

# 2 Potencias y raíces cuadradas

## DESARROLLA TUS COMPETENCIAS

- 2.I. Si el tablero hubiera tenido solo 3 casillas, el premio habrían sido  $1 + 2 + 4 = 7$  granos de trigo. Con otra casilla más,  $1 + 2 + 4 + 8 = 15$  granos. Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

Casillas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Suma	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095

- 2.II. En la tabla anterior, suma 1 a todos los números de la última fila. ¿Ves alguna relación entre estos números y los de la primera fila? Si no, descompón los últimos números que has obtenido.

Al sumar 1 a los números de la última fila se obtienen potencias de 2, cuyos exponentes son los de la primera fila:  $2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ , etc.

- 2.III. ¿Cómo calcularías, sin tener que hacer todas las sumas, el premio correspondiente a un tablero de 15 casillas? Busca una fórmula, calcúlalo y comprueba el resultado.

La fórmula para  $n$  casillas es  $2^n - 1$ . A 15 casillas les corresponde un premio de  $2^{15} - 1 = 32\,767$  granos.

## ACTIVIDADES PROPUESTAS

- 2.1. Actividad resuelta.

- 2.2. Escribe de forma abreviada.

a)  $6 \cdot 6 \cdot 6$

d)  $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

b)  $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

e)  $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

c)  $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$

a)  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$

d)  $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^4$

b)  $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = (-4)^5$

e)  $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^5$

c)  $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^9$

- 2.3. Desarrolla las siguientes potencias.

a)  $10^4$

b)  $(-9)^6$

c)  $3^5$

d)  $(-7)^3$

a)  $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

b)  $(-9)^6 = (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9)$

c)  $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

d)  $(-7)^3 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$

2.4. Indica, sin resolverlas, el signo de las potencias.

a)  $(-1)^{12}$

b)  $(-8)^{501}$

c)  $(-6)^{204}$

a) Positiva

b) Negativa

c) Positiva

2.5. Copia en tu cuaderno y completa.

a)  $2^{\square} = 16$

d)  $\square^5 = -243$

b)  $\square^3 = 125$

e)  $(-9)^{\square} = 81$

c)  $2^6 = 4^{\square}$

f)  $(-7)^{\square} = -7$

a)  $2^4 = 16$

d)  $(-3)^5 = -243$

b)  $5^3 = 125$

e)  $(-9)^2 = 81$

c)  $2^6 = 4^3$

f)  $(-7)^1 = -7$

2.6. ¿Qué números enteros elevados al cuadrado dan como resultado 64?

8 y -8

2.7. (TIC) Calcula.

a)  $-1^5$

c)  $-(-2)^4$

b)  $(-3)^6$

d)  $-(-4)^3$

a)  $-1^5 = -1$

c)  $-(-2)^4 = -16$

b)  $(-3)^6 = 729$

d)  $-(-4)^3 = -(-64) = 64$

2.8. Actividad interactiva.

2.9. Actividad resuelta.

2.10. Expresa como una única potencia

a)  $5^3 \cdot 5^9 \cdot 5$

b)  $2^8 : 2^6$

c)  $(4^9)^2$

a)  $5^3 \cdot 5^9 \cdot 5 = 5^{13}$

b)  $2^8 : 2^6 = 2^2$

c)  $(4^9)^2 = 4^{18}$

2.11. Copia estas igualdades en tu cuaderno y complétalas.

a)  $3^7 : 3^2 = \square^5$

c)  $4^{\square} : 4 = 4^2$

b)  $6^8 \cdot 6^{\square} = 6^{15}$

d)  $(5^4)^{\square} = 5^{24}$

a)  $3^7 : 3^2 = 3^5$

c)  $4^3 : 4 = 4^2$

b)  $6^8 \cdot 6^7 = 6^{15}$

d)  $(5^4)^6 = 5^{24}$

2.12. Reduce a una sola potencia y luego indica si el resultado es positivo o negativo.

a)  $(-3)^8 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^7$

d)  $\frac{(-9)^4 \cdot (-9)^2}{(-9)^6}$

b)  $[(-2)^9]^3 \cdot (-2)$

e)  $[(-5)^7]^2 \cdot [(-5)^3]^5$

c)  $-(-3)^5 \cdot (-3)^2$

f)  $(-6)^2 \cdot (-6)^5 \cdot (-6)$

a)  $(-3)^8 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^7 = (-3)^{17}$ . Negativo

d)  $\frac{(-9)^4 \cdot (-9)^2}{(-9)^6} = (-9)^0 = 1$ . Positivo

b)  $[(-2)^9]^3 \cdot (-2) = (-2)^{28}$ . Positivo

e)  $[(-5)^7]^2 \cdot [(-5)^3]^5 = (-5)^{29}$ . Negativo

c)  $-(-3)^5 \cdot (-3)^2 = -(-3)^7$ . Positivo

f)  $(-6)^2 \cdot (-6)^5 : (-6) = (-6)^6$ . Positivo

2.13. Actividad resuelta.

2.14. Actividad resuelta.

2.15. Expresa como una única potencia.

a)  $4^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$

d)  $(-18)^{123} \cdot (-6)^{123}$

b)  $6^8 : 3^8$

e)  $(-2)^5 \cdot (-6)^5 \cdot 3^5$

c)  $2^7 \cdot (-4)^7$

f)  $(-8)^4 \cdot (-3)^4 : 12^4$

a)  $4^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = (4 \cdot 2 \cdot 5)^3 = 40^3$

d)  $(-18)^{123} \cdot (-6)^{123} = 108^{123}$

b)  $\frac{6^8}{3^8} = 2^8$

e)  $(-2)^5 \cdot (-6)^5 \cdot 3^5 = 36^5$

c)  $2^7 \cdot (-4)^7 = -8^7$

f)  $(-8)^4 \cdot (-3)^4 : 12^4 = 288^4$

2.16. Copia en tu cuaderno y completa las igualdades.

a)  $\square^3 : 2^3 = (-6)^3$

b)  $(-2)^4 \cdot 3^4 \cdot \square^4 = 30^4$

c)  $5^7 \cdot (-2)^7 : \square^7 = 10^7$

d)  $(2 \cdot 5)^5 = \square^5 \cdot 5^5 = 32 \cdot \square = \square$

e)  $(20 : \square)^3 = 20^3 : \square^3 = 8000 : \square = 1000$

a)  $(-12)^3 : 2^3 = (-6)^3$

b)  $(-2)^4 \cdot 3^4 \cdot (-5)^4 = 30^4$

c)  $5^7 \cdot (-2)^7 : (-1)^7 = 10^7$

d)  $(2 \cdot 5)^5 = 2^5 \cdot 5^5 = 32 \cdot 3125 = 100\,000$

e)  $(20 : 2)^3 = 20^3 : 2^3 = 8000 : 8 = 1000$



2.22. (TIC) Isabel tiene 8 bolsas de caramelos y cada una contiene 216 caramelos.

- a) Expresa con potencias el número de caramelos que tiene Isabel.  
 b) Isabel decide repartir los caramelos entre sus 27 compañeros de clase. Expresa en forma de potencia el número de caramelos que recibe cada uno.
- a)  $8 \cdot 216 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 = 2^6 \cdot 3^3$   
 b)  $8 \cdot 216 : 27 = 2^6 \cdot 3^3 : 3^3 = 2^6 = 64$  caramelos recibe cada uno.

2.23. Reduce a una sola potencia.

- |                        |                                 |
|------------------------|---------------------------------|
| a) $9^5 \cdot 4^{10}$  | d) $10^8 : (8^2 \cdot 2^2)$     |
| b) $216^4 : 2^{12}$    | e) $(20^4 \cdot 3^8) : 25^2$    |
| c) $16^3 \cdot 5^{12}$ | f) $(-6)^3 \cdot 8^2 : (-12)^3$ |
- a)  $9^5 \cdot 4^{10} = 3^{10} \cdot 4^{10} = 12^{10}$   
 b)  $216^4 : 2^{12} = 6^{12} : 2^{12} = 3^{12}$   
 c)  $16^3 \cdot 5^{12} = 2^{12} \cdot 5^{12} = 10^{12}$   
 d)  $10^8 : (8^2 \cdot 2^2) = 10^8 : 16^2 = 10^8 : 2^8 = 5^8$   
 e)  $(20^4 \cdot 3^8) : 25^2 = 20^4 \cdot 9^4 : 5^4 = 36^4$   
 f)  $(-6)^3 \cdot 8^2 : (-12)^3 = (-6)^3 \cdot 4^3 : (-12^3) = 2^3$

2.24. Calcula las siguientes operaciones y expresa el resultado como una sola potencia.

- |   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| a) $(25 \cdot 16)^3 : (9 + 1)^6$        | c) $((-4)^3 \cdot 5^3)^2 : (-20)^5$ |
| b) $((-36) : 6)^3 \cdot (2^2)^3 : (-8)$ | d) $(18 \cdot 6)^5 : (9 \cdot 6)^5$ |
- a)  $(25 \cdot 16)^3 : (9 + 1)^6 = 5^6 \cdot 2^{12} : (2^6 \cdot 5^6) = 2^6$   
 b)  $((-36) : 6)^3 \cdot (2^2)^3 : (-8) = (-6)^3 \cdot 2^6 : (-2)^3 = 2^6 \cdot 3^3 = 4^3 \cdot 3^3 = 12^3$   
 c)  $((-4)^3 \cdot 5^3)^2 : (-20)^5 = (-20)^6 : (-20)^5 = -20$   
 d)  $(18 \cdot 6)^5 : (9 \cdot 6)^5 = (18^5 \cdot 6^5) : (9^5 \cdot 6^5) = 2^5$

2.25. Actividad interactiva.

2.26. Actividad resuelta.

2.27. Escribe todos los cuadrados perfectos entre 50 y 150.

64, 81, 100, 121 y 144

2.28. De entre los siguientes números, indica cuáles tienen raíz cuadrada exacta y, en tal caso, hállala.

- |                      |                      |       |        |
|----------------------|----------------------|-------|--------|
| a) 82                | b) 121               | c) 94 | d) 169 |
| b) $\sqrt{121} = 11$ | d) $\sqrt{169} = 13$ |       |        |

2.29. La raíz de un número es 25, y el resto, 12. ¿De qué número se trata?

El número es  $25^2 + 12 = 625 + 12 = 637$ .

2.30. Calcula la raíz cuadrada entera y el resto de los siguientes números y comprueba la propiedad del resto.

- a) 38                      b) 62                      c) 103                      d) 340
- a)  $\sqrt{38} = 6; R = 38 - 6^2 = 2$                       c)  $\sqrt{103} = 10; R = 103 - 10^2 = 3$
- b)  $\sqrt{62} = 7; R = 62 - 7^2 = 13$                       d)  $\sqrt{340} = 18; R = 340 - 18^2 = 16$

2.31. (TIC) Resuelve.

- a)  $\sqrt{587}$                       c)  $\sqrt{71036}$                       e)  $\sqrt{322647}$
- b)  $\sqrt{2431}$                       d)  $\sqrt{10896}$                       f)  $\sqrt{453892}$
- a)  $\sqrt{587} \begin{array}{r} 24 \\ \hline -4 \\ \hline 187 \\ -176 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{l} 44 \cdot 4 = 176 \end{array}$                       c)  $\sqrt{71036} \begin{array}{r} 266 \\ \hline -4 \\ \hline 310 \\ -276 \\ \hline 3436 \\ -3156 \\ \hline 280 \end{array} \quad \begin{array}{l} 46 \cdot 6 = 276 \\ 526 \cdot 6 = 3156 \end{array}$                       e)  $\sqrt{322647} \begin{array}{r} 567 \\ \hline -25 \\ \hline 726 \\ -636 \\ \hline 9047 \\ -9024 \\ \hline 23 \end{array} \quad \begin{array}{l} 106 \cdot 6 = 636 \\ 1128 \cdot 8 = 9024 \end{array}$
- b)  $\sqrt{2431} \begin{array}{r} 49 \\ \hline -16 \\ \hline 831 \\ -801 \\ \hline 31 \end{array} \quad \begin{array}{l} 89 \cdot 9 = 801 \end{array}$                       d)  $\sqrt{10896} \begin{array}{r} 104 \\ \hline -1 \\ \hline 008 \\ 896 \\ -816 \\ \hline 80 \end{array} \quad \begin{array}{l} 20 \cdot 0 = 0 \\ 204 \cdot 4 = 816 \end{array}$                       f)  $\sqrt{453892} \begin{array}{r} 673 \\ \hline -36 \\ \hline 938 \\ -889 \\ \hline 4992 \\ -4029 \\ \hline 963 \end{array} \quad \begin{array}{l} 127 \cdot 7 = 889 \\ 1343 \cdot 3 = 4029 \end{array}$

2.32. Halla la raíz y el resto en las siguientes raíces cuadradas y comprueba el resultado mediante la propiedad del resto.

- a)  $\sqrt{319}$                       c)  $\sqrt{824}$
- b)  $\sqrt{4018}$                       d)  $\sqrt{1619}$
- a)  $\sqrt{319} \begin{array}{r} 17 \\ \hline -1 \\ \hline 219 \\ -189 \\ \hline 30 \end{array} \quad \begin{array}{l} 27 \cdot 7 = 189 \end{array}$                       c)  $\sqrt{824} \begin{array}{r} 28 \\ \hline -4 \\ \hline 424 \\ -384 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{l} 48 \cdot 8 = 384 \end{array}$
- $30 < 2 \cdot 17 + 1 \Rightarrow 30 < 35$                        $40 < 2 \cdot 28 + 1 \Rightarrow 40 < 57$
- b)  $\sqrt{4018} \begin{array}{r} 63 \\ \hline -36 \\ \hline 418 \\ -369 \\ \hline 49 \end{array} \quad \begin{array}{l} 123 \cdot 3 = 369 \end{array}$                       d)  $\sqrt{1619} \begin{array}{r} 40 \\ \hline -16 \\ \hline 019 \\ -0 \\ \hline 19 \end{array} \quad \begin{array}{l} 80 \cdot 0 = 0 \end{array}$
- $49 < 2 \cdot 63 + 1 \Rightarrow 49 < 127$                        $19 < 2 \cdot 40 + 1 \Rightarrow 19 < 81$

2.33. Actividad resuelta.

2.34. (TIC) Teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, calcula:

a)  $(-9)^2 : 3 - 4 \cdot \sqrt{49} + 8 \cdot (-2) : 4$

b)  $\sqrt{100} : 5 \cdot 2^3 - 6 \cdot (-3)^2$

c)  $45 : 5 \cdot (-1)^3 + 54 : \sqrt{36}$

d)  $-6 \cdot (-2)^2 + 24 : (-2)^3 \cdot \sqrt{25}$

e)  $4^2 \cdot (-7)^2 : \sqrt{64} - 21 : (-3)$

f)  $(8 - 2 \cdot 3^2) : (4^2 - 6) + \sqrt{49} \cdot (2^3 - 1)$

a)  $(-9)^2 : 3 - 4 \cdot \sqrt{49} + 8 \cdot (-2) : 4 = 81 : 3 - 4 \cdot 7 - 16 : 4 = 27 - 28 - 4 = -5$

b)  $\sqrt{100} : 5 \cdot 2^3 - 6 \cdot (-3)^2 = 10 : 5 \cdot 8 - 6 \cdot 9 = 16 - 54 = -38$

c)  $45 : 5 \cdot (-1)^3 + 54 : \sqrt{36} = 9 \cdot (-1) + 54 : 6 = -9 + 9 = 0$

d)  $-6 \cdot (-2)^2 + 24 : (-2)^3 \cdot \sqrt{25} = -6 \cdot 4 + 24 : (-8) \cdot 5 = -24 - 15 = -39$

e)  $4^2 \cdot (-7)^2 : \sqrt{64} - 21 : (-3) = 16 \cdot 49 : 8 + 7 = 98 + 7 = 105$

f)  $(8 - 2 \cdot 3^2) : (4^2 - 6) + \sqrt{49} \cdot (2^3 - 1) = (8 - 2 \cdot 9) : (16 - 6) + 7 \cdot (8 - 1) = -10 : 10 + 7 \cdot 7 = -1 + 49 = 48$

2.35. (TIC) Calcula.

a)  $2 \cdot (-6)^2 : (7 - 10) + 8^2 \cdot (3 - 4)$

b)  $(-5)^2 - \sqrt{81} \cdot [(-2)^4 : (7 - 3)] - (1 - \sqrt{121})$

c)  $(5 + 4)^2 : (-3)^2 - [\sqrt{225} : (6 - 9) + 2]$

a)  $2 \cdot (-6)^2 : (7 - 10) + 8^2 \cdot (3 - 4) = 2 \cdot 36 : (-3) + 64 \cdot (-1) = -24 - 64 = -88$

b)  $(-5)^2 - \sqrt{81} \cdot [(-2)^4 : (7 - 3)] - (1 - \sqrt{121}) = 25 - 9 \cdot (16 : 4) - (-10) = 25 - 36 + 10 = -1$

c)  $(5 + 4)^2 : (-3)^2 - [\sqrt{225} : (6 - 9) + 2] = 81 : 9 - [15 : (-3) + 2] = 9 - (-3) = 12$

2.36. Indica cuál es el error que se ha cometido en las siguientes operaciones.

a)  $3 \cdot 5^2 + (-2)^2 \cdot \sqrt{16} = 15^2 + 4 \cdot 4$

b)  $42 : (-2) \cdot 3 + 5^2 \cdot \sqrt{9} = 42 : (-6) + 25 \cdot 3$

a) Se ha multiplicado antes de elevar al cuadrado.

b) No se ha seguido el orden de izquierda a derecha al realizar las primeras operaciones. Hay que dividir primero y multiplicar después.

## EJERCICIOS

## Potencias

2.37. Expresa de forma reducida.

a)  $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$

c)  $(-13) \cdot (-13) \cdot (-13) \cdot (-13) \cdot (-13)$

b)  $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$

d)  $25 \cdot 25 \cdot 25$

a)  $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^7$

c)  $(-13) \cdot (-13) \cdot (-13) \cdot (-13) \cdot (-13) = (-13)^5$

b)  $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = (-6)^4$

d)  $25 \cdot 25 \cdot 25 = 25^3$

2.38. Desarrolla las siguientes potencias y calcula su resultado.

a)  $(-7)^3$

c)  $(-5)^4$

e)  $10^5$

b)  $4^6$

d)  $(-2)^5$

f)  $(-3)^6$

a)  $(-7)^3 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = -343$

b)  $4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$

c)  $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$

d)  $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

e)  $10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$

f)  $(-3)^6 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 729$

2.39. Sin hallar su valor, indica si son positivas o negativas las siguientes potencias.

a)  $(-2)^{15}$

b)  $(-7)^{24}$

c)  $(-5)^{63}$

d)  $(-4)^{36}$

a) Negativa

b) Positiva

c) Negativa

d) Positiva

2.40. Escribe como una potencia cuya base sea un número primo.

a) 729

c) 125

e) 169

b) 512

d) 1331

f) 343

a)  $3^6$

c)  $5^3$

e)  $13^2$

b)  $2^9$

d)  $11^3$

f)  $7^3$

2.41. Explica si son correctas o no las siguientes igualdades.

a)  $(-4)^5 = 4^5$

c)  $-9^3 = 9^3$

b)  $7^6 = (-7)^6$

d)  $(-5)^6 = 5^6$

a) No es correcta, el segundo miembro debe ser negativo.

b) Correcta. Si el exponente de una potencia con base negativa es par, el resultado es positivo.

c) No es correcta, el segundo miembro debe ser negativo.

d) Correcta. Si el exponente de una potencia con base negativa es par, el resultado es positivo.



2.42. Responde a las siguientes preguntas.

- a) ¿Cuál es el número entero que elevado al cubo da 216?  
 b) ¿Existe algún número entero cuyo cuadrado sea 64? Si la respuesta es positiva, ¿hay un solo número que cumpla esa condición?  
 a) 6  
 b) Sí, hay dos números enteros que cumplen la condición: 8 y -8.

2.43. Escribe los exponentes que faltan en las siguientes igualdades.

- |                               |                                       |                              |
|-------------------------------|---------------------------------------|------------------------------|
| a) $(-4)^6 = 2^{\square}$     | c) $35^8 = 5^8 \cdot (7^4)^{\square}$ | e) $(-3)^{24} = 9^{\square}$ |
| b) $(-5)^{11} = -5^{\square}$ | d) $(-10)^{\square} = 10^6$           | f) $125^{\square} = 5^{18}$  |
| a) $(-4)^6 = 2^{12}$          | c) $35^8 = 5^8 \cdot (7^4)^2$         | e) $(-3)^{24} = 9^{12}$      |
| b) $(-5)^{11} = -5^{11}$      | d) $(-10)^6 = 10^6$                   | f) $125^6 = 5^{18}$          |

Operaciones con potencias

2.44. Expresa como una única potencia.

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| a) $11^7 \cdot 11^9 \cdot 11^3$               | f) $(15^2)^3$                        |
| b) $28^3 : 4^3$                               | g) $6^9 : 6^5$                       |
| c) $2^7 \cdot 5^7 \cdot 3^7$                  | h) $(12^8)^3 \cdot 12$               |
| d) $(-9)^4 \cdot (-9)^6$                      | i) $(-5)^8 : (-5)^7$                 |
| e) $(-15)^{12} \cdot 3^{12}$                  | j) $24^{10} : (-6)^{10}$             |
| a) $11^7 \cdot 11^9 \cdot 11^3 = 11^{19}$     | f) $(15^2)^3 = 15^6$                 |
| b) $28^3 : 4^3 = (4^3 \cdot 7^3) : 4^3 = 7^3$ | g) $6^9 : 6^5 = 6^4$                 |
| c) $2^7 \cdot 5^7 \cdot 3^7 = 30^7$           | h) $(12^8)^3 \cdot 12 = 12^{25}$     |
| d) $(-9)^4 \cdot (-9)^6 = (-9)^{10}$          | i) $(-5)^8 : (-5)^7 = -5$            |
| e) $(-15)^{12} \cdot 3^{12} = (-45)^{12}$     | j) $24^{10} : (-6)^{10} = (-4)^{10}$ |

2.45. Realiza las operaciones y escribe el resultado en forma de potencia.

- |   |   |
|---|---|
| a) $36^5 : (-4)^5$                              | e) $(-4)^{12} \cdot (-2)^{12}$  |
| b) $7^6 : 7^2 : 7$                              | f) $[(-6)^3]^8 \cdot (-6)^{15}$   |
| c) $(-5) \cdot (-5)^7 \cdot (-5)^3$             | g) $[(-2)^3 \cdot (-2)^7]^2$  |
| d) $(8^5)^3 : 8^6$                              | h) $10^6 : (-2)^6 \cdot 5^3$  |
| a) $36^5 : (-4)^5 = (-9)^5$                     | e) $(-4)^{12} \cdot (-2)^{12} = (-8)^{12}$                              |
| b) $7^6 : 7^2 : 7 = 7^3$                        | f) $[(-6)^3]^8 \cdot (-6)^{15} = (-6)^{24} \cdot (-6)^{15} = (-6)^{39}$ |
| c) $(-5) \cdot (-5)^7 \cdot (-5)^3 = (-5)^{11}$ | g) $[(-2)^3 \cdot (-2)^7]^2 = [(-2)^{10}]^2 = (-2)^{20}$                |
| d) $(8^5)^3 : 8^6 = 8^{15} : 8^6 = 8^9$         | h) $10^6 : (-2)^6 \cdot 5^3 = (-5)^6 \cdot 5^3 = 5^6 \cdot 5^3 = 5^9$   |

2.46. Escribe en forma de producto de potencias de igual base.

- |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|
| a) $6^{13}$ | c) $10^4$   | e) $8^2$    |
| b) $(-5)^9$ | d) $(-2)^1$ | f) $(-4)^6$ |

Hay varias soluciones. Una de ellas es:

- |                                   |                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $6^{13} = 6^7 \cdot 6^6$       | c) $10^4 = 10 \cdot 10^3$         | e) $8^2 = 8 \cdot 8$              |
| b) $(-5)^9 = (-5)^3 \cdot (-5)^6$ | d) $(-2)^1 = (-2)^1 \cdot (-2)^0$ | f) $(-4)^6 = (-4)^2 \cdot (-4)^4$ |

2.47. Expresa como una división de potencias de la misma base.

- |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|
| a) $4^3$    | c) $(-3)^5$ | e) $2^6$    |
| b) $(-7)^2$ | d) $6^3$    | f) $(-5)^0$ |

Hay varias soluciones. Una de ellas es:

- |                             |                               |                               |
|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $4^3 = 4^5 : 4^2$        | c) $(-3)^5 = (-3)^8 : (-3)^3$ | e) $2^6 = 2^7 : 2$            |
| b) $(-7)^2 = (-7)^3 : (-7)$ | d) $6^3 = 6^7 : 6^4$          | f) $(-5)^0 = (-5)^4 : (-5)^4$ |

2.48. Escribe como potencia de una potencia.

- |             |              |                |
|-------------|--------------|----------------|
| a) $7^{10}$ | c) $5^{21}$  | e) $(-2)^{15}$ |
| b) $(-3)^6$ | d) $11^{16}$ | f) $(-6)^9$    |

Puede haber varias soluciones. Una de ellas es:

- |                          |                         |                             |
|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| a) $7^{10} = (7^5)^2$    | c) $5^{21} = (5^3)^7$   | e) $(-2)^{15} = [(-2)^5]^3$ |
| b) $(-3)^6 = [(-3)^2]^3$ | d) $11^{16} = (11^4)^4$ | f) $(-6)^9 = [(-6)^3]^3$    |

2.49. (TIC) Descompón las bases en factores primos y después realiza las operaciones con potencias que se obtienen.

- |                     |                      |
|---------------------|----------------------|
| a) $8^{35}$         | f) $125^7 : 25$      |
| b) $9^{21}$         | g) $18^6 \cdot 6$    |
| c) $16^{20}$        | h) $243^5 \cdot 9^2$ |
| d) $625^8$          | i) $42^3 \cdot 14^4$ |
| e) $343^4 \cdot 49$ |                      |
- 
- |  |  |
|--|--|
| a) $8^{35} = (2^3)^{35} = 2^{105}$               | f) $125^7 : 25 = (5^3)^7 : 5^2 = 2^{19}$   |
| b) $9^{21} = (3^2)^{21} = 3^{42}$                | g) $18^6 \cdot 6 = (2 \cdot 3^2)^6 \cdot 2 \cdot 3 = 2^7 \cdot 3^{13}$                     |
| c) $16^{20} = (2^4)^{20} = 2^{80}$               | h) $243^5 \cdot 9^2 = (3^5)^5 \cdot (3^2)^2 = 3^{29}$                                      |
| d) $625^8 = (5^4)^8 = 5^{32}$                    | i) $42^3 \cdot 14^4 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^3 \cdot (2 \cdot 7)^4 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 7^7$ |
| e) $343^4 \cdot 49 = (7^3)^4 \cdot 7^2 = 7^{14}$ |  |

2.50. Reduce al máximo las expresiones.

a)  $\frac{3^2 \cdot 5^9 \cdot 3^3}{5^4 \cdot 3}$

b)  $\frac{4^5 \cdot 6^3}{2^6 \cdot 3^2}$

c)  $\frac{(2^4)^3 \cdot 7^{10} \cdot 14}{2^9 \cdot (7^2)^4}$

d)  $\frac{5^4 \cdot (2^3)^5 \cdot 100}{(5^3)^2 \cdot 4^8}$

a)  $\frac{3^2 \cdot 5^9 \cdot 3^3}{5^4 \cdot 3} = 5^5 \cdot 3^4$

b)  $\frac{4^5 \cdot 6^3}{2^6 \cdot 3^2} = \frac{2^{10} \cdot 2^3 \cdot 3^3}{2^6 \cdot 3^2} = 2^7 \cdot 3$

c)  $\frac{(2^4)^3 \cdot 7^{10} \cdot 14}{2^9 \cdot (7^2)^4} = \frac{2^{12} \cdot 7^{10} \cdot 2 \cdot 7}{2^9 \cdot 7^8} = 2^4 \cdot 7^3$

d)  $\frac{5^4 \cdot (2^3)^5 \cdot 100}{(5^3)^2 \cdot 4^8} = \frac{5^4 \cdot 2^{15} \cdot 2^2 \cdot 5^2}{5^6 \cdot 2^{16}} = 2$

e)  $\frac{16 \cdot 3^4 \cdot 2^3}{9 \cdot 3^2 \cdot 4}$

f)  $\frac{28^6 \cdot 25^3}{49^2 \cdot 5^4}$

g)  $\frac{15^2 \cdot 5^3 \cdot 3^4}{(3^3)^2 \cdot 5}$

h)  $\frac{(-3)^4 \cdot 6^8 \cdot (-2)^5}{(-2)^7 \cdot 18^3}$

e)  $\frac{16 \cdot 3^4 \cdot 2^3}{9 \cdot 3^2 \cdot 4} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^3}{3^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = 2^5$

f)  $\frac{28^6 \cdot 25^3}{49^2 \cdot 5^4} = \frac{2^{12} \cdot 7^6 \cdot 5^6}{7^4 \cdot 5^4} = 2^{12} \cdot 7^2 \cdot 5^2$

g)  $\frac{15^2 \cdot 5^3 \cdot 3^4}{(3^3)^2 \cdot 5} = \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot 3^4}{3^6 \cdot 5} = 5^4$

h)  $\frac{(-3)^4 \cdot 6^8 \cdot (-2)^5}{(-2)^7 \cdot 18^3} = \frac{-3^4 \cdot 2^8 \cdot 3^8 \cdot 2^5}{-2^7 \cdot 2^3 \cdot 3^6} = 3^6 \cdot 2^3$

2.51. Utilizando la multiplicación y división de potencias de igual base e igual exponente, reduce a una única potencia.

a)  $3^5 \cdot 2^5 : 6^4$

b)  $10^8 \cdot 10^2 \cdot 5^{10}$

c)  $4^6 : 4^2 \cdot 5^4$

d)  $6^3 \cdot 6^{10} : 2^{13}$

a)  $3^5 \cdot 2^5 : 6^4 = 6^5 \cdot 6^7 = 6^{12}$

b)  $10^8 \cdot 10^2 \cdot 5^{10} = 10^{10} \cdot 5^{10} = 50^{10}$

c)  $4^6 : 4^2 \cdot 5^4 = 4^4 \cdot 5^4 = 20^4$

d)  $6^3 \cdot 6^{10} : 2^{13} = 6^{13} : 2^{13} = 3^{13}$

e)  $14^3 : 7^3 \cdot 2$

f)  $12^{10} : 3^{10} : 4^{10}$

g)  $4^9 \cdot 4^2 \cdot 2^{11}$

h)  $15^5 : 15^4 : 5^1$

e)  $14^3 : 7^3 \cdot 2 = 2^3 \cdot 2^9 = 2^{12}$

f)  $12^{10} : 3^{10} : 4^{10} = 4^{10} : 4^{10} = 4^0 = 1$

g)  $4^9 \cdot 4^2 \cdot 2^{11} = 4^{11} \cdot 2^{11} = 8^{11}$

h)  $15^5 : 15^4 : 5^1 = 15^1 : 5^1 = 3^1 = 3$

2.52. Entre estas cuatro opciones hay una incorrecta, ¿cuál es? Razónalo y explica por qué son correctas las otras tres.

a)  $5^8 \cdot 5^8 = 25^8$

b)  $5^8 \cdot 5^8 = (5^8)^2$

c)  $5^8 \cdot 5^8 = 5^{16}$

d)  $5^8 \cdot 5^8 = 25^{16}$

a) Es correcta. Se multiplica teniendo en cuenta que tienen el mismo exponente.

b) Es correcta porque el producto de un número por sí mismo se puede expresar como el cuadrado de ese número.

c) Es correcta. Se multiplica teniendo en cuenta que la base es la misma.

d) No es correcta porque se utilizan a la vez dos propiedades: producto de potencias de igual base y producto de potencias de igual exponente. Solo se debe usar una de ellas para hacer la operación.

2.53. (TIC) Simplifica.

a)  $\frac{75 \cdot 10^5 \cdot 3^9}{6^4 \cdot 5^4}$

c)  $\frac{100^2 \cdot 27}{30^2 \cdot 10^2}$

e)  $\frac{27^3 \cdot 2 \cdot 6^4}{18^2 \cdot 12}$

b)  $\frac{32^3 \cdot 81^5}{3^6 \cdot 3^8 \cdot 2^4 \cdot 12}$

d)  $\frac{(5^2 \cdot 7)^5 \cdot 49}{25^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4}$

f)  $\frac{8^4 \cdot 9^3 \cdot 2^7}{24 \cdot 16^3}$

a)  $\frac{75 \cdot 10^5 \cdot 3^9}{6^4 \cdot 5^4} = \frac{3 \cdot 5^2 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 3^3}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^6 \cdot 5^3$

d)  $\frac{(5^2 \cdot 7)^5 \cdot 49}{25^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4} = \frac{5^{10} \cdot 7^5 \cdot 7^2}{5^4 \cdot 5^3 \cdot 7^4} = 5^3 \cdot 7^3 = 35^3$

b)  $\frac{32^3 \cdot 81^5}{3^6 \cdot 3^8 \cdot 2^4 \cdot 12} = \frac{2^{15} \cdot 3^{20}}{3^{14} \cdot 2^4 \cdot 2^2 \cdot 3} = 2^9 \cdot 3^5$

e)  $\frac{27^3 \cdot 2 \cdot 6^4}{18^2 \cdot 12} = \frac{3^9 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot 3^4}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^2 \cdot 3} = 3^8 \cdot 2$

c)  $\frac{100^2 \cdot 27}{30^2 \cdot 10^2} = \frac{2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^3}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = 3$

f)  $\frac{8^4 \cdot 9^3 \cdot 2^7}{24 \cdot 16^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 2^7}{2^3 \cdot 3 \cdot 2^{12}} = 2^4 \cdot 3^5$

Raíces cuadradas

2.54. Indica si son exactas o enteras cada una de las siguientes raíces cuadradas.

a)  $\sqrt{32}$

c)  $\sqrt{81}$

e)  $\sqrt{169}$

b)  $\sqrt{196}$

d)  $\sqrt{40}$

f)  $\sqrt{256}$

a) Entera

c) Exacta

e) Exacta

b) Exacta

d) Entera

f) Exacta

2.55. Escribe todos los cuadrados perfectos entre 200 y 300.

225, 256 y 289

2.56. ¿Entre qué dos valores enteros se encuentra la raíz cuadrada de los siguientes números?

a) 39

c) 95

e) 238

b) 114

d) 485

f) 351

a) Entre 6 y 7

c) Entre 9 y 10

e) Entre 15 y 16

b) Entre 10 y 11

d) Entre 22 y 23

f) Entre 18 y 19

2.57. Calcula el valor de las siguientes raíces cuadradas exactas.

a)  $\sqrt{400}$

c)  $\sqrt{900}$

e)  $\sqrt{324}$

b)  $\sqrt{225}$

d)  $\sqrt{441}$

f)  $\sqrt{10000}$

a) 20

c) 30

e) 18

b) 15

d) 21

f) 100

2.58. ¿Cuál es la raíz cuadrada de -36? ¿Y la de -100?

Ninguno de los dos números tiene raíz cuadrada porque no existe ningún número que elevado al cuadrado dé negativo.

2.59. Sin calcular el valor de la raíz, escribe el número de cifras que tiene la raíz cuadrada de los siguientes números.

- a) 68 945                                  b) 9420                                  c) 683 214  
 a) 3 cifras                                  b) 2 cifras                                  c) 3 cifras

2.60. Halla la raíz y el resto de las raíces cuadradas enteras.

- a)  $\sqrt{114}$                                   d)  $\sqrt{785}$                                   g)  $\sqrt{6419}$   
 b)  $\sqrt{327}$                                   e)  $\sqrt{2325}$                                   h)  $\sqrt{7214}$   
 c)  $\sqrt{420}$                                   f)  $\sqrt{9207}$                                   i)  $\sqrt{1983}$
- a)  $\sqrt{114} \begin{array}{r} 10 \\ \hline 20 \cdot 0 = 0 \\ -1 \\ \hline 014 \end{array}$                                   d)  $\sqrt{785} \begin{array}{r} 28 \\ \hline 48 \cdot 8 = 384 \\ -4 \\ \hline 385 \\ -384 \\ \hline 1 \end{array}$                                   g)  $\sqrt{6419} \begin{array}{r} 80 \\ \hline 160 \cdot 0 = 0 \\ -64 \\ \hline 019 \end{array}$
- b)  $\sqrt{327} \begin{array}{r} 18 \\ \hline 28 \cdot 8 = 224 \\ -1 \\ \hline 227 \\ -224 \\ \hline 3 \end{array}$                                   e)  $\sqrt{2325} \begin{array}{r} 48 \\ \hline 88 \cdot 8 = 704 \\ -16 \\ \hline 725 \\ -704 \\ \hline 21 \end{array}$                                   h)  $\sqrt{7214} \begin{array}{r} 84 \\ \hline 164 \cdot 4 = 656 \\ -64 \\ \hline 814 \\ -656 \\ \hline 158 \end{array}$
- c)  $\sqrt{420} \begin{array}{r} 20 \\ \hline 40 \cdot 0 = 0 \\ -4 \\ \hline 020 \end{array}$                                   f)  $\sqrt{9207} \begin{array}{r} 95 \\ \hline 185 \cdot 5 = 925 \\ -81 \\ \hline 1107 \\ -925 \\ \hline 182 \end{array}$                                   i)  $\sqrt{1983} \begin{array}{r} 44 \\ \hline 84 \cdot 4 = 336 \\ -16 \\ \hline 383 \\ -336 \\ \hline 47 \end{array}$

2.61. Resuelve las raíces cuadradas y comprueba la propiedad del resto.

- a)  $\sqrt{65402}$                                   c)  $\sqrt{36009}$                                   e)  $\sqrt{204568}$   
 b)  $\sqrt{98314}$                                   d)  $\sqrt{182437}$                                   f)  $\sqrt{2350812}$
- a)  $\sqrt{65402} \begin{array}{r} 255 \\ \hline 45 \cdot 5 = 225 \\ -4 \\ \hline 254 \\ 505 \cdot 5 = 2525 \\ -225 \\ \hline 2902 \\ -2525 \\ \hline 377 \end{array}$                                   c)  $\sqrt{36009} \begin{array}{r} 189 \\ \hline 28 \cdot 8 = 224 \\ -1 \\ \hline 260 \\ 369 \cdot 9 = 3321 \\ -224 \\ \hline 3609 \\ -3321 \\ \hline 288 \end{array}$                                   e)  $\sqrt{204568} \begin{array}{r} 452 \\ \hline 85 \cdot 5 = 425 \\ -16 \\ \hline 0445 \\ -425 \\ \hline 2068 \\ -1804 \\ \hline 264 \end{array}$
- $377 < 2 \cdot 255 + 1$                                    $288 < 2 \cdot 189 + 1$                                    $264 < 2 \cdot 452 + 1$   
 $377 < 511$                                    $288 < 378 + 1$                                    $264 < 904 + 1$
- b)  $\sqrt{98314} \begin{array}{r} 319 \\ \hline 61 \cdot 1 = 61 \\ -9 \\ \hline 083 \\ 623 \cdot 3 = 1869 \\ -61 \\ \hline 2214 \\ -1869 \\ \hline 345 \end{array}$                                   d)  $\sqrt{182437} \begin{array}{r} 427 \\ \hline 82 \cdot 2 = 164 \\ -16 \\ \hline 224 \\ -164 \\ \hline 06037 \\ -5929 \\ \hline 108 \end{array}$                                   f)  $\sqrt{2350812} \begin{array}{r} 1533 \\ \hline 25 \cdot 5 = 125 \\ -1 \\ \hline 135 \\ 303 \cdot 3 = 909 \\ -125 \\ \hline 1008 \\ -909 \\ \hline 9912 \\ -9189 \\ \hline 723 \end{array}$
- $345 < 2 \cdot 313 + 1$                                    $108 < 2 \cdot 427 + 1$                                    $723 < 2 \cdot 1533 + 1$   
 $345 < 626 + 1$                                    $108 < 854 + 1$                                    $723 < 3066 + 1$

Jerarquía de las operaciones

2.62. (TIC) Realiza las operaciones sin paréntesis en el orden correcto.

- a)  $7^2 - 2^3 \cdot \sqrt{36} + 18 : (-2)$       d)  $(-3)^4 : \sqrt{9} \cdot 5 - 18 \cdot 4 : (-2)^3$   
 b)  $5 \cdot 3^2 + \sqrt{100} : 2 - (-3)^2$       e)  $36 \cdot \sqrt{4} : 3^2 - 40 : \sqrt{16} : (-5)$   
 c)  $186 : (-6) - \sqrt{25} \cdot (-2)^2 + 6 \cdot 4$       f)  $\sqrt{64} \cdot (-4)^2 : (-1)^5 + 38 : (-2) + 3 \cdot 5^2$
- a)  $7^2 - 2^3 \cdot \sqrt{36} + 18 : (-2) = 49 - 8 \cdot 6 - 9 = 49 - 48 - 9 = -8$   
 b)  $5 \cdot 3^2 + \sqrt{100} : 2 - (-3)^2 = 5 \cdot 9 + 10 : 2 - 9 = 45 + 5 - 9 = 41$   
 c)  $186 : (-6) - \sqrt{25} \cdot (-2)^2 + 6 \cdot 4 = -31 - 5 \cdot 4 + 24 = -27$   
 d)  $(-3)^4 : \sqrt{9} \cdot 5 - 18 \cdot 4 : (-2)^3 = 81 : 3 \cdot 5 - 72 : (-8) = 135 + 9 = 144$   
 e)  $36 \cdot \sqrt{4} : 3^2 - 40 : \sqrt{16} : (-5) = 36 \cdot 2 : 9 - 40 : 4 : (-5) = 8 + 2 = 10$   
 f)  $\sqrt{64} \cdot (-4)^2 : (-1)^5 + 38 : (-2) + 3 \cdot 5^2 = 8 \cdot 16 : (-1) - 19 + 3 \cdot 25 = -128 - 19 + 75 = -72$

2.63. (TIC) Calcula el resultado de las siguientes operaciones con paréntesis.

- a)  $6 \cdot (4 - 1)^2 + 9 : (2 + 1)^2 - (4 + \sqrt{16} : 2)$       d)  $(1 - 4 \cdot 2) \cdot \sqrt{49} - (-3)^3$   
 b)  $3 \cdot [7 - 5 \cdot (2 - 6) \cdot \sqrt{4}] - (7 - 3)^3$       e)  $75 : (-5)^2 - [3 \cdot 8 - 7 \cdot \sqrt{9}]$   
 c)  $54 : (-3)^2 + 12 \cdot (\sqrt{25} - 2)$       f)  $(4 + 2)^2 + 2 \cdot [28 : (-2)^2 \cdot 5 - 6 \cdot \sqrt{64}]$
- a)  $6 \cdot (4 - 1)^2 + 9 : (2 + 1)^2 - (4 + \sqrt{16} : 2) = 6 \cdot 9 + 9 : 9 - (4 + 2) = 54 + 1 - 6 = 49$   
 b)  $3 \cdot [7 - 5 \cdot (2 - 6) \cdot \sqrt{4}] - (7 - 3)^3 = 3 \cdot [7 - 5 \cdot (-4) \cdot 2] - 64 = 3 \cdot 47 - 64 = 141 - 64 = 77$   
 c)  $54 : (-3)^2 + 12 \cdot (\sqrt{25} - 2) = 54 : 9 + 12 \cdot (5 - 2) = 6 + 36 = 42$   
 d)  $(1 - 4 \cdot 2) \cdot \sqrt{49} - (-3)^3 = -7 \cdot 7 - (-27) = -49 + 27 = -22$   
 e)  $75 : (-5)^2 - [3 \cdot 8 - 7 \cdot \sqrt{9}] = 75 : 25 - [24 - 21] = 3 - 3 = 0$   
 f)  $(4 + 2)^2 + 2 \cdot [28 : (-2)^2 \cdot 5 - 6 \cdot \sqrt{64}] = 36 + 2 \cdot (28 : 4 \cdot 5 - 6 \cdot 8) =$   
 $= 36 + 2 \cdot (35 - 48) = 36 - 26 = 10$

2.64. Comprueba si son verdaderas o falsas las igualdades.

- a)  $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4}$       c)  $\sqrt{144 + 25} = \sqrt{144} + \sqrt{25}$   
 b)  $(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$       d)  $\sqrt{100 : 4} = \sqrt{100} : \sqrt{4}$
- a)  $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$       c)  $\sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$   
 $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$   
 Por tanto, es verdadera.       $\sqrt{144} + \sqrt{25} = 12 + 5 = 17$   
 Es falsa.
- b)  $(5 + 3)^2 = 8^2 = 64$       d)  $\sqrt{100 : 4} = \sqrt{25} = 5$   
 $5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$   
 Es falsa.       $\sqrt{100} : \sqrt{4} = 10 : 2 = 5$   
 Es verdadera.

2.65. (TIC) Calcula.

a)  $4 \cdot (6 - 5 \cdot 2)^2 + 32 : 2^3$

b)  $8 : (-1 - 3) + \sqrt{4+5} - 3^2 \cdot (4 + 2)$

c)  $(-4)^3 : (\sqrt{25} - 2) + 7 \cdot [8 \cdot (-3)^3 : (-2)^3 + 1]$

d)  $(6 - 15 : 3) (\sqrt{9-5} \cdot 6 : 3 - 7)$

e)  $216 : (-2)^3 - 4 \cdot [8 \cdot (-3^2) - 9 \cdot (4 - \sqrt{16})]$

f)  $-2 \cdot (6 + 2)^2 + (-5)^3 : (2 \cdot 3 - 1) + \sqrt{100} \cdot (-3)^3$

a)  $4 \cdot (6 - 5 \cdot 2)^2 + 32 : 2^3 = 4 \cdot (-4)^2 + 32 : 8 = 64 + 4 = 68$

b)  $8 : (-1 - 3) + \sqrt{4+5} - 3^2 \cdot (4 + 2) = 8 : (-4) + 3 - 9 \cdot 6 = -2 + 3 - 54 = -53$

c)  $(-4)^3 : (\sqrt{25} - 3) + 7 \cdot [8 \cdot (-3)^3 : (-2)^3 + 1] = -64 : 2 + 7 \cdot [8 \cdot (-27) : (-8) + 1] = -32 + 7 \cdot (-26) = -32 - 182 = -214$

d)  $(6 - 15 : 3) \cdot (\sqrt{9-5} \cdot 6 : 3 - 7) = (6 - 5) \cdot (2 \cdot 6 : 3 - 7) = -3$

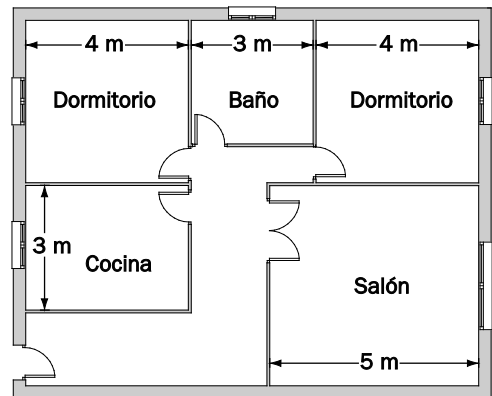
e)  $216 : (-2)^3 - 4 \cdot [8 \cdot (-3^2) - 9 \cdot (4 - \sqrt{16})] = 216 : (-8) - 4 \cdot [8 \cdot (-9) - 9 \cdot 0] = -27 + 288 = 261$

f)  $-2 \cdot (6 + 2)^2 + (-5)^3 : (2 \cdot 3 - 1) + \sqrt{100} \cdot (-3)^3 = -2 \cdot 64 - 125 : 5 + 10 \cdot (-27) = -128 - 25 - 270 = -423$

PROBLEMAS

2.66. La casa de Laura tiene un salón, dos dormitorios, un baño y la cocina. Todos los compartimentos tienen forma cuadrada, excepto la cocina, que es rectangular.

En el dibujo se observa cómo es y las medidas de cada estancia.



a) Expresa con operaciones combinadas cómo se puede obtener la medida de la superficie que ocupan entre todas las habitaciones de la casa.

b) Calcula esa área.

a)  $5^2 + 4^2 + 3^2 + 4^2 + 4 \cdot 3$

b)  $25 + 16 + 9 + 16 + 12 = 78 \text{ m}^2$

2.67. Los padres de Javier quieren construir una piscina en su parcela. Javier quiere que tenga forma rectangular de 9 m de largo y 4 m de ancho, y sus padres prefieren que sea cuadrada y que ocupe la misma superficie. ¿Es posible?



¿Cuánto mediría el lado de la piscina cuadrada?

La superficie que ocupa la piscina es de  $9 \cdot 4 = 36 \text{ m}^2$ .

Si  $l$  es el lado de la piscina cuadrada, su área debe ser también 36.

Por tanto,  $l^2 = 36 \Rightarrow l = \sqrt{36} = 6$

Se podría construir una piscina cuadrada con la misma superficie. Su lado debe ser de 6 m.

- 2.68. (TIC) En una clase de 2.º de ESO quieren dibujar un árbol en el que representar a lo largo del curso 50 momentos importantes de la historia de las distintas asignaturas.

El número de ramas que parten del tronco debe ser igual que el de las que parten de cada una de ellas. Sobre estas últimas se colocará uno de los 50 hechos importantes. ¿Es matemáticamente posible dibujar el árbol?

¿Cuántas ramas deben salir del tronco? ¿Y de cada una de ellas?

Si del árbol parten  $x$  ramas, y de cada una de estas, otras  $x$ , en total habrá  $x^2$  ramas en el árbol.

Estas deben ser 50 para que en cada una de ellas se escriba uno de los hechos históricos.

$$\text{Por tanto, } x^2 = 50 \Rightarrow x = \sqrt{50}$$

Como la raíz cuadrada de 50 no es exacta, nos tendremos que conformar con colocar sólo 49 hechos importantes.

- 2.69. (TIC) Una persona les ha contado un secreto a otras tres. A la hora siguiente, cada una de ellas lo ha contado a tres personas más, y otra hora más tarde, cada una de estas lo ha contado a otras tres nuevas personas.

En la tabla siguiente aparece la cantidad de personas que conocen el secreto durante cada nueva hora que pasa. Cópiala y complétala en tu cuaderno.

Horas	N.º de personas
1	3
2	$3^2$
3	$3^3$
4	$3^4$
6	$3^6$

- a) ¿Cuántas personas más lo conocerán durante la 8.ª hora?
- b) Si el secreto hubiera empezado a difundirse a las tres de la tarde, ¿cuántas personas en total lo conocerían a las siete de la tarde?
- c) ¿Cómo se expresaría en forma de potencia de base 3 el número de personas que conocían el secreto antes de empezar a contarlo?
- a)  $3^8$  personas
- b) Como habrían pasado 4 horas, lo conocerían  $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121$  personas.
- c) Lo conocía una persona:  $1 = 3^0$ .

- 2.70. Pablo quiere saber cuántos bisabuelos y tatarabuelos tiene. Para ello está construyendo un árbol genealógico en el que aparecen sus padres, los padres de sus padres y así sucesivamente hasta llegar a sus tatarabuelos.

- a) ¿Cuántos bisabuelos tiene? ¿Cuántos tatarabuelos?
- b) ¿Se pueden expresar esas cantidades en forma de potencia?
- a) 8 bisabuelos y 16 tatarabuelos
- b)  $8 = 2^3$  y  $16 = 2^4$



2.71. El marco de un portarretratos tiene forma cuadrada de 576 cm<sup>2</sup> de superficie.

En su interior se ha inscrito una circunferencia que es donde se coloca la fotografía. ¿Cuánto mide su radio?



El lado del cuadrado coincide con el diámetro de la circunferencia.

Su medida:  $l = \sqrt{576} = 24$  cm. El radio de la circunferencia es de 12 cm.

2.72. Un listón de madera se corta por la mitad. Cada uno de los trozos se vuelve a dividir por la mitad y los trozos que resultan se dividen de nuevo por la mitad. El proceso se repite 5 veces más.

a) Escribe la operación que hay que hacer en cada paso para saber el número de trozos que hay y expresa el resultado en forma de potencia.

b) Si con esos listones se hicieran marcos para cuadros, ¿cuántos se podrían hacer? (Utiliza las potencias para hacer las operaciones.)

- |  |                     |                      |
|--|---------------------|----------------------|
| a) 2 trozos en el primer corte           | En el cuarto: $2^4$ | En el séptimo: $2^7$ |
| $2 \cdot 2$ en el segundo: $2^2$         | En el quinto: $2^5$ | En el octavo: $2^8$  |
| $2 \cdot 2 \cdot 2$ en el tercero: $2^3$ | En el sexto: $2^6$  |                      |

b) El total de listones es  $2^8$ .

Cada marco necesita 4 listones,  $2^2$ .

Se podrían hacer  $2^8 : 2^2 = 2^6 = 64$  marcos.

### AMPLIACIÓN

2.73. El número  $5^{2000} \cdot 2^{2003}$  dividido entre  $10^{1999}$  es igual a:

- a) 10                      b) 80                      c) 40                      d) 16

Respuesta correcta, b:

$$\frac{5^{2000} \cdot 2^{2003}}{10^{1999}} = \frac{5^{2000} \cdot 2^{2000} \cdot 2^3}{10^{1999}} = \frac{10^{2000} \cdot 2^3}{10^{1999}} = 10 \cdot 2^3 = 80$$

2.74. ¿Cuál de los siguientes números es  $2^{100}$ ?

- a)  $4^5 \cdot 2^{10}$                       b) La mitad de  $2^{101}$                       c)  $(2^3)^{97}$                       d)  $2^2$

Respuesta correcta, b:

$$\frac{2^{101}}{2} = 2^{100}$$

2.75. Si  $N$  es el menor entero positivo tal que su mitad es un cuadrado perfecto, su tercera parte es un cubo perfecto y su cuarta parte es la quinta potencia de un número natural, el exponente de 2 en la descomposición en factores primos de  $N$  es:

- a) 24                      b) 25                      c) 26                      d) 27

$N$  debe tener al menos los factores 2 y 3. Así pues, el menor  $N$  buscado será  $N = 2^a \cdot 3^b$ .

$\frac{N}{2} = 2^{a-1} \cdot 3^b$ , que, al ser cuadrado perfecto, obliga a que  $a$  sea impar y  $b$  par.

$\frac{N}{3} = 2^a \cdot 3^{b-1}$ , que, al ser cubo perfecto, obliga a que  $a$  y  $b - 1$  sean múltiplos de 3.

$\frac{N}{4} = 2^{a-2} \cdot 3^b$ , que, al ser una quinta potencia, obliga a que  $a - 2$  sea múltiplo de 5.

Así pues, hay que buscar el menor número  $a$  que verifique simultáneamente ser impar, múltiplo de 3 y  $a - 2$  múltiplo de 5.

$a - 2$  debe acabar en 0 o 5, es decir,  $a$  debe acabar en 2 o 7, pero al ser impar, debe acabar en 7, y el menor múltiplo de 3 que acaba en 7 es 27.

Luego la respuesta correcta es la d.

2.76. ¿En cuántos ceros acaba el número  $8^7 \cdot 25^{10}$ ?

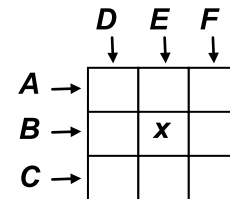
- a) 20                      b) 21                      c) 22                      d) 23

$8^7 \cdot 25^{10} = 2^{21} \cdot 5^{20} = 2 \cdot 10^{20}$ , que acabará en 20 ceros.

La respuesta correcta es la a.

2.77. Al completar el siguiente “crucinúmeros”, en el que, como observas, los seis números que tienes que escribir son de tres cifras cada uno y son:

- A: Número primo                      D: Potencia de 5  
 B: Número compuesto                E: Potencia de 2  
 C: Cuadrado perfecto                F: Potencia de 3



El número que debe haber en lugar de  $x$  es:

- a) 1                      b) 2                      c) 3                      d) 4

$D$  debe acabar en 25, pues las únicas potencias de 5 de 3 cifras son 125 y 625.

$C$  debería ser 529 o 576, los únicos cuadrados perfectos de 3 cifras que empiezan por 5, pero como ninguna potencia de 3 acaba en 6,  $C$  es 529.

Las únicas potencias de 2 de tres cifras son 128, 256 y 512, con lo que  $E$  es 512 y la cifra pedida es el 1.

Luego la respuesta correcta es la a.

2.78. Al ordenar de menor a mayor los números  $A = 3^{50}$ ,  $B = 2^{75}$  y  $C = (7^5)^5$ , resulta:

- a)  $A < B < C$             b)  $C < B < A$             c)  $A < C < B$             d)  $B < A < C$

Escribimos  $A = (3^2)^{25}$ ,  $B = (2^3)^{25}$  y  $C = 7^{25}$ , es decir,  $A = 9^{25}$ ,  $B = 8^{25}$ ,  $C = 7^{25}$

Ordenados de menor a mayor resulta  $C < B < A$ .

Luego la respuesta correcta es la b.

AUTOEVALUACIÓN

2.1 Desarrolla las potencias y calcula su resultado.

- a)  $7^3$                       b)  $(-5)^4$                       c)  $(-2)^7$                       d)  $-3^4$
- a)  $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$
- b)  $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$
- c)  $(-2)^7 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -128$
- d)  $-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$

2.2 Escribe en forma de potencia.

- a) 1024                      c) -243                      e) 625
- b) 121                      d) -125                      f) -128
- a)  $2^{10}$                       c)  $(-3)^5$                       e)  $5^4$
- b)  $11^2$                       d)  $(-5)^3$                       f)  $(-2)^7$

2.3 Realiza las siguientes operaciones de potencias con la misma base.

- a)  $7^6 \cdot 7^3 \cdot 7^9$                       e)  $(-3)^8 \cdot (-3)^5 : (-3)^7$
- b)  $9^{18} : 9^6 : 9^4$                       f)  $(4^4)^6 : 4^{10}$
- c)  $(-5)^7 \cdot (-5)^3 : (-5)^8$                       g)  $8^{12} : 8^6 \cdot 8$
- d)  $(2^4)^9 \cdot 2^{16} : 2^{14}$                       h)  $(10^9)^3 : (10^4)^6$
- a)  $7^6 \cdot 7^3 \cdot 7^9 = 7^{18}$                       e)  $(-3)^8 \cdot (-3)^5 : (-3)^7 = (-3)^6$
- b)  $9^{18} : 9^6 : 9^4 = 9^8$                       f)  $(4^4)^6 : 4^{10} = 4^{14}$
- c)  $(-5)^7 \cdot (-5)^3 : (-5)^8 = (-5)^2$                       g)  $8^{12} : 8^6 \cdot 8 = 8^7$
- d)  $(2^4)^9 \cdot 2^{16} : 2^{14} = 2^{38}$                       h)  $(10^9)^3 : (10^4)^6 = 10^3$

2.4 Completa con números enteros las igualdades.

- a)  $3^{\square} \cdot 3^6 = 3^{15}$                       d)  $9^8 : 9^{\square} = 9^3$
- b)  $16^8 : (16^{\square})^4 = 16^0$                       e)  $6^{\square} \cdot \square^4 = 6^5$
- c)  $(2^{\square})^3 = 2^{12}$                       f)  $5^7 : 5 \cdot 5^{\square} = 5^9$
- a)  $3^9 \cdot 3^6 = 3^{15}$                       d)  $9^8 : 9^5 = 9^3$
- b)  $16^8 : (16^2)^4 = 16^0$                       e)  $6^1 \cdot 6^4 = 6^5$
- c)  $(2^4)^3 = 2^{12}$                       f)  $5^7 : 5 \cdot 5^3 = 5^9$

2.5 Expresa en una sola potencia.

- a)  $6^{10} \cdot 3^{10}$                       d)  $(-4)^6 : 2^6$
- b)  $8^5 : 4^5 \cdot 7^5$                       e)  $(-18)^7 : (-3)^7 : 2^7$
- c)  $14^9 \cdot 2^9 : 4^9$                       f)  $(-54)^{12} : 9^{12} \cdot 2^{12}$
- a)  $6^{10} \cdot 3^{10} = 18^{10}$                       d)  $(-4)^6 : 2^6 = (-2)^6$
- b)  $8^5 : 4^5 \cdot 7^5 = 14^5$                       e)  $(-18)^7 : (-3)^7 : 2^7 = 3^7$
- c)  $14^9 \cdot 2^9 : 4^9 = 7^9$                       f)  $(-54)^{12} : 9^{12} \cdot 2^{12} = (-12)^{12}$

2.6 Halla la raíz y el resto.

a)  $\sqrt{840}$

b)  $\sqrt{256}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{840} \quad | 28 \\ -4 \quad 48 \cdot 8 = 384 \\ \hline 440 \\ -384 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{256} \quad | 16 \\ -1 \quad 26 \cdot 6 = 156 \\ \hline 156 \\ -156 \\ \hline 0 \end{array}$$

c)  $\sqrt{2500}$

d)  $\sqrt{4830}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{2500} \quad | 50 \\ -25 \quad 500 \cdot 0 = 0 \\ \hline 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{4830} \quad | 69 \\ -36 \quad 129 \cdot 9 = 1161 \\ \hline 1230 \\ -1161 \\ \hline 69 \end{array}$$

e)  $\sqrt{1547}$

f)  $\sqrt{9024}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{1547} \quad | 39 \\ -9 \quad 69 \cdot 9 = 621 \\ \hline 647 \\ -621 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{9024} \quad | 94 \\ -81 \quad 184 \cdot 4 = 736 \\ \hline 924 \\ -736 \\ \hline 188 \end{array}$$

2.7 Calcula.

a)  $5^2 \cdot (2 - 8) : 2 + \sqrt{36} : (4 + 2)$

b)  $9 \cdot 12 - (-2)^3 : 4 + 3 \cdot [7 - 2 \cdot 5 + 8 : (-4)]$

c)  $(-3)^2 \cdot \sqrt{64} - [6 + 10 : (-2) - (-4)^2]$

d)  $(8 - 6)^3 + 8 \cdot \sqrt{25} : (-2)^2 + 18 : (7 - 4)$

e)  $\sqrt{49} \cdot (-2)^4 + 5^2 \cdot 4 : (1 - 3) - (6 - 2)^2$

f)  $(5 + 4)^2 : (-3)^2 - [\sqrt{225} : (6 - 9) + 2]$

a)  $5^2 \cdot (2 - 8) : 2 + \sqrt{36} : (4 + 2) = 25 \cdot (-6) : 2 + 6 : 6 = -75 + 1 = -74$

b)  $9 \cdot 12 - (-2)^3 : 4 + 3 \cdot [7 - 2 \cdot 5 + 8 : (-4)] = 108 + 2 + 3 \cdot [7 - 10 - 2] = 110 - 15 = 95$

c)  $(-3)^2 \cdot \sqrt{64} - [6 + 10 : (-2) - (-4)^2] = 9 \cdot 8 - [6 - 5 - 16] = 72 + 15 = 87$

d)  $(8 - 6)^3 + 8 \cdot \sqrt{25} : (-2)^2 + 18 : (7 - 4) = 8 + 8 \cdot 5 : 4 + 18 : 3 = 8 + 10 + 6 = 24$

e)  $\sqrt{49} \cdot (-2)^4 + 5^2 \cdot 4 : (1 - 3) - (6 - 2)^2 = 7 \cdot 16 + 25 \cdot 4 : (-2) - 16 = 112 - 50 - 16 = 62$

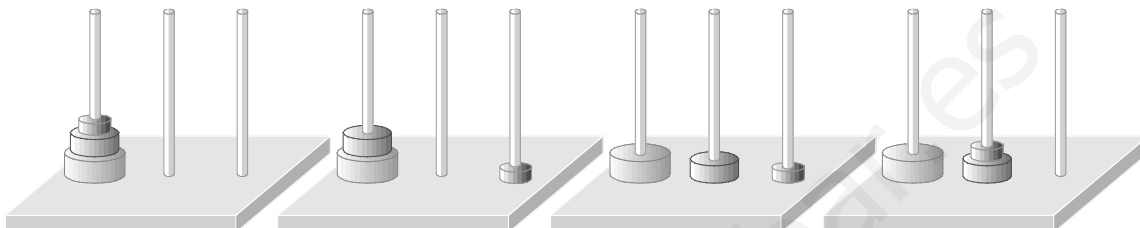
f)  $(5 + 4)^2 : (-3)^2 - [\sqrt{225} : (6 - 9) + 2] = 81 : 9 - [15 : (-3) + 2] = 9 + 3 = 12$

## PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

## Juega y reflexiona &gt; Las torres de Hanoi

- 2.1. Esta leyenda es una invención del matemático francés Édouard Lucas, para promocionar el rompecabezas que había creado en 1833. El juego se llama *Las torres de Hanoi* y consta de tres varillas y 5 discos de diferente tamaño insertados en una de las varillas en orden de mayor a menor tamaño. El pasatiempo consiste en pasar los discos de una varilla a otra siguiendo las reglas descritas en la leyenda, realizando el menor número de movimientos posible.

La siguiente secuencia muestra los 4 primeros movimientos del juego considerando solo 3 discos.



Trata de terminar el juego en tu cuaderno. ¿Cuántos movimientos has necesitado?

Se necesitan 7 movimientos. En el apartado 3 hay un enlace para ver el proceso.

- 2.2. Para una torre de  $n$  discos, el número mínimo de movimientos necesarios para trasladar todos a otra aguja es  $2^n - 1$ . Calcula el número correspondiente para torres de 3, 4 y 5 discos.

Para 3, 4 y 5 discos se necesitan 7, 15 y 31 movimientos, respectivamente.

- 2.3. Intenta resolver el juego en el menor número de movimientos si tuviese 4 y 5 discos. Para ello entra en [www.sm-net/2esoz10](http://www.sm-net/2esoz10). ¡Ojo, no des a la solución antes de tiempo!

Actividad en la web

- 2.4. El número de movimientos que necesitarían los monjes coincide con la recompensa que pidió el inventor del ajedrez:  $2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$  granos de trigo. Si los monjes pudieran hacer un movimiento por segundo, ¿cuánto tardaría en llegar el fin del mundo?

Tardaría algo menos de 585 000 millones de años.

- 2.5. Perelman también propuso pasatiempos relacionados con las potencias, como el siguiente.

Usando solo tres doses se pueden escribir varios números: 222, 222, 222,  $2^2$ . El mayor de ellos es  $2^{22}$ . ¿Cuál será el mayor número que se puede formar con tres treses? ¿Y con tres cuatros?

Comparando todas las posibilidades, el mayor número formado con tres treses es  $3^{33}$ . En cambio, con tres cuatros se obtiene el mayor número haciendo  $4^{4^4} = 4^{256}$ , que es mayor que  $4^{44}$ .

## Manipula y calcula &gt; Potencias que crecen

El grosor de un folio es muy pequeño, pero el siguiente procedimiento nos va a ayudar a averiguarlo. Para ello necesitarás un folio, tijeras y una regla milimetrada.

- I) Corta un folio por la mitad y a continuación corta cada una de las mitades por la mitad.

Actividad práctica

- 2.1. Podrías indicar, sin necesidad de contarlos, cuántos trozos de papel iguales has obtenido. Para ello, copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

Doblez	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º
Trozos	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024



- II) Apila todos los trozos que has obtenido y mide la altura de la torre.

Actividad práctica

- 2.2. Si pudiéramos repetir el proceso 80 veces, ¿qué altura tendría la pila de hojas? Expresa en forma de potencia el número de trozos que obtendríamos.

Tras 80 cortes, habría  $2^{80}$  trozos. La altura dependerá del papel utilizado.



## Investiga y aprende &gt; El cuerpo humano

En las siguientes actividades aparecerán números muy grandes, que quizá no puedas escribir en tu calculadora; tendrás que utilizar otros trucos: cambiar de unidades, contar en millones, etc.

- 2.1. Un hombre tiene unos 5 millones de glóbulos rojos por mililitro de sangre, y una mujer, 4,5 millones. La cantidad de sangre del cuerpo es de unos 70 mililitros por kg de peso. ¿Cuántos litros de sangre hay en tu cuerpo? ¿Cuántos glóbulos rojos tienes, aproximadamente?

La respuesta depende del peso de cada alumno. Por ejemplo, un chico de 60 kg de peso tiene unos  $0,07 \cdot 60 = 4,2$  litros de sangre, y unos  $5\,000\,000 \cdot 70 \cdot 60 = 2\,100\,000\,000$  de glóbulos rojos.

- 2.2. Un glóbulo rojo tiene un diámetro aproximado de 0,0000075 milímetros. Si pudieras colocar en fila todos los glóbulos rojos de tu cuerpo, ¿qué longitud se alcanzaría?

Depende de la respuesta anterior. En el ejemplo,  $2\,100\,000\,000 \cdot 0,0000075 = 15\,750$  mm, algo menos de 16 metros.

- 2.3. En un análisis de sangre aparecen muchos datos numéricos. En él aparecerá el valor del paciente y el intervalo en el que debería estar. Por ejemplo, el intervalo del colesterol es 130-200 mg/dl.

- a) ¿Qué causas y qué consecuencias puede tener un valor de colesterol por encima de lo normal?  
b) ¿Cómo se puede controlar?

Elabora un pequeño texto con las respuestas anteriores.

Las causas del exceso de colesterol que se pueden controlar se deben principalmente a una mala alimentación. El principal riesgo para la salud es la aparición de enfermedades cardiovasculares. Una dieta sana y el ejercicio físico pueden ayudar a regular el nivel de colesterol.

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Ana María Álvarez, Marina Díaz, Mariano García, Isabel de los Santos, Francisco José Valencia**

Edición: **Rafaela Arévalo, Eva Béjar, Silvia Fernández**

Revisión contenidos: **Jesús García Gual**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Modesto Arregui, Estudio “Haciendo el león”**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, [www.cedro.org](http://www.cedro.org)) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra, a excepción de las páginas que incluyen la leyenda de “Página fotocopiable”.

© Ediciones SM

Impreso en España – *Printed in Spain*