PÁGINA 11

1 **Una máquina fabrica 5 tuercas por minuto. Trabaja de lunes a jueves de 8 a 13 y de 15 a 17 y los viernes de 8 a 14.**

Para atender un pedido de 25 000 tuercas comienza a trabajar el miércoles 24 de mayo a las 11 de la mañana.

¿Cuándo completará el pedido?

Teniendo en cuenta que hace 5 tuercas por minuto, para hacer 25 000 tuercas necesita:

25 000 : 5 = 5 000 minutos = 83 horas 20 minutos

De lunes a jueves trabaja:

$$\left.\begin{array}{l} \text{de 8 a 13} \;\;\longrightarrow\; \text{5 horas} \\ \text{y de 15 a 17} \;\longrightarrow\; \text{2 horas} \end{array}\right\} \text{7 horas}$$

El viernes trabaja de 8 a 14 $\longrightarrow$ 6 horas

La máquina debe trabajar:

24 de mayo, miércoles		25 de mayo, jueves	26 de mayo, viernes	
11 a 13 15 a 17	4 horas	7 horas	6 horas	TOTAL: 17 horas

Semana del 29 de mayo al 2 de junio	34 horas

En la siguiente semana completará el tiempo que necesite.

Hasta ahora, la máquina ha trabajado 51 horas.

Faltan 32 horas y 20 minutos.

El día 9 de junio a las 12:00 hará las 32 horas.

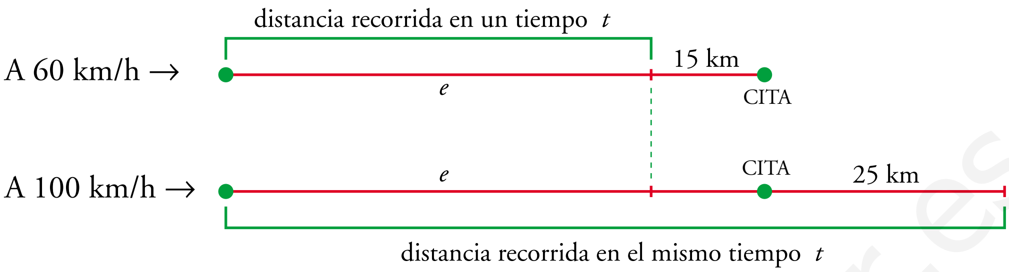
La máquina completará el pedido el día 9 de junio a las 12:20 de la mañana.

2 **Un motorista sale de su casa para acudir a una cita. Se da cuenta de que si viaja a 60 km/h llegará un cuarto de hora tarde, pero si lo hace a 100 km/h llegará un cuarto de hora antes. ¿A qué distancia está su destino?**

▶ *Indicaciones:*
- *A 60 km/h, ¿a qué distancia del lugar se encontrará a la hora de la cita?*
- *A 100 km/h, ¿cuántos kilómetros de más recorrería si continuara a dicha velocidad?*
- *Por tanto, ¿cuántos kilómetros más recorre yendo a 100 km/h que yendo a 60 km/h?*

Si va a 60 km/h, en los 15 minutos que le faltan recorrerá 15 km.

Si va a 100 km/h, en los 15 minutos que le sobran recorrerá 25 km.



$$tiempo = \frac{espacio}{velocidad}$$

Yendo a 100 km/h, recorre 40 km más que si fuese a 60 km/h, en el mismo tiempo. Ese tiempo es 1 h. En 1 h, a 60 km, recorre e = 60 km.

Su destino está a 60 + 15 = 75 km de la salida.

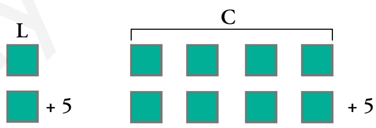
PÁGINA 13

1 **Luis tiene la cuarta parte de dinero que su hermana Camila. El domingo, su abuelo les da 5 € a cada uno. Ahora Camila tiene el triple que Luis.**

¿Cuánto tenía cada uno antes de que les diera dinero su abuelo?

(Resolver sin usar el álgebra).

▸ *Indicación:*

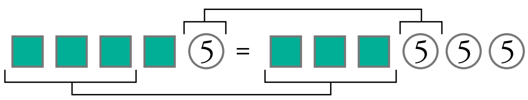


Al principio, Luis tiene ■ y Camilia tiene ■ ■ ■ ■

Su abuelo les da 5 € a cada uno y…

■ ■ ■ ■ ⑤ es el triple de ■ ⑤

Es decir:



Así:

■ = ⑤ ⑤

Por tanto, Luis tenía al principio 10 € y Camila, 40 €.

2 En uno de los platillos de una balanza se ha colocado un queso manchego. En el otro platillo se han colocado los 3/4 de un queso igual al anterior más una pesa de 3/4 de kg. La balanza ha quedado en equilibrio. ¿Cuánto pesa el queso?

$\frac{1}{4}$ de queso pesa $\frac{3}{4}$ de kg. Por tanto, el queso pesa $4 \cdot \frac{3}{4}$ kg = 3 kg.

PÁGINA 14

1 ¿De cuántas formas diferentes se pueden juntar 8 € utilizando solo monedas de 2 €, 1 € y 0,50 €?

DE 2 €	DE 1 €	DE 0,50 €
4	0	0
3	2	0
3	1	2
3	0	4
2	4	0
2	3	2
2	2	4
2	1	6
1	6	0
1	5	2
1	4	4
1	3	6

DE 2 €	DE 1 €	DE 0,50 €
1	2	8
1	1	10
1	0	12
0	8	0
0	7	2
0	6	4
0	5	6
0	4	8
0	3	10
0	2	12
0	1	14
0	0	16

Hay 24 formas distintas de obtener 8 € con monedas de 2 €, de 1 € y de 0,5 €.

2 Tienes en un bolsillo cuatro monedas: 2 €, 1 €, 0,50 € y 0,20 €. ¿Cuántas cantidades diferentes puedes formar?

CON UNA MONEDA	CON DOS MONEDAS	CON TRES MONEDAS	CON CUATRO MONEDAS
2 € 1 € 0,5 € 0,2 €	2 + 1 → 3 € 2 + 0,5 → 2,5 € 2 + 0,2 → 2,2 € 1 + 0,5 → 1,5 € 1 + 0,2 → 1,2 € 0,5 + 0,2 → 0,7 €	2 + 1 + 0,5 → 3,5 € 2 + 1 + 0,2 → 3,2 € 2 + 0,5 + 0,2 → 2,7 € 1 + 0,5 + 0,2 → 1,7 €	2 + 1 + 0,5 + 0,2 → 3,7 €
4	6	4	1

Se pueden formar 15 cantidades diferentes con monedas de 2 €, 1 €, 0,5 € y 0,2 €.

PÁGINA 15

1 Si los miembros de un grupo bailan de dos en dos, sobra uno. Si lo hacen de tres en tres, sobran dos, y si lo hacen de cinco en cinco también sobran dos.

¿Cuántas personas componen el grupo sabiendo que su número está comprendido entre 10 y 20? ¿Y si estuviera comprendido entre 30 y 50?

a) Si el número está comprendido entre 10 y 20.

• Si bailan de dos en dos, sobra uno. Pueden ser:

11 13 15 17 19

• Si bailan de tres en tres, sobran dos. Pueden ser:

11 ~~13~~ ~~15~~ 17 ~~19~~

• Si bailan de cinco en cinco, sobran dos. Pueden ser, solo, 17.

b) Si el número está comprendido entre 30 y 50.

• Si bailan de dos en dos, sobra uno. Pueden ser:

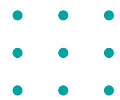
31 33 35 37 39 41 43 45 47 49

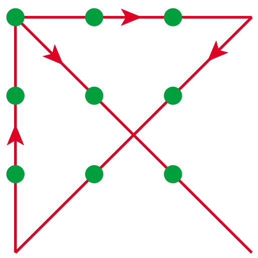
• Si bailan de tres en tres, sobran dos. Pueden ser:

~~31~~ ~~33~~ 35 ~~37~~ ~~39~~ 41 ~~43~~ ~~45~~ 47 49

• Si bailan de cinco en cinco, sobran dos. Pueden ser 47.

2 Pasa por encima de estos nueve puntos mediante una línea quebrada de cuatro segmentos.

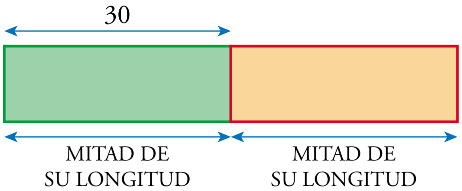




PÁGINA 16

Aplica algo de lo que hayas aprendido en las páginas anteriores y, sobre todo, tu ingenio para resolver los siguientes problemas.

1 **El yate del magnate griego Ricarchos mide 30 m más la mitad de su propia longitud. ¿Cuántos metros mide el yate?**



Es claro que la mitad de su longitud son 30 metros.

El yate mide 60 metros.

2 **Un vendedor ambulante compra camisetas a 72 € la docena y las vende a 15 € el par. ¿Cuántas camisetas ha de vender para ganar 27 €?**

Compra por 72 € una decena $\rightarrow$ 72 : 12 = 6. Compra cada camiseta por 6 €.

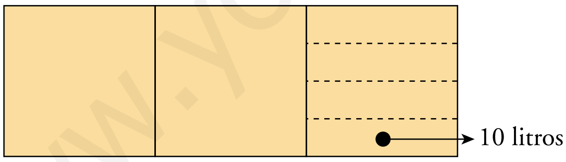
Vende cada par a 15 € $\rightarrow$ Vende cada camiseta a 7,5 €.

Gana, por tanto, en cada camiseta, 1,5 €.

Para ganar 27 € tiene que vender 27 : 1,5 = 18 camisetas.

3 **De un depósito lleno de agua se sacan primero dos tercios y después tres cuartos de lo que quedaba. Si aún hay 10 litros, ¿cuál es la capacidad del depósito?**

(Hazlo sin operar con fracciones. Utiliza una representación esquemática).



En $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ hay 10 litros

En $\frac{1}{3}$ hay 40 litros

En el depósito había 120 litros.

4 **A Alicia le han ofrecido las dos posibilidades siguientes para pagarle un trabajo que tiene que hacer con el ordenador:**

a) 60 € por los 16 días que dura el trabajo.

b) 0,01 € por el primer día, el doble por el segundo, el doble de lo anterior por el tercero y así sucesivamente hasta el final.

¿Qué opción aconsejarías a Alicia?

Calculemos a cuánto ascenderá el pago de la opción b):

El primer día $\rightarrow$ 0,01 €

El segundo día $\rightarrow$ 2 · 0,01 €

El tercer día $\rightarrow$ $2 \cdot 2 \cdot 0{,}01$ € $= 2^2 \cdot 0{,}01$ €

El cuarto día $\rightarrow$ $2 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01$ € $= 2^3 \cdot 0{,}01$ €

…

El decimosexto día $\rightarrow$ $2 \cdot 2^{14} \cdot 0{,}01$ € $= 2^{15} \cdot 0{,}01$ € $= 32\,768 \cdot 0{,}01$ € $=$
$= 327{,}68$ €

Lo que le pagan el último día supera con creces la opción a).

No es necesario sumar lo que ganará cada día. Debe elegir, sin duda alguna, la opción b).

5 Utilizando solamente la cifra 5 y las operaciones oportunas se puede obtener cualquier número. Por ejemplo, para obtener 6 podemos hacer:

$$55 : 5 - 5 = 6$$

Busca la manera de obtener con la mínima cantidad de cincos:

a) Los veinte primeros números naturales.

b) Los números 111 y 125.

c) Los números 500, 1 000 y 3 000.

a) $1 = 5 : 5$

$2 = (5 + 5) : 5$

$3 = (5 + 5 + 5) : 5$

$4 = 5 - (5 : 5)$

$5 = 5$

$6 = 5 + (5 : 5)$

$7 = (5 + 5) : 5 + 5$

$8 = 5 + 5 - (5 + 5) : 5$

$9 = (5 + 5) - (5 : 5)$

$10 = 5 + 5$

$11 = 55 : 5$

$12 = (55 + 5) : 5$

$13 = (55 + 5 + 5) : 5$

$14 = (5 + 5 + 5) - (5 : 5)$

$15 = 5 + 5 + 5$

$16 = (55 : 5) + 5$

$17 = (55 + 5) : 5 + 5$

$18 = (55 + 5 + 5) : 5 + 5$

$19 = (5 \cdot 5) - 5 - (5 : 5)$

$20 = 5 \cdot 5 - 5$

b) $111 = 555 : 5$

$125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$

c) $500 = 555 - 55$

$1\,000 = (5 + 5) \cdot (5 + 5) \cdot (5 + 5)$

$3\,000 = 5^5 - 5 \cdot 5 \cdot 5$

6 Cuatro vacas suizas y tres autóctonas dan tanta leche en cinco días como tres vacas suizas y cinco autóctonas en cuatro días.

¿Qué vaca es mejor lechera, la suiza o la autóctona?

4 suizas y 3 autóctonas en 5 días $\rightarrow$ $20S + 15A$

3 suizas y 5 autóctonas en 4 días $\rightarrow$ $12S + 20A$

$$20S + 15A = 12S + 20A$$

Restamos $15A$ y $12S$ en cada miembro:

$$20S + 15A - 15A - 12S = 12S + 20A - 15A - 12S$$

$$8S = 5A$$

Por tanto, las autóctonas son más lecheras que las suizas.

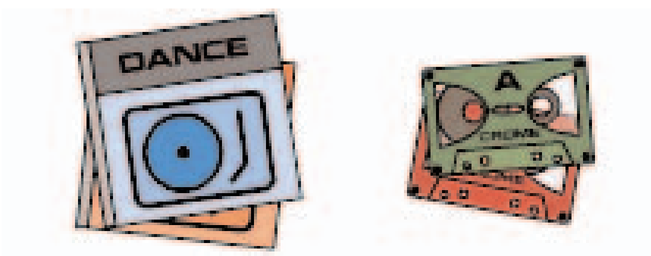
7 ¿Qué hora es sabiendo que la aguja pequeña del reloj tardará el triple que el minutero en llegar a la marca de las seis?

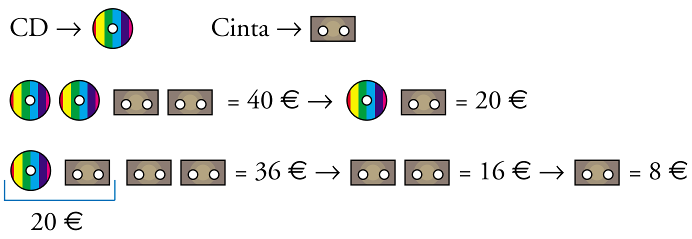
Son las 5 y cuarto.

El minutero tardará 15 minutos en llegar al 6.

La aguja pequeña tardará 45 minutos en llegar al 6.

8 Dos CD y dos cintas tienen un precio de 40 €. Un CD y tres cintas cuestan 36 €. ¿Cuánto cuesta un CD y cuánto una cinta?





Una cinta vale 8 € y un CD, 12 €.

9 **Marta cabila en la tienda:**

- **Si me compro la camiseta y el chaleco, me gasto 53,75 €.**
- **La camiseta y el pañuelo me cuestan 51,25 €.**
- **Sin embargo, el chaleco y el pañuelo me salen por 60 € justos.**

¿Cuál es el precio de cada uno de los tres artículos? (Hazlo sin usar el álgebra)

▸ *¿Qué significa la suma de esos tres números?*

CAMISETA + CHALECO = 53,75 €

CAMISETA + PAÑUELO = 51,25 €

CHALECO + PAÑUELO = 60 €

La suma de las tres cantidades es el precio de dos camisetas, dos chalecos y dos pañuelos. Luego:

$$\underbrace{\text{CAMISETA} + \text{CHALECO}}_{53,75} + \text{PAÑUELO} = \frac{53,75 + 51,25 + 60}{2} = 82,5 \text{ €}$$

60 €

Así, PAÑUELO = 82,5 – 53,75 = 28,75 €

CAMISETA = 82,5 – 60 = 22,5 €

CHALECO = 82,5 – 51,25 = 31,25 €

10 **Una granjera fue al mercado a vender una cesta de huevos. La primera clienta compró la mitad de los huevos más medio huevo. La segunda compró la mitad de los que quedaban más medio huevo y lo mismo hizo la tercera.**

Con esto concluyó la venta porque ya no le quedaban más huevos. ¿Cuántos huevos tenía al principio?

A la tercera le vendió la mitad de los que tenía más medio y se quedó sin nada. Por tanto, le vendió 1 huevo, pues:

$$\text{la mitad } \left(\frac{1}{2}\right) \text{ más medio } \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ huevo}$$

Antes de que llegara la segunda tenía 3 huevos, pues le vendió:

$$\text{la mitad } \left(\frac{3}{2}\right) \text{ más medio } \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \text{ huevos}$$

y quedó con 1 huevo, que es lo que le vendió a la tercera.

Antes de que llegara la primera tenía 7 huevos, pues les vendió:

$$\text{la mitad } \left(\frac{7}{2}\right) \text{ más medio } \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ huevos}$$

y quedó con los 3 huevos que tenía cuando llegó la segunda.

El proceso fue el siguiente:

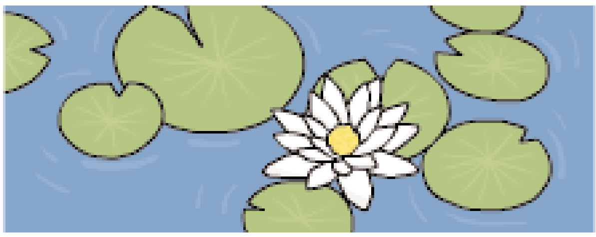
TENÍA	LA MITAD + MEDIO	=	LE VENDIÓ	LE QUEDÓ
7	$3 \text{ y } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	=	4	3
3	$1 \text{ y } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	=	2	1
1	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	=	1	0

11 Carmen tenía anteayer 13 años y sin embargo el año que viene cumplirá 16. ¿Cómo es eso posible?

Es posible si estamos a 1 de enero y cumple los años el 31 de diciembre.

ANTEAYER	AYER	HOY	PRÓXIMO AÑO
30 de diciembre. Tenía 13 años	31 de diciembre. Cumple 14 años	1 de enero. En este año cumplirá 15 años	Cumplirá, el 31 de diciembre, 16 años

12 Un nenúfar, en un lago, dobla su tamaño todos los días. En un mes cubre todo el lago. ¿Cuánto tiempo tardarán dos nenúfares en cubrir todo el lago?



Cada nenúfar tarda 29 días en cubrir medio lago, ya que si el día 29 cubre medio lago, como cada día dobla su tamaño, el día 30 cubrirá todo el lago.

Por tanto, entre los dos necesitan 29 días para cubrir todo el lago.

PÁGINA 17

13 **Busca el menor número de seis cifras cuya división entre 7 es exacta. Busca también el mayor.**

El menor número de seis cifras es 100 000. Si lo dividimos entre 7, obtenemos 5 de resto.

Probamos con 100 002 que, efectivamente, es divisible entre 7.

El mayor número de seis cifras es 999 999.

Al dividirlo entre 7, obtenemos 0 de resto.

Este es el número buscado.

Por tanto, entre los múltiplos de 7 de seis cifras, el menor es 100 002 y el mayor 999 999.

14 **Un número primo solo tiene dos divisores, él mismo y la unidad. ¿Qué números tienen solo tres divisores?**

Está claro que hemos de pensar en un producto de dos números descartando, claramente, que sean compuestos. Es decir, han de ser primos.

Los divisores de $a \cdot b$, siendo a y b primos, son:

$$1 \quad a \quad b \quad a \cdot b$$

Tenemos cuatro divisores. La única forma de hacer desaparecer uno es hacer $a = b$.

En este caso, los divisores serán:

$$1 \quad a \quad a \cdot a$$

Es decir, los números que solo tienen tres divisores son los números que son producto de un número primo por sí mismo, el cuadrado de los primos:

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4 \qquad 3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \qquad 5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$
$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49 \qquad 11^2 = 11 \cdot 11 = 121 \ \ldots$$

15 **¿Qué números tienen una cantidad impar de divisores?**

Los divisores de un número cualquiera se emparejan de dos en dos de modo que el producto de ellos es el número dado. Por ejemplo, 60:

1 y 60, 2 y 30, 3 y 20, 4 y 15, 5 y 12, 6 y 10

De modo que el número de divisores de N es par, salvo que N sea cuadrado perfecto. Por ejemplo, 36:

1 y 36, 2 y 18, 3 y 12, 4 y 9, 6 y … otra vez 6

16 ¿Qué números tienen todos sus divisores, excepto el uno, pares?

Son todos los números en cuya descomposición factorial aparece, exclusivamente, el número 2.

Son todas las potencias de 2.

17 ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Razona tus respuestas.

a) La suma de dos números consecutivos no es múltiplo de dos.

b) La suma de dos impares consecutivos es múltiplo de cuatro.

c) La suma de tres números naturales consecutivos es múltiplo de tres.

a) Cierto.

La suma de dos números consecutivos es:

$$n + (n + 1) = \underbrace{2n}_{\text{múltiplo de 2}} + 1 \text{ que no puede ser múltiplo de 2}$$

b) Cierto.

La suma de dos números impares consecutivos es:

$$(2n - 1) + (2n + 1) = 2n - 1 + 2n + 1 = 4n \text{ (múltiplo de 4)}$$

c) Cierto.

La suma de tres números naturales consecutivos es:

$$(2n - 1) + (2n + 1) = 2n - 1 + 2n + 1 = 4n \text{ (múltiplo de 4)}$$

que es múltiplo de 3.

18 El número de litros de aceite que contiene un forma exacta en garrafas de 3 litros, de 5 litros o de 25 litros, pero no en garrafas de 4 litros ni de 9 litros. ¿Cuál puede ser el contenido del barril, sabiendo que está entre mil y dos mil litros?

El número de litros ha de ser múltiplo de 3, de 5 y de 25.

El mínimo común múltiplo de estos números es 75, y como ha de estar entre 1 000 y 2 000 litros, las posibilidades son:

1 050	1 125	1 200	1 275	1 350	1 425	
1 500	1 575	1 650	1 725	1 800	1 875	1 950

El número de litros no puede ser múltiplo de 4. Hemos de descartar 1 200, 1 500 y 1 800.

Tampoco puede ser múltiplo de 9, y hemos de descartar en este caso 1 125, 1 350 y 1 575.

El resto de números son soluciones del problema:

1 050   1 275   1 425   1 650   1 725   1 875   1 950

19 El producto de las edades de tres personas es 390. ¿Cuáles son dichas edades?

$390 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$

13, 1 y $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

13, 2 y $3 \cdot 5 = 15$

13, 3 y $2 \cdot 5 = 10$

13, 5 y $2 \cdot 3 = 6$

$13 \cdot 2 = 26$, 1 y $3 \cdot 5 = 15$

$13 \cdot 2 = 26$, 3 y 5

$13 \cdot 3 = 39$, 1 y $2 \cdot 5 = 10$

$13 \cdot 3 = 39$, 2 y 5

$13 \cdot 5 = 65$, 1 y $3 \cdot 2 = 6$

$13 \cdot 5 = 65$, 2 y 3

$13 \cdot 2 = 78$, 1 y 5

$13 \cdot 2 \cdot 5 = 130$ ¡demasiado viejo!

Ya no hay más soluciones con edades razonables.

Hemos encontrado, pues, 11 soluciones:

1	13	30
2	13	15
3	13	10
5	6	13
1	15	26
3	5	26
1	10	39
2	5	39
1	6	65
2	3	65
1	5	78

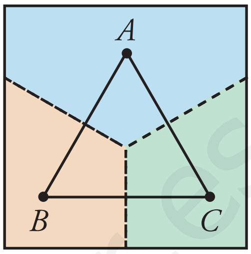
20 

Este es un desierto cuadrado. *A*, *B* y *C* son las entradas de tres refugios antinucleares.

Colorea de diferente color las zonas desde las que te dirigirías a cada refugio en caso de alarma nuclear.

El problema consiste en determinar en qué zona del desierto está más cercano el punto *A* o el *B* o el *C*.

Se traza el triángulo de vértices *ABC*.



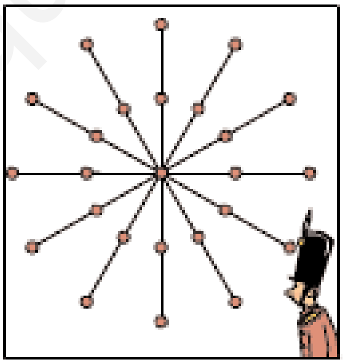
Los puntos de la mediatriz del segmento *AB* son equidistantes de *A* y de *B*.

Así, si alguien se encuentra a un lado o a otro de esa mediatriz, sabe de qué refugio está más cerca.

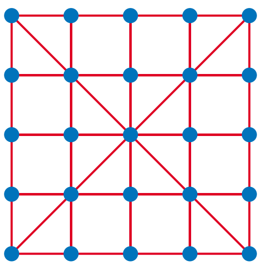
Las zonas, por tanto, están delimitadas por las tres mediatrices del triángulo:

- La zona que está entre la mediatriz de *BA* y la mediatriz de *BC* corresponde al refugio *B*.
- La zona que está entre la mediatriz de *BA* y la mediatriz de *AC* corresponde al refugio *A*.
- La zona que está entre la mediatriz de *AC* y la mediatriz de *BC* corresponde al refugio *C*.

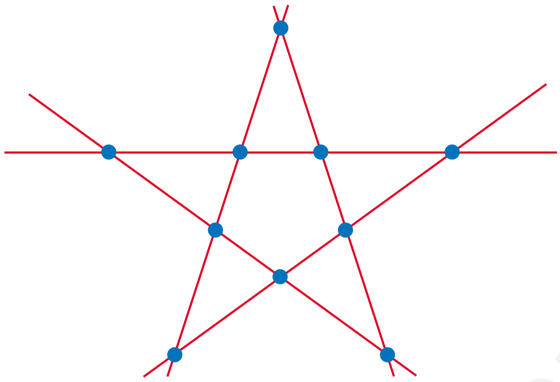
21 **“Si tenemos veinticinco soldaditos de plomo, ¿cómo formaremos con ellos seis filas de cinco soldaditos cada una?” La solución que venía en el libro para este problema es la siguiente:**



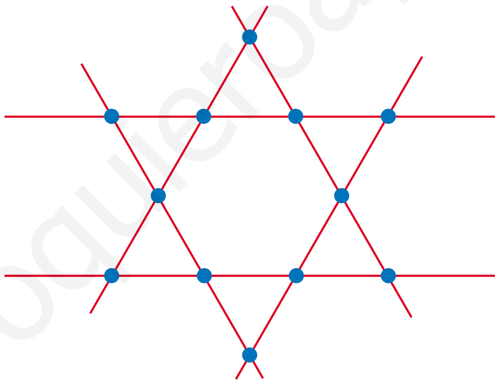
Sin embargo, Mercedes ha encontrado una forma de disponer los 25 soldados de modo que hay muchas más de 6 filas de 5 soldados.



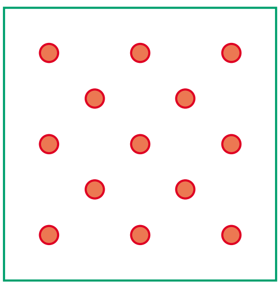
22 Situa 10 soldaditos sobre una mesa de modo que haya 5 filas de 4 soldados.

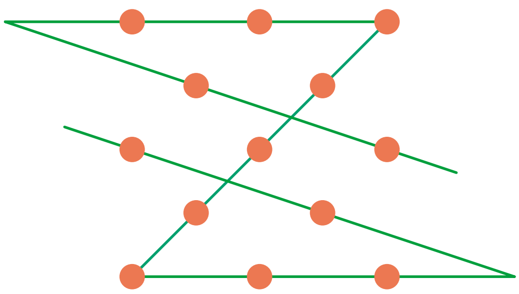


23 Situar 12 soldaditos sobre una mesa de modo que haya 6 filas de 4 soldados.

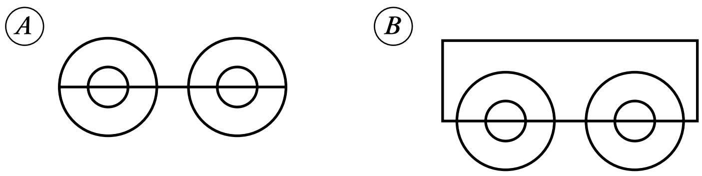


24 Trazar una línea quebrada de cinco segmentos que pase por estos trece puntos.





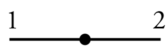
25 **Busca la manera de dibujar cada una de estas figuras sin levantar el lápiz y sin repasar ningún tramo.**



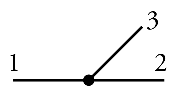
¿Desde cuántos puntos se puede iniciar el trazado de la figura A?

¿Desde cuántos puntos se puede iniciar el trazado de la figura B?

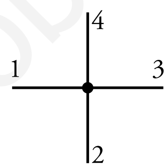
Los puntos de una figura pueden ser:



Con dos ramales



Con tres ramales

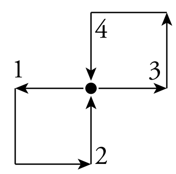


Con cuatro ramales

Observamos que:

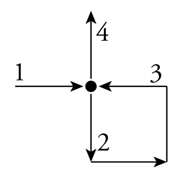
- Si partimos de un punto con un número par de ramales, ese será también el punto final.

1 → SALIR 3 → SALIR
2 → ENTRAR 4 → ENTRAR



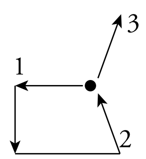
- Si un punto con un número par de ramales no es el principio del trazo, tampoco es el final.

1 → ENTRAR 3 → ENTRAR
2 → SALIR 4 → SALIR



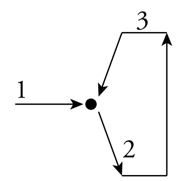
- Si empezamos el trazo en un punto con un número impar de ramales, ese punto no puede ser el final.

1 → SALIR 3 → SALIR
2 → ENTRAR



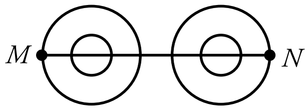
- Un punto con un número impar de ramales, si no es principio de trazo, es necesariamente el final.

1 → ENTRAR 3 → ENTRAR
2 → SALIR



Teniendo en cuenta lo anterior:

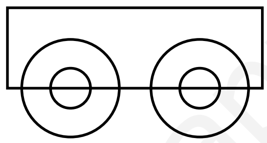
Ⓐ



Tiene solo dos puntos impares (M y N).

Uno de ellos será el principio del trazo y el otro el final.

Ⓑ



Todos sus puntos son pares.

Se puede empezar el trazo en cualquiera de ellos.

De todo lo dicho, se deduce que las figuras que no se pueden dibujar de un solo trazo son las que tienen un punto impar, o más, de dos puntos impares.

PÁGINA 18

26 **De las 5 000 familias que viven en un pueblo, el 4% tiene un vehículo todo terreno. Del resto, la tercera parte no tiene coche, otro tercio tiene un coche, y los restantes tienen dos coches. ¿Cuántos vehículos hay, como mínimo, en esta población?**

Todo terreno $\rightarrow$ 4% de 5 000 $= \dfrac{4}{100} \cdot 5\,000 = 200$ familias

No tienen coche $\rightarrow$ $\dfrac{1}{3}$ de 4 800 = 1 600 familias

Tienen un coche $\rightarrow$ $\dfrac{1}{3}$ de 4 800 = 1 600 familias

Tienen dos coches $\rightarrow$ 5 000 – 200 – 1 600 – 1 600 = 1 600 familias

Número de coches = 200 + 1 600 + 2 · 1 600 = 5 000, al menos, pues los que tienen todo terreno pueden tener otros.

27 **Aproximadamente el 30% de los fines de semana los pasamos en la casa de campo que han comprado mis padres.**

Uno de cada dos fines de semana que voy al campo, coincido con la maravillosa Marilín, que viene al chalé vecino.

Pasado mañana es sábado. ¿Qué probabilidad tengo de ver a Marilín?

Probabilidad de ir el sábado a la casa de campo:

$$30\% = \frac{30}{100}$$

Probabilidad de ver, además, a Marilín (1/2) es la mitad del 30%.

Es decir:

$$\frac{30}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{30}{200} = \frac{15}{100}$$

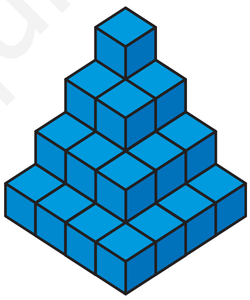
Un 15%.

28 **¿Cuántos cubos componen esta figura? ¿Cuántos no ves?**

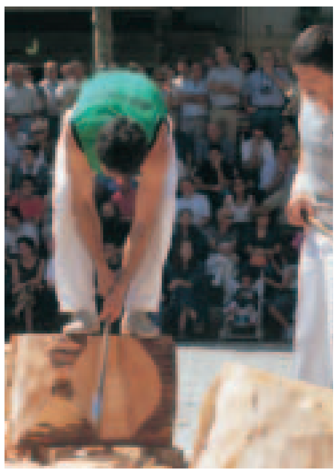
En la figura hay 1 + 4 + 9 + 16 = 30 cubos.

Se ven 1 + 3 + 5 + 7 = 16 cubos.

No se ven 30 – 16 = 14 cubos.



29 **Un aizkolari tarda un cuarto de hora en cortar un tronco en tres partes. ¿Cuánto tardará en cortar otro tronco igual de grueso en seis partes?**



Para cortar el tronco en tres partes tiene que hacer 2 cortes.

Tarda 15 minutos en hacer 2 cortes $\rightarrow$ tarda 7,5 minutos en cada corte.

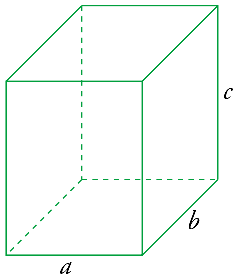
Para cortar un tronco en seis partes necesita hacer 5 cortes.

Tardará 7,5 · 5 = 37,5 minutos en hacerlo.

37,5 minutos = 37 minutos 30 segundos.

30 **Se ha construido un prisma recto de base rectangular con 60 cubitos de madera de un centímetro de arista. ¿Cuál es la altura del prisma, sabiendo que el perímetro de la base mide 14 cm?**

Atención: Hay más de una solución.



El perímetro de la base son 14 cm:

$$P = 2a + 2b = 14 \rightarrow a + b = 7$$

Para que $a + b = 7$, como los cubitos tienen que ser enteros, existen estas opciones:

a) $a = 1$ y $b = 6$

b) $a = 2$ y $b = 5$

c) $a = 3$ y $b = 4$

Examinemos cada opción:

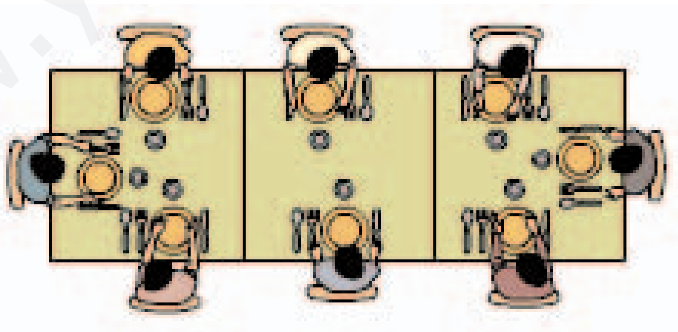
a) Si a = 1 y b = 6, en la base hay 6 cubitos. Como la construcción se ha hecho con 60 cubitos, la altura debe ser de 10 cubitos, es decir, 10 cm.

b) En este caso, en la base habrá 10 cubitos y la altura, por tanto, será de 6 cm.

c) En la base hay 12 cubitos y la altura del prisma será de 5 cm.

31 **A la terraza de un bar acuden a merendar distintas pandillas de amigos. La dueña coloca en cada caso una hilera de mesas cuadradas, más o menos larga, según el número de personas de la pandilla.**

Así, por ejemplo, en una hilera de tres mesas caben 8 personas:



¿Cuántas personas pueden sentarse en una hilera de 6 mesas? ¿Y en una de 10 mesas? ¿Y en una de n mesas?

En una hilera de 6 mesas pueden sentarse 14 personas (2 personas por cada mesa más 2 personas en los extremos).

En una hilera de 10 mesas podrán sentarse $10 \cdot 2 + 2 = 22$ personas.

Y en una hilera de n mesas podrán sentarse $2 \cdot n + 2 = 2(n + 1)$ personas.

32 **¿Cuántas veces se utiliza la cifra 9 al escribir todos los números del 0 al 1 000?**

$$\left.\begin{matrix} 9 \\ 19 \\ \cdots \\ 89 \\ 99 \end{matrix}\right\} \text{10 veces en las unidades}$$

Además, en la última decena, desde 90 hasta 99, todos empiezan por 9. Es decir, 10 veces más.

Lo mismo en las demás centenas.

En total, 20 veces por 10 centenas = 200 veces.

Pero además, en la última centena, desde 900 hasta 999, todos empiezan por 9.

Es decir, 100 veces más.

Por tanto, se utiliza 300 veces.

33 **¿Cuántos capicúas existen de cuatro cifras en los que las dos cifras extremas suman lo mismo que las dos centrales?**

Los capicúas de cuatro cifras son de la forma *ABBA*.

Para que las cifras extremas sumen lo mismo que las centrales, ha de ocurrir que:

$$A + A = B + B$$

Es decir, $A = B$.

Existen nueve números capicúas de cuatro cifras con esta condición:

1111 / 2222 / 3333 / 4444 / 5555 / 6666 / 7777 / 8888 / 9999

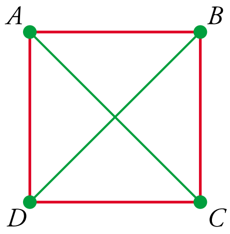
34 **Julio tenía en su bolsillo monedas de 1 €, de 0,50 €, de 0,20 € y de 0,10 €. Ha comprado una revista de 3 € utilizando seis monedas. ¿Qué monedas ha utilizado? Busca todas las soluciones posibles.**

Solo hay dos soluciones:

2 de 1 €, 1 de 0,50 €, 2 de 0,20 € y 1 de 0,10 €

6 de 0,5 €

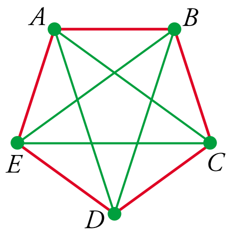
35 ¿Cuántos tramos de carretera son necesarios para comunicar cuatro ciudades de forma que desde cada una se pueda llegar a cualquier otra sin pasar por una tercera? ¿Y para comunicar cinco ciudades? ¿Y para comunicar n ciudades?



Para comunicar 4 ciudades son necesarios 6 tramos de carretera:

A CON LAS OTRAS 3		*B* CON LAS DOS QUE QUEDAN		*C* CON LA ÚLTIMA, *D*	
3	+	2	+	1	= 6

Observamos que coincide con (nº de lados de un cuadrilátero + nº de sus diagonales):



Para comunicar 5 ciudades son necesarios 10 tramos de carretera:

A CON LAS OTRAS 4		*B* CON LAS TRES QUE QUEDAN		*C* CON *D* Y CON *E*		*D* CON *E*	
4	+	3	+	2	+	1	= 10

Vemos que coincide con (nº de lados de un pentágono + nº de sus diagonales).

Así, para comunicar n ciudades necesitaremos:

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+2 \text{ tramos}$$

También podemos expresarlo así:

$$\left(\begin{array}{c}\text{número de lados de un}\\ \text{polígono de } n \text{ lados}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\text{número de diagonales}\\ \text{de un polígono de } n \text{ lados}\end{array}\right)=$$

$$=n+\frac{(n-3)\cdot n}{2}=\frac{2n+n^2-3n}{2}=\frac{n^2-n}{2}$$

36 Hoy es el último día de acampada y tenemos para merendar "perritos calientes". El caso es que somos 18, todos con buen apetito, y solo nos quedan 30 perritos. A mí me ha tocado repartir.

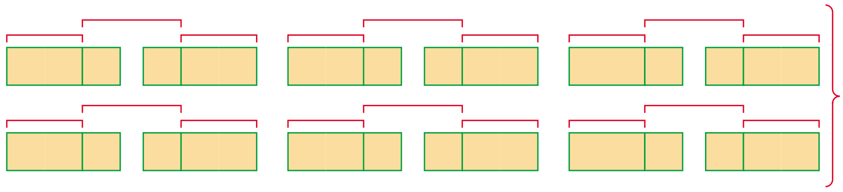
¿Cuál es el mínimo número de cortes que necesito hacer para dar a todos lo mismo?

$$\frac{30}{18}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 5}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 3}=\frac{5}{3}$$

A cada uno tocan $\frac{5}{3}$ de perrito.

Para hacer la mínima cantidad de cortes, habrá que dar un perrito a cada uno más $\frac{2}{3}$ de perrito.

A 18 de los perritos no hay que hacerle ningún corte y a los 12 que quedan, un corte a cada uno:



Es necesario hacer 12 cortes.

PÁGINA 19

37 **Anselmo va a freír tres filetes. Cada uno ha de estar en la sartén cinco minutos por cada cara. Pero en la sartén solo caben dos. ¿Cómo debe hacerlo para tardar el menor tiempo posible?**

Pone dos filetillos, A y B, durante 5 minutos.

Saca uno de ellos, A, da la vuelta al otro, B, y pone el tercero, C, durante 5 minutos.

Saca el B (ya está hecho por las dos caras), da la vuelta al C y pone el A por la cara cruda. Otros 5 minutos. Ya están los tres. Ha tardado 15 minutos.

38 **Anselmo ha de tener en el horno un pollo durante 15 minutos exactamente. Pero se le ha estropeado el reloj. Dispone de dos relojes de arena que miden 7 minutos y 11 minutos, respectivamente. ¿Cómo consigue cronometrar con ellos los 15 minutos?**

Deja caer la arena en los dos relojes a la vez. Cuando el de 7 minutos haya terminado, en el de 11 minutos queda arena para 4 minutos. Vuelca el reloj para que no corra ni un segundo de estos 4 minutos, pone el pollo al horno y endereza el reloj. Cuando acabe la arena (4 minutos después) da la vuelta al reloj y contabiliza los 11 minutos restantes.

39 **Ahora Anselmo ha de cronometrar los 45 minutos que tarda en hacerse un potaje. Para ello, dispone de dos mechas. Cada una de ellas tarda 1 h en consumirse. Pero la velocidad con que se consumen es irregular (es decir, en 1/4 de hora no tiene por qué gastarse 1/4 de la longitud de la mecha). Aún así, consigue cronometrar con ellas los 45 minutos. ¿Cómo lo hace?**

Si una mecha se prende simultáneamente por los dos extremos se consume en media hora. Por tanto, prendemos simultáneamente la mecha A por los dos extremos y la mecha B por uno de ellos. En el momento en que A se haya consumido, queda media hora en la mecha B. Si se prende ahora también por el otro extremo se consumirá en la mitad de tiempo: en un cuarto de hora.

Por tanto, el proceso dura 45 minutos.

40 **Anselmo está en su casa de campo. Solo dispone de un reloj de pared que se le ha parado, pero puede ponerlo en marcha dándole cuerda. Va a casa de su amigo Carlos, que está a unos 3 km de distancia y en la que hay otro reloj como el suyo. Pasa un rato charlando con él y, a la vuelta, pone el reloj en hora con razonable precisión.**

Para ello, ¿qué otras cosas ha hecho que no se describen aquí?

Anselmo, antes de salir, le da cuerda a su reloj y lo pone a una hora cualquiera, por ejemplo, a las 12 h, y se va inmediatamente. Cuando llega a casa de Carlos se fija en la hora que marca su reloj. Por ejemplo, las 5 h 40 min. Cuando va a salir vuelve a mirar la hora, por ejemplo 7 h 05 min. Por tanto, ha estado en casa de Carlos 1 h 25 min. Cuando llega a su casa, su reloj marca, por ejemplo, las 2 h y 55 min.

Echemos cuentas:

Está fuera de casa	2 h 55 min
Está en casa de Carlos	1 h 25 min
Está andando	1 h 30 min

Por tanto, cada tramo, ida y vuelta, le lleva 45 min.

Como salió de casa de Carlos a las 7 h 05 min, cuando llega a su casa son las 7 h 50 min. Ahora puede poner su reloj en hora.

41 **Un grupo de amigos va a comer a un restaurante chino. Cada dos comparten un plato de arroz, cada 3 uno de salsa y cada cuatro uno de carne. En total se sirvieron 65 platos. ¿Cuántos amigos fueron a comer?**

El número de amigos es múltiplo de 12 (múltiplo de 2, de 3 y de 4).

Si fueran 12 amigos:

$$\left.\begin{array}{l} 12 : 2 = 6 \text{ platos de arroz} \\ 12 : 3 = 4 \text{ platos de salsa} \\ 12 : 4 = 3 \text{ platos de carne} \end{array}\right\} \text{En total 13 platos}$$

65 : 13 = 5. El número de platos es 5 veces el 13.

Por tanto, el número de amigos será 5 veces 12, es decir, $5 \cdot 12 = 60$ amigos.

42 **En un salón de té solo se sirve té y pastas. Cada té vale 1,2 € y cada pasta 2 €. Varios amigos realizan, todos ellos, la misma consumición.**

La cuenta asciende a 53,20 €. ¿Qué tomó cada uno? ¿Cuántos eran?

Un té vale 120 céntimos y una pasta, 200 céntimos.

El total pagado es 5 320 céntimos.

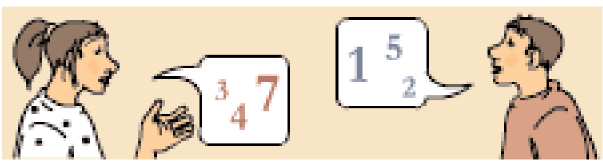
Hemos de buscar posibles consumiciones, cuyo coste total sea divisor de 5 320.

NÚMERO DE CONSUMICIONES		COSTE TOTAL	
1	1 pasta 1 té	200 120	→ No es divisor de 5 320 → No es divisor de 5 320
2	2 pastas 2 tes 1 té y 1 pasta	400 240 320	→ No → No → No
3	3 pastas 3 tes 1 té y 2 pastas 2 tes y 1 pasta	600 360 520 440	→ No → No → No → No
4	4 pastas 4 tes 1 té y 3 pastas 3 tes y 1 pasta 2 tes y 2 pastas	800 480 720 560 640	→ No → No → No → No → No
5	5 pastas 5 tes 1 té y 4 pastas 4 tes y 1 pasta 2 tes y 3 pastas 3 tes y 2 pastas	1 000 600 920 680 840 760	→ No → No → No → No → No → Sí es divisor de 5 320

5 320 : 760 = 7

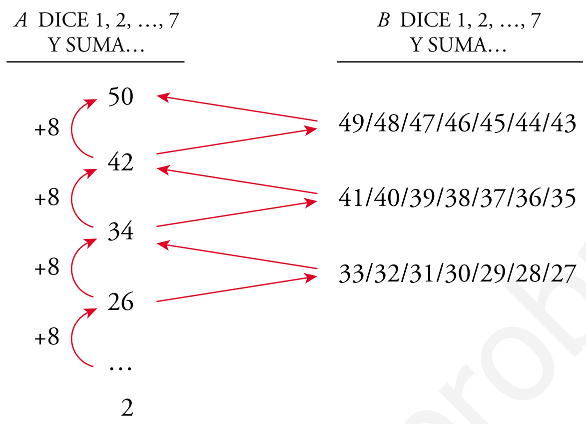
Acudieron 7 amigos y cada uno tomó 3 tes con 2 pastas.

43 **Un juego entre dos consiste en lo siguiente: cada uno de ellos dice un número, alternativamente, del 1 al 7. Los números se van sumando y gana el que llegue a 50. ¿Qué estrategia debe seguir el primer jugador para ganar con seguridad?**



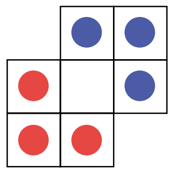
Para que un jugador A llegue a 50, le tienen que dejar una suma de 49 ó 48 ó 47 ó 46 ó 45 ó 44 ó 43, para lo que él tiene que dejar 42, y le tendrían que dejar 41 ó 40 ó 39 ó 38 ó 37 ó 36 ó 35, y así sucesivamente.

Veámoslo gráficamente:



La estrategia ganadora consiste en comenzar con 2 y, si el compañero dice un número x, contestar con $8 - x$.

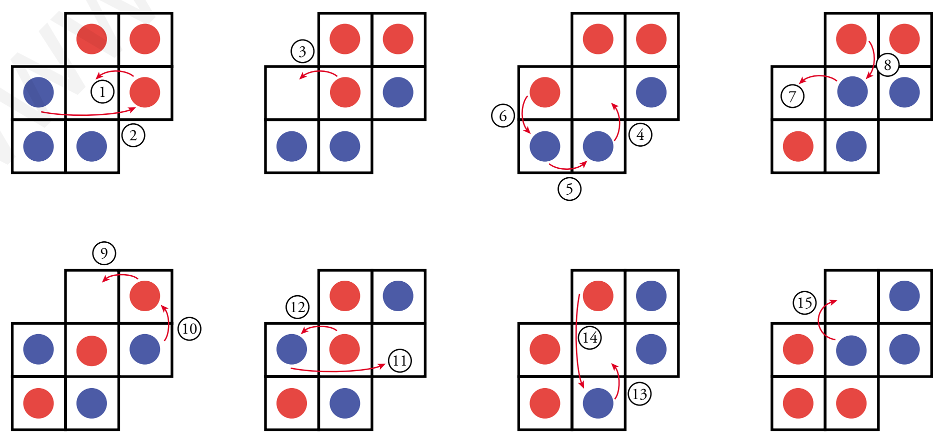
44 Objetivo: intercambiar las fichas rojas y azules con el mínimo número de movimientos.



Reglas:

- **Con una ficha puede moverse a la casilla contigua vacía.**
- **Una ficha puede saltar sobre otra de diferente color para caer en una casilla vacía.**

Existen varias posibilidades. Por ejemplo:



PÁGINA 35

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Suma y resta de enteros

1 Calcula:

a) $5 - 3 - 7 + 1 + 8$

b) $2 - 3 + 4 + 1 - 8 + 2$

c) $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11$

d) $2 + 4 - 6 - 8 + 10 - 12 + 14$

a) $5 - 3 - 7 + 1 + 8 = (5 + 1 + 8) - (3 + 7) = 14 - 10 = 4$

b) $2 - 3 + 4 + 1 - 8 + 2 = (2 + 4 + 1 + 2) - (3 + 8) = 9 - 11 = -2$

c) $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 = (1 + 5 + 9) - (3 + 7 + 11) = 15 - 21 = -6$

d) $2 + 4 - 6 - 8 + 10 - 12 + 14 = (2 + 4 + 10 + 14) - (6 + 8 + 12) = 30 - 26 = 4$

2 Quita paréntesis:

a) $a + (b + c)$ **b)** $a - (b + c)$

c) $a + (b - c)$ **d)** $a - (b - c)$

a) $a + (b + c) = a + b + c$ b) $a - (b + c) = a - b - c$

c) $a + (b - c) = a + b - c$ d) $a - (b - c) = a - b + c$

3 Quita paréntesis y después opera:

a) $1 - (7 - 2 - 10) - (3 - 8)$ **b)** $(8 - 4 - 3) - (5 - 8 - 1)$

c) $(3 - 5) - (1 - 4) + (5 - 8)$ **d)** $3 - (5 - 8) - (11 - 4) + (13 - 9)$

a) $1 - (7 - 2 - 10) - (3 - 8) = 1 - 7 + 2 + 10 - 3 + 8 = (1 + 2 + 10 + 8) - (3 + 7) =$
$= 21 - 10 = 11$

b) $(8 - 4 - 3) - (5 - 8 - 1) = 8 - 4 - 3 - 5 + 8 + 1 = (8 + 8 + 1) - (4 + 3 + 5) =$
$= 17 - 12 = 5$

c) $(3 - 5) - (1 - 4) + (5 - 8) = 3 - 5 - 1 + 4 + 5 - 8 = (3 + 4 + 5) - (5 + 1 + 8) =$
$= 12 - 14 = -2$

d) $3 - (5 - 8) - (11 - 4) + (13 - 9) = 3 - 5 + 8 - 11 + 4 + 13 - 9 =$
$= (3 + 8 + 4 + 13) - (5 + 11 + 9) = 28 - 25 = 3$

4 ▲△△ **Calcula operando primero dentro de los paréntesis:**

a) $(2 - 6 - 3) + (5 - 3 - 1) - (2 - 4 - 6)$

b) $(8 - 11 - 5) - (12 - 13) + (11 + 4)$

c) $15 + (6 - 18 + 11) - (7 + 15 - 19) + (1 - 3 - 6)$

a) $(2 - 6 - 3) + (5 - 3 - 1) - (2 - 4 - 6) = (-7) + (1) - (-8) = -7 + 1 + 8 = 2$

b) $(8 - 11 - 5) - (12 - 13) + (11 + 4) = (-8) - (-1) + (15) = -8 + 1 + 15 = 8$

c) $15 + (6 - 18 + 11) - (7 + 15 - 19) + (1 - 3 - 6) = 15 + (-1) - (3) + (-8) =$
$= 15 - 1 - 3 - 8 = 3$

5 ▲△△ **Quita paréntesis y calcula:**

a) $3 - [(5 - 8) - (3 - 6)]$

b) $1 - (3 - [4 - (1 - 3)])$

c) $(2 + 7) - (5 - [6 - (10 - 4)])$

a) $3 - [(5 - 8) - (3 - 6)] = 3 - [(-3) - (-3)] = 3 - [-3 + 3] = 3$

b) $1 - (3 - [4 - (1 - 3)]) = 1 - (3 - [4 - (-2)]) = 1 - (3 - 6) = 1 + 3 = 4$

c) $(2 + 7) - (5 - [6 - (10 - 4)]) = 9 - (5 - [6 - 6]) = 9 - 5 = 4$

6 ▲△△ **Calcula:**

a) $(-7) \cdot (+11)$ **b)** $(-6) \cdot (-8)$

b) $(+5) \cdot (+7) \cdot (-1)$ **d)** $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$

a) $(-7) \cdot (+11) = -77$ b) $(-6) \cdot (-8) = 48$

c) $(+5) \cdot (+7) \cdot (-1) = -35$ d) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) = -24$

7 ▲△△ **Opera:**

a) $(-45) : (+3)$ **b)** $(+85) : (+17)$

b) $(+36) : (-12)$ **d)** $(-85) : (-5)$

a) $(-45) : (+3) = -15$ b) $(+85) : (+17) = 5$

c) $(+36) : (-12) = -3$ d) $(-85) : (-5) = 17$

8 ▲▲△ **Opera las expresiones siguientes:**

a) $(+400) : (-40) : (-5)$ **b)** $(+400) : [(-40) : (-5)]$

c) $(+7) \cdot (-20) : (+10)$ **d)** $(+7) \cdot [(-20) : (+10)]$

e) $(+300) : (+30) \cdot (-2)$ **f)** $(+300) : [(+30) \cdot (-2)]$

a) (+400) : (–40) : (–5) = (–10) : (–5) = 2

b) (+400) : [(–40) : (–5)] = (+400) : (+8) = 50

c) (+7) · (–20) : (+10) = –140 : 10 = –14

d) (+7) · [(–20) : (+10)] = 7 · (–2) = –14

e) (+300) : (+30) · (–2) = 10 · (–2) = –20

f) (+300) : [(+30) · (–2)] = 300 : (–60) = –5

Operaciones combinadas

9 **Calcula:**

a) 6 · 4 – 5 · 6 – 2 · 3

b) 15 – 6 · 3 + 2 · 5 – 4 · 3

c) 5 · (–4) + (–2) · 4 – 6 · (–5) – 3 · (–6)

d) 18 – 3 · 5 + 5 · (–4) – 3 · (–2)

a) 6 · 4 – 5 · 6 – 2 · 3 = 24 – 30 – 6 = –12

b) 15 – 6 · 3 + 2 · 5 – 4 · 3 = 15 – 18 + 10 – 12 = –5

c) 5 · (–4) + (–2) · 4 – 6 · (–5) – 3 · (–6) = –20 – 8 + 30 + 18 = 20

d) 18 – 3 · 5 + 5 · (–4) – 3 · (–2) = 18 – 15 – 20 + 6 = –11

10 **Opera estas expresiones:**

a) (–5) · (8 – 13)

b) (2 + 3 – 6) · (–2)

c) (+4) · (1 – 9 + 2) : (–3)

d) (–12 – 10) : (–2 – 6 – 3)

a) (–5) · (8 – 13) = (–5) · (–5) = 25

b) (2 + 3 – 6) · (–2) = (–1) · (–2) = 2

c) (+4) · (1 – 9 + 2) : (–3) = 4 · (–6) : (–3) = (–24) : (–3) = 8

d) (–12 – 10) : (–2 – 6 – 3) = (–22) : (–11) = 2

11 **Calcula:**

a) 13 – [8 – (6 – 3) – 4 · 3] : (–7)

b) 5 · (8 – 3) – 4 · (2 – 7) – 5 · (1 – 6)

c) 12 · (12 – 14) – 8 · (16 – 11) – 4 · (5 – 17)

a) $13 - [8 - (6 - 3) - 4 \cdot 3] : (-7) = 13 - [8 - 3 - 12] : (-7) = 13 - (-7) : (-7) =$
$= 13 - 1 = 12$

b) $5 \cdot (8 - 3) - 4 \cdot (2 - 7) - 5 \cdot (1 - 6) = 5 \cdot 5 - 4 \cdot (-5) - 5 \cdot (-5) =$
$= 25 + 20 + 25 = 70$

c) $12 \cdot (12 - 14) - 8 \cdot (16 - 11) - 4 \cdot (5 - 17) = 12 \cdot (-2) - 8 \cdot 5 - 4 \cdot (-12) =$
$= -24 - 40 + 48 = -16$

12 ▲▲△ **Realiza las operaciones siguientes:**

a) $18 - 40 : (5 + 4 - 1) - 36 : 12$

b) $4 + 36 : 9 - 50 : [12 + (17 - 4)]$

c) $48 : [5 \cdot 3 - 2 \cdot (6 - 10) - 17]$

d) $3 \cdot 4 - 15 : [12 + 4 \cdot (2 - 7) + 5]$

a) $18 - 40 : (5 + 4 - 1) - 36 : 12 = 18 - 40 : 8 - 3 = 18 - 5 - 3 = 10$

b) $4 + 36 : 9 - 50 : [12 + (17 - 4)] = 4 + 4 - 50 : 25 = 8 - 2 = 6$

c) $48 : [5 \cdot 3 - 2 \cdot (6 - 10) - 17] = 48 : [15 + 8 - 17] = 48 : 6 = 8$

d) $3 \cdot 4 - 15 : [12 + 4 \cdot (2 - 7) + 5] = 12 - 15 : [12 + 4 \cdot (-5) + 5] =$
$= 12 - 15 : [12 - 20 + 5] = 12 - 15 : (-3) = 12 + 5 = 17$

13 ▲△△ **Calcula:**

a) $(-2)^7$ **b)** $(-3)^5$ **c)** $(-5)^3$

d) $(-10)^3$ **e)** $(-1)^{16}$ **f)** $(-1)^{17}$

a) $(-2)^7 = -128$ b) $(-3)^5 = -243$ c) $(-5)^3 = -125$

d) $(-10)^3 = -1\,000$ e) $(-1)^{16} = +1$ f) $(-1)^{17} = -1$

14 ▲▲△ **Expresa como una única potencia:**

a) $(-2)^4 \cdot (-2)^3$ **b)** $(+2)^3 \cdot (-2)^3$

c) $(-3)^5 : (-3)^3$ **d)** $(-5)^6 : (-5)^3$

a) $(-2)^4 \cdot (-2)^3 = (-2)^7$ b) $(+2)^3 \cdot (-2)^3 = (+2)^3 \cdot (-2)^3 = -(2^3 \cdot 2^3) = -2^6$

c) $(-3)^5 : (-3)^3 = (-3)^2$ d) $(-5)^6 : (-5)^3 = (-5)^3$

15 ▲▲△ **Calcula:**

a) $(-2)^3 + (-3)^3 - (-4)^3$

b) $(-5)^2 \cdot (-2)^2 + (+3)^2 \cdot (-3)$

c) $(-2)^2 \cdot [(-5)^2 - (+4)^2]$

d) $(-6)^3 : (-3)^3 + (-8)^2 : (-4)^2$

a) $(-2)^3 + (-3)^3 - (-4)^3 = (-8) + (-27) - (-64) = -8 - 27 + 64 = 64 - 35 = 29$

b) $(-5)^2 \cdot (-2)^2 + (+3)^2 \cdot (-3) = [(-5) \cdot (-2)]^2 - 3^3 = 10^2 - 3^3 = 100 - 27 = 73$

c) $(-2)^2 \cdot [(-5)^2 - (+4)^2] = 4 \cdot (25 - 16) = 4 \cdot 9 = 36$

d) $(-6)^3 : (-3)^3 + (-8)^2 : (-4)^2 = [(-6) : (-3)]^3 + [(-8) : (-4)]^2 = 2^3 + 2^2 =$
$= 8 + 4 = 12$

16 **Calcula, si existe:**

a) $\sqrt{(-6)^2}$ **b)** $\sqrt{(-6)^3}$ **c)** $\sqrt{(-5)^3}$

d) $\sqrt{(-5)^4}$ **e)** $\sqrt{(-1)^7}$ **f)** $\sqrt{(-1)^8}$

a) $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = \pm 6$ b) $\sqrt{(-6)^3} = \sqrt{-216} \rightarrow$ No existe

c) $\sqrt{(-5)^3} = \sqrt{-125} \rightarrow$ No existe

d) $\sqrt{(-5)^4} = \sqrt{625} = \pm 25$

e) $\sqrt{(-1)^7} = \sqrt{-1} \rightarrow$ No existe

f) $\sqrt{(-1)^8} = \sqrt{1} = \pm 1$

17 **Calcula, si existe:**

a) $\sqrt{(+2)^2 \cdot (-2)^4}$ **b)** $\sqrt{(-2)^7 : (-2)^3}$

c) $\sqrt{8^3 : (-2)^5}$ **d)** $\sqrt{(-6)^3 : 3^3}$

a) $\sqrt{(+2)^2 \cdot (-2)^4} = \sqrt{2^6} = \sqrt{64} = \pm 8$

b) $\sqrt{(-2)^7 : (-2)^3} = \sqrt{(-2)^4} = \sqrt{16} = \pm 4$

c) $\sqrt{8^3 : (-2)^5} = \sqrt{2^9 : (-2)^5} = \sqrt{-2^4} = \sqrt{-16} \rightarrow$ No existe

d) $\sqrt{(-6)^3 : 3^3} = \sqrt{(-6 : 3)^3} = \sqrt{(-2)^3} = \sqrt{-8} \rightarrow$ No existe

PÁGINA 36

Múltiplos y divisores

18 **Verdadero o falso:**

a) **195 es múltiplo de 13.**

b) **13 es divisor de 195.**

c) **745 es múltiplo de 15.**

d) **18 es divisor de 258.**

e) **123 es divisor de 861.**

a) Verdadero. $195 = 13 \cdot 15$

b) Verdadero. $195 : 13 = 15$

c) Falso.

d) Falso.

e) Verdadero. $861 : 123 = 7$.

19 △△△ **Escribe los cinco primeros múltiplos de 15 por encima de 1000.**

1 005, 1 020, 1 035, 1 050, 1 065

20 △△△ **Escribe todos los divisores de 140.**

1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140

21 △△△ **Verdadero o falso:**

a) La suma de dos múltiplos de 8 es múltiplo de 8.

b) La diferencia de dos múltiplos de 6 es un múltiplo de 6.

c) Si un número es múltiplo de 4 y de 3, también es múltiplo de 12.

d) Si un número es múltiplo de 2 y de 4, también es múltiplo de 8.

e) Si un número es múltiplo de 12, también es múltiplo de todos los divisores de 12.

a) Verdadero.
$a \cdot 8 + b \cdot 8 = (a + b) \cdot 8$

b) Verdadero.
$a \cdot 6 - b \cdot 6 = (a - b) \cdot 6$

c) Verdadero.
$a \cdot 4 \cdot 3 = a \cdot 12$

d) Falso. Por ejemplo, $20 = 10 \cdot 2 = 5 \cdot 4$ y, sin embargo, no es múltiplo de 8.

e) Verdadero.
$a \cdot 12 = a \cdot 2 \cdot 6 = a \cdot 3 \cdot 4 \ldots$

Números primos y compuestos

22 △△△ **Escribe todos los números primos comprendidos entre 80 y 100.**

83, 89, 91, 97

23 △△△ **Calcula cuánto debe valer *a* para que el número $\boxed{7}\boxed{1}\boxed{a}$ sea:**

a) Múltiplo de 2

b) Múltiplo de 3

c) Múltiplo de 5

a) $a = 0, 2, 4, 6, 8$

b) $a = 1, 4, 7$

c) $a = 0, 5$

24 △△△ **Descompón en factores primos:**

a) 48 | **b) 54**

c) 90 | **d) 105**

e) 120 | **f) 135**

g) 180 | **h) 378**

i) 700 | **j) 1 872**

a) $48 = 2^4 \cdot 3$ | b) $54 = 2 \cdot 3^3$

c) $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ | d) $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

e) $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ | f) $135 = 3^3 \cdot 5$

g) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ | h) $378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$

i) $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ | j) $1\,872 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 13$

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

25 △△△ **Calcula:**

a) m.c.m. (12, 15) | **b) m.c.m. (24, 60)**

c) m.c.m. (48, 54) | **d) m.c.m. (90, 150)**

e) m.c.m. (6, 10, 15) | **f) m.c.m. (8, 12, 18)**

a) $\left.\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 15 = 3 \cdot 5 \end{array}\right\}$ m.c.m. $(12, 15) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

b) $\left.\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\}$ m.c.m. $(24, 60) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

c) $\left.\begin{array}{l} 48 = 2^4 \cdot 3 \\ 54 = 2 \cdot 3^3 \end{array}\right\}$ m.c.m. $(48, 54) = 2^4 \cdot 3^3 = 432$

d) $\left.\begin{array}{l} 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \end{array}\right\}$ m.c.m. $(90, 150) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$

e) $\left.\begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 10 = 2 \cdot 5 \\ 15 = 3 \cdot 5 \end{array}\right\}$ m.c.m. $(6, 10, 15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

f) $\left.\begin{array}{l} 8 = 2^3 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \end{array}\right\}$ m.c.m. $(8, 12, 18) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

26 ▲△△ **Calcula:**

a) M.C.D. (16, 24) **b) M.C.D. (48, 72)**

c) M.C.D. (105, 120) **d) M.C.D. (135, 180)**

e) M.C.D. (8, 12, 16) **f) M.C.D. (45, 60, 105)**

a) $\left.\begin{array}{l} 16 = 2^4 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \end{array}\right\}$ M.C.D. $(16, 24) = 2^3 = 8$

b) $\left.\begin{array}{l} 48 = 2^4 \cdot 3 \\ 72 = 2^3 \cdot 3^2 \end{array}\right\}$ M.C.D. $(48, 72) = 3 \cdot 2^3 = 24$

c) $\left.\begin{array}{l} 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\}$ M.C.D. $(105, 120) = 3 \cdot 5 = 15$

d) $\left.\begin{array}{l} 135 = 3^3 \cdot 5 \\ 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array}\right\}$ M.C.D. $(135, 180) = 3^2 \cdot 5 = 45$

e) $\left.\begin{array}{l} 8 = 2^3 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 16 = 2^4 \end{array}\right\}$ M.C.D. $(8, 12, 16) = 2^2 = 4$

f) $\left.\begin{array}{l} 45 = 3^2 \cdot 5 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{array}\right\}$ M.C.D. $(45, 60, 105) = 3 \cdot 5 = 15$

27 ▲▲△ **Si** a **es múltiplo de** b**, ¿cuál es el mínimo común múltiplo de** a **y** b**? ¿Cuál es el máximo común divisor de** a **y** b**?**

Si a es múltiplo de b, $a = k \cdot b$

m.c.m. $(a, b) =$ m.c.m. $(k \cdot b, b) = k \cdot b = a$

M.C.D. $(a, b) =$ M.C.D. $(k \cdot b, b) = b$

Para aplicar lo aprendido

28 ▲△△ **Se dice que dos números son primos entre sí cuando no tienen ningún divisor común aparte del 1. Por ejemplo, el 15 y el 16. Busca otras parejas de números primos entre sí.**

Por ejemplo: 17 y 24

13 y 9

29 ▲▲△ **Se desea envasar 100 litros de aceite en recipientes iguales. ¿Cuál ha de ser la capacidad de los mismos? Busca todas las soluciones posibles, e indica, en cada caso, el número de recipientes necesarios.**

Las soluciones posibles son todos los divisores de 100:

1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

30 ▲▲△ **En la biblioteca de mi centro hay entre 150 y 200 libros. Averigua cuántos son exactamente si pueden agruparse en cajas de 5, de 9, de 15 y de 18 unidades.**

$$\left.\begin{array}{l} 5 = 5 \\ 9 = 3^2 \\ 15 = 3 \cdot 5 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \end{array}\right\} \text{m.c.m. } (5, 9, 15, 18) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$$

El número de libros ha de ser múltiplo de 5, de 9, de 15 y de 18, y el menor de ellos es 90.

Los siguientes múltiplos de 90 son 180, 270…

Por tanto hay 180 libros.

31 ▲▲△ **Las líneas de autobuses A y B inician su actividad a las siete de la mañana desde el mismo punto de partida.**

Si la línea A tiene un servicio cada 24 minutos y la línea B lo hace cada 36 minutos, ¿a qué hora, después de las siete, vuelven a coincidir las salidas?

$$\left.\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2 \end{array}\right\} \text{m.c.m. } (24, 36) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

Los autobuses coinciden cada 72 minutos.

Volverán a coincidir a las 8 horas y 12 minutos de la mañana.

32 ▲▲△ **Deseamos partir dos cuerdas de 20 m y 30 m en trozos iguales lo más grandes que sea posible y sin desperdiciar ningún cabo.**

¿Cuánto medirá cada trozo?

$$\left.\begin{array}{l} 20 = 2^2 \cdot 5 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\} \text{M.C.D. } (20, 30) = 2 \cdot 5 = 10$$

Han de partirse en trozos de 10 metros cada una.

Página 37

33 **En la modalidad deportiva de ciclismo de persecución en pista, uno de los corredores da una vuelta al circuito cada 54 segundos y el otro cada 72 segundos. Parten juntos de la línea de salida.**

a) ¿Cuánto tiempo tardarán en volverse a encontrar por primera vez en la línea de salida?

b) ¿Cuántas vueltas habrá dado cada ciclista en ese tiempo?

a) $\left.\begin{array}{l} 54 = 2 \cdot 3^3 \\ 72 = 2^3 \cdot 3^2 \end{array}\right\}$ m.c.m. $(54, 72) = 2^3 \cdot 3^3 = 216$

Volverán a encontrarse al cabo de 216 segundos, es decir, después de 3 minutos y 36 segundos.

b) El primer ciclista habrá dado 216 : 54 = 4 vueltas.
El segundo, 216 : 72 = 3 vueltas.

34 **¿Qué medida tendrá el lado de una baldosa cuadrada que se ha utilizado para pavimentar el suelo de un garaje de 123 dm de largo por 90 dm de ancho?**

(Las baldosas han venido justas, sin necesidad de cortar ninguna).

123 dm = 1 230 cm

90 dm = 900 cm

$\left.\begin{array}{l} 1\,230 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41 \\ 90 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \end{array}\right\}$ M.C.D. $(1\,230, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Cada baldosa cuadrada mide 30 cm de lado.

35 **Un panadero necesita envases para colocar 250 magdalenas y 75 mantecados en cajas, lo más grandes que sea posible, pero sin mezclar ambos productos en la misma caja.**

¿Cuántas unidades irán en cada caja? ¿Cuántas cajas hacen falta?

$\left.\begin{array}{l} 250 = 2 \cdot 5^3 \\ 75 = 3 \cdot 5^2 \end{array}\right\}$ M.C.D. $(250, 75) = 5^2 = 25$

En cada caja deberán ir 25 unidades.

Completará 10 cajas de magdalenas y 3 cajas de mantecados.

36 ▲▲▲ **Un alumno quiere cambiar con otro cuadernos de 3,6 euros por rotuladores de 4,8 euros. ¿Cuál es el menor número de cada clase que pueden cambiar sin que ninguno de los dos pierda? ¿Cuál es el valor de lo que aporta cada uno?**

3,6 € = 360 céntimos de euro

4,8 € = 480 céntimos de euro

$$\left.\begin{array}{l} 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\} \text{m.c.m. } (360, 480) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1\,440$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\,440 : 360 = 4 \\ 1\,440 : 480 = 3 \end{array}\right\}$$

Pueden intercambiar 4 cuadernos por 3 rotuladores, por un valor, cada paquete, de 14,4 €.

37 ▲▲▲ **En un colegio, el número de profesoras es el doble que el número de profesores. ¿Cuál de los siguientes números será igual al total de docentes de dicho colegio?**

17 20 24 26

El número total de docentes tiene que ser múltiplo de 3.

El único múltiplo de 3 de los números que se dan es 24. Por tanto, el número total de docentes del colegio es 24.

Si en total son 24, dos partes son profesoras y una profesores:

$$24 : 3 = 8$$

$$8 \times 2 = 16 \text{ profesoras}$$

Hay 16 profesoras y 8 profesores.

38 ▲▲▲ **El mayor de los tres hijos de una familia visita a sus padres cada 15 días, el mediano cada 10, y la menor cada 12. El día de Navidad se reúne toda la familia. ¿Qué día volverán a encontrarse los tres juntos? ¿Y el mayor con el mediano?**

$$\left.\begin{array}{l} 15 = 3 \cdot 5 \\ 10 = 2 \cdot 5 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \end{array}\right\} \text{m.c.m. } (15, 10, 12) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Los tres hermanos volverán a encontrarse 60 días después de Navidad (25 de diciembre). Es decir, el 22 de febrero del año siguiente.

$$\text{m.c.m. } (15, 10) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

El mayor y el mediano se encontrarán transcurridos 30 días, es decir, el 23 de enero del año siguiente.

PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

39 **En una excursión a la montaña, organizada por un club alpino, cada tres miembros comparten una mochila, cada cuatro una brújula y cada seis un mapa. Si entre mochilas, brújulas y mapas hay 27, ¿cuántos miembros del club participan en la excursión?**

El número de miembros ha de ser múltiplo de 3, de 4 y de 6.

$$\text{m.c.m.}\ (3, 4, 6) = 12$$

$$\left.\begin{array}{l} 12 : 3 = 4 \text{ mochilas} \\ 12 : 4 = 3 \text{ brújulas} \\ 12 : 6 = 2 \text{ mapas} \end{array}\right\} 4 + 3 + 2 = 9$$

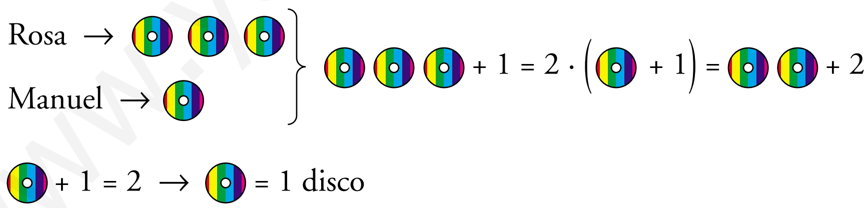
Como hay 27 objetos entre mochilas, brújulas y mapas, y 27 : 9 = 3, debe haber:

$$12 \cdot 3 = 36 \text{ miembros}$$

Veamos que es cierto:

$$\left.\begin{array}{l} 36 : 3 = 12 \text{ mochilas} \\ 36 : 4 = 9 \text{ brújulas} \\ 36 : 6 = 6 \text{ mapas} \end{array}\right\} 12 + 9 + 6 = 27$$

40 **Rosa tiene el triple de discos que Manuel. Si cada uno comprase un disco, Rosa tendría el doble. ¿Cuántos discos tiene cada uno?**



Rosa tiene 3 discos y Manuel, 1.

41 △△△ **Federico tenía la cuarta parte de dinero que Amelia. Por hacer un recado reciben una moneda de 2 € cada uno. Ahora Amelia tiene el triple que Federico. ¿Cuánto tiene ahora cada uno?**

El dinero que tenían al principio entre los dos es múltiplo de 5.

$\underbrace{\text{Un múltiplo de 5}}_{20}\ \underbrace{\text{más 4}}_{+\,4}\ \underbrace{\text{debe ser}}_{=}\ \underbrace{\text{múltiplo de 4}}_{24}.$

Amelia tenía 16 € y Federico, 4 €.

Ahora, Amelia tiene 18 € y Federico, 6 €.

42 **El número de participantes en un desfile es tal que se pueden agrupar en filas de 3 en 3, de 5 en 5 o de 25 en 25, pero no pueden hacerlo de 4 en 4 ni de 9 en 9. ¿Cuál es el número de participantes si sabemos que es mayor que 1 000, pero menor que 1 250?**

Múltiplos de 3, de 5 y de 25 → múltiplos de 75

Múltiplos de 75 comprendidos entre 1 000 y 1 250:

1 050   1 125   1 200

Descartamos 1 200 porque es múltiplo de 4, y 1 125 porque es múltiplo de 9.

Así, el número de participantes es 1 050.

PÁGINA 52

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Sistema de numeración decimal

1 **Escribe con cifras:**

a) **Trece unidades y ocho milésimas** → 13,008

b) **Cuarenta y dos cienmilésimas** → 0,00042

c) **Trece millonésimas** → 0,000013

2 **Expresa con números decimales:**

a) **Un cuarto de unidad** → 0,25

b) **Unidad y media** → 1,5

c) **Tres cuartos de décima** → 0,075

d) **Centésima y media** → 0,015

e) **Dos milésimas y cuarto** → 0,00225

3 **Copia y completa:**

a) **2 décimas** = 2 000 diezmilésimas

b) **3 milésimas** = 3 000 millonésimas

c) **7 cienmilésimas** = 0,007 centésimas

d) **4 millonésimas** = 0,004 milésimas

4 **Expresa en millonésimas:**

a) **2,45 unidades** = 2 450 000 millonésimas

b) **0,5 milésimas** = 500 millonésimas

c) **1,2 diezmilésimas** = 120 millonésimas

d) **0,4 cienmilésimas** = 4 millonésimas

5 **Copia y completa:**

a) **0,05 milésimas** = 5 cienmilésimas

b) **4,2 cienmilésimas** = 0,42 diezmilésimas

c) **25 diezmilésimas** = 0,25 centésimas

d) **1 243 millonésimas** = 1,243 milésimas

6 △△△ **Separa: por un lado, los decimales exactos; por otro, los periódicos puros, y por otro, los periódicos mixtos:**

Decimales exactos: 13,7 - 1,37 - 0,137

Decimales periódicos puros: $13,\widehat{7}$ - $1,\widehat{37}$ - $0,\widehat{137}$

Decimales periódicos mixtos: $1,3\widehat{7}$ - $0,1\widehat{37}$ - $0,13\widehat{7}$

7 △△△ **Copia y completa la tabla:**

2,5748	$2 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{4}{1\,000} + \frac{8}{10\,000}$
4,8006	$4 + \frac{8}{10} + \frac{6}{10\,000}$
0,00053	$\frac{5}{10\,000} + \frac{3}{10\,000}$
0,000706	$\frac{7}{10\,000} + \frac{6}{1\,000\,000}$

8 △△△ **Ordena de menor a mayor:**

3,0010 < 3,0089 < 3,0090 < 3,0098 < 3,0100 < 3,0150

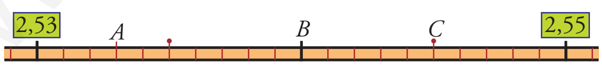
9 △△△ **Coloca los signos < , > o =:**

0,05 = 0,050   0,089 < 0,091

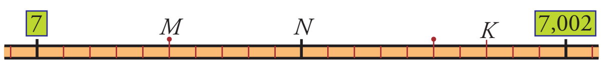
0,1 = 0,100   0,4 > 0,399

0,09 < 0,1   0,03 > 0,0298

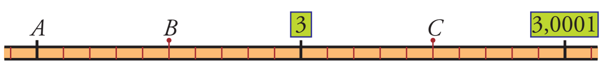
10 △△△ **Da el número decimal asociado a cada letra:**



A = 2,533 B = 2,54 C = 2,545



M = 7,0005 N = 7,001 K = 7,0017



A = 2,9999 B = 2,99995 C = 0,00005

11 ▲△△ **Escribe un número decimal que esté entre:**

a) **5 y 6** b) **4,5 y 4,7**

c) **2,1 y 2,2** d) **0,015 y 0,016**

e) **0,009 y 0,01** f) **0,0425 y 0,04251**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) 5 < 5,5 < 6 b) 4,5 < 4,6 < 4,7

c) 2,1 < 2,15 < 2,2 d) 0,015 < 0,0155 < 0,016

e) 0,009 < 0,0095 < 0,01 f) 0,0425 < 0,042505 < 0,04251

12 ▲△△ **Copia y completa la tabla:**

	APROXIMACIONES		
	A LAS DÉCIMAS	A LAS CENTÉSIMAS	A LAS MILÉSIMAS
1,5027	1,5	1,50	1,503
18,71894	18,7	18,72	18,719
2,0996	2,1	2,10	2,100
7,0908	7,1	7,09	7,091
7,9992	8,0	8,00	7,999

13 ▲△△ **Aproxima a las diezmilésimas:**

a) **3,2859499** → 3,2859

b) **2,6005573** → 2,6006

c) **0,0064795** → 0,0065

d) **0,0082009** → 0,0082

14 ▲△△ **Escribe una aproximación de cada uno de estos números con un error menor que cinco milésimas:**

Aproximando a las centésimas, cometeremos un error menor de cinco milésimas.

a) **2,8649** → 2,86

b) **5,00932** → 5,01

c) **0,02994** → 0,03

d) **4,305186** → 4,31

15 ▲△△ **Se toma 5,329 como aproximación de** $5,3\widehat{28}$. **Calcula una cota del error cometido.**

Se ha redondeado a las milésimas, por tanto, se ha cometido un error menor de cinco diezmilésimas.

16 ▲△△ **Supón que para aproximar números decimales nos limitamos a suprimir todas las cifras que quedan a la derecha de las centésimas. ¿Qué puedes decir, en general, del error cometido?**

El error es menor de una centésima.

PÁGINA 53

OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

17 **Calcula esta sumas:**

a) 3,24 + 2,382 + 2,7618

b) 0,98 + 0,046 + 0,326

c) 5,82 + 4,005 + 2,175

a) $\begin{array}{r} 3{,}24 \\ 2{,}382 \\ +\ 2{,}7618 \\ \hline 8{,}3838 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 0{,}98 \\ 0{,}046 \\ +\ 0{,}326 \\ \hline 1{,}352 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 5{,}82 \\ 4{,}005 \\ +\ 2{,}175 \\ \hline 12{,}000 \end{array}$

18 **Calcula:**

a) 12 – 7,458 **b)** 125,6 – 15,15

c) 52,382 – 32,38 **d)** 829,3 – 744,46

a) $\begin{array}{r} 12{,}000 \\ -\ 7{,}458 \\ \hline 4{,}542 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 125{,}60 \\ -\ 15{,}15 \\ \hline 110{,}45 \end{array}$

c) $\begin{array}{r} 52{,}382 \\ -\ 32{,}380 \\ \hline 20{,}002 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 829{,}30 \\ -\ 744{,}46 \\ \hline 84{,}84 \end{array}$

19 **Calcula:**

a) 8,32 + 5,26 – 3,58 **b)** 6,04 – 2,83 + 2,69

c) 8,8 – 2,24 – 2,14 **d)** 13 – 6,9 – 3,85

a) $\begin{array}{r} 8{,}32 \\ +\ 5{,}26 \\ \hline 13{,}58 \\ -\ 3{,}58 \\ \hline 10{,}00 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 6{,}04 \\ -\ 2{,}83 \\ \hline 3{,}21 \\ +\ 2{,}69 \\ \hline 5{,}90 \end{array}$

c) $\begin{array}{r} 8{,}80 \\ -\ 2{,}24 \\ \hline 6{,}56 \\ -\ 2{,}14 \\ \hline 4{,}42 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 13{,}0 \\ -\ 6{,}9 \\ \hline 6{,}1 \\ -\ 3{,}85 \\ \hline 2{,}25 \end{array}$

20 **Quita paréntesis y calcula:**

a) **4,25 – (1,2 + 0,75) + 1,06** = 4,25 – 1,95 + 1,06 = 3,36

b) **(0,8 + 0,4) – (1 – 0,23)** = 1,2 – 0,77 = 0,43

c) **5 – [8,2 – (3,6 + 1,9 – 2,4)]** = 5 – [8,2 – 3,1] = 5 – 5,1 = –0,1

21 **Multiplica:**

a) **2,28 × 4,5** b) **6,35 × 0,6**

c) **3,16 × 0,25** d) **8,125 × 12**

a)
$$\begin{array}{r} 2{,}28 \\ \times \quad 4{,}5 \\ \hline 1140 \\ 912 \\ \hline 10{,}260 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 6{,}35 \\ \times \quad 0{,}6 \\ \hline 3{,}810 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 3{,}16 \\ \times \quad 0{,}25 \\ \hline 1580 \\ 632 \\ \hline 0{,}7900 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 8{,}125 \\ \times \quad 12 \\ \hline 16250 \\ 8125 \\ \hline 97{,}500 \end{array}$$

22 **Multiplica y aproxima el producto a las centésimas:**

a) **8,625 × 3,24** = 27,945 → 27,95

b) **0,08 × 5,47** = 0,4376 → 0,44

c) **0,26 × 3,159** = 0,82134 → 0,82

d) **23,45 × 15,63** = 366,5235 → 366,52

23 **Completa la tabla y observa:**

	8	10	20	30	100	400
×0,5	4	5	10	15	50	200
×0,25	2	2,5	5	7,5	25	100

Al multiplicar un número por 0,5 se reduce a la mitad (es lo mismo que dividirlo entre 2).

Al multiplicar un número por 0,25 se reduce a la cuarta parte (es lo mismo que dividirlo entre 4).

24 **Calcula el cociente exacto:**

a) 87 : 12 **b) 38,5 : 1,4**

c) 3,81 : 1,25 **d) 4 : 0,64**

e) 85,941 : 16,2 **f) 14,5 : 0,464**

a) 87 | 12
030 7,25
60
0

87 : 12 = 7,25

b) 38,5 | 1,4
105 27,5
070
00

38,5 : 1,4 = 27,25

c) 3,81 | 1,25
00600 3,048
1000
000

3,81 : 1,25 = 3,048

d) 400 | 0,64
160 6,25
320
00

4 : 0,64 = 6,25

e) 85,941 | 16,2
0494 5,305
00810
000

85,941 : 16,2 = 5,305

f) 14,500 | 0,464
0580 31,25
1160
2320
000

14,5 : 0,464 = 31,25

25 **Calcula los cocientes de estas divisiones con dos cifras decimales:**

a) 146 : 85 **b) 3,2 : 13**

c) 71 : 5,17 **d) 24,056 : 8,6**

a) 146 | 85
610 1,71
150
75

146 : 85 ≈ 1,71

b) 3,2 | 13
0 60 0,24
08

3,2 : 13 ≈ 0,24

c) 71,00 | 5,17
1 930 13,73
3790
1710
159

71 : 5,17 ≈ 13,73

d) 24,056 | 8,6
6 85 2,79
836
62

24,056 : 8,6 ≈ 2,79

26 △△△ **Calcula el cociente con un error menor que cinco milésimas:**

Si aproximamos el cociente a las centésimas, cometeremos un error menor de cinco milésimas.

a) **18 : 13** ≃ 1,3846153 → 1,38

b) **83,4 : 15,9** ≃ 5,245283 → 5,25

c) **16,6 : 0,42** ≃ 39,523809 → 39,52

d) **4,672 : 0,24** ≃ 19,4666 → 19,47

27 △△△ **Completa la tabla y observa:**

	3	5	7	10	15	100
: 0,5	6	10	14	20	30	200
: 0,25	12	20	28	40	60	400

Dividir entre 0,5 es lo mismo que multiplicar por dos.

Dividir entre 0,25 es lo mismo que multiplicar por cuatro.

28 △△△ **Reduce y calcula:**

a) **1,6 + 3 · (5,6 – 4,8)** = 1,6 + 3 · 0,8 = 1,6 + 2,4 = 4

b) **2,48 – 3,1 · 0,4 + 2,8 · 1,7** = 2,48 – 1,24 + 4,76 = 6

c) **4,3 – 0,2 · (0,7 + 1,2 – 0,4)** = 4,3 – 0,2 · 1,5 = 4,3 – 0,3 = 4

29 △△△ **Copia y completa:**

a) **Multiplicar por 0,1 es igual que dividir entre** 10.

b) **Multiplicar por 0,2 es igual que dividir entre** 5.

c) **Dividir entre 0,01 es igual que multiplicar por** 100.

d) **Dividir entre 0,02 es igual que multiplicar por** 50.

30 △△△ **Calcula la raíz cuadrada exacta:**

a) $\sqrt{1{,}21}$ b) $\sqrt{6{,}25}$ c) $\sqrt{6{,}76}$

d) $\sqrt{4225}$ e) $\sqrt{42{,}25}$ f) $\sqrt{0{,}4225}$

a) $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$ b) $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ c) $\sqrt{6{,}76} = 2{,}6$

d) $\sqrt{4\,225} = 65$ e) $\sqrt{42{,}25} = 6{,}5$ f) $\sqrt{0{,}4225} = 0{,}65$

31 △△△ **Calcular, por tanteo, con una cifra decimal:**

a) $\sqrt{86}$ b) $\sqrt{150}$

c) $\sqrt{500}$ d) $\sqrt{930}$

a) $\sqrt{86}$ $\begin{cases} 9^2 = 81 < 86 \\ 10^2 = 100 > 86 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (9,2)^2 = 84,64 < 86 \\ (9,3)^2 = 84,49 > 86 \end{cases} \rightarrow 9,2 < \sqrt{86} < 9,3$

b) $\sqrt{150}$ $\begin{cases} 12^2 = 144 < 150 \\ 13^2 = 169 > 150 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (12,2)^2 = 148,84 < 150 \\ (12,3)^2 = 151,29 > 150 \end{cases} \rightarrow 12,2 < \sqrt{150} < 12,3$

c) $\sqrt{500}$ $\begin{cases} 22^2 = 484 < 500 \\ 23^2 = 529 > 500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (22,3)^2 = 497,29 < 500 \\ (22,4)^2 = 501,76 > 500 \end{cases} \rightarrow 22,3 < \sqrt{150} < 22,4$

d) $\sqrt{930}$ $\begin{cases} 30^2 = 900 < 930 \\ 31^2 = 961 > 930 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (30,4)^2 = 924,16 < 930 \\ (30,5)^2 = 930,25 > 930 \end{cases} \rightarrow 30,4 < \sqrt{930} < 30,5$

PÁGINA 54

EJERCICIOS PARA RESOLVER CON LA CALCULADORA

33 △△△ **Opera con la calculadora y aproxima el resultado a las milésimas:**

a) $237,4 - 42,28 \times 4,769$

b) $81,4629 : (51,486 - 42,831)$

c) $(6,36 \times 2,85) : (2,85 \times 0,967)$

d) $(52,09 + 8,156) : (7,921 + 3,28)$

a) $237,4 - 42,28 \times 4,769 = 237,4 - 201,65332 = 35,76668 \rightarrow 35,767$

b) $81,4629 : (51,486 - 42,831) = 81,4629 : 8,655 = 9,4122357 \rightarrow 9,412$

c) $(6,36 \times 2,85) : (2,85 \times 0,967) = 6,36 : 0,967 = 6,5770423 \rightarrow 6,577$

d) $(52,09 + 8,156) : (7,921 + 3,28) = 60,246 : 11,201 = 5,3786269 \rightarrow 5,379$

35 △△△ **Estima mentalmente el resultado y, después, comprueba con la calculadora:**

a) $5,9704 \times 3,0197$

b) $(2,456 + 3,594) : 2,9705$

c) $(7,269 - 2,2806) \times (4,875 - 2,79)$

a) $5,9704 \times 3,0197 \simeq 6 \times 3 = 18$ $5,9704 \times 3,0197 = 18,029$

b) $(2,456 + 3,594) : 2,9705 \simeq 6 : 3 = 2$ $(2,456 + 3,594) : 2,9705 = 2,037$

c) $(7,269 - 2,2806) \times (4,875 - 2,79) \simeq 5 \times 2 = 10$ $(7,269 - 2,2806) \times (4,875 - 2,79) = 10,401$

36 **Resuelve con ayuda de la calculadora y aproxima el resultado a las milésimas:**

a) $\sqrt{58,25}$ **b)** $\sqrt{263,9}$

c) $\sqrt{1 : 0,0046}$ **d)** $\sqrt{532 \times 8,46}$

a) $\sqrt{58,25} \simeq 7,632$ b) $\sqrt{263,9} \simeq 16,245$

c) $\sqrt{1 : 0,0046} \simeq 14,744$ d) $\sqrt{532 \times 8,46} \simeq 67,087$

SISTEMA SEXAGESIMAL

37 **Expresa en minutos:**

a) Tres horas y media **b) 1 080 s**

c) 4 h 5 min 30 s **d) un día**

a) Tres horas y media = 3 × 60 + 30 = 180 + 30 = 210 min

b) 1 080 s = 1 080 : 60 = 18 min

c) 4 h 5 min 30 s = 4 × 60 + 5 + 30 : 60 = 240 + 5 + 0,5 = 245,5 min

d) un día = 24 h = 24 × 60 = 1 440 min

38 **Expresa en segundos:**

a) 12° **b) 3° 5'** **c) 8° 10' 27"**

a) 12° = 12 × 3 600 = 43 200"

b) 3° 5' = 3 × 3 600 + 5 × 60 = 11 100"

c) 8° 10' 27" = 8 × 3 600 + 10 × 60 + 27 = 29 427"

39 **Expresa en grados con un decimal:**

a) 13° 12' **b) 18° 36'**

c) 21° 15' 54" **d) 46° 18' 36"**

a) 13° 12' = 13 + 12 : 60 = 13 + 0,2 = 13,2°

b) 18° 36' = 18 + 36 : 60 = 18 + 0,6 = 18,6°

c) 21° 15' 54" = 21 + 15 : 60 + 54 : 3 600 = 21,265° → 21,3°

d) 46° 18' 36" = 46 + 18 : 60 + 36 : 3 600 = 46,31° → 46,3°

40 △△△ Pasa a forma compleja:

a) 8 564 s **b) 124,6 min**

c) 1,53 h **d) 5,7 h**

a)
$$\begin{array}{l|l} 8\,564 \text{ s} & 60 \\ \hline 2\,56 & \begin{array}{l|l} 142 \text{ min} & 60 \\ \hline 22 \text{ min} & 2\text{h} \end{array} \\ 164 & \\ 44 \text{ s} & \end{array}$$

8 564 s = 2 h 22 min 44 s

b) 0,6 min = 0,6 × 60 = 36 s
124,6 min = 120 min + 4 min + 0,6 min =
= 2 h 4 min 36 s

c) 1,53 h = 1 h + 0,53 h =
= 1 h + (0,53 × 60) min =
= 1 h 31,8 min =
= 1 h + 31 min + (0,8 × 60) =
= 1 h 31 min 48 s

d) 5,7 h = 5 h + (0,7 × 60) min =
= 5 h 42 min

41 △△△ **Expresa en grados, minutos y segundos:**

a) 142 824" **b) 8 596,75'**

c) 45,46° **d) 62,265°**

a)
$$\begin{array}{l|l} 142\,824'' & 60 \\ \hline 22\,8 & \begin{array}{l|l} 2\,380' & 60 \\ \hline 580 & 39° \\ 40' & \end{array} \\ 4\,82 & \\ 0\,24'' & \end{array}$$

142 824" = 39° 40' 24"

b) 8 596,75' = 8 596' + 0,75'

$$\begin{array}{l|l} 8\,596' & 60 \\ \hline 2\,59 & 143° \\ 196 & \\ 16' & \end{array}$$

8 596,75' = 143° 16' 45"

c) 45,46° = 45° + 0,46°
0,46° = 0,46 × 60 = 27,6' = 27' + 0,6'
0,6' = 0,6 × 60 = 36"
} 45,46° = 45° 27' 36"

d) 62,265° = 62° + 0,265°
0,265° = 0,265 × 60 = 15,9' = 15' + 0,9'
0,9' = 0,9 × 60 = 54"
} 62,265° = 62° 15' 54"

42 △△△ **Calcula estas sumas:**

a) 26° 8' + 85° 52'

b) 47° 25' + 18° 39' 15"

c) 53° 15' 28" + 13° 18' 36"

a) $$\begin{array}{r} 26° \;\; 8' \\ +\; 85° \;\; 52' \\ \hline 111° \;\; 60' \end{array} \to 112°$$

b) $$\begin{array}{r} 47° \;\; 25' \qquad \\ +\; 18° \;\; 39' \;\; 15'' \\ \hline 65° \;\; 64' \;\; 15'' \end{array} \to 66°\ 4'\ 15''$$

c) $$\begin{array}{r} 53° \;\; 15' \;\; 28'' \\ +\; 13° \;\; 18' \;\; 36'' \\ \hline 66° \;\; 33' \;\; 64'' \end{array} \to 66°\ 34'\ 4''$$

43 △△△ **Halla el resultado:**

a) 26° 8' + 85° 52'

b) 47° 25' + 18° 39' 15"

c) 53° 15' 28" + 13° 18' 36"

a) $$\begin{array}{r} 1\text{ h} \qquad\qquad\qquad \\ -\; 0\text{ h}\;\; 36\text{ min}\;\; 29\text{ s} \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{r} 0\text{ h}\;\; 59\text{ min}\;\; 60\text{ s} \\ -\; 0\text{ h}\;\; 36\text{ min}\;\; 29\text{ s} \\ \hline 23\text{ min}\;\; 31\text{ s} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r} 3\text{ h}\;\;\; 6\text{ min} \qquad \\ -\; 1\text{ h}\;\; 18\text{ min}\;\; 45\text{ s} \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{r} 2\text{ h}\;\; 65\text{ min}\;\; 60\text{ s} \\ -\; 1\text{ h}\;\; 18\text{ min}\;\; 45\text{ s} \\ \hline 1\text{ h}\;\; 47\text{ min}\;\; 15\text{ s} \end{array}$$

c) $$\begin{array}{r} 5\text{ h}\;\; 20\text{ min}\;\; 50\text{ s} \\ -\; 3\text{ h}\;\; 30\text{ min}\;\; 55\text{ s} \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{r} 4\text{ h}\;\; 79\text{ min}\;\; 110\text{ s} \\ -\; 3\text{ h}\;\; 30\text{ min}\;\;\;\; 55\text{ s} \\ \hline 1\text{ h}\;\; 49\text{ min}\;\;\;\; 55\text{ s} \end{array}$$

44 △△△ **Multiplica:**

a) (15° 23' 18") × 7 **b) (25' 42") × 3** **c) (3 h 28 min 16 s) × 4**

a) $$\begin{array}{r} 15° \;\; 23' \;\; 18'' \\ \times\; 7 \\ \hline 105° \;\; 161' \;\; 126'' \end{array} \to 107° \;\; 43' \;\; 6''$$

b) $$\begin{array}{r} 25' \;\; 42'' \\ \times\; 3 \\ \hline 75' \;\; 126'' \end{array} \to 1° \;\; 17' \;\; 6''$$

c) $$\begin{array}{r} 3\text{ h}\;\;\; 28\text{ min}\;\; 16\text{ s} \\ \times\; 4 \\ \hline 12\text{ h}\;\; 112\text{ min}\;\; 64\text{ s} \end{array} \to 13\text{ h}\;\; 53\text{ min}\;\; 4\text{ s}$$

45 △△△ **Divide:**

a) $85° : 3$ **b)** $(11\text{ h }16\text{ min}) : 6$

c) $(39°\ 42'\ 24'') : 8$ **d)** $(4\text{ h }23\text{ min}) : 10$

a)

$$\begin{array}{lll|l} 85° & & & 3 \\ \hline 25 & & & 28°\ 20' \\ \ \ 1° & \longrightarrow & 60' & \\ & & 00 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lllll|l} 11\text{ h} & & 16\text{ min} & & & 6 \\ \hline 5\text{ h} & \xrightarrow{\times 60} & \underline{300\text{ min}} & & & 1\text{ h }52\text{ min }40\text{ s} \\ & & 316\text{ min} & & & \\ & & 16 & & & \\ & & 4\text{ min} & \xrightarrow{\times 60} & 240\text{ s} & \\ & & & & 00 & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{lllll|l} 39° & & 42' & & 24'' & 8 \\ \hline 7° & \xrightarrow{\times 60} & \underline{420} & & & 4°\ 57'\ 48'' \\ & & 462' & & & \\ & & 62 & & & \\ & & 6' & \xrightarrow{\times 60} & \underline{360''} & \\ & & & & 384'' & \\ & & & & 64 & \\ & & & & 0 & \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{lllll|l} 4\text{ h} & & 23\text{ min} & & & 10 \\ \hline & \searrow^{\times 60} & \underline{240\text{ min}} & & & 26\text{ min }18\text{ s} \\ & & 263\text{ min} & & & \\ & & 063 & & & \\ & & 03 & \xrightarrow{\times 60} & 180\text{ s} & \\ & & & & 00 & \end{array}$$

PROBLEMAS CON NÚMEROS DECIMALES

46 △△△ **¿Cuánto pesa una porción de queso que nos ha costado 5,88 €, sabiendo que el queso se vende a 12,25 € el kilo?**

$$5{,}88 : 12{,}25 = 0{,}48\text{ kg} = 480\text{ g}$$

47 △△△ **Un kilo y seiscientos gramos de cerezas cuesta 6 €. ¿A cómo se vende el kilo de cerezas?**

$$6 : 1{,}6 = 3{,}75\ €/\text{kg}$$

48 △△△ **Francisco pide en la carnicería tres filetes que, una vez cortados, pesan 708 gramos. ¿Cuánto debe pagar si un kilo de filetes cuesta 9,35 €?**

$$9{,}35 \times 0{,}708 = 6{,}6198 \xrightarrow{\text{Redondeo}} 6{,}62$$

Debe pagar 6,62 €.

49 △△△ **Julián tiene 13 años y mide 1,72 m. A los 8 años medía 1,57 m. ¿Cuál ha sido el crecimiento medio por año?**

$$(1{,}72 - 1{,}57) : (13 - 8) = 0{,}15 : 5 = 0{,}03$$

Ha crecido una media de 3 cm por año.

50 △△△ **¿Cuánto cuesta la entrada al zoo de una familia que consta de los padres, dos niños y un abuelo?**

$$45{,}35 \times 3 + 23{,}80 \times 2 = 136{,}05 + 47{,}6 = 183{,}65 \text{ €}$$

PÁGINA 55

51 △△△ **Un especulador compra una parcela rectangular de 62,50 m de largo y 23,80 m de ancho, a 45,5 €/m², y un año después la vende a 59,80 €/m². Si durante ese tiempo le ha ocasionado unos gastos de 5 327,46 €, ¿qué ganancia obtiene en el negocio?**

Superficie parcela → $62{,}50 \times 23{,}80 = 1\,487{,}5 \text{ m}^2$

Diferencia (coste venta – coste compra) → $1\,487{,}5 \cdot (59{,}8 - 45{,}5) = 1\,487{,}5 \cdot 14{,}3 = 21\,271{,}25$ €

Ganancia = Beneficio – Gastos = 21 271,25 – 5 327,46 = 15 943,79 €

52 △△△ **Roberto va al mercado con 62,81 € y compra 2,6 kg de uvas a 1,80 €/kg, 0,58 kg de plátanos a 2,15 €/kg, una merluza que pesa 850 g y está a 11,45 €/kg, y un pollo de kilo y cuarto a 5,95 €/kg. ¿Cuánto dinero le sobra?**

Manzanas	→	2,6 · 1,80	=	4,68 €
Plátanos	→	0,58 · 2,15	=	1,25 €
Merluza	→	0,850 · 11,45	=	9,73 €
Pollo	→	1,25 · 5,95	=	7,44 €
TOTAL GASTO	→			23,10 €

Resto sobrante: 62,81 – 23,10 = 39,71 €

53 △△△ **Se desea pintar una valla de 147,8 m de larga y 1,8 de altura. Un kilo de pintura cuesta 7,35 € y cubre 1,20 m² de valla. Calcula el presupuesto para la pintura.**

Superficie a pintar → $147{,}8 \cdot 1{,}8 = 266{,}04 \text{ m}^2$

Kilos de pintura necesarios → $266{,}04 : 1{,}20 = 221{,}7$ kg

Coste de la pintura → $221{,}7 \cdot 7{,}35 = 1\,629{,}495 \xrightarrow{\text{Redondeo}} 1\,629{,}50$ €

El presupuesto asciende a 1 629,50 €

54 △△△ **Una furgoneta transporta 250 docenas de huevos que cuestan a 0,98 € la docena. En una curva se vuelca una caja y se rompen 60 huevos. ¿Cuánto hay que aumentar el precio de la docena para que la mercancía siga valiendo lo mismo?**

Coste de la mercancía → $250 \cdot 0{,}98 = 245$ €

60 huevos = 60 : 12 = 5 docenas

Docenas restantes → 250 – 5 = 245 docenas

Las 245 docenas restantes deben venderse por 245 €, es decir, a 1 € la docena.

Por tanto, el precio de la docena se ha de aumentar en (1 – 0,98 = 0,02) dos céntimos de euro.

55 △△△ **Se desea partir un círculo en siete sectores iguales. ¿Cuál debe ser el ángulo de cada sector?**

Cada sector tendrá una amplitud de:

360° : 7 = 51° 25' 42,8"

$$\begin{array}{llll|l}
360° & & & & 7 \\ \hline
\;\;10 & & & & 51°\ 25'\ 42{,}8'' \\
\;\;\;3° \xrightarrow{\times 60} & 180' & & & \\
 & \;\;40 & & & \\
 & \;\;\;5' \xrightarrow{\times 60} & 300'' & & \\
 & & \;\;20 & & \\
 & & \;\;60 & &
\end{array}$$

56 △△△ **Un tren llega a la estación de la ciudad *B* a las 12 h 26 min 38 s, tras un viaje desde *A* que ha durado 2 h 47 min 29 s. ¿A qué hora salió de *A*?**

$$\begin{array}{rrrr}
 & 12\text{ h} & 26\text{ min} & 38\text{ s} \\
- & 2\text{ h} & 47\text{ min} & 29\text{ s} \\ \hline
\end{array}
\;\rightarrow\;
\begin{array}{rrrr}
 & 11\text{ h} & 86\text{ min} & 38\text{ s} \\
- & 2\text{ h} & 47\text{ min} & 29\text{ s} \\ \hline
 & 9\text{ h} & 39\text{ min} & 9\text{ s}
\end{array}$$

El tren salió a las 9 h 39 min 9 s.

57 ▲△△ **Un ciclista inicia su entrenamiento a las 8 h 24 min, e invierte 2 h 36 min en el recorrido de ida y 1 h 56 min en el de vuelta. ¿A qué hora finaliza su ejercicio?**

$$\begin{array}{rr} & 8\text{ h} \quad 24\text{ min} \\ & 2\text{ h} \quad 36\text{ min} \\ + & 1\text{ h} \quad 56\text{ min} \\ \hline & 11\text{ h}\ 116\text{ min} \end{array} \;\rightarrow\; 12\text{ h } 56\text{ min}$$

El ciclista terminó su entrenamiento a las 12 h 56 min.

58 ▲△△ **Disponemos de 1 hora para fabricar nueve tartas. ¿Cuánto tiempo tenemos para cada tarta?**

$$\begin{array}{l|l} 60\text{ min} & 9 \\ \cline{2-2} \ \ 6 \xrightarrow{\times 60} 360\text{ s} & 6\text{ min } 40\text{ s} \\ \qquad\qquad\ 00 & \end{array}$$

En cada tarta se invertirán 6 min 40 s.

59 ▲△△ **Un automóvil ha recorrido 247 km a una velocidad media de 95 km/h. ¿Cuánto tiempo ha invertido en el recorrido?**

$$\begin{array}{l|l} 247 & 95 \\ \cline{2-2} \ \ 57 \xrightarrow{\times 60} 3\,420 & 2\text{ h } 36\text{ min} \\ \qquad\qquad\quad 570 & \\ \qquad\qquad\quad\ \ 00 & \end{array}$$

El automóvil ha invertido 247 : 95 = 2 h 36 min en el recorrido.

60 ▲▲△ **Un camión ha realizado un viaje de 6 horas y 24 minutos a una velocidad media de 85 km/h. ¿Cuál ha sido la distancia recorrida?**

6 h 24 min = 6 + 24 : 60 = 6 + 0,4 = 6,4 h

6,4 h · 85 km/h = 544 km

El camión ha recorrido 544 km.

61 ▲▲△ **Una moto ha tardado 3 h 27 min en recorrer 276 km. ¿Cuál ha sido su velocidad media?**

3 h 27 min = 3 + 27 : 60 = 3 + 0,45 = 3,45 h

Velocidad media → 276 : 3,45 = 80 km/h

62 ▲△△ **Una compañía telefónica, en las llamadas internacionales, cobra 2,35 € por la conexión y 1,25 € por minuto. ¿Cuánto costará una conferencia de 8 min 24 s?**

8 min 24 seg = 8 + 24 : 60 = 8 + 0,4 = 8,4 min

Coste conferencia → 2,35 + 1,25 × 8,4 = 2,35 + 10,5 = 12,85 €

63 ▲△△ **Una fuente arroja un caudal de 0,85 *l*/s. ¿Cuánto tardará en llenar un pilón de 6 800 litros?**

6 800 : 0,85 = 8 000 s =
= 2 h 13 min 20 s

$$\begin{array}{r|l} 8\,000 \text{ s} & 60 \\ \hline 200 & 133 \text{ min} \\ 200 & \\ 20 \text{ s} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 133 \text{ min} & 60 \\ \hline 13 \text{ min} & 2 \text{ h} \end{array}$$

PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

65 **Calcula el ángulo que forman las agujas de un reloj a estas horas:**

a) 8 h 18 min

b) 9 h 36 min

c) 5 h 24 min 45 s

Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, que se da resuelto:

a) 8 h 18 min = 8 + 18 : 60 = 8,3 h

La aguja pequeña, en 8,3 h, recorre un ángulo } → 8,3 · 30° = 249°

La aguja grande, en 18 min, recorre un ángulo } → 18 · 6° = 108°

Por tanto, a las 8 h 18 min, las agujas forman un ángulo de:

249° – 108° = 141°

b) 9 h 36 min = 9 + 36 : 60 = 9,6 h

La aguja pequeña, en 9,6 h, recorre un ángulo } → 9,6 · 30° = 288°

La aguja grande, en 36 min, recorre un ángulo } → 36 · 6° = 216°

A las 9 h 36 min, las agujas forman un ángulo de:

288° – 216° = 72°

c) 5 h 24 min 45 s = 5 + 24 : 60 + 45 : 3 600 = 5,4125 h

24 min 45 s = 24 + 45 : 60 = 24,75 min

En 5,4125 h, la aguja pequeña recorre un ángulo } → 5,4125 · 30° = 162,375°

En 24,7 min, la aguja grande, recorre un ángulo } → 24,75 · 6° = 148,5°

162,375° – 148,5° = 13,875° = 13° + (0,875 · 60) min =
= 13° 52,5 min = 13° + 52 min + (0,5 × 60) s = 13° 52' 30 s

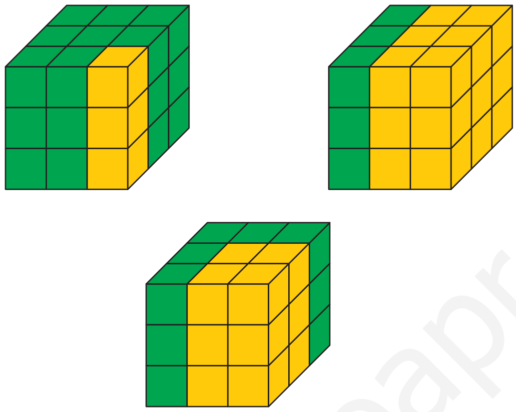
A las 5 h 24 min 45 s, las agujas forman un ángulo de: 13° 52' 30 s

PÁGINA 72

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Concepto de fracción

1 **¿Cuántos cubitos amarillos hay en cada uno de estos cubos?**



¿Qué fracción representa la parte verde en cada uno?

Primer cubo → 3 cubitos amarillos; Fracción que representa la parte verde: $\frac{24}{27} = \frac{8}{9}$

Segundo cubo → 18 cubitos amarillos; Fracción que representa la parte verde: $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

Tercer cubo → 12 cubitos amarillos; Fracción que representa la parte verde: $\frac{15}{27} = \frac{5}{9}$

2 **Calcula:**

a) $\frac{2}{3}$ de 24

b) $\frac{3}{5}$ de 100

c) $\frac{7}{9}$ de 27

d) $\frac{2}{7}$ de 14

e) $\frac{4}{5}$ de 800

f) $\frac{7}{15}$ de 480

a) $\frac{2}{3} \cdot 24 = \frac{24 \cdot 2}{3} = 16$

b) $\frac{3}{5} \cdot 100 = \frac{3 \cdot 100}{5} = 60$

c) $\frac{7}{9} \cdot 27 = \frac{7 \cdot 27}{9} = 21$

d) $\frac{2}{7} \cdot 14 = \frac{2 \cdot 14}{7} = 4$

e) $\frac{4}{5} \cdot 800 = \frac{4 \cdot 800}{5} = 640$

f) $\frac{7}{15} \cdot 480 = \frac{7 \cdot 480}{15} = 224$

3 ▲△△ **¿Cuántos gramos son?**

a) $\frac{3}{4}$ **de kilo**

b) $\frac{2}{5}$ **de kilo**

c) $\frac{1}{8}$ **de kilo**

d) $\frac{5}{8}$ **de kilo**

a) $\frac{3}{4} \cdot 1\,000 = 750$ gramos

b) $\frac{2}{5} \cdot 1\,000 = 400$ gramos

c) $\frac{1}{8} \cdot 1\,000 = 125$ gramos

d) $\frac{5}{8} \cdot 1\,000 = 625$ gramos

4 ▲△△ **¿Qué fracción de kilo son?**

a) 50 gramos

b) 100 gramos

c) 200 gramos

d) 250 gramos

a) $50 \text{ g} = \frac{50}{1\,000} \text{ kg} = \frac{1}{20} \text{ kg}$

b) $100 \text{ g} = \frac{100}{1\,000} \text{ kg} = \frac{1}{10} \text{ kg}$

c) $200 \text{ g} = \frac{200}{1\,000} \text{ kg} = \frac{1}{5} \text{ kg}$

d) $250 \text{ g} = \frac{250}{1\,000} \text{ kg} = \frac{1}{4} \text{ kg}$

5 ▲△△ **Expresa en forma decimal:**

a) $\frac{7}{10}$ **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** $\frac{3}{8}$ **d)** $\frac{1}{25}$

a) 0,7 b) 0,4 c) 0,375 d) 0,04

6 ▲△△ **Expresa en forma de fracción:**

a) 3 **b)** 2,7 **c)** 1,41

d) 0,05 **e)** 0,001 **f)** 0,250

a) $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \dots$ b) $2{,}7 = \frac{27}{10}$ c) $1{,}41 = \frac{141}{100}$

d) $0{,}05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ e) $0{,}001 = \frac{1}{1\,000}$ f) $0{,}250 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

8 ▲▲△ **Pasa a forma fraccionaria:**

a) $0{,}\overset{\frown}{4}$ **b)** $1{,}\overset{\frown}{4}$ **c)** $2{,}\overset{\frown}{4}$

d) $1{,}\overset{\frown}{6}$ **e)** $2{,}\overset{\frown}{35}$ **f)** $1{,}\overset{\frown}{37}$

a) $0{,}\overset{\frown}{4} = A$

$$\begin{array}{rl} 10\,A = & 4{,}444\dots \\ -\quad A = & 0{,}444\dots \\ \hline 9\,A = & 4{,}000\dots \end{array}$$

$$A = \frac{4}{9}$$

b) $1{,}\overset{\frown}{4} = 1 + 0{,}\overset{\frown}{4} = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$

c) $2{,}\overset{\frown}{4} = 2 + 0{,}\overset{\frown}{4} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}$

d) $1{,}\overset{\frown}{6} = D$

$$\begin{array}{rl} 10\,D = & 16{,}666\dots \\ -\quad D = & 1{,}666\dots \\ \hline 9\,D = & 15{,}000\dots \end{array}$$

$$D = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

e) $2{,}\overset{\frown}{35} = M$

$$\begin{array}{rl} 100\,M = & 235{,}353535\dots \\ -\quad M = & 2{,}353535\dots \\ \hline 99\,M = & 233{,}000000\dots \end{array}$$

$$M = \frac{233}{99}$$

f) $1{,}\overset{\frown}{37}$

$$\begin{array}{rl} 100\,K = & 137{,}3737\dots \\ -\quad K = & 1{,}3737\dots \\ \hline 99\,K = & 136{,}0000\dots \end{array}$$

$$K = \frac{136}{99}$$

Fracciones equivalentes

9 ▲△△ **Comprueba si los siguientes pares de fracciones son equivalentes:**

a) $\frac{2}{10}, \frac{3}{15}$ **b)** $\frac{6}{9}, \frac{4}{7}$

c) $\frac{-2}{3}, \frac{8}{-12}$ **d)** $\frac{14}{35}, \frac{16}{40}$

a) $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 \rightarrow$ Sí

b) $6 \cdot 7 \neq 4 \cdot 9 \rightarrow$ No

c) $(-2) \cdot (-12) = 3 \cdot 8 \rightarrow$ Sí

d) $14 \cdot 40 = 35 \cdot 16 \rightarrow$ Sí

10 △△△ **Escribe.**

a) Una fracción equivalente a $\frac{2}{5}$ que tenga por numerador 6.

b) Una fracción equivalente a $\frac{4}{10}$ que tenga por numerador 10.

c) Una fracción equivalente a $\frac{9}{12}$ que tenga por numerador 16.

a) $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$

b) $\frac{4}{10} = \frac{10}{25}$

c) $\frac{9}{12} = \frac{12}{16}$

11 △△△ **Calcula el término x que falta en cada caso:**

a) $\frac{3}{5} = \frac{x}{15}$

b) $\frac{18}{4} = \frac{27}{x}$

c) $\frac{3}{x} = \frac{15}{20}$

d) $\frac{x}{36} = \frac{27}{81}$

a) $x = \frac{3 \cdot 15}{5} = 9$

b) $x = \frac{4 \cdot 27}{18} = 6$

c) $x = \frac{3 \cdot 20}{15} = 4$

d) $x = \frac{27 \cdot 36}{81} = 12$

12 △△△ **Simplifica hasta obtener una fracción irreducible:**

a) $\frac{30}{24}$

b) $\frac{56}{64}$

c) $\frac{45}{105}$

d) $\frac{40}{72}$

e) $\frac{18}{66}$

f) $\frac{121}{143}$

g) $\frac{144}{540}$

h) $\frac{72}{306}$

a) $\dfrac{30}{24} = \dfrac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3}} = \dfrac{5}{4}$

b) $\dfrac{56}{64} = \dfrac{\cancel{2^3} \cdot 7}{\cancel{2^3} \cdot 2^3} = \dfrac{7}{8}$

c) $\dfrac{45}{105} = \dfrac{\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{5}}{\cancel{3} \cdot \cancel{5} \cdot 7} = \dfrac{3}{7}$

d) $\dfrac{40}{72} = \dfrac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 3^2} = \dfrac{5}{9}$

e) $\dfrac{18}{66} = \dfrac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 11} = \dfrac{3}{11}$

f) $\dfrac{121}{143} = \dfrac{\cancel{11} \cdot 11}{\cancel{11} \cdot 13} = \dfrac{11}{13}$

g) $\dfrac{144}{540} = \dfrac{\cancel{2^2} \cdot 2^2 \cdot \cancel{3^2}}{\cancel{2^2} \cdot 3 \cdot \cancel{3^2} \cdot 5} = \dfrac{4}{15}$

h) $\dfrac{72}{306} = \dfrac{\cancel{2} \cdot 2^2 \cdot \cancel{3^2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3^2} \cdot 17} = \dfrac{4}{17}$

13 ▲△△ **Reduce a común denominador:**

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}$

b) $\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{10}$

c) $1, \dfrac{5}{6}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{7}{12}$

d) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{15}$

a) m.c.m. (2, 4, 8) = 8

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{8} \qquad \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{8} \qquad \dfrac{1}{8}$

b) m.c.m. (5, 4, 10) = 20

$\dfrac{2}{5} = \dfrac{8}{20} \qquad \dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{20} \qquad \dfrac{7}{10} = \dfrac{14}{20}$

c) m.c.m. (6, 8, 12) = 24

$1 = \dfrac{24}{24} \qquad \dfrac{5}{6} = \dfrac{20}{24} \qquad \dfrac{3}{8} = \dfrac{9}{24} \qquad \dfrac{7}{12} = \dfrac{14}{24}$

d) m.c.m. (3, 5, 6, 15) = 30

$\dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{30} \qquad \dfrac{3}{5} = \dfrac{18}{30} \qquad \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{30} \qquad \dfrac{2}{15} = \dfrac{4}{30}$

14 ▲△△ **Reduce a común denominador y después ordena de menor a mayor:**

a) $1, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{10}$

b) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{12}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}$

c) $1, \dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{11}{10}$

d) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{6}$

a) m.c.m. (5, 4, 10) = 20

$1 = \frac{20}{20}$ $\quad \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ $\quad \frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ $\quad \frac{7}{10} = \frac{14}{20}$

$\frac{2}{5} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4} < 1$

b) m.c.m. (3, 12, 2, 4) = 12

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ $\quad \frac{5}{12}$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$ $\quad \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

$\frac{5}{12} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

c) m.c.m. (2, 5, 10) = 10

$1 = \frac{10}{10}$ $\quad \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ $\quad \frac{3}{2} = \frac{15}{10}$ $\quad \frac{7}{5} = \frac{14}{10}$ $\quad \frac{11}{10}$

$\frac{3}{5} < 1 < \frac{11}{10} < \frac{7}{5} < \frac{3}{2}$

d) m.c.m. (3, 5, 2, 6) = 30

$\frac{2}{3} = \frac{20}{30}$ $\quad \frac{3}{5} = \frac{18}{30}$ $\quad \frac{3}{2} = \frac{45}{30}$ $\quad \frac{7}{6} = \frac{35}{30}$

$\frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{7}{6} < \frac{3}{2}$

PÁGINA 73

15 ▲△△ **Calcula mentalmente:**

a) $1 + \frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

d) $1 - \frac{3}{4}$ **e)** $1 - \frac{1}{3}$ **f)** $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$

g) $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}$ **h)** $1 - \frac{1}{10}$ **i)** $2 - \frac{3}{2}$

a) $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

d) $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ e) $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ f) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

g) $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ h) $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ i) $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

16 Calcula y simplifica:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

b) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{7}{15}$

c) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{8}{15}$

d) $\frac{5}{6}-\frac{4}{9}+\frac{1}{2}$

e) $2-\frac{1}{4}-\frac{7}{9}-\frac{1}{12}$

f) $\frac{7}{3}-4+\frac{5}{2}-\frac{1}{6}$

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{7}{15}=\frac{10}{15}+\frac{9}{15}-\frac{7}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

c) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{8}{15}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}-\frac{8}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

d) $\frac{5}{6}-\frac{4}{9}+\frac{1}{2}=\frac{15}{18}-\frac{8}{18}+\frac{9}{18}=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$

e) $2-\frac{1}{4}-\frac{7}{9}-\frac{1}{12}=\frac{72}{36}-\frac{9}{36}-\frac{28}{36}-\frac{3}{36}=\frac{32}{36}=\frac{\cancel{2^2}\cdot 2^3}{\cancel{2^2}\cdot 3^2}=\frac{8}{9}$

f) $\frac{7}{3}-4+\frac{5}{2}-\frac{1}{6}=\frac{14}{6}-\frac{24}{6}+\frac{15}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

17 Calcula y simplifica:

a) $2-\left(1+\frac{2}{3}\right)$

b) $1-\left(\frac{3}{10}+\frac{5}{6}\right)$

c) $\left(2-\frac{3}{4}\right)-\left(1-\frac{1}{4}\right)$

d) $\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}$

f) $\left(4-\frac{5}{8}\right)-\left(5-\frac{3}{4}\right)+\left(3-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)$

g) $\frac{5}{6}-\left[1-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\right]$

h) $\left[2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]-\left[1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]$

i) $\left[\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+\left[\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]+\left[\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{6}\right)\right]$

a) $2 - \left(1 + \frac{2}{3}\right) = 2 - \frac{5}{3} = \frac{6}{3} - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

b) $1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{5}{6}\right) = 1 - \left(\frac{9}{30} + \frac{25}{30}\right) = \frac{30}{30} - \frac{34}{30} = \frac{-4}{30} = \frac{-2}{15}$

c) $\left(2 - \frac{3}{4}\right) - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

d) $\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{6} - \frac{5}{4} = \frac{18}{12} - \frac{15}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

e) $\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2} = \left(\frac{15}{10} - \frac{8}{10}\right) - \left(\frac{3}{15} - \frac{10}{15}\right) - \frac{1}{2} = \frac{7}{10} + \frac{7}{15} - \frac{1}{2} =$

$= \frac{21}{30} + \frac{14}{30} - \frac{15}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

f) $\left(4 - \frac{5}{8}\right) - \left(5 - \frac{3}{4}\right) + \left(3 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) = \frac{27}{8} - \frac{17}{4} + \frac{17}{8} = \frac{44}{8} - \frac{34}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

g) $\frac{5}{6} - \left[1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)\right] = \frac{5}{6} - \left[1 - \frac{11}{12}\right] = \frac{5}{6} - \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

h) $\left[2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\right] - \left[1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\right] = \left[2 - \frac{5}{6}\right] - \left[1 + \frac{1}{6}\right] = \frac{7}{6} - \frac{7}{6} = 0$

i) $\left[\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] + \left[\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{4}\right)\right] + \left[\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{6}\right)\right] = \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right] =$

$= -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{2}{6} = \frac{-2}{12} + \frac{-3}{12} + \frac{-4}{12} = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$

Producto y cociente de fracciones. Operaciones combinadas

18 ▲△△ Calcula y simplifica:

a) $\frac{5}{-3} \cdot \frac{4}{5}$

b) $\frac{1}{5} \cdot 5$

c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{-7}{2}$

d) $\frac{-9}{2} \cdot \frac{-4}{3}$

e) $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{10}$

f) $3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$

g) $\frac{1}{2} \cdot (-6)$

h) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$

a) $\frac{5}{-3} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{20}{15} = -\frac{4}{3}$

b) $\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$

c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{-7}{2} = -\frac{3}{2}$

d) $\frac{-9}{2} \cdot \frac{-4}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 6$

e) $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{10} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 2 \cdot \cancel{5} \cdot 2} = \frac{1}{4}$

f) $3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{12}{5}$

g) $\frac{1}{2} \cdot (-6) = -\frac{6}{2} = -3$

h) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 3} = \frac{1}{6}$

19 **Calcula y simplifica:**

a) $\frac{2}{5} : \frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{9} : \frac{-7}{18}$

c) $6 : \frac{3}{5}$

d) $\frac{8}{3} : 4$

e) $\left(-\frac{2}{3}\right) : \frac{5}{9}$

f) $\left(-\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right)$

a) $\frac{2}{5} : \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{2}{9} : \frac{-7}{18} = \frac{-2 \cdot 18}{7 \cdot 9} = \frac{-4}{7}$

c) $6 : \frac{3}{5} = \frac{6 \cdot 5}{3} = 10$

d) $\frac{8}{3} : 4 = \frac{8}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3}$

e) $\left(-\frac{2}{3}\right) : \frac{5}{9} = \frac{-2 \cdot 9}{3 \cdot 5} = \frac{-6}{5}$

f) $\left(-\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$

20 **Calcula y simplifica:**

a) $\frac{3}{4} : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{10}$

c) $\left(\frac{3}{2} + 2\right) \cdot \left(2 - \frac{12}{7}\right)$

d) $\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right)$

a) $\frac{3}{4} : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} : \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 4} = 1$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{10} = \frac{1}{10} : \frac{3}{10} = \frac{10}{3 \cdot 10} = \frac{1}{3}$

c) $\left(\frac{3}{2} + 2\right) \cdot \left(2 - \frac{12}{7}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{7} = 1$

d) $\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{9}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{4}$

21 ▲△△ **Calcula y simplifica:**

a) $\left(-\frac{10}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)$ b) $\left(1-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$

c) $\left(\frac{2}{7}-2\right)\cdot\left(1-\frac{5}{4}-\frac{25}{12}\right)$

a) $\left(-\frac{10}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{10}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{20}-\frac{5}{20}\right)=\left(-\frac{10}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{6}$

b) $\left(1-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{7}{7}-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{14}$

c) $\left(\frac{2}{7}-2\right)\cdot\left(1-\frac{5}{4}-\frac{25}{12}\right)=\left(\frac{2}{7}-\frac{14}{7}\right)\cdot\left(\frac{12}{12}-\frac{15}{12}-\frac{25}{12}\right)=$

$=\left(-\frac{12}{7}\right)\cdot\left(-\frac{28}{12}\right)=\left(-\frac{12}{7}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)=4$

22 ▲△△ **Calcula y simplifica:**

a) $\dfrac{1}{\frac{1}{6}}$ b) $\dfrac{1}{\frac{2}{3}}$ c) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$

d) $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}$ e) $\dfrac{\frac{1}{3}}{2}$ f) $\dfrac{1}{\frac{3}{2}}$

a) 6 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{8}{15}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{2}{3}$

PÁGINA 74

24 ▲▲△ **Calcula y simplifica:**

a) $\dfrac{\frac{3}{2}-1}{\frac{1}{2}-1}$ b) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}$ c) $\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}+\frac{3}{10}}$

a) $\dfrac{\dfrac{3}{2}-1}{\dfrac{1}{2}-1}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{-\dfrac{1}{2}}=-1$

b) $\dfrac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\dfrac{7}{6}}{\dfrac{5}{6}}=\dfrac{7\cdot 6}{6\cdot 5}=\dfrac{7}{5}$

c) $\dfrac{\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{4}}{\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{10}}=\dfrac{\dfrac{13}{20}}{\dfrac{21}{20}}=\dfrac{13\cdot 20}{20\cdot 21}=\dfrac{13}{21}$

Problemas de aplicación

25 ▲△△ **Tres cuartas partes de un metro de cinta cuestan 2,10 euros. ¿Cuánto cuestan dos metros y medio?**

$\dfrac{3}{4}$ de metro cuestan 2,10 €.

$\dfrac{1}{4}$ de metro cuestan 0,7 € $\rightarrow$ 1 m cuesta 2,8 €.

2,5 metros cuestan $2{,}8\cdot 2{,}5=7$ €.

26 ▲△△ **Ernesto ha recorrido, en su paseo, dos quintas partes del camino que tiene una longitud total de 8 km. ¿Cuánto le falta para llegar al final?**

Ernesto debe recorrer aún $\dfrac{3}{5}$ del camino.

Le faltan $\dfrac{3}{5}\cdot 8$ km $=\dfrac{3}{5}\cdot 8\,000$ m $= 4\,900$ m $= 4{,}8$ km

28 ▲▲△ **Un tren ha cubierto ya tres quintos de su itinerario. Si aún le faltan 84 kilómetros hasta el final, ¿cuál es la longitud total del recorrido?**

$\dfrac{2}{5}$ del itinerario son 84 km.

$\dfrac{1}{5}$ del itinerario son 42 km.

El itinerario tiene $42\cdot 5=210$ km.

29 ▲▲△ **Raquel se ha gastado 3/10 de su dinero en un cómic. Si aún le quedan 21 euros, ¿cuánto tenía al principio? ¿Cuánto le costó el cómic?**

$\frac{7}{10}$ del dinero que tenía son 21 €.

$\frac{1}{10}$ del dinero son 3 €.

Tenía $3 \cdot 10 = 30$ €.

El cómic le costó $\frac{1}{10} \cdot 30 = 9$ €.

30 ▲▲△ **Una familia gasta 2/5 de su presupuesto en vivienda y 1/3 en comida. Si en vivienda gasta 5 400 euros anuales, ¿qué cantidad gasta al año en comida?**

$\frac{2}{5}$ del presupuesto son 5 400 €.

El presupuesto total son $5\,400 \cdot \frac{5}{2} = 13\,500$ €.

En comida se gasta $\frac{1}{3} \cdot 13\,500 = 4\,500$ € al año.

31 ▲△△ **Esta lista expresa, en forma de fracción, los resultados que un grupo de alumnos y alumnas han obtenido en un examen:**

CALIFICACIONES	
$\frac{1}{10}$ de la clase	Sobresaliente
$\frac{3}{10}$ de la clase	Notable
$\frac{1}{6}$ de la clase	Bien
$\frac{1}{3}$ de la clase	Suficiente

$$\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3 + 9 + 5 + 10}{30} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$$

Han suspendido $1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ de los alumnos y alumnas.

32 ▲▲△ **¿Cuántas botellas de 3/4 de litro se pueden llenar con una garrafa de 30 litros?**

▸ *Resuelve primero este otro:*

¿Cuántas botellas de 2 litros se pueden llenar con una garrafa de 30 litros?

¿Qué operación resuelve el problema?

$30 : \frac{3}{4} = \frac{120}{3} = 40$

Se pueden llevar 40 botellas.

33 ▲△△ **Con el contenido de un bidón de agua se han llenado 40 botellas de 3/4 de litro. ¿Cuántos litros de agua había en el bidón?**

$40 \cdot \frac{3}{4} = 30$ litros

34 ▲▲△ **Un frasco de perfume tiene una capacidad de 1/20 de litro. ¿Cuántos frascos de perfume se pueden llenar con el contenido de una botella de 3/4 de litro?**

$\frac{3}{4} : \frac{1}{20} = \frac{60}{4} = 15$ frascos

35 ▲▲△ **De un depósito que estaba lleno se han sacado, primero, 2/3 del total y, después, 1/5 del total. Sabiendo que aún quedan 400 litros, ¿cuál es la capacidad del depósito?**

$\frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{19}{20}$

Quedan $1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$; $\frac{1}{20} \cdot 1\,000 = 50$ litros

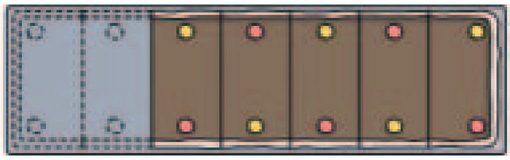
36 ▲▲△ **De un depósito que estaba lleno se han sacado, primero, 2/3 del total y, después, 1/5 del total. Sabiendo que aún quedan 400 litros, ¿cuál es la capacidad del depósito?**

$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15}$

Quedan $\frac{2}{15}$ del total, que son 400 litros.

La capacidad del depósito es de $400 \cdot \frac{15}{2} = 3\,000$ litros.

37 **Jacinto se come los 2/7 de una tarta y Gabriela los 3/5 del resto. ¿Qué fracción de la tarta se ha comido Gabriela? ¿Qué fracción queda?**



Gabriela ha comido: $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{7}$

Entre los dos han comido: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$

Quedan $\frac{2}{7}$ de tarta.

38 **Aurora sale de casa con 25 euros. Se gasta 2/5 del dinero en un libro y, después, 4/5 de lo que le quedaba en un disco.**

¿Con cuánto dinero vuelve a casa?

$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} + \frac{12}{25} = \frac{22}{25}$

Vuelve a casa con $\frac{3}{25} \cdot 25 = 3$ €.

PÁGINA 75

40 **Un vendedor despacha, por la mañana, las 3/4 partes de las naranjas que tenía. Por la tarde vende 4/5 de las que le quedaban.**

Si al terminar el día aún le quedan 100 kg de naranjas, ¿cuántos kilos tenía?

Por la tarde vende $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$.

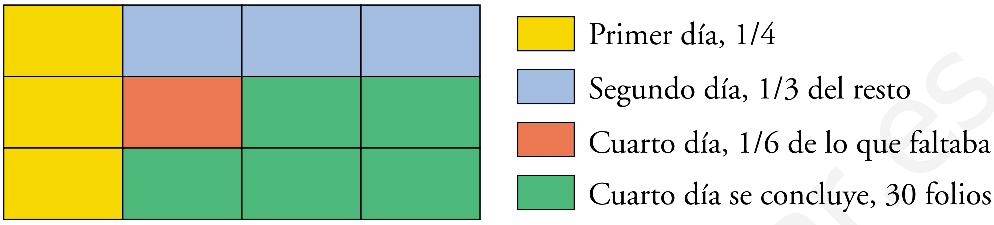
En total vende $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$.

Le quedan $\frac{1}{20}$, que son 100 kg de naranjas.

Tenía, al principio, $100 \cdot 20 = 2\,000$ kg de naranjas.

41 **Una amiga me pidió que le pasase un escrito a ordenador. El primer día pasé 1/4 del trabajo total, el segundo 1/3 de lo restante, el tercero 1/6 de lo que faltaba y el cuarto lo concluí, pasando 30 folios.**

¿Puedes averiguar cuántos folios tenía el escrito?



En el gráfico se observa claramente que $\frac{1}{12}$ del trabajo son 6 folios.

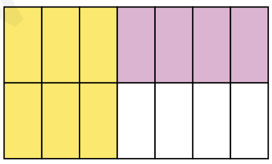
El trabajo total son $12 \cdot 6 = 72$ folios.

	PRIMER DÍA	SEGUNDO DÍA	TERCER DÍA	CUARTO DÍA	
PASA	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\rightarrow$ 30 folios
QUEDA	$\frac{3}{4}$	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$	0	

$\frac{5}{12}$ son 30 folios $\rightarrow$ total son $\frac{30 \cdot 12}{5} = 6 \cdot 12 = 72$ folios.

42 **El propietario de un solar ha decidido venderlo en parcelas para obtener una mejor rentabilidad. Vendió primero 3/7 del mismo, luego la mitad de lo restante y todavía le quedaron 244 m^2 sin vender.**

Calcula la superficie del solar.



$\frac{4}{14}$ del solar son 244 m^2

Vendió: $\frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{7} + \frac{4}{14} = \frac{10}{14}$

Quedan $\frac{4}{14}$ de la superficie, que son 244 m^2.

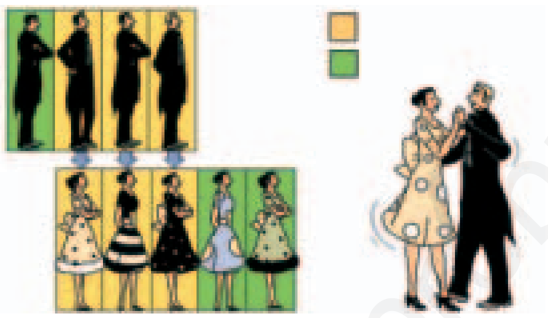
La superficie del solar son $\frac{244 \cdot 14}{14} = 854$ m^2.

PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

43 En un baile, tres cuartas partes de los hombres están bailando con tres quintas partes de las mujeres. ¿Qué fracción de los asistentes no están bailando?

APLICA ESTA ESTRATEGIA

Dibuja un esquema que te ayude a organizar las ideas.

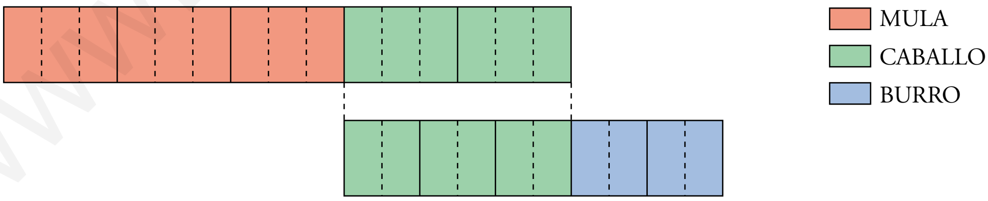


Según se observa en la gráfica, $\frac{6}{9}$ de los hombres y mujeres están bailando.

Por tanto, $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ de los asistentes no bailan.

44 Un arriero tiene en su cuadra una mula, un caballo y un burro. Cuando lleva a trabajar la mula y el caballo, pone 3/5 de la carga en la mula y 2/5 en el caballo. Sin embargo, cuando lleva el caballo y el burro, entonces pone 3/5 de la carga en el caballo y 2/5 en el burro.

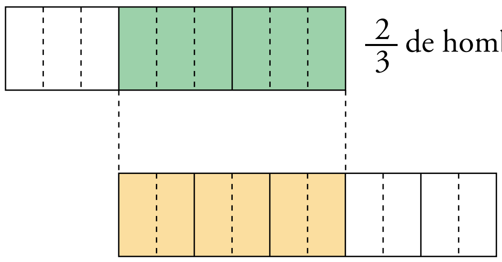
¿Cómo distribuirá la carga hoy, si lleva a los tres animales y tiene que transportar una carga de 190 kg?



Hay que dividir la carga en 19 partes, de las que 9 llevará la mula, 6 el caballo y 4 el burro.

Es decir:
- MULA $\rightarrow \frac{9}{19} \cdot 190 = 90$ kg
- CABALLO $\rightarrow \frac{6}{19} \cdot 190 = 60$ kg
- BURRO $\rightarrow \frac{4}{19} \cdot 190 = 40$ kg

45 **En cierta tribu primitiva, escondida en la selva, 2/3 de los hombres están casados con 3/5 de las mujeres. ¿Qué fracción de la población permanece soltera?**



$\frac{2}{3}$ de hombres

$\frac{3}{5}$ de mujeres

$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ de hombres están casados con $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ de mujeres.

Dividida la población en 19 grupos, 12 de ellos están casados (6 de hombres con 6 de mujeres).

Permanecen solteros $\frac{7}{19}$ de la población.

46 **María recoge en su huerta una cesta de manzanas. De vuelta a casa se encuentra con su amiga Sara y le da la mitad de la cesta más media manzana. Después pasa a visitar a su tía Rosa y le da la mitad de las manzanas que le quedan más media manzana. Por último, se encuentra con su amigo Francisco y vuelve a hacer lo mismo: le da la mitad de las que le quedan más media manzana. Entonces se da cuenta de que tiene que volver a la huerta porque se ha quedado sin nada.**

Sabiendo que en ningún momento ha partido ninguna manzana, ¿cuántas manzanas recogió?

APLICA ESTA ESTRATEGIA
Empieza por el final. — ¿Cuántas manzanas dio a Francisco? — Sabiendo eso, ¿cuántas dio a Rosa?

Francisco ha tenido que recibir un número impar de manzanas porque, en otro caso, María debería haber partido alguna. Y antes de dar manzanas a Rosa y a Sara, en su cesta debía haber un número impar de manzanas por el mismo motivo.

Si suponemos que a Francisco le da una manzana (la mitad de lo que llevaba más media), antes de darle a Rosa llevaba 3 y le da 1,5 + 0,5 = 2. Y antes de darle a Sara llevaba 7, a quien le da 3,5 + 0,5 = 4.

Supongamos que llevaba x manzanas:

	DA	QUEDAN
SARA	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$	$x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2}$
ROSA	$\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$	$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{4}$
FRANCISCO	$\frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$	$\frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{8} = \frac{x-7}{8}$

$\frac{x-7}{8} = 0 \rightarrow x = 7$ manzanas

PÁGINA 88

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Cálculo de potencias

1 Calcula:

a) 2^2 b) 2^3 c) 2^4 d) 2^5

e) 2^6 f) 2^7 g) 2^8 h) 2^9

a) 4 b) 8 c) 16 d) 32

e) 64 f) 128 g) 256 h) 512

2 Calcula:

a) 4^2 b) 3^5 c) 5^3 d) 10^4

e) 1^7 f) $(-1)^7$ g) $(-1)^8$ h) $(-2)^4$

i) $(-2)^5$ j) $(-5)^2$ k) -5^2 l) $(-10)^3$

a) 16 b) 243 c) 125 d) 10 000

e) 1 f) –1 g) 1 h) 16

i) –32 j) 25 k) –25 l) –1 000

3 Calcula:

a) 3^0 b) 3^{-1} c) 2^{-4} d) 5^0

e) 5^{-2} f) 10^{-3} g) 2^{-3} h) 10^{-6}

a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{16}$

d) 1 e) $\frac{1}{25}$ f) $\frac{1}{1000} = 0{,}001$

g) $\frac{1}{8}$ h) $\frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000001$

4 Calcula:

a) 2^{-2} b) $(-2)^{-2}$ c) -2^{-2}

d) $\frac{1}{2^2}$ e) $\frac{1}{2^{-2}}$ f) $\frac{1}{(-2)^{-2}}$

a) $\frac{1}{4}$　　b) $\frac{1}{4}$　　c) $-\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{4}$　　e) $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$　　f) $\frac{1}{\frac{1}{(-2)^2}} = 4$

5 **Calcula:**

a) 50^2　　**b)** $0{,}5^2$

c) $0{,}05^2$　　**d)** 100^2

e) 100^{-2}　　**f)** $0{,}01^2$

a) 2 500　　b) 0,25

c) 0,0025　　d) 10 000

e) $\frac{1}{100^2} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$　　f) 0,0001

Operaciones con potencias

6 **Reduce y expresa el resultado en forma de una única potencia:**

a) $2^4 \cdot 2^3$　　**b)** $3^4 \cdot 3^6$　　**c)** $5^6 : 5^2$

d) $6^3 : 6^4$　　**e)** $\frac{2^6}{2^3}$　　**f)** $\frac{3^5}{3^5}$

g) $\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3}$　　**h)** $\frac{1}{5} : \frac{1}{5^2}$　　**i)** $3^5 : \frac{1}{3^3}$

a) 2^7　　b) 3^{10}　　c) 5^4

d) 6^{-1}　　e) 2^3　　f) $3^0 = 1$

g) $\frac{1}{2^5} = 2^{-5}$　　h) $\frac{1}{5} \cdot 5^2 = 5$　　i) $3^5 \cdot 3^3 = 3^8$

7 **Primero reduce y después calcula:**

a) $3^5 \cdot 3^{-4}$　　**b)** $10^2 \cdot 10^4$

c) $5^5 : 5^3$　　**d)** $10^2 : 10^{-2}$

e) $\frac{1}{2^2} : 2^6$　　**f)** $3^{-4} \cdot \frac{1}{3^4}$

a) $3^5 \cdot 3^{-4} = 3$　　b) $10^2 \cdot 10^4 = 10^6 = 1\,000\,000$

c) $5^5 : 5^3 = 5^2 = 25$

d) $10^2 : 10^{-2} = 10^4 = 10\,000$

e) $\dfrac{1}{2^2} : 2^6 = \dfrac{1}{2^8} = \dfrac{1}{256}$

f) $3^{-4} \cdot \dfrac{1}{3^4} = 3^{-8} = \dfrac{1}{3^8} = \dfrac{1}{6\,561}$

8 **Reduce a una única potencia:**

a) $(3^3)^2$ **b)** $(5^2)^2$ **c)** $(4^2)^4$

d) $(5^{-3})^2$ **e)** $\left(\dfrac{1}{5^3}\right)^2$ **f)** $(5^3)^{-2}$

a) 3^6 b) 5^4 c) 4^8

d) 5^{-6} e) 5^{-6} f) 5^{-6}

9 **Calcula:**

a) $\left(\dfrac{1}{2^3}\right)^2$ **b)** $(2^{-3})^2$ **c)** $(2^3)^{-2}$

d) $\left(\dfrac{1}{2^{-3}}\right)^{-2}$ **e)** $(2^3)^2$ **f)** $(2^{-3})^{-2}$

g) $\left(\dfrac{1}{2^3}\right)^{-2}$ **h)** $\left(\dfrac{1}{2^{-3}}\right)^2$

a) $\dfrac{1}{2^6}$ b) $2^{-6} = \dfrac{1}{2^6}$ c) $2^{-6} = \dfrac{1}{2^6}$

d) $\dfrac{1}{2^6} = 2^{-6}$ e) 2^6 f) 2^6

g) $\dfrac{1}{2^{-6}} = 2^6$ h) $\dfrac{1}{2^{-6}} = 2^6$

Expresión algebraica de un número mediante potencias de base diez

10 **Calcula:**

a) 10^3 **b)** 10^4 **c)** 10^5 **d)** 10^6

e) 10^{-3} **f)** 10^{-4} **g)** 10^{-5} **h)** 10^{-6}

a) $1\,000$ b) $10\,000$ c) $100\,000$ d) $1\,000\,000$ e) $\dfrac{1}{1\,000} = 0{,}001$

f) $\dfrac{1}{10^4} = 0{,}0001$ g) $\dfrac{1}{10^5} = 0{,}00001$ h) $\dfrac{1}{10^6} = 0{,}000001$

11 △△△ **Escribe con todas sus cifras las siguientes cantidades:**

a) $24 \cdot 10^7$ **b)** $5 \cdot 10^8$
c) $4{,}3 \cdot 10^5$ **d)** $24 \cdot 10^{-7}$
e) $5 \cdot 10^{-8}$ **f)** $4{,}3 \cdot 10^{-5}$

a) 240 000 000 b) 500 000 000
c) 430 000 d) 0,0000024
e) 0,00000005 f) 0,000043

12 △△△ **Escribe los siguientes números de forma abreviada, como se ha hecho en los ejemplos:**

a) $27\,000\,000 = 27 \cdot 10^6$ **b)** 30 000 000 000
c) 2 300 000 **d)** $0{,}0006 = 6 \cdot 10^{-4}$
e) 0,00000004 **f)** 0,000026

a) $27 \cdot 10^6$ b) $3 \cdot 10^{10}$ c) $23 \cdot 10^5$
d) $6 \cdot 10^{-4}$ e) $4 \cdot 10^{-8}$ f) $26 \cdot 10^{-6}$

13 △△△ **Redondea las siguientes cantidades expresándolas mediante el producto de un número de dos cifras por una potencia de diez:**

a) $268\,487\,529 \rightarrow 27 \cdot 10^7$ **b)** 5 394 628
c) 15 260 943 **d)** $0{,}0005324 \rightarrow 53 \cdot 10^{-5}$
e) 0,003715 **f)** 0,000000002614

a) $27 \cdot 10^7$ b) $54 \cdot 10^5$
c) $15 \cdot 10^6$ d) $53 \cdot 10^{-5}$
e) $37 \cdot 10^{-4}$ f) $26 \cdot 10^{-10}$

Cálculo de raíces

14 △△△ **Calcula:**

a) $\sqrt{196}$ **b)** $\sqrt{441}$ **c)** $\sqrt{0{,}0009}$
d) $\sqrt{0{,}0001}$ **e)** $\sqrt{4{,}41}$ **f)** $\sqrt{2{,}25}$

a) $\sqrt{196} = 14$ b) $\sqrt{441} = 21$ c) $\sqrt{0{,}0009} = 0{,}03$
d) $\sqrt{0{,}0001} = 0{,}01$ e) $\sqrt{4{,}41} = 2{,}1$ f) $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$

15 △△△ **Aproxima a las décimas las siguientes raíces:**

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt{111}$

a) $\sqrt{3} = 1,7$ b) $\sqrt{50} = 7,1$ c) $\sqrt{111} = 10,5$

16 △△△ **Calcula:**

a) $\sqrt[3]{125}$ b) $\sqrt[3]{216}$

c) $\sqrt[3]{-512}$ d) $\sqrt[3]{0,001}$

e) $\sqrt[3]{0,027}$ f) $\sqrt[3]{0,000125}$

a) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ b) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$

c) $\sqrt[3]{-512} = \sqrt[3]{(-8)^3} = -8$ d) $\sqrt[3]{0,001} = \sqrt[3]{0,1^3} = 0,1$

e) $\sqrt[3]{0,027} = \sqrt[3]{0,3^3} = 0,3$ f) $\sqrt[3]{0,000125} = \sqrt[3]{0,05^3} = 0,05$

PÁGINA 89

17 △△△ **Calcula, con error menor de una décima, el lado de un cuadrado de superficie 58 cm².**

$$\left.\begin{array}{l} 7,6^2 = 57,76 \\ 7,7^2 = 59,29 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 7,65^2 = 58,5225 \\ \end{array}\right\} \quad 7,62^2 = 58,06$$

El lado del cuadrado mide 7,62 cm.

18 △△△ **Calcula, con error menor de un centímetro, la arista de un cubo de volumen 2 000 cm³.**

$$\left.\begin{array}{l} 12,5^3 = 1\,953,125 \\ 12,6^3 = 2\,000,376 \end{array}\right\} \text{La arista del cubo mide 12,6 cm.}$$

20 △△△ **Simplifica:**

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ b) $\sqrt{3} : \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{8}{27}}$ d) $\sqrt{\dfrac{6}{11}} \cdot \sqrt{\dfrac{22}{3}}$

e) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{5}}$ f) $\sqrt{\dfrac{1}{7}} \cdot \sqrt{14}$

g) $\sqrt{\dfrac{11}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{5}{22}}$ **h)** $\sqrt{\dfrac{5}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{14}{15}}$

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{3^2 \cdot 2^2} = 3 \cdot 2 = 6$

b) $\sqrt{3} : \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3^2} = 3$

c) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{8}{27}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 2^3}{3 \cdot 3^3}} = \sqrt{\dfrac{2^4}{3^4}} = \dfrac{2^2}{3^2} = \dfrac{4}{9}$

d) $\sqrt{\dfrac{6}{11}} \cdot \sqrt{\dfrac{22}{3}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2}{11 \cdot 3}} = \sqrt{2^2} = 2$

e) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{5}} = \sqrt{2}$

f) $\sqrt{\dfrac{1}{7}} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 7}{7}} = \sqrt{2}$

g) $\sqrt{\dfrac{11}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{5}{22}} = \sqrt{\dfrac{11 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 11}} = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$

h) $\sqrt{\dfrac{5}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{14}{15}} = \sqrt{\dfrac{5 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 5}} = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$

22 ▲▲△ **Extrae todos los factores que sea posible:**

a) $\sqrt{2^9}$ **b)** $\sqrt{3 \cdot 7^2}$ **c)** $\sqrt{243}$ **d)** $\sqrt{1\,000}$

e) $\sqrt[3]{2^4}$ **f)** $\sqrt[3]{5^4}$ **g)** $\sqrt[3]{81}$ **h)** $\sqrt[3]{40}$

a) $\sqrt{2^9} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 2^4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3 \cdot 7^2} = 7\sqrt{3}$

c) $\sqrt{243} = \sqrt{3^5} = \sqrt{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 3^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

d) $\sqrt{1\,000} = \sqrt{10^3} = \sqrt{10^2 \cdot 10} = 10\sqrt{10}$

e) $\sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

f) $\sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} = 5\sqrt[3]{5}$

g) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$

h) $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{5}$

Reducción de expresiones algebraicas con potencias y raíces

23 ▲▲△ **Reduce:**

a) $(a^2)^3 \cdot \frac{1}{a^5}$ b) $(a^3)^3 \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^5$ c) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^2}{a}\right)^3$ d) $\left(\frac{1}{a^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{a^5}\right)^2$

a) $(a^2)^3 \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{a^6}{a^5} = a$

b) $(a^3)^3 \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^5 = a^9 \cdot \frac{1}{a^{10}} = \frac{1}{a}$

c) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^2}{a}\right)^3 = \frac{a^4}{b^6} \cdot \frac{b^6}{a^3} = a$

d) $\left(\frac{1}{a^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{a^5}\right)^2 = \frac{1}{a^9 \cdot a^{10}} = \frac{1}{a^{19}}$

24 ▲▲▲ **Reduce:**

a) $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a \cdot b^2}$ b) $\sqrt{a^3 \cdot b} \cdot \sqrt{\frac{1}{a \cdot b^3}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[3]{a^3}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{a^2}$

a) $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a \cdot b^2} = \sqrt{a^4 \cdot b^2} = \sqrt{a^2 \cdot a^2 \cdot b^2} = a^2 \cdot b$

b) $\sqrt{a^3 \cdot b} \cdot \sqrt{\frac{1}{a \cdot b^3}} = \sqrt{\frac{a^3 \cdot b}{a \cdot b^3}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$

c) $\frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^3 \cdot a^2}}{a} = \frac{a\sqrt[3]{a^2}}{a} = \sqrt[3]{a^2}$

d) $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{a^2} = \frac{\sqrt[3]{a^3 \cdot a^3 \cdot a}}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt[3]{a}}{a^2} = \sqrt[3]{a}$

25 ▲▲▲ **Reduce:**

a) $\frac{(\sqrt{a})^4}{(\sqrt{a})^3}$ b) $\frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b^2}}{\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^3}}$ c) $\frac{\sqrt{b^3} : \sqrt{a^3}}{\sqrt{a} : \sqrt{b}}$ d) $\frac{1 : \sqrt{a^3}}{1 : \sqrt{a^5}}$

a) $\frac{(\sqrt{a})^4}{(\sqrt{a})^3} = \sqrt{a}$ b) $\frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b^2}}{\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^3}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

c) $\frac{\sqrt{b^3} : \sqrt{a^3}}{\sqrt{a} : \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{a^3}} : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b^4}}{\sqrt{a^4}} = \frac{b^2}{a^2}$

d) $\frac{1 : \sqrt{a^3}}{1 : \sqrt{a^5}} = \frac{1}{\sqrt{a^3}} : \frac{1}{\sqrt{a^5}} = \frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{a^3}} = \frac{a^2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}} = a$

PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

26 Ataúlfo quedó prendado de un precioso caballo. Preguntó por el precio y le pidieron 100 000 €.

A Ataúlfo le pareció excesivo el precio. Sin embargo, hizo una contraoferta:

—Acepto el precio —le dijo al vendedor— si me rebajas un céntimo por el primer clavo de herradura, dos céntimos por el segundo, cuatro por el tercero…, y así sucesivamente hasta el último clavo de la última herradura.

¿Cuánto pagó, sabiendo que cada herradura se sujetaba con seis clavos?

La rebaja que tiene que hacer, por los sucesivos clavos, es:

$$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5 \quad \dots \quad 2^{23} \text{ céntimos de euro}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{23} = 8\,388\,608 \\ 2^{22} = 4\,194\,304 \end{array}\right\} 2^{23} + 2^{22} = 12\,582\,912 \text{ céntimos} = 125\,829{,}12 \text{ €}$$

$2^{23} + 2^{22}$ ya supera los 100 000 € que costaba el caballo.

Por tanto, no pagó nada.

¿Le darían a él la diferencia?

27 Rosana ha construido un gran cubo de 10 cm de arista utilizando cubitos blancos de 1 cm de arista. ¿Cuántos cubitos rojos, iguales a los anteriores, necesita para recubrir totalmente al cubo blanco?

Si se recubre el cubo de 10 cm de arista se obtendrá un cubo de 12 cm de arista.

Se necesitarán, por tanto, $12^3 - 10^3$ cubitos.

$12^3 - 10^3 = 1\,728 - 1\,000 = 728$ cubitos rojos.

28 Con la calculadora de cuatro operaciones: ¿Cuál es el mayor número que puedes obtener en pantalla, si solo puedes pulsar dos veces cada una de estas teclas? (Escribe una expresión con las operaciones que le mandas hacer a la máquina.)

$$99999999 \boxed{\times} 99999999 \boxed{\times} 99999999 \boxed{+} 99999999 \boxed{+} 99999999 \boxed{-}$$

$$\boxed{-}\ 0 \boxed{-}\ 0 \boxed{\div}\ 1 \boxed{\div}\ 1 = 9{,}99999997 \cdot 10^{23}$$

PÁGINA 104

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Las relaciones de proporcionalidad

1 △△△ **Indica, entre los siguientes pares de magnitudes, los que son directamente proporcionales, los que son inversamente proporcionales y los que no guardan relación de proporcionalidad:**

a) La edad de una persona y su peso.

b) La cantidad de lluvia caída en un año y el crecimiento de una planta.

c) La cantidad de litros de agua que arroja una fuente y el tiempo transcurrido.

d) El número de hojas que contiene un paquete de folios y su peso.

e) La velocidad de un coche y el tiempo que dura un viaje.

f) La altura de una persona y el número de calzado que usa.

g) El precio del kilo de naranjas y el número de kilos que me dan por 10 euros.

Magnitudes directamente proporcionales → c), d)

Magnitudes inversamente proporcionales → e), g)

No guardan relación de proporcionalidad → a), b), f)

2 △△△ **Completa las siguientes tablas e indica, en cada caso, si los pares de valores son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o no guardan ninguna relación de proporcionalidad:**

A	3	5	7	8		12
B	9	15	21		30	

M	3	4	9	15		25
N	2	3	8		20	

K	2	3	4	5		10
L	30	20	15		10	

A	3	5	7	8	10	12
B	9	15	21	24	30	36

Proporcionalidad directa.

M	3	4	9	15	21	25
N	2	3	8	14	20	24

No guardan proporción.
Si M vale k, N vale $k-1$.

K	2	3	4	5	6	10
L	30	20	15	12	10	6

Proporcionalidad inversa.

RAZONES Y PROPORCIONES

3 **Busca:**

a) Tres pares de números cuya razón sea igual a $\frac{1}{2}$.

b) Tres parejas de números que estén en la relación de tres a uno.

c) Tres parejas de números que estén en razón de dos a cinco.

Soluciones abiertas. Por ejemplo:

a) $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{12}{24} = \dots$

b) $\frac{6}{2} = \frac{12}{4} = \frac{9}{3} = \dots$

c) $\frac{4}{10} = \frac{8}{20} = \frac{6}{15} = \dots$

4 **Escribe cuatro proporciones con las siguientes razones:**

$$\frac{4}{6} \qquad \frac{2}{7} \qquad \frac{10}{15} \qquad \frac{14}{21} \qquad \frac{6}{21}$$

$\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$ $\quad \frac{6}{21} = \frac{12}{42}$ $\quad \frac{2}{7} = \frac{6}{21}$ $\quad \frac{10}{15} = \frac{14}{21}$

5 **Escribe tres proporciones con los valores de esta tabla:**

KILOS DE ALMENDRAS	COSTE EN EUROS
1	9
2	18
5	45

¿Qué relación de proporcionalidad liga ambas magnitudes?

$\frac{1}{9} = \frac{2}{18}$ $\quad \frac{1}{9} = \frac{5}{45}$ $\quad \frac{2}{18} = \frac{5}{45}$

Proporcionalidad directa.

6 **Escribe tres proporciones con los valores de esta tabla:**

VELOCIDAD DE UN TREN (km/h)	50	100	150
TIEMPO QUE DURA EL VIAJE (h)	6	3	2

¿Qué relación liga ambas magnitudes?

$\frac{50}{100} = \frac{3}{6}$ $\frac{50}{150} = \frac{2}{6}$ $\frac{100}{150} = \frac{2}{3}$

Proporcionalidad inversa.

7 **Completa las siguientes proporciones:**

a) $\frac{15}{20} = \frac{21}{x}$ b) $\frac{6}{24} = \frac{x}{21}$

c) $\frac{x}{24} = \frac{40}{64}$ d) $\frac{28}{x} = \frac{35}{55}$

e) $\frac{x}{72} = \frac{53}{212}$ f) $\frac{17}{x} = \frac{68}{372}$

g) $\frac{14}{35} = \frac{284}{x}$ h) $\frac{24}{x} = \frac{x}{54}$

i) $\frac{9}{x} = \frac{x}{25}$ j) $\frac{x}{24} = \frac{54}{x}$

a) $x = \frac{20 \cdot 21}{15} = 28$ b) $x = \frac{6 \cdot 21}{24} = \frac{21}{4}$

c) $x = \frac{24 \cdot 40}{64} = 15$ d) $x = \frac{28 \cdot 55}{35} = 44$

e) $x = \frac{72 \cdot 53}{212} = 18$ f) $x = \frac{372 \cdot 17}{68} = 93$

g) $x = \frac{35 \cdot 284}{14} = 710$ h) $x^2 = 1\,296 \rightarrow x = 36$

i) $x^2 = 225 \rightarrow x = 15$ j) $x^2 = 24 \cdot 54 = 1\,296 \rightarrow x = 36$

8 **Calcula la constante de proporcionalidad y, con ayuda de ella, completa esta tabla de valores directamente proporcionales:**

A	2	5	6	8	10	15
B	1,6	4	4,8			

Constante de proporcionalidad = 0,8

A	2	5	6	8	10	15
B	1,6	4	4,8	6,4	8	12

PÁGINA 105

PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA

9 △△△ **Calcula mentalmente y contesta:**

a) Tres kilos de naranjas cuestan 2,4 €. ¿Cuánto cuestan dos kilos?

b) Seis obreros descargan un camión en tres horas. ¿Cuánto tardarán cuatro obreros?

c) 200 g de jamón cuestan 4 €. ¿Cuánto costarán 150 gramos?

d) Un avión, en 3 horas, recorre 1 500 km. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 5 horas?

e) Un camión cargado, a 60 km/h, recorre cierta distancia en 9 horas. ¿Cuánto tiempo invertirá en el viaje de vuelta, descargado, a 90 km/h?

a) 1,6 €

b) 4 horas y media

c) 3 €

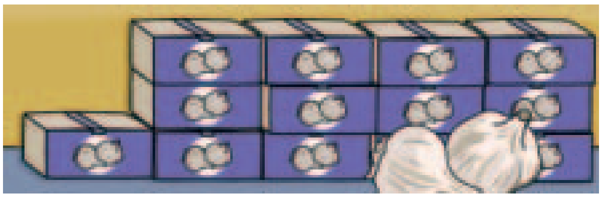
d) 2 500 km

e) 6 horas

11 △△△ **Si cuatro entradas para el cine han costado 15,2 €, ¿cuánto costarán cinco entradas?**

$$\frac{4}{15{,}2} = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{15{,}2 \cdot 5}{4} = 19 \text{ €}$$

12 △△△ **El dueño de un supermercado ha abonado 180 € por 15 cajas de ajos. ¿Cuánto deberá pagar por un nuevo pedido de 13 cajas de ajos?**



P. DIRECTA

CAJAS	COSTE
15	180 €
13	x

$$x = \frac{13 \cdot 180}{15} = 156 \text{ €}$$

13 ▲▲△ **Un tren ha recorrido 240 km en tres horas. Si mantiene la misma velocidad, ¿cuántos kilómetros recorrerá en las próximas dos horas?**

P. DIRECTA

DISTANCIA		TIEMPO
240 km	———	3 h
x	———	2 h

$$x = \frac{240 \cdot 2}{3} = 160 \text{ km}$$

14 ▲▲△ **Un grifo, abierto durante 10 minutos, hace que el nivel de un depósito suba 35 cm. ¿Cuánto subirá el nivel si el grifo permanece abierto 18 minutos más? ¿Cuánto tiempo deberá permanecer abierto para que el nivel suba 70 cm?**

P. DIRECTA

TIEMPO		NIVEL
10 min	———	35 cm
18 min	———	x

$$x = \frac{18 \cdot 35}{10} = 63 \text{ cm}$$

El nivel subirá 63 cm en 18 minutos.

P. DIRECTA

TIEMPO		NIVEL
10 min	———	35 cm
x	———	70 cm

$$x = \frac{10 \cdot 70}{35} = 20 \text{ minutos}$$

El nivel subirá 70 cm en 20 minutos.

16 ▲▲△ **Ocho obreros construyen una pared en 9 días. ¿Cuánto tardarían en hacerlo seis obreros?**

$8 \cdot 9 = 72$ días tardaría un obrero

$72 : 6 = 12$ días tardarían 6 obreros

- REGLA DE TRES

8 obreros	———	9 días
6 obreros	———	x

Proporcionalidad inversa

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{x} \rightarrow x = 12 \text{ días}$$

17 △△△ **Un grifo que arroja un caudal de 3 litros por minuto, llena un depósito en 20 minutos. ¿Cuánto tardará en llenar ese mismo depósito otro grifo cuyo caudal es de 5 litros por minuto?**

CAUDAL	TIEMPO	
3 l/min	20 min	Proporcionalidad inversa
5 l/min	x	

$$\frac{5}{3} = \frac{20}{x} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 20}{5} = 12 \text{ minutos}$$

18 △△△ **Cuatro palas excavadoras hacen un trabajo de movimiento de tierras en 14 días. ¿Cuánto se tardaría en hacer ese mismo trabajo si se dispusiera de 7 palas excavadoras?**

PALAS	TIEMPO (días)	
4 ———	14	Proporcionalidad inversa
7 ———	x	

$$\frac{7}{4} = \frac{14}{x} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 14}{7} = 8 \text{ días}$$

19 △△△ **Un bidón de dos litros de aceite cuesta 5,8 €. ¿Cuánto costará un bidón de 5 litros de la misma marca?**

2 litros ———	5,8 €	Proporcionalidad directa
5 litros ———	x	

$$\frac{2}{5} = \frac{5{,}8}{x} \rightarrow x = \frac{5{,}8 \cdot 5}{2} = 14{,}5 \text{ €}$$

21 △△△ **Por 3,5 kg de chirimoyas he pagado 6,3 €. ¿Cuánto pagaré por cinco kilos?**

P. DIRECTA

CHIRIMOYAS (kg)	PRECIO (€)
3,5 ———	6,3
5 ———	x

$$\frac{3{,}5}{5} = \frac{6{,}3}{x} \rightarrow x = \frac{6{,}3 \cdot 5}{3{,}5} = 9 \text{ €}$$

PÁGINA 106

22 ▲▲△ **Una tienda rebaja todos los artículos en la misma proporción. Si por una camiseta de 18 € pago 16,20 €, ¿cuánto debo pagar por un jersey de 90 €?**

P. DIRECTA

PRECIO SIN REBAJA		PRECIO REBAJADO
18 €	———	16,20 €
90 €	———	x

$$\left.\begin{matrix} 18\ € & \text{———} & 16{,}20\ € \\ 90\ € & \text{———} & x \end{matrix}\right\} \frac{18}{90} = \frac{16{,}20}{x} \rightarrow x = \frac{90 \cdot 16{,}20}{18} = 81 €$$

23 ▲▲△ **Por dos kilos y trescientos gramos de merluza he pagado 41,4 €. ¿Cuánto pagaré por un kilo y setecientos gramos?**

P. DIRECTA

PESO (kg)		COSTE (€)
2,3	———	41,4
1,7	———	x

$$\frac{2{,}3}{1{,}7} = \frac{41{,}4}{x} \rightarrow x = \frac{1{,}7 \cdot 41{,}4}{2{,}3} = 30{,}6\ €$$

24 ▲△△ **Por un besugo que pesaba 875 g Juana ha pagado 10,85 €. ¿Cuánto pagará Norberto por otro besugo de 1,2 kg?**

P. DIRECTA

PESO (g)		COSTE (€)
875	———	10,85
1 200	———	x

$$\frac{875}{1\,200} = \frac{10{,}85}{x} \rightarrow x = \frac{10{,}85 \cdot 1\,200}{875} = 14{,}88\ €$$

25 ▲△△ **Dos poblaciones que distan 18 km están, en un mapa, a una distancia de 6 cm. ¿Cuál será la distancia real entre dos ciudades que, en ese mismo mapa, están separadas 21 cm?**

18 : 6 = 3 km de la realidad por cada centímetro del mapa.

3 · 21 = 63 km distan en realidad las dos ciudades.

REGLA DE TRES

$$\left.\begin{matrix} 18\text{ km} & \text{———} & 6\text{ cm} \\ x & \text{———} & 21\text{ cm} \end{matrix}\right\} x = 63\text{ km}$$

27 ▲▲△ **Un coche, a 90 km/h, hace un recorrido en 5 horas. ¿Cuánto tiempo ganaría si aumentara su velocidad en 10 km/h?**

$90 \cdot 5 = 450$ km de recorrido

$450 : 100 = 4{,}5$ h $= 4$ h 30 min

Ganaría media hora.

REGLA DE TRES

$$\left.\begin{array}{lcr} 90 \text{ km/h} & \text{———} & 5 \text{ horas} \\ 100 \text{ km/h} & \text{———} & x \end{array}\right\} \text{Proporcionalidad inversa}$$

$$\frac{100}{90} = \frac{5}{x} \rightarrow x = 4{,}5 \text{ horas}$$

$4 - 4{,}5 = 0{,}5$. Ganaría media hora.

28 ▲▲△ **Un grifo que arroja un caudal de 25 litros por minuto, llena un depósito de agua en hora y media. ¿Cuánto tardará en llenar ese mismo depósito otro grifo con un caudal de 20 litros por minuto?**

Una hora y media = 90 min

$25 \cdot 90 = 2\,250$ l tiene el depósito

$2\,250 : 20 = 112{,}5$ min $= 1$ h 52 min 30 s

REGLA DE TRES

$$\left.\begin{array}{lcr} 25 \text{ l/min} & \text{———} & 1{,}5 \text{ horas} \\ 20 \text{ l/min} & \text{———} & x \end{array}\right\} \text{Proporcionalidad inversa}$$

$$\frac{20}{25} = \frac{1{,}5}{x} \rightarrow x = 1{,}875 \text{ horas}$$

Tardaría 1,875 horas, es decir, 1 hora y 0,875 segundos $\cdot\ 60 = 52{,}5$ minutos.

Por tanto, tardaría 1 horas 52 minutos y 30 segundos.

29 ▲△△ **Virginia mide 1,60 m de altura y, en este momento, su sombra tiene una longitud de 0,8 m. Si la sombra de un árbol próximo mide 10 m, ¿cuál es su altura?**

$$\frac{1{,}60}{0{,}8} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{1{,}60 \cdot 10}{0{,}8} = 20 \text{ m}$$

El árbol mide 20 metros.

30 △△△ **Un automovilista llega a una gasolinera con el depósito vacío y 54 673 km en su cuentakilómetros. Echa 39 litros de gasolina y continúa su viaje. Cuando vuelve a tener el depósito vacío, su cuentakilómetros marca 55 273 km. ¿Cuál es el consumo de combustible cada 100 kilómetros?**

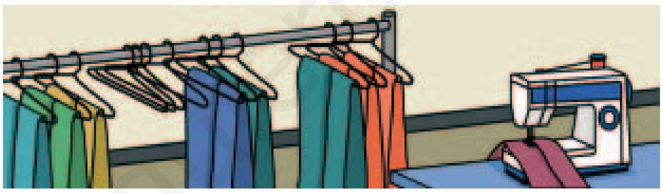
55 273 – 54 673 = 600 km recorre

$\frac{39}{6}$ = 6,5 l gasta por cada 100 km

REGLA DE TRES

$$\left.\begin{array}{lcl} 600 \text{ km} & \text{———} & 39 \text{ litros} \\ 100 \text{ km} & \text{———} & x \end{array}\right\} \; x = 6{,}5 \text{ l}$$

31 △△△ **Una empresa de confección debe entregar un pedido en 12 días. Para poder cumplir el encargo debe fabricar 2 000 prendas diarias. Sin embargo, sufre una avería que detiene la producción durante dos jornadas. ¿Cuántas prendas deberá fabricar diariamente para enfrentarse a esta nueva situación?**



2 000 · 12 = 24 000 prendas debe fabricar en 12 días.

24 000 : 10 = 2 400 prendas diarias debe fabricar si solo dispone de 10 días.

REGLA DE TRES

$$\left.\begin{array}{lcl} 2\,000 \text{ prendas diarias} & \text{———} & 12 \text{ días} \\ x & \text{———} & 10 \text{ días} \end{array}\right\} \; \text{Proporcionalidad inversa}$$

$$\frac{10}{12} = \frac{2\,000}{x} \;\rightarrow\; x = 2\,400 \text{ diarias}$$

32 △△△ **Con el dinero que tengo, ayer podría haber comprado diez pegatinas de 0,4 € cada una, pero hoy las han subido 0,1 € por unidad. ¿Cuántas pegatinas puedo comprar ahora?**

Tengo 10 · 0,4 = 4 €

Las pegatinas cuestan hoy 0,4 + 0,1 = 0,5 €

Ahora podría comprar: 4 : 0,5 = 8 pegatinas

33 **Un granjero necesita diariamente 45 kg de pienso y 105 kg de forraje para alimentar a sus 30 vacas.**

¿Qué cantidad de pienso y de forraje diarios necesitaría en el supuesto de que vendiese 10 vacas?

45 : 30 = 1,5 kg de pienso por cada vaca.

105 : 30 = 3,5 kg de forraje por cada vaca.

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}5 \cdot 20 = 30 \text{ kg de pienso} \\ 3{,}5 \cdot 20 = 70 \text{ kg de forraje} \end{array}\right\} \text{Por las 20 vacas que le quedan.}$$

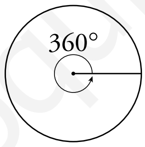
REGLA DE TRES

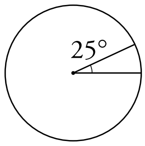
$$\left.\begin{array}{ccc} 45 \text{ kg de pienso} & \text{———} & 30 \text{ vacas} \\ x & \text{———} & 20 \text{ vacas} \end{array}\right\} x = 30 \text{ kg de pienso}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 105 \text{ kg de forraje} & \text{———} & 30 \text{ vacas} \\ x & \text{———} & 20 \text{ vacas} \end{array}\right\} x = 70 \text{ kg de forraje}$$

34 **El radio de una circunferencia mide 2 m. ¿Cuál es su longitud?**

Sabiendo que la circunferencia completa abarca 360°, ¿cuál es la longitud de un arco de 90°? ¿Y la de un arco de 25°?





▸ *La longitud de una circunferencia es:* $L = 2 \cdot \pi \cdot r$

- Longitud de la circunferencia de 2 m de radio:

  Longitud de la circunferencia $\rightarrow$ 2π r

  Longitud de la circunferencia de radio 2 m $\rightarrow$ $2 \cdot \pi \cdot 2 = 12{,}56$ m

- Longitud de un arco de 90°:

  $$12{,}56 \cdot \frac{90°}{360°} = 3{,}14 \text{ m}$$

  REGLA DE TRES

  $$\left.\begin{array}{ccc} 360° & \text{———} & 12{,}56 \text{ m} \\ 90° & \text{———} & x \end{array}\right\} x = 3{,}14 \text{ m}$$

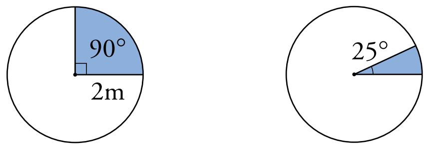
- Longitud de un arco de 25°:

  $$12{,}56 \cdot \frac{25°}{360°} = 0{,}872 \text{ m}$$

REGLA DE TRES

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ ——— } 12{,}56 \text{ m} \\ 25° \text{ ——— } x \end{array}\right\} x = 0{,}872 \text{ m}$$

35 **¿Cuál es la superficie de un sector circular de 90° en un círculo de 2 m de radio? ¿Y la superficie de un sector de 25°?**



▶ ***La longitud de un círculo es:*** $S = \pi \cdot r^2$

Superficie del círculo $\rightarrow \pi \cdot r^2$

Superficie de un círculo de 2 m de radio $\rightarrow \pi \cdot 2^2 = 12{,}56 \text{ m}^2$

- Superficie de un sector de 90°:

$$12{,}56 \cdot \frac{90°}{360°} = 3{,}14 \text{ m}^2$$

REGLA DE TRES

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ ——— } 12{,}56 \text{ m}^2 \\ 90° \text{ ——— } x \end{array}\right\} x = 3{,}14 \text{ m}^2$$

- Superficie de un sector de 25°:

$$12{,}56 \cdot \frac{25°}{360°} = 0{,}872 \text{ m}^2$$

REGLA DE TRES

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ ——— } 12{,}56 \text{ m}^2 \\ 25° \text{ ——— } x \end{array}\right\} x = 0{,}872 \text{ m}^2$$

PÁGINA 107

36 **Un supermercado recibe una carga de 100 cajas de refrescos cada semana. Si cada caja contiene 20 botellas, ¿cuántas botellas vende ese supermercado, aproximadamente, cada mes?**

Tomamos el mes como 4 semanas: $100 \cdot 20 \cdot 4 = 8\,000$ botellas al mes, aproximadamente.

REGLA DE TRES

$$\left.\begin{array}{l} 2\,000 \text{ botellas ——— } 1 \text{ semana} \\ x \text{ ——— } 4 \text{ semanas} \end{array}\right\} x = 8\,000 \text{ botellas}$$

PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

37 △△△ **Cincuenta terneros de engorde consumen 4 200 kg de alfalfa a la semana.**

a) ¿Cuál es el consumo de alfalfa por ternero y día?

b) ¿Cuántos kilos de alfalfa se necesitarán para alimentar a 20 terneros durante 15 días?

c) ¿Durante cuántos días podemos alimentar a 10 terneros si disponemos de 600 kg de alfalfa?

a) 4 200 : 50 = 84 kg de alfalfa por ternero a la semana

84 : 7 = 12 kg de alfalfa por ternero al día

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

P. DIRECTA

TERNEROS	DÍAS	ALFALFA
50	7	4 200
1	1	x

$$\frac{50}{1} \cdot \frac{7}{1} = \frac{4\,200}{x} \rightarrow x = 12 \text{ kilos de alfalfa}$$

b) PROPORCIONALIDAD DIRECTA

P. DIRECTA

TERNEROS	DÍAS	ALFALFA
50	7	4 200
20	15	x

$$\frac{50}{20} \cdot \frac{7}{15} = \frac{4\,200}{x} \rightarrow x = \frac{4\,200 \cdot 20 \cdot 15}{50 \cdot 7} = 3\,600 \text{ kg}$$

c) PROPORCIONALIDAD INVERSA

P. DIRECTA

TERNEROS	ALFALFA	DÍAS
50	4 200	7
10	600	x

$$\frac{10}{50} \cdot \frac{4\,200}{600} = \frac{7}{x} \rightarrow x = \frac{7 \cdot 50 \cdot 600}{10 \cdot 4\,200} = 5 \text{ días}$$

Con 600 kg de alfalfa se pueden alimentar a 10 terneros durante 5 días.

38 ▲▲▲ **Por enviar un paquete de 5 kg de peso a una población que está a 60 km de distancia, una empresa de transporte me ha cobrado 9 €. ¿Cuánto me costará enviar un paquete de 15 kg a 200 km de distancia?**

Si el coste fuera directamente proporcional al peso del paquete y a la distancia del lugar de destino, el nuevo envío costará:

9 : 60 = 0,15 € por cada kilómetro (un paquete de 5 kg)

0,15 : 5 = 0,03 € por kilómetro y kilogramo

0,03 · 15 · 200 = 90 € por un paquete de 15 kg a 200 km

REGLA DE TRES

PROP. DIRECTA

P. DIRECTA

PESO	DISTANCIA	COSTE
5 kg	60 km	9 €
15 kg	200 km	x

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{60}{200} = \frac{9}{x} \rightarrow x = 90 \text{ €}$$

39 ▲▲▲ **Una pieza de tela de 2,5 m de larga y 80 cm de ancha cuesta 30 €. ¿Cuánto costará otra pieza de tela de la misma calidad de 3 m de larga y 1,20 m de ancha?**

30 : (2,5 · 0,8) = 15 € cada metro cuadrado

15 · (3 · 1,2) = 54 € cuesta la nueva pieza

REGLA DE TRES

PROP. DIRECTA

P. DIRECTA

LARGO (m)	ANCHO (m)	COSTE (€)
2,5	0,8	30
3	1,2	x

$$\frac{2{,}5}{3} \cdot \frac{0{,}8}{1{,}2} = \frac{30}{x} \rightarrow x = 54 \text{ €}$$

40 ▲▲▲ **Para llenar un pilón de riego hasta una altura de 80 cm se ha necesitado aportar un caudal de 20 litros por minuto durante 1 h 20 min. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse ese mismo pilón hasta una altura de 90 cm si se le aporta un caudal de 15 litros por minuto?**

20 litros por minuto durante 80 minutos $\rightarrow$ 1 600 litros se necesitan para que el agua suba 80 cm.

1 600 : 80 = 20 litros se necesitan para que el agua suba 1 cm.

20 · 90 = 1 800 litros se necesitan para que el agua suba 90 cm.

1 800 : 15 = 120 minutos se necesitan para conseguir 1 800 litros con un caudal de 15 *l*/min. Por tanto, tardará 2 horas en llenarse.

REGLA DE TRES

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

P. INVERSA

ALTURA	CAUDAL	TIEMPO
80 cm	20 *l*/m	60 + 20 = 80 minutos
90 cm	15 *l*/m	x

$$\frac{80}{90} \cdot \frac{15}{20} = \frac{80}{x} \rightarrow x = 120 \text{ minutos} = 2 \text{ horas}$$

41 ▲▲▲ **Cinco máquinas iguales envasan 7 200 litros de aceite en una hora.**

¿Cuántos litros envasarán tres máquinas en dos horas y media?

¿Cuánto tiempo tardarán cuatro máquinas en envasar 12 000 litros?

- 7 200 : 5 = 1 440 litros envasa cada máquina en 1 hora.

  1 440 · 3 · 2,5 = 10 800 litros envasan 3 máquinas en 2 horas y media.

REGLA DE TRES

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

P. DIRECTA

MÁQUINAS	TIEMPO	LITROS
5	1 hora	7 200
3	2,5 horas	x

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2{,}5} = \frac{7\,200}{x} \rightarrow x = 10\,800 \text{ litros}$$

REGLA DE TRES

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

P. DIRECTA

MÁQUINAS	TIEMPO	LITROS
5	1 hora	7 200
3	2,5 horas	x

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2{,}5} = \frac{7\,200}{x} \;\rightarrow\; x = 10\,800 \text{ litros}$$

- 12 000 : 4 = 3 000 litros ha de envasar cada máquina.

  3 000 · 432 = 6 h 56,4 min tardan.

REGLA DE TRES

PROPORCIONALIDAD INVERSA

P. DIRECTA

MÁQUINAS	LITROS	TIEMPO
5	7 200	1 hora
4	12 000	x

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{7\,200}{12\,000} = \frac{1}{x} \;\rightarrow\; x = 2{,}08\widehat{3} \text{ horas}$$

$2{,}08\widehat{3} \cdot 60 = 125$ minutos $\rightarrow$ Tardarán 2 h 5 min

42 ▲▲▲ **Doce obreros, trabajando 8 horas diarias, terminan un trabajo en 25 días. ¿Cuánto tardarán en hacer ese mismo trabajo 5 obreros trabajando 10 horas diarias?**

12 · 8 · 25 = 2 400 horas de trabajo de 1 obrero hay que emplear en realizar el trabajo.

2 400 : 5 = 480 horas debe realizar cada uno de los 5 obreros.

480 : 10 = 48 días tardarán.

REGLA DE TRES

PROPORCIONALIDAD INVERSA

P. INVERSA

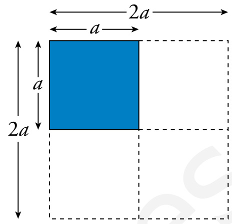
OBREROS	HORAS	DÍAS
12	8	25
5	10	x

$$\frac{5}{12} \cdot \frac{10}{8} = \frac{25}{x} \;\rightarrow\; x = 48 \text{ días} \;\rightarrow\; \text{Tardarán 48 días}$$

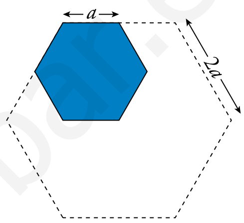
PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

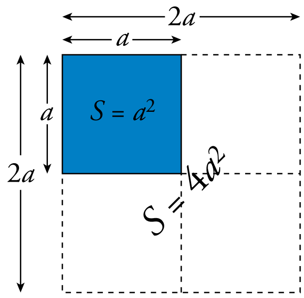
43 COMPARANDO SUPERFICIES

- **¿Cuántas veces aumenta la superficie de un *cuadrado* si se aumenta al doble el lado? ¿Y si se aumenta el lado al triple?**

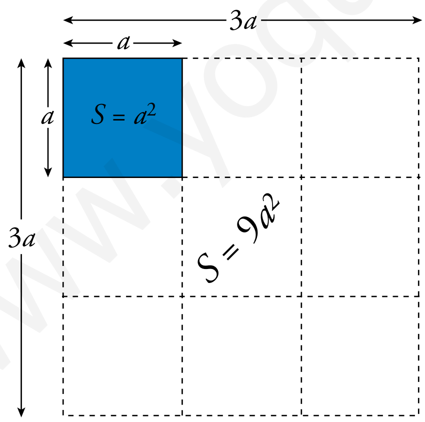


- **¿Cuántas veces aumenta la superficie de un hexágono si los lados se hacen el doble de largo? ¿Y si los lados se hacen el triple de largo?**

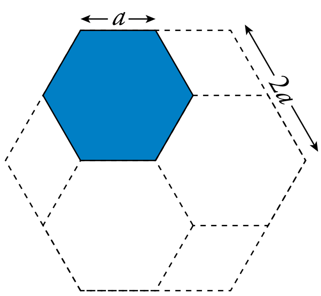




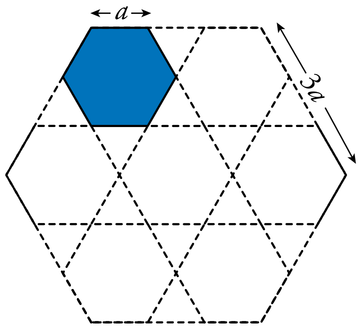
Si el lado de un cuadrado aumenta al doble, su superficie aumenta al cuádruple.



Si el lado de un cuadrado aumenta al triple, su superficie queda multiplicada por 9.



Si el lado de un hexágono aumenta al doble, su superficie queda multiplicada por 4.

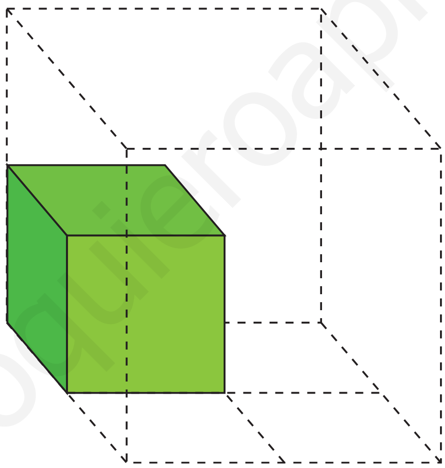


Si el lado de un hexágono aumenta al triple, su superficie queda multiplicada por 9.

44 COMPARANDO TAMAÑOS

Supón que aumentamos el tamaño de un cubo hasta que la arista se hace doble.

- **¿Cuántos cubos como el primitivo caben en el cubo ampliado?**



- **¿Y si hacemos que la arista aumente al triple?**

- Con arista doble, en el nuevo cubo caben 8 cubos como el primitivo.
- Con arista triple, en el nuevo cubo caben 27 cubos como el primitivo.

PÁGINA 121

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Cálculo mental

1 Calcula mentalmente:

a) 50% de 620 | **b) 50% de 2 500**
c) 25% de 600 | **d) 25% de 840**
e) 75% de 400 | **f) 75% de 444**

a) 310 | b) 1 250
c) 150 | d) 210
e) 300 | f) 333

2 Calcula mentalmente. Hazlo en el orden en que aparecen:

a) 10% de 80 | **b) 20% de 80**
c) 30% de 80 | **d) 40% de 80**
e) 50% de 80 | **f) 60% de 80**
g) 70% de 80 | **h) 80% de 80**
i) 90% de 80 | **j) 100% de 80**

a) 8 | b) 16
c) 24 | d) 32
e) 40 | f) 48
g) 56 | h) 64
i) 72 | j) 80

3 ¿Qué fracción asocias a cada uno de los siguientes porcentajes?

a) 50% | b) 25% | c) 75%
d) 10% | e) 20% | f) 30%
g) 40% | h) 70% | i) 90%

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{10}$ e) $\frac{1}{5}$ f) $\frac{3}{10}$

g) $\frac{4}{10}$ h) $\frac{7}{10}$ i) $\frac{9}{10}$

4 **Asocia un porcentaje a cada una de estas fracciones:**

a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{1}{10}$

a) 20% b) 75% c) 25% d) 50% e) 10%

5 **Completa:**

a) Para calcular el 50% multiplicamos por $\boxed{0,5}$

b) Para calcular el 25% multiplicamos por $\boxed{?}$

c) Para calcular el 70% multiplicamos por $\boxed{?}$

d) Para calcular el 15% multiplicamos por $\boxed{?}$

e) Para calcular el 8% multiplicamos por $\boxed{?}$

f) Para calcular el 1% multiplicamos por $\boxed{?}$

a) 0,5 b) 0,25 c) 0,7 d) 0,15 e) 0,08 f) 0,01

CÁLCULO DE PORCENTAJES

6 **Calcula:**

a) 18% de 650 **b) 12% de 1 500**

c) 23% de 2 500 **d) 45% de 960**

e) 65% de 720 **f) 82% de 1 520**

g) 8% de 175 **h) 5% de 2 340**

a) 650 · 0,18 = 117 b) 1 500 · 0,12 = 180

c) 2 500 · 0,23 = 575 d) 960 · 0,45 = 432

e) 720 · 0,65 = 468 f) 1 520 · 0,82 = 1 246,4

g) 175 · 0,08 = 14 h) 2 340 · 0,05 = 117

7 ▲▲△ **Calcula como en el ejemplo:**

▸ *13% de 1 500 =* $1\,500 \cdot \frac{13}{100} = 1\,500 \cdot 0{,}13 = 195$

a) 13% de 2 800 | **b) 12% de 45**
c) 27% de 4 850 | **d) 16% de 2 675**
e) 5% de 344 | **f) 7% de 800**
g) 2% de 1 625 | **h) 4% de 625**

a) $2\,800 \cdot 0{,}13 = 364$

b) $45 \cdot 0{,}12 = 5{,}4$

c) $4\,850 \cdot 0{,}27 = 1\,309{,}5$

d) $2\,675 \cdot 0{,}16 = 428$

e) $344 \cdot 0{,}5 = 17{,}2$

f) $800 \cdot 0{,}07 = 56$

g) $1\,625 \cdot 0{,}02 = 32{,}5$

h) $625 \cdot 0{,}04 = 25$

9 ▲▲△ **Calcula x en cada caso:**

a) 80% de $x = 16$ | **b) 20% de $x = 31$**
c) 5% de $x = 13$ | **d) 15% de $x = 30$**
e) 8% de $x = 36$ | **f) 70% de $x = 140$**
g) 21% de $x = 42$ | **h) 3% de $x = 45$**

a) $\frac{80}{100} \cdot x = 16 \rightarrow 0{,}8x = 16 \rightarrow x = 16 : 0{,}8 = 20$

b) $0{,}2 \cdot x = 31 \rightarrow x = 31 : 0{,}2 = 155$

c) $0{,}05 \cdot x = 13 \rightarrow x = 13 : 0{,}05 = 260$

d) $0{,}15 \cdot x = 30 \rightarrow x = 30 : 0{,}15 = 200$

e) $0{,}08 \cdot x = 36 \rightarrow x = 36 : 0{,}08 = 450$

f) $0{,}7 \cdot x = 140 \rightarrow x = 140 : 0{,}7 = 200$

g) $0{,}21 \cdot x = 42 \rightarrow x = 42 : 0{,}21 = 200$

h) $0{,}03 \cdot x = 45 \rightarrow x = 45 : 0{,}03 = 1\,500$

PROBLEMAS DE PORCENTAJES

10 ▲△△ **En la caja de una conocida marca de alimentos puede leerse su composición nutritiva: PROTEÍNAS … 26%; HIDRATOS DE CARBONO … 8,5%; GRASAS … 5%; LACTOSA…9%; OTROS … 3%. El resto es agua.**

¿Qué porcentaje de agua contiene?

$26 + 8{,}5 + 5 + 9 + 3 = 51{,}5$

$100 - 51{,}5 = 48{,}5$

Contiene un 48,5% de agua.

11 ▲△△ **En un colegio hay 575 alumnos matriculados de los que el 8% son hindúes. ¿Cuántos alumnos y alumnas hindúes hay?**

$575 \cdot 0{,}08 = 46$

Hay 46 alumnos hindúes.

12 ▲△△ **Una familia gasta el 18% de su presupuesto en alimentación. Si los ingresos ascienden a 1 800 € mensuales, ¿cuánto gastan al mes en alimentos?**

$1\,800 \cdot 0{,}18 = 324$

En alimentos gastan, al mes, 324 €.

13 ▲▲△ **En una familia que tiene unos ingresos mensuales de 2 400 €, se gastan 300 € en ocio. ¿Qué porcentaje de los ingresos se dedica al ocio?**

$$\frac{2\,400}{100} = \frac{300}{x} \rightarrow x = \frac{30\,000}{2\,400} = 12{,}5$$

El 12,5% de los ingresos se dedica al ocio.

PÁGINA 122

14 ▲▲△ **En un congreso de cardiólogos el 15% son españoles. Sabiendo que hay 36 médicos españoles, ¿cuántos son los asistentes al congreso?**

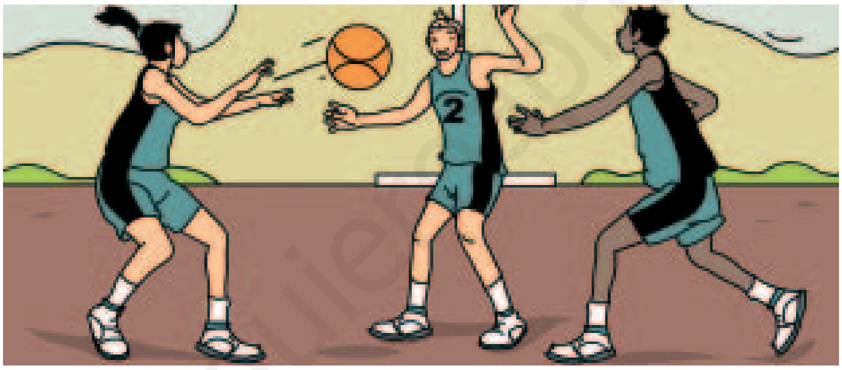
$$\frac{15}{36} = \frac{100}{x} \rightarrow x = \frac{3\,600}{15} = 240$$

En el congreso hay 240 asistentes.

15 En el último partido de baloncesto de mi ciudad, los cinco jugadores del equipo titular que inició el partido consiguieron los siguientes resultados:

	CANASTAS	INTENTOS
PABLO	8	19
O'NEIL	9	12
ROGER MILLER	16	20
LOSA	7	11
BIRIAKOV	2	8

Averigua los porcentajes de cada jugador.



Canastas = 42

Intentos = 70

Total = 112

	CANASTAS	INTENTOS	TOTAL
PABLO	$\frac{8}{42} \cdot 100 = 19{,}05\%$	$\frac{19}{70} \cdot 100 = 27{,}14\%$	$\frac{27}{112} \cdot 100 = 24{,}11\%$
O'NEIL	$\frac{9}{42} \cdot 100 = 21{,}43\%$	$\frac{12}{70} \cdot 100 = 17{,}14\%$	$\frac{21}{112} \cdot 100 = 18{,}75\%$
ROGER MILLER	$\frac{16}{42} \cdot 100 = 38{,}09\%$	$\frac{20}{70} \cdot 100 = 28{,}57\%$	$\frac{36}{112} \cdot 100 = 32{,}14\%$
LOSA	$\frac{7}{42} \cdot 100 = 16{,}67\%$	$\frac{11}{70} \cdot 100 = 15{,}71\%$	$\frac{18}{112} \cdot 100 = 16{,}07\%$
BIRIAKOV	$\frac{2}{42} \cdot 100 = 4{,}76\%$	$\frac{8}{70} \cdot 100 = 11{,}43\%$	$\frac{10}{112} \cdot 100 = 8{,}93\%$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

16 △△△ **Sara ha comprado un jersey que costaba 35 €, pero le han hecho una rebaja del 15%. ¿Cuánto ha pagado?**

Ha pagado el 85%, es decir:

$$35 \cdot 0{,}85 = 29{,}75 \text{ €}$$

17 △△△ **Roberto ha pagado 29,75 € por unos pantalones que estaban rebajados un 15%. ¿Cuánto costaban los pantalones sin rebajar?**

$0{,}85 \cdot x = 29{,}75 \rightarrow x = 29{,}75 : 0{,}85 = 35$

Los pantalones costaban 35 €.

18 △△△ **Adelaida ha pagado 29,75 € por una blusa que costaba 35 €. ¿Qué tanto por ciento le han rebajado?**

$35 \cdot x = 29{,}75 \rightarrow x = 29{,}75 : 35 = 0{,}85$

Ha pagado el 85%.

Le han rebajado un 15%.

19 △△△ **He ido a comprar un balón que costaba 45 €, pero me han hecho una rebaja del 12%. ¿Cuánto he pagado por el balón?**

$45 \cdot 0{,}88 = 39{,}6$ €.

He pagado 39,6 €.

20 △△△ **La paga mensual de Andrea es de 25 € y le han prometido un aumento del 20% para el próximo mes. ¿Cuál será su nueva asignación mensual?**

$25 \cdot 1{,}2 = 30$

Su nueva asignación es de 30 €.

21 △△△ **Yo recibía hasta ahora 6 € semanales, pero me han subido la asignación a 7,5 €. ¿Cuál ha sido el porcentaje aumentado?**

$6 \cdot x = 7{,}5 \rightarrow x = 7{,}5 : 6 = 1{,}25$

7,5 € son el 125% de 6 €. Es decir, le han subido un 25%.

22 △△△ **He pagado 0,44 € por una barra de pan, lo que supone un aumento del 10% sobre el precio que tenía ayer. ¿Cuánto costaba la barra ayer?**

$1{,}1 \cdot x = 0{,}44 \;\rightarrow\; x = 0{,}44 : 1{,}1 = 0{,}4$

La barra costaba 0,4 €.

23 △△△ **¿Qué interés produce, en 4 años, un capital de 3 000 €, colocado al 5% anual?**

$$I = \frac{3\,000 \cdot 4 \cdot 5}{100} = 600 \text{ €}$$

24 △△△ **Si meto en el banco 500 € al 7% anual, ¿cuánto tendré en la cuenta dentro de dos años?**

$$I = \frac{500 \cdot 7 \cdot 2}{100} = 70 \text{ €}$$

Tendrá 500 + 70 = 570 €.

26 △△△ **En el banco Pasapoga se han ingresado 22 500 € en una cuenta que está retribuida con un 6% de interés. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta al pasar un año?**

¿Cuánto se gana cada mes?

$$I = \frac{22\,500 \cdot 6 \cdot 1}{100} = 1\,350 \text{ €}$$

Al cabo de un año en la cuenta habrá 22 500 + 1 350 = 23 850 €.

Cada mes se gana 1 350 : 12 = 112,5 €.

27 △△△ **¿Qué interés produce, en cinco meses, un millón de euros, colocado al 2,4% anual?**

$$I = \frac{1\,000\,000 \cdot 2{,}4 \cdot 1}{100} = 24\,000 \text{ en un año}$$

En cinco meses $\rightarrow \dfrac{24\,000}{12} \cdot 5 = 10\,000$ €

28 △△△ **Tres amigos gastan 20 € en una quiniela. Adrián pone 9 €, Patricia 6 € y Esteban el resto. La quiniela resulta premiada con 740 €.**

¿Cómo repartirán el premio?

Adrián pone 9 €, Patricia, 6 € y Esteban, 5 €

$$\frac{9}{A} = \frac{6}{P} = \frac{5}{E} = \frac{20}{740}$$

A Adrián le tocan $A = \frac{740 \cdot 9}{20} = 333$ €

A Patricia le tocan $P = \frac{740 \cdot 6}{20} = 222$ €

A Esteban le tocan $E = \frac{740 \cdot 5}{20} = 185$ €

29 ▲△△ **Cuatro socios montan un negocio. A aporta 10 000 €; B aporta 6 000 €; C aporta 4 000 € y D aporta 4 000 €. En el primer año obtienen una ganancia de 7 200 €.**

¿Cuánto corresponde a cada uno?

Total apartado: 24 000 €

$$\frac{A}{10\,000} = \frac{B}{6\,000} = \frac{C}{4\,000} = \frac{D}{4\,000} = \frac{7\,200}{24\,000}$$

$$A = \frac{7\,200 \cdot 10\,000}{24\,000} = 3\,000 \qquad B = \frac{7\,200 \cdot 6\,000}{24\,000} = 1\,800$$

$$C = \frac{7\,200 \cdot 4\,000}{24\,000} = 1\,200 \qquad D = \frac{7\,200 \cdot 4\,000}{24\,000} = 1\,200$$

PÁGINA 123

30 ▲△△ **Un mayorista paga 975 € a tres hortelanos, a los que ha comprado, respectivamente, 400 kg, 300 kg y 800 kg de tomates.**

¿Cuánto corresponde a cada hortelano?

$$\frac{400}{x} = \frac{300}{y} = \frac{800}{z} = \frac{1500}{975}$$

$$x = \frac{400 \cdot 975}{1\,500} = 260$$

$$y = \frac{300 \cdot 975}{1\,500} = 195$$

$$z = \frac{800 \cdot 975}{1\,500} = 520$$

31 ▲△△ **Varios amigos y amigas acuden a un supermercado para comprar diversos productos con los que celebrar una fiesta. Se han gastado 45 €. Ángel lleva el dinero de cinco de ellos, Laura el de seis y Jesús el de cuatro.**

¿Qué parte de lo que tienen que pagar ha de poner cada uno?

En total llevan dinero de 5 + 6 + 4 = 15 personas.

Ángel debe poner $\frac{5}{15} \cdot 45 = 15$ €

Laura debe poner $\frac{6}{15} \cdot 45 = 18$ €

Jesús debe poner $\frac{4}{15} \cdot 45 = 12$ €

32 ▲▲△ **Un comerciante mezcla 80 kg de café de 10,5 €/kg con 60 kilos de otro café de calidad superior, que cuesta a 14 €/kg. ¿A cuánto sale el kilo de mezcla?**

Precio de la mezcla:

$$\frac{80 \cdot 10{,}5 + 60 \cdot 14}{140} = \frac{840 + 840}{140} = 12 \text{ €/kg}$$

33 ▲▲△ **¿Cuántos kilos de café a 14 €/kg hay que mezclar con 80 kg de otro café de calidad inferior, a 10,5 €/kg, para que la mezcla salga a 12 €/kg?**

$$\frac{x \cdot 14 + 80 \cdot 10{,}5}{80 + x} = 12$$

$14x + 840 = 960 + 12x \;\rightarrow\; 2x = 120 \;\rightarrow\; x = 60$ kg

Hay que mezclar 60 kg de café de 14 €/kg.

34 ▲▲△ **Un bodeguero tiene 2 200 litros de vino corriente a 1,8 €/litro y desea mezclarlos con otro vino de superior calidad que sale a 3,6 €/litro, para obtener uno de calidad intermedia que cueste 2,5 €/litro.**

¿Cuántos litros necesita del vino más caro?

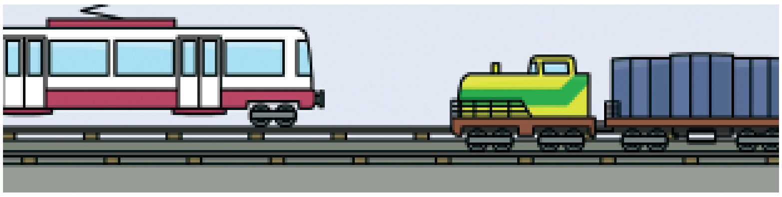
$$\frac{2\,200 \cdot 1{,}8 + x \cdot 3{,}6}{2\,200 + x} = 2{,}5$$

$3\,960 + 3{,}6x = 5\,500 + 2{,}5x \;\rightarrow\; 1{,}1x = 1\,540 \;\rightarrow\; x = 1\,400$

Debe mezclar 1 400 litros de 3,6 €.

35 Un tren sale de A hacia B a 70 km/h. Simultáneamente, por una vía paralela, sale de B hacia A otro tren a 80 km/h.

Si la distancia de A a B es de 230 km, ¿cuánto tardarán en cruzarse?



Los trenes se acercan a una velocidad de 150 km/h, y tienen que recorrer 230 km.

$$t = \frac{e}{v} \rightarrow t = \frac{230}{150} = \frac{23}{15} = 1 \text{ h } 32 \text{ min}$$

36 **Un ciclista sale de cierta población a una velocidad de 15 km/h. Veinte minutos después sale en su persecución una moto a 45 km/h.**

¿Cuánto tardará en alcanzarle?

En 20 minutos el ciclista recorre $\frac{1}{3} \cdot 15 = 5$ km

En el mismo tiempo, mientras que el ciclista recorre una distancia e, el motorista ha de recorrer $e + 5$.

$$\frac{e}{15} = \frac{e+5}{45} \rightarrow 45e = 15e + 75 \rightarrow 30e = 75 \rightarrow e = \frac{75}{30}$$

$$t = \frac{75/30}{15} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} = 20 \text{ min}$$

El motorista tarda en alcanzar al ciclista 20 minutos.

37 **De una pared alicatada, se han caído el 30% de los azulejos. Si la pared mide 4 m × 8 m y cada azulejo 10 cm × 10 cm, ¿cuántos azulejos deben reponerse?**

Superficie de la pared: $4 \times 8 = 32$ m^2

Superficie de cada azulejo: $0,1 \times 0,1 = 0,01$ m^2

Número total de azulejos: 32 : 0,01 = 3 200 azulejos

30% de 3 200 = 960 azulejos hay que reponer.

38 △△△ **He vendido mi viejo coche para comprar uno nuevo. Lo compré por 16 000 euros y, después de 11 años, al comprar el nuevo, me han pagado por él 2 000 €.**

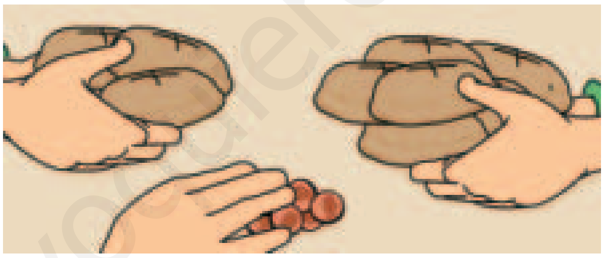
¿Qué porcentaje del valor de la compra del coche me han pagado? ¿Y qué porcentaje he perdido?

$$\frac{16\,000 \cdot x}{100} = 2\,000 \;\rightarrow\; x = \frac{200\,000}{16\,000} = 12{,}5$$

Le han pagado un 12,5% del valor de la compra del coche y ha perdido 100 – 12,5 = 87,5% de su valor.

PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

39 **Tres peregrinos se encuentran en un cruce de caminos y se sientan a comer. Uno aporta tres tortas, otro seis tortas, y el tercero, que no tiene tortas, paga a sus compañeros con nueve monedas.**
¿Cómo deben distribuirse las monedas?



Cada uno come tres tortas.
El primero se come las tortas que llevaba. Luego, no es ni acreedor ni deudor.
El otro pone tres tortas y come otras tres. Por tanto, las nueve monedas serán para él.

40 **¿Qué porcentaje de rebaja consigues aprovechando la oferta?**

Si lleva 3 y paga solo 2, compra por $\frac{2}{3}$ del valor, es decir, paga el $66{,}\widehat{6}\%$ y la rebaja es del $33{,}\widehat{3}\%$.

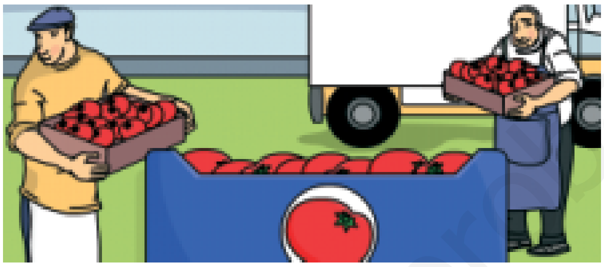
41 **Un hortelano vende sus tomates a un mayorista.**

El mayorista los vende a un intermediario ganando un 20%.

El intermediario los vende a un almacén ganando un 20%.

El almacén los vende a un minorista y éste al público, ganando cada uno de ellos, también, un 20%.

¿En qué porcentaje se ha aumentado el precio que cobró el agricultor cuando el producto sale finalmente al público?



El hortelano vende los tomates por x euros.

El mayorista los vende por $1{,}2 \cdot x$ euros.

El intermediario los vende por $1{,}2 \cdot (1{,}2 \cdot x) = 1{,}44x$

El almacén los vende por $1{,}2 \cdot (1{,}44x) = 1{,}728x$

El minorista los vende por $1{,}2 \cdot (1{,}728x) = 2{,}0736x$

El precio ha aumentado un 107,36% sobre el inicial.

PÁGINA 138

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Lenguaje algebraico

1 Llamando n a un número cualquiera, traduce a lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

a) La mitad de n.

b) La mitad de n menos cuatro unidades.

c) La mitad del resultado de restarle cuatro unidades a n.

d) El doble del resultado de sumarle tres unidades a n.

a) $\frac{n}{2}$

b) $\frac{n}{2} - 4$

c) $\frac{n-4}{2}$

d) $2 \cdot (n + 3)$

2 Utiliza el lenguaje algebraico para expresar:

a) Un múltiplo cualquiera de cinco.

b) Un múltiplo cualquiera de dos.

c) Cualquier número que no sea múltiplo de dos.

d) Cualquier número que deje un resto de tres unidades al dividirlo entre cinco.

a) $5 \cdot k$

b) $2 \cdot k$

c) $2k + 1$

d) $5k + 3$

3 Completa, con una expresión algebraica, la casilla que va emparejada a n:

1	2	3	4	10	n
4	7	10	13	31	?

$3n + 1$

4 ▲▲△ **Escribe una ecuación para cada enunciado y trata de encontrar, en cada caso, el número que cumple la condición expresada:**

a) Si a cierto número, x, le restas 20 y doblas el resultado, obtienes 10.

b) El triple de un número, x, coincide con el valor obtenido al sumarle 10 unidades.

c) La mitad de un número coincide con el valor que se obtiene al restarle 11.

a) $2(x-20)=10$

$2x-40=10 \rightarrow 2x=50 \rightarrow x=25$

b) $3x=x+10$

$2x=10 \rightarrow x=5$

c) $\frac{x}{2}=x-11$

$x=2x-22 \rightarrow x=22$

6 ▲▲△ **Demuestra que la suma de dos pares consecutivos nunca es múltiplo de 4.**

Dos pares consecutivos son de la forma $2x$ y $2x+2$:

$$2x+2x+2=4x+2$$

$4x$ es múltiplo de 4, pero no 2. Por tanto, $4x+2$ no es múltiplo de 4.

7 ▲▲△ **Demuestra que la suma de tres números naturales consecutivos es igual al triple del mediano.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mediano} \rightarrow x \\ \text{Anterior} \rightarrow x-1 \\ \text{Posterior} \rightarrow x+1 \end{array}\right\} x+(x-1)+(x+1)=3x$$

8 ▲▲▲ **Demuestra que la suma de tres números impares consecutivos siempre es múltiplo de 3.**

Los números son $2x+1$, $2x+3$ y $2x+5$:

$$(2x+1)+(2x+3)+(2x+5)=6x+9=3(2x+3)$$

Es múltiplo de 3.

9 ▲▲▲ **Demuestra que si a cualquier número le sumamos tres, después duplicas el resultado, restas uno, vuelves a duplicar y restas el cuádruplo del número, obtienes siempre 10, sea cual sea el número inicial.**

$[(x+3)\cdot 2-1]\cdot 2-4x=(2x+6-1)\cdot 2-4x=4x+10-4x=10$

Operaciones con monomios

10 **Indica el grado de cada uno de los siguientes monomios:**

a) $5x^2$

b) $\frac{3}{4}x$

c) $-7xy$

d) $\frac{3}{4}a^5$

e) a^2b^4

f) $-\frac{1}{2}a^3b^3$

a) 2

b) 1

c) 2

d) 5

e) 6

f) 6

11 **Reduce:**

a) $3x + 2x + x$

b) $5x^2 + 2x^2$

c) $3x - 5 + 2x + 4$

d) $x^2 + x + x^2 + x$

e) $3x^2 - x^2 + 5 - 7$

f) $3x + x^2 - 2x - x^2 + 3$

a) $6x$

b) $7x^2$

c) $5x - 1$

d) $2x^2 + 2x$

e) $2x^2 - 2$

f) $x + 3$

12 **Quita paréntesis y reduce:**

a) $(x - 1) - (x - 5)$

b) $2x + (1 + x)$

c) $5x - (3x - 2)$

d) $(3x - 4) + (3x + 4)$

e) $(1 - x) - (1 - 2x)$

f) $(2 - 5x) - (3 - 7x)$

a) $(x - 1) - (x - 5) = x - 1 - x + 5 = 4$

b) $2x + (1 + x) = 2x + 1 + x = 3x + 1$

c) $5x - (3x - 2) = 5x - 3x + 2 = 2x + 2$

d) $(3x - 4) + (3x + 4) = 3x - 4 + 3x + 4 = 6x$

e) $(1 - x) - (1 - 2x) = 1 - x - 1 + 2x = x$

f) $(2 - 5x) - (3 - 7x) = 2 - 5x - 3 + 7x = 2x - 1$

PÁGINA 139

13 **Opera y reduce:**

a) $2x \cdot 7x$

b) $12x \cdot \frac{1}{4}x^2$

c) $2x \cdot 3x \cdot (-x)$

d) $(-5x) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^2\right)$

e) $x^8 : x^6$

f) $6x^4 : 3x^3$

g) $(-6x^5) : (2x)$

h) $\left(\frac{2}{3}x^4\right) : \left(\frac{1}{3}x^2\right)$

a) $14x^2$

b) $3x^3$

c) $-6x^3$

d) $3x^3$

e) x^2

f) $2x$

g) $-3x^4$

h) $2x^2$

Operaciones con polimonios

14 **Reduce las siguientes expresiones:**

a) $2 - 5x^2 + 7x^2 - 2x + 6$

b) $(x + 1) - (x - 1) + x$

c) $(2x^2 - 3x - 8) + (x^2 - 5x + 10)$

d) $(2x^2 - 3x - 8) - (x^2 - 5x + 10)$

a) $2x^2 - 2x + 8$

b) $x + 2$

c) $3x^2 - 8x + 2$

d) $x^2 + 2x - 18$

15 **Quita paréntesis y reduce:**

a) $(5x^2 - 6x + 7) - (4x^2 - 5x + 6)$

b) $(x^2 - 4x - 5) + (x^2 + 3x - 1)$

c) $(2x^2 - 5x + 3) + (3x^2 + 5x) + (x^2 + x - 3)$

d) $(x^2 - 4) + (x + 5) - (x^2 - x)$

a) $(5x^2 - 6x + 7) - (4x^2 - 5x + 6) = 5x^2 - 6x + 7 - 4x^2 + 5x - 6 = x^2 - x + 1$

b) $(x^2 - 4x - 5) + (x^2 + 3x - 1) = x^2 - 4x - 5 + x^2 + 3x - 1 = 2x^2 - x - 6$

c) $(2x^2 - 5x + 3) + (3x^2 + 5x) + (x^2 + x - 3) =$

$= 2x^2 - 5x + 3 + 3x^2 + 5x + x^2 + x - 3 = 6x^2 + x$

d) $(x^2 - 4) + (x + 5) - (x^2 - x) = x^2 - 4 + x + 5 - x^2 + x = 2x + 1$

16 △△△ **Reduce:**

a) $(2x^2 - 5x + 6) - 2(x^2 - 3x + 3)$

b) $2(5x^2 - 4x + 2) - (8x^2 - 7x + 4)$

c) $3(x - 2) - 2(x - 1) - (x + 1)$

d) $2(x^2 - 1) + 4(2x - 1) - 11x$

a) $(2x^2 - 5x + 6) - 2(x^2 - 3x + 3) = 2x^2 - 5x + 6 - 2x^2 + 6x - 6 = x$

b) $2(5x^2 - 4x + 2) - (8x^2 - 7x + 4) = 10x^2 - 8x + 4 - 8x^2 + 7x - 4 = 2x^2 - x$

c) $3(x - 2) - 2(x - 1) - (x + 1) = 3x - 6 - 2x + 2 - x - 1 = -5$

d) $2(x^2 - 1) + 4(2x - 1) - 11x = 2x^2 - 2 + 8x - 4 - 11x = 2x^2 - 3x - 6$

17 △△△ **Considera los polinomios:**

$$A = x^3 - 5x + 4, \quad B = 3x^2 + 2x + 6 \quad \text{y} \quad C = x^3 - 4x - 8$$

Calcula:

a) $A + B$

b) $A - B$

c) $A - C$

d) $B + C$

e) $A + B + C$

f) $A - B - C$

a) $A + B = x^3 + 3x^2 - 3x + 10$

b) $A - B = x^3 - 3x^2 - 7x - 2$

c) $A - C = -x + 12$

d) $B + C = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$

e) $A + B + C = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 2$

f) $A - B - C = -3x^2 - 3x + 6$

18 △△△ **Completa las casillas vacías:**

a)
$$\begin{array}{r} x^2 + \square - 9 \\ + \square + 2x + \square \\ \hline 4x^2 + 8x - 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \square - 5x^2 - 6x + \square \\ + 2x^3 - 3x^2 + \square - 8 \\ \hline 5x^3 - \square - 2x - 1 \end{array}$$

a)
$$\begin{array}{r} x^2 + 6x - 9 \\ 3x^2 + 2x + 7 \\ \hline 4x^2 + 8x - 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 3x^3 - 5x^2 - 6x + 7 \\ 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8 \\ \hline 5x^3 - 8x^2 - 2x - 1 \end{array}$$

19 Calcula:

a)
$$\begin{array}{r} 3x^2 + 5x - 6 \\ \times \qquad 3x - 5 \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \\ \times \qquad\qquad x + 2 \\ \hline \end{array}$$

a)
$$\begin{array}{r} 3x^2 + 5x - 6 \\ \times \qquad 3x - 5 \\ \hline -15x^2 - 25x + 30 \\ 9x^3 + 15x^2 - 18x \qquad \\ \hline 9x^3 + 0 \quad - 43x + 30 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \\ \times \qquad\qquad x + 2 \\ \hline 4x^3 + 10x^2 - 6x + 2 \\ 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x \qquad \\ \hline 2x^4 + 9x^3 + 7x^2 - 5x + 2 \end{array}$$

20 Calcula:

a) $3x \cdot (x^3 - 2x + 5)$

b) $(x + 2) \cdot (x - 5)$

c) $(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 2x - 3)$

d) $(x^3 - 5x^2 + 1) \cdot (x^2 - 3x + 1)$

a) $3x \cdot (x^3 - 2x + 5) = 3x^4 - 6x^2 + 15x$

b) $(x + 2) \cdot (x - 5) = x^2 - 5x + 2x - 10 = x^2 - 3x - 10$

c) $(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 2x - 3) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x^2 - 4x + 6 = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 6$

d) $(x^3 - 5x^2 + 1) \cdot (x^2 - 3x + 1) = x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^4 + 15x^3 - 5x^2 + x^2 - 3x + 1 =$
$= x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 3x + 1$

21 Completa las casillas vacías:

a)
$$\begin{array}{r} \square - x + 3 \\ \times \qquad \square - \square \\ \hline - \square + \square - 15 \\ \square - 2x^2 + \square \qquad \\ \hline \square - 12x^2 + \square - \square \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \square - \square - \square - 1 \\ \times \qquad \square - \square - \square \\ \hline - \square + \square + \square + 2 \\ - \square + \square + \square + 3x \qquad \\ x^5 - 2x^4 - 5x^3 - x^2 \qquad\qquad \\ \hline \square - \square - \square + \square + \square + \square \end{array}$$

a)
$$\begin{array}{r} 2x^2 - x + 3 \\ \times \qquad 2x - 5 \\ \hline -10x^2 + 5x - 15 \\ 4x^3 - 2x^2 + 6x \qquad \\ \hline 4x^3 - 12x^2 + 11x - 15 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 5x - 1 \\ \times \qquad x^2 - 3x - 2 \\ \hline -2x^3 + 4x^2 + 10x + 2 \\ -3x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 3x \qquad \\ x^5 - 2x^4 - 5x^3 - x^2 \qquad\qquad \\ \hline x^5 - 5x^4 - x^3 + 18x^2 + 13x + 2 \end{array}$$

22 **Reduce:**

a) $x \cdot (5x - 4) - 2 \cdot (x^2 - x)$

b) $(2x + 1) \cdot x^2 - (x - 1) \cdot x^2$

c) $(3x - 1) \cdot (x + 1) - (x + 1) \cdot (2x - 1)$

d) $(2x - 3)\ (x + 1) - (x^2 - x - 4)$

e) $(2x^2 + 3) - (x - 1) \cdot (2 + 2x)$

a) $x \cdot (5x - 4) - 2 \cdot (x^2 - x) = 5x^2 - 4x - 2x^2 + 2x = 3x^2 - 2x$

b) $(2x + 1) \cdot x^2 - (x - 1) \cdot x^2 = 2x^3 + x^2 - x^3 + x^2 = x^3 + 2x^2$

c) $(3x - 1) \cdot (x + 1) - (x + 1) \cdot (2x - 1) = 3x^2 + 3x - x - 1 - 2x^2 + x - 2x + 1 = x^2 + x$

d) $(2x - 3)\ (x + 1) - (x^2 - x - 4) = 2x^2 + 2x - 3x - 3 - x^2 + x + 4 = x^2 + 1$

e) $(2x^2 + 3) - (x - 1) \cdot (2 + 2x) = 2x^2 + 3 - 2x - 2x^2 + 2 + 2x = 5$

PÁGINA 140

24 **Calcula:**

a) $(15x - 10) : 5$

b) $(12x^2 - 18x + 6) : 6$

c) $(x^4 + 5x^2 - 6x) : x$

d) $(2x^4 + 5x^3) : x^2$

e) $(2x^3 - 6x^2 + 8x) : 2x$

f) $(5x^3 - 10x^2 + 15x) : 5x$

a) $3x - 2$

b) $2x^2 - 3x + 1$

c) $x^3 + 5x - 6$

d) $2x^2 + 5x$

e) $x^2 - 3x + 4$

f) $x^2 - 2x + 3$

25 **Opera y reduce:**

a) $12x^2 : (6x \cdot 2x)$

b) $(12x^2 : 6x) \cdot 2x$

c) $(24x^3) : [(4x^2) : (2x)]$

d) $[(24x^3) : (4x^2)] : (2x)$

e) $[x^3 - (x^3 - x^2)] : x^2$

f) $(18x^2) : [6 - 3(3x + 2)]$

a) $12x^2 : (6x \cdot 2x) = 12x^2 : 12x^2 = 1$

b) $(12x^2 : 6x) \cdot 2x = 2x \cdot 2x = 4x^2$

c) $(24x^3) : [(4x^2) : (2x)] = 24x^3 : 2x = 12x^2$

d) $[(24x^3) : (4x^2)] : (2x) = 6x : 2x = 3$

e) $[x^3 - (x^3 - x^2)] : x^2 = (x^3 - x^3 + x^2) : x^2 = x^2 : x^2 = 1$

f) $(18x^2) : [6 - 3(3x + 2)] = 18x^2 : (6 - 9x - 6) = 18x^2 : (-9x) = -2x$

Productos notables y extracción de factor común

26 **Calcula sin hacer la multiplicación y, luego, comprueba multiplicando:**

a) $(x+6)^2$ **b)** $(8+a)^2$

c) $(3-x)^2$ **d)** $(ba-3)^2$

e) $(x+4)\cdot(x-4)$ **f)** $(y-a)(y+a)$

g) $(2x-3)^2$ **h)** $(3a-5b)^2$

i) $(3x-5)^2$ **j)** $(2x+1)\cdot(2x-1)$

k) $\left(\frac{2}{3}-x\right)^2$ **l)** $(x^2+y)^2$

a) $x^2+12x+36$ b) $64+16a+a^2$

c) $9-6x+x^2$ d) $(ba)^2-6ba+9$

e) x^2-16 f) y^2-a^2

g) $4x^2-12x+9$ h) $9a^2-30ab+25b^2$

i) $9x^2-30x+25$ j) $4x^2-1$

k) $\frac{4}{9}-\frac{4}{3}x+x^2$ l) $x^4+2x^2y+y^2$

27 **Transforma cada expresión en un cuadrado:**

a) x^2+6x+9 **b)** $x^2-10x+25$

c) x^2+2x+1 **d)** $x^2+x+\frac{1}{4}$

e) $4x^2-4x+1$ **f)** $9x^2-12x+4$

a) $(x+3)^2$ b) $(x-5)^2$

c) $(x+1)^2$ d) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

e) $(2x-1)^2$ f) $(3x-2)^2$

28 **Extrae factor común en estas sumas:**

a) $5a+5b-5c$ **b)** $3a-4ab+2ac$

c) x^2+2x **d)** $2x-4y$

e) $3x+6y+9$ **f)** $6x^2-3x^2+9x^3$

g) $3x - 6x^2 + 9x^3$ **h)** $x^2 - 10x^4 + 2x^8$

i) $6a^2b + 4ab^2$ **j)** $x^2y - y^2x$

k) $15x^4 + 5x^3 + 10x^2$ **l)** $10x^3y^2 - 2x^2y + 4y^4x$

a) $5(a + b - c)$ b) $a(3 - 4b + 2c)$

c) $x(x + 2)$ d) $2(x - 2y)$

e) $3(x + 2y + 3)$ f) $3x^2(2 - 1 + 3x)$

g) $3x(1 - 2x + 3x^2)$ h) $x^2(1 - 10x^2 + 2x^6)$

i) $2ab(3a + 2b)$ j) $xy(x - y)$

k) $5x^2(3x^2 + x + 2)$ l) $2xy(5x^2y - x + 2y^3)$

29 **Utiliza los productos notables y la extracción de factores comunes para descomponer en factores las siguientes expresiones:**

a) $x^2 + 2xy + y^2$ **b)** $4a^2b^4 - 4ab^2 + 1$

c) $4x^2 - 4x + 1$ **d)** $3x^3 - 3x$

e) $6x^2 - 9x^3$ **f)** $5x^2 + 10x + 5$

g) $4x^2 - 25$ **h)** $16x^6 - 64x^5 + 64x^4$

i) $5x^4 + 10x^3 + 5x^2$ **j)** $x^4 - x^2$

k) $3x^2 - 27$ **l)** $3x^3 - 18x^2 + 27x$

m) $x^4 - 1$ **n)** $x^4 - 2x^2 + 1$

a) $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

b) $4a^2b^4 - 4ab^2 + 1 = (2ab^2 - 1)^2$

c) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

d) $3x^3 - 3x = 3x(x^2 - 1) = 3x(x + 1)(x - 1)$

e) $6x^2 - 9x^3 = 3x^2(2 - 3x)$

f) $5x^2 + 10x + 5 = 5(x + 1)^2$

g) $4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$

h) $16x^6 - 64x^5 + 64x^4 = 16x^4(x^2 - 4x + 4) = 16x^4(x - 2)^2$

i) $5x^4 + 10x^3 + 5x^2 = 5x^2(x^2 + 2x + 1) = 5x^2(x + 1)^2$

j) $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1)$

k) $3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x + 3)(x - 3)$

l) $3x^3 - 18x^2 + 27x = 3x(x^2 - 6x + 9) = 3x(x - 3)^2$

m) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

n) $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = [(x - 1)(x + 1)]^2 = (x - 1)^2 (x + 1)^2$

30 ▲▲▲ **Saca factor común en el numerador y en el denominador y después simplifica:**

a) $\dfrac{4 - 6x}{6x^2 - 9x^3}$ b) $\dfrac{5x^2 + 10x}{x + 2}$

c) $\dfrac{x^3 + x^2}{2x^3 - 3x^2}$ d) $\dfrac{3x^3 - x^2}{x^3 + 2x^2}$

e) $\dfrac{a^2 + ab + a}{b^2 + ab + b}$ f) $\dfrac{x^3 - x}{5x^2 - 5}$

g) $\dfrac{x^2 + x}{2x^3 + 2x^2}$ h) $\dfrac{x^2y - x^3y^2}{x^2y^2}$

a) $\dfrac{4 - 6x}{6x^2 - 9x^3} = \dfrac{2(2 - 3x)}{3x^2(2 - 3x)} = \dfrac{2}{3x^2}$

b) $\dfrac{5x^2 + 10x}{x + 2} = \dfrac{5x(x + 2)}{x + 2} = 5x$

c) $\dfrac{x^3 + x^2}{2x^3 - 3x^2} = \dfrac{x^2(x + 1)}{x^2(2x - 3)} = \dfrac{x + 1}{2x - 3}$

d) $\dfrac{3x^3 - x^2}{x^3 + 2x^2} = \dfrac{x^2(3x - 1)}{x^2(x + 2)} = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$

e) $\dfrac{a^2 + ab + a}{b^2 + ab + b} = \dfrac{a(a + b + 1)}{b(b + a + 1)} = \dfrac{a}{b}$

f) $\dfrac{x^3 - x}{5x^2 - 5} = \dfrac{x(x^2 - 1)}{5(x^2 - 1)} = \dfrac{x}{5}$

g) $\dfrac{x^2 + x}{2x^3 + 2x^2} = \dfrac{x(x + 1)}{2x^2(x + 1)} = \dfrac{1}{2x}$

h) $\dfrac{x^2y - x^3y^2}{x^2y^2} = \dfrac{x^2y(1 - xy)}{x^2y^2} = \dfrac{1 - xy}{y}$

31 ▲▲▲ **Descompón en factores los numeradores y los denominadores, teniendo en cuenta los productos notables, y después simplifica:**

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

b) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

c) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2}$

d) $\dfrac{2x^2 - 8}{x + 2}$

e) $\dfrac{2x + 1}{4x^2 + 4x + 1}$

f) $\dfrac{2x^4 - 2x^3}{4x^4 - 4x^2}$

g) $\dfrac{3x^4 - 9x^2}{x^2 - 3}$

h) $\dfrac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 + x^2 + x}$

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{(x + 1)^2}{(x + 1)\,(x - 1)} = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

b) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{(x + 2)\,(x - 2)}{(x - 2)^2} = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

c) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} = \dfrac{(x + y)\,(x - y)}{(x - y)^2} = \dfrac{x + y}{x - y}$

d) $\dfrac{2x^2 - 8}{x + 2} = \dfrac{2\,(x^2 - 4)}{(x + 2)} = \dfrac{2\,(x + 2)\,(x - 2)}{x + 2} = 2\,(x - 2)$

e) $\dfrac{2x + 1}{4x^2 + 4x + 1} = \dfrac{2x + 1}{(2x + 1)^2} = \dfrac{1}{2x + 1}$

f) $\dfrac{2x^4 - 2x^3}{4x^4 - 4x^2} = \dfrac{2x^3\,(x - 1)}{4x^2\,(x^2 - 1)} = \dfrac{x\,(x - 1)}{2\,(x^2 - 1)} = \dfrac{x\,(x - 1)}{2\,(x + 1)\,(x - 1)} = \dfrac{x}{2\,(x + 1)}$

g) $\dfrac{3x^4 - 9x^2}{x^2 - 3} = \dfrac{3x^2\,(x^2 - 3)}{x^2 - 3} = 3x^2$

h) $\dfrac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 + x^2 + x} = \dfrac{3\,(x^2 + x + 1)}{x\,(x^2 + x + 1)} = \dfrac{3}{x}$

PÁGINA 141

PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

33 Calcula la suma de los 50 primeros números naturales:

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 49 + 50}$$

$$\begin{array}{r}
S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 49 + 50 \\
S = 50 + 49 + 48 + 47 + \ldots + 2 + 1 \\
\hline
2S = 51 + 51 + 51 + 51 + \ldots + 51 + 51
\end{array}$$

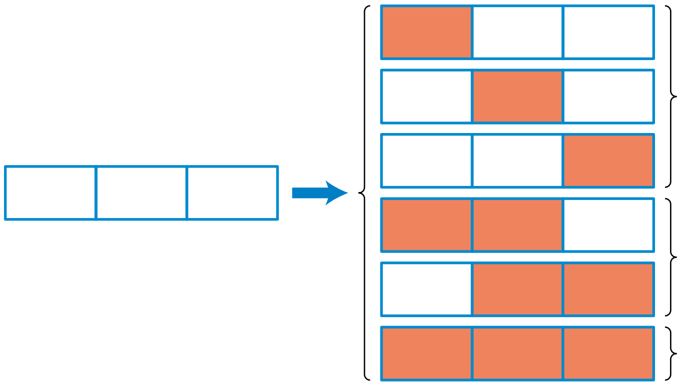
$$2S = 50 \cdot 51 = 2\,550 \to S = 1\,275$$

34 Completa la tabla siguiente:

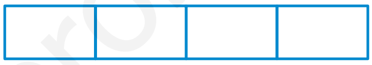
SUMANDOS		CÁLCULO	TOTAL
1	1		
2	1 + 2		
3	1 + 2 + 3		
4	1 + 2 + 3 + 4		
5	1 + 2 + 3 + 4 + 5		
…	…		
10	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10	(10 · 11) : 2	55
50	1 + 2 + 3 + … + 50		
n	1 + 2 + 3 + … + n		

SUMANDOS		CÁLCULO	TOTAL
1	1	1	1
2	1 + 2	(2 · 3) : 2	3
3	1 + 2 + 3	(3 · 4) : 2	6
4	1 + 2 + 3 + 4	(4 · 5) : 2	10
5	1 + 2 + 3 + 4 + 5	(5 · 6) : 2	15
…	…	…	…
10	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10	(10 · 11) : 2	55
50	1 + 2 + 3 + … + 50	(50 · 51) : 2	1 275
n	1 + 2 + 3 + … + n	$n(n + 1) : 2$	$(n^2 + n) \cdot 2$

35 **En esta figura formada por tres rectángulos elementales, se pueden apreciar 6 rectángulos de diferentes tamaños.**

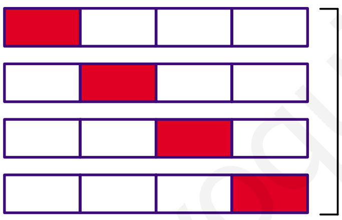


¿Cuántos rectángulos de diferentes tamaños hay en una figura formada por cuatro rectángulos elementales?

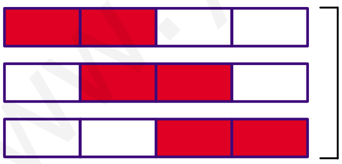


¿Y si son cinco los rectángulos elementales? ¿Y si son seis?… ¿Y si son n**?**

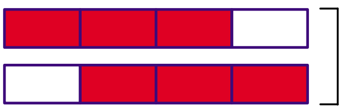
- Figura con 4 rectángulos elementales:



4 rectángulos de 1 módulo



3 rectángulos de 2 módulos

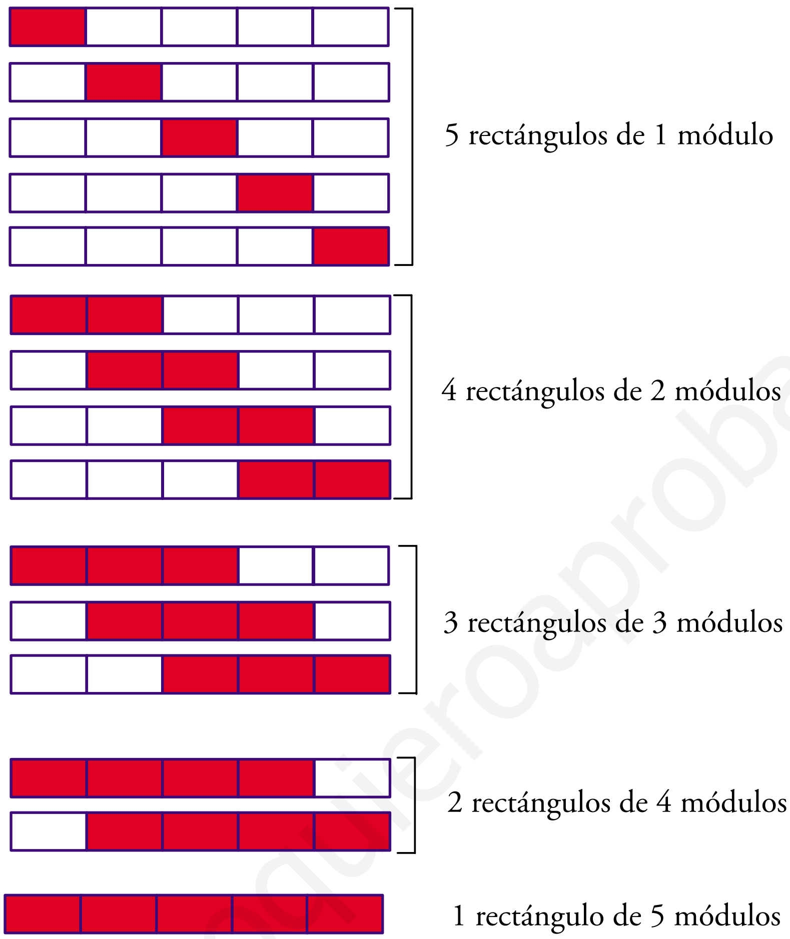


2 rectángulos de 3 módulos

1 rectángulo de 4 módulos

Total: 4 + 3 + 2 + 1 = 10

- Figura con 5 rectángulos elementales:



Total: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

- Figura con n rectángulos elementales:

  Tendrá, en total:

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} \text{ rectángulos}$$

PÁGINA 159

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Primeras ecuaciones

1 $4x - 1 = 7$

$4x = 8 \rightarrow x = 2$

2 $2 - 5x = 12$

$-5x = 10 \rightarrow x = -2$

3 $4 - 3x = 4$

$-3x = 0 \rightarrow x = 0$

4 $5x + 3 = 3$

$5x = 0 \rightarrow x = 0$

5 $11 = 5 + 4x$

$4x = 6 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

6 $0 = 21 - 7x$

$7x = 21 \rightarrow x = 3$

7 $13x - 5 - 6x = 9$

$7x = 14 \rightarrow x = 2$

8 $6 - x = 3 - 4x$

$3 = -3x \rightarrow x = -1$

9 $2x - 5 + x = 1 + 3x - 6$

$3x - 5 = 3x - 5$

$0 = 0$

Cualquier solución es válida.

10 $1 - 8x + 5 = 11 - 3x$

$6 - 8x = 11 - 3x \to 5x = -5 \to x = -1$

11 $7x + 2x = 2x + 1 + 6x$

$9x = 8x + 1 \to x = 1$

12 $2x + 8 - 9x = 7 + 2x - 2$

$-7x + 8 = 2x + 5 \to 9x = -3 \to x = -\frac{1}{3}$

13 $10 - 15x + 2 = 10x + 5 - 11x$

$12 - 15x = 5 - x \to 14x = 7 \to x = \frac{1}{2}$

14 $3 - (1 - 6x) = 2 + 4x$

$2 + 6x = 2 + 4x \to x = 0$

15 $3(x - 1) - 4x = 5 - (x + 7)$

$3x - 3 - 4x = 5 - x - 7 \to -x - 3 = -2 - x \to -3 = -2$

No tiene solución.

16 $2x - 2(x - 1) + 5 = 4 - 3(x + 1)$

$2x - 2x + 2 + 5 = 4 - 3x - 3 \to 7 = 1 - 3x \to -3x = 6 \to x = -\frac{6}{3} = -2$

17 $5(2x - 3) - 8x = 14x - 3(4x + 5)$

$10x - 15 - 8x = 14x - 12x - 15 \to 2x = 2x \to 0 = 0$

Infinitas soluciones.

18 $3(x - 2) - 5\,(2x - 1) - 2(3x + 4) + 10 = 0$

$3x - 6 - 10x + 5 - 6x - 8 + 10 = 0 \to -13x + 1 = 0 \to x = \frac{1}{13}$

19 $5x - 2(3x - 4) = 25 - 3(5x + 1)$

$5x - 6x + 8 = 25 - 15x - 3 \rightarrow -x + 8 = 22 - 15x \rightarrow 14x = 14 \rightarrow x = 1$

20 $3(4x - 1) - 2(5x - 3) = 11 - 2x$

$12x - 3 - 10x + 6 = 11 - 2x \rightarrow 2x + 3 = 11 - 2x \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2$

Ecuaciones de primer grado con denominadores

21 $5 - \frac{x}{2} = 3x - 16$

$10 - x = 6x - 32 \rightarrow 7x = 42 \rightarrow x = 6$

22 $x - \frac{x}{3} = 2x - \frac{2}{3}$

$3x - x = 6x - 2 \rightarrow 4x = 2 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

23 $\frac{x}{2} - \frac{x}{6} = \frac{4}{3}$

$3x - x = 8 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$

24 $\frac{x}{5} - \frac{x}{8} = \frac{3}{4}$

$8x - 5x = 30 \rightarrow 3x = 30 \rightarrow x = 10$

25 $x - \frac{1}{2} = \frac{5x}{8} - \frac{3}{4}$

$8x - 4 = 5x - 6 \rightarrow 3x = -2 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$

26 $\frac{x}{2} + \frac{1}{5} - \frac{x}{6} = \frac{3x}{10} + \frac{8}{15}$

$15x + 6 - 5x = 9x + 16 \rightarrow 10x + 6 = 9x + 16 \rightarrow x = 10$

27 $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$4x - 6 + 2x + 3 = 6x - 3 \rightarrow 6x - 3 = 6x - 3 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Infinitas soluciones

28 $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{5} = \dfrac{2x}{15} + 7$

$15x - 10x + 6x = 4x + 210 \ \to\ 7x = 210 \ \to\ x = 30$

29 $\dfrac{3x - 1}{2} = \dfrac{5x - 4}{3}$

$9x - 3 = 10x - 8 \ \to\ x = 5$

30 $\dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{5}{2x - 4}$

$2x - 4 = 5x + 5 \ \to\ 3x = -9 \ \to\ x = -3$

32 $1 + \dfrac{x - 1}{2} = 3x$

$2 + x - 1 = 6x \ \to\ x + 1 = 6x \ \to\ 5x = 1 \ \to\ x = \dfrac{1}{5}$

33 $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x - 2}{4} = 1$

$2x + x - 2 = 4 \ \to\ 3x = 6 \ \to\ x = 2$

34 $1 - \dfrac{x + 2}{3} = x$

$3 - x - 2 = 3x \ \to\ 4x = 1 \ \to\ x = \dfrac{1}{4}$

35 $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x + 2}{9} = \dfrac{x}{3}$

$3x - x - 2 = 3x \ \to\ x = -2$

36 $x - \dfrac{x - 5}{2} = 4$

$2x - x + 5 = 8 \ \to\ x = 3$

PÁGINA 160

37 $\dfrac{x - 7}{4} + \dfrac{x - 1}{3} = x - 5$

$3x - 21 + 4x - 4 = 12x - 60 \ \to\ 7x - 25 = 12x - 60 \ \to\ 5x = 35 \ \to\ x = 7$

38 $3 - \frac{2x}{5} = x - \frac{3x-1}{2}$

$30 - 4x = 10x - 15x + 5 \rightarrow 25 = -x \rightarrow x = -25$

39 $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 1$

$3x - 3 - 2x - 2 = 6 \rightarrow x - 5 = 6 \rightarrow x = 11$

40 $\frac{x-1}{5} - \frac{1-x}{6} = \frac{x-1}{4}$

$12x - 12 - 10 + 10x = 15x - 15 \rightarrow 22x - 22 = 15x - 15 \rightarrow 7x = 7 \rightarrow x = 1$

41 $\frac{3x-2}{5} - \frac{2x-1}{3} = \frac{5x-7}{15}$

$9x - 6 - 10x + 5 = 5x - 7 \rightarrow -x - 1 = 5x - 7 \rightarrow 6x = 6 \rightarrow x = 1$

42 $\frac{4}{3}(1 - 2x) + \frac{5}{4}(2x - 1) = \frac{7}{12}(x - 2)$

$16(1 - 2x) + 15(2x - 1) = 7(x - 2) \rightarrow 16 - 32x + 30x - 15 = 7x - 14 \rightarrow$

$\rightarrow 1 - 2x = 7x - 14 \rightarrow 9x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{9}$

43 $\frac{2(x+1)}{3} - \frac{1-x}{5} = x + \frac{3}{10}$

$20(x + 1) - 6 + 6x = 30x + 9 \rightarrow 20x + 20 - 6 + 6x = 30x + 9 \rightarrow$

$\rightarrow 26x + 14 = 30x + 9 \rightarrow 4x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{4}$

44 $2\left(5x - \frac{x-4}{3}\right) = 4x$

$10x - \frac{2x-8}{3} = 4x \rightarrow 30x - 2x + 8 = 12x \rightarrow 16x = -8 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

45 $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{x+1}{4}\right) = \frac{5}{6}$

$\frac{2}{3}\left(\frac{2-x-1}{4}\right) = \frac{5}{6} \rightarrow \frac{1}{6}(1 - x) = \frac{5}{6} \rightarrow 1 - x = 5 \rightarrow x = -4$

46 $\frac{2}{x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$12 - 3x = x \rightarrow 12 = 4x \rightarrow x = 3$

47 $\frac{11}{x} - \frac{3}{5} = \frac{3}{x} + 1$

$55 - 3x = 15 + 5x \rightarrow 8x = 40 \rightarrow x = 5$

Problemas para resolver con ecuaciones de primer grado

48 **Si un número lo multiplico por 4 me da lo mismo que si le sumo 9. ¿Cuál es ese número?**

- *El número* $\longrightarrow x$
  El número por cuatro $\longrightarrow 4x$
  El número más 9 $\longrightarrow x + 9$

$\boxed{\text{EL NÚMERO} \times \text{CUATRO}} = \boxed{\text{EL NÚMERO + NUEVE}}$

$4x = x + 9$

$3x = 9 \rightarrow x = 3$

49 **Halla un número tal que su doble aumentado en una unidad sea igual que su triple disminuido en tres unidades.**

$2x + 1 = 3x - 3$

$x = 4$

50 **La suma de dos números es 44 y su diferencia es 8. Calcula dichos números.**

- *El número menor* $\rightarrow x$
  El número mayor $\rightarrow x + 8$

$\boxed{\text{LA SUMA DE AMBOS NÚMEROS}} = \boxed{44}$

$x + (x + 8) = 44$

$2x + 8 = 44 \rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$

Los números son 18 y 26.

51 △△△ **La suma de dos números es 352 y su diferencia, 82. ¿Cuáles son esos números?**

$x + (x + 82) = 352$

$2x + 82 = 352 \rightarrow 2x = 270 \rightarrow x = 135$

Los números son 135 y 217.

52 △△△ **Un número es triple que otro y la diferencia de ambos es 26. ¿Cuáles son esos números?**

$3x - x = 26$

$2x = 26 \rightarrow x = 13$

Un número es 13 y otro es 39.

53 △△△ **Si a la quinta parte de un número se le añaden 9 unidades, se obtiene la mitad del número. ¿De qué número se trata?**

$\frac{1}{5}x + 9 = \frac{x}{2}$

$2x + 90 = 5x \rightarrow 3x = 90 \rightarrow x = 30$

54 △△△ **Calcula el número natural que, sumado a su siguiente, da 145.**

■ *Un número* $\rightarrow x$
Su siguiente $\rightarrow x + 1$

$x + (x + 1) = 145$

$2x + 1 = 145 \rightarrow 2x = 144 \rightarrow x = 72$

55 △△△ **La suma de tres números consecutivos es 144. ¿Cuáles son esos números?**

■ *Tres números consecutivos:* $\begin{cases} x - 1 \\ x \\ x + 1 \end{cases}$

$(x - 1) + x + (x + 1) = 144$

$3x = 144 \rightarrow x = 48$

Los números son 47, 48 y 49.

56 ▲△△ **Calcula tres números naturales consecutivos, sabiendo que su suma es igual al cuádruplo del menor.**

$(x - 1) + x + (x + 1) = 4\,(x - 1)$

$3x = 4x - 4 \;\rightarrow\; x = 4$

Los números son 3, 4 y 5.

57 ▲▲△ **Juanjo tiene el doble de edad que Raúl y Laura tres años más que Juanjo. Si la suma de sus edades es 38, ¿cuál es la edad de cada uno?**

$$\left.\begin{aligned} &\text{Raúl} \rightarrow x \\ &\text{Juanjo} \rightarrow 2x \\ &\text{Laura} \rightarrow 2x + 3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x + 2x + 2x + 3 = 38 \\ &5x = 35 \;\rightarrow\; x = 7 \end{aligned}$$

Raúl tiene 7 años, Juanjo, 14 años, y Laura, 17 años.

58 ▲▲△ **Juan tiene 28 años menos que su padre y 24 años más que su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno, sabiendo que entre los tres suman 100 años?**

$$\left.\begin{aligned} &\text{Padre} \rightarrow x + 28 \\ &\text{Juan} \rightarrow x \\ &\text{Hijo} \rightarrow x - 24 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x + 28 + x + x - 24 = 100 \\ &3x + 4 = 100 \;\rightarrow\; 3x = 96 \;\rightarrow\; x = 32 \end{aligned}$$

Juan tiene 32 años, su padre, 60 años, y su hijo, 8 años.

59 ▲▲△ **Melisa tiene el triple de edad que su hija Marta. Calcula la edad de cada una sabiendo que, dentro de 12 años, la edad de Melisa será solamente el doble que la de Marta.**

■

	EDAD HOY	EDAD DENTRO DE 12 AÑOS
MARTA	x	$x + 12$
MELISA	$3x$	$3x + 12$

EL DOBLE

$3x + 12 = 2\,(x + 12)$

$3x + 12 = 2x + 24 \;\rightarrow\; x = 12$

Marta tiene 12 años, y Melisa, 36.

60 ▲▲△ **Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 €. Si hubiera necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado 1 €. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo?**

■ *Bolígrafo* $\rightarrow x$

5 bolígrafos $\rightarrow 5x$

9 bolígrafos $\rightarrow 9x$

El dinero que tengo es: $5x + 2$ / $9x - 1$

$5x + 2 = 9x - 1$

$4x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Un bolígrafo cuesta 0,75 €.

$$0{,}75 \cdot 5 + 2 = 5{,}75$$

En el bolsillo lleva 5,75 €.

PÁGINA 161

61 **Reparte 1 000 € entre tres personas de forma que la primera reciba el doble que la segunda y esta el triple que la tercera.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Tercera} \rightarrow x \\ \text{Segunda} \rightarrow 3x \\ \text{Primera} \rightarrow 6x \end{array}\right\} 10x = 1\,000 \rightarrow x = 100$$

La primera recibirá 600 €, la segunda, 300 €, y la tercera, 100 €.

62 **En las rebajas compré tres camisas y dos pantalones por 126 €. Recuerdo que el precio de un pantalón era el doble que el de una camisa. ¿Puedes ayudarme a averiguar el precio de cada cosa?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Camisa} \rightarrow x \\ \text{Pantalón} \rightarrow 2x \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x + 2 \cdot 2x = 126 \\ 3x + 4x = 126 \rightarrow 7x = 126 \rightarrow x = 18 \end{array}$$

Una camisa vale 18 €, y un pantalón, 36 €.

63 **Sabemos que el perímetro de un rectángulo es de 50 m y que la base es 5 m más larga que la altura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Altura} \rightarrow x \\ \text{Base} \rightarrow x + 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x + 2(x + 5) = 50 \\ 2x + 2x + 10 = 50 \rightarrow 4x = 40 \rightarrow x = 10 \end{array}$$

La altura mide 10 m, y la base, 15 m.

64 △△△ **Calcular la longitud de los lados de un triángulo isósceles, sabiendo que el perímetro mide 50 cm y que el lado desigual es 7 cm menor que uno de los lados iguales.**

$(x - 7) + x + x = 50$

$3x - 7 = 50 \rightarrow 3x = 57 \rightarrow x = 19$

Los lados iguales miden 19 cm, y el desigual, 12 cm.

65 △△△ **Calcular las medidas de los ángulos de un triángulo sabiendo que son tres múltiplos consecutivos de doce.**

■ *Tres múltiplos consecutivos de 12:* $\begin{cases} 12(x-1) \\ 12x \\ 12(x+1) \end{cases}$

$12(x - 1) + 12x + 12(x + 1) = 180$

$12x - 12 + 12x + 12x + 12 = 180 \rightarrow 36x = 180 \rightarrow x = 5 \begin{cases} 12(5-1) = 48 \\ 12 \cdot 5 = 60 \\ 12 \cdot 6 = 72 \end{cases}$

Los ángulos miden 48°, 60° y 72°.

67 △△△ **Un peatón y un ciclista avanzan por una carretera, el uno hacia el otro, con velocidades de 6 km/h y 24 km/h, respectivamente. ¿Cuánto tardarán en encontrarse si la distancia que les separa es de 8 km?**

$6x + 24x = 8$

$30x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ h = 16 minutos

68 △△△ **Un camión sale de cierta población, por una autopista, a 80 km/h. Una hora más tarde, sale en su persecución un coche a 120 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarle?**

En una hora el camión recorre 80 km.

$$80x + 80 = 120x \rightarrow 40x = 80 \rightarrow x = 2$$

El coche alcanzará al camión al cabo de 2 horas de su salida.

69 △△△ **Un ciclista sale de cierta población, por carretera, a una velocidad de 22 km/h. Hora y media después, sale en su búsqueda una motocicleta a 55 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?**

En 1 h 30 min el ciclista recorre 33 km.

$$22x + 33 = 55x \rightarrow 33x = 33 \rightarrow x = 1$$

La motocicleta dará alcance al ciclista en una hora.

70 ▲▲△ **Dos trenes se encuentran respectivamente en las estaciones de dos ciudades separadas entre sí 132 km. Ambos parten a la misma hora, por vías paralelas, hacia la ciudad contraria.**

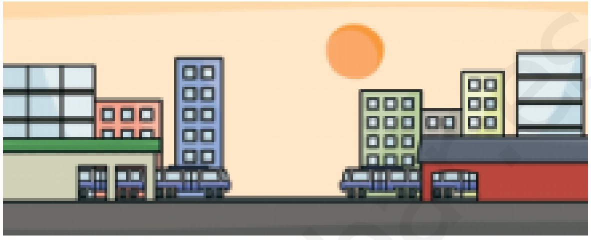
Si el primero va a 70 km/h y el segundo a 95 km/h, ¿cuánto tardarán en cruzarse?

$70x + 95x = 132$

$165x = 132 \rightarrow x = \dfrac{132}{165}$ h

$132 \cdot 60 = 7\,920$

$\dfrac{132}{165}$ h $= \dfrac{7\,920}{165}$ min $= 48$ min



Se cruzarán en 48 minutos.

71 ▲▲▲ **Un fabricante de queso ha mezclado cierta cantidad de leche de vaca a 0,50 €/litro con otra cantidad de leche de oveja a 0,80 €/litro, obteniendo 300 litros de mezcla a un precio de 0,70 €/litro. ¿Cuántos litros de cada clase empleó?**

$x \cdot 0{,}5 + (300 - x) \cdot 0{,}8 = 300 \cdot 0{,}7$

$0{,}5x + 240 - 0{,}8x = 210 \rightarrow -0{,}3x = -30 \rightarrow x = 100$

Ha mezclado 100 litros de 0,5 €/litro con 200 litros de 0,8 €/litro.

72 ▲▲▲ **¿Qué cantidades de café de 7,20 €/kg se han de mezclar con 8 kg de otra clase superior de 9,3 €/kg para obtener una mezcla que salga a un precio medio de 8,4 €/kg?**

$x \cdot 7{,}2 + 8 \cdot 9{,}3 = (x + 8) \cdot 8{,}4$

$7{,}2x + 74{,}4 = 8{,}4x + 67{,}2 \rightarrow 1{,}2x = 7{,}2 \rightarrow x = 6$

Hay que mezclar 6 kilos de 7,2 €/kg.

73 ▲▲▲ **Un hortelano planta dos tercios de su huerta de tomates y un quinto de pimientos. Si aún le quedan 400 m² sin cultivar, ¿cuál es la superficie total de la huerta?**

■ *Superficie total* $\rightarrow x \begin{cases} 2x/3 \rightarrow \textit{TOMATES} \\ x/5 \rightarrow \textit{PIMIENTOS} \\ 400\ m^2 \rightarrow \textit{RESTO} \end{cases}$

$x - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{5}x = 400$

$15x - 10x - 3x = 6\,000 \rightarrow 2x = 6\,000 \rightarrow x = 3\,000$

La huerta tiene 3 000 m².

PÁGINA 162

Ecuaciones de segundo grado

74 △△△ **Razona y resuelve:**

a) $x^2 = 121$
b) $x^2 = 80$
c) $5x^2 = 1\,000$
d) $9x^2 = 4$
e) $x^2 - 6 = 30$
f) $9x^2 - 16 = 0$
g) $3x^2 - 115 = 185$
h) $50 + 3x^2 = 5x^2$
i) $x(x + 5) = 0$
j) $5x^2 - 7x = 0$
k) $4x = 3x^2$
l) $x^2 + x = 3x - x^2$

a) $x = \sqrt{121} = \pm 11$

b) $x = \sqrt{80} = \pm 4\sqrt{5}$

c) $x^2 = \dfrac{1\,000}{5}$; $x^2 = 200$

$x = \sqrt{200} = \pm\, 10\sqrt{2}$

d) $x^2 = \dfrac{4}{9} \rightarrow x = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \pm\dfrac{2}{3}$

e) $x^2 = 36 \rightarrow x = \sqrt{36} = \pm 6$

f) $9x^2 = 16 \rightarrow x^2 = \dfrac{16}{9}$

$x = \sqrt{\dfrac{16}{9}} = \pm\dfrac{4}{3}$

g) $3x^2 = 300 \rightarrow x^2 = 100$

$x = \sqrt{100} = \pm 10$

h) $50 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \sqrt{25} = \pm 5$

i) $x = 0$

$x = -5$

j) $x(5x - 7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{7}{5} \end{cases}$

k) $3x^2 - 4x = 0$

$x(3x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

l) $2x^2 - 2x = 0 \rightarrow x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

75 △△△ **Resuelve aplicando la fórmula:**

a) $15x^2 + 2x - 8 = 0$
b) $3x^2 - 5x + 4 = 0$
c) $2x^2 - 5x + 2 = 0$
d) $9x^2 + 6x + 1 = 0$
e) $2x^2 - 5x - 7 = 0$
f) $3x^2 - 6x + 2 = 0$

a) $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 480}}{30} = \dfrac{-2 \pm 22}{30} \rightarrow \begin{cases} x = 2/3 \\ x = -4/5 \end{cases}$

b) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 48}}{2} \rightarrow$ No tiene solución

c) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \dfrac{5 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1/2 \end{cases}$

d) $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \dfrac{-6}{18} \rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$. Solución doble

e) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{4} = \dfrac{5 \pm 9}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 7/2 \\ x = -1 \end{cases}$

f) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

77 ▲▲△ **Reduce estas ecuaciones a la forma general y halla sus soluciones aplicando la fórmula:**

a) $(3x - 1)^2 = 0$

b) $(x - 5)^2 = 0$

c) $(x - 3) \cdot (x - 8) = 0$

d) $(2x - 1)(x + 4) = 0$

e) $(2x - 1)^2 = 25$

f) $x^2 - \dfrac{9}{10}x + \dfrac{1}{5} = 0$

g) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x}{3} = x - \dfrac{1}{6}$

h) $x + \dfrac{1}{2} = 3 - \dfrac{1}{x}$

i) $3x(x - 2) + 4 = 2x^2 - 1$

j) $2 - 5x = 5 + 2x(x + 1)$

k) $2(x^2 - 1) + 3x = 4x^2 - x$

l) $\dfrac{x^2 - 1}{3} = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2}$

m) $x\left(5x + \dfrac{9}{2}\right) = 4x(x + 1) + \dfrac{1}{2}$

n) $\dfrac{x^2}{3} + 2\left(\dfrac{x}{3} - 1\right) = \dfrac{x}{6}(x + 3)$

a) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$. Solución doble

b) $x^2 - 10x + 25 = 0$

$x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = 5$. Solución doble

c) $x^2 - 11x + 24 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 3 \end{cases}$$

d) $2x^2 + 7x - 4 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ x = -4 \end{cases}$$

e) $4x^2 - 4x + 1 = 25 \rightarrow 4x^2 - 4x - 24 = 0 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

f) $10x^2 - 9x + 2 = 0$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{20} = \frac{9 \pm 1}{20} \rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ x = 2/5 \end{cases}$$

g) $3x^2 + 10x = 6x - 1 \rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} \rightarrow \begin{cases} x = -1/3 \\ x = -1 \end{cases}$$

h) $2x^2 + x = 6x - 2 \rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

i) $3x^2 - 6x + 4 - 2x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

j) $2 - 5x - 5 - 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow 2x^2 + 7x + 3 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1/2 \end{cases}$$

k) $2x^2 - 2 + 3x - 4x^2 + x = 0 \rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1. \text{ Solución doble}$$

l) $2x^2 - 2 = 3x^2 - 6x + 3 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

m) $5x^2 + \frac{9x}{2} = 4x^2 + 4x + \frac{1}{2} \rightarrow 10x^2 + 9x - 8x^2 - 8x - 1 = 0 \rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

n) $\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} - 2 - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 4x - 12 - x^2 - 3x = 0 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \end{cases}$$

Problemas para resolver con ecuaciones de segundo grado

78 △△△ **La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 265. ¿De qué números estamos hablando?**

$x^2 + (x + 1)^2 = 265$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 265 = 0$

$2x^2 + 2x - 264 = 0$

$x^2 + x - 132 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 528}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-1 \pm 23}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = -12 \end{cases}$$

Los números son 11 y 12 ó –12 y –11.

79 △△△ **Calcula dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 1260.**

$x(x + 1) = 1\,260$

$x^2 + x - 1\,260 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 5\,040}}{2} = \frac{-1 \pm 71}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ x = -36 \end{cases}$$

Los números son 35 y 36 ó –36 y –35.

80 ▲▲△ **Si a un número aumentado en tres unidades se le multiplica por ese mismo número disminuido en otras tres, se obtiene 91. ¿De qué número se trata?**

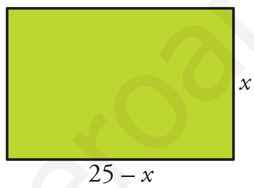
$(x + 3) \cdot (x - 3) = 91$

$x^2 - 9 - 91 = 0 \rightarrow x^2 - 100 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{100} \rightarrow x = \pm 10$

Hay dos soluciones: 10 y –10

PÁGINA 163

82 ▲▲▲ **El perímetro de un rectángulo mide 50 cm y el área 150 cm². Calcula las dimensiones del rectángulo.**



Si un lado del rectángulo mide x, el otro mide $\dfrac{50 - 2x}{2} = 25 - x$.

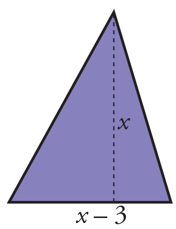
$\acute{A}rea = 150 \text{ cm}^2 \rightarrow x(25 - x) = 150$

$25x - x^2 = 150 \rightarrow x^2 - 25x + 150 = 0$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 15 \rightarrow (25 - x = 10) \\ x = 10 \rightarrow (25 - x = 15) \end{cases}$$

Los lados del rectángulo miden 10 cm y 15 cm.

83 ▲▲▲ **Calcula la longitud de la base de un triángulo sabiendo que:**
- **La base mide tres centímetros menos que la altura.**
- **La superficie del triángulo es igual a 35 cm².**



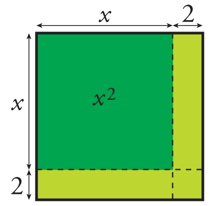
$$\frac{x(x - 3)}{2} = 35$$

$x^2 - 3x - 70 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 280}}{2} = \frac{3 \pm 17}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -7 \rightarrow \text{Solución no válida} \end{cases}$$

La altura del triángulo mide 10 cm, y la base, 7 cm.

84 ▲▲▲ **Al aumentar en dos centímetros el lado de un cuadrado, el área ha aumentado 24 cm².** **¿Cuál era el lado del cuadrado?**



$(x+2)^2 = x^2 + 24$

$x^2 + 4x + 4 - x^2 - 24 = 0 \rightarrow 4x - 20 = 0 \rightarrow x = 5$

El lado del cuadrado mide 5 cm.

85 ▲▲▲ **Para cercar una parcela rectangular de 1 000 m² de superficie se han necesitado 140 m de alambrada. ¿Cuáles son sus dimensiones?**

El perímetro de la parcela es de 140 m.

Si un lado mide x, el otro medirá $\dfrac{140 - 2x}{2} = 70 - x$.

$x(70 - x) = 1\,000$

$70x - x^2 - 1\,000 = 0 \rightarrow x^2 - 70x + 1\,000 = 0$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{4\,900 - 4\,000}}{2} = \frac{70 \pm 30}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 50 \rightarrow (70 - x = 20) \\ x = 20 \rightarrow (70 - x = 50) \end{cases}$$

Las dimensiones de la parcela son 50 m y 20 m.

PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

86 **Un estanque se alimenta de dos bocas de agua. Abriendo solamente la primera, el estanque se llena en 8 horas y, abriendo ambas, en 3 horas.**

¿Cuánto tarda en llenarse si se abre solo la segunda boca?

PRIMERA BOCA → Tarda 8 horas → En una hora llena $\frac{1}{8}$ de depósito.

SEGUNDA BOCA → Tarda x horas → En una hora llena $\frac{1}{x}$ de depósito.

LAS DOS JUNTAS → Tardan 3 horas → En una hora llenan $\frac{1}{3}$ de depósito.

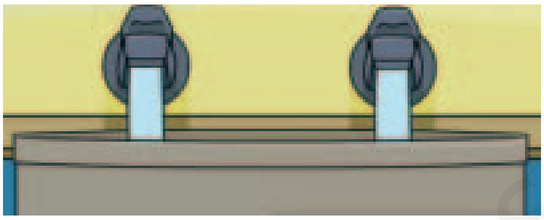
PARTE DEL ESTANQUE QUE LLENA LA PRIMERA BOCA EN UNA HORA	+	PARTE DEL ESTANQUE QUE LLENA LA SEGUNDA BOCA EN UNA HORA	=	PARTE DEL ESTANQUE QUE LLENAN ENTRE AMBAS EN UNA HORA

$\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3} \rightarrow 3x + 24 = 8x \rightarrow 5x = 24 \rightarrow x = \dfrac{24}{5}$

$\dfrac{24}{5}\text{ h} = \left(4 + \dfrac{4}{5}\right)\text{ h} = 4\text{ h } 48\text{ min}$

87 **Un depósito dispone de dos grifos, A y B. Abriendo solamente A, el depósito se llena en 3 horas. Abriendo ambos se llena en 2 horas.**

¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si se abre solamente el grifo B?



El grifo A en 1 hora llena $\frac{1}{3}$ del estanque.

El grifo B en 1 hora llena $\frac{1}{x}$ del estanque.

Entre los grifos A y B llenan, en 1 hora, $\frac{1}{2}$ del estanque.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow 2x + 6 = 3x \rightarrow x = 6$$

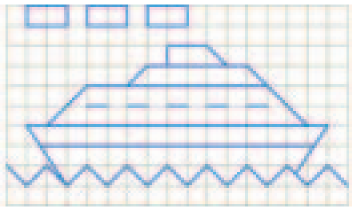
El grifo B llena el estanque en 6 horas.

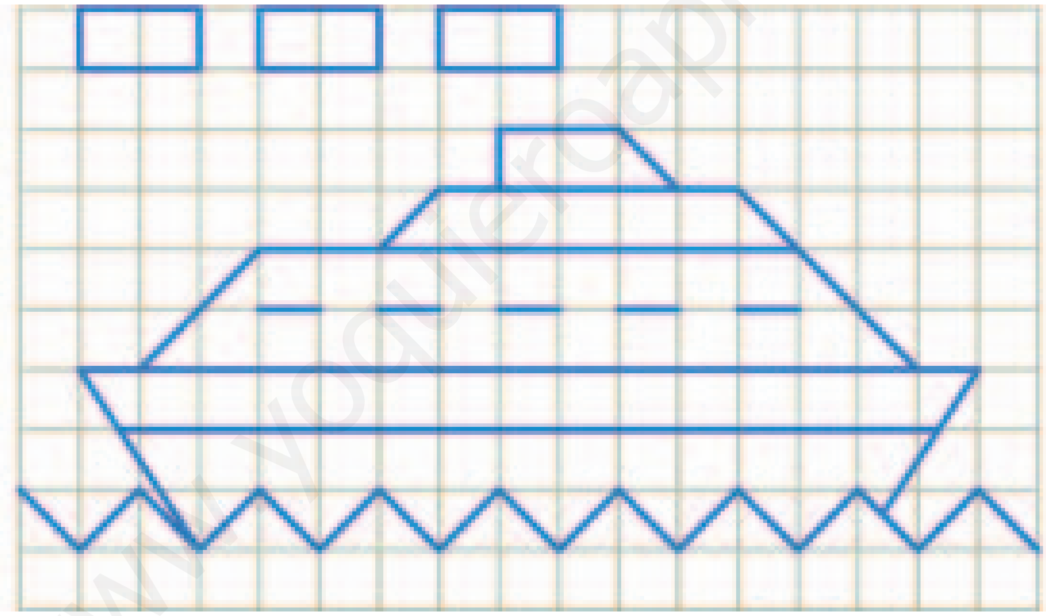
PÁGINA 180

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Semejanza de figuras

1 **Sobre un papel cuadriculado, haz un dibujo semejante a este ampliado al triple de su tamaño:**





2 **En un mapa a escala 1 :50 000 la distancia entre dos pueblos, P y Q, es 11 cm. ¿Cuál es la distancia real entre P y Q? La distancia real entre otros dos pueblos, M y N, es 18 km.**

¿A qué distancia estarán en el mapa?

- Distancia real entre P y Q:

  11 · 50 000 cm = 550 000 = 5,5 km

- Distancia en el mapa entre M y N:

  (18 km = 1 800 000 cm)

  1 800 000 : 50 000 = 36 cm

3 **Una maqueta de una avioneta hecha a escala 1:50 tiene las siguientes medidas:**

largo: 32 cm, ancho: 24 cm, alto: 8 cm

Halla las dimensiones reales del aparato.

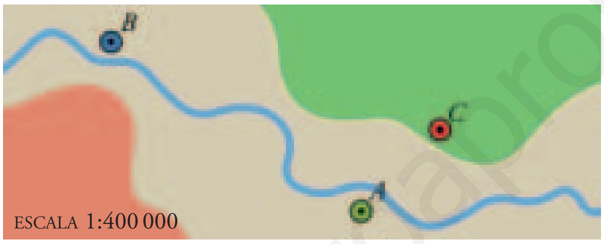
Largo $\rightarrow$ $32 \cdot 50 = 1\,600$ cm $= 16$ m

Ancho $\rightarrow$ $24 \cdot 50 = 1\,200$ cm $= 12$ m

Alto $\rightarrow$ $8 \cdot 50 = 400$ cm $= 4$ m

4 **Mide sobre el plano $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.**

Averigua cuáles son las verdaderas distancias entre esos tres pueblos.



	DISTANCIA EN EL PLANO		DISTANCIA REAL
$\overline{AB}$	4 cm	$\xrightarrow{\times 400\,000}$	16 km
$\overline{BC}$	4,5 cm	$\xrightarrow{\times 400\,000}$	18 km
$\overline{AC}$	1,7 cm	$\xrightarrow{\times 400\,000}$	6,8 km

5 **Sabiendo que la distancia real entre A y B (en línea recta) es 6,4 km, halla la escala y las distancias reales $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$.**

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \text{ en el planto} = 2 \text{ cm} \\ 6{,}4 \text{ km} = 640\,000 \text{ cm} \end{array}\right\} \quad \frac{2}{640\,000} = \frac{1}{320\,000}$$

Escala $\rightarrow$ $1:320\,000$

	DISTANCIA EN EL PLANO		DISTANCIA REAL
$\overline{AB}$	2,5 cm	$\xrightarrow{\times 320\,000}$	8 km
$\overline{CD}$	3,5 cm	$\xrightarrow{\times 320\,000}$	11,2 km
$\overline{AD}$	6,4 cm	$\xrightarrow{\times 320\,000}$	20,48 km

6 ▲△△ **La verdadera distancia de La Coruña a Gijón, en línea recta, es de 220 km. En un mapa la medimos con la regla y resulta ser de 11 cm. ¿Cuál es la escala del mapa?**

$$\frac{220 \text{ km}}{11 \text{ cm}} = \frac{22\,000\,000}{11} = 2\,000\,000$$

La escala es 1 : 2 000 000.

7 ▲△△ **Cecilia es la chica de la derecha y mide 161 cm.**

Calcula las estaturas de los otros tres.

Midiendo sobre la fotografía la estatura de los cuatro jóvenes (de los pies a la cabeza), obtenemos, de izquierda a derecha:

4,2 cm   4 cm   4,4 cm   3,6 cm

Conocemos la estatura real de Cecilia, 161 cm.

Por tanto:

$$\frac{161 \text{ cm}}{3{,}6 \text{ cm}} = 44{,}72 \text{ es la razón de semejanza}$$

La estatura real de los otros tres es, aproximadamente:

$4{,}2 \cdot 44{,}72 = 187{,}8$ cm

$4 \cdot 44{,}72 = 178{,}8$ cm

$4{,}4 \cdot 44{,}72 = 196{,}7$ cm

8 △△△ **Un rectángulo tiene unas dimensiones de 8 cm × 20 cm. El lado menor de otro rectángulo semejante a él, mide 6 cm. Halla:**

a) La razón de semejanza para pasar del primero al segundo.

b) El lado mayor del segundo.

c) Las áreas de ambos rectángulos.

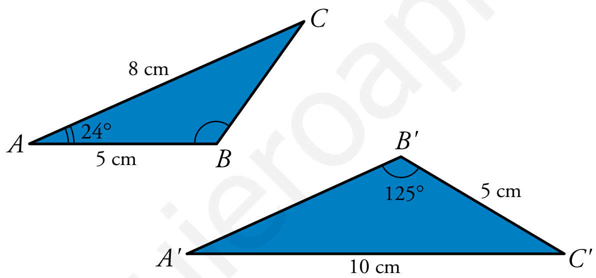
a) $= \dfrac{6 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = 0{,}75$

b) $20 \cdot 0{,}75 = 15$ cm

c) Área del primero $= 8 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 160 \text{ cm}^2$

Área del segundo $= 6 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 90 \text{ cm}^2$

9 △△△ **Nos aseguran que estos dos triángulos son semejantes:**



Halla los lados y los ángulos que les faltan a cada uno de ellos.

$\hat{A}' = \hat{A} = 24°$

$\hat{B} = \hat{B}' = 125°$

$\hat{C} = 180° - (24° + 125°) = 31° = \hat{C}$

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8 \quad \overline{AC} = \overline{A'C'} = 0{,}8$

$\overline{BC} = \overline{B'C'} \cdot 0{,}8 = 5 \cdot 0{,}8 = 4$ cm

$\overline{AB} = \overline{A'B'} \cdot 0{,}8 \rightarrow 5 = \overline{A'B'} \cdot 0{,}8 \rightarrow \overline{A'B'} = \dfrac{5}{0{,}8} = 6{,}25$ cm

10 △△△ **Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Se construye otro semejante a él cuyo lado menor mide 15 cm.**

a) ¿Cuál es la razón de semejanza?

b) Halla los otros dos lados del segundo triángulo.

c) El primer triángulo es rectángulo. ¿Podemos asegurar que el segundo también lo será?

a) $= \dfrac{15 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 5$

Razón de semejanza = 5

b) $4 \cdot 5 = 20$ cm

$5 \cdot 5 = 25$ cm

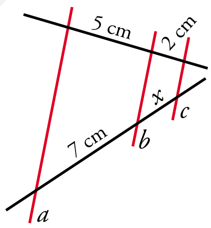
c) Dos triángulos semejantes tienen los ángulos respectivamente iguales. Por tanto, si uno es rectángulo, también lo es el otro.

PÁGINA 181

TEOREMA DE TALES

11 △△△ **Las rectas *a, b* y *c* son paralelas. Halla la longitud de *x*.**

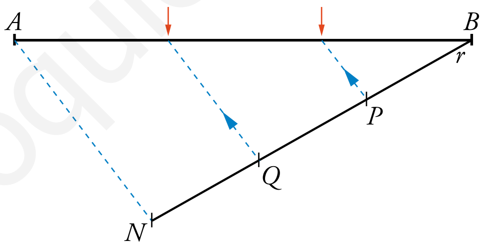
¿Qué teorema estás aplicando?



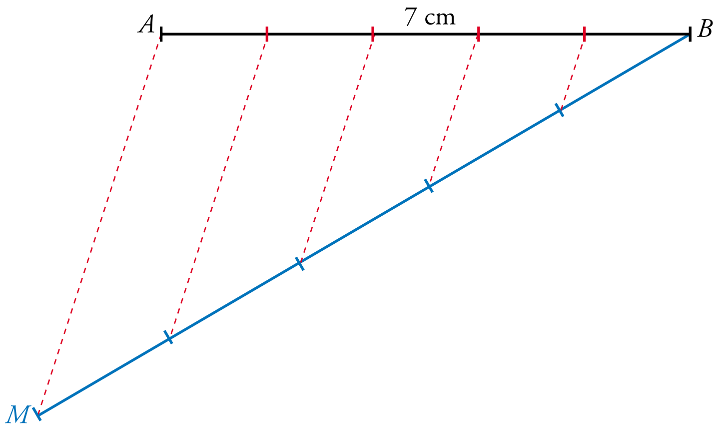
Aplicando el Teorema de Tales:

$$\frac{x}{2} = \frac{7}{5} \rightarrow x = \frac{14}{5} = 2{,}8 \text{ cm}$$

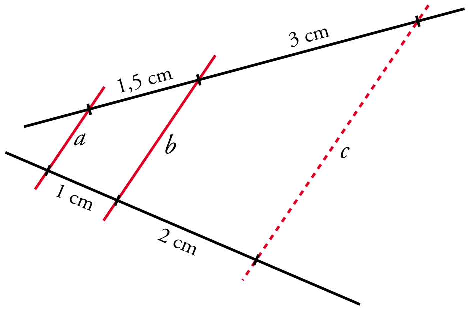
12 △△△ **Observa cómo se parte un segmento *AB* en tres partes iguales:**



Por uno de sus extremos se traza una recta r, cualquiera. Sobre ella, se toman tres segmentos iguales. Se unen *A* y *N*. Por *Q* y *P* se trazan paralelas a *AN*. Se obtienen así los puntos señalados con flechas, con los que se parte el segmento *AB* en tres trozos iguales. Traza un segmento *AB* de 7 cm y pártelo en cinco trozos iguales.



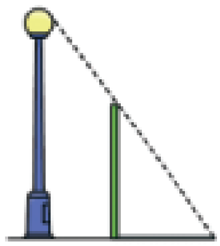
13 **Sabemos que las rectas *a* y *b* son paralelas. Teniendo en cuenta las medidas que se dan en el dibujo, ¿podemos asegurar que *c* es paralela a las rectas *a* y *b*? ¿En qué te basas?**



Las medidas en cada una de las rectas negras son proporcionales: $\dfrac{1}{1,5} = \dfrac{2}{3}$

Por tanto, la recta *c* es paralela a las rectas *a* y *b*.

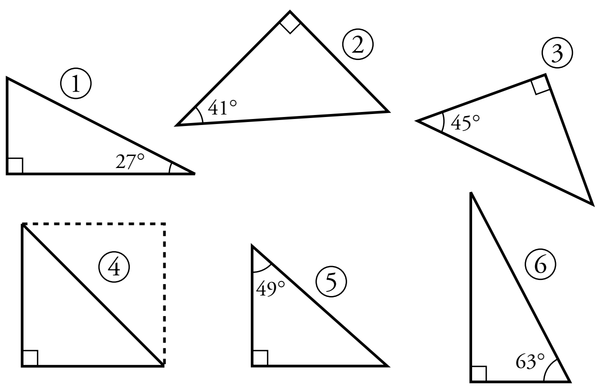
14 **Los triángulos formados por una farola, un poste vertical y su sombra están en posición de Tales. Justifícalo.**



Tienen un ángulo igual, el recto, y los lados opuestos a este ángulo, las hipotenusas, son paralelos.

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

15 **Explica por qué son semejantes dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual. Entre estos triángulos, hay algunos semejantes entre sí. Averigua cuáles son calculando previamente el ángulo que le falta a cada uno de ellos:**



Si dos triángulos son rectángulos y, además, tienen un ángulo agudo igual, entonces tienen tres ángulos iguales. Por tanto, son semejantes.

① 180° – 90° – 27° = 63°. El ángulo desconocido mide 63°.

② 180° – 90° – 41° = 49°. El ángulo desconocido mide 49°.

③ 180° – 90° – 45° = 45°. El ángulo desconocido mide 45°.

④ La hipotenusa es la diagonal de un cuadrado. Sus ángulos agudos miden 45° cada uno.

⑤ 180° – 90° – 49° = 41°. El ángulo desconocido mide 41°.

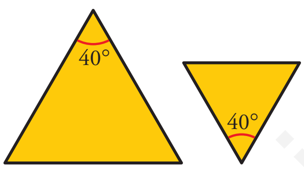
⑥ 180° – 90° – 63° = 27°. El ángulo desconocido mide 27°.

① es semejante a ⑥, pues sus dos ángulos agudos miden 27° y 63°.

② es semejante a ⑤, pues sus dos ángulos agudos miden 41° y 49°.

③ es semejante a ④, pues sus dos ángulos miden, ambos, 45°.

16 ▲▲△

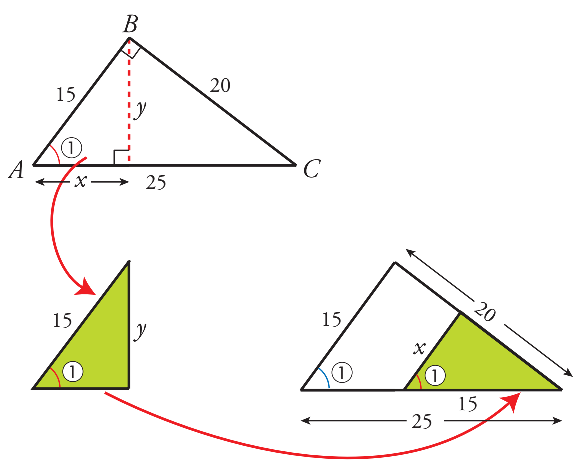


Explica por qué estos dos triángulos isósceles son semejantes partiéndolos en triángulos rectángulos.

Si dividimos cada triángulo isósceles, por el ángulo que conocemos, en dos triángulos rectángulos, los cuatro triángulos rectángulos tienen uno de sus ángulos agudos iguales, el de 20°.

17 ▲▲▲ **El triángulo grande** *ABC* **y el pequeño, rojo, son rectángulos. Explica por qué son semejantes.**

Puesto que son semejantes, los situamos en posición de Tales para que se aprecie cuáles son los lados correspondientes en la semejanza.



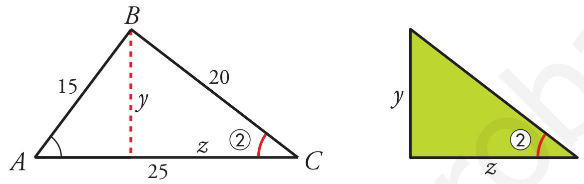
Halla los lados *x* e *y* del triángulo verde.

$\frac{x}{15} = \frac{15}{25} \to x = \frac{15 \cdot 15}{25} = 9$

$\frac{y}{20} = \frac{15}{25} \to y = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$

PÁGINA 182

18 **Procediendo como en el ejercicio anterior, calcula los lados *y*, *z* del triángulo verde.**



La hipotenusa del triángulo *ABC* es *AC*. Si los dos triángulos son semejantes:

$\frac{y}{15} = \frac{z}{20} = \frac{20}{25}$

$\frac{y}{15} = \frac{20}{25} \to y = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ cm

$\frac{z}{20} = \frac{20}{25} \to z = \frac{20 \cdot 20}{25} = 16$ cm

CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS SEMEJANTES

19 **Haz en tu cuaderno un pentágono irregular. Amplíalo al doble de su tamaño:**

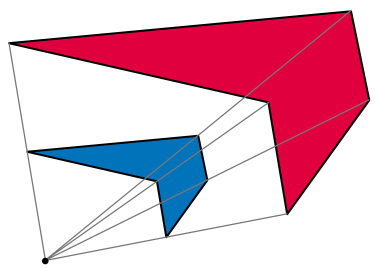
a) Proyectándolo desde un punto exterior.

b) Proyectándolo desde un punto interior.

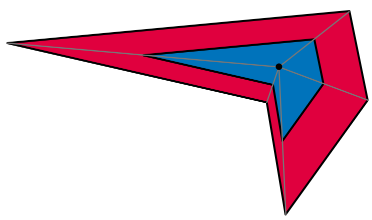
c) Proyectándolo desde uno de sus vértices.

Construcción libre. Por ejemplo:

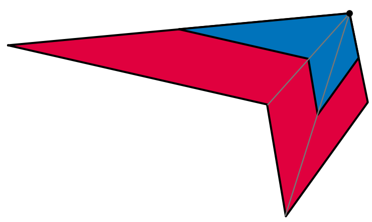
a)



b)

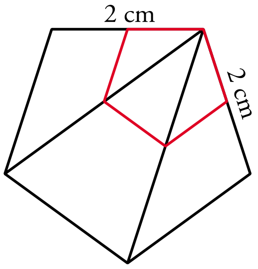


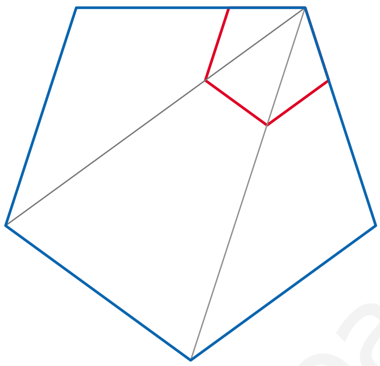
c)



20 △△△ **Para construir un pentágono regular de 2 cm de lado, copiamos un pentágono regular cualquiera (figura roja), alargamos dos de sus lados consecutivos hasta 2 cm y completamos una figura semejante a la roja con los lados paralelos.**

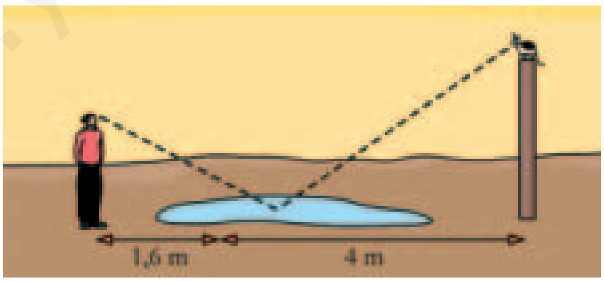
Calca en tu cuaderno el pentágono rojo y, procediendo como arriba, dibuja un pentágono regular de 3 cm de lado.





APLICACIONES DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

21 △△△ **El gato de Leticia se ha subido a un poste. Leticia puede ver a su gato reflejado en un charco. Toma las medidas que se indican en el dibujo y mide la altura de sus ojos: 144 cm. ¿A qué altura se encuentra el gato?**



Los triángulos formados por Leticia y el charco y el poste con el charco, son rectángulos. Además, los ángulos que forman con el charco son iguales. Luego, los dos triángulos son semejantes.

$$\frac{1,44}{1,6} = \frac{x}{4} \qquad x = \frac{4 \cdot 1,44}{1,6} = 3,6 \text{ m mide el poste}$$

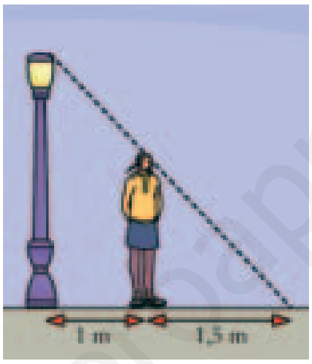
El gato se encuentra a 3,6 m de altura.

22 △△△ **Un gran pino, a las once de la mañana de un cierto día, arroja una sombra de 6,5 m. Próximo a él, una caseta de 2,8 m de altura proyecta una sombra de 70 cm. ¿Cuál es la altura del pino?**

$$\frac{x}{6{,}5} = \frac{2{,}8}{0{,}70} \rightarrow x = \frac{6{,}5 \cdot 2{,}8}{0{,}70} = 26 \text{ m}$$

El pino mide 26 m.

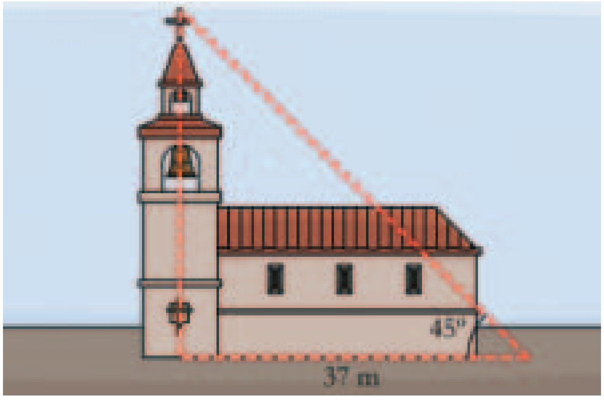
23 △△△ **Sabiendo que Amelia tiene una altura de 162 cm, halla la altura de la farola.**



$$\frac{162}{x} = \frac{150}{250} \rightarrow x = \frac{162 \cdot 250}{150} = 270 \text{ cm}$$

La farola mide 2,7 m.

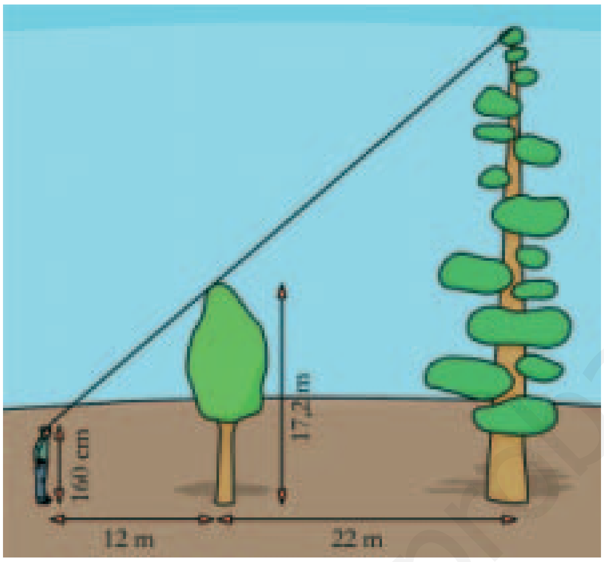
24 △△△ **¿Cuánto miden los ángulos de los triángulos rectángulos isósceles? Tenlo en cuenta para hallar la altura de la torre de la iglesia.**

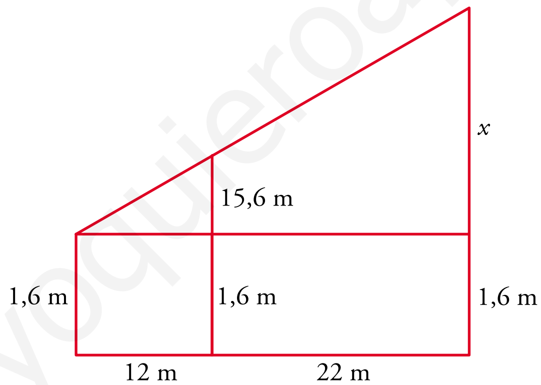


El triángulo que se ve es isósceles rectángulo: tiene un ángulo recto y dos ángulos de 45°. Los lados iguales son la base y la altura de la torre.

La altura de la torre es 37 m.

25 Halla la altura del árbol grande:





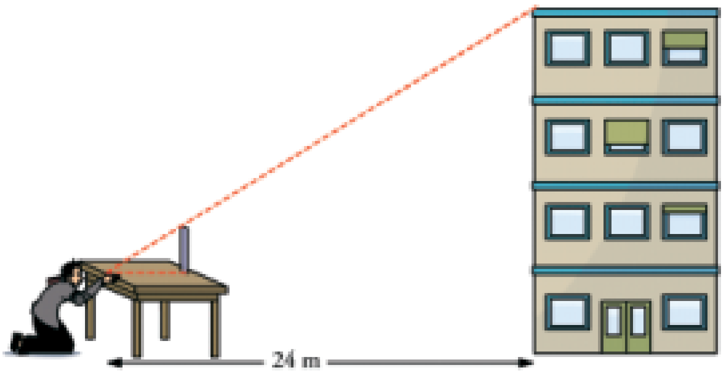
$$\frac{15{,}6}{x} = \frac{12}{12 + 22} \rightarrow \frac{15{,}6}{x} = \frac{12}{34} \rightarrow x = \frac{34 \cdot 15{,}6}{12} = 44{,}2 \text{ m}$$

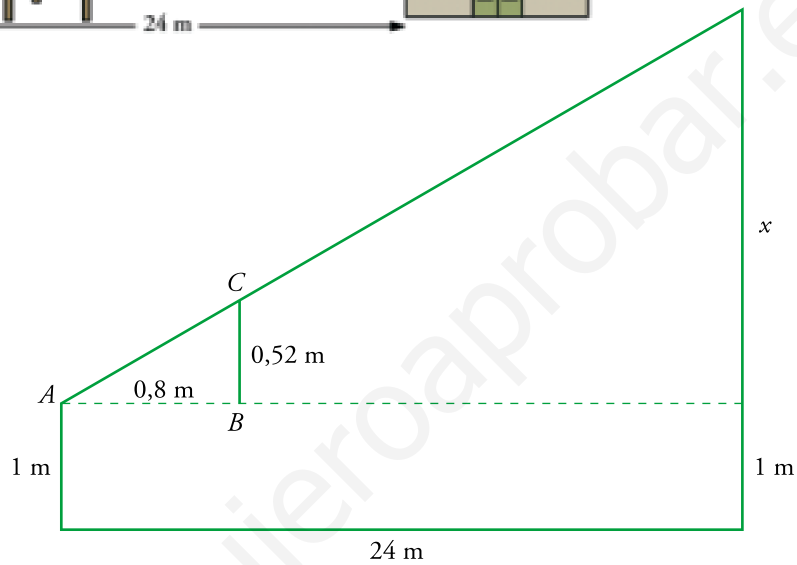
El árbol grande mide 44,2 m + 1,6 m = 45,8 m

PÁGINA 183

26 Halla la altura del edificio sabiendo que:

- La mesa tiene 1 m de altura.
- $\overline{AB}$ = 80 cm.
- $\overline{BC}$ = 52 cm.





$$\frac{0,52}{x} = \frac{0,8}{24} \rightarrow x = \frac{24 \cdot 0,52}{0,8} = 15,6 \text{ m}$$

La altura del edificio es de $15,6 + 1 = 16,6$ m.

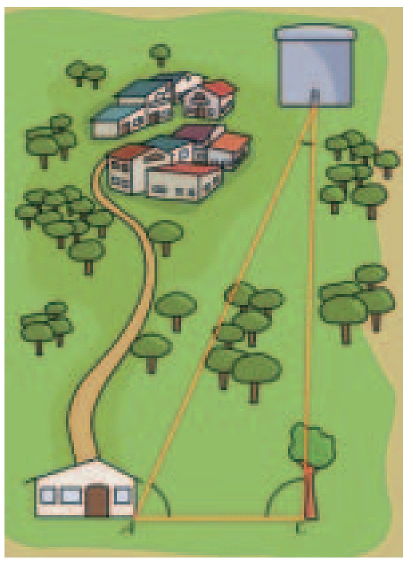
PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

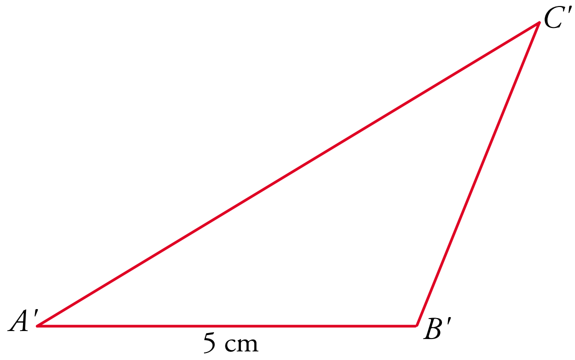
27 **Desde los extremos *A* y *B* de la recta de los 100 m de una pista de atletismo, se ve la torre de una iglesia.**

Medimos los ángulos $\hat{A} = 31°$ y $\hat{B} = 112°$.

Dibuja en tu cuaderno un triángulo semejante, $A'B'C'$, con $\overline{A'B'} = 5$ cm.

Midiendo $\overline{A'C'}$, calcula la distancia real, $\overline{AC}$.





Midiendo se obtiene $\overline{A'C'} = 7{,}8$ cm

Por tanto:

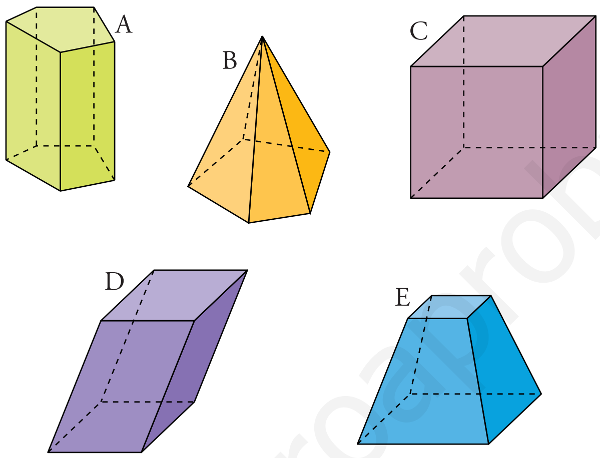
$$\frac{0{,}05 \text{ m}}{100 \text{ m}} = \frac{0{,}078 \text{ m}}{\overline{AC}} \to \overline{AC} = \frac{7{,}8}{0{,}05} = 156 \text{ m}$$

PÁGINA 200

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Tipos de poliedros

1 △△△ **Di, justificadamente, qué tipo de poliedro es cada uno de los siguientes:**



¿Hay entre ellos algún poliedro regular?

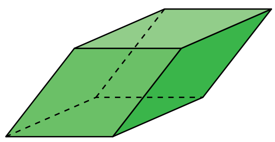
A → Prisma pentagonal recto. Su base es un pentágono.
B → Pirámide pentagonal. Su base es un pentágono.
C → Cubo. Sus caras son cuadrados.
D → Paralelepípedo. Sus caras son paralelogramos.
E → Tronco de pirámide regular. Sus bases son cuadrados.

Solo es poliedro regular el cubo.

2 △△△ **¿Una pirámide pentagonal regular es un poliedro regular? Explica por qué.**

No, porque no todas sus caras son polígonos regulares iguales.

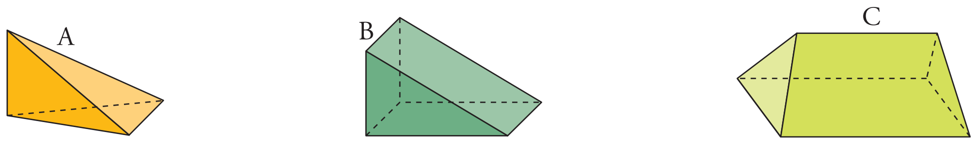
3 △△△ **Esta figura está formada por seis rombos idénticos.**



Aunque sus caras son iguales y concurren tres de ellas en cada vértice, no es un poliedro regular. Explica por qué.

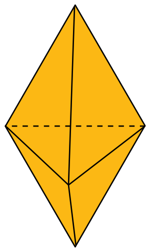
No es poliedro regular, porque sus caras no son polígonos regulares.

4 △△△ **Alguno de los siguientes poliedros no es catalogable entre los que ya conocemos. Señálalo y cataloga los demás.**



A es una pirámide de base triangular y *B* es un prisma de base triangular.
C no es un prisma, porque las bases no son paralelas.

5 △△△

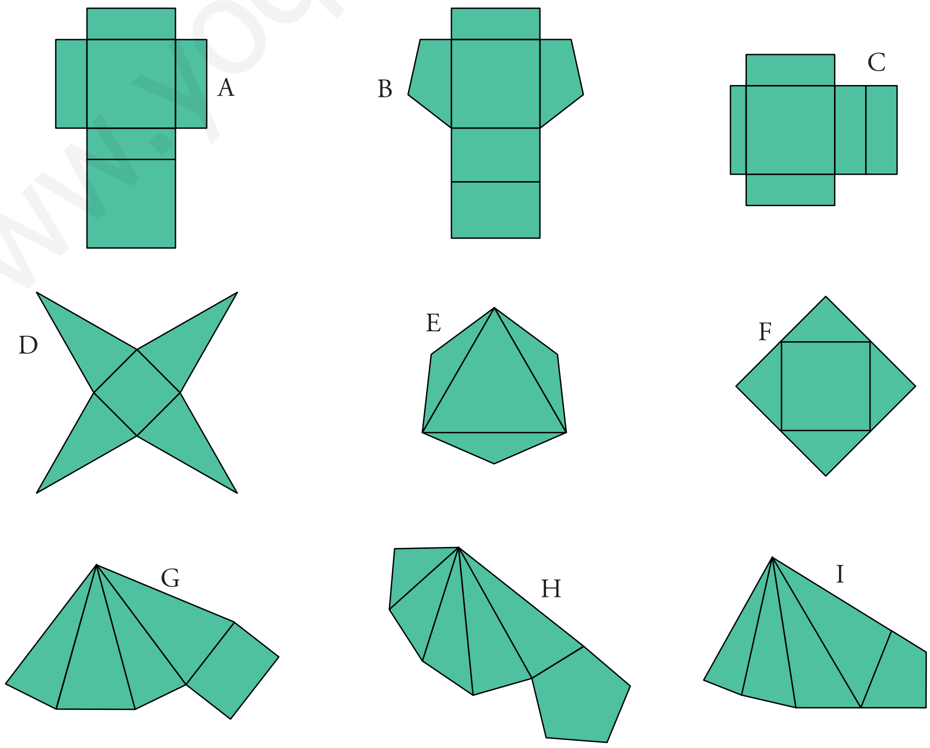


Este poliedro está formado por seis triángulos equiláteros iguales. Sin embargo, no es un poliedro regular. Explica por qué.

No es poliedro regular, porque en todos sus vértices no concurre el mismo número de caras: en unos vértices concurren tres caras y en otros, cuatro caras.

Desarrollo con poliedros

6 △△△ **¿Con cuáles de los siguientes desarrollos se puede completar un poliedro? Contesta razonadamente.**



A $\rightarrow$ Es un ortoedro.

B $\rightarrow$ Es un prisma cuadrangular.

C $\rightarrow$ No se puede construir un poliedro, pues la altura del poliedro no tiene la misma longitud que el lado lateral del rectángulo de la izquierda.

D $\rightarrow$ Es una pirámide cuadrangular regular.

E $\rightarrow$ Las caras laterales no pueden cerrarse.
No se puede construir un poliedro.

F $\rightarrow$ Las caras laterales no pueden cerrarse.
No se puede construir un poliedro.

G $\rightarrow$ Es una pirámide cuadrangular con base rectangular.

H $\rightarrow$ Las dos caras laterales extremas son de distinto tamaño y deberían coincidir.
No se puede construir un poliedro.

I $\rightarrow$ Sí se puede construir un poliedro. Es una pirámide cuadrangular inclinada.

7 ▲△△

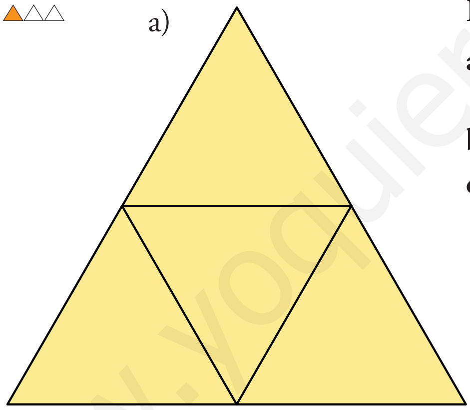
Dibuja el desarrollo de:

a) Un tetraedro regular de 3 cm de arista.

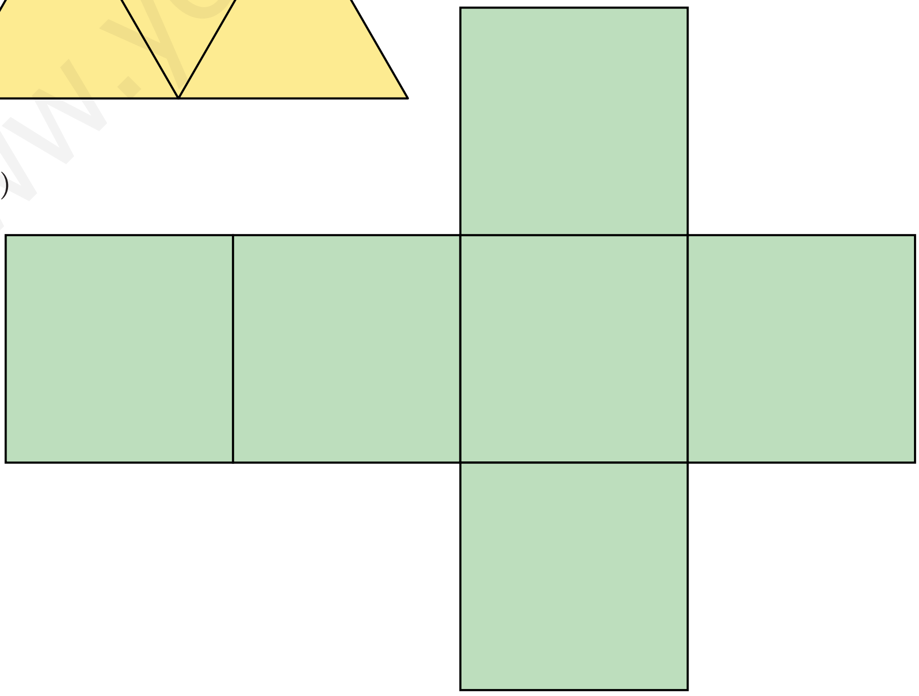
b) Un cubo de 3 cm de arista.

c) Un octaedro de 2 cm de arista.

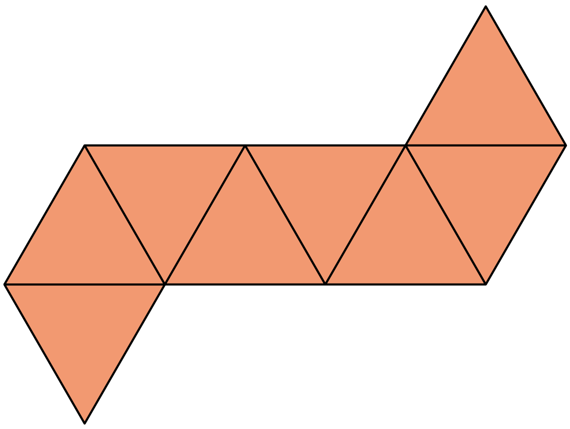
a)



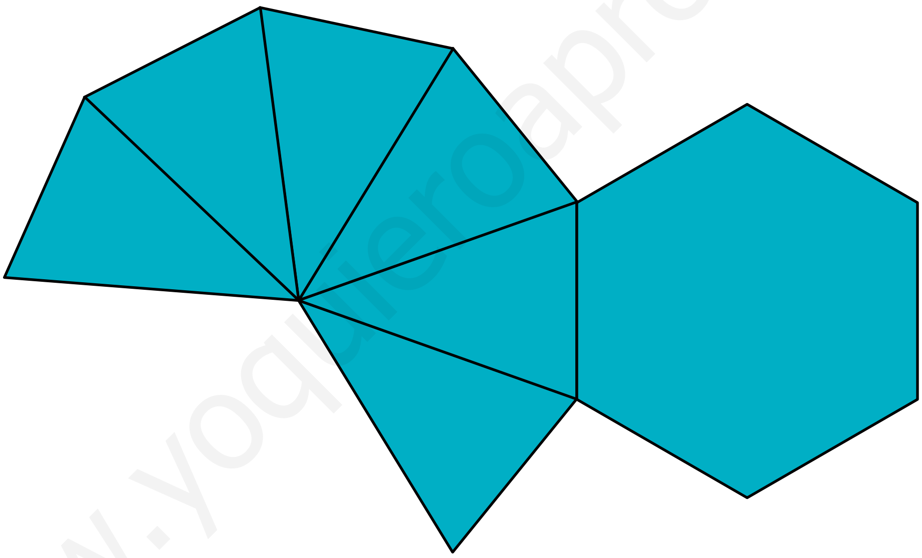
b)



c)



8 ▲△△ **Dibuja el desarrollo de una pirámide hexagonal regular cuyas aristas laterales midan 6 cm y las de la base 4 cm.**



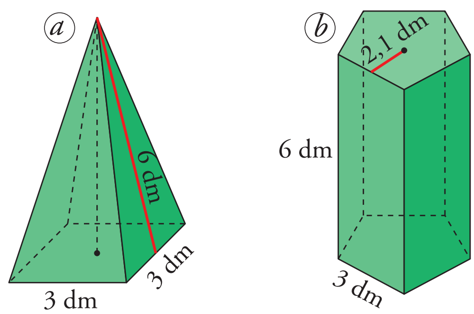
NOTA: El dibujo está reducido al 65%.

PÁGINA 201

Áreas sencillas

Halla el área total de los siguientes cuerpos geométricos:

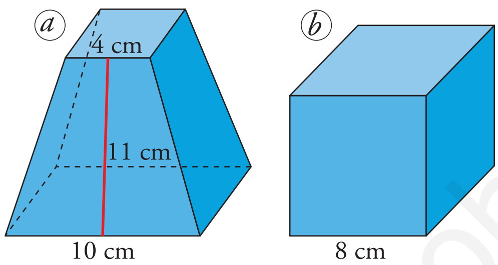
10 ▲△△



a) $A = 3^2 + 4\left(\dfrac{6 \cdot 3}{2}\right) = 9 + 36 = 45 \text{ dm}^2$

b) $A = 2 \cdot \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 2{,}1}{2} + 5\,(6 \cdot 3) = 31{,}5 + 90 = 121{,}5 \text{ dm}^2$

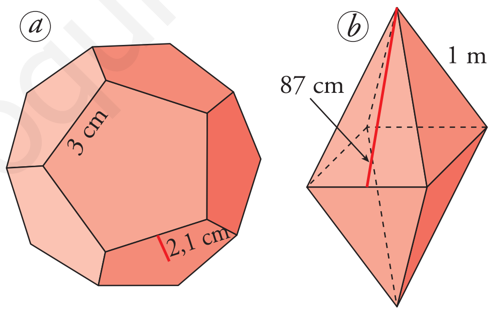
11



a) $A = 10^2 + 4^2 + 4\left(\dfrac{10 + 4}{2} \cdot 11\right) = 100 + 16 + 308 = 424 \text{ cm}^2$

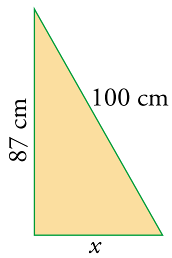
b) $A = 6 \cdot 8^2 = 384 \text{ cm}^2$

12



a) $A = 12\left(\dfrac{3 \cdot 5 \cdot 2{,}1}{2}\right) = 189 \text{ cm}^2$

b)



- Cálculo de la altura de una cara lateral:

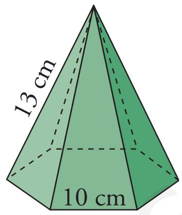
$x = \sqrt{100^2 - 87^2} = \sqrt{2\,431} = 49{,}3 \text{ cm}$

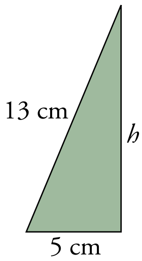
$2x = 98{,}6$

- $A_{total} = 8 \cdot \dfrac{98{,}6 \cdot 87}{2} = 34\,312{,}8 \text{ cm}^2 = 3{,}43128 \text{ m}^2$

Áreas con cálculos intermedios

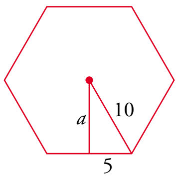
13 ▲▲△ **Halla el área total de una pirámide hexagonal regular con aristas laterales de 13 cm y aristas de la base de 10 cm.**





• Cálculo de la altura de una cara lateral:

$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm



• Cálculo de la apotema de la base:

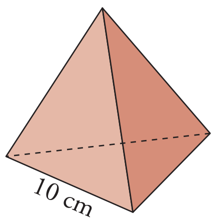
$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8,66$ cm

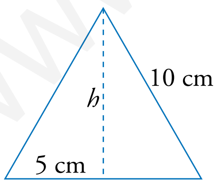
• $A_{base} = \dfrac{(10 \cdot 6) \cdot 8,66}{2} = 259,8 \text{ cm}^2$

• $A_{lat} = 6\left(\dfrac{10 \cdot 12}{2}\right) = 360 \text{ cm}^2$

• $A_{total} = 259,8 + 360 = 619,8 \text{ cm}^2$

14 ▲▲△ **Halla el área de un tetraedro regular de 10 cm de arista.**



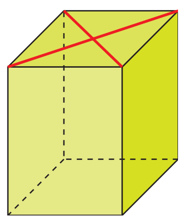


• Altura de una cara:

$h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8,66$ cm

• $A = 4\left(\dfrac{10 \cdot 8,66}{2}\right) = 173,2 \text{ cm}^2$

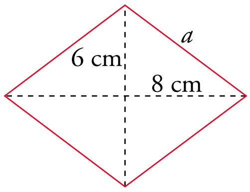
15 ▲▲△ **Halla el área total de un prisma recto de 15 cm de altura cuya base son rombos de diagonales 16 cm y 12 cm.**



• $A_{rombo} = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$

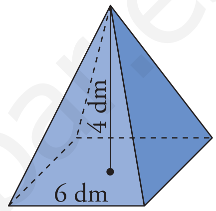
- Cálculo del lado del rombo:

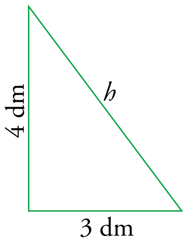
  $a = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm



- $A_{lat} = 4\,(10 \cdot 15) = 600$ cm^2
- $A_{total} = 2 \cdot 96 + 600 = 192 + 600 = 792$ cm^2

16 ▲△△ **La base de una pirámide regular es un cuadrado de 6 dm de lado. Su altura es de 4 dm. Hallar su área total.**





- Cálculo de la altura de una cara lateral:

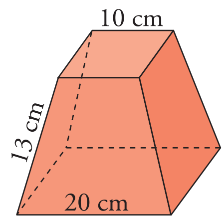
  $h = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ dm

- $A_{base} = 36$ dm^2

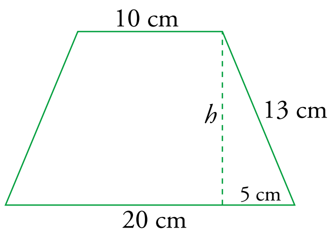
  $A_{lat} = 4\left(\dfrac{6 \cdot 5}{2}\right) = 60$ dm^2

- $A_{total} = 36 + 60 = 96$ dm^2

17 ▲△△ **Las bases de un tronco de pirámide regular son cuadrados de 10 cm y 20 cm de lado, respectivamente. Las aristas laterales son de 13 cm. Halla su área total.**



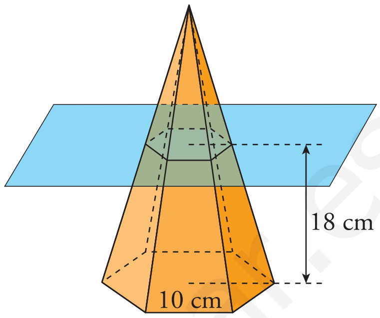
- Cálculo de la altura de una cara lateral:



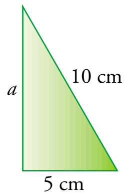
$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm

- $A_{bases} = 400$ cm^2 + 100 cm^2 = 500 cm^2
- $A_{lateral} = 4\left(\dfrac{20 + 10}{2} \cdot 12\right) = 720$ cm^2
- $A_{total} = 500 + 720 = 1\,220$ cm^2

18 △△△ **La base de esta pirámide regular es un hexágono de 10 cm de lado. Su altura es 24 cm. Se corta por un plano que pasa a 18 cm de la base. Halla el área total del tronco de pirámide que resulta.**



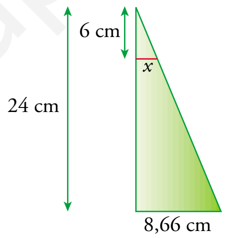
- Apotema de la base mayor:



$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8{,}66 \text{ cm}$$

- Apotema de la base menor:

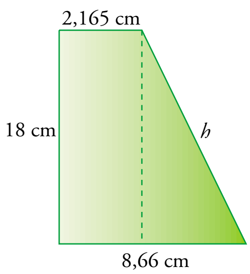
$$\frac{24}{8{,}66} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 8{,}66}{24} = 2{,}165 \text{ cm}$$



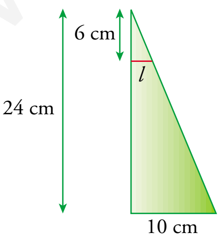
- Altura de la cara lateral:

$$h = \sqrt{18^2 + (6{,}495)^2} = \sqrt{324 + 42{,}185} =$$

$$= \sqrt{366{,}185} = 19{,}13 \text{ cm}$$



- Lado de la base menor:



$$\frac{24}{10} = \frac{6}{l} \rightarrow l = \frac{60}{24} = 2{,}5 \text{ cm}$$

- $A_{lat} = 6 \cdot \left(\frac{10 + 2{,}5}{2} \cdot 19{,}13\right) = 717{,}375 \text{ cm}^2$

$$A_{bases} = \frac{(6 \cdot 2{,}5) \cdot 2{,}165}{2} + \frac{(6 \cdot 10) \cdot 8{,}66}{2} = 16{,}238 + 259{,}8 = 276{,}038 \text{ cm}^2$$

- $Atotal = 993{,}413 \text{ cm}^2$

PÁGINA 202

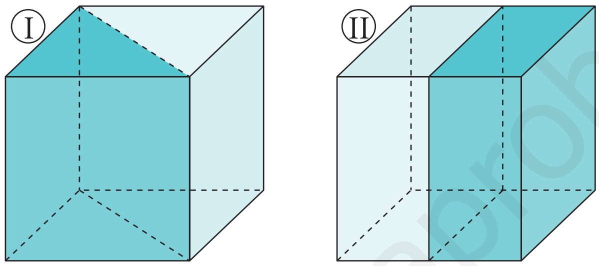
Problemas geométricos

19 △△△ **Contesta a las siguientes preguntas:**

a) Calcula el área total de un cubo de arista 4 cm.

b) Si lo partimos por la mitad como se indica en I, ¿cuál es el área de cada mitad?

c) Si lo partimos por la mitad como se indica en II, ¿cuál es el área de cada mitad?



a) $A = 6 \cdot 4^2 = 96 \text{ cm}^2$

b) $A_1 = \dfrac{96}{2} + 4 \cdot d$, donde d es la diagonal de una de sus caras.

$d = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5{,}66$; $A_1 = 48 + 4 \cdot 5{,}66 = 70{,}64 \text{ cm}^2$

c) $A_2 = \dfrac{96}{2} + 4^2 = 64 \text{ cm}^2$

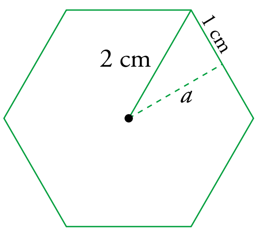
20 △△△ **Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 3 cm, 4 cm y 12 cm. Halla la longitud de su diagonal.**

Área total $= 2(3 \cdot 4 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 12) = 192 \text{ cm}^2$

Diagonal $= \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}$

21 △△△ **Halla el área total de un prisma hexagonal regular cuya arista lateral mide 4 cm y las aristas de la base, 2 cm.**

- Cálculo de la apotema de la base:

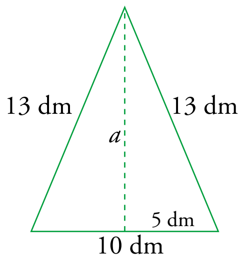


$a = \sqrt{2^2 - 1^2} = 1{,}73 \text{ cm}$

- *Área de la base* $= \dfrac{(2 \cdot 6) \cdot 1{,}73}{2} = 10{,}38 \text{ cm}^2$

- *Área total* $= 6 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 10{,}38 = 68{,}76 \text{ cm}^2$

22 **Halla el área total de una pirámide cuadrangular regular cuyas aristas miden: 10 dm las de la base y 13 dm las laterales.**



$a = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ dm

$\textit{Área de cada cara} = \dfrac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ dm}^2$

$A_{lat} = 4 \cdot 60 = 240 \text{ dm}^2$

$A_{total} = 240 + 10^2 = 340 \text{ dm}^2$

23 **¿Cuál es la superficie lateral de un prisma recto en el que tanto el perímetro de la base como la altura es de 12 cm?**

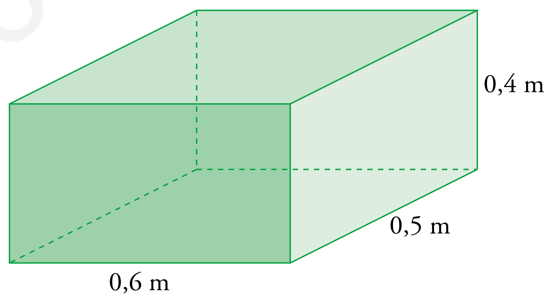
$A_{lat} = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$

24 **¿Cuál es el precio de un cajón de embalaje de medidas 0,6 m × 0,5 m × 0,4 m si la madera cuesta a razón de 18 €/m²?**

$A = 2(0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}4) = 2(0{,}3 + 0{,}24 + 0{,}2) = 1{,}48 \text{ m}^2$

$\textit{Precio} = 1{,}48 \cdot 18 = 26{,}64$ €

25 **¿Cuál es la suma de las longitudes de todas las aristas del cajón descrito en el ejercicio anterior (0,6 m × 0,5 m × 0,4 m)?**



$L = 4 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}4 = 4(0{,}6 + 0{,}5 + 0{,}4) = 4(1{,}5) = 6$ m

26 **Deseamos construir con alambres el esqueleto de todos los poliedros regulares, de modo que cada una de las aristas midan 1 dm. ¿Qué cantidad de alambre utilizaremos en cada uno de ellos?**

	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
Nº DE ARISTAS	6	12	12	30	30
LONGITUD TOTAL	6 dm	12 dm	12 dm	30 dm	30 dm

27 **Una pirámide regular tiene por base un pentágono regular de 2,5 m. La apotema de la pirámide mide 4,2 m. ¿Cuál es su superficie lateral?**

$$A_{lat} = 5 \cdot \frac{2,5 \cdot 4,2}{2} = 26,25 \text{ m}^2$$

28 **Una caja en forma de ortoedro tiene 9 dm de larga y 6 dm de ancha. Su superficie total es 228 dm². Halla su altura y su diagonal.**

- Cálculo de la altura:

  $A = 2(9 \cdot 6 + 9 \cdot h + 6 \cdot h) = 228 \text{ dm}^2$

  $108 + 30h = 228 \;\rightarrow\; 30h = 120 \;\rightarrow\; h = 4 \text{ dm}$

  La altura de la caja es de 4 dm.

- Cálculo de la diagonal:

  $d = \sqrt{4^2 + 6^2 + 9^2} = \sqrt{133} = 11,53 \text{ dm}$

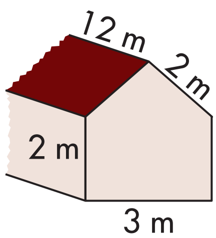
29 **El área total de un cubo es 150 dm². Halla su diagonal.**

$A = 6a^2 = 150 \;\rightarrow\; a^2 = 25$

$d = \sqrt{3a^2} = \sqrt{75} = 8,66 \text{ dm}$

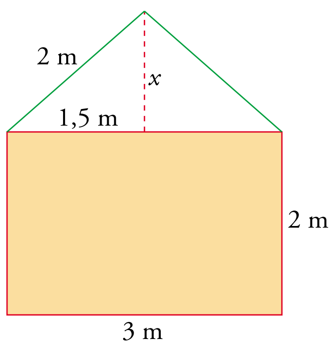
30 **Averigua cuánto cuesta la reparación de esta casa sabiendo que hay que:**

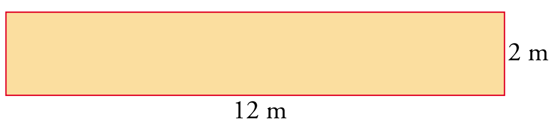
- **Encalar las cuatro paredes, por dentro y por fuera, a 2 €/m².**
- **Reparar el tejado, a 4,5 €/m².**
- **Poner el suelo, a 22 €/m².**



- Área de las paredes: $x = \sqrt{2^2 - 1,5^2} = 1,32 \text{ m}$

  Área de cada fachada: $\frac{3 \cdot 1,32}{2} + 2 \cdot 3 = 7,98 \text{ m}^2$





  Área de cada pared lateral: $12 \cdot 2 = 24 \text{ m}^2$

  Área de todas las paredes: $2 \cdot 7,98 + 2 \cdot 24 = 63,96 \text{ m}^2$

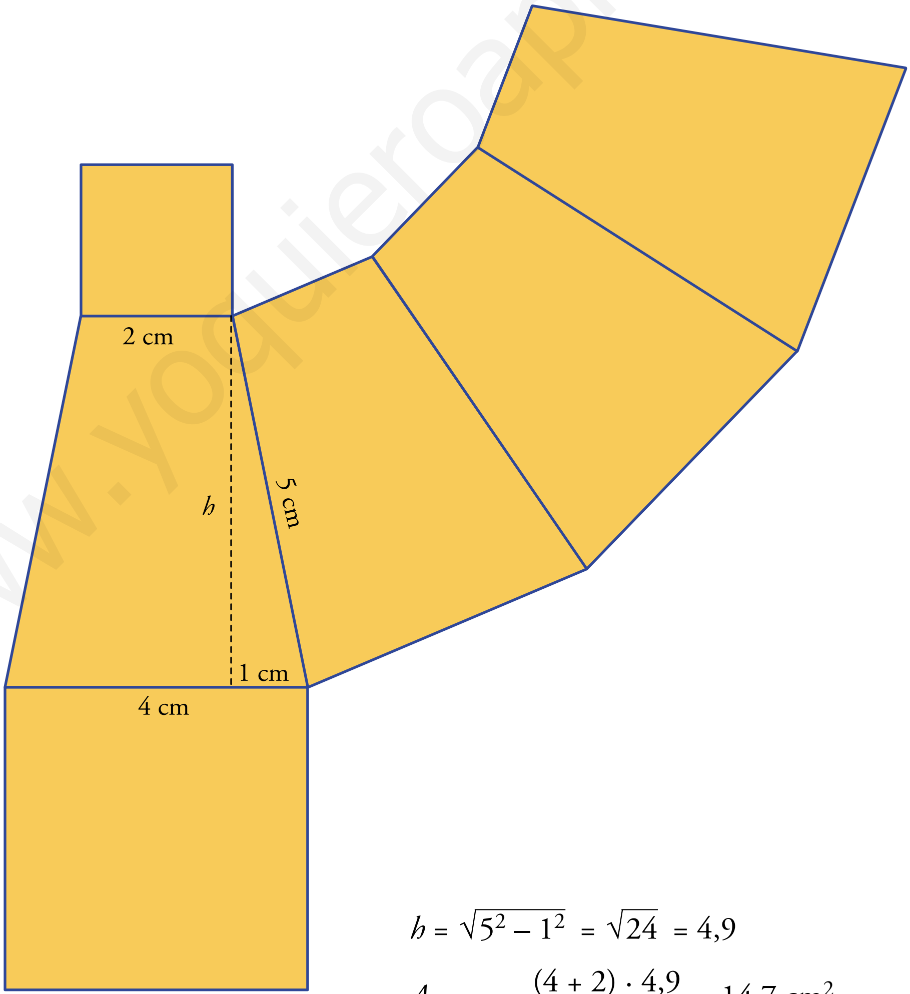
- Precio por encalar las cuatro paredes por dentro y por fuera:

$$(2 \cdot 63{,}96) \cdot 2 = 255{,}84 \text{ €}$$

- Área del tejado: $A = 2(2 \cdot 12) = 48 \text{ m}^2$
- Precio por repasar el tejado: $48 \cdot 4{,}5 = 216$ €
- Área del suelo: $A = 3 \cdot 12 = 36 \text{ m}^2$
- Precio por poner el suelo: $36 \cdot 22 = 792$ €
- Total coste de la reparación: $255{,}84 + 216 + 792 = 1\,263{,}84$ €

31 **Dibuja el desarrollo de un tronco de pirámide cuadrada, regular, cuyas aristas midan: las de la base mayor 4 cm, las de la base menor, 2 cm, y las laterales, 5 cm.**

Halla su área total. (Las caras laterales son trapecios. Comprueba que su altura es 4,9 cm).



$$h = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24} = 4{,}9$$

$$A_{trapecio} = \frac{(4 + 2) \cdot 4{,}9}{2} = 14{,}7 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = 4(14{,}7) + 4^2 + 2^2 = 58{,}8 + 16 + 4 = 78{,}8 \text{ cm}^2$$

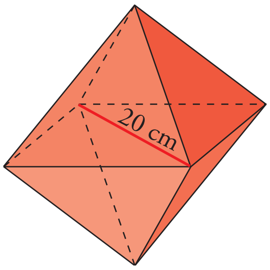
32 **¿Hay algún poliedro regular que sea prisma? ¿Hay algún poliedro regular que sea pirámide?**

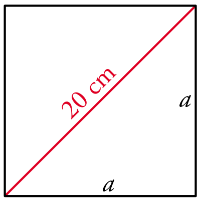
El hexaedro o cubo es un prisma y es un poliedro regular.

El tetraedro es un poliedro regular y es una pirámide triangular regular.

33 **Halla el área total de un octaedro en el que la distancia entre los vértices no contiguos es de 20 cm.**

▶ ***Observa que la arista del octaedro es el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 20 cm.***





$20^2 = a^2 + a^2 \rightarrow 400 = 2a^2 \rightarrow$

$\rightarrow a^2 = 200 \rightarrow a = 14,14$ cm

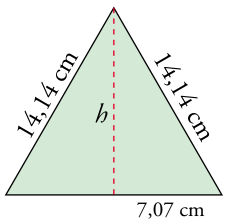
El octaedro está formado por 8 triángulos equiláteros de lado 14,14 cm.

- Cálculo de la altura de un triángulo:

  $h = \sqrt{14,14^2 - 7,07^2} = 12,2$ cm

- Área del octaedro:

  $A = 8\left(\dfrac{14,14 \cdot 12,2}{2}\right) = 690,032 \text{ cm}^2$



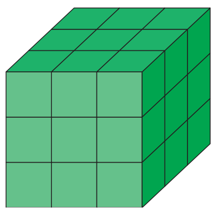
PÁGINA 203

Problemas de estrategia

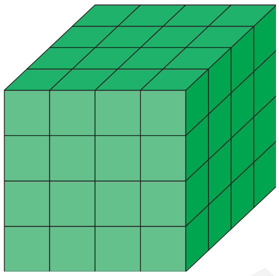
34 **Apilamos 27 cubitos de 1 cm³ formando un cubo de $3 \times 3 \times 3$. Pintamos de rojo las seis caras de este cubo grande.**

A continuación lo descomponemos de nuevo en los 27 cubitos. ¿Cuántos de estos no tienen ninguna cara pintada? ¿Y una cara pintada? ¿Y dos? ¿Y tres? ¿Hay alguno con más de tres caras pintadas?

Si seguimos el mismo proceso con 64 cubitos di, el número de cubitos que tienen 0, 1, 2, 3, … caras pintadas.



- Con 27 cubitos:



Solo queda un cubito con ninguna cara pintada.

Los cubitos que están en los vértices del cubo grande, tienen tres caras pintadas.

Los cubitos que están en las aristas del cubo grande (excepto los que están en los vértices), tienen dos caras pintadas (uno por cada arista).

El resto de los cubitos, excepto el que está en el interior y no se ve, tiene una cara pintada (uno por cada cara).

Por tanto:

Cubitos con ninguna cara pintada $\rightarrow$ 1

Cubitos con 1 cara pintada $\rightarrow$ 6

Cubitos con 2 caras pintadas $\rightarrow$ 12

Cubitos con 3 caras pintadas $\rightarrow$ 8

- Con 64 cubitos:

En el interior queda un cubo de $2 \times 2 \times 2$ cubitos sin ninguna cara pintada.

Por tanto:

Cubitos con ninguna cara pintada $\rightarrow$ 8

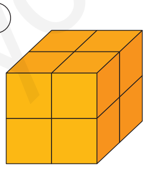
Cubitos con 1 cara pintada (4 por cada cara) $\rightarrow$ 24

Cubitos con 2 caras pintadas (2 por cada arista) $\rightarrow$ 24

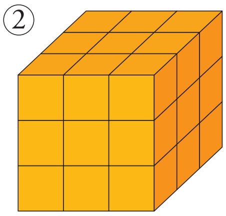
Cubitos con 3 caras pintadas (1 por cada vértice) $\rightarrow$ 8

35

1



2



a) De los 8 cubitos que están apilados en 1 , ¿cuántos no se ven desde esta postura?

b) ¿Cuántos no se ven en 2 ?

c) ¿Cuántos no se ven en un cubo formado por $4 \times 4 \times 4$ situado de la misma forma?

d) ¿Cuántos no se ven en un gran cubo de $10 \times 10 \times 10$ mirado desde una esquina?

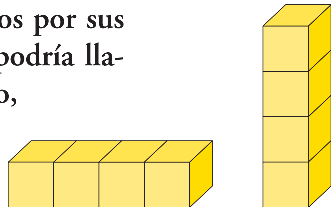
a) Solo un cubito no se ve.

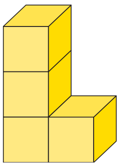
b) Se ven 19. No se ven 8.

c) No se ven 27 cubitos.

d) No se ven $9 \times 9 \times 9 = 729$ cubitos.

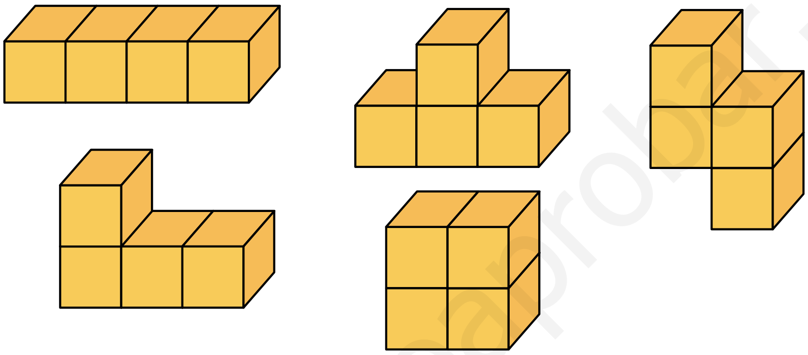
36 **Una configuración formada por varios cubos unidos por sus caras se llama policubo. Un policubo de 4 cubos podría llamarse tetracubo. Estos dos tetracubos, por ejemplo, son el mismo.**





Este tetracubo es diferente.

¿Cuántos tetracubos distintos hay?



37 **a) En un cubo, en un tetraedro y en un octaedro es fácil contar el número de aristas y el número de vértices. Hazlo.**

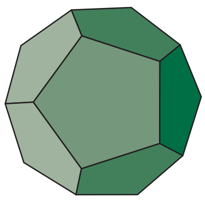
APLICA ESTA ESTRATEGIA

Para contar el número de aristas de un dodecaedro razonamos así:

- Cada cara tiene 5 aristas y hay 12 caras.

  $5 \times 12 = 60$

- Pero cada dos caras tienen una arista común. Por tanto, el número de aristas es $60 : 2 = 30$.



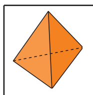
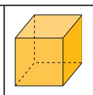
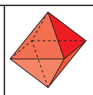
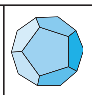
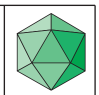
Para contar el número de vértices del dodecaedro razonamos así:

- Cada cara tiene 5 vértices, $5 \times 12 = 60$.
- Pero cada tres caras comparten un mismo vértice, $60 : 3 = 20$.

  El número de vértices es 20.

b) Calcula cuántas aristas y cuántos vértices tiene el icosaedro.

c) **Completa la siguiente tabla:**

					
CARAS	**4**	**6**	**8**	**12**	**20**
ARISTAS					
VÉRTICES					

Comprueba que en los cinco poliedros regulares se cumple la relación:

CARAS + VÉRTICES – ARISATAS = 2 (*)

d) **Cuenta el número de CARAS, de ARISTAS y de VÉRTICES que tienen una pirámide cuadrangular y un prisma pentagonal.**

Comprueba que también se cumple para ellos la fórmula (*). Realmente esa fórmula se cumple para cualquier poliedro.

b) • Número de aristas:

Cada cara tiene 3 aristas y hay 20 caras $\rightarrow$ $3 \cdot 20 = 60$

Pero cada dos caras tienen una arista común. Por tanto, el número de aristas es:

$$60 : 2 = 30$$

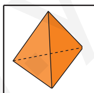
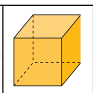
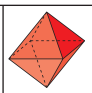
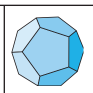
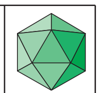
• Número de vértices:

Cada cara tiene 3 vértices $\rightarrow$ $3 \cdot 20 = 60$

Pero cada 5 caras comparten un mismo vértice: $60 : 5 = 12$

El número de vértices es 12.

c)

					
CARAS	4	6	8	12	20
ARISTAS	6	12	12	30	30
VÉRTICES	4	8	6	20	12
$C + V = A$	2	2	2	2	2

$C + V = A + 2$

d) • Pirámide cuadrangular:

5 caras, 5 vértices y 8 aristas $\rightarrow$ $C + V = A + 2$

• Prisma pentagonal:

7 caras, 10 vértices y 15 aristas $\rightarrow$ $C + V = A + 2$

PÁGINA 217

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Cuerpos de revolución

1 ▲△△ **¿Cuáles de las siguientes figuras son cuerpos de revolución? ¿De cuáles conoces el nombre?**

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

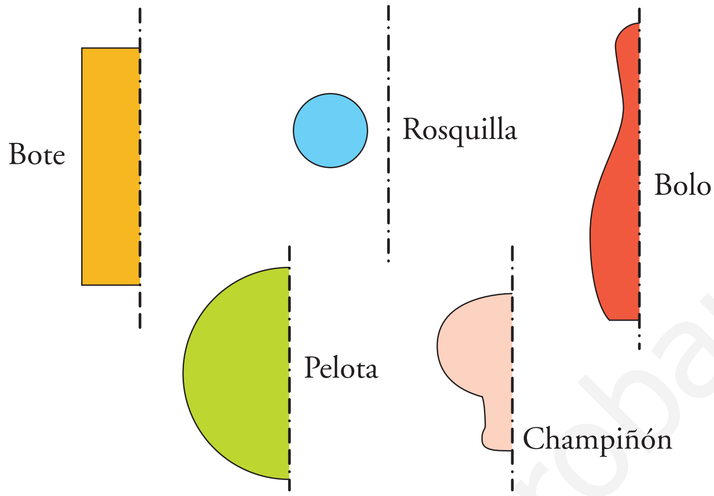
Todos son cuerpos de revolución, excepto el e), si consideramos el asa, y el i) que tiene sus caras planas (como base tiene un octógono).

c) cilindro

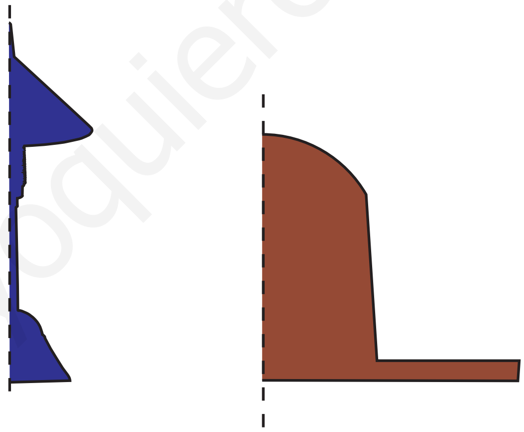
f) se llama toro

g) esfera

2 ▲△△ Al girar cada una de las siguientes figuras en torno al eje que se indica, se genera una figura de las del ejercicio anterior. Identifícala.

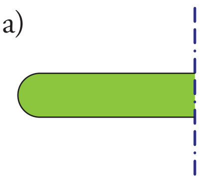


3 ▲△△ Dibuja la figura y el eje alrededor del que ha de girar para engendrar la lámpara y el sombrero del ejercicio 1.



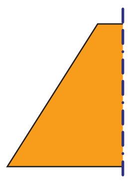
4 ▲△△ Dibuja el cuerpo de revolución que se engendra en cada uno de los siguientes casos:

a)

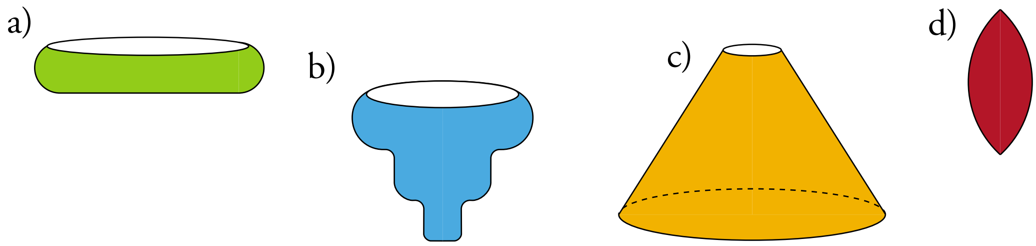


b)

c)

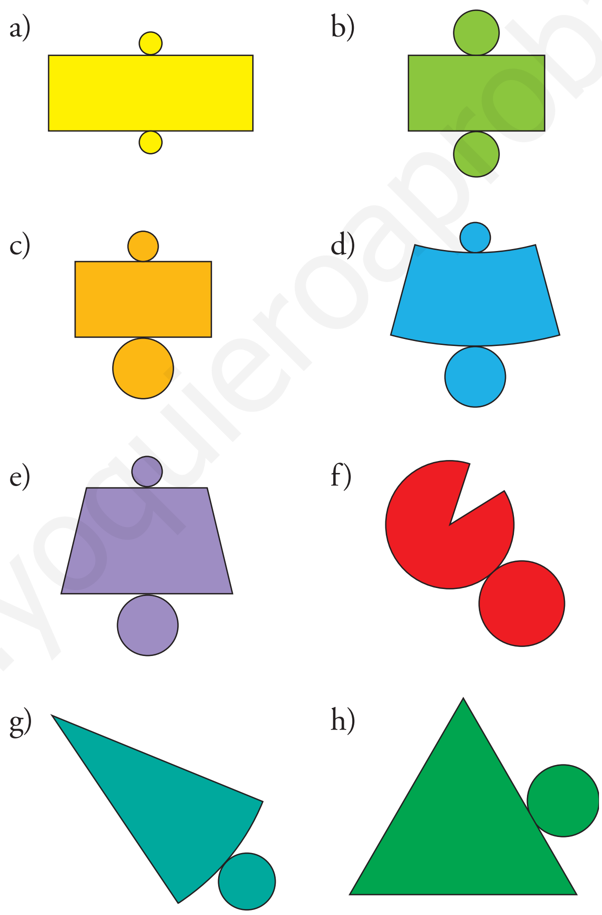


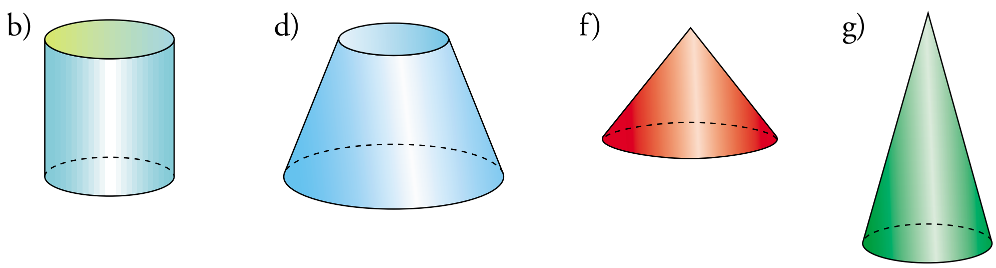
d)



DESARROLLOS

5 ▲▲△ **¿Cuáles de los siguientes desarrollos corresponden a cuerpos de revolución? Dibújalos.**



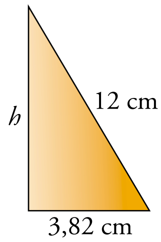


El resto de las figuras no corresponden al desarrollo de ningún cuerpo de revolución.

6 **El desarrollo lateral de un cono es un semicírculo de radio 12 cm. Halla el radio de su base y su altura.**

$2\pi r = 24 \text{ cm} \rightarrow r = \dfrac{24}{2\pi} = 3,82 \text{ cm}$

$h = \sqrt{12^2 - 3,82^2} = 11,37 \text{ cm}$



PÁGINA 218

SUPERFICIES

8 **Una verja se compone de 20 barrotes de hierro de 2,5 m de altura y 1,5 cm de diámetro. Hay que darles una mano de minio a razón de 24 €/m². ¿Cuál es el coste?**

- Área de un barrote:

  $A = 2\pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot 0,0075 \cdot 2,5 + \pi \cdot 0,0075^2 =$

  $= 0,1175 + 0,0001766 = 0,118 \text{ m}^2$

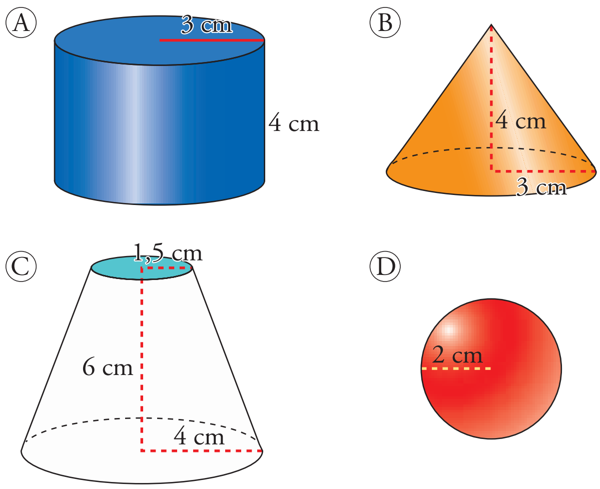
- Área de 20 barrotes:

  $20 \cdot 0,118 = 2,36 \text{ m}^2$

- Coste:

  $2,36 \cdot 24 = 56,64$ €

9 **Halla la superficie lateral y la superficie total de los siguientes cuerpos geométricos:**



a) $A_{lat} = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 75{,}4 \text{ cm}^2$

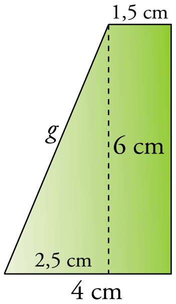
$A_{total} = 75{,}4 + 2\pi \cdot 3^2 = 131{,}9 \text{ cm}^2$

b) $g = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$

$A_{lat} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 47{,}1 \text{ cm}^2$

$A_{total} = 47{,}1 + \pi \cdot 3^2 = 75{,}4 \text{ cm}^2$

c)



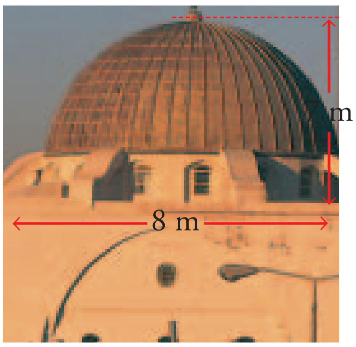
$g = \sqrt{2{,}5^2 + 6^2} = 6{,}5$

$A_{lat} = \pi\,(1{,}5 + 4) \cdot 6{,}5 = 112{,}3 \text{ cm}^2$

$A_{total} = 112{,}3 + \pi \cdot 1{,}5^2 + \pi \cdot 4^2 = 169{,}6 \text{ cm}^2$

d) $A_{total} = 4\pi \cdot 2^2 = 50{,}2 \text{ cm}^2$

10 △△△ **Se desea forrar de pizarra la parte cónica de este torreón. El precio es de 84 € el metro cuadrado. ¿Cuál es el coste de la obra?**



Generatriz del cono:

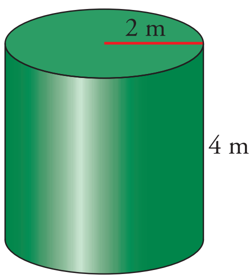
$g = \sqrt{2^2 + 7^2} = 7{,}28 \text{ m}$

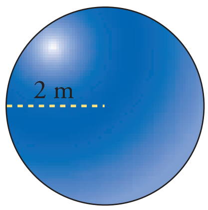
$A_{lat} = \pi \cdot 2 \cdot 7{,}28 = 45{,}74 \text{ m}^2$

$Coste = 84 \cdot 45{,}74 = 3\,842{,}35$ €

11 △△△ **Un pintor ha cobrado 1 000 € por pintar el lateral de un depósito cilíndrico de 4 m de altura y 4 m de diámetro.**

¿Cuánto deberá cobrar por pintar un depósito esférico de 2 m de radio?

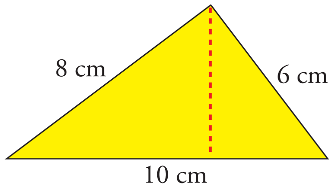




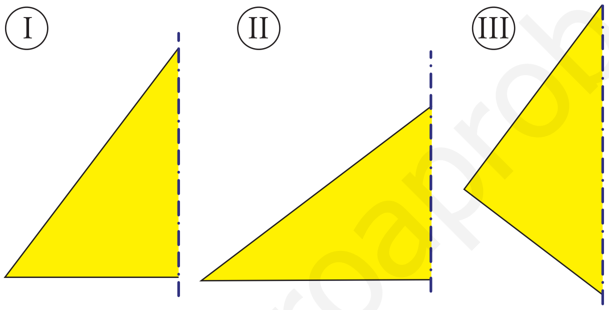
La superficie de la esfera coincide con la del cilindro (su altura es el diámetro de la esfera y su radio coincide con el de la esfera).

Por tanto, cobrará también 1 000 € por pintar la esfera.

12 ▲▲△ **Comprueba que la altura de este triángulo rectángulo es 4,8 cm. Para ello, ten en cuenta que el producto de los dos catetos es el doble de su área.**



Halla la superficie total de las figuras engendradas por este triángulo al girar alrededor de cada uno de sus lados.

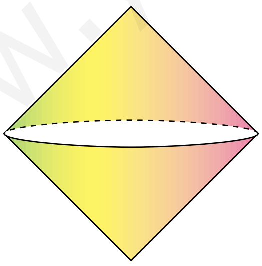


a) $\text{\textit{Área}} = \dfrac{10 \cdot h}{2} \rightarrow \dfrac{8 \cdot 6}{2} = \dfrac{10 \cdot h}{2} \rightarrow 24 = 5h \rightarrow h = \dfrac{24}{5} = 4{,}8 \text{ cm}$

b) I $\text{\textit{Área}} = \pi \cdot 6 \cdot 10 + \pi \cdot 6^2 = 301{,}4 \text{ cm}^2$

II $\text{\textit{Área}} = \pi \cdot 8 \cdot 10 + \pi \cdot 8^2 = 452{,}2 \text{ cm}^2$

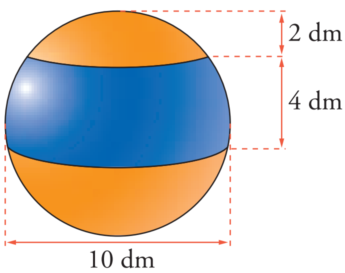
III



Radio de la base = *altura del triángulo* = 4,8 cm

$\text{\textit{Área}} = \pi \cdot 4{,}8 \cdot 8 + \pi \cdot 4{,}8 \cdot 6 = 211{,}1 \text{ cm}^2$

13 ▲△△ **Halla la superficie del casquete polar de 2 dm de altura y de una zona esférica de 4 dm de altura contenidos en una esfera de 10 dm de diámetro.**



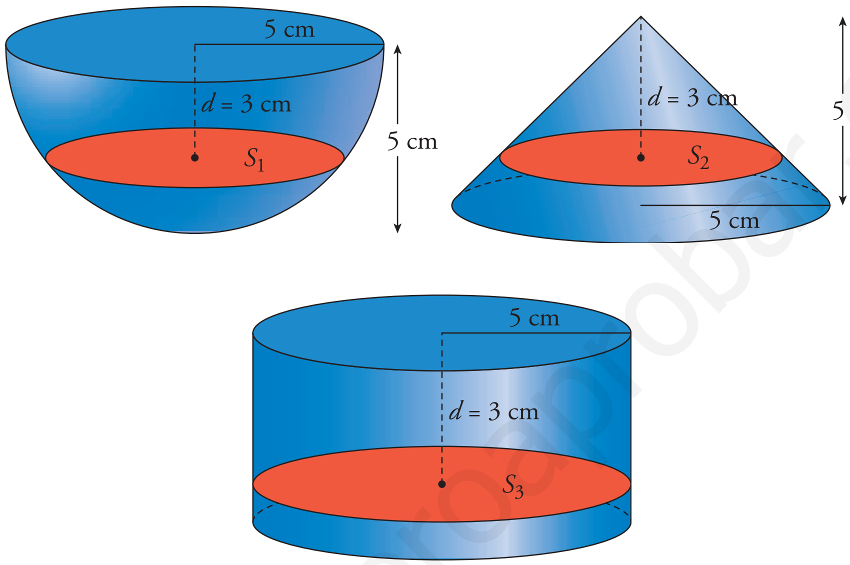
Área casquete = $2\pi \cdot 5 \cdot 2 = 62{,}8 \text{ dm}^2$

Área zona = $2\pi \cdot 5 \cdot 4 = 125{,}6 \text{ dm}^2$

PÁGINA 219

PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

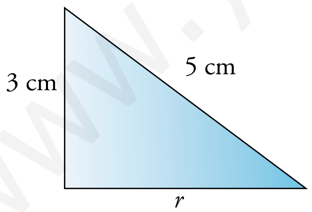
14 **Halla las superficies S_1, S_2 y S_3 y comprueba que $S_1 + S_2 = S_3$.**



Para $d = 4$, halla las superficies de los tres círculos, S_1, S_2 y S_3.

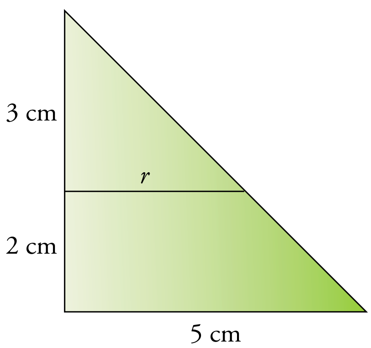
Comprueba que $S_1 + S_2 = S_3$.

Dale cualquier otro valor a d y comprueba que también se cumple que $S_1 + S_2 = S_3$.



$r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm

$S_1 = \pi \cdot 4^2 = 50{,}24$ cm^2



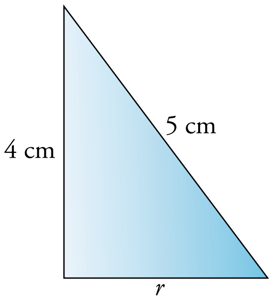
$\frac{3}{r} = \frac{5}{5} \rightarrow r = 3$ cm

$S_2 = \pi \cdot 9 = 28{,}26$ cm^2

$S_3 = \pi \cdot 5^2 = 78{,}5$ cm^2

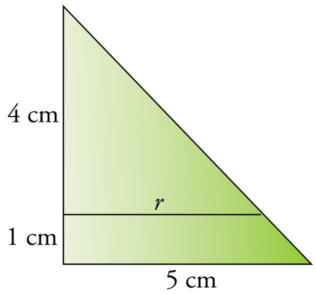
$S_1 + S_2 = 78{,}5 = S_3$

Para $d = 4$:



$r = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm

$S_1 = \pi \cdot 3^2 = 28{,}26$ cm^2



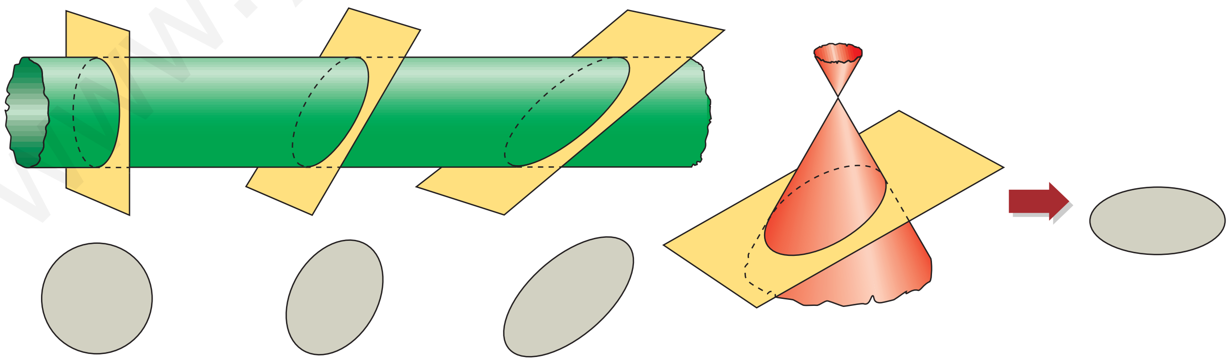
$\dfrac{4}{r} = \dfrac{5}{5} \rightarrow r = 4$ cm

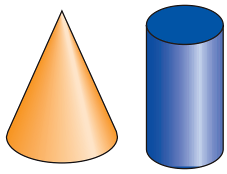
$S_2 = 50{,}24$ cm^2

$S_3 = \pi \cdot 5^2 = 78{,}5$ cm^2

$S_1 + S_2 = 78{,}5 = S_3$

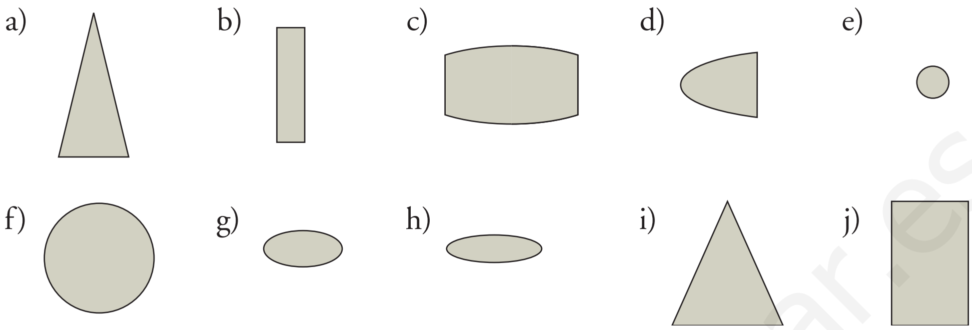
15 **Al cortar una superficie cilíndrica o una superficie cónica por un plano perpendicular al eje se obtiene una circunferencia. Si el plano las corta no perpendicularmente, se obtiene una elipse.**

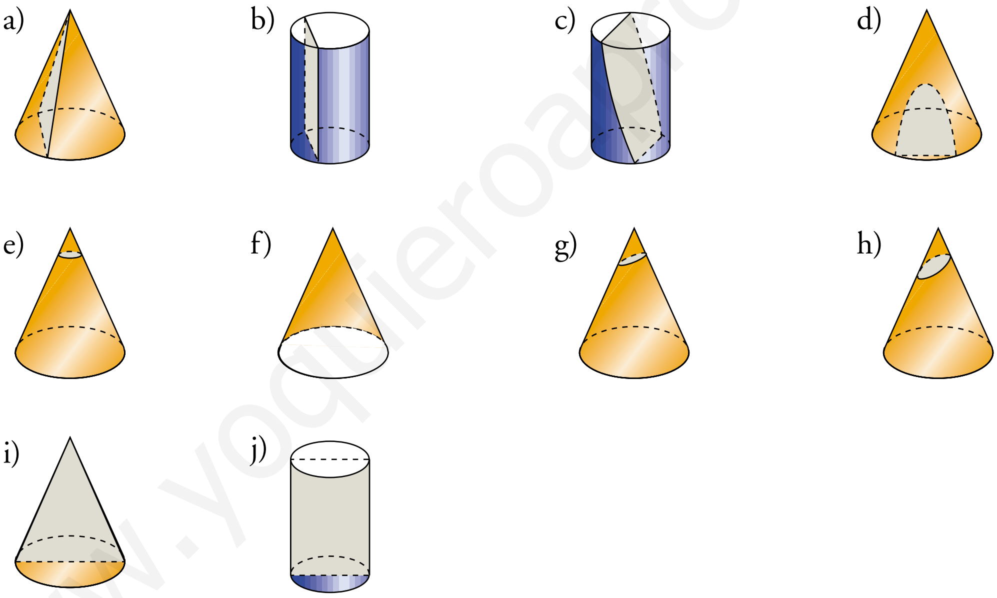




Observa el cono y el cilindro que hay a la derecha. Mediante secciones planas de estos cuerpos geométricos se obtienen las siguientes figuras:

Averigua de qué cuerpo es cada una de las figuras y mediante qué plano se consigue.





PÁGINA 232

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Unidades de volumen

1 Transforma en metros cúbicos:

a) **450 dam^3**
b) **0,084 hm^3**
c) **0,11 km^3**
d) **35 840 dm^3**
e) **500 *hl***
f) **30 000 *l***

a) 450 dam^3 = 450 000 m^3
b) 0,084 hm^3 = 84 000 m^3
c) 0,11 km^3 = 110 000 000 m^3
d) 35 840 dm^3 = 35,84 m^3
e) 500 *hl* = 50 m^3
f) 30 000 *l* = 30 m^3

2 Transforma en litros los siguientes volúmenes:

a) **11 dam^3 350 m^3**
b) **0,87 *hl***
c) **0,000094 hm^3**
d) **300 000 mm^3**

a) 11 dam^3 350 m^3 $\rightarrow$ 11 350 000 *l*
b) 0,87 *hl* $\rightarrow$ 87 *l*
c) 0,000094 hm^3 $\rightarrow$ 94 000 *l*
d) 300 000 mm^3 $\rightarrow$ 0,3 *l*

3 Completa las siguientes igualdades:

a) 0,0013 hm^3 = ... dm^3
b) 0,11 dam^3 = ... cm^3
c) 3 dam^3 11 m^3 743 dm^3 = ... m^3
d) 3 dam^3 11 m^3 743 dm^3 = ... *l*

a) 0,0013 hm^3 = 1 300 000 dm^3
b) 0,11 dam^3 = 110 000 000 cm^3
c) 3 dam^3 11 m^3 743 dm^3 = 3 011,743 m^3
d) 3 dam^3 11 m^3 743 dm^3 = 3 011 743 *l*

4 **Expresa como suma de unidades de volumen (forma compleja):**

a) 75 427 038 m^3

b) 32,14962 dm^3

c) 0,0000084 km^3

d) 832 000 dam^3

a) 75 427 038 m^3 → 75 hm^3 427 dam^3 38 m^3

b) 32,14962 dm^3 → 32 dm^3 149 cm^3 620 mm^3

c) 0,0000084 km^3 → 8 dam^3 400 m^3

d) 832 000 dam^3 → 832 hm^3

6 **¿Cuántas botellas de 3/4 *l* se pueden llenar con 0,4 dam^3?**

0,4 dam^3 = 400 000 *l*

$400\,000 : \frac{3}{4} = 533\,333,\widehat{3}$ botellas

Se pueden llenar unas 533 333 botellas.

7 **Un pantano tiene una capacidad de 0,19 km^3. Si ahora está al 28% de su capacidad, ¿cuántos litros de agua contiene?**

28% de 0,19 km^3 = 0,0532 km^3 = 53 200 000 000 *l*

8 **La cuenca fluvial cuyas aguas llegan a un pantano es de 62 km^2. En las últimas lluvias han caído 27 *l* por metro cuadrado. Del agua caída, se recoge en el pantano un 43%. ¿Cuántos metros cúbicos de agua se han recogido en el pantano como consecuencia de las lluvias?**

62 km^2 = 62 000 000 m^2

$62\,000\,000 \cdot 27 \cdot \frac{43}{100} = 719\,820\,000\ l = 719\,820\ m^3$

9 **¿Cuál es la masa de 0,0843 dam^3 de agua?**

0,0843 dam^3 = 84 300 *l*

Su masa es de 84 300 kg.

10 **Un depósito vacío pesa 27 kg y lleno de aceite 625,5 kg. ¿Qué volumen de aceite contiene? La densidad de ese aceite es 0,95 kg/dm^3.**

625,5 – 27 = 598,5 kg de aceite

598,5 : 0,95 = 630 *l* de aceite

11 △△△ **Efectúa las operaciones siguientes y expresa el resultado en hectolitros:**

a) $0,46 \text{ dam}^3 + 47 \text{ m}^3 + 5\,833 \text{ m}^3$

b) $0,00084 \text{ km}^3 + 0,31 \text{ hm}^3 + 33 \text{ dam}^3$

c) $0,413 \text{ dam}^3 - 315 \text{ m}^3\ 800 \text{ dm}^3$

d) $2\,300 \text{ m}^3 : 25$

a) $0,46 \text{ dam}^3 + 47 \text{ m}^3 + 5\,833 \text{ m}^3 = 460 \text{ m}^3 + 47 \text{ m}^3 + 5\,833 \text{ m}^3 = 6\,340 \text{ m}^3 =$
$= 6\,340\ kl = 63\,400\ hl$

b) $0,00084 \text{ km}^3 + 0,31 \text{ hm}^3 + 33 \text{ dam}^3 = 840 \text{ dam}^3 + 310 \text{ dam}^3 + 33 \text{ dam}^3 =$
$= 1\,183 \text{ dam}^3 = 11\,830\,000\ hl$

c) $0,413 \text{ dam}^3 - 315 \text{ m}^3\ 800 \text{ dm}^3 = 413\,000 \text{ dm}^3 - 315\,800 \text{ dm}^3 = 97\,200 \text{ dm}^3 =$
$= 972\ hl$

d) $2\,300 \text{ m}^3 : 25 = 92 \text{ m}^3 = 92\ kl = 920\ hl$

12 △△△ **Completa estas igualdades:**

a) $1 \text{ hm}^3 =$ .... hl

b) $1 \text{ dam}^3 =$ .... dal

c) $1 \text{ m}^3 =$ l

d) $1 \text{ dm}^3 =$ .... dl

e) $1 \text{ cm}^3 =$ cl

f) $1 \text{ mm}^3 =$ .... ml

a) $1 \text{ hm}^3 = 10\,000\,000\ hl$

b) $1 \text{ dam}^3 = 100\,000\ dal$

c) $1 \text{ m}^3 = 1\,000\ l$

d) $1 \text{ dm}^3 = 10\ dl$

e) $1 \text{ cm}^3 = 0,1\ cl$

f) $1 \text{ mm}^3 = 0,001\ ml$

13 △△△ **Estimación de volúmenes "a ojo"**

Para cada uno de los recipientes que se citan a continuación se dan tres volúmenes. Solo uno de ellos es razonable. Di, en cada caso, cuál es:

a) Volumen de un pantano:

$11 \text{ hm}^3;\quad 387\,000\ l;\quad 4\,000\,000\,000 \text{ cm}^3$

b) Un depósito de agua en una vivienda:

$2 \text{ dam}^3;\quad 0,8 \text{ m}^3;\quad 45\,000\ l$

c) **Un vaso normal:**

$2\ dm^3$; $0{,}2\ dm^3$; $0{,}02\ dm^3$

d) **Una cuchara de café:**

$8\ dl$; $8\ cm^3$; $8\ mm^3$

e) **Una habitación:**

$1\ dam^3$; $300\ l$; $30\ m^3$

f) **El cajón de una mesa:**

$0{,}3\ m^3$; $30\ dm^3$; $3\,000\ cm^3$

a) $11\ hm^3$ (un pantano pequeño)

b) $0{,}8\ m^3 = 800\ l$

c) $0{,}2\ dm^3 = 1/5\ l$

d) $8\ cm^3 = 0{,}008\ l$

e) $30\ m^3$

f) $30\ dm^3$

PÁGINA 233

CÁLCULO DE VOLÚMENES

14 **Calcula el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 3 cm × 5 cm × 11 cm.**

$V = 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165\ cm^3$

15 **¿Cuál es el volumen de un cubo de 12 cm de arista?**

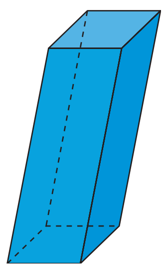
$V = 123 = 1\,728\ cm^3$

16 **La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 11,3 cm y 6,8 cm. La altura del prisma es de 2 dm. Halla su volumen.**

$$A_{base} = \frac{11{,}3 \cdot 6{,}8}{2} = 38{,}42\ cm^2$$

$V = 38{,}42 \cdot 20 = 768{,}4\ cm^3$

17 **Un paralelepípedo tiene unas bases en forma de rombo cuyas diagonales miden 7 dm y 4 dm. La altura del paralelepípedo es de 1,2 m. Halla su volumen.**



$$V = \frac{7 \cdot 4}{2} \cdot 12 = 168\ dm^3$$

18 **Halla el volumen de un cilindro de 10 dm de radio de la base y 20 dm de altura.**

$V = \pi \cdot 10^2 \cdot 20 = 6\,280 \text{ dm}^3$

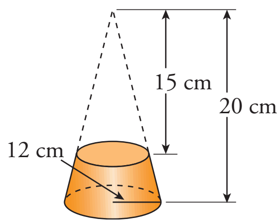
19 **Halla el volumen de una esfera de 25 cm de radio.**

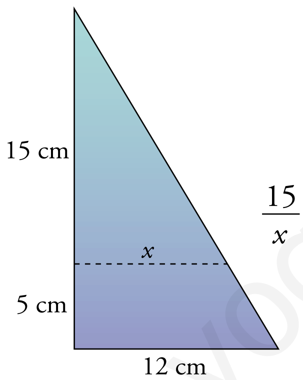
$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 25^3 = 65\,416{,}67 \text{ cm}^3$

20 **Halla el volumen de un cono de 6 dm de radio de la base y 15 cm de altura.**

$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 60^2 \cdot 15 = 56\,520 \text{ cm}^3$

21 **Halla el volumen del siguiente tronco de cono:**

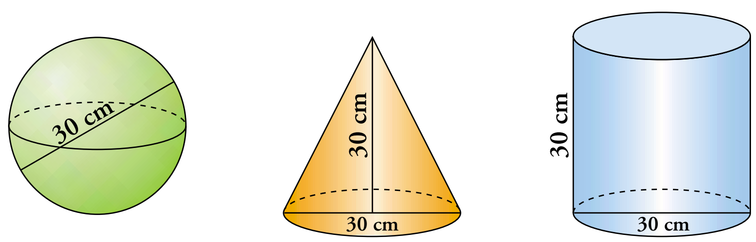




$\dfrac{15}{x} = \dfrac{20}{12} \rightarrow x = 9 \text{ cm}$

$V = \dfrac{1}{3}(\pi \cdot 12^2 \cdot 20 - \pi \cdot 9^2 \cdot 15) = 1\,742{,}7 \text{ cm}^3$

22 **Comprueba que el volumen del cilindro es igual a la suma de los volúmenes de la esfera y el cono:**



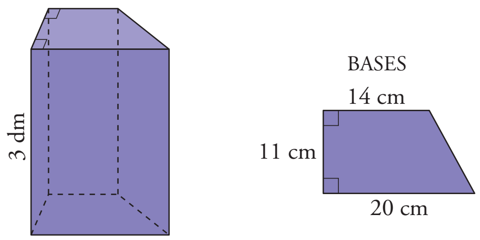
$V_{esfera} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 15^3 = 14\,130 \text{ cm}^3$ $\qquad V_{cono} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 30 = 7\,065 \text{ cm}^3$

$V_{cilindro} = \pi \cdot 15^2 \cdot 30 = 21\,195 \text{ cm}^3$

$V_{esfera} + V_{cono} = 21\,195 \text{ cm}^3 = V_{cilindro}$

Halla el volumen de las siguientes figuras:

23

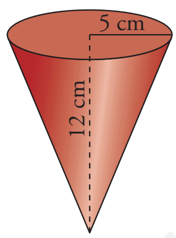


$$A_{base} = \frac{(14 + 20) \cdot 11}{2} = 187 \text{ cm}^2$$

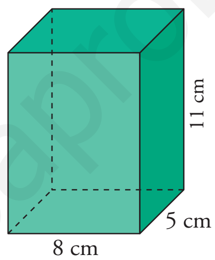
$$V = 187 \cdot 30 = 5\,610 \text{ cm}^3$$

24

a)



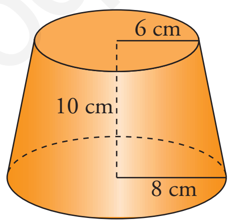
b)



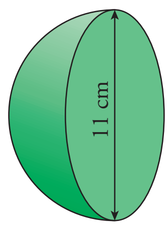
a) $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 314 \text{ cm}^3$ b) $V = 8 \cdot 5 \cdot 11 = 440 \text{ cm}^3$

25

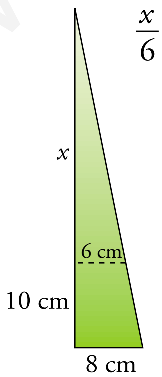
a)



b)



a)



$$\frac{x}{6} = \frac{x + 10}{8} \rightarrow 8x = 6x + 60 \rightarrow 2x = 60 \rightarrow x = 30 \text{ cm}$$

$$V_{cono\ grande} = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 40 = 2\,679{,}47 \text{ cm}^3$$

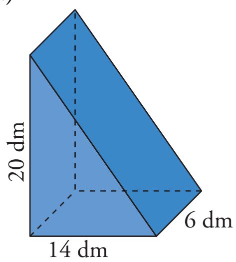
$$V_{cono\ pequeño} = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 30 = 1\,130{,}4 \text{ cm}^3$$

$$V_{tronco\ de\ cono} = 2\,679{,}47 - 1\,130{,}4 = 1\,549{,}07 \text{ cm}^3$$

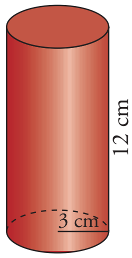
b) $V = \frac{(4/3)\,\pi \cdot 5{,}5^3}{2} = 348{,}28 \text{ cm}^3$

26 ▲△△

a)



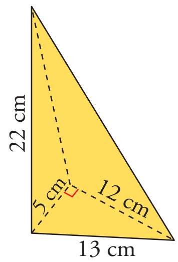
b)



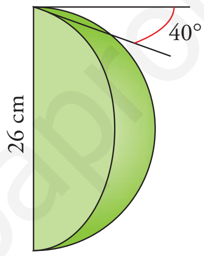
a) $V = \dfrac{20 \cdot 14 \cdot 6}{2} = 840 \text{ dm}^3$ b) $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 339{,}12 \text{ cm}^3$

27 ▲△△

a)



b)



a) $V = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{12 \cdot 5}{2} \cdot 22\right) = 220 \text{ cm}^3$

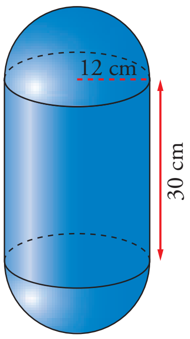
b) $\dfrac{360°}{9} = 40°$

$V = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot 13^3 = 1\,022{,}01 \text{ cm}^3$

PÁGINA 234

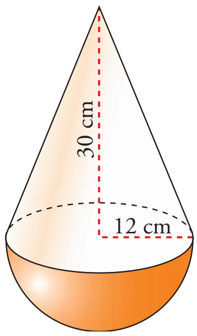
Teniendo en cuenta las medidas señaladas, halla el volumen de las siguientes figuras:

28 ▲▲△



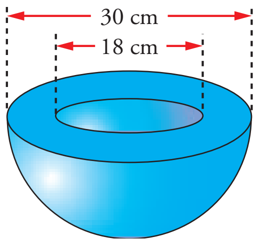
$V = \pi \cdot 12^2 \cdot 30 + \dfrac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 20\,799{,}36 \text{ cm}^3$

29



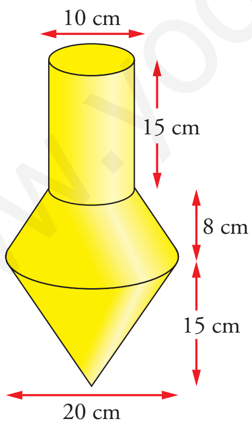
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 8\,138{,}88 \text{ cm}^3$$

30



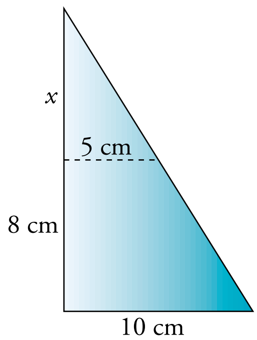
$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 = 7\,065 - 1\,526{,}04 = 5\,538{,}96 \text{ cm}^3$$

31



$$V_{cilindro} = \pi \cdot 5^2 \cdot 15 = 1\,177{,}5 \text{ cm}^3$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1\,570 \text{ cm}^3$$



$$\frac{x}{5} = \frac{x+8}{10} \rightarrow 10x = 5x + 40 \rightarrow 5x = 40 \rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

$$V_{tronco\ de\ cono} = \frac{1}{3}(\pi \cdot 10^2 \cdot 16 - \pi \cdot 5^2 \cdot 8) = 1\,465{,}3 \text{ cm}^3$$

$$V_{total} = 1\,177{,}5 + 1\,570 + 1\,465{,}3 = 4\,212{,}8 \text{ cm}^3$$

PROBLEMAS

32 △△△ **Halla el volumen de una habitación que mide 6 m × 3,8 m × 2,6 m. ¿Cuántas duchas podrías darte con el agua que cabe en la habitación suponiendo que gastas 120 *l* de agua en cada ducha?**

$V = 6 \cdot 3{,}8 \cdot 2{,}6 = 59{,}28 \text{ m}^3$

$59{,}28 \text{ m}^3 = 59\,280 \text{ dm}^3 = 59\,280 \; l$

$59\,280 : 120 = 494$

Se podría dar 494 duchas.

33 △△△ **Un aljibe de base rectangular de 6,4 m × 3,8 m tiene una profundidad de 4,8 m y está lleno hasta los 3/4 de su volumen. Se sacan 340 hectolitros. ¿Qué altura alcanzará el agua?**

$V_{aljibe} = 6{,}4 \cdot 3{,}8 \cdot 4{,}8 = 116{,}736 \text{ m}^3$

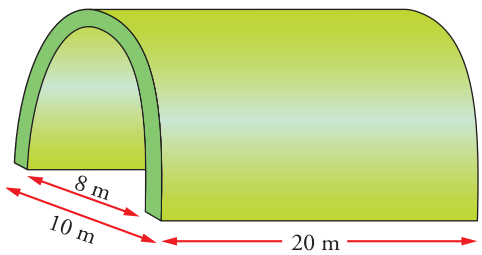
$\frac{3}{4} V = \frac{3}{4} 116{,}736 = 87{,}552 \text{ m}^3 = 87{,}552 \; kl = 875{,}52 \; hl$

$875{,}52 \; hl - 340 \; hl = 535{,}52 \; hl = 53{,}552 \text{ m}^3$

$V_{agua} = 53{,}552 \text{ m}^3 = 6{,}4 \cdot 3{,}8 \cdot h \;\rightarrow\; h = \dfrac{53{,}552}{6{,}4 \cdot 3{,}8} = 2{,}202 \text{ m}$

El agua alcanzará una altura de 2,202 m.

34 △△△ **Calcula el volumen de hormigón que se ha necesitado para hacer este túnel:**



$V_{cilindro\ grande} = \pi \cdot 5^2 \cdot 20 = 1\,570 \text{ m}^3$

$V_{cilindro\ pequeño} = \pi \cdot 4^2 \cdot 20 = 1\,004{,}8 \text{ m}^3$

$V_{hormigón} = \dfrac{1\,570 - 1\,004{,}8}{2} = 282{,}6 \text{ m}^3$

35 △△△ **Para medir el volumen de una piedra pequeña procedemos del siguiente modo: en una vasija cilíndrica echamos agua hasta la mitad, aproximadamente. Sumergimos la piedra y sube el nivel 22 mm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?**

DATOS DE LA VASIJA: **Diámetro exterior: 9 cm**

Diámetro interior: 8,4 cm

Altura: 15 cm

(Usa solo los datos que necesites).

Radio interior = 4,2 cm

$V_{piedra} = \pi \cdot 4{,}2^2 \cdot 2{,}2 = 121{,}86 \text{ cm}^3$

36 △△△ **Con una barra cilíndrica de oro de 15 cm de larga y 5 mm de diámetro se fabrica un hilo de 1/4 mm de diámetro.**

¿Cuál es la longitud del hilo?

Radio del hilo $= \frac{1}{8}$ mm = 0,125 mm

Radio de la barra = 2,5 mm

Largo de la barra = 15 cm = 150 mm

$\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 150 = \pi \cdot 0{,}125^2 \cdot l$

(donde l es la longitud del hilo)

$$l = \frac{\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 150}{\pi \cdot 0{,}125^2} = \frac{2{,}5^2 \cdot 150}{0{,}125^2} = 60\,000 \text{ mm} = 60 \text{ m}$$

37 △△△ **Un sótano cuya superficie es de 208 m^2 se ha inundado. El agua llega a 1,65 m de altura. Se extrae el agua con una bomba que saca 6 *hl* por minuto.**

¿Cuánto tiempo tardará en vaciarlo?

Volumen de agua = 208 · 1,65 = 342,2 m^3 = 3 422 *hl*

3 422 : 6 = 572 minutos = 9 h 32 min

La bomba tardará en vaciar el sótano 9 h 32 min.

38 △△△ **Una pared debe tener 7,5 m × 5,6 m y un grosor de 30 cm.**

¿Cuántos ladrillos de 15 cm × 10 cm × 6 cm serán necesarios si en su construcción el cemento ocupa un 15% del volumen?

Volumen de la pared = 7,5 · 5,6 · 0,3 = 12,6 m^3

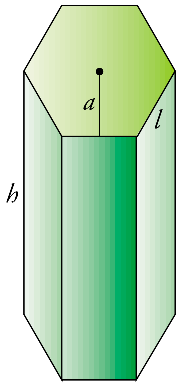
Volumen de la pared sin cemento = 12,6 · 0,85 = 10,71 m^3

Volumen de un ladrillo = 0,15 · 0,1 · 0,06 = 0,0009 m^3

$$\textit{Número de ladrillos} = \frac{10{,}71}{0{,}0009} = 11\,900$$

39 **Una columna de basalto tiene forma de prisma hexagonal regular. El lado de la base mide 15 cm. La altura de la columna es de 2,95 m.**

Halla su peso sabiendo que 1 m^3 de basalto pesa 2 845 kg.



l = 15 cm

h = 2,95 m

$$a = \sqrt{15^2 - 7{,}5^2} = 13 \text{ cm}$$

$$A_{base} = \frac{6 \cdot 15 \cdot 13}{2} = 585 \text{ cm}^2$$

Volumen = 585 · 295 = 172 575 cm^3 = 0,172575 m^3

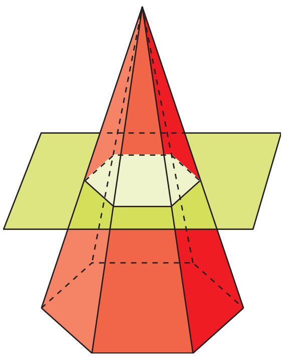
Peso = 0,172575 · 2 845 = 491 kg

PÁGINA 235

40 **La base de una pirámide regular es un hexágono de 15 cm de lado. Su altura es de 30 cm. Halla su volumen.**

Partimos esta pirámide por un plano paralelo a la base que corta a la altura en la mitad.

Halla el volumen de cada una de las dos partes resultantes.



- Volumen de la pirámide entera:

$$a = \sqrt{15^2 - 7{,}5^2} = 13 \text{ cm}$$

$$\textit{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 15 \cdot 13}{2} \cdot 30 = 5\,850 \text{ cm}^3$$

- Volumen de la pirámide y del tronco de pirámide resultantes:

La base de la pirámide inicial y la base de la pirámide pequeña generada por el plano son semejantes (método de proyecciones). Por tanto, sus lados serán proporcionales.

La pirámide pequeña será una pirámide de altura $\frac{30}{2}$ cm, lado de la base $\frac{15}{2}$ cm y apotema $\frac{13}{2}$ cm.

Volumen de la pirámide pequeña:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 15/2 \cdot 13/2}{2} \cdot \frac{30}{2} = \frac{5\,850}{8} = 731{,}25 \text{ cm}^3$$

Volumen del tronco de cono = 5 850 – 731,25 = 5 118,75 cm^3

41 **Para medir el volumen de una piedra más grande que la del ejercicio 35, depositamos el mismo recipiente lleno de agua dentro de una gran fuente cilíndrica vacía. Echamos la piedra dentro de la vasija y el agua derramada sube 2,3 cm.**

Halla el volumen de esta otra piedra sabiendo que el diámetro interior de la fuente es de 24 cm.

Diámetro exterior de la vasija = 9 cm → *radio* = 4,5 cm

Diámetro interior de la fuente = 24 cm → *radio* = 12 cm

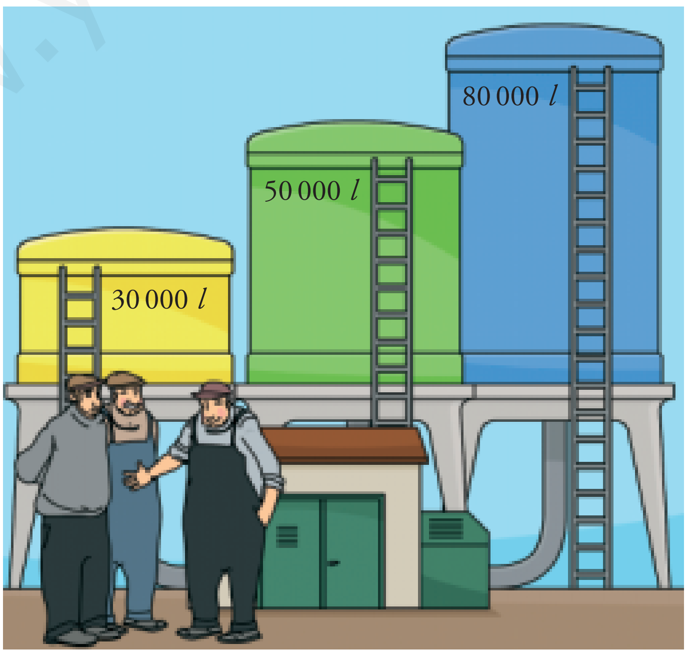
Volumen de la base (diferencia de círculos) = $\pi \cdot 12^2 - \pi \cdot 4{,}5^2 = 388{,}6$ cm^2

Volumen del agua = 388,6 · 2,3 = 893,78 cm^3

El volumen de la piedra es de 893,78 cm^3.

PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

42



Luis, Lucio y Leo quieren regar sus campos con el agua del depósito grande (los otros dos están vacíos). Han acordado que Luis se llevará el 50%, Lucio el 25% y Leo el resto. Por supuesto, tienen bombas para trasegar agua, pero no disponen de medidas. Solo saben la capacidad de los tres depósitos. ¿Cómo lo harán?

En el momento que se sepa la cantidad que corresponde a alguno de ellos, esta puede verterse al campo correspondiente.

Luis se llevará el 50% $\rightarrow$ 40 000 *l*

Lucio se llevará el 25% $\rightarrow$ 20 000 *l*

Leo se llevará el 25% $\rightarrow$ 20 000 *l*

Llamamos *A* al depósito de 30 000 l, *B* al de 50 000 *l* y *C* al de 80 000 *l*.

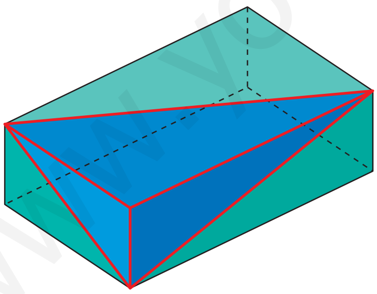
Se trasvasan 50 000 *l* del depósito *C* al *B* y, a continuación, 30 000 *l* del *B* al *A*. Así, tendrán 20 000 *l* en *B*, con los que puede regar, por ejemplo, Lucio.

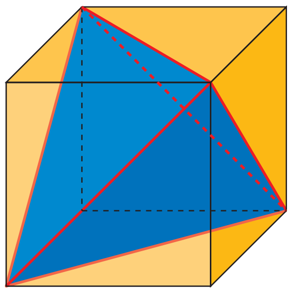
Ahora tienen 30 000 l en *C* y 30 000 en *A*. Se pasan los 30 000 *l* de *A* a *B* y 20 000 *l* de *C* a *B*. Ahora en *A* no hay nada, en *B* hay 50 000 *l* y en *C* hay 10 000 *l*.

Se pasan 30 000 litros de *B* a *A*, con lo que vuelven a tener 20 000 *l* en *B*, los que le corresponden a Leo.

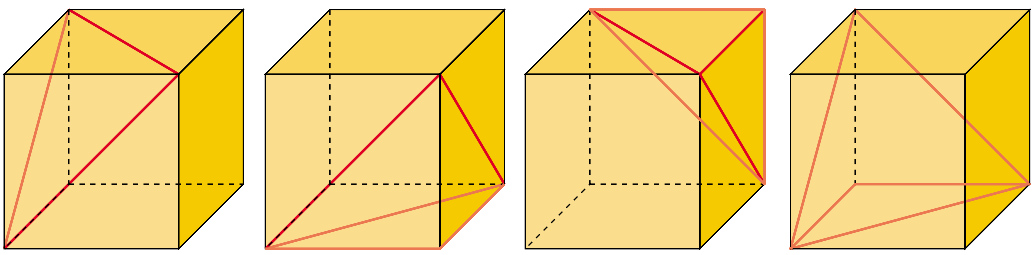
Y luis ya tiene sus 40 000 litros, los 30 000 de *A* y los 10 000 de *C*.

43 **¿Qué porción de la caja ocupa cada uno de los siguientes tetraedros?**





Para formar el tetraedro marcado en la caja cúbica, hay que eliminar del cubo estos cuatro cuerpos marcados en rojo:



Cada uno de ellos es una pirámide de base triangular.

Si el cubo tiene arista a, la base de la pirámide tiene área $\frac{a^2}{2}$ y su altura es a.

Su volumen, por tanto, es:

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{1}{6} a^3$$

El volumen del tetraedro será entonces:

$$V_{tetraedro} = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{6} a^3 = a^3 - \frac{2}{3} a^3 = \frac{1}{3} a^3$$

Es decir, $\frac{1}{3}$ del volumen de la caja cúbica.

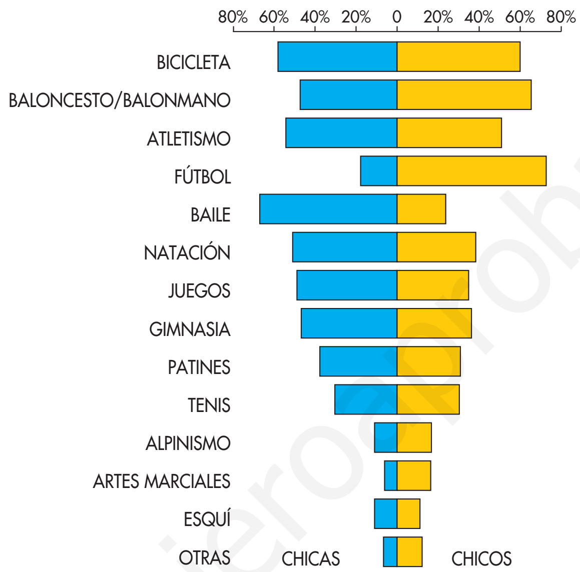
PÁGINA 268

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Gráficas estadísticas

1 △△△ **Observa este gráfico:**

ACTIVIDADES FÍSICAS QUE SUELEN PRACTICAR LOS ESCOLARES ESPAÑOLES



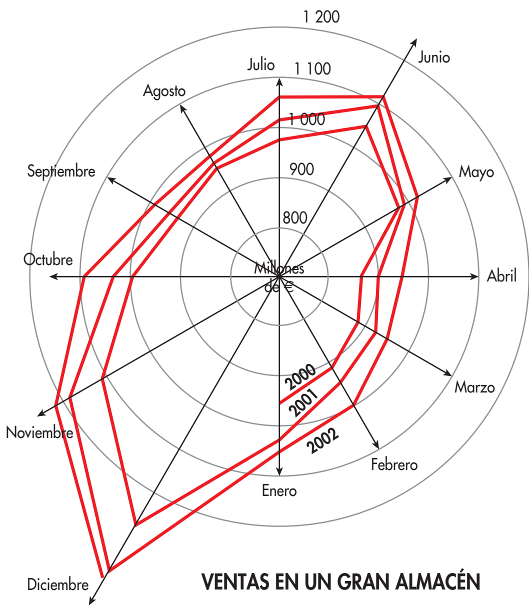
a) ¿En qué actividades se notan más las diferencias de afición entre chicos y chicas?

b) ¿En cuáles hay aproximadamente la misma afición?

a) En fútbol y baile.

b) En bicicleta, altelismo, tenis y esquí.

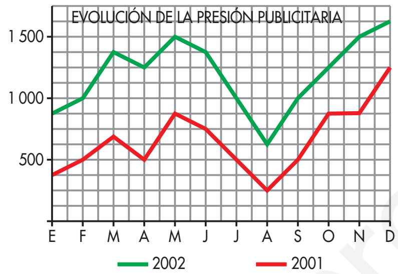
2 △△△ **Intenta explicar la curiosa forma de esta gráfica.**



¿A qué crees que se deben los grandes picos que hay en diciembre?

Las ventas se han incrementado gradualmente cada uno de los años. Los periodos de mayor venta están entre mayo y julio, con la llegada del verano y, sobre todo, alrededor de diciembre, sin duda por la compra de los regalos navideños.

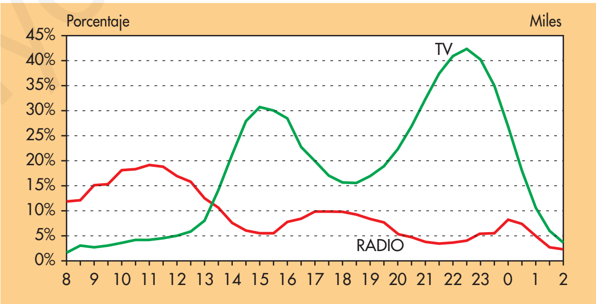
3 **Esta serie de tiempo refleja el número de anuncios vistos en televisión por persona y mes, durante los años 2001 y 2002.**



Analiza en qué meses la publicidad es máxima y en cuáles es mínima.

La presión publicitaria ha aumentado durante el año 2002. Los meses en los que la publicidad alcanza su máximo son en diciembre y en mayo, las navidades y la llegada del verano. Es mínima en agosto y en enero, el mes tradicional de vacaciones y la llamada "cuesta de enero".

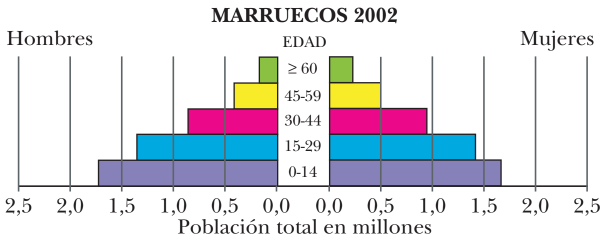
4 **Esta gráfica corresponde al porcentaje de personas que ven televisión o escuchan radio, en las distintas horas del día.**

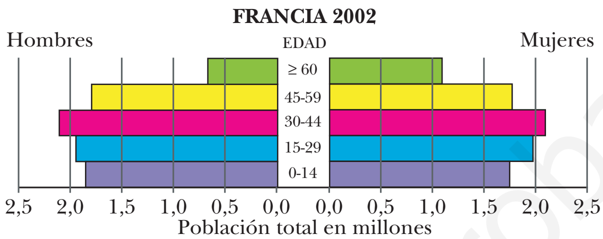


Describe, comparativamentre, ambos fenómenos.

Durante la mañana, hasta las 13:00 horas, los espectadores de televisión no sobrepasan el 10%. Durante este periodo, los oyentes de radio superan a los espectadores de televisión, llegando a su máximo a las 11 de la mañana. A partir de las 13:30, la televisión supera a la radio, obteniendo sus máximos en audiencia a las 15:00 horas, con algo más de un 30%, y a las 23:00 horas, con algo más del 40% de la audiencia. A partir de ese momento, los espectadores de televisión descienden hasta situarse prácticamente al nivel de los oyentes de radio, sobre las 2:00 horas.

5 △△△ **Observa estas pirámides de población:**





a) Compara las proporciones de niños y ancianos en estos dos países.

b) ¿En cuál de ellos se aprecia más diferencia en la longevidad de las mujeres y los hombres?

a) Francia tiene una población muy envejecida frente a Marruecos. El número de personas menores de 14 años en ambos países es muy similar; sin embargo, la población mayor de 60 años en Francia es mucho mayor que en Marruecos.

b) Es mucho más patente en Francia. El número de mujeres mayores de 60 años supera con creces al de hombres.

PÁGINA 269

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

6 △△△ **Halla la media, la mediana, la moda y la desviación media de estos conjuntos de datos:**

a) 2, 4, 4, 41, 17, 13, 24.

b) 1, 3, 5, 4, 2, 8, 9, 6, 10, 6.

c) 1, 3, 8, 9, 4, 1, 1, 7, 10, 10.

a) $Media = \dfrac{2 + 4 + 4 + 41 + 17 + 13 + 24}{7} = \dfrac{105}{7} = 15$

$Mediana = 13 \ (2, 4, 4, 13, 17, 24, 41)$

$Moda = 4$

Desviciones: 13, 11, 11, 2, 2, 9, 26

Desvición media: $\dfrac{13 + 11 + 11 + 2 + 2 + 9 + 26}{7} = 10{,}6$

b) *Media* = $\dfrac{1 + 3 + 5 + 4 + 2 + 8 + 9 + 6 + 10 + 6}{10} = \dfrac{54}{10} = 5{,}4$

Mediana = 5,5 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 8, 9, 10)

Moda = 6

Desviciones: 4,4; 3,4; 2,4; 1,4; 0,4; 0,6; 0,6; 2,6; 3,6; 4,6

Desvición media:

$$\frac{4{,}4 + 3{,}4 + 2{,}4 + 1{,}4 + 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}6 + 2{,}6 + 3{,}6 + 4{,}6}{10} = \frac{24}{10} = 2{,}4$$

c) *Media* = $\dfrac{1 + 3 + 8 + 9 + 4 + 1 + 1 + 7 + 10 + 10}{10} = \dfrac{54}{10} = 5{,}4$

Mediana = 5,5 (1, 1, 1, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 10)

Moda = 1

Desviciones: 4,4; 4,4; 4,4; 2,4; 1,4; 1,6; 2,6; 3,6; 4,6; 4,6

Desvición media:

$$\frac{(4{,}4 \cdot 3) + 2{,}4 + 1{,}4 + 1{,}6 + 2{,}6 + 3{,}6 + (4{,}6 \cdot 2)}{10} = \frac{34}{10} = 3{,}4$$

7 ▲▲△ **A los estudiantes de un curso se les pregunta qué carrera estudiarán. Estas son las respuestas:**

a) Representa los resultados en un diagrama de barras.

b) ¿Cuál es la moda?

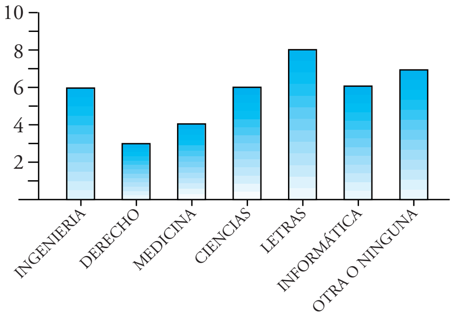
c) ¿Por qué esta distribución no tiene media ni mediana?

d) ¿Se podría calcular la desviación media?

e) Halla el porcentaje correspondiente a cada una de las carreras.

INGENIERÍA	6
DERECHO	3
MEDICINA	4
CIENCIAS	6
LETRAS	8
INFORMÁTICA	6
OTRA O NINGUNA	7

a)



b) Moda: LETRAS

c) Porque es una variable cualitativa.

d) No

e) Total de alumnos y alumnas: 40

Ingeniería $\rightarrow \dfrac{6 \cdot 100}{40} = 15\%$

Derecho $\rightarrow \dfrac{3 \cdot 100}{40} = 7{,}5\%$

Medicina $\rightarrow \dfrac{4 \cdot 100}{40} = 10\%$

Ciencias $\rightarrow \dfrac{6 \cdot 100}{40} = 15\%$

Letras $\rightarrow \dfrac{8 \cdot 100}{40} = 20\%$

Informática $\rightarrow \dfrac{6 \cdot 100}{40} = 15\%$

Otra o ninguna $\rightarrow \dfrac{7 \cdot 100}{40} = 17{,}5\%$

9 ▲▲▲ **Halla la media y la mediana en las siguientes tablas de frecuencias:**

VALORES	FRECUENCIAS
1	**5**
2	**7**
3	**8**
4	**14**
5	**20**
6	**16**
7	**20**

VALORES	FRECUENCIAS
0	**5**
2	**8**
4	**10**
6	**22**
8	**11**
10	**4**

VALORES	FRECUENCIAS	
1	5	$1 \cdot 5 = 5$
2	7	$2 \cdot 7 = 14$
3	8	$3 \cdot 8 = 24$
4	14	$4 \cdot 14 = 56$
5	20	$5 \cdot 20 = 100$
6	16	$6 \cdot 16 = 96$
7	20	$7 \cdot 20 = 140$
TOTAL	90	435

$\bar{x} = \dfrac{435}{90} = 4{,}83$

Mediana:

Hay 5 con valor 1.

Hay 5 + 7 = 12 con valores 2 o menor.

Hay 12 + 8 = 20 con valores 3 o menor.

Hay 20 + 14 = 34 con valores 4 o menor.

Hay 34 + 20 = 54 con valores 5 o menor.

Por tanto, las posiciones 45º y 46º tienen un 5. Así, $Me = 5$.

VALORES	FRECUENCIAS	
0	5	$0 \cdot 5 = 0$
2	8	$2 \cdot 8 = 16$
4	10	$4 \cdot 10 = 40$
6	22	$6 \cdot 22 = 132$
8	11	$8 \cdot 11 = 88$
10	4	$10 \cdot 4 = 40$
TOTAL	60	316

$$\bar{x} = \frac{316}{60} = 5,26$$

Mediana:

Hay 5 con valor 0.

Hay 5 + 8 = 13 con valor 2 o menor.

Hay 13 + 10 = 23 con valor 4 o menor.

Hay 23 + 22 = 45 con valor 6 o menor.

Por tanto, las posiciones 30º y 31º tienen un 6. Así, $Me = 6$.

TABLAS DE DOBLE ENTRADA

10 ▲▲△ **En una residencia hay 200 ancianos. De entre ellos, 80 son fumadores (F) y 78 están enfermos de los pulmones (E). Hay 48 que están enfermos de los pulmones y, además, fuman. Acaba de llenar la siguiente tabla:**

	E	NO E	
F	48		80
NO F			
	78		200

¿Cuántos hay que ni fuman ni están enfermos de los pulmones?

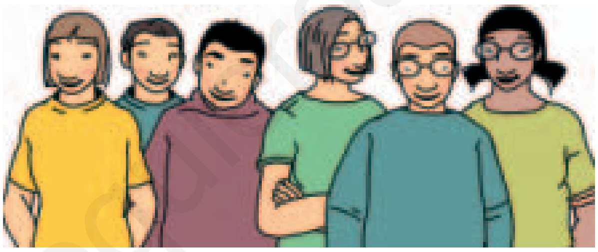
	E	NO E	
F	48	32	80
NO F	30	90	120
	78	122	200

Hay 90 ancianos que no fuman y no están enfermos de los pulmones.

11 **En una clase de 30 alumnos y alumnas hay 17 chicas y el resto son chicos. En total, hay 14 con gafas. Sabemos que 6 chicas tienen gafas. ¿Cuántos chicos hay sin gafas?**

Para responder, llena la tabla siguiente:

	GAFAS	NO GAFAS	
CHICAS			
CHICOS			



	GAFAS	NO GAFAS	
CHICAS	6	11	17
CHICOS	8	5	13
	14	16	30

Hay 5 chicos sin gafas.

PÁGINA 253

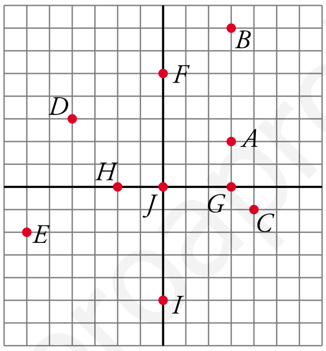
EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Interpretación de puntos

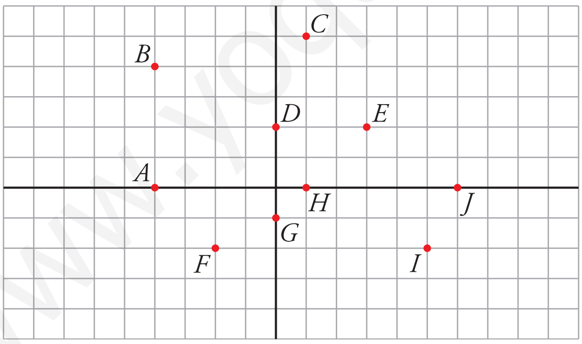
1 △△△ **Dibuja sobre un papel cuadriculado unos ejes coordenados y representa los siguientes puntos:**

$A(3, 2)$; $B(3, 7)$; $C(4, -1)$; $D(-4, 3)$; $E(-6, -2)$;

$F(0, 5)$; $G(3, 0)$; $H(-2, 0)$; $I(0, -5)$; $J(0, 0)$

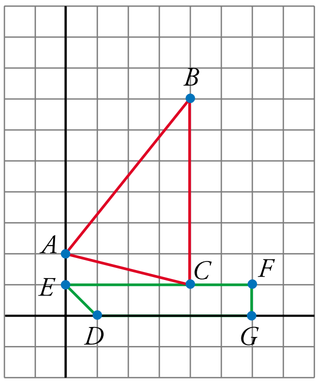


2 △△△ **Di las coordenadas de cada uno de los siguientes puntos:**

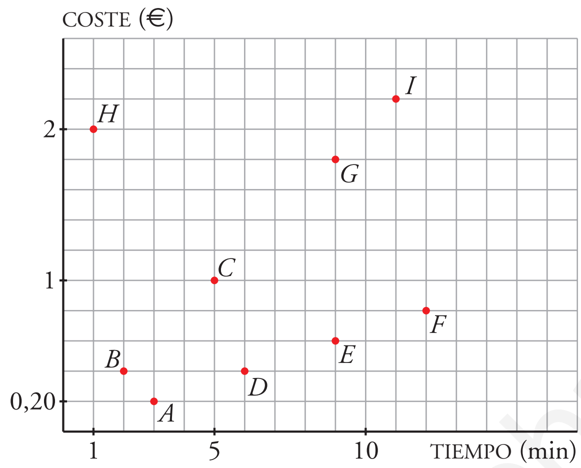


$A(-4, 0)$	$B(-4, 4)$
$C(1, 5)$	$D(0, 2)$
$E(3, 2)$	$F(-2, -2)$
$G(0, -1)$	$H(1, 0)$
$I(5, -2)$	$J(6, 0)$

3 △△△ **Representa los puntos: $A(0, 2)$; $B(4, 7)$; $C(4, 1)$; $D(1, 0)$; $E(0, 1)$; $F(6, 1)$; $G(6, 0)$. Une mediante segmentos AB, BC, CA, DE, EF, FG, GD.**



4 ▲▲△ **Cada punto del diagrama siguiente representa una llamada telefónica:**



a) ¿Cuál ha sido la llamada más larga?

b) ¿Cuál ha sido la llamada más corta?

c) Una de las llamadas ha sido a Australia. ¿De cuál crees que se trata?

d) Hay varias llamadas locales. ¿Cuáles son?

a) La llamada más larga ha sido la *F*, 12 minutos.

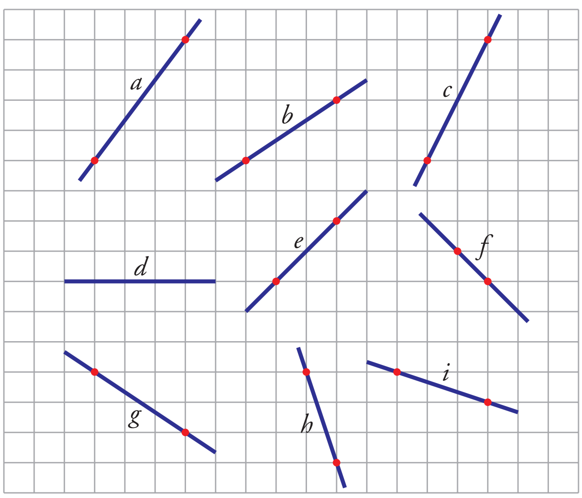
b) La llamada más corta ha sido la *H*, 1 minuto.

c) Debe ser la *H* porque, siendo muy corta en tiempo (1 minuto), es de las más caras, 2 €.

d) Las llamadas locales son *A*, *D*, *E* y *F* (todas cuestan 0,20 € cada 3 minutos).

REPRESENTACIÓN DE RECTAS

5 ▲△△ **Halla la pendiente de cada una de las siguientes rectas:**



a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{2} = 2$

d) 0 e) $\frac{2}{2} = 1$ f) -1

g) $-\frac{2}{3}$ h) -3 i) $-\frac{1}{3}$

6 Representa las siguientes funciones:

a) $y = 2x$ b) $y = \frac{1}{2}x$

c) $y = -3x$ d) $y = \frac{4}{3}x$

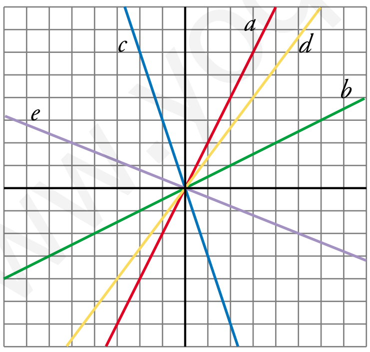
e) $y = -\frac{2}{5}x$ f) $y = \frac{3}{4}x$

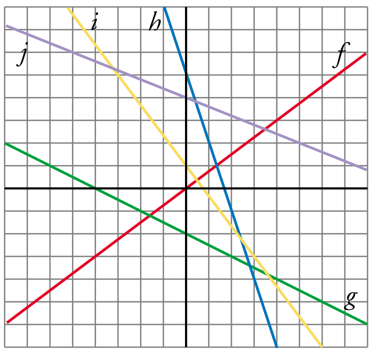
g) $y = -\frac{1}{2}x - 2$ h) $y = -3x + 5$

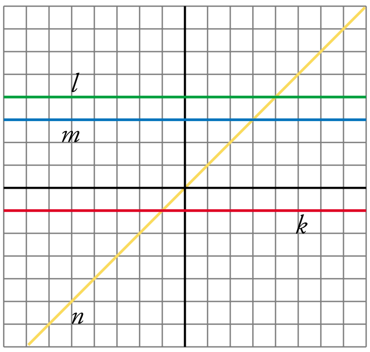
i) $y = -\frac{4}{3}x + 1$ j) $y = -\frac{2}{5}x + 4$

k) $y = -1$ l) $y = 4$

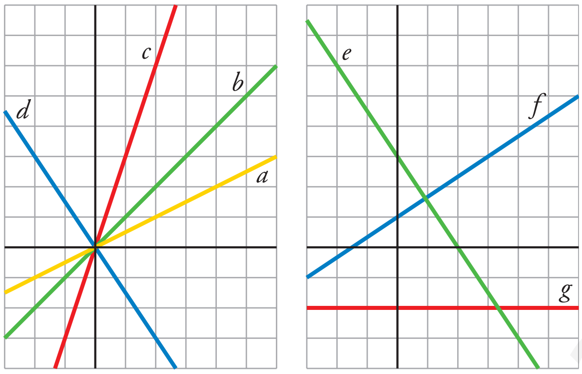
m) $y = 3$ n) $y = x$







7 △△△ Escribe la ecuación de cada una de las siguientes funciones:



a) $y = \frac{1}{2}x$ b) $y = x$

c) $y = 3x$ d) $y = -\frac{3}{2}x$

e) $y = 3 - \frac{3}{2}x$ f) $y = 1 + \frac{2}{3}x$ g) $y = -2$

PÁGINA 254

PROBLEMAS CON FUNCIONES

9 △△△ Representa las siguientes parábolas obteniendo en cada caso una tabla de valores:

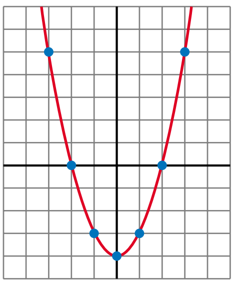
a) $y = x^2 - 4$ **b)** $y = x^2 + 1$ **c)** $y = -x^2$

d) $y = -x^2 + 1$ **e)** $y = (x - 2)^2$ **f)** $y = (x - 2)^2 - 4$

g) $y = x^2 - 4x$ **h)** $y = x^2 - 4x + 3$

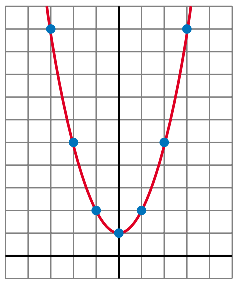
a)

x	y
–3	5
–2	0
–1	–3
0	–4
1	–3
2	0
3	5



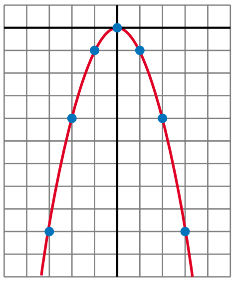
b)

x	y
–3	10
–2	5
–1	2
0	1
1	2
2	5
3	10



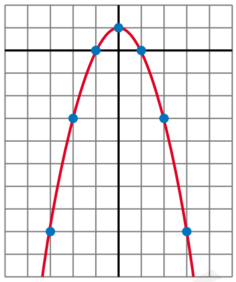
c)

x	y
–3	–9
–2	–4
–1	–1
0	0
1	–1
2	–4
3	–9



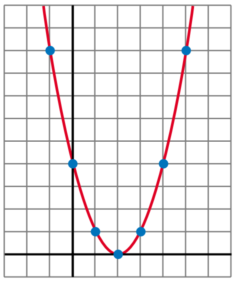
d)

x	y
–3	–8
–2	–3
–1	0
0	1
1	0
2	–3
3	–8



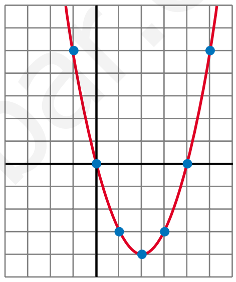
e)

x	y
–1	9
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4
5	9



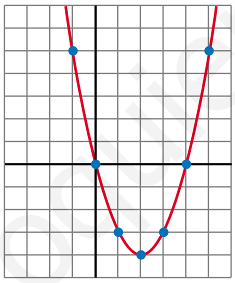
f)

x	y
–1	5
0	0
1	–3
2	–4
3	–3
4	0
5	5



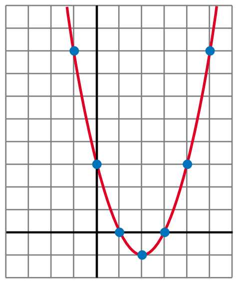
g)

x	y
–1	5
0	0
1	–3
2	–4
3	–3
4	0
5	5

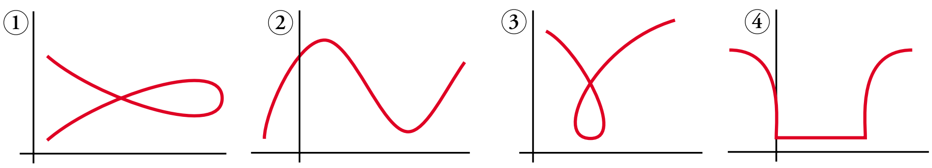


h)

x	y
–1	8
0	3
1	0
2	–1
3	0
4	3
5	8



10 ▲△△ **¿Cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función y cuáles no?**

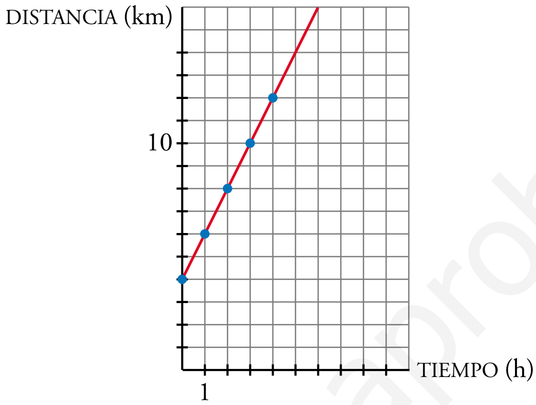


Corresponden a una función las gráficas 2 y 4.

11 ▲△△ **Margarita pasea alejándose de su pueblo a una velocidad de 2 km/h. En este momento se encuentra a 4 km del pueblo. ¿Dónde se encontrará dentro de una hora? ¿Dónde se encontraba hace una hora?**

Representa su distancia al pueblo en función del tiempo transcurrido a partir de ahora. Halla la ecuación de la función llamando x al tiempo e y a la distancia al pueblo.

- Dentro de una hora se encontrará a 6 km del pueblo.
- Hace una hora se encontraba a 2 km del pueblo.
- Ecuación: $y = 2x + 4$

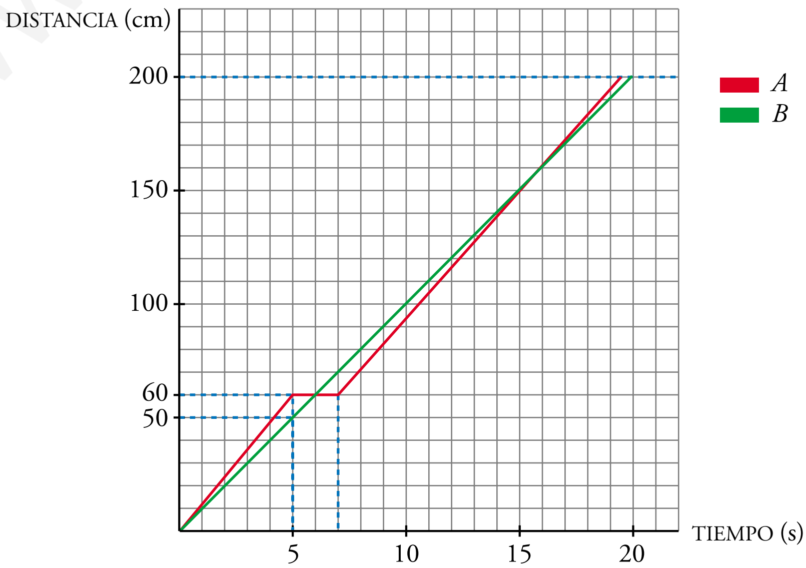


INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS

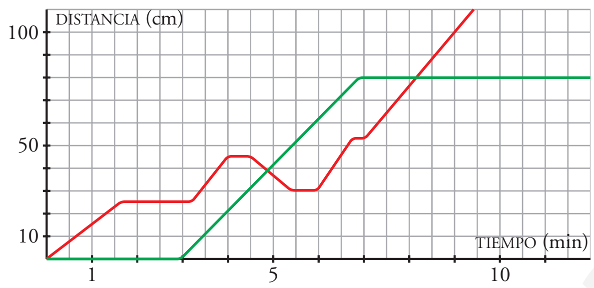
12 **Representa gráficamente una carrera de 200 m entre dos corredores, con las siguientes características:**

***A* sale más rápidamente que *B* y, en 5 segundos, le saca 10 m de ventaja.**

***A* se cae en el instante 5 s y *B* le adelanta. Pero *A* se levanta en 2 s y adelanta a *B* en la misma línea de meta.**



13 △△△ **Rafael y María ponen a competir, en una carrera, a sus caracoles; uno de ellos lleva una pegatina roja y otro una pegatina verde.**



El verde tarda en salir y se para antes de llegar. ¿Cuánto tiempo está parado en cada caso? ¿A qué distancia de la meta se para definitivamente? ¿Cuántos centímetros y durante cuánto tiempo marcha el rojo en dirección contraria? Describe la carrera.

a) El caracol con una pegatina verde está parado, en la salida, 3 minutos y, más tarde, desde el minuto 7 hasta que finaliza la carrera, se para a 30 cm de la meta.

b) El rojo, marcha en sentido contrario durante 1 minuto una distancia de 15 centímetros.

c) Al comenzar la carrera, el verde no toma la salida, manteniéndose parado durante 3 minutos.

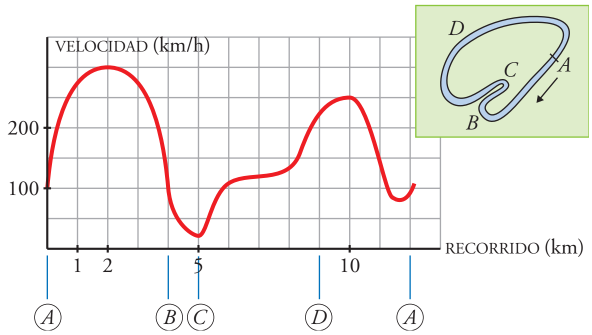
El rojo marcha a una velocidad uniforme y recorre, en algo más de un minuto y medio, unos 25 centímetros. Se para durante 1,5 minutos y vuelve a iniciar la marcha, recorriendo en 3/4 de minuto unos 20 centímetros. Se vuelve a parar durante 1/2 minuto y regresa sobre sus pasos 15 centímetros en 1 minuto.

Aprovecha esta coyuntura el verde, que inició su carrera en el minuto 3 a una velocidad de 20 cm/min, para adelantar al rojo en el minuto 5 de la carrera y a una distancia del punto de salida de 40 cm. El verde continúa con esa velocidad hasta el minuto 7, en el que ha avanzado 80 cm y se para, no volviendo a reanudar su carrera.

Nos quedamos con el rojo en el minuto 5,5, en el que se para medio minuto y empieza a avanzar durante 3/4 minutos, se vuelve a parar medio minuto a 55 centímetros de la salida y, desde aquí, como una bala, a 25 cm/min, se dirige hacia la meta, adelantando al verde a 80 cm de la salida en el minuto 8 y 20 segundos, aproximadamente.

Gana el caracol con la etiqueta roja.

14 ▲▲▲ **Esta gráfica describe la velocidad de un bólido de carreras en cada lugar de un circuito:**



Di en qué tramos la velocidad es creciente y en cuáles es decreciente. ¿A qué crees que se deben los aumentos y disminuciones de velocidad?

La velocidad es creciente:

- Desde 0 (punto *A*) hasta el kilómetro 2.
- Desde el kilómetro 5 (punto *C*) hasta el kilómetro 10 (un poco después de *D*).
- Desde el kilómero 11,5 hasta *A* (empieza de nuevo el circuito).

La velocidad es decreciente:

- Desde el kilómetro 2 hasta el kilómetro 5 (punto *C*).
- Desde el kilómetro 10 hasta 500 m antes de llegar a *A* (empieza de nuevo el circuito).

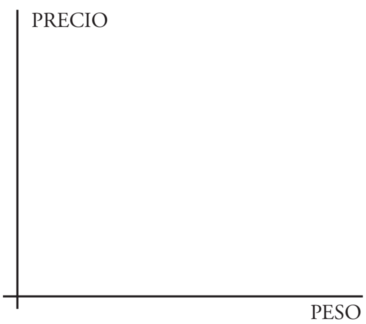
Las disminuciones de velocidad parecen causadas por las curvas del circuito. Así, en la curva más cerrada, *C*, la velocidad es mínima.

Los aumentos de velocidad, según la gráfica, se identifican con los tramos del circuito en que no hay curvas.

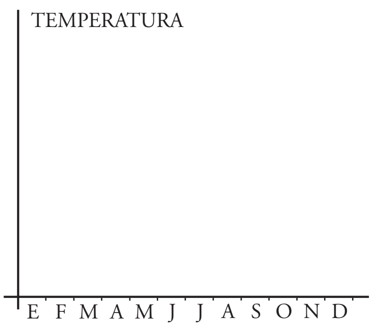
PÁGINA 255

PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

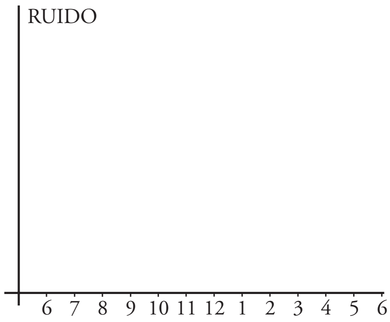
15 **Representa una gráfica que refleje cada una de las situaciones que se describen a continuación:**



PRECIO DE LAS BOLSAS DE PATATAS FRITAS

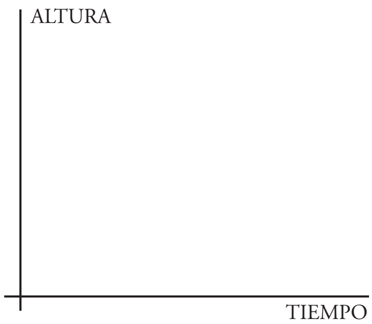


TEMPERATURAS MÍNIMAS DIARIAS EN TOLEDO, A LO LARGO DE UN AÑO



NIVEL DE RUIDO DE UNA CALLE CÉNTRICA DE UNA GRAN CIUDAD, DESDE LAS 6 DE LA MAÑANA HASTA LAS 6 DE LA TARDE

NIVEL DE AGUA EN UN PANTANO A LO LARGO DE UN AÑO

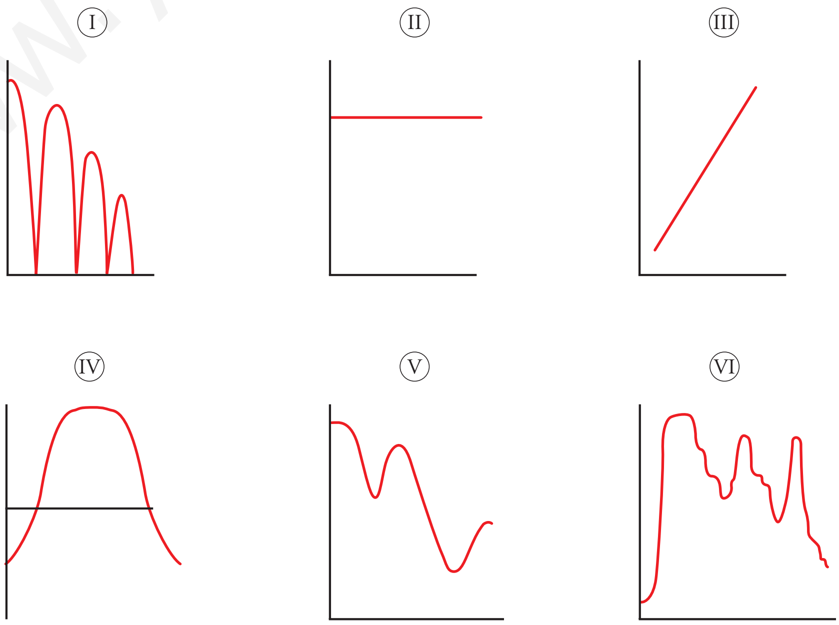


ALTURA DE UNA PELOTA, AL PASAR EL TIEMPO

DISTANCIA A LA TIERRA DE UN SATÉLITE ARTIFICIAL, AL PASAR EL TIEMPO

Para representar las gráficas puedes fijarte en las seis siguientes.

Responden, en otro orden, a lo que se te pide:



PRECIO DE LAS BOLSAS DE PATATAS FRITAS → III

TEMPERATURAS MÍNIMAS DIARIAS EN TOLEDO, A LO LARGO DE UN AÑO → IV

NIVEL DE RUIDO DE UNA CALLE CÉNTRICA DE UNA GRAN CIUDAD → VI

NIVEL DE AGUA EN UN PANTANO A LO LARGO DE UN AÑO → V

ALTURA DE UNA PELOTA AL PASAR EL TIEMPO → I

DISANCIA A LA TIERRA DE UN SATÉLITE ARTIFICIAL, AL PASAR EL TIEMPO → II

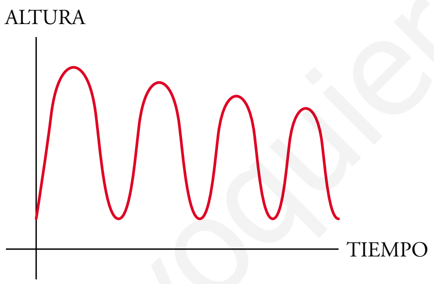
16 Y ahora, sin ninguna ayuda. Representa las siguientes funciones:

a) La altura a la que se encuentra el asiento de un columpio, al pasar el tiempo.

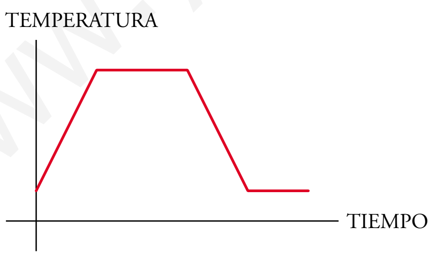
b) La temperatura de un cazo de agua que se calienta al fuego hasta que hierve y luego se deja enfriar.

c) Las ganancias de una casa de alquiler de vídeos según su precio: si son demasiado baratos, alquilará muchos, pero ganará poco, y si son demasiado caros, alquilará pocos y también ganará poco.

a)



b)



c)