = AE \cdot \frac{1}{3}$$

Se calculan $\frac{1}{3}$ del segmento AE, y se obtiene E'. Desde el vértice E' se traza una paralela al lado ED para obtener el vértice D' y así con todos los vértices del nuevo pentágono.

Se procede igual para calcular el pentágono semejante a $\frac{3}{4}$.

31 **Obtén un rombo semejante al dado con razón de semejanza $\frac{1}{4}$.**



El nuevo rombo obtenido es semejante al dado, pero la longitud de los lados es $\frac{1}{4}$ más pequeña.

32 **Dibuja una circunferencia y construye en ella un hexágono regular. Si trazas todas las diagonales obtienes una estrella:**

a) Explica qué proceso puedes seguir para obtener una estrella semejante a la anterior con razón de semejanza 2.

b) Comprueba que tu razonamiento es correcto.

a) Construir otro hexágono semejante al inicial de razón 2, es decir, los lados miden el doble que el inicial. Al obtener el nuevo hexágono, se trazan las diagonales y obtenemos la estrella semejante a la inicial pero el doble de grande.

b) Hacer el dibujo para comprobarlo.

33 **La escala de la maqueta de una casa es 1:50. Si la puerta de la casa en la maqueta mide 4,5 cm de alto y 3,6 cm de ancho, ¿cuáles son sus medidas reales?**

$\frac{1}{50} = \frac{4{,}5}{x} \Leftrightarrow x = 50 \cdot 4{,}5 \Leftrightarrow x = 225$ cm de alto.

$\frac{1}{50} = \frac{3{,}6}{y} \Leftrightarrow y = 50 \cdot 3{,}6 \Leftrightarrow y = 180$ cm de ancho.

34 **En un mapa de España, mide la distancia entre la capital de tu provincia y la población más importante y más próxima a ella. Utiliza la escala del mapa para averiguar la distancia real entre esas dos poblaciones.**

Respuesta abierta.

35 **El plano del instituto está realizado con una escala de 1:100. Si el gimnasio tiene forma rectangular y sus dimensiones son 60 m de largo por 40 m de ancho, ¿cuáles son las dimensiones del gimnasio en el plano?**

$\frac{1}{100} = \frac{x}{6\,000} \Leftrightarrow x = 60$ cm de largo.

$\frac{1}{100} = \frac{x}{4\,000} \Leftrightarrow x = 40$ cm de ancho.

36 **La maqueta de un coche mide 4,2 cm de largo. ¿Cuál es la medida real del coche si la escala de la maqueta es 1:90?**

$\frac{1}{90} = \frac{4{,}2}{x} \Leftrightarrow x = 4{,}2 \cdot 90 \Leftrightarrow x = 378$ cm

37 **Si la distancia entre dos ciudades es 250 km, ¿a qué distancia en centímetros están sobre un plano a escala 1:25 000?**

$\frac{1}{25\,000} = \frac{x}{25\,000\,000} \Leftrightarrow x = 1\,000$ cm

38 **Si la distancia entre dos ciudades sobre un plano a escala 1:150 000 es 4,5 cm, ¿a qué distancia estarán en un plano a escala 1:25 000?**

$\frac{1}{150\,000} = \frac{4{,}5}{x} \Leftrightarrow x = 4{,}5 \cdot 150\,000 \Leftrightarrow x = 675\,000$ cm en la realidad.

$\frac{1}{25\,000} = \frac{y}{675\,000} \Leftrightarrow y = 27$ cm en el segundo plano

TEOREMA DE PITÁGORAS. APLICACIONES

39 **Los catetos de un triángulo rectángulo miden 9 cm y 12 cm. Calcula:**

a) La hipotenusa.

b) La hipotenusa de un triángulo semejante con razón de semejanza 3,5.

a) $H = \sqrt{9^2 + 12^2} \Leftrightarrow H = 15$ cm

b) $\frac{H'}{H} = k \Leftrightarrow H' = k \cdot H \Leftrightarrow H' = 3{,}5 \cdot 15 \Leftrightarrow H' = 52{,}50$ cm

40 **Los catetos de un triángulo rectángulo miden 9 y 12 cm. Calcula:**

a) El área del triángulo.

b) La hipotenusa.

a) $A = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A = \frac{9 \cdot 12}{2} \Leftrightarrow A = 54$ cm^2

b) $H = \sqrt{9^2 + 12^2} \Leftrightarrow H = 15$ cm

41 **La apotema de un hexágono regular mide 3,46 cm. ¿Cuál es la medida del lado del hexágono?**

El hexágono regular tiene todos los lados iguales. Está formado por 6 triángulos equiláteros cuyos 3 lados miden igual. Al trazar la apotema se obtiene un triángulo rectángulo cuya hipotenusa vale x y el cateto vale $\frac{x}{2}$.

$$ap = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \Leftrightarrow 3{,}46 = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3{,}46^2 \cdot 4}{3}} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 4$

42 **Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 12 cm y el lado desigual 10 cm.**

Calculamos la altura por el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{12^2 - 5^2} \Leftrightarrow h = 10{,}9$ cm

$A = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A = \frac{5 \cdot 10{,}9}{2} \Leftrightarrow A = 27{,}25$ cm^2

43 **Las diagonales de un rombo miden 24 cm y 32 cm. Calcula las medidas de los lados, el área y el perímetro.**

El lado es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma al trazar las diagonales del rombo.

$H = \sqrt{12^2 + 16^2} \Leftrightarrow H = 20$ cm

El área del rombo es:

$A = \frac{D \cdot d}{2} \Leftrightarrow A = \frac{32 \cdot 24}{2} \Leftrightarrow A = 384$ cm^2

El perímetro es $20 \cdot 4 = 80$ cm.

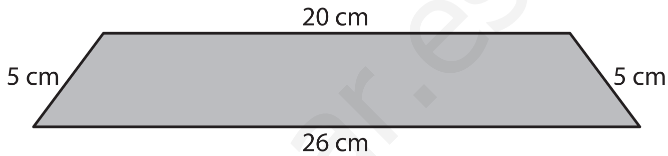
44 **Calcula el radio de una circunferencia circunscrita a un cuadrado de lado 10 cm.**

El radio de la circunferencia es la mitad de la diagonal del cuadrado:

$H = \sqrt{l^2 + l^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{2l^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{2 \cdot 10^2} \Leftrightarrow H = 14{,}14$ cm

El radio de la circunferencia es la mitad, $\frac{14{,}14}{2} = 7{,}07$ cm.

45 **Calcula la altura del siguiente trapecio:**



Trazamos la altura desde un vértice de la base menor hasta la base mayor y se obtiene un triángulo rectángulo.

La base del triángulo es $\frac{26 - 20}{2} = 3$ cm.

La altura se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras:

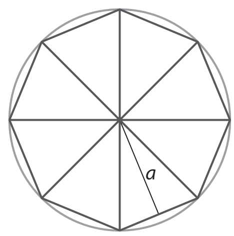
$H^2 = c^2 + c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{H^2 - c^2} \Leftrightarrow c = \sqrt{5^2 - 3^2} \Leftrightarrow c = 4$ cm.

46 **Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 1 dm.**

Al trazar la altura en el triángulo equilátero se obtiene un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 1 dm y la base mide 0,5 dm. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$H^2 = b^2 + h^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{H^2 - b^2} \Leftrightarrow c = \sqrt{1^2 - 0{,}5^2} \Leftrightarrow c = 0{,}86$ dm

47 **Calcula la apotema de un octógono de lado 4 cm y radio de la circunferencia circunscrita 8 cm.**



$ap = \sqrt{8^2 - 2^2} \Leftrightarrow ap = 7{,}75$ cm

48 **Calcula el perímetro de un rombo si las diagonales miden 4 dm y 12 dm.**

Calculamos el lado del rombo, que es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se obtiene al trazar las diagonales en el rombo.

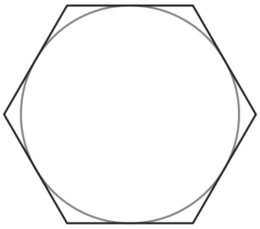
$H = \sqrt{6^2 + 2^2} \Leftrightarrow H = 6{,}32$ cm

El perímetro es $4 \cdot 6{,}32 = 25{,}28$ cm.

49 **Si la diagonal de un cuadrado es 5,66 dm, ¿cuál es la longitud del lado?**

$D^2 = 2l^2 \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{D^2}{2}} \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{5{,}66^2}{2}} \Leftrightarrow l = 4$ dm

50 **En una caja con forma de hexágono regular de lado 10 cm se quiere guardar una tarta de forma circular, ¿cuál es el radio de la mayor tarta que puede contener la caja?**



La apotema es el radio de la mayor tarta que puede contener la caja.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$ap = \sqrt{H^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} \Leftrightarrow ap = \sqrt{10^2 - 5^2} \Leftrightarrow ap = 8{,}66 \text{ cm}$$

51 **La diagonal de un campo en forma de cuadrado mide $\sqrt{288}$ m. Calcula la medida del lado del campo.**

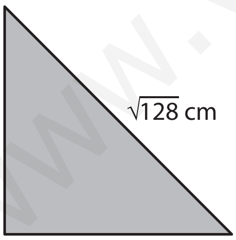
$$D^2 = 2l^2 \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{D^2}{2}} \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{(\sqrt{288})^2}{2}} \Leftrightarrow l = 12 \text{ m}$$

52 **Un carpintero construye una puerta de 2 metros de alto por 3 metros de ancho. Si se desea que la puerta tenga forma rectangular, ¿cuál debe ser la medida de la diagonal?**

Al trazar la diagonal en el rectángulo se forma el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es dicha diagonal.

$$H = \sqrt{3^2 + 2^2} \Leftrightarrow H = 3{,}6 \text{ m}$$

53 **Halla la medida de los lados de un triángulo rectángulo isósceles si el lado desigual mide $\sqrt{128}$ cm.**



El triángulo rectángulo isósceles tiene dos lados iguales y uno desigual. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$H^2 = c^2 + c^2 \Leftrightarrow H^2 = 2c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{H^2}{2}} \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{(\sqrt{128})^2}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = 8 \text{ cm}$$

54 **Una escalera tiene 10 m de largo y se quiere apoyar en una pared vertical de forma que el extremo superior esté a una altura de 8 metros. ¿A qué distancia de la pared se debe poner el extremo inferior de la escalera?**

Hay que calcular la base del triángulo rectángulo que se forma:

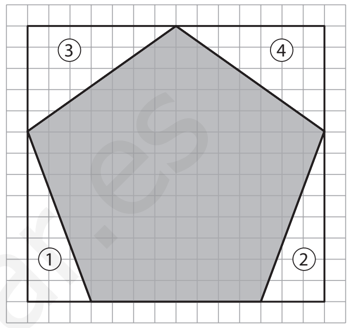
$$b = \sqrt{H^2 - h^2} \Leftrightarrow b = \sqrt{10^2 - 8^2} \Leftrightarrow b = 6 \text{ m}$$

55 **Calcula la distancia entre la base del poste derecho y la escuadra izquierda de la portería de fútbol 11.**

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$H = \sqrt{c^2 + c^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{7{,}32^2 + 2{,}44^2} \Leftrightarrow H = 7{,}72 \text{ m}$$

56 **Calcula el perímetro del pentágono de la figura. Utiliza la calculadora para aproximar el resultado hasta las centésimas.**



Calculamos la hipotenusa del triángulo 1, que es igual al triángulo 2:

$$H = \sqrt{8^2 + 3^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{73}$$

Calculamos la hipotenusa del triángulo 3, que es igual al triángulo 4:

$$H = \sqrt{7^2 + 5^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{74}$$

El perímetro es la suma de todas las hipotenusas:

$$P = 2\sqrt{73} + 2\sqrt{74} \Leftrightarrow P = 2 \cdot 8{,}54 + 2 \cdot 8{,}6 \Leftrightarrow P = 34{,}28$$

57 **Se considera un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 6 cm y su altura 4 cm:**

a) Calcula la medida de los lados iguales del triángulo.

b) Construye un triángulo semejante a él con razón de semejanza 3.

c) Comprueba que la razón de semejanza de los perímetros de ambos triángulos es igual a la razón de semejanza de los lados homólogos.

d) Comprueba que la razón de las áreas de los dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza de los lados homólogos.

a) Los lados iguales del triángulo es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se obtiene al trazar la altura:

$$H = \sqrt{b^2 + h^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow H = 5 \text{ cm}$$

b) El triángulo semejante tiene triple longitud en todos sus lados.

c) $\frac{P'}{P} = \frac{15 + 15 + 18}{5 + 5 + 6} \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{48}{16} \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = 3$

d) Calculamos el área de cada triángulo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A = \frac{6 \cdot 4}{2} \Leftrightarrow A = 12 \text{ cm}^2$$

$$A' = \frac{b' \cdot h'}{2} \Leftrightarrow A' = \frac{18 \cdot 12}{2} \Leftrightarrow A' = 108 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{108}{12} \Leftrightarrow \frac{A'}{A} = 9 \Leftrightarrow \frac{A'}{A} = k^2 \Leftrightarrow k = \sqrt{9} \Leftrightarrow k = 3$$