2

EDUCACIÓN SECUNDARIA

Matemáticas

J. Colera, I. Gaztelu

ADAPTACIÓN CURRICULAR

Esta serie de **Matemáticas** responde a un proyecto pedagógico creado y desarrollado por Anaya Educación para la ESO. En su elaboración han participado:

Autores: José Colera e Ignacio Gaztelu

Coordinación editorial: Mercedes García-Prieto

Edición: César de la Prida

Diseño de cubiertas e interiores: Miguel Ángel Pacheco y Javier Serrano

Tratamiento infográfico del diseño: Javier Cuéllar, Patricia Gómez y Teresa Miguel

Equipo técnico: José Luis Román e Isabel Pérez

Corrección: Sergio Borbolla

Ilustraciones: Ángeles Peinador, Carlos Romanos, Bruno Romanos y Jesús Aguado

Edición gráfica: Olga Sayans

Fotografías: Age Fotostock, Archivo Anaya (Agromayor, L.; Candel, C.; Cosano, P.; Leiva, Á de; Lezama, D.; Ortega, Á.; Padura, S.; Ramón Ortega, P./Fototeca España; Valls, R.), Cristina Beltrami/www.duesecolidiscultura.it, Corbis/Cordon Press, Stockphotos.

Agradecimientos a la niña: Icíar de Oliveira

Agradecemos la colaboración de Leticia Colera.

Índice

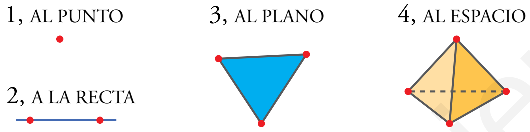
1 Divisibilidad y números enteros

Los conocimientos matemáticos de los antiguos egipcios y babilonios eran extensos y muy prácticos. **Pitágoras** (siglo VI a.C.) aprendió de ellos, pero en su actividad matemática aportó dos elementos que supusieron una extraordinaria mejora:

— En el estudio de la matemática buscó la satisfacción intelectual y no aplicaciones prácticas.

— Impuso que las propiedades se demostraran mediante razonamientos lógicos.

Pitágoras y sus discípulos rindieron un culto muy especial a los números, porque "el universo entero es armonía y número". Según ellos, los números lo regían todo: la música, el movimiento de los planetas, la geometría… Hablaban de números rectangulares, triangulares, cuadrados, pentagonales… Consideraban que el número 10 era *ideal* (incluso *sagrado*), porque era la suma de 1 + 2 + 3 + 4 y asociaban:

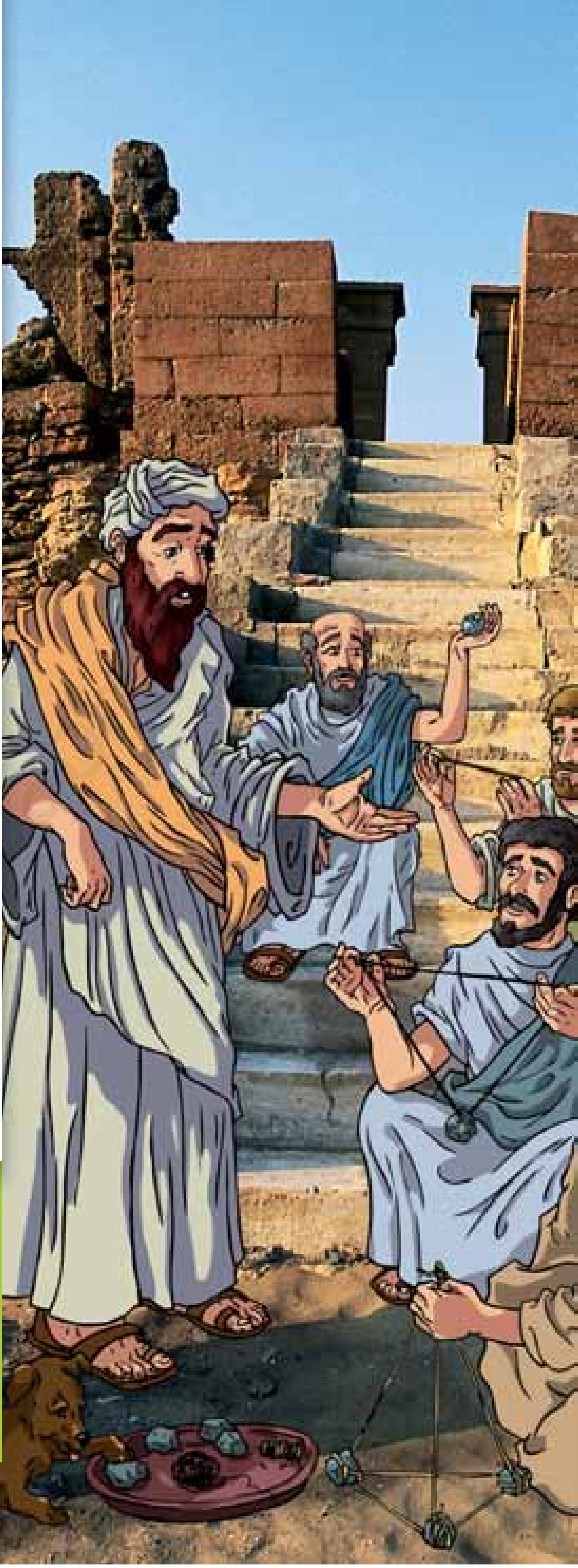


Se dedicaron con entusiasmo a la *aritmética*, nombre que dieron al estudio de los números y de sus propiedades.

Euclides (siglo III a.C.) recopiló, completó y sistematizó la mayor parte de los conocimientos matemáticos de su época. Aunque su mayor contribución fue a la geometría, también dio un gran impulso a la aritmética.

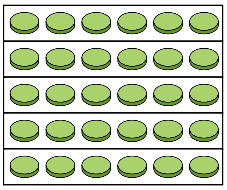
DEBERÁS RECORDAR

- El significado de la división y la relación existente entre sus términos.
- Cuándo son necesarios los números negativos.
- Cuáles son los números enteros, cómo se ordenan y cómo se representan en la recta numérica.
- La prioridad de las operaciones en las expresiones con números naturales.



1 La relación de divisibilidad

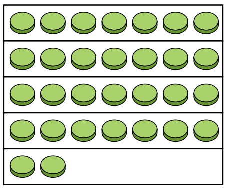
Divisibilidad



$$\begin{array}{r|l} 30 & 6 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

(EXACTA)

30 **es divisible** entre 6.



$$\begin{array}{r|l} 30 & 7 \\ \cline{2-2} 2 & 4 \end{array}$$

(NO EXACTA)

30 **no es divisible** entre 7.

Múltiplos y divisores

Dos números están emparentados por la relación de divisibilidad cuando su cociente es exacto.

▼ **EJEMPLO**

La división 60 : 20 es exacta.

El número 60 contiene exactamente 3 veces a 20.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 20 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array} \rightarrow \text{60 es divisible entre 20.} \begin{cases} \text{60 es múltiplo de 20.} \\ \text{20 es divisor de 60.} \end{cases}$$

Si la división $a : b$ es exacta → a es **múltiplo** de b. → b es **divisor** de a.

Los múltiplos de un número

Los múltiplos de un número lo contienen una cantidad exacta de veces y se obtienen multiplicándolo por cualquier otro número natural.

▼ **EJEMPLO**

Calculamos la serie ordenada de múltiplos de 15:

$15 \cdot 1 = 15$ $\quad 15 \cdot 4 = 60$

$15 \cdot 2 = 30$ $\quad 15 \cdot 5 = 75$

$15 \cdot 3 = 45$ $\quad \ldots$

Los números 15 - 30 - 45 - 60 - 75 - … son múltiplos de 15.

- Un número tiene infinitos múltiplos.
- Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad. → $a \cdot 1 = a$ → a es múltiplo de 1. → a es múltiplo de a.

Múltiplos de 12

$12 \cdot 1 = 12$

$12 \cdot 2 = 24$

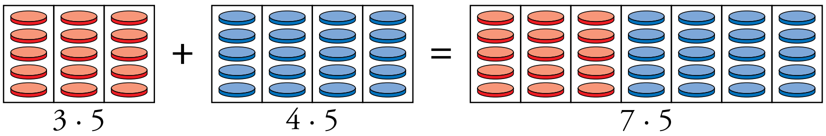
$12 \cdot 3 = 36$

$12 \cdot 4 = 48$

12 - 24 - 36 - 48 - 60 - …

Una propiedad de los múltiplos de un número

Observa que si sumamos dos múltiplos de 5, obtenemos otro múltiplo de 5.



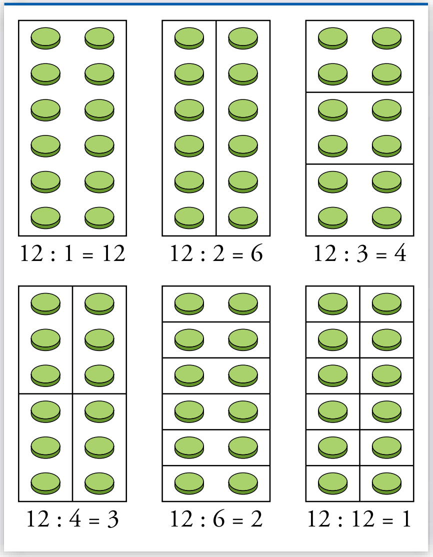
$$3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = (3 + 4) \cdot 5 = 7 \cdot 5$$

- La suma de dos múltiplos de un número a es otro múltiplo de a.

$$m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a$$

- Si a un múltiplo de a se le suma otro número que no lo sea, el resultado no es múltiplo de a.

Divisores de 12



Los divisores de un número

Los divisores de un número están contenidos en él una cantidad exacta de veces y, por tanto, lo dividen con cociente exacto.

EJEMPLO

Buscamos todos los divisores de 75:

$$\begin{array}{r|l} 75 & \underline{1\quad} \\ 05 & 75 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & \underline{3\quad} \\ 15 & 25 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & \underline{5\quad} \\ 25 & 15 \\ 0 & \end{array}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{array}{r|l} 75 & \underline{75\quad} \\ 00 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & \underline{25\quad} \\ 00 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & \underline{15\quad} \\ 00 & 5 \end{array}$$

Los divisores de 75 son ⟶ 1 - 3 - 5 - 15 - 25 - 75

Observa que van emparejados.

- Un número tiene una cantidad finita de divisores.
- Un número tiene al menos dos divisores: él mismo y la unidad.

Actividades

1 Busca, entre estos números, parejas emparentadas por la relación de divisibilidad:

13 15 18 23 81
90 91 92 225 243

2 Calcula mentalmente y contesta.

a) ¿Es 18 múltiplo de 5? ¿Y de 6?

b) ¿Es 50 múltiplo de 10? ¿Y de 9?

c) ¿Es 6 divisor de 20? ¿Y de 300?

d) ¿Es 10 divisor de 75? ¿Y de 750?

3 Calcula con lápiz y papel y responde.

a) ¿Es 17 divisor de 153? ¿Y de 204?

b) ¿Es 780 múltiplo de 65? ¿Y de 80?

4 Selecciona, entre estos números:

20 30 36 40 50
60 65 75 80 90
96 112 120 222 300

a) Los múltiplos de 10. b) Los múltiplos de 12.

c) Los múltiplos de 15. d) Los múltiplos de 30.

5 Encuentra, entre estos números:

1 2 3
4 5 6
7 8 9
10 12 15
25 30 50

a) Los divisores de 60.

b) Los divisores de 75.

c) Los divisores de 90.

c) Los divisores de 100.

6 Escribe los cinco primeros múltiplos de 12 y los cinco primeros múltiplos de 13.

7 Calcula todos los divisores de cada uno de los siguientes números:

12 16 30 71
130 150 203

Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son una serie de reglas, muy simples, que permiten descubrir con rapidez si un número es múltiplo de 2, 3, 5, …

Ten en cuenta

Un número es múltiplo de 2 cuando es par.

Divisibilidad por 2

Un número de varias cifras siempre se puede descomponer en un múltiplo de 2 más la cifra de las unidades:

$$\underset{\boxed{\text{NÚMERO}}}{\underset{\downarrow}{176}} \quad = \quad \underset{\boxed{\text{MÚLTIPLO DE } 2}}{\underset{\downarrow}{170}} \quad + \quad \underset{\boxed{\text{CIFRA UNIDADES}}}{\underset{\downarrow}{6}}$$

Y según la propiedad que has estudiado en la página 18, para que el número sea múltiplo de 2, ha de serlo la cifra de las unidades.

Un número es **múltiplo de 2** cuando termina en 0, 2, 4, 6 u 8.

Divisibilidad por 5 y por 10

Siguiendo razonamientos similares al anterior, se demuestra que:

- Un número es **múltiplo de 5** si termina en 0 o en 5.
- Un número es **múltiplo de 10** si termina en 0.

Ten en cuenta

Un número formado por nueves es múltiplo de 3 y de 9.

$$9 = 9 \cdot 1 = 3 \cdot 3$$

$$99 = 9 \cdot 11 = 3 \cdot 33$$

$$999 = 9 \cdot 111 = 3 \cdot 333$$

Divisibilidad por 3 y por 9

Un número de varias cifras siempre se puede descomponer en un múltiplo de 3 más la suma de sus cifras.

▼ EJEMPLO

$$234 = 200 + 30 + 4 \rightarrow \begin{cases} 200 = 99 + 99 + 2 \\ 30 = 9 + 9 + 9 + 3 \end{cases}$$

$$\underset{\boxed{\text{NÚMERO}}}{\underset{\downarrow}{234}} \quad = \quad \underset{\boxed{\text{MÚLTIPLO DE } 3}}{\underset{\downarrow}{(99 + 99 + 9 + 9 + 9)}} \quad + \quad \underset{\boxed{\text{SUMA DE LAS CIFRAS}}}{\underset{\downarrow}{(2 + 3 + 4)}}$$

El primer sumando es múltiplo de 3. Para que el número sea múltiplo de 3, también ha de serlo el segundo sumando.

Y el mismo razonamiento sirve para los múltiplos de 9.

- Un número es **múltiplo de 3** si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- Un número es **múltiplo de 9** si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

▼ EJEMPLO

1 254 → 1 + 2 + 5 + 4 = 12 → Es múltiplo de 3.

4 063 → 4 + 0 + 6 + 3 = 13 → No es múltiplo de 3.

2 Números primos y números compuestos

- Los divisores de un número permiten su descomposición en forma de producto de dos o más factores.

  Por ejemplo, los divisores de 40 son: 40 - 20 - 10 - 8 - 5 - 4 - 2 - 1

  $$40 = 8 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

  Los números que, como el 40, se pueden descomponer en factores más simples, se llaman *números compuestos.*

- Sin embargo, otros números, como el 13, solo tienen dos divisores, 13 y 1, y, por tanto, no se pueden descomponer en forma de producto:

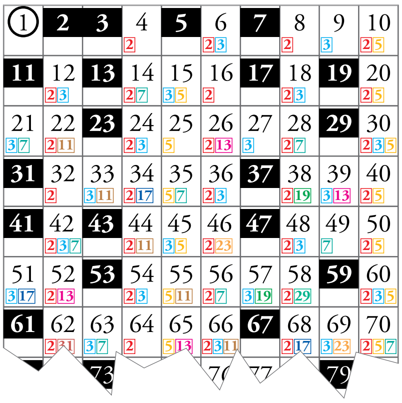
  $$13 = 13 \cdot 1 \;\rightarrow\; \text{no se puede descomponer}$$

  Los números que, como el 13, no se pueden descomponer en factores se llaman *números primos.*

- Un número que no se puede descomponer en factores es un **número primo.**
- Un número primo solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.
- Los números que no son primos se llaman **compuestos.**

Números primos

Criba de Eratóstenes



①	**2**	**3**	4 2	**5**	6 2 3	**7**	8 2	9 3	10 2 5
11	12 2 3	**13**	14 2 7	15 3 5	16 2	**17**	18 2 3	**19**	20 2 5
21 3 7	22 2 11	**23**	24 2 3	25 5	26 2 13	27 3	28 2 7	**29**	30 2 3 5
31	32 2	33 3 11	34 2 17	35 5 7	36 2 3	**37**	38 2 19	39 3 13	40 2 5
41	42 2 3 7	**43**	44 2 11	45 3 5	46 2 23	**47**	48 2 3	49 7	50 2 5
51 3 17	52 2 13	**53**	54 2 3	55 5 11	56 2 7	57 3 19	58 2 29	**59**	60 2 3 5
61	62 2 31	63 3 7	64 2	65 5 13	66 2 3 11	**67**	68 2 17	69 3 23	70 2 5 7
		73			7	77		**79**	

2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19

23 - 29 - 31 - 37 - 41 …

NOTA: El 1 no se considera primo porque no tiene dos divisores.

En la tabla de la izquierda, llamada la Criba de Eratóstenes, se han marcado:

— Los múltiplos de 2 excepto el 2 → (4 - 6 - 8 - 10 - …) → $\boxed{2}$

— Los múltiplos de 3 excepto el 3 → (6 - 9 - 12 - 15 - …) → $\boxed{3}$

— Los múltiplos de 5 excepto el 5 → (10 - 15 - 20 - 25 - …) → $\boxed{5}$

— … y así sucesivamente → $\boxed{7}$, $\boxed{11}$, $\boxed{13}$, $\boxed{17}$, $\boxed{19}$, …

Los números que quedan, salvo el 1, son los números primos.

Estos son los números primos menores que 100:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41

43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97

Actividades

1 Descompón en dos factores los siguientes números:

93 95 153 168 325 533 663

2 Descompón los siguientes números en el máximo número de factores que sea posible:

32 72 81 84 132 200 221

3 Descompón en factores, de todas las formas que sea posible, el número 100.

4 Separa, entre los siguientes números, los primos de los compuestos:

29 39 57 83 91

101 111 113 243 341

Descomposición de un número en factores primos

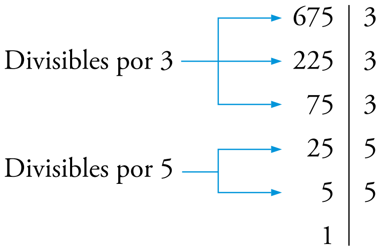
El mayor nivel de descomposición factorial de un número se alcanza cuando todos los factores son primos, pues, como ya sabes, estos no se pueden descomponer en otros más simples.

EJEMPLOS

$72 = 2^3 \cdot 3^2$ $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Recuerda

Para descomponer un número en factores primos, ten en cuenta los criterios de divisibilidad.



$675 = 3^3 \cdot 5^2$

Para descomponer un número en factores primos, conviene actuar ordenadamente. Observa cómo descomponemos el número 924:

$$\begin{array}{rcr|l} & & 924 & 2 \\ 924 : 2 = 462 & \longrightarrow & 462 & 2 \\ 462 : 2 = 231 & \longrightarrow & 231 & 3 \\ 231 : 3 = 77 & \longrightarrow & 77 & 7 \\ 77 : 7 = 11 & \longrightarrow & 11 & 11 \\ 11 : 11 = 1 & \longrightarrow & 1 & \end{array}$$

$924 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 =$
$= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$

Para **descomponer** un número en **factores primos,** lo dividimos entre 2 tantas veces como sea posible; después, entre 3; después, entre 5, … y así sucesivamente entre los siguientes primos hasta obtener 1 en el cociente.

Actividades

5 Descompón mentalmente en el máximo número de factores.

a) 12 b) 16 c) 18 d) 20
e) 24 f) 30 g) 32 h) 36
i) 40 j) 50 k) 75 l) 100

6 Copia y completa en tu cuaderno los procesos de descomposición factorial.

$$\begin{array}{r|l} 5\ 8\ 8 & 2 \\ \square\square\square & 2 \\ \square\square\square & 3 \\ \square\square & 7 \\ \square & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 600 & \square \\ 300 & \square \\ 150 & \square \\ 75 & \square \\ 25 & \square \\ 5 & \square \\ 1 & \end{array}$$

$588 = \square^2 \cdot \square \cdot \square^2$ $600 = \square^3 \cdot \square \cdot \square^2$

7 Descompón estos números en el máximo número de factores:

a) 270 b) 360 c) 630
d) 750 e) 1 000 f) 1 100

8 Descompón en factores los números siguientes:

a) 84 b) 130 c) 160
d) 280 e) 230 f) 400
g) 560 h) 594 i) 720
j) 975 k) 2 340 l) 5 230

9 Calcula los números que tienen las siguientes descomposiciones factoriales:

a) $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ b) $2^3 \cdot 5^3$
c) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ d) $2^2 \cdot 7 \cdot 13$

Múltiplos y divisores de números descompuestos en factores primos

Para facilitar la comprensión del resto de la unidad, conviene que nos paremos a reflexionar sobre la estructura de los múltiplos y los divisores de un número que se presenta descompuesto en factores primos.

Tomemos, por ejemplo, el número 150 descompuesto en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

- Los múltiplos de 150 se obtienen multiplicando 150 por un número:

$$300 = 150 \cdot 2 = \overset{150}{\boxed{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}} \cdot 2$$

$$450 = 150 \cdot 3 = \overset{150}{\boxed{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}} \cdot 3$$

$$600 = 150 \cdot 4 = \overset{150}{\boxed{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}} \cdot 2 \cdot 2$$

$$\dots$$

Un múltiplo de 150 contiene *todos* los factores primos de 150.

- Los divisores de 150 son, aparte de él mismo y de la unidad:

$$150 = 2 \cdot 75 = \boxed{2} \cdot \boxed{3 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$150 = 3 \cdot 50 = \boxed{3} \cdot \boxed{2 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$150 = 5 \cdot 30 = \boxed{5} \cdot \boxed{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$150 = 6 \cdot 25 = \boxed{2 \cdot 3} \cdot \boxed{5 \cdot 5}$$

$$150 = 10 \cdot 15 = \boxed{2 \cdot 5} \cdot \boxed{3 \cdot 5}$$

Un divisor de 150 se construye con *algunos* de los factores primos de 150.

- Cada uno de los múltiplos de un número contiene, al menos, todos los factores primos de dicho número.
- Los divisores de un número están formados por algunos de los factores primos de dicho número.

Observa

Cada divisor de 18, aparte de la unidad, está formado por algunos de los factores primos de 18:

$$\begin{array}{lcl} & 18 & \\ & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & \\ 2 \longrightarrow & ② \cdot 3 \cdot 3 & \rightarrow 2 \\ 3 \longrightarrow & 2 \cdot ③ \cdot 3 & \rightarrow 3 \\ 6 \longrightarrow & ② \cdot ③ \cdot 3 & \rightarrow 2 \cdot 3 \\ 9 \longrightarrow & 2 \cdot ③ \cdot ③ & \rightarrow 3 \cdot 3 \\ 18 \longrightarrow & ② \cdot ③ \cdot ③ & \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 3 \end{array}$$

Actividades

10 Escribe factorizados, sin hacer ninguna operación, tres múltiplos de $12 = 2^2 \cdot 3$.

11 Escribe factorizado un número que sea a la vez múltiplo de $a = 2 \cdot 3 \cdot 3$ y de $b = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

12 Escribe tres múltiplos comunes a los números $m = 2^2 \cdot 3$ y $n = 2^2 \cdot 5$.

13 Escribe factorizados, sin hacer operaciones, todos los divisores de $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$.

14 Escribe un número que sea divisor de $a = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y de $b = 2 \cdot 5 \cdot 5$ a la vez.

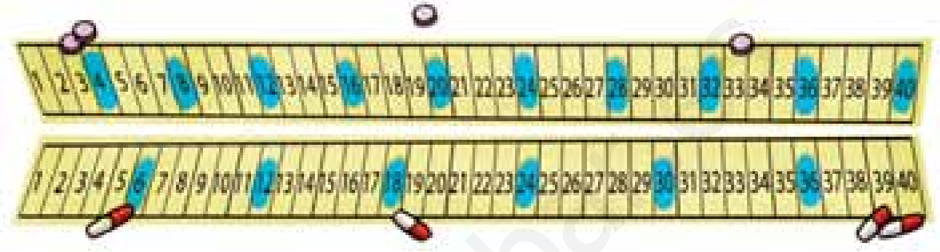
15 Escribe tres divisores comunes a los números $m = 2^3 \cdot 3^2$ y $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

3 Mínimo común múltiplo de dos números

La resolución de ciertos problemas exige el manejo de los múltiplos comunes de varios números. Veamos un ejemplo:

▼ **EJEMPLO**

Doña Rosita toma una píldora para el reuma cada 4 días y una cápsula para el corazón cada 6 días.
¿Cada cuánto tiempo coinciden ambas tomas en el mismo día?



Ambas tomas coinciden en los días que son múltiplos comunes de 4 y 6, y se repiten cada 12 días.

12 24 36 48 …
+12 +12 +12 +12

El menor de estos múltiplos comunes es 12 y recibe el nombre de mínimo común múltiplo de 4 y 6.

Cálculo del mín.c.m. (4, 6)

múltiplos de 4 → 4 - 8 - 12 - 16 - 20 - 24
múltiplos de 6 → 6 - 12 - 18 - 24 - 30 - 36
múltiplos comunes } → 12 - 24 - 36 - 48

mín.c.m. (4, 6) = 12

El menor de los múltiplos comunes de dos o más números, *a, b, c,* … se llama **mínimo común múltiplo,** y se expresa así:

mín.c.m. (*a, b, c,* …)

Cálculo del mínimo común múltiplo (método artesanal)

Para obtener el mínimo común múltiplo de dos números:

- Escribimos los múltiplos de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el menor.

Ejercicio resuelto

Calcular mín.c.m. (10, 15).

Múltiplos de 10 → 10 20 30 40 50 60 70 …
Múltiplos de 15 → 15 30 45 60 75 90 105 …
Múltiplos comunes → 30 - 60 - 90 …
El menor de los múltiplos comunes de 10 y 15 es 30. } → mín.c.m. (10, 15) = 30

Cálculo del mínimo común múltiplo (método óptimo)

El método anterior resulta apropiado para números sencillos, pero se complica demasiado con números mayores.

Observa una nueva forma de calcular el mínimo común múltiplo con los números descompuestos en factores primos.

Ejemplo

múltiplos de 20 → 20 - 40 - 60 - 80 …

múltiplos de 30 → 30 - 60 - 90 - 120 …

mín.c.m. (20, 30) = 60

▼ **EJEMPLO**

Calcular mín.c.m. (20, 30).

- Primer paso: Descomponer en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 20 = 2^2 \cdot 5 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

- Segundo paso: Elegir los factores primos del mín.c.m.

  Recordando que el mín.c.m. ha de ser múltiplo de 20 y de 30, y lo más pequeño posible, hemos de tomar:

  — Todos los factores primos de 20.
  — Todos los factores primos de 30.
  — El mínimo número de factores que sea posible.

$$\text{mín.c.m. } (20, 30) = \begin{array}{c} \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 5}^{20} \\ 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5}_{30} \end{array}$$

  Comprueba que todos los factores escogidos son imprescindibles, pues si se suprime cualquiera de ellos, deja de ser múltiplo de alguno de los números.

- Tercer paso: Calcular, finalmente, el mín.c.m.

$$\text{mín.c.m. } (20, 30) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Para calcular el mínimo común múltiplo de varios números:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman todos los factores primos (comunes y no comunes) elevado cada uno al mayor exponente con el que aparece.
3. Se multiplican los factores elegidos.

Ejercicio resuelto

Calcular mín.c.m. (75, 90).

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 75 = 3 \cdot 5^2 \\ 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array}\right\} \rightarrow 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\text{mín.c.m. } (75, 90) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$$

Es importante que te des cuenta de que cuando queremos calcular el mín.c.m. de dos numeros, y uno de ellos es múltiplo del otro, el mín.c.m. es el mayor de los dos números.

▼ EJEMPLO

Calcular mín.c.m. (15, 30).

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{mín.c.m. } (15, 30) = \underset{\underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5}_{30}}{2 \cdot \overset{\overbrace{3 \cdot 5}^{15}}{3 \cdot 5}} = 30$$

Actividades

1 Calcula mentalmente.

a) mín.c.m. (3, 5) b) mín.c.m. (6, 8)

c) mín.c.m. (10, 15) d) mín.c.m. (20, 30)

2 Copia y calcula mín.c.m. (30, 40).

$$\begin{array}{r|l} 30 & \square \\ 15 & \square \\ 5 & \square \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & \square \\ 20 & \square \\ 10 & \square \\ 5 & \square \\ 1 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \end{array}\right\} \text{mín.c.m. } (30, 40) = \dots$$

3 Copia y calcula mín.c.m. (54, 60).

$$\begin{array}{rl} 54 & \square \\ \square\square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 60 & \square \\ \square\square & \square \\ \square\square & \square \\ \square & \square \\ 1 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 54 = \dots \\ 60 = \dots \end{array}\right\} \text{mín.c.m. } (54, 60) = \dots$$

4 Calcula por el método óptimo el mínimo común múltiplo de a y b en cada caso:

a) $a = 2 \cdot 11$ b) $a = 2^4 \cdot 5$ c) $a = 5^2 \cdot 7$

$b = 3 \cdot 11$ $b = 2^2 \cdot 5^2$ $b = 5 \cdot 7^2$

d) $a = 2^4 \cdot 3^2$ e) $a = 2 \cdot 5 \cdot 11$ f) $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $b = 3 \cdot 5 \cdot 11$ $b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

5 Calcula.

a) mín.c.m. (20, 25) b) mín.c.m. (28, 35)

c) mín.c.m. (35, 40) d) mín.c.m. (36, 54)

e) mín.c.m. (42, 63) f) mín.c.m. (72, 108)

g) mín.c.m. (99, 165) h) mín.c.m. (216, 288)

6 Calcula.

a) mín.c.m. (12, 18) b) mín.c.m. (21, 35)

c) mín.c.m. (24, 36) d) mín.c.m. (36, 40)

e) mín.c.m. (72, 90) f) mín.c.m. (90, 120)

7 Calcula.

a) mín.c.m. (4, 6, 9) b) mín.c.m. (6, 8, 9)

c) mín.c.m. (12, 18, 30) d) mín.c.m. (24, 28, 42)

e) mín.c.m. (60, 72, 90) f) mín.c.m. (50, 75, 100)

8 Se apilan, en una torre, cubos de 30 cm de arista y, al lado, en otra torre, cubos de 36 cm de arista.

¿A qué altura coinciden las cimas de ambas torres?

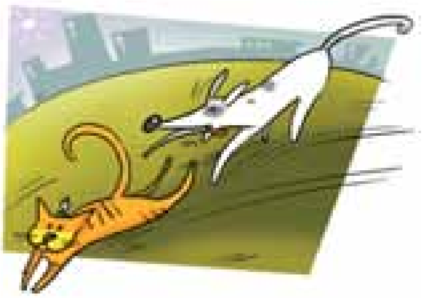
9 Una fábrica envía mercancía a Valencia cada 6 días y a Sevilla cada 8 días. Hoy han coincidido ambos envíos.

¿Cuánto tiempo pasará hasta que vuelvan a coincidir?

10 El autobús de la línea roja pasa por la parada, frente a mi casa, cada 20 minutos, y el de la línea verde, cada 30 minutos.

Si ambos pasan juntos a las dos de la tarde, ¿a qué hora vuelven a coincidir?

4 Máximo común divisor de dos números



También encontrarás problemas que exigen el manejo de los divisores comunes a varios números. Veamos un ejemplo:

EJEMPLO

Una sociedad protectora de animales ha recogido 8 gatos y 12 perros que se han de transportar en jaulas iguales, lo más grandes que sea posible, y de forma que en todas quepa el mismo número de individuos. ¿Cuántos animales irán en cada jaula?

Tanteando, se encuentran tres posibles soluciones:

- Primera solución: jaulas con un inquilino.

G	G	G	G	G	G	G	G

8 × 1

P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P

12 × 1

- Segunda solución: jaulas con dos inquilinos.

G G	G G	G G	G G

4 × 2

P P	P P	P P	P P	P P	P P

6 × 2

- Tercera solución: jaulas con cuatro inquilinos.

G G G G	G G G G

2 × 4

P P P P	P P P P	P P P P

3 × 4

Las soluciones coinciden con los divisores comunes de 8 y 12:

1 - 2 - 4

El mayor de estos divisores comunes es 4 y recibe el nombre de máximo común divisor de 8 y 12.

Cálculo del máx.c.d. (8, 12)

divisores de 8 → ①-②-④- 8
divisores de 12 → ①-②- 3 -④- 6 - 12
divisores comunes } → 1 - 2 - 4
máx.c.d. (8, 12) = 4

El mayor de los divisores comunes a dos o más números, a, b, c, … se llama **máximo común divisor,** y se expresa así:

máx.c.d. $(a, b, c, \ldots)$

Cálculo del máximo común divisor (método artesanal)

Para obtener el máximo común divisor de dos números:

- Escribimos los divisores de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el mayor.

Ejercicio resuelto

Calcular máx.c.d. (20, 30).

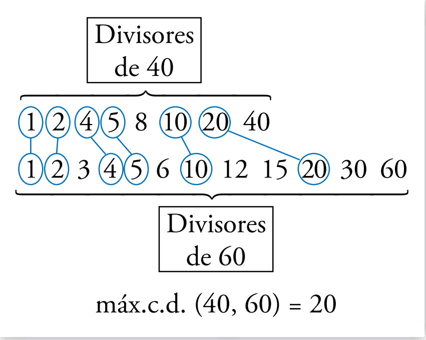
Divisores de 20 → ① ② 4 ⑤ ⑩ 20
Divisores de 30 → ① ② 3 ⑤ 6 ⑩ 15 30
Divisores comunes → 1 - 2 - 5 - 10
El mayor de los divisores comunes de 20 y 30 es 10. } → máx.c.d. (20, 30) = 10

Cálculo del máximo común divisor (método óptimo)

El método que has aprendido en la página anterior resulta adecuado para números sencillos.

En casos más complicados, resulta mucho más cómodo utilizar la descomposición en factores, como se muestra a continuación.

Ejemplo



máx.c.d. (40, 60) = 20

▼ **EJEMPLO**

Calcular máx.c.d. (60, 40).

- Primer paso: Descomponer en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 40 = 2^3 \cdot 5 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

- Segundo paso: Elegir los factores primos del máx.c.d.

  Recordando que el máx.c.d. ha de ser divisor de 40 y de 60, y lo más grande posible, hemos de tomar:

  — Los factores comunes de 40 y 60.

  — Ningún factor no común.

  — El máximo número de factores que sea posible.

$$\begin{array}{l} 40 = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 2 \cdot \boxed{5} \\ 60 = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 3 \cdot \boxed{5} \end{array}$$

$$\text{máx.c.d. } (40, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

- Tercer paso: Calcular, finalmente, el máx.c.d.

$$\text{máx.c.d. } (40, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

Para calcular el máximo común divisor de varios números:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman solamente los factores primos comunes, elevado cada uno al menor exponente con el que aparece.
3. Se multiplican los factores elegidos.

Ejercicio resuelto

Calcular máx.c.d. (150, 225).

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ 225 = 3^2 \cdot 5^2 \end{array}\right\} \to 3 \cdot 5^2$$

$$\text{máx.c.d. } (150, 225) = 3 \cdot 5^2 = 75$$

Del mismo modo que en el mín.c.m., cuando queremos calcular el máx.c.d. de dos números, un multiplo del otro, el resultado es uno de ellos: en este caso, el menor.

EJEMPLO

Calcular máx.c.d. (15, 30).

Descomponemos los dos números en factores primos:

$$\begin{aligned} 15 &= \phantom{2\cdot{}} 3 \cdot 5 \\ 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

De este modo:

$$\text{máx.c.d. } (15, 30) = 3 \cdot 5 = 15$$

Actividades

1 Calcula mentalmente.

a) máx.c.d. (4, 6) b) máx.c.d. (6, 8)

c) máx.c.d. (5, 10) d) máx.c.d. (15, 20)

e) máx.c.d. (18, 27) f) máx.c.d. (50, 75)

2 Copia y calcula máx.c.d. (36, 48).

$$\begin{array}{r|l} 36 & \square \\ 18 & \square \\ 9 & \square \\ 3 & \square \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & \square \\ 24 & \square \\ 12 & \square \\ 6 & \square \\ 3 & \square \\ 1 & \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} 36 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ 48 &= \ldots \end{aligned}\right\} \text{máx.c.d. } (36, 48) = \ldots$$

3 Copia y calcula máx.c.d. (80, 100).

$$\begin{array}{r|l} 80 & \square \\ 40 & 2 \\ \square\square & \square \\ 10 & 2 \\ \square & \square \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ \square\square & \square \\ 25 & 5 \\ \square & \square \\ 1 & \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} 80 &= \ldots \\ 100 &= \ldots \end{aligned}\right\} \text{máx.c.d. } (80, 100) = \ldots$$

4 Calcula por el método óptimo el máximo común divisor de a y b en cada caso:

a) $a = 3 \cdot 7$, $b = 5 \cdot 7$

b) $a = 2^4 \cdot 3^2$, $b = 2^2 \cdot 3^3$

c) $a = 5^2 \cdot 7$, $b = 5 \cdot 7^2$

d) $a = 3 \cdot 5 \cdot 11$, $b = 2 \cdot 5 \cdot 11$

e) $a = 2^3 \cdot 5^2$, $b = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

f) $a = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$, $b = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$

5 Calcula.

a) máx.c.d. (20, 24) b) máx.c.d. (24, 36)

c) máx.c.d. (54, 60) d) máx.c.d. (56, 70)

e) máx.c.d. (120, 144) f) máx.c.d. (140, 180)

g) máx.c.d. (168, 196) h) máx.c.d. (180, 270)

6 Calcula.

a) máx.c.d. (24, 36) b) máx.c.d. (28, 42)

c) máx.c.d. (63, 99) d) máx.c.d. (90, 126)

e) máx.c.d. (165, 275) f) máx.c.d. (360, 450)

7 Calcula.

a) máx.c.d. (6, 9, 12) b) máx.c.d. (12, 18, 24)

c) máx.c.d. (32, 40, 48) d) máx.c.d. (36, 60, 72)

e) máx.c.d. (50, 60, 90) f) máx.c.d

8 El dueño de un restaurante compra un bidón de 80 litros de aceite de oliva y otro de 60 litros de aceite de girasol, y desea envasarlos en garrafas iguales, lo más grandes que sea posible, y sin mezclar. ¿Cuál será la capacidad de las garrafas?

9 Un carpintero tiene dos listones de 180 cm y 240 cm, respectivamente, y desea cortarlos en trozos iguales, lo más largos que sea posible, y sin desperdiciar madera. ¿Cuánto debe medir cada trozo?

10 Se desea dividir un terreno rectangular, de 100 m de ancho por 120 m de largo, en parcelas cuadradas lo más grandes que sea posible.

¿Cuánto debe medir el lado de cada parcela?

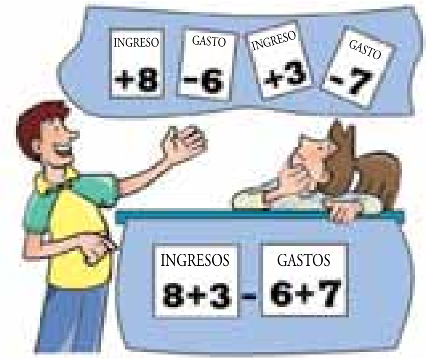
5 Operaciones con números enteros

Suma y resta

Recuerda algunas reglas básicas para resolver expresiones con números enteros:

Para sumar (restar) dos números:

- Si tienen el **mismo signo,** se suman sus valores absolutos y se pone el signo que tenían los sumandos.
- Si tienen **distinto signo,** se restan los valores absolutos y se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.



$\boxed{11} - \boxed{13}$

↓

$\boxed{-2}$

$\boxed{8 - 6 + 3 - 7}$

↓

$\boxed{8 + 3 - 6 - 7}$

↓

$\boxed{(8 + 3) - (6 + 7)}$

↓

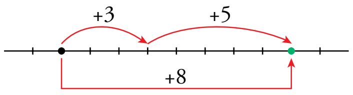
$\boxed{11 - 13}$

↓

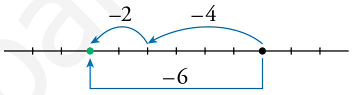
$\boxed{-2}$

▼ **EJEMPLOS**

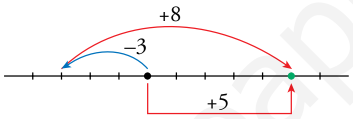
$+3 + 5 = +8$



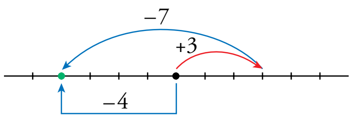
$-4 - 2 = -6$



$-3 + 8 = +5$



$+3 - 7 = -4$



- Al suprimir un paréntesis precedido del signo **más,** los signos interiores no varían.

$$+(-3 + 8 - 2) = -3 + 8 - 2$$

- Al suprimir un paréntesis precedido del signo **menos,** se cambian los signos interiores: más por menos y menos por más.

$$-(-3 + 8 - 2) = +3 - 8 + 2$$

Para sumar más de dos números positivos y negativos:

- Se suman los positivos por un lado y los negativos por otro.
- Se restan los resultados y se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

▼ **EJEMPLOS**

a) $8 - 6 + 3 - 7 = 8 + 3 - 6 - 7 = 11 - 13 = -2$

b) $+(+4) + (-7) - (+3) - (-5) = 4 - 7 - 3 + 5 = 4 + 5 - 7 - 3 = 9 - 10 = -1$

c) $9 - (2 - 7 + 3) + (-2 + 6) = 9 - 2 + 7 - 3 - 2 + 6 = 9 + 7 + 6 - 2 - 3 - 2 =$
$= 22 - 7 = 15$

O bien, de otra forma:

$9 - (2 - 7 + 3) + (-2 + 6) = 9 - (5 - 7) + (-2 + 6) = 9 - (-2) + (+4) =$
$= 9 + 2 + 4 = 15$

Actividades

1 Calcula mentalmente.

a) 5 – 7
b) 2 – 9
c) 3 – 4
d) 6 – 10
e) 5 – 12
f) 9 – 15
g) –12 + 17
h) –22 + 10
i) –21 + 15
j) –3 – 6
k) –1 – 9
l) –12 – 13

2 Resuelve.

a) 10 – 3 + 5
b) 5 – 8 + 6
c) 2 – 9 + 1
d) 7 – 15 + 2
e) 16 – 4 – 6
f) 22 – 7 – 8
g) 9 – 8 – 7
h) 15 – 12 + 6

3 Calcula.

a) –3 + 10 – 1
b) –8 + 2 – 3
c) –5 + 6 + 4
d) –12 + 2 + 6
e) –18 + 3 + 6
f) –20 + 12 + 5
g) –7 – 3 – 4
h) –2 – 13 – 5

4 Copia y completa como en el ejemplo.

- **7 – 4 – 6 – 2 + 5 + 3 – 4 = 15 – 16 = –1**

a) 3 – 9 + 4 – 8 – 2 + 13 = ☐ – ☐ = ☐
b) –15 – 4 + 12 – 3 – 11 – 2 = ☐ – ☐ = ☐

5 Calcula.

a) 3 – 7 + 2 – 5
b) 2 – 6 + 9 – 3 + 4
c) 7 – 10 – 5 + 4 + 6 – 1
d) –6 + 4 – 3 – 2 – 8 + 5
e) 12 + 5 – 17 – 11 + 20 – 13
f) 16 – 22 + 24 – 31 + 12 – 15

6 Quita paréntesis y calcula.

a) (–3) – (+4) – (–8)
b) –(–5) + (–6) – (–3)
c) (+8) – (+6) + (–7) – (–4)
d) –(–3) – (+2) + (–9) + (+7)

7 Resuelve de dos formas, como en el ejemplo.

- **a) 10 – (13 – 7) = 10 – (+6) = 10 – 6 = 4**
  b) 10 – (13 – 7) = 10 – 13 + 7 = 17 – 13 = 4

a) 15 – (12 – 8)
b) 9 – (20 – 6)
c) 8 – (15 – 12)
d) 6 – (13 – 2)
e) 15 – (6 – 9 + 5)
f) 21 – (3 – 10 + 11 + 6)

8 Resuelve de una de las formas que ofrece el ejemplo:

- **a) (8 – 13) – (5 – 4 – 7) = (8 – 13) – (5 – 11) =**
  = (–5) – (–6) = –5 + 6 = 1
  b) (8 – 13) – (5 – 4 – 7) = 8 – 13 – 5 + 4 + 7 =
  = 19 – 18 = 1

a) (4 – 9) – (5 – 8)
b) –(1 – 6) + (4 – 7)
c) 4 – (8 + 2) – (3 – 13)
d) 12 + (8 – 15) – (5 + 8)
e) (8 – 6) – (3 – 7 – 2) + (1 – 8 + 2)
f) (5 – 16) – (7 – 3 – 6) – (9 – 13 – 5)

9 Ejercicio resuelto

Calcular: 6 – [5 + (8 – 2)]

a) Primera forma: deshaciendo paréntesis.

6 – [5 + (8 – 2)] = 6 – [5 + 8 – 2] =
= 6 – 5 – 8 + 2 = 8 – 13 = –5

b) Segunda forma: operando dentro de los paréntesis.

6 – [5 + (8 – 2)] = 6 – [5 + (+6)] =
= 6 – [5 + 6] = 6 – [+11] = 6 – 11 = –5

10 Calcula.

a) 7 – [1 + (9 – 13)]
b) –9 + [8 – (13 – 4)]
c) 12 – [6 – (15 – 8)]
d) –17 + [9 – (3 – 10)]
e) 2 + [6 – (4 – 2 + 9)]
f) 15 – [9 – (5 – 11 + 7)]

Multiplicación

Podemos calcular el producto de dos números enteros teniendo en cuenta que una multiplicación es una suma de sumandos iguales:

$(+3) \cdot (-6) =$ → Sumamos tres veces “menos seis”.
→ $+(-6) + (-6) + (-6) = -6 - 6 - 6 = -18$

$(-3) \cdot (-6) =$ → Restamos tres veces “menos seis”.
→ $-(-6) - (-6) - (-6) = +6 + 6 + 6 = +18$

Sin embargo, para multiplicar con rapidez, aplicamos la siguiente regla:

REGLA DE LOS SIGNOS

$+ \cdot + = +$
$+ \cdot - = -$
$- \cdot + = -$
$- \cdot - = +$

REGLA DE LOS SIGNOS

El producto de dos números enteros es:

- Positivo, si los factores tienen signos iguales.
- Negativo, si los factores tienen signos diferentes.

▼ **EJEMPLOS**

$(+4) \cdot (+3) = +12$ $(-5) \cdot (-4) = +20$ $(+6) \cdot (-4) = -24$ $(-4) \cdot (+8) = -32$

División

La división de números enteros guarda con la multiplicación las mismas relaciones que en los números naturales:

$(+4) \cdot (+6) = +24 \longrightarrow (+24) : (+4) = +6$

$(-4) \cdot (-6) = +24 \longrightarrow (+24) : (-4) = -6$

$(+4) \cdot (-6) = -24$ → $(-24) : (+4) = -6$
→ $(-24) : (-6) = +4$

En la división se aplica la misma regla de los signos que en la multiplicación.

Operaciones combinadas

Observa el orden en que realizamos las operaciones para calcular el valor de la siguiente expresión:

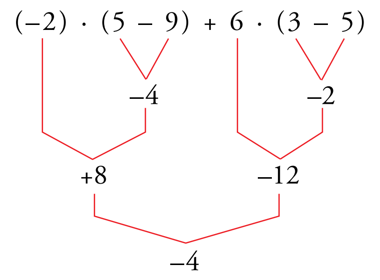
REGLA DE PRIORIDAD EN LAS OPERACIONES

$\boxed{(-2) \cdot (5-9) + 6 \cdot (3-5)}$
↓
$\boxed{(-2) \cdot (-4) + 6 \cdot (-2)}$ ←
↓
$\boxed{(+8) + (-12)}$ ←
↓
$\boxed{8 - 12} = -4$ ←

En las expresiones con operaciones combinadas, hemos de atender:

- Primero, a las operaciones que están dentro de los paréntesis.
- Después, a las multiplicaciones y a las divisiones.
- Por último, a las sumas y a las restas.

Ten en cuenta



Actividades

11 Multiplica.

a) (+10) · (–2)
b) (–4) · (–9)
c) (–7) · (+5)
d) (+11) · (+7)

12 Observa los ejemplos y calcula.

- $\mathbf{\underbrace{(-3) \cdot (+2)} \cdot (-5) = (-6) \cdot (-5) = +30}$
- $\mathbf{(-3) \cdot \underbrace{(+2) \cdot (-5)} = (-3) \cdot (-10) = +30}$

a) (–2) · (–3) · (+4)
b) (–1) · (+2) · (–5)
c) (+4) · (–3) · (+2)
d) (–6) · (–2) · (–5)

13 Divide.

a) (–18) : (+3)
b) (–15) : (–5)
c) (+36) : (–9)
d) (–30) : (–10)
e) (–52) : (+13)
f) (+22) : (+11)

14 Calcula el valor de x en cada caso:

a) (–18) : x = +6
b) (+4) · x = –36
c) x · (–13) = 91
d) x : (–11) = +5

15 Calcula.

a) (+3) · (–5) · (+2)
b) (–4) · (–1) · (+6)
c) (–2) · (–7) · (–2)
d) (+5) · (–4) · (–3)

16 Opera.

a) [(+80) : (–8)] : (–5)
b) [(–70) : (–2)] : (–7)
c) (+50) : [(–30) : (+6)]
d) (–40) : [(+24) : (+3)]

17 Calcula como en el ejemplo.

- **15 – 8 · 3 = 15 – 24 = –9**

a) 18 – 5 · 3
b) 6 – 4 · 2
c) 7 · 2 – 16

18 Calcula.

a) 18 – 15 : 3
b) 3 – 30 : 6
c) 20 : 2 – 11

19 Calcula como en el ejemplo.

- **21 – 4 · 6 + 12 : 3 = 21 – 24 + 4 = 25 – 24 = 1**

a) 20 – 4 · 7 + 11
b) 12 – 6 · 5 + 4 · 2
c) 15 – 20 : 5 – 3
d) 6 – 10 : 2 – 14 : 7
e) 5 · 3 – 4 · 4 + 2 · 6
f) 7 · 3 – 5 · 4 + 18 : 6

20 Observa el ejemplo y calcula.

- **(–3) · (–4) + (–6) · 3 = (+12) + (–18) = 12 – 18 = –6**

a) 5 · (–8) – (+9) · 4
b) 32 : (–8) – (–20) : 5
c) (–2) · (–9) + (–5) · (+4)
d) (+25) : (–5) + (–16) : (+4)
e) (+6) · (–7) + (–50) : (–2)
f) (+56) : (–8) – (–12) · (+3)

21 Calcula.

a) 18 – 5 · (3 – 8)
b) 11 – 40 : (–8)
c) 4 · (8 – 11) – 6 · (7 – 9)
d) (4 – 5) · (–3) – (8 – 2) : (–3)

22 Calcula.

a) 5 · (–4) + 2 · (–3)
b) 20 : (–5) – 8 : (+2)
c) 2 · (–8) – 3 · (–7) – 4 · (+3)
d) 6 : (+2) + 5 · (–3) – 12 : (–4)

23 Opera.

a) (–8) · (+2) + (–5) · (–3)
b) (+40) : (–8) – (–30) : (+6)
c) (–2) · (–9) + (–24) : (–3) – (–6) · (–4)
d) (+27) : (–3) – (+3) · (–5) – (–6) · (–2)

Potencias de números enteros

Recuerda que una potencia es una multiplicación de factores iguales:

EXPONENTE

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

BASE

EJEMPLOS

$(+4)^2 = (+4) \cdot (+4) = +16$

$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$

Potencias de números negativos

En las sucesivas potencias de un número negativo obtenemos, alternativamente, resultados positivos y negativos:

$(-3)^1 = -3 \qquad (-3)^2 = +9 \qquad (-3)^3 = -27 \qquad (-3)^4 = +81$

Al elevar un número negativo a una potencia:

- Si el exponente es par, el resultado es positivo.

$$(-a)^{n\ (\text{par})} \rightarrow \textbf{positivo}$$

- Si el exponente es impar, el resultado es negativo.

$$(-a)^{n\ (\text{impar})} \rightarrow \textbf{negativo}$$

Actividades

24 Escribe en forma de potencia.

a) $(-2) \cdot (-2)$

b) $(+5) \cdot (+5) \cdot (+5)$

c) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

d) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

25 Copia y completa en tu cuaderno.

POTENCIA	BASE	EXPONENTE	VALOR
$(-1)^7$			
$(-2)^4$			
$(+3)^3$			
$(-4)^2$			

26 Escribe en forma de producto y calcula:

a) $(-2)^6$

b) $(-3)^1$

c) $(+3)^4$

d) $(-5)^2$

e) $(-10)^5$

f) $(-8)^3$

27 Obtén con ayuda de la calculadora como se hace en el ejemplo.

- **12^5** → $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ → $\boxed{248832}$

a) 8^6

b) $(-8)^6$

c) 11^5

d) $(-11)^5$

e) 27^7

f) $(-27)^7$

6 Operaciones con potencias

Vas a aprender, ahora, algunas propiedades que facilitan el cálculo con potencias. Por eso, es conveniente que las memorices y que ensayes su aplicación en diferentes situaciones.

Potencia de un producto

Compara las dos expresiones siguientes y observa que en ambas se obtiene el mismo resultado.

No te confundas

$(2 + 3)^4 = 5^4 = 625$

$2^4 + 3^4 = 16 + 81 = 97$

$(2 + 3)^4 \neq 2^4 + 3^4$

La potencia de una suma NO ES IGUAL a la suma de las potencias de los sumandos.

▼ EJEMPLO

- $(2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 8 \cdot 27 = 216$

La **potencia** de un **producto** es igual al producto de las potencias de los factores. $\rightarrow (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Ejercicio resuelto

Calcular, por el camino más sencillo, $5^6 \cdot 2^6$.

$5^6 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$

Potencia de un cociente

Observa otras dos expresiones que también tienen el mismo valor.

▼ EJEMPLO

- $(6 : 3)^3 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- $6^3 : 3^3 = (6 \cdot 6 \cdot 6) : (3 \cdot 3 \cdot 3) = 216 : 27 = 8$

La **potencia** de un **cociente** es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor. $\rightarrow (a : b)^n = a^n : b^n$

Ejercicios resueltos

1. **Calcular, por el camino más sencillo, $12^3 : 4^3$.**

   $12^3 : 4^3 = (12 : 4)^3 = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

2. **Calcular: $(6^4 \cdot 5^4) : 15^4$**

   $(6^4 \cdot 5^4) : 15^4 = (6 \cdot 5)^4 : 15^4 = 30^4 : 15^4 = (30 : 15)^4 = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Producto de potencias de la misma base

Al multiplicar dos potencias del mismo número, se obtiene otra potencia de dicho número.

$$5^4 \cdot 5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4\ \text{veces}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3\ \text{veces}} = 5^7$$

Observa que el exponente del producto final es la suma de los exponentes de los factores.

Para **multiplicar** dos **potencias** de la **misma base,** se deja la base y se suman los exponentes. $\rightarrow a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Por ejemplo:

$$a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$$

Cociente de potencias de la misma base

Al dividir dos potencias del mismo número, se obtiene otra potencia de dicho número.

$$5^7 : 5^3 = 5^4 \longleftrightarrow 5^4 \cdot 5^3 = 5^7$$

Observa que el exponente del cociente es la diferencia entre los exponentes del dividendo y del divisor.

Ten en cuenta

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 : 2^3 = 8 : 8 = 1 \\ 2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0 \end{array}\right\} 2^0 = 1$$

La **potencia cero** de un número es igual a 1.

Para **dividir** dos **potencias** de la **misma base,** se deja la base y se restan los exponentes. $\rightarrow a^m : a^n = a^{m-n}$

Por ejemplo:

$$a^8 : a^6 = a^{8-6} = a^2$$

Potencia de otra potencia

Al elevar una potencia a otra potencia, se obtiene una nueva potencia de la misma base.

$$(5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$$

Observa que el exponente final es el producto de los exponentes de la expresión inicial.

Para **elevar** una **potencia** a **otra potencia**, se deja la base y se multiplican los exponentes. $\rightarrow (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Por ejemplo:

$$(a^2)^4 = a^{2 \cdot 4} = a^8$$

Actividades

1 Calcula como en el ejemplo y compara los resultados.

- $$\left.\begin{array}{l}\mathbf{(4 \cdot 3)^2 = 12^2 = 144}\\ \mathbf{4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144}\end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{(4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2}$$

a) $\left.\begin{array}{l}(3 \cdot 5)^2 = \ldots\\ 3^2 \cdot 5^2 = \ldots\end{array}\right\} \ldots$

b) $\left.\begin{array}{l}(4 \cdot 2)^3 = \ldots\\ 4^3 \cdot 2^3 = \ldots\end{array}\right\} \ldots$

c) $\left.\begin{array}{l}(12 : 3)^2 = \ldots\\ 12^2 : 3^2 = \ldots\end{array}\right\} \ldots$

d) $\left.\begin{array}{l}(20 : 4)^3 = \ldots\\ 20^3 : 4^3 = \ldots\end{array}\right\} \ldots$

2 Copia y completa las casillas vacías.

a) $(3 \cdot 5)^4 = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$

b) $8^3 \cdot 6^3 = (\square \cdot \square)^{\square}$

c) $(6 : 3)^7 = 6^{\square} : 3^{\square}$

d) $15^{\square} : 5^{\square} = (\square : \square)^4$

e) $(a \cdot b)^{\square} = \square^3 \cdot \square^3$

f) $m^2 \cdot n^2 = (\square \cdot \square)^2$

g) $(a : b)^{\square} = a^3 : \square^3$

h) $m^4 : n^4 = (\square : \square)^{\square}$

3 Reduce a una sola potencia como en el ejemplo.

- $\mathbf{2^5 \cdot (-3)^5 = [2 \cdot (-3)]^5 = (-6)^5}$

a) $3^2 \cdot 4^2$

b) $(-2)^3 \cdot 4^3$

c) $(-5)^2 \cdot (+3)^2$

d) $3^6 \cdot (-2)^6$

4 Expresa con una sola potencia igual que en el ejemplo.

- $\mathbf{(-15)^4 : (+3)^4 = [(-15) : (+3)]^4 = (-5)^4 = 5^4}$

a) $9^4 : 3^4$

b) $(+15)^3 : (-5)^3$

c) $(-20)^2 : (-4)^2$

d) $(-18)^4 : (-6)^4$

5 Reflexiona y calcula de la forma más sencilla.

a) $5^3 \cdot 2^3$

b) $4^2 \cdot 5^2$

c) $25^2 \cdot 4^2$

d) $20^3 \cdot 5^3$

e) $16^5 : 8^5$

f) $18^3 : 6^3$

g) $21^4 : 7^4$

h) $35^2 : 5^2$

6 Copia y completa las casillas vacías.

a) $5^2 \cdot 5^3 = 5^{\square}$

b) $6^4 \cdot 6^3 = 6^{\square}$

c) $a^5 \cdot a^3 = a^{\square}$

d) $m^3 \cdot m^{\square} = m^9$

e) $2^6 : 2^4 = 2^{\square}$

f) $7^8 : 7^5 = 7^{\square}$

g) $a^9 : a^8 = a^{\square}$

h) $m^8 : m^{\square} = m^6$

i) $(4^2)^3 = 4^{\square}$

j) $(5^3)^3 = 5^{\square}$

k) $(a^2)^2 = a^{\square}$

l) $(m^4)^{\square} = m^{12}$

7 Reduce a una sola potencia.

a) $5^2 \cdot 5^2$

b) $3^2 \cdot 3^5$

c) $10^5 \cdot 10^2$

d) $a^5 \cdot a^5$

e) $m^7 \cdot m$

f) $x^2 \cdot x^6$

8 Copia y completa en tu cuaderno.

a) $(-6)^3 \cdot (-6)^4 = (-6)^{\square}$

b) $(+3)^6 \cdot (+3)^2 = 3^{\square}$

c) $(-2)^8 \cdot (-2)^2 = 2^{\square}$

d) $(-5)^3 \cdot (+5)^2 = (-5)^{\square}$

9 Reduce a una sola potencia.

a) $2^5 \cdot 2^7$

b) $(-2)^3 \cdot (+2)^6$

c) $(-12)^2 \cdot (+12)^2$

d) $(+9)^4 \cdot (-9)^2$

10 Expresa con una potencia única.

a) $2^6 : 2^2$

b) $3^8 : 3^5$

c) $10^7 : 10^6$

d) $a^{10} : a^6$

e) $m^5 : m$

f) $x^8 : x^4$

11 Copia y completa en tu cuaderno.

a) $5^9 : 5^3 = 5^{\square}$

b) $(-2)^6 : (-2)^3 = (-2)^{\square}$

c) $(-4)^8 : (+4)^3 = 4^{\square}$

d) $(+6)^8 : (-6)^5 = (-6)^{\square}$

12 Reduce a una potencia única.

a) $(-7)^8 : (-7)^5$

b) $10^9 : (-10)^4$

c) $12^4 : (-12)$

d) $(-4)^{10} : (+4)^6$

13 Reduce a una única potencia.

a) $(5^2)^3$

b) $(2^5)^2$

c) $(10^3)^3$

d) $(a^5)^3$

e) $(m^2)^6$

f) $(x^4)^4$

14 Reduce a una sola potencia.

a) $[(-2)^2]^2$

b) $[(+5)^3]^2$

c) $[(+7)^3]^3$

d) $[(-4)^2]^4$

Raíz cuadrada de un número entero

- La **raíz cuadrada** es la operación inversa de elevar al cuadrado.

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

- Los números cuya raíz cuadrada es un número entero se llaman **cuadrados perfectos.**

EJEMPLOS

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{49} = 7 \Leftrightarrow 7^2 = 49 \\ \sqrt{400} = 20 \Leftrightarrow 20^2 = 400 \end{array}\right\} \text{ 49 y 400 son cuadrados perfectos.}$$

Teniendo en cuenta el concepto de raíz cuadrada, vemos que:

Un número positivo tiene dos raíces cuadradas.

$$\sqrt{(+16)} = \begin{cases} \rightarrow +4 \Leftrightarrow (+4)^2 = +16 \\ \rightarrow -4 \Leftrightarrow (-4)^2 = +16 \end{cases}$$

Un número negativo no tiene raíz cuadrada.

$\sqrt{(-16)} = x \Leftrightarrow x^2 = -16 \rightarrow$ Imposible.

$\sqrt{(-16)} \rightarrow$ No existe, porque no hay ningún número cuyo cuadrado dé un resultado negativo.

Ejercicios resueltos

1. Calcular las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{(+64)}$ **b)** $\sqrt{(+144)}$ **c)** $\sqrt{(-36)}$

a) Hay que preguntarse qué número elevado al cuadrado da 64.

El número es el 8. Como sabemos que tiene dos raíces:

$$\sqrt{(+64)} = \begin{cases} \rightarrow +8 \\ \rightarrow -8 \end{cases}$$

b) $$\sqrt{(+144)} = \begin{cases} \rightarrow +12 \\ \rightarrow -12 \end{cases}$$

c) Los números negativos no tienen raíz cuadrada.

Actividades

15 Calcula, si existen.

a) $\sqrt{(+1)}$ b) $\sqrt{(-1)}$ c) $\sqrt{(+25)}$ g) $\sqrt{(+121)}$ h) $\sqrt{(-169)}$ i) $\sqrt{(+400)}$

d) $\sqrt{(-36)}$ e) $\sqrt{(+100)}$ f) $\sqrt{(-100)}$ j) $\sqrt{(-400)}$ k) $\sqrt{(+484)}$ l) $\sqrt{(-1\,000)}$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Múltiplos y divisores

1 ▼▽▽ Encuentra cuatro parejas múltiplo-divisor entre los siguientes números:

143	12	124	364
180	31	52	13

2 ▼▽▽ Responde justificando tu respuesta.

a) ¿Es 132 múltiplo de 11?

b) ¿Es 11 divisor de 132?

c) ¿Es 574 múltiplo de 14?

d) ¿Es 27 divisor de 1 542?

3 ▼▽▽ Calcula.

a) Los cinco primeros múltiplos de 10.

b) Los cinco primeros múltiplos de 13.

c) Los cinco primeros múltiplos de 31.

4 ▼▽▽ Calcula.

a) Todos los divisores de 18.

b) Todos los divisores de 23.

c) Todos los divisores de 32.

5 ▼▽▽ Copia estos números y selecciona:

66	71	90	103	105
156	220	315	421	708

a) Los múltiplos de 2.

b) Los múltiplos de 3.

c) Los múltiplos de 5.

6 ▼▽▽ Copia estos números, rodea con un círculo los múltiplos de 3 y tacha los múltiplos de 9:

33	41	54	87	108
112	231	341	685	

Números primos y compuestos

7 ▼▽▽ Escribe.

a) Los diez primeros números primos.

b) Los números primos comprendidos entre 50 y 60.

c) Los números primos comprendidos entre 80 y 100.

d) Los tres primeros primos mayores que 100.

8 ▼▽▽ Mentalmente, sin lápiz ni papel, separa los números primos de los compuestos:

4	7	10	15	17
24	31	41	51	67

9 ▼▽▽ Descompón, mentalmente, en el máximo número de factores las siguientes cantidades:

6	8	10	14	15	18
20	24	25	27	30	42

10 ▼▽▽ Descompón en factores primos.

a) 48 b) 54 c) 90 d) 105

e) 120 f) 135 g) 180 h) 200

11 ▼▽▽ Descompón en el máximo número de factores:

a) 378 b) 1 144 c) 1 872

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

12 ▼▽▽ Calcula.

a) Los diez primeros múltiplos de 10.

b) Los diez primeros múltiplos de 15.

c) Los primeros múltiplos comunes de 10 y 15.

d) El mínimo común múltiplo de 10 y 15.

13 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) mín.c.m. (2, 3) b) mín.c.m. (6, 9)

c) mín.c.m. (4, 10) d) mín.c.m. (6, 10)

e) mín.c.m. (6, 12) f) mín.c.m. (12, 18)

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

14 ▼▽▽ Calcula.

a) mín.c.m. (12, 15)
b) mín.c.m. (24, 60)
c) mín.c.m. (48, 54)
d) mín.c.m. (90, 150)
e) mín.c.m. (6, 10, 15)
f) mín.c.m. (8, 12, 18)

15 ▼▽▽ Escribe.

a) Todos los divisores de 18.
b) Todos los divisores de 24.
c) Los divisores comunes de 18 y 24.
d) El máximo común divisor de 18 y 24.

16 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) máx.c.d. (4, 8)
b) máx.c.d. (6, 9)
c) máx.c.d. (10, 15)
d) máx.c.d. (12, 16)
e) máx.c.d. (16, 24)
f) máx.c.d. (18, 24)

17 ▼▽▽ Calcula.

a) máx.c.d. (36, 45)
b) máx.c.d. (48, 72)
c) máx.c.d. (105, 120)
d) máx.c.d. (135, 180)
e) máx.c.d. (8, 12, 16)
f) máx.c.d. (45, 60, 105)

Reflexiona, decide, aplica

18 ▼▽▽ ¿De cuántas formas distintas se pueden envasar 80 botes de mermelada en cajas iguales?

Indica, en cada caso, el número de cajas necesarias y el número de botes por caja.

19 ▼▽▽ Marta ha comprado varios balones por 69 €.

El precio de un balón era un número exacto de euros, sin decimales.

¿Cuántos balones ha comprado y cuánto costaba cada balón?

20 ▼▽▽ En mi colegio hay dos clases de 2.º ESO: 2.º A, con 24 estudianres, y 2.º B, con 30.

Tenemos que hacer equipos con el mismo número de miembros, pero sin mezclar de las dos clases.

Describe todas las formas posibles de hacer los equipos.

21 ▼▼▽ En un acuartelamiento hay 3 007 soldados. ¿Se pueden colocar en formación, con un número exacto de filas y columnas?

Justifica la respuesta.

Suma y resta de números enteros

22 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) 5 – 9
b) 5 – 11
c) 13 – 9
d) 22 – 30
e) 21 – 33
f) 46 – 52
g) –8 – 14
h) –21 – 15
i) –33 – 22
j) –13 + 18
k) –22 + 9
l) –37 + 21

23 ▼▽▽ Calcula.

a) 5 – 8 – 4 + 3 – 6 + 9
b) 10 – 11 + 7 – 13 + 15 – 6
c) 9 – 2 – 7 – 11 + 3 + 18 – 10
d) –7 – 15 + 8 + 10 – 9 – 6 + 11

24 ▼▽▽ Quita paréntesis y calcula.

a) (+5) – (–3) – (+8) + (–4)
b) –(–7) – (+5) + (–6) + (+4)
c) +(–9) – (+13) – (–11) + (+5)
d) –(+8) + (–3) – (–15) – (+6) – (+2)

25 ▼▽▽ Calcula.

a) 3 – (5 + 7 – 10 – 9)
b) 4 + (8 – 6 – 10) – (6 – 10 + 4)
c) (7 – 11 – 4) – (9 – 6 – 13)
d) –(6 – 3 – 5) – (–4 – 7 + 15)

26 ▼▼▽ Opera.

a) 16 + [3 – 9 – (11 – 4)]
b) 8 – [(6 – 9) – (7 – 13)]
c) (6 – 15) – [1 – (1 – 5 – 4)]
d) (2 – 12 + 7) – [(4 – 10) – (5 – 15)]
e) [9 – (5 – 17)] – [11 – (6 – 13)]

27 ▼▼▽ Quita paréntesis y calcula.

a) 6 – (5 – [4 – (3 – 2)])
b) 6 – (7 – [8 – (9 – 10)])
c) 10 + (11 – [12 + (13 – 14)])
d) 10 – (9 + [8 – (7 + 6)])
e) [(3 – 8) – 5] + (–11 + [7 – (3 – 4)])

Multiplicación y división de números enteros

28 ▼▽▽ Opera aplicando la regla de los signos.

a) (–5) · (–6)
b) (–21) : (+3)
c) (–4) · (+7)
d) (+42) : (–6)
e) (–6) · (–8)
f) (+30) : (+5)
g) (+10) · (+5)
h) (–63) : (–9)
i) (–9) · (–5)
j) (+112) : (–14)

29 ▼▽▽ Obtén el valor de x en cada caso:

a) x · (–9) = +9
b) (–5) : x = –1
c) (–5) · x = –45
d) x : (–4) = +3
e) x · (+6) = –42
f) (+28) : x = –7

30 ▼▼▽ Calcula.

a) (–2) · [(+3) · (–2)]
b) [(+5) · (–3)] · (+2)
c) (+6) : [(–30) : (–15)]
d) [(+40) : (–4)] : (–5)
e) (–5) · [(–18) : (–6)]
f) [(–8) · (+3)] : (–4)
g) [(–21) : 7] · [8 : (–4)]
h) [6 · (–10)] : [(–5) · 6]

Operaciones combinadas con números enteros

31 ▼▽▽ Calcula.

a) 5 – 4 · 3
b) 2 · 9 – 7
c) 4 · 5 – 6 · 3
d) 2 · 8 – 4 · 5
e) 16 – 4 · 7 + 2 · 5 – 19
f) 5 · 6 – 21 – 3 · 7 + 12

32 ▼▽▽ Opera dentro del paréntesis y, después, multiplica.

a) 3 · (9 – 11)
b) –5 · (4 – 9)
c) 5 · (9 – 4) – 12
d) 1 + 4 · (6 – 10)
e) 6 · (8 – 12) – 3 · (5 – 11)
f) 4 · (13 – 8) + 3 · (9 – 15)

33 ▼▽▽ Calcula y observa que el resultado varía según la posición de los paréntesis.

a) 17 – 6 · 2
b) (17 – 6) · 2
c) (–10) – 2 · (–3)
d) [(–10) – 2] · (–3)
e) (–3) · (+5) + (–2)
f) (–3) · [(+5) + (–2)]

34 ▼▼▽ Calcula paso a paso.

a) 5 · (–4) – 2 · (–6) + 13
b) –6 · (+4) + (–3) · 7 + 38
c) (–2) · (+8) – (–5) · (–6) + (–9) · (+4)
d) –(–9) · (+5) · (–8) · (+7) – (+4) · (–6)

Potencias de números enteros

35 ▼▽▽ Calcula.

a) $(-2)^1$
b) $(-2)^2$
c) $(-2)^3$
d) $(-2)^4$
e) $(-2)^5$
f) $(-2)^6$
g) $(-2)^7$
h) $(-2)^8$
i) $(-2)^9$

36 ▼▽▽ Calcula.

a) $(-5)^4$
b) $(+4)^5$
c) $(-6)^3$
d) $(+7)^3$
e) $(-8)^2$
f) $(-10)^7$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

37 ▼▽▽ Observa…

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

$(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$

$-2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$

$+2^3 = +2 \cdot 2 \cdot 2 = +8$

…y calcula.

a) $(-3)^4$ b) $(+3)^4$

c) -3^4 d) $+3^4$

38 ▼▽▽ Expresa como potencia de un único número.

a) $10^4 : 5^4$ b) $12^7 : (-4)^7$

c) $(-9)^6 : 3^6$ d) $2^6 \cdot 2^6$

e) $(-4)^5 \cdot (-2)^5$ f) $2^4 \cdot (-5)^4$

39 ▼▼▽ Reduce a una sola potencia.

a) $(x^2)^5$ b) $(m^4)^3$

c) $[a^{10} : a^6]^2$ d) $(a \cdot a^3)^3$

e) $(x^5 : x^2) \cdot x^4$ f) $(x^6 \cdot x^4) : x^7$

40 ▼▼▽ Expresa como una potencia única.

a) $5^2 \cdot (-5)^3$ b) $(-6)^8 : (-6)^5$

c) $[7^4 \cdot (-7)^4] : (-7)^6$ d) $(2^4)^3 : 2^9$

e) $[(-3)^4]^3 : [(-3)^3]^3$ f) $(5^2)^5 : [(-5)^3]^2$

Raíces de números enteros

41 ▼▽▽ Calcula.

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{7^2}$ c) $\sqrt{-49}$

d) $\sqrt{15^2}$ e) $\sqrt{225}$ f) $\sqrt{-225}$

g) $\sqrt{2\,500}$ h) $\sqrt{50^2}$ i) $\sqrt{-2\,500}$

42 ▼▼▽ Calcula las raíces siguientes:

a) $\sqrt{x^2}$ b) $\sqrt{(-x)^2}$ c) $\sqrt{-x^2}$

d) $\sqrt{a^4}$ e) $\sqrt{(-a)^4}$ f) $\sqrt{-a^4}$

g) $\sqrt{m^6}$ h) $\sqrt{(-m)^6}$ i) $\sqrt{-m^6}$

Interpreta, describe, exprésate

43 ▼▼▽ El brazo mecánico de un robot ha sido programado de la siguiente forma:

— Encendido: inicio del programa.

— Primer minuto: avanza 1 cm y retrocede 5 cm.

— Segundo minuto: avanza 2 cm y retrocede 5 cm.

— Tercer minuto: avanza 3 cm y retrocede 5 cm.

— …

Y así continúa, hasta que, al final de un determinado minuto, se encuentra en la posición inicial. Entonces repite el proceso.

¿Cuántas veces repite el ciclo en hora y media? Justifica la respuesta.

MINUTO	1	2	3	4	5
AVANCE	1	2	3	4	5
RETROCESO	5	5	5	5	5
VARIACIÓN	–4	–3	–2	–1	
POSICIÓN	–4	–7	…		

44 ▼▼▼ Una plataforma petrolífera marina se sostiene sobre flotadores, a 55 metros sobre la superficie del agua, anclada en una zona con una profundidad de 470 m.

Sobre ella, hay una grúa de 35 m de altura, de la que pende un cable y en su extremo un batiscafo auxiliar para los trabajos de mantenimiento de la plataforma.

En este momento, la grúa ha largado 120 metros de cable y sigue bajando el batiscafo a razón de un tercio de metro por segundo.

a) ¿Cuál o cuáles de estas expresiones representan la distancia del batiscafo al fondo en este momento?

$\boxed{470 + 55 + 35 - 120}$ $\boxed{470 - [120 - (55 + 35)]}$

$\boxed{(470 + 55) - (120 - 35)}$

b) ¿Cuánto tardará el batiscafo en llegar al fondo?

c) ¿Cuánto tardará la grúa en izar el batiscafo hasta la superficie de la plataforma, si sube a la misma velocidad que baja?

Resuelve problemas

45 ▼▽▽ Un rollo de cable mide más de 150 m y menos de 200 m. ¿Cuál es su longitud exacta, sabiendo que se puede dividir en trozos de 15 m y también en trozos de 18 m?

46 ▼▽▽ De cierta parada de autobús parten dos líneas, A y B, que inician su actividad a las 7 h de la mañana. La línea A presta un servicio cada 24 minutos, y la línea B, cada 36 minutos. ¿A qué hora vuelven a coincidir en la parada los autobuses de ambas líneas?

47 ▼▽▽ Se desea dividir dos cuerdas de 20 m y 30 m en trozos iguales, lo más grandes que sea posible, y sin desperdiciar nada. ¿Cuánto medirá cada trozo?

48 ▼▼▽ Para pavimentar un suelo de 12,3 m de largo por 9 m de ancho, se han empleado baldosas cuadradas, sin necesidad de cortar ninguna. ¿Qué medida tendrá el lado de cada baldosa, sabiendo que se han empleado las mayores que era posible?

49 ▼▼▽ Julia ha formado el cuadrado más pequeño posible uniendo piezas rectangulares de cartulina, de 12 cm por 18 cm.

¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

¿Cuántas piezas ha empleado?

50 ▼▼▽ En un horno de bollería se han fabricado 2 400 magdalenas y 2 640 mantecados, que se desean comercializar en bolsas con el mismo número de unidades y sin mezclar ambos productos.

¿Cuántas magdalenas o cuántos mantecados se pueden poner en cada bolsa, teniendo en cuenta que el número debe ser superior a 15 e inferior a 30?

51 ▼▼▽ Se desea envasar 125 botes de conserva de tomate y 175 botes de conserva de pimiento en cajas del mismo número de botes, y sin mezclar ambos productos en la misma caja.

¿Cuál es el mínimo número de cajas necesarias?

¿Cuántos botes irán en cada caja?

Autoevaluación

¿Reconoces la relación de divisibilidad?

1 Responde y justifica:

a) ¿Es 31 divisor de 744?

b) ¿Es 999 múltiplo de 99?

2 Escribe:

a) Los cuatro primeros múltiplos de 13.

b) Todos los divisores de 60.

¿Identificas los primeros números primos?

3 Escribe los primos comprendidos entre 20 y 40.

¿Reconoces cuándo un número es múltiplo de 2, de 3, de 5 o de 10?

4 Indica cuáles de estos números son múltiplos de 2, cuáles de 3, cuáles de 5 y cuáles de 10:

897 – 765 – 990 – 2 713 – 6 077 – 6 324 – 7 005

¿Sabes descomponer un número en factores primos?

5 Descompón en factores primos los números 40 y 60.

¿Sabes calcular el máx.c.d. y el mín.c.m.?

6 Calcula: máx.c.d. (40, 60) y mín.c.m. (40, 60).

¿Resuelves expresiones con paréntesis y operaciones combinadas de números enteros?

7 Calcula:

a) 7 – 12 b) 10 – 8 +3 c) 5 – 11 + 8 – 10

8 Calcula el valor de:

a) 2 – (5 – 8) b) (7 – 15) – (6 – 2)

c) 5 – [2 – (3 – 2)]

9 Calcula.

a) 4 · 3 – 13 b) 5 · (–2) + 3 · 4

c) 20 – 4 · 6 – 12 : (–2)

2 Sistema de numeración decimal y sistema sexagesimal

Cuando un astrónomo afirma que un planeta y una estrella coincidieron en un punto de latitud 78° 43' 55'' a las 23 h 15 min 18 s, está usando dos sistemas de numeración:

— Los números 78, 43, 55, 23, 15 y 18 están escritos en notación decimal-posicional (es decir, la que usamos habitualmente, en base 10).

— Tanto las expresiones angulares (en °, ' y '') como las horarias (h, min y s) están basadas en un sistema sexagesimal (base 60).

El sistema de numeración decimal-posicional fue un logro de los indios, hacia el siglo VI. Nos lo trajeron los árabes en el siglo VIII.

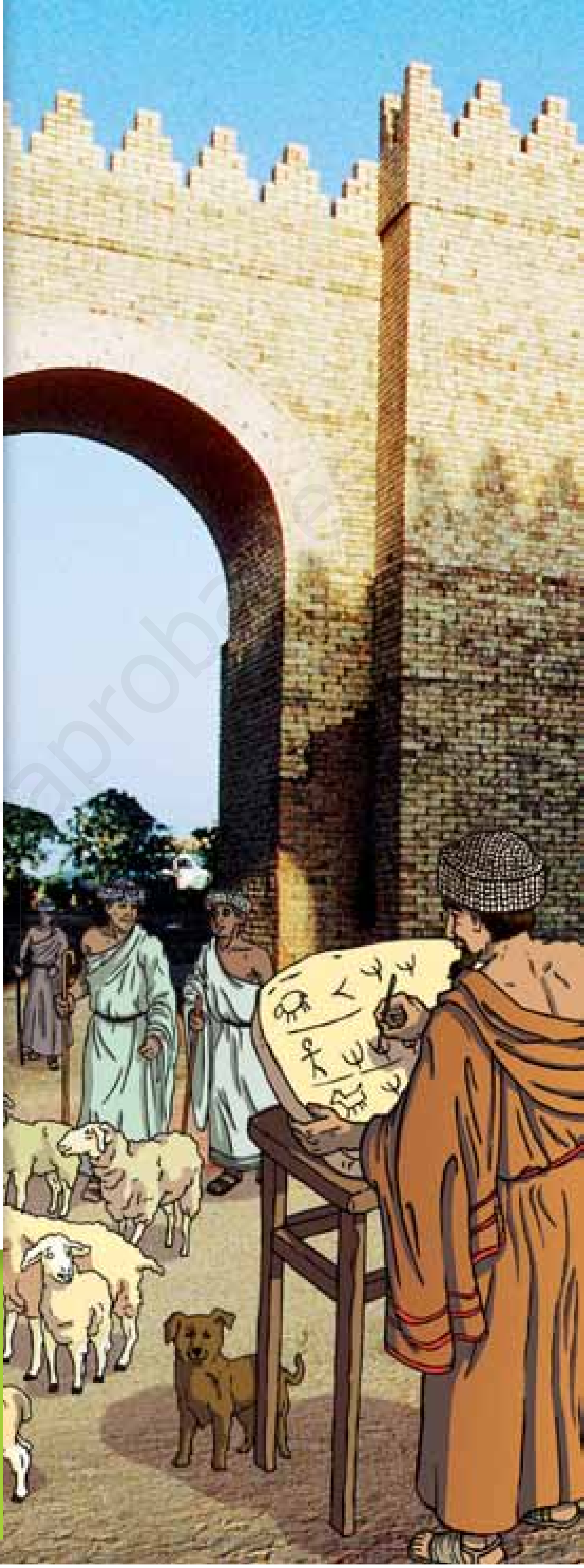
El sistema sexagesimal fue creado por los babilonios hace más de tres mil años. Ahora es universalmente utilizado para medir ángulos y tiempos. Por ejemplo, una hora y cuarto, que sería 1,25 h en forma decimal, se escribe 1 h 15 min en sexagesimal.

Lo curioso es que en Europa, durante varios siglos, los números enteros se expresaban en el sistema decimal y las partes fraccionarias en sistema sexagesimal. Por ejemplo, para expresar el número 12,84 se ponía:

$$12;50,24 \text{ que significaba } 12 + \frac{50}{60} + \frac{24}{60^2}$$

¡Qué complicación!

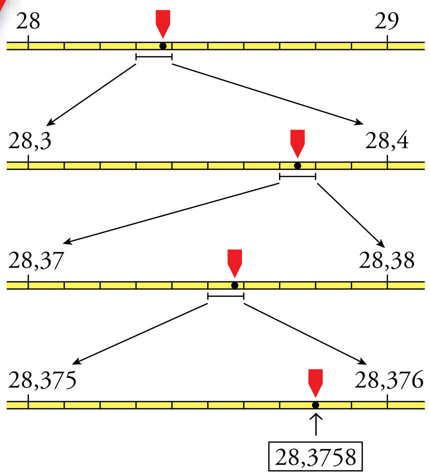
Hasta el siglo XVI no se popularizó el uso de la nomenclatura decimal para expresar partes de la unidad, como hacemos ahora.



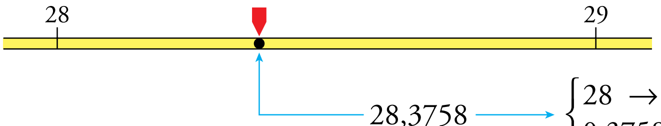
DEBERÁS RECORDAR

- La estructura del sistema de numeración decimal.
- Cómo se multiplica y se divide por la unidad seguida de ceros.
- Cómo se aproxima un número a un determinado orden de unidades.
- La traducción de algunas cantidades de tiempo del sistema sexagesimal al decimal.

1 El sistema de numeración decimal



Para expresar cantidades comprendidas entre dos números enteros, utilizamos los números decimales.



$$28{,}3758 \longrightarrow \begin{cases} 28 \rightarrow \text{PARTE ENTERA} \\ 0{,}3758 \rightarrow \text{PARTE DECIMAL} \end{cases}$$

La parte decimal representa una cantidad menor que la unidad y sus órdenes de unidades tienen la misma estructura que los de la parte entera:

Una unidad de cualquier orden se divide en diez unidades del orden inmediato inferior.

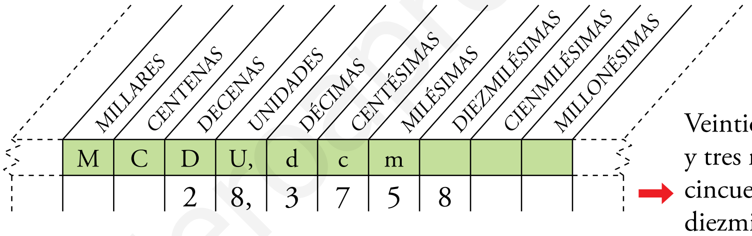
1 unidad = 10 décimas ⟶ $1 = 10 \cdot 0{,}1$

1 décima = 10 centésimas ⟶ $0{,}1 = 10 \cdot 0{,}01$

…

1 milésima = 10 diezmilésimas ⟶ $0{,}001 = 10 \cdot 0{,}0001$

…



M	C	D	U,	d	c	m			
		2	8,	3	7	5	8		

➡ Veintiocho unidades y tres mil setecientas cincuenta y ocho diezmilésimas

$$20 + 8 + 0{,}3 + 0{,}07 + 0{,}005 + 0{,}0008 = 28 + \frac{3\,758}{10\,000}$$

Clases de números decimales

Conviene que sepas diferenciar los distintos tipos de números decimales que te encontrarás en mediciones, resultados de operaciones y problemas.

- **Decimales exactos:** tienen un número limitado de cifras decimales.

  $$4{,}\underbrace{75}_{\text{DOS CIFRAS DECIMALES}}$$

- **Decimales periódicos:** tienen infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente. Pueden ser de dos tipos:

  Periódico puro:

  $$7{,}151515\ldots = 7{,}\underbrace{\overset{\frown}{15}}_{\text{PERIODO}}$$

  Periódico mixto:

  $$8{,}24666\ldots = 8{,}\underbrace{24}_{\text{PARTE DECIMAL NO PERIÓDICA}}\underbrace{\overset{\frown}{6}}_{\text{PERIODO}}$$

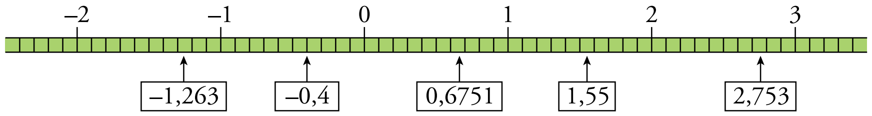
- **Decimales no exactos y no periódicos:** tienen infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente.

  $$\sqrt{2} = 1{,}4124135\ldots$$

2 Representación y ordenación de números decimales

Cada número decimal se representa con un punto de la recta numérica.

Cada punto de la recta numérica se localiza mediante un número decimal.



$$-1{,}263 < -0{,}4 < 0{,}6751 < 1{,}55 < 2{,}753$$

Los números decimales quedan ordenados en la recta numérica.

Si elegimos dos números cualesquiera, el menor queda a la izquierda, y el mayor, a la derecha.

Recuerda

Para comparar dos números decimales, contrastamos cifra a cifra los órdenes de unidades correspondientes, empezando por la izquierda.

4,	3	5	1	2	
↓	↓	↓	↓		
=	=	=	≠		
↑	↑	↑	↑		
4,	3	5	0	9	9

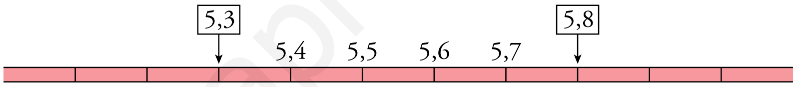
4,35099 < 4,3512

0 < 1

Entre dos números decimales siempre hay otro decimal

- Tomemos dos decimales cualesquiera; por ejemplo, 5,3 y 5,8.

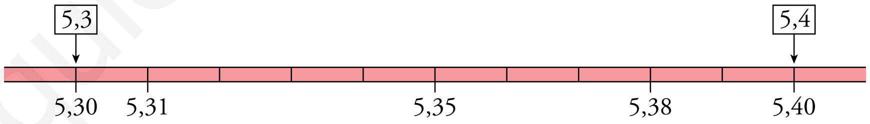
  Es evidente que entre ambos hay otros números.



$$\boxed{5{,}3} < 5{,}4 < 5{,}5 < 5{,}6 < 5{,}7 < \boxed{5{,}8}$$

- Tomemos, ahora, dos consecutivos de los anteriores; por ejemplo, 5,3 y 5,4.

  Ambos números se diferencian en una décima, que se divide en diez centésimas.



$$\boxed{5{,}30} < 5{,}31 < \ldots < 5{,}35 < \ldots < 5{,}38 < \ldots < \boxed{5{,}40}$$

El razonamiento puede continuar indefinidamente, y repetirse para cualquier otro par de números.

- Los números decimales quedan ordenados en la recta numérica.
- Entre dos números decimales cualesquiera hay infinitos decimales.

REGLA PRÁCTICA:

El proceso anterior te resultará más claro si aumentas el número de cifras decimales, añadiendo ceros a la derecha.

EJEMPLO

Intercalemos varios números decimales entre 2,58 y 2,59:

$$\left.\begin{array}{l}2{,}58 = 2{,}580\\ 2{,}59 = 2{,}590\end{array}\right\} \Rightarrow 2{,}580 < 2{,}581 < \ldots < 2{,}589 < 2{,}590$$

Ejemplo

Intercalar un número decimal entre

$$\boxed{5{,}09} < \dots\dots < \boxed{5{,}1}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

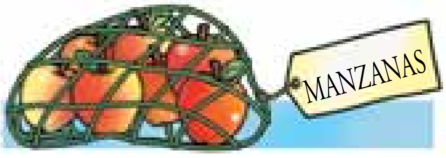
$$\boxed{5{,}090} < 5{,}095 < \boxed{5{,}100}$$

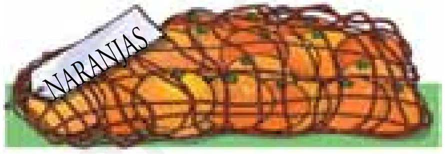
Aproximación de un número decimal a un determinado orden de unidades

En ocasiones, como resultado del cálculo, obtenemos números con excesivas cifras decimales que resultan de manejo engorroso y aportan información poco significativa. En estos casos, sustituimos los resultados por otros más manejables de *valor aproximado*.

▼ **EJEMPLO**

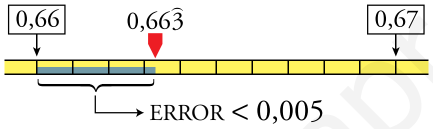
Un supermercado ofrece bolsas de manzanas de 3 kg por 1,99 €, y bolsas de naranjas de 5 kg por 2,79 €. ¿A cómo sale el kilo de manzanas? ¿Y el de naranjas?

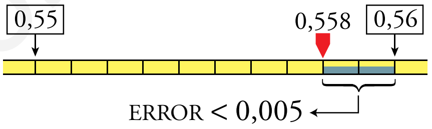




1,99 : 3 = 0,66333…

2,79 : 5 = 0,558





El resultado 0,66$\widehat{3}$ está más cerca de 0,66 que de 0,67.

El kilo de manzanas sale por 0,66 €.

El resultado 0,558 está más cerca de 0,56 que de 0,55.

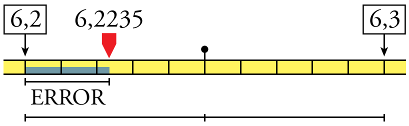
El kilo de naranjas sale por 0,56 €.

La manipulación de los resultados anteriores recibe el nombre de *redondeo*.

El **redondeo** consiste en suprimir las cifras decimales a partir de un determinado orden de unidades, sumando uno a la última cifra resultante cuando la primera cifra suprimida es 5 o mayor que 5.

Ten en cuenta

VALOR ⟶ 6,2235



REDONDEO A LAS DÉCIMAS → 6,2

ERROR → 6,2235 – 6,2 =
= 0,0235 < 0,05
↓
MEDIA DÉCIMA

El error cometido en el redondeo es inferior a media unidad del orden al que se aproxima.

Ejercicio resuelto

Aproximar a las décimas y a las centésimas, los números siguientes:

2,818 0,476 1,501 0,099

NÚMERO	APROXIMACIÓN A LAS DÉCIMAS	APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS
2,818	2,8	2,82
0,476	0,5	0,48
1,501	1,5	1,50
0,099	0,1	0,10

Actividades

1 Escribe cómo se leen las cantidades de la tabla:

	C	D	U,	d	c	m			
			0,	0	3	7			
		1	5,	4	6	8			
			0,	0	0	2	4		
4	3	5	8,	6					

2 Escribe cómo se leen las siguientes cantidades:

a) 1,37

b) 5,048

c) 2,0024

d) 0,00538

e) 0,000468

3 Escribe con cifras.

a) Tres unidades y cinco centésimas.

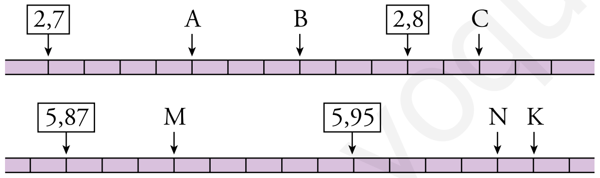
b) Cuarenta y tres milésimas.

c) Ocho cienmilésimas.

d) Doscientas diecinueve millonésimas.

e) Veintitrés millonésimas.

4 Escribe el número asociado a cada letra:



5 Dibuja una recta numérica y representa en ella los siguientes números:

A = 8,7 B = 9 C = 9,4 D = 10

6 Dibuja una recta numérica y representa los números siguientes sobre ella:

M = –0,02 N = 0,07 K = 0,1 H = 0,15

7 Ordena de menor a mayor en cada caso:

a) 7,4; 6,9; 7,09; 7,11; 5,88

b) 3,9; 3,941; 3,906; 4,001; 4,04

c) 0,039; 0,01; 0,06; 0,009; 0,075

8 Copia y completa en tu cuaderno con los signos <, > o =, según corresponda.

2,5 ☐ 2,50 6,1 ☐ 6,987

3,009 ☐ 3,01 4,13 ☐ 4,1300

9 Intercala un número decimal entre:

a) 2,2 y 2,3

b) 4,01 y 4,02

c) 1,59 y 1,6

d) 8 y 8,1

10 Redondea a las décimas.

a) 5,48

b) 2,8346

c) 3,057

11 Redondea a las centésimas.

a) 6,284

b) 1,53369

c) 0,79462

12 Completa en tu cuaderno.

NÚMERO	APROXIMACIÓN A LAS DÉCIMAS
8,53	
5,884	
$2,\widehat{4}$	
$5,\widehat{17}$	
4,083	
6,995	

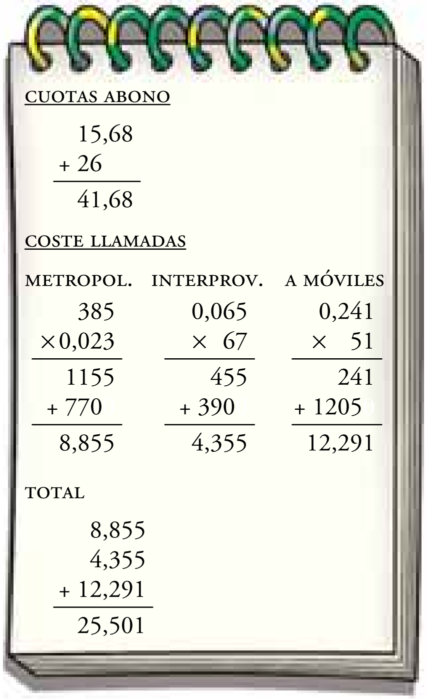
13 Completa en tu cuaderno.

NÚMERO	APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS
6,527	
0,4639	
1,0894	
2,096	
$5,\widehat{15}$	
$3,\widehat{24}$	

3 Operaciones con números decimales

Ya sabes sumar, restar y multiplicar números decimales. Como repaso, vamos a revisar este recibo de teléfono:

	TELEVOX, S.A.				IMPORTE	SUMAS
A	CUOTAS ABONO					
	– LÍNEA BÁSICA				15,68	
	– LÍNEA ADSL (tarifa plana)				26,00	41,6800
B	CONSUMO LLAMADAS	N.º LLAM.	TIEMPO (minutos)	TARIFAS (€/min)		
	– METROPOLITANAS	8	385	0,023	8,855	
	– INTERPROVINCIALES	16	67	0,065	4,355	
	– A MÓVILES	36	51	0,241	12,291	
	– AL EXTRANJERO	0	0	0,00		25,501
C	DESCUENTOS					
	– AHORRO NÚMS. FIJOS				5,84	
	– PROMOCIÓN FAMILIAS				3,0742	8,9142
RECIBO N.º........................		TOTAL (base imponible A + B – C)				58,2668
ABONADO..........................		IVA (18%)				10,4880
DIRECCIÓN........................		TOTAL				68,75



COSTE LLAMADAS...

CUOTAS ABONO

15,68
+ 26
41,68

COSTE LLAMADAS

METROPOL.	INTERPROV.	A MÓVILES
385	0,065	0,241
×0,023	× 67	× 51
1155	455	241
+ 770	+ 390	+ 1205
8,855	4,355	12,291

TOTAL

8,855
4,355
+ 12,291
25,501

Las operaciones necesarias se realizan al margen y se recogen en las siguientes expresiones:

CÁLCULO BASE IMPONIBLE (A + B – C)

$$\overbrace{(15,68 + 26,00)}^{\text{CUOTA ABONO}} + \overbrace{(385 \cdot 0,023 + 67 \cdot 0,065 + 51 \cdot 0,241)}^{\text{CONSUMO}} - \overbrace{(5,84 + 3,0742)}^{\text{DESCUENTOS}} =$$

$$= 41,68 + (8,855 + 4,355 + 12,291) - 8,9142 =$$

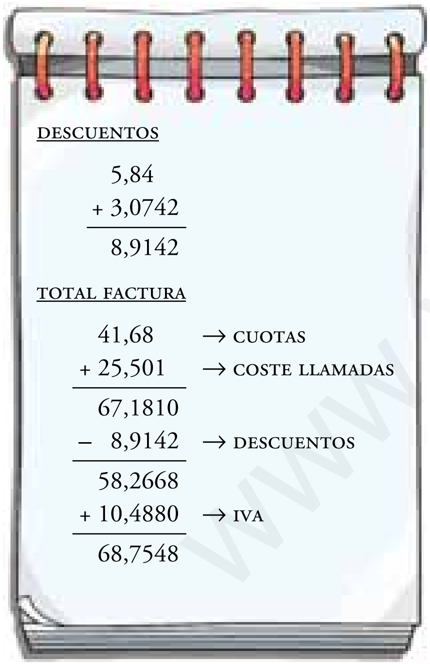
$$= 41,68 + 25,501 - 8,9142 = 67,181 - 8,9142 = 58,2668$$

CÁLCULO DEL IVA (18%)

$$(58,2668 \cdot 18) : 100 = 10,488024 \xrightarrow[\text{A LAS DIEZMILÉSIMAS}]{\text{REDONDEO}} 10,4880$$

CÁLCULO DEL TOTAL A PAGAR

$$\overbrace{58,2668}^{A + B - C} + \overbrace{10,4880}^{IVA} = 68,7548 \xrightarrow[\text{A LAS CENTÉSIMAS}]{\text{REDONDEO}} 68,75\ €$$



DESCUENTOS

5,84
+ 3,0742
8,9142

TOTAL FACTURA

41,68 → CUOTAS
+ 25,501 → COSTE LLAMADAS
67,1810
– 8,9142 → DESCUENTOS
58,2668
+ 10,4880 → IVA
68,7548

- Para **sumar** o **restar** números decimales, se colocan en columna haciendo coincidir los órdenes de unidades correspondientes.
- Para **multiplicar** números decimales, se opera como si fueran enteros y, después, se separan en el producto tantas cifras decimales como las que reúnen entre los dos factores.

4 División de números decimales

Vamos a repasar ahora los distintos casos de división con números decimales. Para cada uno, partiremos de un problema que da sentido a la operación.

Divisiones con el divisor entero

PROBLEMA 1

Una máquina tejedora ha fabricado una pieza de tela de 25 metros en 8 minutos.

¿Cuántos metros teje en un minuto?

```
25,000 |8
 1 0    3,125
   20
    40
     0
```

Solución: Teje 3,125 m en un minuto.

PROBLEMA 2

En un obrador de pastelería se han empleado 8,2 kg de harina para la fabricación de 15 tartas iguales. ¿Qué cantidad de harina lleva cada tarta?

```
8,2      |15
0 70      0,5466…
  100
   100
    10
    …
```

Solución: Cada tarta lleva $0{,}54\overset{\frown}{6} = 0{,}547$ kg.

Para obtener cifras decimales en el cociente:

- Al *bajar* la cifra de las décimas del dividendo, se pone la coma decimal en el cociente y se continúa la división.
- Si no hay suficientes cifras decimales en el dividendo, se añaden los ceros necesarios para alcanzar la aproximación deseada.

Divisiones con el divisor decimal

PROBLEMA 3

Dos kilos y medio de manzanas han costado 4 euros. ¿Cuánto cuesta un kilo de manzanas?

```
        4 : 2,5
· 10       ⇓       · 10
     40,0  |25
     15 0   1,6
      0 0
```

Solución: Un kilo cuesta 1,6 €.

PROBLEMA 4

Por un consumo de 24,88 metros cúbicos de agua nos ha llegado una factura de 93,3 €. ¿A cómo está el metro cúbico?

```
          93,3 : 24,88
· 100          ⇓          · 100
     9330,00   |2488
     1866 0     3,75
      124 40
       00 00
```

Solución: Un metro cúbico cuesta 3,75 €.

Cuando hay **decimales en el divisor:**

Se multiplican el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya en el divisor. La nueva división tiene el mismo cociente y el divisor entero.

Recuerda

Si se multiplican el dividendo y el divisor por el mismo número, el cociente no varía.

```
         6 :  2 = 3 ←──┐
· 10     ↓    ↓  · 10   COCIENTES
                        IGUALES
        60 : 20 = 3 ←──┘
```

Actividades

1 Responde mentalmente.

a) 0,75 + 0,25
b) 0,75 – 0,25
c) 1,80 + 1,20
d) 1,80 – 1,20
e) 2,30 + 1,80
f) 2,30 – 1,80
g) 3,50 + 1,75
h) 3,50 – 1,75

2 Calcula.

a) 2,37 + 0,356
b) 5,86 – 1,749
c) 13,2 + 4,08 + 2,635
d) 15,4 – 6,843
e) 7,04 + 12,283 + 0,05
f) 0,35 – 0,0648

3 Resuelve.

a) 2,37 – 1,26 + 0,8 – 0,35
b) 2,50 – 1,25 – 1,75 – 0,20
c) 13,48 – 10,7 + 5,328 – 6,726
d) 5,6 – 8,42 – 4,725 + 1,48

4 Experimenta, pon ejemplos y, después, completa:

a) Multiplicar por 0,5 es lo mismo que dividir entre…
b) Multiplicar por 0,25 es lo mismo que dividir entre…
c) Multiplicar por 0,1 es lo mismo que dividir entre…

5 Calcula mentalmente.

a) 12 · 0,5 b) 28 · 0,5 c) 0,02 · 0,5
d) 8 · 0,25 e) 1,2 · 0,25 f) 0,24 · 0,25
g) 17 · 0,1 h) 2,3 · 0,1 i) 0,6 · 0,1

6 Calcula.

a) 6,3 · 1,24
b) 0,44 · 2,375
c) 0,016 · 0,0025
d) 143 · 0,068
e) 5,48 · 2,63
f) 0,15 · 1,01

7 Experimenta, pon ejemplos y, después, completa:

a) Dividir entre 0,5 es lo mismo que multiplicar por…
b) Dividir entre 0,25 es lo mismo que multiplicar por…
c) Dividir entre 0,1 es lo mismo que multiplicar por…

8 Divide mentalmente.

a) 7 : 0,5 b) 0,3 : 0,5 c) 2,3 : 0,5
d) 2 : 0,25 e) 0,6 : 0,25 f) 1,2 : 0,25
g) 8 : 0,1 h) 0,7 : 0,1 i) 4,8 : 0,1

9 Calcula el cociente exacto o, como máximo, con tres cifras decimales.

a) 8 : 6 b) 218 : 16 c) 3 : 4
d) 12 : 536 e) 149,04 : 23 f) 2,58 : 15

10 Sustituye cada división por otra equivalente con el divisor entero. Después, calcula el cociente exacto o con tres cifras decimales.

a) 6 : 0,2 b) 13 : 0,75
c) 53 : 4,11 d) 4 : 0,009
e) 45,6 : 3,8 f) 23,587 : 5,1
g) 2,549 : 8,5 h) 6,23 : 0,011

11 Ejercicio resuelto

Aproximar a las centésimas el cociente de la división 17 : 2,45.

```
1700,000   |2,45
 230 0      6,938
  09 50
   2 150    APROXIMACIÓN A   } → 6,94
     190    LAS CENTÉSIMAS   }
```

12 Aproxima a las centésimas cada cociente:

a) 5 : 6 b) 7 : 9
c) 6 : 3,5 d) 2,7 : 5,9

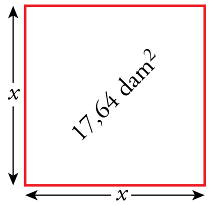
13 Calcula.

a) 2,6 · 100 b) 5,4 : 10 c) 0,83 · 10
d) 12 : 100 e) 0,0048 · 1 000 f) 350 : 1 000

5 Raíz cuadrada de un número decimal

Aplicación

Calcular el lado de un cuadrado conociendo su superficie.



$x \cdot x = x^2 = 17{,}64$

$x = \sqrt{17{,}64} = 4{,}2$ dam

Ya sabes que la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado. $\Big\}$ $\sqrt{a} = b \iff b^2 = a$

Por ejemplo:

$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 \iff 0{,}5^2 = 0{,}25$ $\qquad$ $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2 \iff 1{,}2^2 = 1{,}44$

También sabes que hay muchos números cuya raíz no es exacta. En esos casos, podemos tantear aproximaciones con tantas cifras decimales como queramos. Como ejemplo, vamos a calcular sucesivas aproximaciones de $\sqrt{7}$:

$$\left.\begin{array}{l} 2^2 = 4 \longrightarrow \text{no llega} \\ 3^2 = 9 \longrightarrow \text{se pasa} \end{array}\right\} 2 < \sqrt{7} < 3$$

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}6^2 = 6{,}76 \longrightarrow \text{no llega} \\ 2{,}7^2 = 7{,}29 \longrightarrow \text{se pasa} \end{array}\right\} 2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$$

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}64^2 = 6{,}9696 \longrightarrow \text{no llega} \\ 2{,}65^2 = 7{,}0225 \longrightarrow \text{se pasa} \end{array}\right\} 2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$$

La raíz cuadrada en la calculadora

Normalmente, para calcular la raíz cuadrada, usamos la tecla $\boxed{\sqrt{}}$ de la calculadora, que nos ofrece con comodidad la aproximación deseada.

▼ **EJEMPLO**

Calcular $\sqrt{35}$.

a) Con dos cifras decimales.

En la calculadora obtenemos $\sqrt{35} = 5{,}9160797\ldots$

Para dar la raíz con dos cifras decimales, aproximamos a las centésimas; es decir, $\sqrt{35} = 5{,}92$.

b) Aproximando el resultado a las milésimas.

$\sqrt{35} = 5{,}916$

Actividades

1 Calcula las siguientes raíces exactas:

a) $\sqrt{0{,}04}$ b) $\sqrt{0{,}49}$ c) $\sqrt{0{,}81}$

d) $\sqrt{0{,}0001}$ e) $\sqrt{0{,}0121}$ f) $\sqrt{0{,}1225}$

2 Obtén por tanteo, con una cifra decimal:

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{11{,}5}$ c) $\sqrt{150}$

3 Obtén las siguientes raíces con dos cifras decimales. Ayúdate con la calculadora.

a) $\sqrt{7{,}84}$ b) $\sqrt{56}$ c) $\sqrt{39{,}0625}$

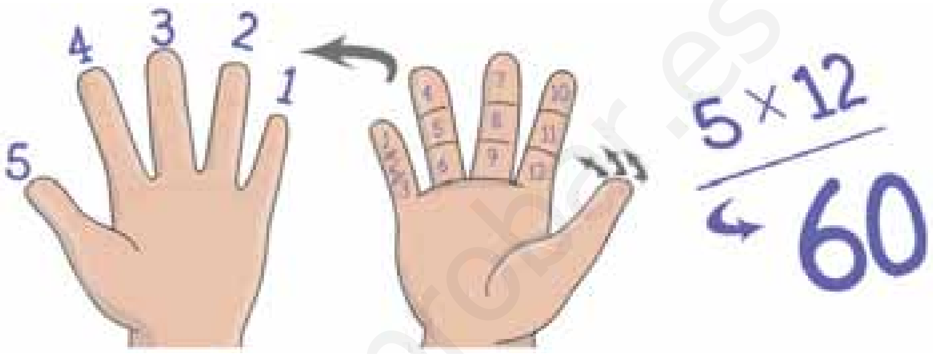
4 Usa la calculadora y redondea a las milésimas.

a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{2{,}54}$ c) $\sqrt{76{,}38}$

6 El sistema sexagesimal

De la misma forma que nosotros contamos de 10 en 10 (sistema decimal), otras culturas a lo largo de la historia han contado de 60 en 60 (sistema sexagesimal).

- La adopción de 10 como base del sistema de numeración decimal se fundamenta en la forma primitiva de contar utilizando los diez dedos de la mano.
- La adopción del 60 se basa, probablemente, en una forma más sofisticada de contar, utilizando las 12 falanges de los dedos índice, corazón, anular y meñique de una mano recorridos con el pulgar como guía. La cuenta del número de recorridos se llevaba con los dedos de la otra mano.



Medida del tiempo y de la amplitud angular

En la actualidad, el sistema sexagesimal se utiliza en la medida del *tiempo* y en la de la *amplitud angular*. En estas magnitudes, cada unidad se divide en 60 unidades del orden inferior.

TIEMPO

$\xrightarrow{\cdot 60}$ $\xrightarrow{\cdot 60}$

HORA	MINUTO	SEGUNDO
h	min	s

AMPLITUD ANGULAR

$\xrightarrow{\cdot 60}$ $\xrightarrow{\cdot 60}$

GRADO	MINUTO	SEGUNDO
°	'	''

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ h} = 60\text{ min}\\ 1\text{ min} = 60\text{ s}\end{array}\right\}\ 1\text{ h} = 60\cdot 60 = 3\,600\text{ s}$$

$$\left.\begin{array}{l}1° = 60'\\ 1' = 60''\end{array}\right\}\ 1° = 60\cdot 60 = 3\,600''$$

Observa que las notaciones de los minutos y los segundos difieren de una magnitud a la otra.

Ten en cuenta

$1\text{ h} = 60\text{ min}$

$1\text{ min} = \frac{1}{60}\text{ h}$

$12\text{ min} = \frac{12}{60}\text{ h} = 0{,}2\text{ h}$

$15\text{ min} = \frac{12}{60}\text{ h} = 0{,}25\text{ h}$

$30\text{ min} = \frac{30}{60}\text{ h} = 0{,}5\text{ h}$

Expresiones complejas e incomplejas

Recuerda que la medida de las cantidades relativas a una magnitud se pueden expresar utilizando simultáneamente varias unidades **(forma compleja)** o una unidad única **(forma incompleja).**

FORMA COMPLEJA		FORMAS INCOMPLEJAS
1 h 15 min	⟷	1,25 h → 75 min
13° 12'	⟷	13,2° → 792'

Transformación de expresiones

La información relativa al tiempo y a la medida de ángulos se suele dar en forma compleja. Sin embargo, al introducirla en la resolución de un problema se ha de expresar en una única unidad (forma incompleja). Es necesario, por tanto, que sepas traducirlo de una forma a la otra. En los siguientes ejemplos aprenderás los procedimientos para hacerlo.

Para el cálculo mental

15 min = 15 : 60 = 0,25 h
⇓
30 min = 0,50 h
45 min = 0,75 h
…
6 min = 6 : 60 = 0,1 h
⇓
12 min = 0,2 h
18 min = 0,3 h
24 min = 0,4 h
…

Paso de complejo a incomplejo

▼ **EJEMPLO 1:** Pasar a segundos 2 h 15 min 54 s.

$$\begin{array}{ccccc} 2 \text{ h} & = & 2 \cdot 3\,600 & = & 7\,200 \text{ s} \\ 15 \text{ min} & = & 15 \cdot 60 & = & 900 \text{ s} \\ 54 \text{ s} & = & & = & 54 \text{ s} \\ \hline 2 \text{ h } 15 \text{ min } 54 \text{ s} & & \xrightarrow{\hspace{3em}} & & 8\,154 \text{ s} \end{array}$$

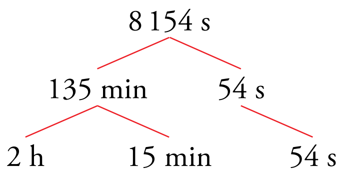
▼ **EJEMPLO 2:** Pasar a horas 2 h 18 min.

$$\begin{array}{ccccc} 2 \text{ h} & = & & = & 2 \text{ h} \\ 18 \text{ min} & = & 18 : 60 & = & 0{,}3 \text{ h} \\ \hline 2 \text{ h } 18 \text{ min} & & \xrightarrow{\hspace{3em}} & & 2{,}3 \text{ h} \end{array}$$

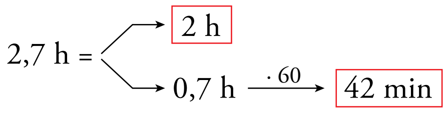
Paso de incomplejo a complejo

▼ **EJEMPLO 3:** Pasar a horas, minutos y segundos 8 154 s.

8154 s |60
215 135 min |60
354 $\boxed{15 \text{ min}}$ $\boxed{2 \text{ h}}$
$\boxed{54 \text{ s}}$



▼ **EJEMPLO 4:** Pasar a horas y minutos 2,7 h.



2,7 h = 2 h 42 min

Actividades

1 Expresa en segundos.

a) 37 min
b) 19 min 12 s
c) 1 h 25 min 16 s
d) 2 h 45 min 12 s

2 Expresa en grados.

a) 828'
b) 25 920''
c) 21° 15'
d) 17° 24'

3 Pasa a grados, minutos y segundos.

a) 24 660''
b) 37 240''
c) 78,5'
d) 12,25°

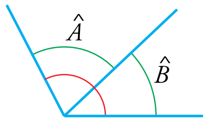
4 Pasa a horas, minutos y segundos.

a) 4 597 s
b) 82,3 min
c) 2,15 h
d) 3,55 h

7 Operaciones en el sistema sexagesimal

En los problemas resueltos que siguen, se expresan algunos procedimientos para operar en forma compleja. Trata de resolverlos, primero, por tus propios medios y, después, compara tus procesos con los que aquí se presentan.

Suma de amplitudes angulares



$\hat{A} = 74°\ 36'\ 52''$

$\hat{B} = 43°\ 18'\ 25''$

$$\begin{array}{rr} & 74°\ \ 36'\ \ 52'' \\ & +\ 43°\ \ 18'\ \ 25'' \\ \hline \hat{A} + \hat{B} = & 117°\ \ 54'\ \ 77'' \\ & \Downarrow \\ \hat{A} + \hat{B} = & 117°\ \ 55'\ \ 17'' \end{array}$$

Suma de cantidades en forma compleja

PROBLEMA 1

Un autobús de línea ha invertido 2 h 12 min 34 s en el trayecto de ida entre dos ciudades y 1 h 57 min 46 s en el de vuelta. ¿Cuánto ha durado en total el viaje?

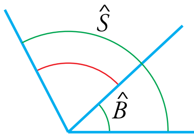
$$\begin{array}{r} 2\text{ h } 12\text{ min } 34\text{ s} \\ +\ 1\text{ h } 57\text{ min } 46\text{ s} \\ \hline \underbrace{3\text{ h } 69\text{ min } 80\text{ s}} \end{array}$$

En el resultado, transformamos 60 segundos en 1 minuto, y 60 minutos, en 1 hora.

$$\longrightarrow 3\text{ h } 70\text{ min } 20\text{ s} \longrightarrow 4\text{ h } 10\text{ min } 20\text{ s}$$

Solución: El viaje ha durado 4 h 10 min 20 s.

Resta de amplitudes angulares



$\hat{S} = 117°\ 55'\ 17''$

$\hat{B} = 43°\ 18'\ 25''$

$$\begin{array}{rr} & 117°\ \ 55'\ \ 17'' \\ & -\ 43°\ \ 18'\ \ 25'' \\ \hline & \Downarrow \\ & 117°\ \ 54'\ \ 77'' \\ & -\ 43°\ \ 18'\ \ 25'' \\ \hline \hat{S} - \hat{B} = & 74°\ \ 36'\ \ 52'' \end{array}$$

Resta de cantidades en forma compleja

PROBLEMA 2

Un helicóptero de salvamento marítimo recibe un aviso de socorro a las 18 h 56 min 45 s, y llega al lugar del accidente a las 19 h 8 min 15 s. ¿Cuánto ha tardado en responder a la llamada?

$$\begin{array}{r} 19\text{ h }\ \ 8\text{ min } 15\text{ s} \\ -\ 18\text{ h } 56\text{ min } 45\text{ s} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 18\text{ h } 68\text{ min } 15\text{ s} \\ -\ 18\text{ h } 56\text{ min } 45\text{ s} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 18\text{ h } 67\text{ min } 75\text{ s} \\ -\ 18\text{ h } 56\text{ min } 45\text{ s} \\ \hline 0\text{ h } 11\text{ min } 30\text{ s} \end{array}$$

Solución: Ha tardado once minutos y medio.

Producto de una cantidad compleja por un número

PROBLEMA 3

La cadena de montaje de una fábrica de electrodomésticos está programada para lanzar un lavavajillas cada 5 minutos y 13 segundos. ¿Cuánto tardará en cubrir un pedido de 50 lavavajillas?

$$\begin{array}{r} 5\text{ min } 13\text{ s} \\ \times\ 50 \\ \hline \boxed{250\text{ min }\ 650\text{ s}} \end{array}$$

En el resultado, hacemos las siguientes transformaciones:

$$\begin{array}{r|l} 650\text{ s} & 60 \\ \cline{2-2} 050\text{ s} & 10\text{ min} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 260\text{ min} & 60 \\ \cline{2-2} 20\text{ min} & 4\text{ h} \end{array}$$

$$\boxed{650\text{ s} = 10\text{ min } 50\text{ s}} \qquad \boxed{260\text{ min} = 4\text{ h } 20\text{ min}}$$

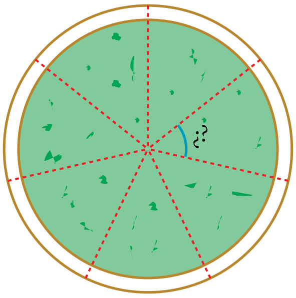
$$\longrightarrow 260\text{ min } 50\text{ s} \longrightarrow 4\text{ h } 20\text{ min } 50\text{ s}$$

Solución: Tarda 4 h 20 min 50 s en cubrir el pedido.

Cociente en forma compleja

PROBLEMA 4

Se desea dividir el jardín de una rotonda circular en siete sectores iguales. ¿Cuánto medirá el ángulo de cada sector?



$$\begin{array}{rrr|l}
360^\circ & & & 7 \\ \cline{4-4}
10 & & & 51^\circ\,25'\,42'' \\
3^\circ \xrightarrow{\cdot 60} & 180' & & \\
& 40 & & \\
& 5' \xrightarrow{\cdot 60} & 300'' & \\
& & 20 & \\
& & 6'' &
\end{array}$$

— Se divide 360° entre 7, y el resto se pasa a minutos.

— Se dividen 180' entre 7, y el resto se pasa a segundos.

— Queda un resto de 6''.

Solución: El ángulo de cada sector medirá 51° 25' 42''.

PROBLEMA 5

En un circuito de motociclismo, un piloto ha completado 25 vueltas en un tiempo de 1 h 45 min 25 s. ¿Cuánto ha tardado, por término medio, en cada vuelta?

$$\begin{array}{rrr|l}
1\text{ h} & 45\text{ min} & 25\text{ s} & 25 \\ \cline{4-4}
\xrightarrow{\cdot 60} & \underline{60\text{ min}} & + & 0\text{ h } 4\text{ min } 13\text{ s} \\
& 105\text{ min} & & \\
& 05\text{ min} \xrightarrow{\cdot 60} & \underline{300\text{ s}} & \\
& & 325\text{ s} & \\
& & 75 & \\
& & 0 &
\end{array}$$

Solución: Ha tardado, en cada vuelta, 4 minutos y 13 segundos.

Actividades

1 Realiza las sumas siguientes:

a) 6 h 15 min 30 s + 1 h 18 min 45 s

b) 2 h 37 min 12 s + 43 min 18 s

c) 3 h 24 min 16 s + 1 h 50 min 58 s

2 Calcula estas sumas de ángulos:

a) 12° 16' 37'' + 15° 42' 35''

b) 84° 25' 52'' + 12° 46' 33''

3 Realiza las siguientes restas:

a) 3 h 38 min 28 s – 46 min 12 s

b) 2 h 23 min 13 s – 1 h 42 min 20 s

c) 2 h – 1 h 16 min 30 s

4 Calcula estas diferencias de ángulos:

a) 85° 45' – 18° 37' 19''

b) 70° 49' 12'' – 36° 57' 10''

c) 62° 14' 21'' – 18° 27' 35''

5 Calcula.

a) (52 min 13 s) · 10

b) (1° 16' 15'') · 4

6 Calcula la medida de los ángulos cuya amplitud sea el doble y el triple, respectivamente, de la del ángulo $\hat{M} = 22^\circ\,25'\,43''$.

7 Divide.

a) 109° : 4

b) 21° 40' : 5

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Sistema de numeración decimal

1 ▼▽▽ Copia y completa.

a) 5 décimas = … milésimas

b) 2 milésimas = … millonésimas

c) 6 cienmilésimas = … centésimas

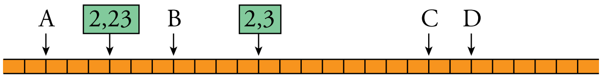
d) 8 millonésimas = … milésimas

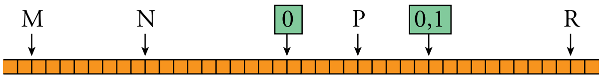
2 ▼▽▽ Ordena de menor a mayor en cada caso:

a) 5,1; 5,099; 4,83; 4,9; 4,99

b) 0,21; 0,03; 0,15; 0,209; 0,101; 0,121

3 ▼▽▽ Escribe el número asociado a cada letra:





4 ▼▽▽ Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

NÚMERO	$2,\overset{\frown}{7}$	$5,\overset{\frown}{29}$	$4,6\overset{\frown}{51}$
APROXIMACIÓN A LAS UNIDADES			
APROXIMACIÓN A LAS DÉCIMAS			
APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS			
APROXIMACIÓN A LAS MILÉSIMAS			

5 ▼▽▽ Berta pesa 52 kg y 450 gramos. María pesa 52,5 kg. Jacinto pesa más que Berta, pero menos que María.

a) ¿Qué puedes decir del error cometido al estimar el peso de Jacinto en 52 kilos?

b) ¿Y al estimarlo en cincuenta y dos kilos y medio?

Operaciones con números decimales

6 ▼▽▽ Calcula.

a) 3,2 – 1,63 – 0,528

b) 0,85+1,23–0,638–0,4

c) 3,458 – (6,7 – 4,284)

d) 5,2 – (2,798 + 1,36)

7 ▼▽▽ Opera con la calculadora y aproxima el resultado a las centésimas.

a) 2,63 · 0,84

b) 0,27 · 0,086

c) 62,35 : 12

d) 5,27 : 153

e) $\sqrt{851}$

f) $\sqrt{13,29}$

8 ▼▽▽ Obtén el resultado con ayuda de la calculadora y redondea a las centésimas.

a) 8,73 : 1,7 – 3,42 : 2,1

b) (8,73 : 1,7 – 3,42) : 2,1

9 ▼▽▽ Opera.

a) 5,8 – 3,2 · 1,6 – 0,29

b) (5,8 – 3,2) · 1,6 – 0,29

c) 5,8 – 3,2 · (1,6 – 0,29)

d) 5,8 – (3,2 · 1,6 – 0,29)

10 ▼▽▽ Para multiplicar por 0,1, podemos dividir entre diez, como ves en el ejemplo.

- **80 · 0,1 = 80 : 10 = 8**

¿Por qué número hay que dividir para…

a) …multiplicar por 0,01?

b) …multiplicar por 0,001?

11 ▼▽▽ Busca, y completa en tu cuaderno, el número decimal que debe ocupar cada casilla.

a) ☐ · 4,8 = 6

b) 0,2 · ☐ = 0,002

c) 7 : ☐ = 5

d) ☐ : 0,25 = 1,2

12 ▼▽▽ Copia y completa en tu cuaderno este cuadrado mágico.

	1,23	
1,08	0,03	0,78

13 ▼▽▽ Continúa en tres términos cada serie:

a) 2,37 - 2,16 - 1,95 - 1,74 - …

b) 5 - 1 - 0,2 - 0,4 - …

c) 0,24 - 1,2 - 6 - 30 - …

14 ▼▽▽ Calcula, con dos cifras decimales, la nota media de Julián en cada asignatura.

a) Lengua: 8 - 6 - 7 - 7 - 6 - 7

b) Matemáticas: 5,2 - 6 - 5,8 - 4,5 - 7,1 - 5,7

Operaciones en el sistema sexagesimal

15 ▼▽▽ Expresa en horas.

a) 48 min

b) 66 min

c) 6 120 s

16 ▼▽▽ Pasa a horas, minutos y segundos.

a) 8,42 h

b) 123,45 min

c) 12 746 s

17 ▼▽▽ Calcula.

a) 37° 50' 18'' + 25° 39'

b) 53° 27' 46'' + 39° 43' 32''

c) (3 h 13 min) – (1 h 52 min 28 s)

d) (4 h 16 min 24 s) – (2 h 39 min 51 s)

18 ▼▽▽ Calcula.

a) (14 min 16 s) · 8

b) (59° 46' 18'') : 6

Resuelve problemas con números decimales

19 ▼▽▽ ¿Cuánto cuestan dos kilos y ochocientos gramos de manzanas a 1,65 € el kilo?

20 ▼▽▽ ¿Cuánto pagaré si compro 1,083 kg de salmón a 9,75 €/kg? (Atención al redondeo).

21 ▼▽▽ Una llamada telefónica a Oslo de 13,5 min ha costado 9,45 €. ¿Cuál es el precio por minuto?

22 ▼▽▽ Para fabricar 3 500 dosis de cierto medicamento, se necesitan 1,96 kg de principio activo. ¿Cuántos gramos de este principio lleva cada dosis?

23 ▼▼▽ Hemos gastado 6,08 € en la compra de un trozo de queso que se vende a 12,80 €/kg. ¿Cuánto pesa la porción adquirida?

24 ▼▼▽ Una sandía de 2 kilos y 625 gramos ha costado 4,2 €. ¿A cómo sale el kilo?

25 ▼▼▽ Marcelo compra un melón que pesa dos kilos y cuatrocientos gramos.

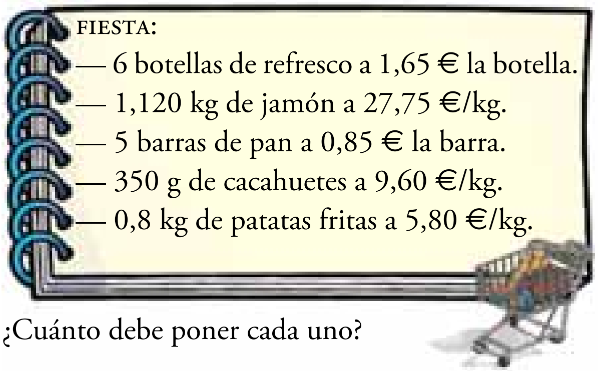
Si el melón se vende a 1,99 €/kg, ¿cuál de estas cantidades debe pagar por la compra?

4,80 €   4,90 €

4,78 €   4,88 €

26 ▼▼▽ Karla ha comprado 340 gramos de jamón, ha pagado con un billete de 10 € y le han devuelto 3,88 €. ¿A cómo está el kilo de jamón?

27 ▼▼▽ Para celebrar una fiesta, trece amigos adquieren:



FIESTA:

— 6 botellas de refresco a 1,65 € la botella.

— 1,120 kg de jamón a 27,75 €/kg.

— 5 barras de pan a 0,85 € la barra.

— 350 g de cacahuetes a 9,60 €/kg.

— 0,8 kg de patatas fritas a 5,80 €/kg.

¿Cuánto debe poner cada uno?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Resuelve problemas con amplitudes angulares y tiempos

28 ▼▼▽ Un autobús interurbano da una vuelta a su recorrido cada hora y doce minutos. ¿Cuántas vueltas dará en las 12 horas que dura su servicio?

Analiza y exprésate

29 ▼▼▼ Describe las distintas formas en que se ha resuelto la cuestión propuesta, y di si aprecias errores en alguna de ellas.

Un camión circula por una autopista a 90 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 300 km?

Resolución 1

300 | 90

30 → 30   3 h 20 min

× 60

1 800

000

El camión tarda 3 h 20 min.

Resolución 2

300,00 | 90

30 0   3,33

3 00

30

El camión tarda 3 h 33 min.

Resolución 3

$$300 = \underset{\substack{\downarrow \\ 1\text{ h}}}{90} + \underset{\substack{\downarrow \\ 1\text{ h}}}{90} + \underset{\substack{\downarrow \\ 1\text{ h}}}{90} + \underset{\substack{\downarrow \\ 20\text{ min}}}{30}$$

El camión tarda 3 h 20 min.

Resolución 4

90 km/h = 90 000 : 60 m/min = 1 500 m/min

300 km = 300 000 m

300 000 m : 1 500 m/min = 200 min = 3 h 20 min

El camión tarda 3 h 20 min.

Autoevaluación

¿Lees y escribes números que tengan hasta seis cifras decimales?

1 Escribe cómo se leen:

a) 1,07   b) 0,0023   c) 0,000234

2 Escribe con cifras:

a) Dieciocho centésimas.

b) Trece cienmilésimas.

c) Doscientas treinta y cinco millonésimas.

¿Redondeas un número decimal a las décimas, las centésimas, etc.?

3 Redondea a las centésimas.

a) 5,052   b) 0,55555   c) 0,7481

¿Realizas con agilidad cualquier operación con números decimales?

4 Calcula.

a) 0,25 · 11,48   b) 23 : 4,5

c) 0,08 : 1,6   d) 10,2 : 0,034

¿Pasas cantidades sexagesimales de forma compleja a incompleja, y viceversa?

5 Realiza las siguientes transformaciones:

a) Pasa a segundos 1 h 24 min.

b) Pasa a horas y minutos 2,4 h.

¿Resuelves problemas con números decimales y con cantidades sexagesimales?

6 Un vídeo tiene una duración de una hora y 59 minutos. Si la proyección ha terminado a las 14 h 12 min, ¿a qué hora empezó?

7 ¿Cuánto tarda en recorrer 180 km un camón que circula a la velocidad de 80 km/h?

8 Un mayorista compra en una bodega una cuba con 15 600 litros de vino a 0,60 €/*l*. Lo envasa en botellas de 0,75 *l* y lo vende a un supermercado a 1,20 € la botella.

a) ¿Cuántas botellas llena?

b) ¿Cuánto recibe por la venta de las botellas?

3 Las fracciones

El origen de las fracciones es muy antiguo: babilonios, egipcios, griegos, chinos e indios las manejaban hace miles de años.

Las fracciones de los babilonios eran sexagesimales: solo utilizaban como denominadores el número 60 y sus potencias. Por ejemplo, para $\frac{3}{4}$ ponían $\frac{45}{60}$.

Los egipcios usaban, exclusivamente, fracciones unitarias (con numerador uno). Por ejemplo, para escribir $\frac{3}{5}$ ponían $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$.

Eso hacía los cálculos sumamente engorrosos y les obligaba a valerse de complicadas tablas para efectuar operaciones.

Los antiguos griegos, inicialmente, continuaron la tradición egipcia, aunque más adelante pasaron a utilizar las fracciones ordinarias, que llegaron a manejar con gran soltura. Pero se empeñaban en dar el resultado de los problemas como suma de fracciones unitarias. Y este extraño tratamiento mixto se extendió hasta la Europa del siglo XIII.

Los chinos, sin embargo, ya en el siglo IV manejaban con toda destreza las fracciones ordinarias. Como curiosidad, diremos que llamaban *hijo* al numerador y *madre* al denominador.

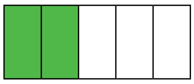
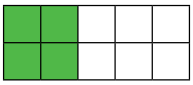
Los árabes, en su época de expansión y esplendor, también tuvieron grandes matemáticos en cuyos tratados aparecen las fracciones. Así, el nombre de fracción viene de la traducción (siglo XII) de *La Aritmética* de Al-Jwarizmi. La palabra árabe *al-kasr*, que significa *quebrar*, *romper* (se refería al quebrado o fracción de la unidad), se tradujo al latín por *fractio*.

DEBERÁS RECORDAR

- Una fracción es una parte de la unidad.
- Una fracción es una división indicada.
- Una fracción es un operador que actúa sobre un número y lo transforma.
- Diferentes fracciones pueden expresar el mismo valor.
- Cómo se calcula el mínimo común múltiplo de dos números.

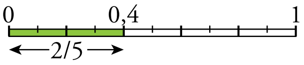
1 Fracciones equivalentes

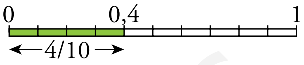
Dos **fracciones** son **equivalentes** cuando expresan la misma porción de unidad.

$\frac{2}{5}$  = $\frac{4}{10}$ 

Dos fracciones equivalentes tienen el mismo valor numérico.

$$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4 \qquad \frac{4}{10} = 4 : 10 = 0{,}4$$





Propiedad fundamental de las fracciones

Si se multiplican los dos miembros de una fracción por el mismo número, se obtiene una fracción equivalente:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot \boxed{2}}{5 \cdot \boxed{2}} = \frac{4}{10} \qquad \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot \boxed{3}}{5 \cdot \boxed{3}} = \frac{6}{15}$$

Recuerda

¿Cómo reconocer fracciones equivalentes?

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

En las fracciones equivalentes, los productos de los términos cruzados son iguales.

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \leftrightarrow \underbrace{2 \cdot 15}_{30} = \underbrace{6 \cdot 5}_{30}$$

Simplificación de fracciones

Como consecuencia de la propiedad anterior, podemos afirmar:

Si se dividen los dos términos de una fracción por el mismo número, se obtiene una fracción equivalente:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$$

Esta transformación recibe el nombre de **simplificación de fracciones.**

Una fracción que no se puede simplificar se llama **irreducible.**

$$\frac{12}{30} = \frac{12 : 2}{30 : 2} = \frac{6}{15} = \frac{6 : 3}{15 : 3} = \frac{2}{5} \leftrightarrow \text{FRACCIÓN IRREDUCIBLE}$$

Actividades

1 Escribe tres fracciones equivalentes a:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{6}{8}$ c) $\frac{5}{50}$

2 Divide, expresa en forma decimal y comprueba que las fracciones $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$ y $\frac{3}{12}$ son equivalentes.

3 Escribe una fracción equivalente a $\frac{4}{12}$ que tenga por denominador 15.

4 Simplifica.

a) $\frac{12}{20}$ b) $\frac{12}{32}$ c) $\frac{15}{45}$

5 Obtén en cada caso la fracción irreducible:

a) $\frac{15}{18}$ b) $\frac{30}{54}$ c) $\frac{25}{75}$

6 Calcula, en cada igualdad, el término desconocido:

a) $\frac{8}{20} = \frac{10}{x}$ b) $\frac{25}{x} = \frac{15}{9}$ c) $\frac{x}{21} = \frac{12}{28}$

2 Reducción de fracciones a común denominador

Comparar, sumar y restar fracciones es muy sencillo cuando todas tienen el mismo denominador. Por eso, cuando no lo tienen, las sustituimos por otras equivalentes con igual denominador.

Analiza el proceso que se ha de seguir en el ejemplo que viene a continuación.

Recuerda

Para obtener el mínimo común múltiplo de varios números:

- Se descomponen en factores primos.
- Se toman los factores primos comunes y los no comunes, con el mayor exponente.

▼ **EJEMPLO**

Vamos a ordenar de menor a mayor las fracciones $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{30}$ y $\frac{11}{20}$.

- Elegimos como denominador común el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\left.\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 20 = 2^2 \cdot 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{mín.c.m. } (12, 30, 20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

- En cada fracción, multiplicamos numerador y denominador por el mismo número, el adecuado para obtener 60 en el denominador:

$$\left.\begin{array}{l} 60 : 12 = 5 \rightarrow \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{35}{60} \\ 60 : 30 = 2 \rightarrow \frac{13}{30} = \frac{13 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{26}{60} \\ 60 : 20 = 3 \rightarrow \frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{33}{60} \end{array}\right\} \underbrace{\frac{26}{60} < \frac{33}{60} < \frac{35}{60}}$$

$$\downarrow$$

Ahora, ya podemos ordenar las fracciones: $\overbrace{\frac{13}{30} < \frac{11}{20} < \frac{7}{12}}$

Para reducir fracciones a común denominador:

- Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- Se multiplican los dos miembros de cada fracción por el número que resulta de dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador correspondiente.

Actividades

1 Reduce a común denominador, poniendo como denominador común el que se indica en cada caso.

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ → Denominador común: 8

b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{9}$ → Denominador común: 18

c) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{9}$ → Denominador común: 36

d) $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}$ → Denominador común: 20

2 Reduce a común denominador los siguientes grupos de fracciones:

a) $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}$

c) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$

d) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{11}{18}$

e) $\frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{15}$

f) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}$

g) $\frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$

h) $\frac{2}{5}, \frac{5}{9}, \frac{11}{15}, \frac{22}{45}$

3 Suma y resta de fracciones

- Para sumar o restar fracciones, las reducimos previamente a común denominador.
- Si alguno de los sumandos es un número entero, lo transformamos en una fracción con denominador la unidad $\left(a = \frac{a}{1}\right)$.

Recuerda

$$\left.\begin{array}{r} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 8 = 2^3 \\ 6 = 2 \cdot 3 \end{array}\right\}$$

$$\text{mín.c.m. } (12, 8, 6) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

EJEMPLO

$$\frac{7}{12} - \frac{5}{8} + \frac{1}{6} \rightarrow \text{mín.c.m. } (12, 8, 6) = 24$$

$$\boxed{24 : 12 = 2} \qquad \boxed{24 : 8 = 3} \qquad \boxed{24 : 6 = 4}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{7}{12} - \frac{5}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} =$$

$$= \frac{14}{24} - \frac{15}{24} + \frac{4}{24} = \frac{14 + 4 - 15}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Sumas, restas y paréntesis

El manejo de los paréntesis en las sumas y las restas de fracciones sigue las mismas reglas que en los números enteros.

- Si se suprime un paréntesis precedido del signo más, los signos interiores no varían:

$$+\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{m}{n}$$

- Si se suprime un paréntesis precedido del signo menos, los signos interiores se transforman; más en menos y menos en más:

$$-\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{m}{n}\right) = -\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{m}{n}$$

Fracciones opuestas

- Dos **fracciones** son **opuestas** cuando su suma es cero.
- Toda fracción $\frac{a}{b}$ tiene una opuesta, $\frac{-a}{b}$ $\left(\text{o bien } \frac{a}{-b}\right)$:

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$$

EJEMPLO

$$\frac{3}{5} \rightarrow \text{Formas de la opuesta} \begin{cases} -\frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{-5} \end{cases}$$

EJEMPLO

- Resolución suprimiendo previamente los paréntesis:

$$\left(2 - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{13}{12} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{1} - \frac{4}{3} - \frac{13}{12} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{24}{12} - \frac{16}{12} - \frac{13}{12} + \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{33 - 31}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

- Resolución operando dentro de los paréntesis:

$$\left(2 - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{13}{12} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{6}{3} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{13}{12} - \frac{9}{12} + \frac{2}{12}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{15 - 9}{12} = \frac{2}{3} - \frac{6}{12} = \frac{8}{12} - \frac{6}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Actividades

1 Escribe la fracción opuesta de:

a) $\frac{5}{3}$　b) $\frac{-2}{3}$　c) $\frac{4}{-5}$

2 Copia y completa en tu cuaderno.

a) $\frac{2}{7}-\frac{2}{\square}=0$　b) $\frac{3}{4}+\frac{\square}{4}=0$

c) $\frac{1}{6}+\frac{1}{\square}=0$　d) $\frac{5}{8}-\frac{-5}{\square}=0$

3 Calcula mentalmente.

a) $1+\frac{1}{2}$　b) $1-\frac{1}{2}$　c) $2+\frac{1}{2}$

d) $1+\frac{1}{3}$　e) $1-\frac{1}{3}$　f) $2+\frac{1}{3}$

g) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$　h) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$　i) $\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$

4 Calcula.

a) $1-\frac{3}{7}$　b) $2-\frac{5}{4}$　c) $\frac{17}{5}-3$　d) $\frac{13}{15}-1$

5 Opera.

a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$　b) $\frac{3}{5}-\frac{1}{4}$　c) $\frac{5}{6}-\frac{5}{9}$

d) $\frac{1}{4}+\frac{5}{16}$　e) $\frac{3}{11}-\frac{1}{2}$　f) $\frac{9}{14}+\frac{1}{4}$

6 Opera y simplifica.

a) $\frac{7}{6}+\frac{7}{12}$　b) $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}$　c) $\frac{2}{7}-\frac{11}{14}$

d) $\frac{1}{6}-\frac{1}{14}$　e) $\frac{7}{15}-\frac{3}{10}$　f) $\frac{7}{20}-\frac{4}{15}$

7 Calcula, reduciendo al común denominador que se indica.

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{3}{5}$ → Denominador común: 30

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ → Denominador común: 8

c) $\frac{5}{6}-\frac{3}{9}-\frac{3}{4}$ → Denominador común: 36

d) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ → Denominador común: 6

e) $\frac{7}{9}-\frac{4}{15}-\frac{1}{5}$ → Denominador común: 45

8 Calcula.

a) $\frac{5}{8}-\frac{7}{12}+\frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{10}+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}$

c) $1-\frac{6}{7}+\frac{5}{11}$

d) $\frac{9}{5}+\frac{6}{7}-2$

9 Calcula y simplifica los resultados.

a) $\frac{4}{9}+\frac{5}{6}-\frac{7}{18}$

b) $\frac{3}{7}-\frac{2}{5}+\frac{27}{35}$

c) $\frac{5}{6}-\frac{1}{10}-\frac{1}{5}$

d) $\frac{13}{12}-\frac{5}{8}-\frac{5}{6}$

10 Opera y compara los resultados.

a) $2-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

b) $2-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$

c) $\frac{3}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}$

d) $\frac{3}{5}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)$

11 Quita paréntesis y calcula.

a) $1-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)$

b) $\frac{3}{5}+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$

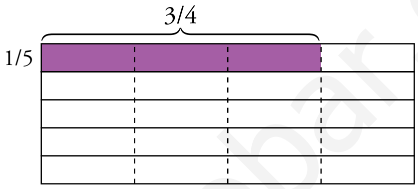
d) $\left(1-\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{9}{14}-\frac{1}{2}\right)$

4 Multiplicación y división de fracciones

Multiplicación

Observa e interpreta los siguientes gráficos:

$$3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$



$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$$

La forma de llegar a los mismos resultados, sin ayuda de los gráficos, sería:

$$3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$$

Para multiplicar fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$ ↔ Se multiplican los numeradores.
↔ Se multiplican los denominadores.

Fracciones inversas

- Dos **fracciones** son **inversas** cuando su producto es la unidad.
- Toda fracción distinta de cero tiene inversa:

Inversa de $\frac{a}{b} \rightarrow \frac{b}{a}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$$

División

Recuerda las relaciones entre la multiplicación y la división de enteros.

$$8 \cdot 5 = 40 \rightarrow \begin{cases} 40 : 8 = 5 \\ 40 : 5 = 8 \end{cases}$$

Estas relaciones se han de mantener con las fracciones.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15} \rightarrow \begin{cases} \frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \\ \frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Recuerda

PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES

— Primero, los paréntesis.

— Después, las multiplicaciones y las divisiones.

— Por último, las sumas y las restas.

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6}$$

$$\frac{7}{8} - \frac{15}{48} = \frac{9}{16}$$

En la práctica, para obtener esos resultados al dividir dos fracciones, se multiplica la primera por la inversa de la segunda o, lo que es lo mismo, se multiplican los términos cruzados.

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{4} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

Para dividir dos fracciones:

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ ↔ Se multiplican los términos cruzados.

EJEMPLOS

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 4} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{5} : 6 = \frac{2}{3} : \frac{6}{1} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Actividades

1 Multiplica.

a) $2 \cdot \frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4} \cdot 5$ c) $(-7) \cdot \frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{3}$ e) $\frac{3}{5} \cdot \frac{(-2)}{7}$ f) $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{2}$

2 Multiplica y reduce como en el ejemplo.

- $\mathbf{\frac{2}{5} \cdot 10 = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{1} = \frac{20}{5} = 4}$

a) $\frac{1}{3} \cdot 6$ b) $\frac{2}{(-3)} \cdot 12$ c) $\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot 7$

d) $\frac{3}{4} \cdot 8$ e) $\frac{5}{3} \cdot (-12)$ f) $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-18)$

3 Multiplica y obtén la fracción irreducible.

a) $\frac{2}{9} \cdot \frac{9}{2}$ b) $\frac{(-3)}{5} \cdot \frac{(-5)}{3}$ c) $\frac{13}{21} \cdot \frac{7}{13}$

d) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2}$ e) $\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)$ f) $\left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{18}{35}\right)$

4 Divide estas fracciones:

a) $4 : \frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{5} : 2$ c) $\frac{3}{5} : \frac{8}{7}$

d) $\frac{1}{3} : 4$ e) $2 : \frac{3}{5}$ f) $\frac{8}{7} : \frac{3}{5}$

5 **Ejercicio resuelto**

a) $\mathbf{\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{5} \cdot \frac{9-4}{12} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

b) $\mathbf{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{3}} = \frac{6}{20} - \frac{1}{3} = \frac{3}{10} - \frac{1}{3} = \frac{9-10}{30} = \frac{-1}{30}$

6 Calcula y compara los resultados de izquierda y derecha.

a) $\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{3}{10}$

b) $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right)$

c) $\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{5}$

d) $\frac{15}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)$

7 Opera.

a) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) \cdot 20$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) : 7$

c) $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)$ d) $\frac{3}{21} : \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{3}\right)$

5

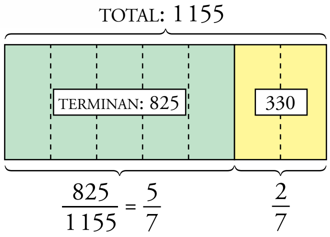
Problemas aritméticos con números fraccionarios

Se presenta una serie de problemas tipo, resueltos, cuya comprensión te facilitará el camino para resolver, por analogía, muchas situaciones con fracciones.

Fracción de una cantidad

PROBLEMA 1: CÁLCULO DE LA FRACCIÓN

En un maratón han tomado la salida 1 155 participantes, pero durante la prueba han abandonado 330. ¿Qué fracción del total de los inscritos ha llegado al final?



Fracción que abandona $\rightarrow \frac{330}{1155} \xrightarrow[:3]{:3} \frac{110}{385} \xrightarrow[:5]{:5} \frac{22}{77} \xrightarrow[:11]{:11} \frac{2}{7}$

Fracción que finaliza $\rightarrow \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

PROBLEMA 2: CÁLCULO DE LA PARTE (PROBLEMA DIRECTO)

En un maratón han tomado la salida 1 155 participantes. Durante la prueba han abandonado 2/7 de los corredores. ¿Cuántos han llegado a la meta?

N.° de abandonos $\rightarrow \frac{2}{7}$ de 1 155 $= \frac{1155 \cdot 2}{7} = 330$

N.° de los que terminan $\rightarrow$ 1 155 – 330 = 825

Suma y resta de fracciones

PROBLEMA 3: CÁLCULO DE LA FRACCIÓN

Un hortelano siembra 2/5 de su huerta de melones y 1/3 de la huerta de sandías. ¿Qué parte del terreno queda aún libre?

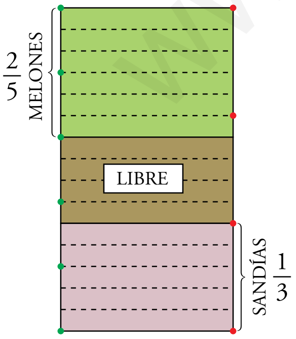
Ocupado

- Melones $\rightarrow \frac{2}{5}$
- Sandías $\rightarrow \frac{1}{3}$

$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$

Libre $\rightarrow \frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$

Solución: Aún quedan libres $\frac{4}{15}$ del terreno.



PROBLEMA 4: CÁLCULO DE LA PARTE (PROBLEMA DIRECTO)

Un agricultor siembra 2/5 de su huerta de melones y 1/3 de sandías. Si la huerta tiene 3 000 m^2, ¿qué superficie queda sin sembrar?

Sembrado $\rightarrow \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$

Libre $\rightarrow \frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$

Superficie libre $\rightarrow \frac{4}{15}$ de 3 000 $= \frac{3000 \cdot 4}{15} = 800$ m^2

Multiplicación y división de fracciones

PROBLEMA 5: PRODUCTO

Un frasco de perfume tiene una capacidad de 3/20 de litro. ¿Cuántos litros se necesitan para llenar 30 frascos?

$$\frac{3}{20} \cdot 30 = \frac{3 \cdot 30}{20} = \frac{90}{20} = \frac{9}{2} = \frac{8}{2} + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

Solución: Para llenar 30 frascos, se necesitan cuatro litros y medio de perfume.

PROBLEMA 6: COCIENTE

Con un bidón que contiene cuatro litros y medio de perfume, se han llenado 30 frascos iguales. ¿Cuál es la capacidad de un frasco?

Cuatro litros y medio $\rightarrow 4 + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\, l$

Capacidad de un frasco $\rightarrow \frac{9}{2} : 30 = \frac{9}{30 \cdot 2} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}\, l$

PROBLEMA 7: COCIENTE

Un frasco de perfume tiene una capacidad de 3/20 de litro. ¿Cuántos frascos se llenan con un bidón que contiene cuatro litros y medio?

Cuatro litros y medio $\rightarrow 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

$$\frac{9}{2} : \frac{3}{20} = \frac{9 \cdot 20}{3 \cdot 2} = \frac{180}{6} = 30$$

Solución: Con cuatro litros y medio se llenan 30 frascos.

Fracción de otra fracción

PROBLEMA 8: CÁLCULO DE LA FRACCIÓN

De un depósito de riego que estaba lleno, se han extraído, por la mañana, 2/3 de su contenido y, por la tarde, 3/5 de lo que quedaba. ¿Qué fracción de depósito queda al final del día?

Por la mañana $\begin{cases} \text{Se han extraído } \frac{2}{3}. \\ \text{Queda } \frac{1}{3}. \end{cases}$

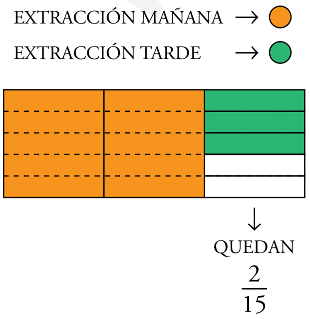
Por la tarde $\begin{cases} \text{Se han extraído } \frac{3}{5} \text{ de } \frac{1}{3}. \\ \text{Quedan } \frac{2}{5} \text{ de } \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}. \end{cases}$

Solución: Al final del día quedan $\frac{2}{15}$ del depósito.

Recuerda

Para calcular la fracción de otra fracción, se multiplican ambas fracciones:

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$



PROBLEMA 9: CÁLCULO DE LA PARTE (PROBLEMA DIRECTO)

De un depósito de riego de 90 000 litros que estaba lleno, se sacan, por la mañana, 2/3 de su contenido y, por la tarde, 3/5 de lo que quedaba. ¿Cuántos litros quedan en el depósito?

	FRACCIÓN EXTRAÍDA	FRACCIÓN RESTANTE
MAÑANA	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
TARDE	$\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

Quedan $\frac{2}{15}$ de 90 000 *l*.

$$\frac{2 \cdot 90\,000}{15} = 12\,000\ l$$

Solución: Al final del día quedan 12 000 litros en el depósito.

Actividades

Fracción de una cantidad

1 Roberto ha necesitado 100 pasos para avanzar 80 metros. ¿Qué fracción de metro recorre en cada paso?

2 Se ha volcado una caja que contenía 30 docenas de huevos y se han roto 135. ¿Qué fracción ha quedado?

3 Se ha volcado una caja con 30 docenas de huevos y se han roto tres octavas partes. ¿Cuántos huevos quedan?

Suma y resta de fracciones

4 Una familia dedica dos tercios de sus ingresos a cubrir gastos de funcionamiento, ahorra la cuarta parte del total y gasta el resto en ocio. ¿Qué fracción de los ingresos invierte en ocio?

5 En un congreso internacional, 3/8 de los delegados son americanos; 2/5 son asiáticos; 1/6, africanos, y el resto, europeos. ¿Qué fracción de los delegados ocupan los europeos?

6 Un confitero ha fabricado 20 kilos de caramelos de los que 2/5 son de naranja; 3/10, de limón, y el resto, de fresa. ¿Cuántos kilos de caramelos de fresa ha fabricado?

Producto y división de fracciones

7 Roberto avanza 4 metros en 5 pasos. ¿Qué fracción de metro avanza en cada paso? ¿Y en 100 pasos?

8 ¿Cuántos litros de aceite se necesitan para llenar 300 botellas de tres cuartos de litro?

9 ¿Cuántas botellas de vino de tres cuartos de litro se llenan con un depósito de 1 800 litros?

10 Un bote de suavizante tiene un tapón dosificador con una capacidad de 3/40 de litro. ¿Cuál es la capacidad del bote sabiendo que llena 30 tapones?

11 Un bote de suavizante de dos litros y cuarto proporciona, mediante su tapón dosificador, 30 dosis para lavado automático. ¿Qué fracción de litro contiene cada dosis?

Fracción de otra fracción

12 Un embalse está lleno a principios de verano. En julio pierde 3/7 de su contenido, y en agosto, 3/4 de lo que le quedaba. ¿Qué fracción conserva aún a principios de septiembre?

13 Marta gasta 3/4 de sus ahorros en un viaje, y 2/3 del resto, en ropa. ¿Qué fracción de lo que tenía ahorrado le queda?

14 Marta tenía ahorrados 1 800 euros, pero ha gastado tres cuartas partes en un viaje y dos tercios de lo que le quedaba en reponer su vestuario. ¿Cuánto dinero le queda?

6 Potencias y fracciones

Las propiedades que estudiaste para las potencias de números enteros se conservan con los números fraccionarios. Estas propiedades se traducen en reglas de uso práctico; pero no te limites a memorizarlas, si comprendes su justificación, las usarás con mayor seguridad y eficacia.

Potencia de una fracción

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$$

Para elevar una fracción a una potencia, se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^n}{b^n}$$

Potencia de un producto de fracciones

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right) = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{c^2}{d^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^2$$

La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores.

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

Por ejemplo: $\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{15}{30}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Potencia de un cociente de fracciones

$$\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^3 = \left(\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\right)^3 = \frac{a^3\cdot d^3}{b^3\cdot c^3} = \frac{a^3}{b^3}:\frac{c^3}{d^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3:\left(\frac{c}{d}\right)^3$$

La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor.

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n:\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

Por ejemplo: $\left(\frac{3}{10}\right)^2:\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{10}:\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{15}{60}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

Producto de potencias de la misma base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^5}{b^5} = \left(\frac{a}{b}\right)^{5 \leftarrow (5\,=\,3\,+\,2)}$$

Para multiplicar dos potencias de la misma base, se suman los exponentes.

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

Por ejemplo: $\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3+4} = \left(\frac{2}{5}\right)^7$

Cociente de potencias de la misma base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^7 : \left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^7}{b^7} : \frac{a^4}{b^4} = \frac{a^7 \cdot b^4}{b^7 \cdot a^4} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^{3 \leftarrow (3 = 7 - 4)}$$

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

Para dividir dos potencias de la misma base, se restan los exponentes.

▼ **EJEMPLO**

$$\left(\frac{3}{5}\right)^8 : \left(\frac{3}{5}\right)^6 = \left(\frac{3}{5}\right)^{8-6} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Potencias de exponente cero (a^0)

En principio, la expresión a^0 no tendría sentido; pero a esa combinación de signos le vamos a dar un significado dentro del lenguaje matemático:

- El cociente de dos números iguales es igual a la unidad. → $\frac{5^3}{5^3} = 1$
- Para dividir dos potencias de igual base, restamos los exponentes. → $\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{5^3}{5^3} = 1 \\ \frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \end{array}\right\} 5^0 = 1$$

Y de la misma forma:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 1 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^{3-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^0 \end{array}\right\} \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

No lo olvides

$$a^0 = 1 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

La potencia de exponente cero vale siempre uno (para cualquier base distinta de cero).

Potencia de otra potencia

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^3 = \left[\frac{a^2}{b^2}\right]^3 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^6}{b^6} = \left(\frac{a}{b}\right)^{6 \leftarrow (6 = 2 \cdot 3)}$$

No lo olvides

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$$

Para elevar una potencia a otra potencia, se multiplican los exponentes.

▼ **EJEMPLO**

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2^9}$$

Números y potencias de base 10

Ya conoces la descomposición polinómica de un número entero según las sucesivas potencias de base diez.

$$2\,458 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Esto nos proporciona un método para expresar con comodidad números de muchas cifras.

Ejercicios resueltos

Expresar como potencia de base 10 los siguientes números:

a) Un millón de billones.

$$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$$

b) La distancia media de la Tierra al Sol es 149 598 000 km.

$$149\,598\,000 \approx 150\,000\,000 = 150 \cdot 1\,000\,000$$

$$\text{Distancia media de la Tierra al Sol} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km} = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Reflexiona

$$52\,463\,000\,000\,000 = 52 \cdot 10^{12}$$

¿Cuál de las dos formas te parece más efectiva?

Actividades

1 Calcula.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ c) $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ d) $\left(\frac{1}{10}\right)^6$

2 Calcula, como en el ejemplo, por el camino más corto.

- $\mathbf{\frac{15^4}{5^4} = \left(\frac{15}{5}\right)^4 = 3^4 = 81}$

a) $\frac{12^3}{4^3}$ b) $\frac{8^5}{4^5}$ c) $\frac{5^4}{10^4}$

d) $5^2 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^2$ e) $(-4)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ f) $10^2 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)^2$

3 Reduce.

a) $\frac{x^6}{x^2}$ b) $\frac{z^4}{z^4}$ d) $\frac{x^7 \cdot x^{10}}{x^{12}}$ d) $\frac{a^3 \cdot a^7}{a^4 \cdot a^5}$

4 Reduce a una sola potencia.

a) $x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3$ b) $\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^3$ c) $\left(\frac{z}{m}\right)^4 \cdot \frac{z}{m}$

5 Reduce.

a) $\left(\frac{x}{y}\right)^4 \cdot y^4$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3$ c) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^4$

d) $\left(\frac{x}{y}\right)^3 : x^3$ e) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 : \left(\frac{1}{b}\right)^3$ f) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 : \frac{y}{x}$

6 Calcula.

a) 2^0 b) 5^0 c) 10^0 d) $(-4)^0$

7 Escribe la descomposición polinómica de:

a) 72,605

b) 658,32

8 Expresa con todas sus cifras.

a) $5 \cdot 10^6$

b) $34 \cdot 10^7$

9 Expresa en forma abreviada que:

Un año luz equivale a 9 460 800 000 000 km.

7 Fracciones y números decimales

Las notaciones fraccionaria y decimal son formas numéricas y, como verás ahora, muchas cantidades se pueden expresar tanto en la una como en la otra.

Paso de fracción a decimal

Ya sabes que una fracción es una división indicada cuyo resultado es un decimal exacto o un decimal periódico.

$\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0{,}6$	$\frac{5}{3} = 5 : 3 = 1{,}\widehat{6}$	$\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{,}8\widehat{3}$
DECIMAL EXACTO	DECIMAL PERIÓDICO PURO	DECIMAL PERIÓDICO MIXTO

Toda fracción se puede pasar a forma decimal. Para ello, se divide el numerador entre el denominador. Sin embargo, lo contrario no es cierto: solo se pueden pasar a fracción los decimales exactos y los periódicos.

Decimal exacto. Paso a fracción

Un decimal exacto se transforma en fracción quitándole la coma y dividiéndolo por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales se hayan suprimido.

▼ **EJEMPLOS**

$$0{,}7 = \frac{7}{10}$$

$$1{,}25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$$

$$0{,}875 = \frac{875}{1\,000} = \frac{7}{8}$$

Actividades

1 Expresa en forma decimal.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{7}{10}$

e) $\frac{2}{9}$ f) $\frac{17}{110}$

2 Expresa en forma de fracción.

a) 0,5 b) 0,8

c) 1,6 d) 0,04

e) 1,35 f) 0,325

3 Tantea, prueba y resuelve:

a) Comprueba con la calculadora.

$\frac{1}{9} = 1 : 9 = 0{,}11111...$

$\frac{2}{9} = 2 : 9 = 0{,}22222...$

$\frac{3}{9} = 3 : 9 = 0{,}33333...$

b) Busca la fracción generatriz de:

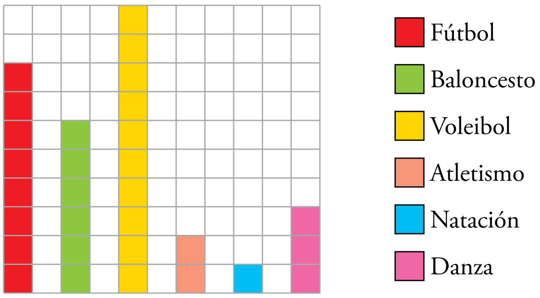
0,44444… 0,55555… 1,55555…

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Aplicación de conceptos

1 ▼▽▽ La gráfica informa sobre los deportes preferidos en una clase de 30 estudiantes de segundo de ESO.



¿Qué fracción de la clase…

a) … practica fútbol?

b) … practica baloncesto?

c) … no practica baloncesto?

d) … no practica ni fútbol, ni baloncesto?

2 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) $\frac{2}{3}$ de 60 b) $\frac{1}{10}$ de 90 c) $\frac{3}{4}$ de 120

d) $\frac{2}{7}$ de 35 e) $\frac{5}{9}$ de 18 f) $\frac{3}{5}$ de 100

3 ▼▽▽ ¿Cuántos gramos son?

a) $\frac{3}{4}$ de kilo b) $\frac{3}{5}$ de kilo c) $\frac{7}{20}$ de kilo

4 ▼▽▽ ¿Cuántos minutos son?

a) $\frac{5}{6}$ de hora b) $\frac{3}{12}$ de hora c) $\frac{4}{5}$ de hora

5 ▼▽▽ ¿Qué fracción de hora son?

a) 5 minutos b) 24 minutos c) 360 segundos

Fracciones y decimales

6 ▼▽▽ Expresa en forma decimal.

a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{27}{50}$ c) $\frac{13}{125}$

d) $\frac{7}{6}$ e) $\frac{4}{9}$ f) $\frac{5}{11}$

7 ▼▼▽ Pasa a forma fraccionaria.

a) 1,1 b) 0,13 c) 0,008

d) $0,\widehat{8}$ e) $1,\widehat{8}$

Equivalencia de fracciones

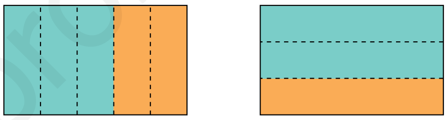
8 ▼▽▽ Escribe:

a) Una fracción equivalente a 4/10 que tenga por numerador 6.

b) Una fracción equivalente a 15/45 que tenga por denominador 12.

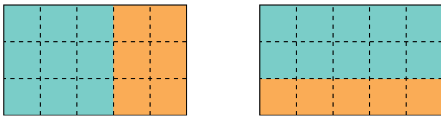
c) Una fracción que sea equivalente a 35/45 y tenga por numerador 91.

9 ▼▽▽ Estos dos trozos de tela son igual de grandes:



¿Cuál de los dos tiene una porción mayor de verde?

Explica la transformación que propone este gráfico para resolver la pregunta:



10 ▼▽▽ Calcula x en cada caso:

a) $\frac{6}{22} = \frac{15}{x}$ b) $\frac{21}{49} = \frac{x}{35}$

c) $\frac{13}{x} = \frac{11}{99}$ d) $\frac{x}{78} = \frac{91}{169}$

11 ▼▽▽ Reduce a común denominador.

a) $1, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}$ b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{15}$

12 ▼▽▽ Ordena de menor a mayor.

a) $\frac{9}{10}$; 0,6; $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{5}$; $1,\widehat{1}$ b) $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{6}$

13 ▼▼▽ Continúa en tres términos cada serie.

a) $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \dots$ b) $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \dots$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Suma y resta de fracciones

14 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) $1 - \frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}$ c) $1 + \frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ f) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

15 ▼▽▽ Calcula y simplifica.

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{2}{15}$

c) $\frac{1}{6} - \frac{5}{9} + \frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{3} - 2 + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}$

16 ▼▼▽ Opera.

a) $2 - \left(1 + \frac{3}{5}\right)$ b) $\left(1 - \frac{3}{4}\right) - \left(2 - \frac{5}{4}\right)$

Multiplicación y división de fracciones

17 ▼▽▽ Calcula y simplifica.

a) $\frac{3}{7} \cdot 14$ b) $\frac{2}{5} : 4$ c) $\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{(-7)}$

d) $\frac{3}{11} : \frac{(-5)}{11}$ e) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{20}$ f) $\frac{4}{15} : \frac{2}{5}$

Operaciones combinadas

18 ▼▼▽ Opera y reduce.

a) $\left(1 - \frac{5}{7}\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{5}\right)$ b) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) : \left(1 + \frac{1}{8}\right)$

c) $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right)$ d) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right)$

Potencias y fracciones

19 ▼▼▽ Reduce a una potencia única.

a) $a^5 \cdot a^2$ b) $a \cdot a^2 \cdot a^3$

c) $x^5 \cdot x^{-3}$

20 ▼▼▽ Simplifica.

a) $x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5$ b) $x^3 : \left(\frac{1}{x}\right)^5$ c) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot b^4$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 : a^3$ e) $(a^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^7$ f) $\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 : \left(\frac{1}{a^3}\right)^3$

21 ▼▽▽ Escribe con todas sus cifras estas cantidades:

a) $37 \cdot 10^7$ b) $64 \cdot 10^{11}$ c) $3{,}5 \cdot 10^{13}$

22 ▼▽▽ Expresa en forma abreviada como se ha hecho en el ejemplo.

- **5 300 000 000 = 53 · 10^8**

a) 8 400 000

b) 61 000 000 000

Interpreta, describe, exprésate

23 ▼▼▽ Aquí tienes la resolución que han presentado David y Olga al siguiente problema:

Una empresa de coches usados recibe un lote de 180 vehículos. El primer mes vende las tres cuartas partes. El siguiente mes coloca la quinta parte del lote. ¿Cuántos coches le quedan aún por vender?

Solución de David

- 3/4 de 180 = (180 : 4) · 3 = 135
- 1/5 de 180 = 180 : 5 = 36
- 135 + 36 = 171
- 180 – 171 = 9

Solución de Olga

- $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15 + 4}{20} = \frac{19}{20}$
- $\frac{20}{20} - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$
- 1/20 de 180 = 180 : 20 = 9

Ambos se han limitado a realizar las operaciones sin explicar el proceso. Hazlo tú, indicando el significado de cada operación y el resultado obtenido en cada caso.

Resuelve problemas

24 ▼▽▽ Un barco lleva recorridas las tres décimas partes de un viaje de 1 700 millas. ¿Cuántas millas le faltan todavía por recorrer?

25 ▼▽▽ Por tres cuartos de kilo de cerezas hemos pagado 1,80 €. ¿A cómo está el kilo?

26 ▼▼▽ Durante un apagón de luz, se consumen tres décimas partes de una vela de cera. Si el cabo restante mide 21 cm, ¿cuál era la longitud total de la vela?

27 ▼▽▽ La tercera parte de los 240 viajeros que ocupan un avión son europeos, y 2/5, africanos. El resto son americanos.

¿Cuántos americanos viajan en el avión?

28 ▼▽▽ Bernardo tiene 1 500 € en su cuenta y gasta 2/5 en una cadena musical y la cuarta parte de lo que le queda en una colección de discos.

¿Qué fracción le queda del dinero que tenía? ¿Cuánto le queda?

29 ▼▽▽ Un granjero tiene a finales de mayo unas reservas de 2 800 kg de pienso para alimentar a su ganado. En junio gasta 3/7 de sus existencias, y en julio, 3/4 de lo que le quedaba.

¿Cuántos kilos de pienso tiene a primeros de agosto?

30 ▼▼▽ Un frasco de perfume tiene una capacidad de 1/20 de litro. ¿Cuántos frascos se pueden llenar con un bidón que contiene tres litros y medio?

31 ▼▽▽ Una empresa comercializa jabón líquido en envases de plástico con una capacidad de 3/5 de litro.

¿Cuántos litros de jabón se necesitan para llenar 100 envases?

32 ▼▽▽ La abuela ha hecho dos kilos y cuarto de mermelada y con ella ha llenado seis tarros iguales.

¿Qué fracción de kilo contiene cada tarro?

33 ▼▼▽ Dos problemas similares.

a) De un tambor de detergente de 5 kg se han consumido 3 kg. ¿Qué fracción queda del contenido original?

b) De un tambor de detergente de 5 kg se han consumidos dos kilos y tres cuartos. ¿Qué fracción queda del contenido original?

Problemas "+"

34 ▼▼▽ María recoge en su huerta una cesta de manzanas. De vuelta a casa, se encuentra a su amiga Sara y le da la mitad de la cesta más media manzana. Después, pasa a visitar a su tía Rosa y le da la mitad de las manzanas que le quedaban más media manzana. Por último, se encuentra con su amigo Francisco y vuelve a hacer lo mismo: le da la mitad más media.

Entonces se da cuenta de que tiene que volver a la huerta porque se ha quedado sin nada.

¿Cuántas manzanas cogió, teniendo en cuenta que en ningún momento partió ninguna?

☞ *Recorre el problema al revés.*

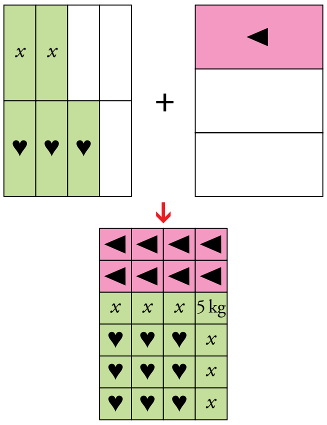
	HABÍA		SE LLEVA		QUEDA
SARA		→		→	
ROSA	?	→	?	→	1
FRANCISCO	🍎	→	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	→	0
	1		1		

35 ▼▼▼ En el baile, tres cuartas partes de los hombres están bailando con tres quintas partes de las mujeres. ¿Qué fracción de los asistentes no está bailando?

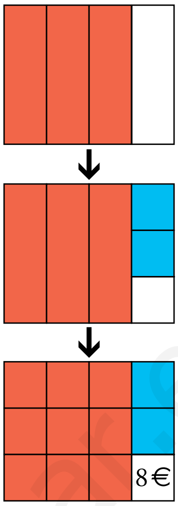
Ejercicios y problemas

36 ▼▼▼ Inventa un problema para cada uno de estos gráficos.

a)



b)



Autoevaluación

¿Conoces y aplicas los conceptos de fracción?

1 Expresa en forma decimal.

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{3}$ c) $\frac{5}{4}$

2 Calcula.

a) $\frac{3}{5}$ de 45 b) $\frac{5}{2}$ de 20

¿Conoces y aplicas el concepto de equivalencia de fracciones?

3 Simplifica.

a) $\frac{50}{75}$ b) $\frac{27}{45}$ c) $\frac{210}{180}$

4 Reduce a común denominador las fracciones $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$ y $\frac{11}{18}$.

¿Conoces y aplicas algoritmos para sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones?

5 Calcula.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$ b) $\frac{5}{9} - \frac{7}{12} + \frac{11}{18}$

6 Calcula.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{3} \cdot 6$ d) $\frac{2}{3} : 4$

¿Resuelves expresiones con números fraccionarios y operaciones combinadas?

7 Calcula.

a) $\frac{11}{12} - \left[1 - \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{4}\right)\right]$ b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(2 - \frac{2}{5}\right)$

¿Conoces y aplicas las propiedades de las potencias con números fraccionarios?

8 Calcula.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 6^3$ b) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 : \left(\frac{3}{5}\right)^3$

¿Diferencias los distintos tipos de problemas con números fraccionarios y los resuelves?

9 Un quiosco recibe de madrugada 225 revistas. Vende por la mañana 1/3 del total, y, por la tarde, 2/5 también del total. ¿Cuántas revistas le quedan al finalizar la jornada?

10 Un señor sale casa con 60 €. Gasta en un vestido 1/3 de su dinero, y, en el mercado, 2/5 de lo que le quedaba.

a) ¿Qué fracción de dinero le queda?

b) ¿Cuánto dinero le queda?

4 Proporcionalidad y porcentajes

El concepto de proporcionalidad nace a la vez que la actividad humana y aparece en los vestigios de todas las culturas, asociado inicialmente a problemas y a situaciones prácticas:

— Una oveja por cinco gallinas; dos ovejas por diez gallinas; …

— Tres cántaros llenan dos odres; seis cantaros llenan cuatro…

En la antigua Grecia, los matemáticos reflexionaron sobre la proporcionalidad analizando sus leyes y relaciones. Es decir, empezaron a formalizar y a construir un cuerpo teórico, independiente de situaciones concretas.

Bastante más tarde, en el Renacimiento, el desarrollo del comercio, y por consiguiente de los bancos, amplía sus demandas en el terreno del cálculo y la contabilidad. Esas necesidades dan un nuevo impulso a la proporcionalidad, concretándose en el avance de la matemática comercial. Porcentajes, descuentos, deudas, plazos…

— Si te presto 100 doblones durante un mes, te cobro 106; si me pides doscientos durante un año, te cobro…

En la actualidad, la proporcionalidad resulta imprescindible en el desarrollo de cualquier ciencia aplicada, y tú la encontrarás al estudiar física, química, biología, estadística, etc. Y sobre todo, si te fijas, verás que la utilizas, junto al cálculo mental, en multitud de situaciones cotidianas: comprar, distribuir, predecir, especular, hacer recuentos, …

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se generan fracciones equivalentes a una dada.
- Cómo se calcula la fracción de una cantidad.
- Cómo se calcula el valor decimal de una fracción.
- Hay magnitudes que no guardan relación de proporcionalidad.

1 Razones y proporciones

Ahora, vas a aprender algunos términos nuevos que pertenecen al lenguaje de las matemáticas, pero que te servirán también para enriquecer tu lenguaje cotidiano.

La **razón** de los números a y b es la fracción $\frac{a}{b}$ (o su irreducible).

▼ **EJEMPLOS**

- La razón de los números 3 y 4 es $\frac{3}{4}$.
- La razón de los pesos de Rita y Manuel es $\frac{3}{4} \rightarrow \frac{\text{PESO DE RITA}}{\text{PESO DE MANUEL}} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

Una **proporción** es la igualdad de dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Una proporción se lee así: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow$ a es a b como c es a d.

Cálculo del término desconocido de una proporción

Una proporción está formada por una pareja de fracciones equivalentes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \qquad \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \leftrightarrow \underbrace{75 \cdot 4}_{300} = \underbrace{100 \cdot 3}_{300}$$

Esto nos permite calcular el término desconocido de una proporción:

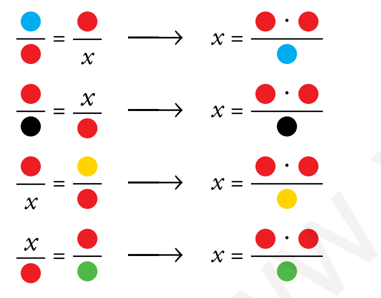
$$\frac{4}{x} = \frac{10}{15} \rightarrow 60 = x \cdot 10 \rightarrow x = \frac{60}{10} = 6$$

Para calcular el término desconocido en una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se aplica esta propiedad de las fracciones equivalentes:

El producto de los extremos, *a* y *d*, es igual al de los medios, *b* y *c*.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \rightarrow a \cdot x = b \cdot c \rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Para automatizar el cálculo



Actividades

1 Elige la respuesta correcta en cada caso:

a) La razón de 5 y 15 es: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

b) La razón de 24 y 36 es: $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$

2 Escribe tres parejas de números cuya razón sea $\frac{2}{5}$.

3 Calcula el término desconocido en cada proporción:

a) $\frac{1}{3} = \frac{5}{x}$ b) $\frac{6}{9} = \frac{10}{x}$ c) $\frac{x}{3} = \frac{35}{7}$

d) $\frac{15}{6} = \frac{x}{13}$ e) $\frac{14}{x} = \frac{21}{33}$ f) $\frac{91}{42} = \frac{x}{9}$

4 La razón de las edades de Rita y Manuel es 9/10. Si Rita tiene 18 años, ¿cuántos tiene Manuel?

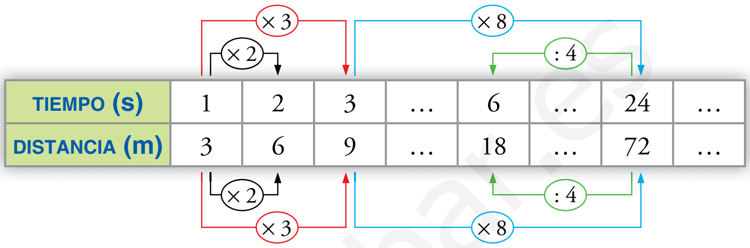
2 Magnitudes directamente proporcionales

En las magnitudes directamente proporcionales, multiplicando (dividiendo) por el mismo número dos valores correspondientes se obtiene otro par de valores correspondientes.

MAGNITUD A	a	$2 \cdot a$	$3 \cdot a$	…	ka
MAGNITUD B	b	$2 \cdot b$	$3 \cdot b$	…	kb

▼ **EJEMPLO**

Un corredor avanza a 3 m/s. La distancia recorrida según pasa el tiempo es:



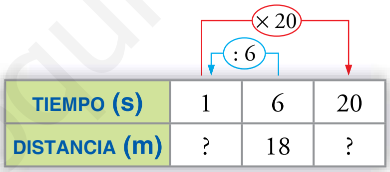
TIEMPO (s)	1	2	3	…	6	…	24	…
DISTANCIA (m)	3	6	9	…	18	…	72	…

Resolución de problemas: reducción a la unidad

La propiedad anterior permite completar cualquier par de valores de la tabla a partir de un par conocido. Atiende al método utilizado en el ejemplo (reducción a la unidad).

▼ **EJEMPLO**

Un corredor de medio fondo ha avanzado 18 metros en 6 segundos. Si va a velocidad constante, ¿qué distancia recorrerá en 20 segundos?

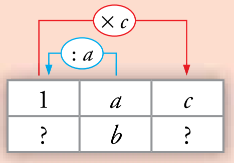


TIEMPO (s)	1	6	20
DISTANCIA (m)	?	18	?

TIEMPO (s)		DISTANCIA (m)
6 s	⟶	18 m
1 s	⟶	18 : 6 = 3 m
20 s	⟶	$3 \cdot 20 = 60$ m

Método de reducción a la unidad

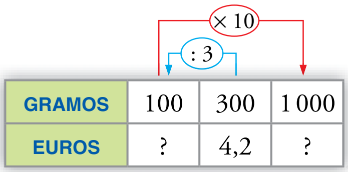
- Consiste en calcular, primero, el valor asociado a la unidad en la tabla de valores correspondientes.
- Conociendo ese dato, no hay dificultad en completar cualquier otro par de valores correspondientes.



1	a	c
?	b	?

Ejemplo

¿A cómo sale el kilo?



GRAMOS	100	300	1 000
EUROS	?	4,2	?

GRAMOS		EUROS
300 g	→	4,2 €
100 g	→	4,2 : 3 = 1,4 €
1 kg = 1 000 g	→	$1{,}4 \cdot 10 = 14$ €

Un kilo de queso cuesta 14 €.

Actividades

1 Resuelve mentalmente.

a) Un grifo arroja 12 litros de agua en 3 minutos. ¿Cuántos litros arroja en 5 minutos?

b) Tres cajas de chinchetas pesan 150 gramos. ¿Cuánto pesan 10 cajas?

2 ¿Cuánto pagaré por 300 gramos de un salmón ahumado que se vende a 16 € el kilo?

3 Por dejar el coche en un aparcamiento durante 4 horas, ayer pagué 5 €. ¿Cuánto pagaré hoy por 7 horas?

Otras relaciones en las tablas de proporcionalidad directa

En una tabla de proporcionalidad directa, con dos pares cualesquiera de valores correspondientes se construyen dos fracciones equivalentes; es decir, una proporción.

▼ **EJEMPLO**

Una fuente arroja 1,5 litros de agua por minuto:

MINUTOS	1	2	3	4	5	…
LITROS	1,5	3	4,5	6	7,5	…

Elegimos dos pares cualesquiera:

MINUTOS	…	3	…	5
LITROS	…	4,5	…	7,5

$$\rightarrow \frac{3}{4,5} = \frac{5}{7,5} \leftrightarrow \underbrace{3 \cdot 7,5}_{22,5} = \underbrace{5 \cdot 4,5}_{22,5}$$

La proporción anterior también se puede escribir así: $\frac{3}{5} = \frac{4,5}{7,5}$

Comprueba que ocurre lo mismo para cualquier par de columnas de la tabla.

En una tabla de proporcionalidad directa, dos pares de valores correspondientes forman una proporción.

Resolución de problemas: regla de tres

Basándonos en lo anterior y en el cálculo del término desconocido de una proporción, obtenemos un método cómodo para resolver problemas de proporcionalidad: *la regla de tres.*

▼ **EJEMPLO**

Una fuente ha llenado un bidón de 6 litros en 4 minutos. ¿Cuántos litros de agua arrojará en 10 minutos?

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{LITROS}} & & \underline{\text{MINUTOS}} \\ 6 & \longrightarrow & 4 \\ x & \longrightarrow & 10 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} \underline{\text{PROPORCIÓN}} \\ \frac{6}{x} = \frac{4}{10} \end{array} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 10}{4} = 15$$

Solución: En 10 minutos arroja 15 litros.

Regla de tres

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{MAGNITUD A}} & & \underline{\text{MAGNITUD B}} \\ a & \longrightarrow & b \\ c & \longrightarrow & d \end{array}$$

- Se ordenan los datos y la incógnita.
- Se construye la proporción con los términos en el orden en que aparecen. $\Big\} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
- Se calcula el término desconocido de la proporción. $\Big\} \rightarrow x = \frac{● \cdot ●}{●}$

Problemas resueltos

1. **Un avión, que vuela a velocidad constante, ha recorrido 91 millas en 35 minutos. Si sigue a la misma velocidad, ¿qué distancia recorrerá en los próximos 20 minutos?**

TIEMPO (min)		DISTANCIA (millas)
35	⟶	91
20	⟶	x

La proporción es:

$$\frac{35}{20} = \frac{91}{x} \to x = \frac{20 \cdot 91}{35} = 52$$

Solución: En 20 minutos recorrerá 52 millas.

2. **Un avión, que viaja a la velocidad constante, ha tardado 35 minutos en recorrer 91 millas. Si sigue a la misma velocidad, ¿cuanto tiempo tardará en recorrer las 52 millas que le faltan para llegar a su destino?**

DISTANCIA (millas)		TIEMPO (min)
91	⟶	35
52	⟶	x

La proporción es:

$$\frac{91}{52} = \frac{35}{x} \to x = \frac{35 \cdot 52}{91} = 20$$

Solución: Tardará 20 minutos en recorrer las 52 millas que le faltan.

Actividades

4 Una máquina embotelladora llena 750 botellas en un cuarto de hora.

¿Cuánto tardará en llenar 1 000 botellas?

5 En un taller de confección se han necesitado siete metros y medio de tela para confeccionar 6 camisas.

¿Cuántos metros de tela se necesitarán para cubrir un pedido de ochenta camisas?

6 Un granjero ha gastado 260 € en 325 dosis de vacuna para su ganado.

¿Cuánto debe gastar aún si necesita adquirir 180 dosis más?

7 En un colegio que tiene 480 alumnos, tres de cada diez han tenido gripe.

¿Cuántos alumnos han padecido esa enfermedad?

8 De la vendimia de las 10 primeras parras de una viña se han obtenido 125 kilos de uva.

¿Qué cosecha cabe esperar de toda la viña, que tiene 362 parras?

9 ¿Cuánto costará un trozo de queso de 465 gramos si el queso se vende a 13,5 euros el kilo?

(Redondea el resultado a los céntimos).

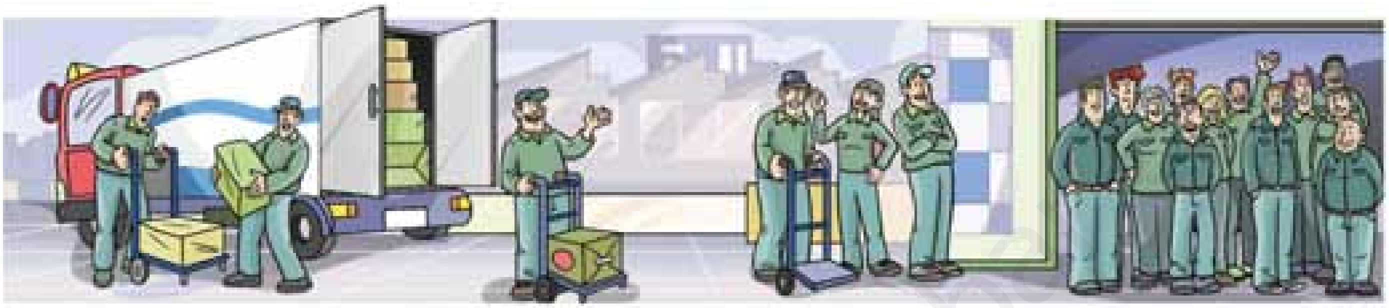
3

Magnitudes inversamente proporcionales

Recuerda que en las magnitudes inversamente proporcionales, si se aumenta un valor de una de ellas al doble, al triple, etc., el correspondiente valor de la otra disminuye a la mitad, a la tercera parte, etc.

▼ **EJEMPLO**

Dos trabajadores descargan un camión en seis horas. Veamos cómo varía el tiempo de descarga al variar el número de trabajadores.



Nosotros dos tardamos 6 h. Yo, solo, 6 · 2 = 12 h Entre los tres, 12 : 3 = 4 h Los 12 tardamos 1 hora.

× 3 : 2 × 4

N.° DE TRABAJADORES	1	2	3	4	6	12
TIEMPO DE DESCARGA (h)	12	6	4	3	2	1

× 2 : 3 : 4

En las magnitudes inversamente proporcionales, si se multiplica (o divide) uno de los valores de una magnitud por un número, el valor correspondiente de la otra magnitud queda dividido (o multiplicado) por dicho número.

MAGNITUD A	a	$a \cdot 3$	$a : 5$
MAGNITUD B	b	$b : 3$	$b \cdot 5$

Resolución de problemas: reducción a la unidad

Aplicaremos el método que ya conocemos (buscar el valor asociado a la unidad), teniendo en cuenta lo que hemos visto más arriba.

▼ **EJEMPLO**

Un granjero tiene alfalfa en el almacén para alimentar a sus 3 vacas durante 10 días. ¿Cuánto le duraría el forraje si tuviera 5 vacas?

× 5 : 3

N.° DE VACAS	1	3	5
DÍAS	?	10	?

× 3 : 5

N.° DE VACAS		DURACIÓN ALIMENTO
3	⟶	10 días
1	⟶	10 · 3 = 30 días
5	⟶	30 : 5 = 6 días

Tenemos alimento para 10 días.

Para mí sola, duraría el triple:

10 · 3 = 30 días

A las cinco nos duraría menos:

30 : 5 = 6 días

Proporciones en las tablas de proporcionalidad inversa

Volviendo al ejemplo de la página anterior, observa que el producto de dos valores correspondientes es siempre el mismo:

1	2	3	4	…
12	6	4	3	…

$\rightarrow$ $1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = \dots$

Esto nos permite construir proporciones a partir de dos pares de valores, pero ordenando los elementos de distinta forma que en la proporcionalidad directa.

TRABAJADORES	2	3
HORAS	6	4

$$\rightarrow\ 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 \ \rightarrow\ \frac{2}{4} = \frac{3}{6}, \text{ o bien } \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Resolución de problemas: regla de tres inversa

Aplicaremos la regla de tres, pero para construir la proporción invertiremos la razón de los valores en una de las magnitudes.

Ten en cuenta

$$\begin{array}{ccc} \text{MAGNITUD A} & & \text{MAGNITUD B} \\ a & \longrightarrow & b \\ c & \longrightarrow & x \end{array}$$

$$\boxed{\frac{a}{c} = \frac{x}{b}} \text{ o bien } \boxed{\frac{c}{a} = \frac{b}{x}}$$

Se invierte el orden en los elementos de una de las magnitudes.

EJEMPLO

Un ciclista, a 20 km/h, tarda 30 minutos en ir de un pueblo a la aldea vecina. ¿Cuánto tardará un motorista, a 50 km/h?

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{VELOCIDAD} & & \text{TIEMPO (min)} \\ 20 & \longrightarrow & 30 \\ 50 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \rightarrow \ \overset{\text{PROPORCIÓN}}{\frac{20}{50} = \frac{x}{30}, \text{ o bien } \frac{50}{20} = \frac{30}{x}}$$

Solución: $x = \dfrac{20 \cdot 30}{50} = 12$ minutos

Actividades

1 Completa en tu cuaderno estas tablas:

MAGNITUD A	1	2	3	4			10
MAGNITUD B	30	15			6	5	

MAGNITUD H	1	2	3	4	6	8	
MAGNITUD N			16	12			4

2 Construye tres proporciones diferentes con los valores de esta tabla de proporcionalidad inversa:

MAGNITUD A	1	2	4	5
MAGNITUD B	40	20	10	8

3 Un coche, a 80 km/h, tarda 2 h en llegar a Barcelona. ¿Cuánto tardaría un camión, a 40 km/h? ¿Y un bólido, a 160 km/h?

4 Tres operarios limpian un parque en 7 horas. ¿Cuánto tardarían en hacer el mismo trabajo 7 operarios?

5 Un conducto de agua, con un caudal de 3 litros por segundo, tarda 20 minutos en llenar un depósito.
a) ¿Cuánto tardaría con un caudal de 2 litros por segundo?
b) ¿Y si fuera de 10 litros por segundo?

6 Un tractor ara un campo en 15 horas.
a) ¿Cuánto tardarían dos tractores?
b) ¿Y tres tractores?
c) ¿Y cuatro tractores?

7 Cuatro trabajadores descargan un camión en 3 horas.
a) ¿Cuánto tardarían 8 trabajadores?
b) ¿Y 5 trabajadores?

4 Los porcentajes

Un porcentaje se puede contemplar como una *proporción*, como una *fracción* o como un *número decimal*.

Un porcentaje indica una proporción

Con la frase *El 30% de los jóvenes chatea a través de internet*, estamos diciendo que de cada 100 jóvenes chatean 30.

TOTAL	100	200	300	50	250	…
PARTE (30%)	30	60	90	15	?	…

Vemos que se trata de una tabla de proporcionalidad directa, lo que nos permite tratar una situación de porcentaje como una situación de proporcionalidad.

$$\begin{array}{ccc} \text{TOTAL} & & \text{PARTE (30\%)} \\ 100 & \longrightarrow & 30 \\ 250 & \longrightarrow & x \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} \frac{100}{250} = \frac{30}{x} \to x = \frac{250 \cdot 30}{100} = 75$$

$$30\% \text{ de } 250 = \frac{250 \cdot 30}{100} = 75 \to \left\{\begin{array}{l}\text{En un grupo de 250 jóvenes, hay 65 que} \\ \text{chatean en internet.}\end{array}\right.$$

Para calcular un determinado tanto por ciento de una cantidad, se multiplica la cantidad por el tanto y se divide entre 100. $\left.\right\}$ $a\% \text{ de } C = \dfrac{C \cdot a}{100}$

Un porcentaje es una fracción

Tomar el 30% de una cantidad es dividir la cantidad en 100 partes y tomar 30; es decir, tomar la fracción $\frac{30}{100}$.

$$30\% \text{ de } 250 = \frac{30}{100} \text{ de } 250 = \frac{250 \cdot 30}{100} = 75$$

Un porcentaje se puede calcular como la fracción de una cantidad. $\left.\right\}$ $a\% \text{ de } C = \dfrac{a}{100} \text{ de } C = \dfrac{C \cdot a}{100}$

Un porcentaje se asocia a un número decimal

Un porcentaje se puede expresar en forma de fracción y, a su vez, la fracción en forma de número decimal, lo que nos proporciona una forma rápida para el cálculo de porcentajes.

$$30\% \to \frac{30}{100} \to 30 : 100 \to 0{,}30 \qquad 30\% \text{ de } 250 = 250 \cdot 0{,}30 = 75$$

Para calcular un porcentaje, se multiplica el total por el tanto por ciento expresado en forma decimal.

Ejemplo

$12\% \to \dfrac{12}{100} = 0{,}12$

$12\% \text{ de } 80 = 80 \cdot 0{,}12 = 9{,}6$

Cálculo rápido de algunos porcentajes

Algunos porcentajes equivalen a fracciones muy sencillas, lo que facilita el cálculo. Ten en cuenta las que vas a ver a continuación; sobre todo, para el cálculo mental.

- **El 50% es la mitad.**

$50\% \rightarrow \frac{50}{100} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow$ Para calcular el 50%, se divide entre 2.

Por ejemplo: 50% de $47 = \frac{1}{2}$ de $47 = 47 : 2 = 23{,}5$

- **El 25% es la cuarta parte.**

$25\% \rightarrow \frac{25}{100} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow$ Para calcular el 25%, se divide entre 4.

Por ejemplo: 25% de $88 = \frac{1}{4}$ de $88 = 88 : 4 = 22$

- **El 20% es la quinta parte.**

$20\% \rightarrow \frac{20}{100} \rightarrow \frac{1}{5} \rightarrow$ Para calcular el 20%, se divide entre 5.

Puedes razonar de la misma forma estrategias para calcular porcentajes habituales: el 10%, el 5%, el 75%, etc.

Ten en cuenta

$50\% \rightarrow \frac{1}{2}$

$25\% \rightarrow \frac{1}{4}$

$75\% \rightarrow \frac{3}{4}$

$20\% \rightarrow \frac{1}{5}$

$10\% \rightarrow \frac{1}{10}$

$5\% \rightarrow \frac{1}{20}$

Actividades

1 Calcula mentalmente.

a) 20% de 200 b) 15% de 200 c) 10% de 200

d) 8% de 200 e) 60% de 50 f) 30% de 50

g) 12% de 50 h) 8% de 50 i) 2% de 50

2 Calcula mentalmente.

a) 50% de 46 b) 50% de 120 c) 25% de 40

d) 75% de 40 e) 25% de 24 f) 75% de 24

g) 10% de 460 h) 5% de 460 i) 10% de 70

3 Calcula.

a) 12% de 750 b) 35% de 240 c) 85% de 360

d) 14% de 650 e) 2,5% de 20 f) 95% de 20

g) 150% de 40 h) 115% de 200 i) 200% de 10

4 Copia y completa en tu cuaderno, asociando cada porcentaje con un número decimal:

PORCENTAJE	35%	24%		8%		95%	120%	
EXPRESIÓN DECIMAL	0,35		0,52		0,03			1,50

5 El 62% de los cargos directivos de una empresa metalúrgica son varones. ¿Qué porcentaje son mujeres?

6 Unos grandes almacenes anuncian rebajas del 15%. Al comprar un producto rebajado, ¿qué porcentaje se paga?

7 Una biblioteca pública adquiere 260 nuevos libros de los que el 25% son novelas. ¿Cuántas novelas se han adquirido?

8 En una aldea de 875 habitantes solo queda un 12% de jóvenes. ¿Cuántos jóvenes viven en la aldea?

9 En clase somos treinta, y el 90% hemos aprobado el examen de Matemáticas. ¿Cuántos hemos aprobado?

10 En un país de quince millones de habitantes, el 8% son inmigrantes extranjeros. ¿Cuántos inmigrantes alberga?

11 Un avión transporta 425 viajeros. El 52% son europeos; el 28%, americanos; el 12%, africanos, y el resto, asiáticos. ¿Cuál es el porcentaje de asiáticos? ¿Cuántos asiáticos viajan en el avión?

5 Problemas con porcentajes

Cualquier situación de porcentaje maneja básicamente tres elementos: un *total*, un *tanto por ciento* y una *parte* del total. Veámoslo con un ejemplo.

▼ **EJEMPLO**

De una autopista en construcción que tendrá una longitud total de 180 km, ya se ha construido el 35%. ¿Cuántos kilómetros hay ya construidos?

$$35\%\ \text{de}\ 180 = \frac{180 \cdot 35}{100} = 180 \cdot 0{,}35 = 63 \ \begin{cases} \text{TOTAL}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 180\ \text{km} \\ \text{TANTO POR CIENTO}\ldots\ldots & 35\% \\ \text{PARTE}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 63\ \text{km} \end{cases}$$

Solución: Ya se han construido 63 km.

Veamos, ahora, otros problemas en los que se pide calcular el total o el tanto por ciento.

Ten en cuenta

$$a\%\ \text{de}\ C = P$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{TOTAL}} & & \underline{\text{PARTE}} \\ 100 & \longrightarrow & a \\ C & \longrightarrow & P \end{array}$$

$$\Downarrow$$

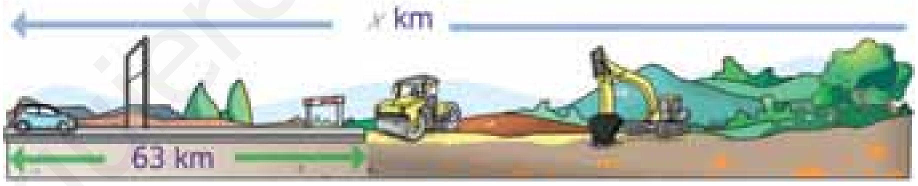
$$P = \frac{a \cdot C}{100}$$

$$C = \frac{P \cdot 100}{a}$$

$$a = \frac{P \cdot 100}{C}$$

Cálculo del total, conocidos el tanto por ciento y la parte

De la nueva autopista en construcción, ya se han completado 63 km, lo que supone un 35% del total proyectado. ¿Cuál será la longitud de la carretera, una vez finalizada?



$$\left.\begin{array}{ccc} \underline{\text{TOTAL}} & & \underline{\text{PARTE}} \\ 100 & \longrightarrow & 35 \\ x & \longrightarrow & 63 \end{array}\right\} \ \frac{100}{x} = \frac{35}{63} \ \to \ x = \frac{63 \cdot 100}{35} = 180$$

Solución: La autopista tendrá una longitud total de 180 km.

Cálculo del tanto por ciento, conocidos el total y la parte

De los 180 km proyectados para una autopista, ya se han completado 63 km. ¿Qué porcentaje está ya construido?

$$\left.\begin{array}{ccc} \underline{\text{TOTAL}} & & \underline{\text{PARTE}} \\ 180 & \longrightarrow & 63 \\ 100 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \ \frac{180}{100} = \frac{63}{x} \ \to \ x = \frac{100 \cdot 63}{180} = 35$$

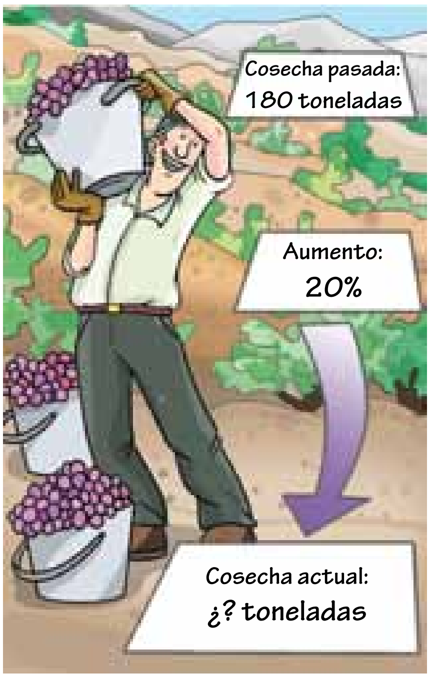
De cada 100 km, se han construido 35; es decir, el 35%.

Solución: Se ha construido ya el 35% de la autopista.

Aumentos porcentuales

Este tipo de problemas aparecen frecuentemente en nuestra realidad cotidiana.

Un viticultor recogió en la campaña pasada 180 toneladas de uva, pero este año espera un 20% más. ¿Cuántas toneladas espera cosechar este año?



- **Primera forma**

$$\boxed{\text{COSECHA ACTUAL}} = \boxed{\text{180 TONELADAS}} + \overset{\text{20\% de 180}}{\boxed{\text{AUMENTO}}}$$

$$\text{AUMENTO} \to 20\% \text{ de } 180 = \frac{180 \cdot 20}{100} = 36 \text{ toneladas}$$

$$\text{COSECHA ACTUAL} \to 180 + 36 = 216 \text{ toneladas}$$

Solución: Este año espera recoger 216 toneladas de uva.

- **Segunda forma**

Un aumento del 20% significa que 100 t se convierten en 120 t.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{COSECHA PASADA}} & & \underline{\text{COSECHA ACTUAL}} \\ 100 & \longrightarrow & 120 \\ 180 & \longrightarrow & x \end{array} \Bigg\} \frac{100}{180} = \frac{120}{x} \to x = \frac{180 \cdot 120}{100} = 216 \text{ t}$$

- **Forma rápida**

Observa que, en realidad, en el punto anterior hemos calculado el 120% de 180 toneladas, por lo que podíamos haber resuelto el problema así:

$$\text{COSECHA ACTUAL} \to 120\% \text{ de } 180 = 180 \cdot 1{,}20 = 216 \text{ toneladas}$$

Aumentar una cantidad en un $a\%$ equivale a calcular el $(100 + a)\%$ de dicha cantidad.

Ten en cuenta

$$120\% \text{ de } x = 216$$
$$\Downarrow$$
$$x \cdot 1{,}20 = 216$$
$$\Downarrow$$
$$x = 216 : 1{,}20 = 180$$

Problema resuelto

1. Una población costera tiene 35 000 habitantes en invierno, pero en verano, con el turismo, aumenta en un 40%. ¿Cuántos residentes tiene durante el verano?

Primera forma

$$\text{AUMENTO: } 40\% \text{ de } 35\,000 = \frac{35\,000 \cdot 40}{100} = 14\,000$$

$$\text{HABITANTES EN VERANO: } 35\,000 + 14\,000 = 49\,000$$

Segunda forma

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{POBLACIÓN VERANO}} & & \underline{\text{POBLACIÓN INVIERNO}} \\ 100 & \longrightarrow & 140 \\ 35\,000 & \longrightarrow & x \end{array} \Bigg\} \frac{100}{35\,000} = \frac{140}{x} \to x = \frac{35\,000 \cdot 140}{100} = 49\,000$$

Solución: En verano albergará a 49 000 residentes.

Forma rápida

La población en verano es el 140% de la población en invierno.

Población en verano: 140% de 35 000 = 35 000 · 1,40 = 49 000 habitantes.

Disminuciones porcentuales

¿Cómo varía una cantidad cuando se reduce en un determinado porcentaje?

¿Cuál es el coste final de una bicicleta de 620 € que está rebajada un 15%?

- **Primera forma**

$$\boxed{\text{PRECIO FINAL}} = \boxed{620\ €} - \overset{15\%\text{ de }620}{\boxed{\text{REBAJA}}}$$

$$\text{REBAJA} \rightarrow 15\%\text{ de }620 = \frac{620 \cdot 15}{100} = 93\ €$$

$$\text{PRECIO FINAL} \rightarrow 620 - 93 = 527\ €$$

Solución: La bicicleta, rebajada, cuesta 527 €.

- **Segunda forma**

Una rebaja del 15% significa que de cada 100 € pagamos 85 €.

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{PRECIO INICIAL} & & \text{PRECIO REBAJADO} \\ 100 & \longrightarrow & 85 \\ 620 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \frac{100}{620} = \frac{85}{x} \rightarrow x = \frac{620 \cdot 85}{100} = 527\ €$$

- **Forma rápida**

Observa que, en realidad, el precio rebajado es el 85% de 620 €, por lo que podemos resolver el problema así:

$$\text{PRECIO FINAL} \rightarrow 85\%\text{ de }620 = 620 \cdot 0{,}85 = 527\ €$$

Disminuir una cantidad en un $a\%$ equivale a calcular el $(100 - a)\%$ de dicha cantidad.

Ten en cuenta

$$85\%\text{ de } x = 527$$
$$\Downarrow$$
$$x \cdot 0{,}85 = 527$$
$$\Downarrow$$
$$x = 527 : 0{,}85 = 620$$

Problema resuelto

1. **Un teatro ha vendido 4 600 entradas en la semana del estrno de una nueva obra. El gerente estima que en la segunda semana la venta descenderá en un 20%. ¿Cuántas entradas espera vender en la segunda semana?**

Primera forma

$$\text{DISMINUCIÓN: } 20\%\text{ de }4\,600 = \frac{4\,600 \cdot 20}{100} = 920$$

$$\text{VENTAS ESPERADAS EN LA SEGUNDA SEMANA: } 4\,600 - 920 = 3\,680$$

Solución: En la segunda semana se esperan unas ventas de 3 680 entradas.

Segunda forma

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{VENTAS } 1^{a}\text{ SEMANA} & & \text{VENTAS } 2^{a}\text{ SEMANA} \\ 100 & \longrightarrow & 80 \\ 4\,600 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \frac{100}{4\,600} = \frac{80}{x} \rightarrow x = \frac{4\,600 \cdot 80}{100} = 3\,680$$

Solución: En la segunda semana se esperan unas ventas de 3 680 entradas.

Forma rápida

Las ventas descienden un 20%. Es decir, quedan en un 80%.

Ventas 2^{a} semana: 80% de 4 600 = 4 600 · 0,80 = 3 680 entradas.

Actividades

1 Calcula, mentalmente, el valor de x.

a) 50% de $x = 80$

b) 25% de $x = 6$

c) 10% de $x = 40$

d) 75% de $x = 15$

e) 5% de $x = 2$

f) 20% de $x = 6$

g) x% de 15 = 30

h) x% de 40 = 10

i) x% de 8 = 80

j) x% de 80 = 20

2 Resuelve:

a) Un pastelero saca del horno una bandeja con 80 mantecados. Al envasarlos se le rompe un 5%. ¿Cuántos se le han roto?

b) Un pastelero saca del horno una bandeja de mantecados y al envasarlos se le rompen cuatro, lo que supone un 5% del total.

¿Cuántos mantecados había en la bandeja?

c) Un pastelero saca del horno una bandeja con 80 mantecados y al envasarlos se le rompen 4.

¿Que tanto por ciento de los mantecados se le han roto?

3 Resuelve:

a) El 75% de los 220 asistentes a un congreso de economía habla inglés.

¿Cuántos de los asistentes hablan inglés?

b) El 75% de los asistentes a un congreso de economía habla inglés. Sabiendo que 165 hablan ingles, ¿cuál es el número total de asistentes?

c) De los 220 asistentes a un congreso de economía, 165 hablan inglés.

¿Qué porcentaje de asistentes habla ingles?

Cada problema con sus inversos

4 Resuelve cada apartado:

a) En un rebaño de 175 ovejas, el 8% son negras. ¿Cuántas ovejas negras tiene el rebaño?

b) En un rebaño hay 14 ovejas negras, lo que supone el 8% del total. ¿Cuántas ovejas tiene en total el rebaño?

c) En un rebaño que tiene 175 ovejas, 14 son negras. ¿Cuál es el porcentaje de negras?

Problemas para calcular la cantidad inicial

5 Marta gasta el 25% del dinero que llevaba en el monedero, y aún le quedan 6 €. ¿Cuanto llevaba en el monedero?

6 En la bolsa de caramelos, el 20% son de limón. Hay 30 caramelos de limón.

¿Cuántos caramelos hay en la bolsa?

7 Roberto ha leído 48 páginas de una novela, lo que supone el 30% del total.

¿Cuántas páginas tiene en total la novela?

8 Hoy han faltado al ensayo de la banda 6 músicos, lo que supone un 20% del total.

¿Cuántos músicos componen la banda?

Problemas para calcular el tanto por ciento

9 Adriano tenía ahorrados 200 € y ha gastado 50 € en un reproductor MP3. ¿Qué tanto por ciento de sus ahorros ha gastado?

10 De las 24 solicitudes de trabajo que ha recibido una empresa, ha aceptado 21. ¿Qué porcentaje ha sido rechazado?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Razones y proporciones

1 ▼▽▽ Escribe:

a) Tres pares de números cuya razón sea 2/3.

b) Tres parejas de números que estén en relación de cinco a uno.

c) Tres parejas de números que estén en razón de tres a cuatro.

2 ▼▽▽ Calcula x en las siguientes proporciones:

a) $\frac{6}{9} = \frac{10}{x}$ b) $\frac{6}{4} = \frac{x}{6}$ c) $\frac{8}{x} = \frac{12}{15}$

d) $\frac{x}{21} = \frac{4}{28}$ e) $\frac{x}{39} = \frac{30}{65}$ f) $\frac{14}{x} = \frac{49}{42}$

Relaciones de proporcionalidad

3 ▼▽▽ Indica, entre los siguientes pares de magnitudes, los que guardan relación de proporcionalidad directa, los que la guardan inversa y los que no guardan relación de proporcionalidad:

a) El número de kilos vendidos y el dinero recaudado.

b) El número de operarios que hacen un trabajo y el tiempo invertido.

c) La edad de una persona y su altura.

d) La velocidad de un vehículo y la distancia que ha recorrido en media hora.

e) El tiempo que permanece abierto un grifo y la cantidad de agua que arroja.

f) El caudal de un grifo y el tiempo que tarda en llenar un depósito.

g) El número de páginas de un libro y su precio.

Problemas de proporcionalidad directa e inversa

4 ▼▽▽ Calcula mentalmente y contesta.

a) Un tren recorre 240 km en 3 horas. ¿Qué distancia recorre en 2 horas?

b) Dos kilos de manzanas cuestan 1,80 €. ¿Cuánto cuestan tres kilos?

c) Cuatro obreros hacen un trabajo en 3 horas. ¿Cuánto tardarían seis obreros?

d) Cinco entradas para un concierto han costado 40 euros. ¿Cuánto cuestan cuatro entradas?

e) Un ciclista, a 20 km/h, recorre cierta distancia en 3 horas. ¿Cuánto tardará una moto a 60 km/h?

5 ▼▽▽ Dos kilos y medio de patatas cuestan 1,75 €. ¿Cuánto cuestan tres kilos y medio?

6 ▼▽▽ Cuatro operarios tardan 10 horas en limpiar un solar. ¿Cuánto tardarían 5 operarios?

7 ▼▽▽ Una cuadrilla de soladores, trabajando 8 horas diarias, renuevan la acera de una calle en 15 días. ¿Cuánto tardarían trabajando 10 horas diarias?

8 ▼▽▽ Un paquete de 500 folios pesa 1,8 kg. ¿Cuánto pesará una pila de 850 folios?

9 ▼▽▽ Una máquina embotelladora llena 750 botellas en un cuarto de hora. ¿Cuántas botellas llena en hora y media?

10 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

Una motobomba, en 7 horas, ha vertido 1 250 metros cúbicos de agua a un aljibe. ¿Cuánto tardará en aportar los 1 000 metros cúbicos que aún faltan para llenarlo?

PROP. DIRECTA

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{m}^3 & & \text{HORAS} \\ \hline 1\,250 & \longrightarrow & 7 \\ 1\,000 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1\,250}{1\,000} \cdot \frac{7}{x} \rightarrow x = \frac{700}{125}$$

$$\begin{array}{r|l} 700\text{ h} & 125 \\ \cline{2-2} 075 & 5\text{ h }36\text{ min} \\ \times\ \ 60 & \\ \cline{1-1} 4500\text{ min} & \\ 0750 & \\ 000 & \end{array}$$

Solución: Tardará 5 h 36 min.

11 ▼▼▽ Un ciclista ha recorrido 25 kilómetros en hora y cuarto. A esa velocidad, ¿cuánto tardaría en recorrer una etapa de 64 kilómetros?

12 ▼▼▽ Un tren, a 90 km/h, cubre un recorrido en 6 horas. ¿Cuánto tardaría a 100 km/h?

Cálculo con porcentajes

13 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) 50% de 220
b) 50% de 82
c) 50% de 12
d) 25% de 800
e) 75% de 800
f) 25% de 280

14 ▼▽▽ Obtén mentalmente el valor de x en cada caso:

a) 50% de $x = 150$
b) 50% de $x = 7$
c) 25% de $x = 120$
d) 25% de $x = 6$
e) 75% de $x = 150$
f) 75% de $x = 9$

15 ▼▽▽ Calcula.

a) 15% de 160
b) 13% de 700
c) 12% de 3 625
d) 4% de 75
e) 76% de 1 200
f) 5% de 182
g) 2,4% de 350
h) 1,7% de 2 500

Relaciones porcentajes-fracciones-decimales

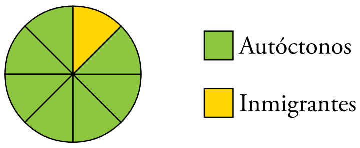
16 ▼▽▽ ¿Qué fracción irreducible asocias a cada uno de estos porcentajes?

a) 50%
b) 25%
c) 75%
d) 10%
e) 20%
f) 5%
g) 30%
h) 70%

17 ▼▽▽ Completa en tu cuaderno.

PORCENTAJE	25%	20%	80%	5%	2%
FRACCIÓN	1/4				
N.° DECIMAL	0,25	0,20			

18 ▼▽▽ El gráfico representa la relación entre la población autóctona y la inmigrante en un pueblo agrícola del sur de España.



a) ¿Qué fracción de la población es inmigrante?
b) ¿Cuántas de cada 1 000 personas son inmigrantes?
c) ¿Cuántas de cada 100 personas son inmigrantes?
d) ¿Cuál es el porcentaje de inmigrantes?

Problemas de porcentajes

19 ▼▽▽ Un empleado gana 1 700 euros al mes y gasta el 40% en pagar la hipoteca de su vivienda. ¿Cuánto le queda para afrontar el resto de sus gastos?

20 ▼▽▽ De una clase de 35 alumnos, han ido de excursión 28. ¿Qué tanto por ciento ha faltado a la excursión?

21 ▼▼▽ Un hotel tiene 187 habitaciones ocupadas, lo que supone el 85% del total.

¿De cuántas habitaciones dispone el hotel?

22 ▼▼▽ Un jugador de baloncesto ha efectuado 25 lanzamientos y ha conseguido 16 canastas.

¿Cuál es su porcentaje de aciertos?

23 ▼▼▽ Un embalse está al final del verano al 23% de su capacidad. Si en este momento contiene 35 decámetros cúbicos de agua, ¿cuál es la capacidad total del embalse?

24 ▼▼▽ Un jersey que costaba 45 € se vende en las rebajas por 36 €.

¿Qué tanto por ciento se ha rebajado?

25 ▼▽▽ Hace cinco años compré un piso por 240 000 €. En este tiempo la vivienda ha subido un 37%.

¿Cuánto vale ahora mi piso?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

26 ▼▽▽ Un embalse tenía, a principios de verano, 775 decámetros cúbicos de agua. Durante el estío, sus reservas han disminuido en un 68%. ¿Cuáles son las reservas actuales ahora, al final del verano?

Interpreta, describe, exprésate

27 ▼▼▽ Amelia, Tomás y Sara han resuelto el mismo problema de diferentes formas. Explica lo que ha hecho cada uno.

Una oficina tiene 45 empleados y en agosto se va de vacaciones el 80%. ¿Cuántos empleados trabajan en agosto?

Resolución de Amelia

$$100\% - 80\% = 20\% \rightarrow 20\% \text{ de } 45 = \frac{45 \cdot 20}{100} = 9$$

Solución: En agosto trabajan 9 empleados.

Resolución de Tomás

$$80\% \text{ de } 45 = \frac{45 \cdot 80}{100} = 36 \rightarrow 45 - 36 = 9$$

Solución: En agosto trabajan 9 empleados.

Resolución de Sara

TOTAL	→	DE VACACIONES	+	TRABAJANDO
100	→	80	+	20
10	→	8	+	2
5	→	4	+	1
40	→	32	+	8
45	→	36	+	9

Solución: En agosto trabajan 9 empleados.

Problemas "+"

28 ▼▼▽ Calcula los intereses que genera un préstamo de 6 000 euros al 4,5% durante 5 meses.

Autoevaluación

¿Aplicas la reducción a la unidad y la regla de tres para resolver problemas de proporcionalidad?

1 Resuelve por reducción a la unidad.

a) Un manantial ha arrojado 180 litros de agua en 6 minutos.

¿Cuántos litros entregará en un cuarto de hora?

b) Abriendo 6 bocas de riego, un pilón de agua se vacía en 50 minutos.

¿Cuánto tardará en vaciarse abriendo solo 4 bocas de riego?

2 Resuelve utilizando la regla de tres.

a) Un coche, a una media de 100 km/h, hace un viaje en 6 horas.

¿Cuánto tardará en hacer el mismo viaje un camión a 80 km/h?

b) Por un besugo de 875 gramos, Carmen ha pagado 10,85 €.

¿Cuánto pagará Miguel por otro besugo que pesa 1,2 kg?

¿Asocias un porcentaje a una fracción o a un número decimal?

3 Completa la tabla en tu cuaderno.

PORCENTAJE	25%	80%	6%		
FRACCIÓN				1/5	
N.º DECIMAL					0,07

4 Calcula:

a) 65% de 80 b) 4% de 3 200 c) 16% de 160

¿Diferencias y resuelves distintos problemas de porcentajes (directos, inversos, de aumentos y disminuciones porcentuales, interés bancario, etc.?

5 De un depósito de agua que contenía 36 000 litros, se ha gastado un 15%. ¿Cuántos litros quedan?

6 En una clase de 30 alumnos y alumnas, hoy han faltado 6. ¿Qué porcentaje ha faltado?

7 Un hospital tiene 210 camas ocupadas, lo que supone el 75% de las camas disponibles. ¿De cuántas camas dispone el hospital?

5 Álgebra

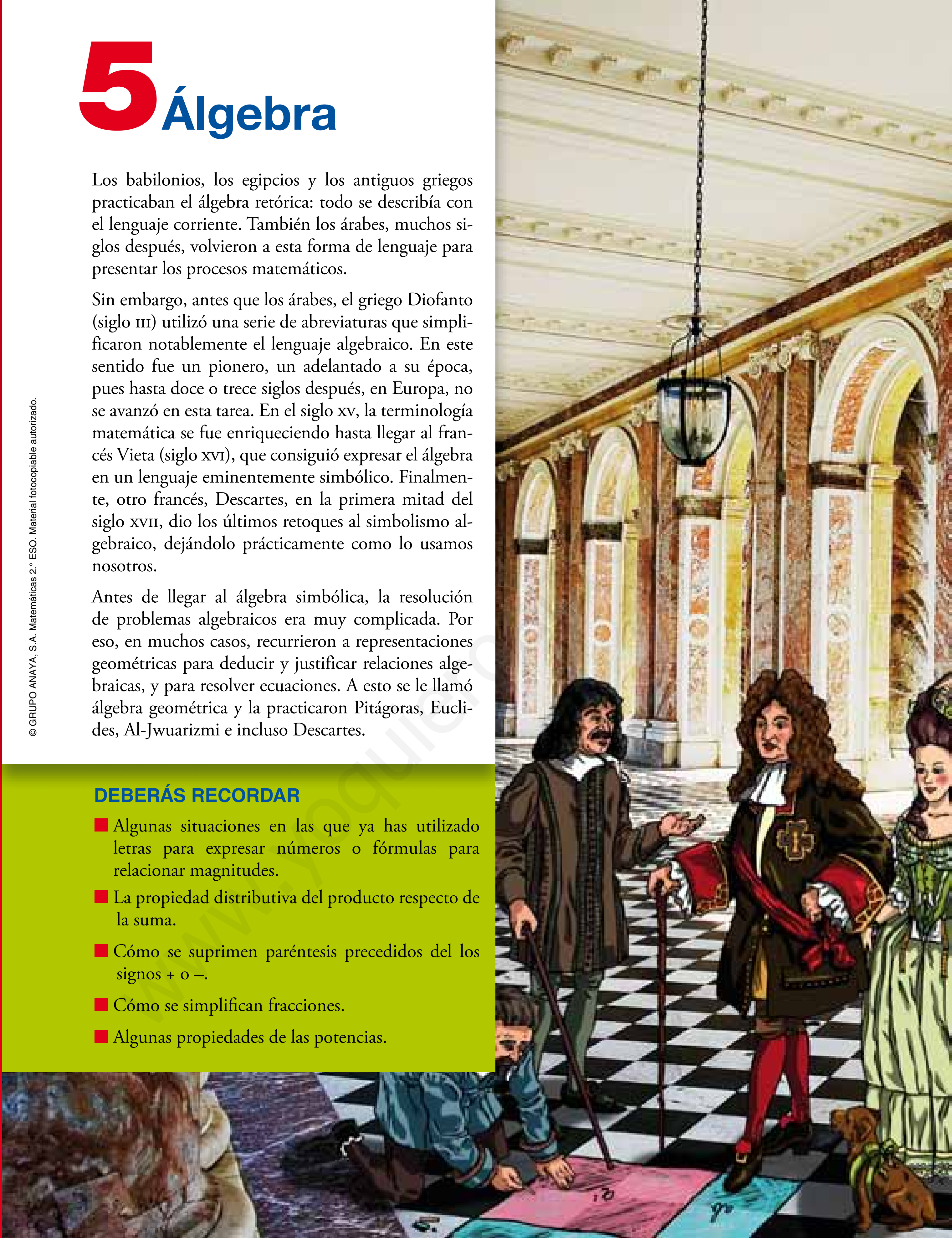
Los babilonios, los egipcios y los antiguos griegos practicaban el álgebra retórica: todo se describía con el lenguaje corriente. También los árabes, muchos siglos después, volvieron a esta forma de lenguaje para presentar los procesos matemáticos.

Sin embargo, antes que los árabes, el griego Diofanto (siglo III) utilizó una serie de abreviaturas que simplificaron notablemente el lenguaje algebraico. En este sentido fue un pionero, un adelantado a su época, pues hasta doce o trece siglos después, en Europa, no se avanzó en esta tarea. En el siglo XV, la terminología matemática se fue enriqueciendo hasta llegar al francés Vieta (siglo XVI), que consiguió expresar el álgebra en un lenguaje eminentemente simbólico. Finalmente, otro francés, Descartes, en la primera mitad del siglo XVII, dio los últimos retoques al simbolismo algebraico, dejándolo prácticamente como lo usamos nosotros.

Antes de llegar al álgebra simbólica, la resolución de problemas algebraicos era muy complicada. Por eso, en muchos casos, recurrieron a representaciones geométricas para deducir y justificar relaciones algebraicas, y para resolver ecuaciones. A esto se le llamó álgebra geométrica y la practicaron Pitágoras, Euclides, Al-Jwuarizmi e incluso Descartes.

DEBERÁS RECORDAR

- Algunas situaciones en las que ya has utilizado letras para expresar números o fórmulas para relacionar magnitudes.
- La propiedad distributiva del producto respecto de la suma.
- Cómo se suprimen paréntesis precedidos del los signos + o –.
- Cómo se simplifican fracciones.
- Algunas propiedades de las potencias.



1 El álgebra: ¿para qué sirve?

Llamamos **álgebra** a la parte de las matemáticas en la que se utilizan letras para expresar números de valor desconocido o indeterminado; es un lenguaje que facilita la construcción de los procesos matemáticos.

A continuación, se exponen algunas de las aplicaciones del álgebra:

Para expresar propiedades de las operaciones aritméticas

EJEMPLO

Propiedad distributiva:

El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos parciales del número por cada sumando.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Para generalizar la evolución de series numéricas (TÉRMINO GENERAL)

EJEMPLO

$$\left.\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & \dots \\ (0 \cdot 1) & (1 \cdot 2) & (2 \cdot 3) & (3 \cdot 4) & (4 \cdot 5) & \end{array}\right\} \quad a_n = \begin{cases} (n-1) \cdot n \\ n^2 - n \end{cases}$$

Así, por ejemplo, si queremos saber el décimo término de la serie:

$$a_{10} = 9 \cdot 10 = 90 \quad \text{o bien} \quad a_{10} = 10^2 - 10 = 90$$

Para expresar la relación entre variables relativas a distintas magnitudes (FÓRMULAS)

EJEMPLO

C → Capital t → Tiempo (años)

r → Porcentaje I → Beneficio (Interés)

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Así, un capital de 5 000 € colocado al 5% anual durante 4 años produce…

$$I = \frac{5\,000 \cdot 5 \cdot 4}{100} = 1\,000 \text{ €}$$

Para manejar numeros de valor indeterminado y sus operaciones (EXPRESIONES ALGEBRAICAS)

EJEMPLOS

— Un número natural → a

— El siguiente → $a + 1$

— El doble del siguiente → $2 \cdot (a + 1)$

— Otro número ocho unidades menor → $a - 8$

— El cuadrado del número más el triple del número → $a^2 + 3a$

Para expresar relaciones que facilitan la resolución de problemas (ECUACIONES)

EJEMPLO

Laura gasta la mitad de su paga en el cine y la tercera parte en un bocadillo. Así, solo le quedan dos euros. ¿Cuánto tenía de paga?

Traduzcamos el enunciado:

Total paga: x

Coste cine: $\frac{x}{2}$

Coste bocadillo: $\frac{x}{3}$

Por tanto:

$$\boxed{\text{COSTE CINE}} + \boxed{\text{COSTE BOCADILLO}} + \boxed{2\ €} = \boxed{\text{TOTAL PAGA } (x)}$$

$$\frac{x}{2} \quad + \quad \frac{x}{3} \quad + \quad 2 \quad = \quad x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 2 = x \rightarrow x = 12 \qquad \textit{Comprobación: } \frac{12}{2} + \frac{12}{3} + 2 = 12$$

Solución: Laura tenía 12 € de paga.

Actividades

1 ¿Cuál de las identidades corresponde al enunciado?

Propiedad asociativa de la multiplicación:

Si al multiplicar tres o más números se agrupan de diferentes formas, el resultado no varía.

$$\boxed{a \cdot b \cdot c = c \cdot a \cdot b}$$

$$\boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

$$\boxed{a \cdot (c + 1) = a \cdot c + a}$$

2 Copia y completa las casillas vacías.

1	2	3	4	5	…	n
			10		…	$3n - 2$

1	2	3	4	5	…	n
		15			…	$n^2 - 2n$

3 Escribe el término general de estas series:

a) 1 - 4 - 9 - 16 - 25 - … → $a_n = ?$

b) 0 - 3 - 8 - 15 - 24 - … → $b_n = ?$

4 La suma de los n primeros números naturales es:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

Calcula la suma 1 + 2 + 3 + … + 50.

5 Traduce en tu cuaderno a lenguaje algebraico las edades de los miembros de esta familia:

	EDAD
SARA Tiene x años	x
ROSA (hermana mayor) Le saca 2 años a Sara.	
ANA (madre) Tenía 25 años cuando Sara nació.	
JOAQUÍN (padre) Cuadruplica la edad de Sara.	

2 Expresiones algebraicas

Una expresión formada por letras y números recibe el nombre de **expresión algebraica.**

Empecemos estudiando las más sencillas: los monomios.

Monomios

Un **monomio** es el *producto* indicado de un valor conocido **(coeficiente)** por uno o varios valores desconocidos, representados por letras **(parte literal).**

$$\underbrace{3}_{\text{COEFICIENTE}}\,\underbrace{a}_{\text{PARTE LITERAL}} \qquad \underbrace{\frac{3}{5}}_{\text{COEFICIENTE}}\,\underbrace{xy^2}_{\text{PARTE LITERAL}}$$

GRADO DE UN MONOMIO

Se llama grado de un monomio al número de factores que forman la parte literal.

$$4\,\underbrace{a^2}_{a\,\cdot\,a} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{MONOMIO DE}\\ \text{SEGUNDO GRADO}\end{array}\right. \qquad 5\,\underbrace{x^2y^2}_{x\,\cdot\,x\,\cdot\,y\,\cdot\,y} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{MONOMIO DE}\\ \text{CUARTO GRADO}\end{array}\right.$$

Ejemplo

$\underbrace{-5ax^2}$ ⟶ MONOMIO

COEFICIENTE ⟶ -5

PARTE LITERAL ⟶ ax^2

GRADO ⟶ 3

$$\underbrace{a\cdot x\cdot x}_{3}$$

VALOR NUMÉRICO DE UN MONOMIO

Es el valor del monomio cuando las letras toman valores concretos.

$$\left.\begin{array}{l}\text{El valor numérico de } 2ab^2\\ \text{para } a = 1 \text{ y } b = 2 \text{ es } 8.\end{array}\right\}\ 2ab^2 \xrightarrow[b\,=\,2]{a\,=\,1} 2\cdot 1\cdot 2^2 = 8$$

MONOMIOS SEMEJANTES

Se dice que dos monomios son semejantes cuando tienen la parte literal idéntica.

$$3a \xrightarrow[\text{SEMEJANTES}]{\text{SON}} -2a \qquad 4x^2y \xrightarrow[\text{SEMEJANTES}]{\text{SON}} \frac{1}{5}x^2y$$

Ejemplo

$$5\,\underbrace{x^2} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\,\underbrace{x^2}$$

IDÉNTICA PARTE LITERAL

Suma de monomios

- Dos monomios solo se pueden sumar si son semejantes. En ese caso, se suman los coeficientes, dejando la misma parte literal.
- Si los monomios no son semejantes, la suma queda indicada.

$5a + 2a = 7a$

$8x^2 - 3x^2 = 5x^2$

$3x + 2x^2 \longrightarrow$ queda indicada

$a^2 - a + a^2 = 2a^2 - a \longrightarrow$ queda indicada

Actividades

1 Copia en tu cuaderno y completa.

MONOMIO	$8a$	$-3x$	a^2b	$\frac{2}{3}xy^4$	
COEFICIENTE			1		$\frac{1}{4}$
PARTE LITERAL					ab
GRADO					

2 Ejercicio resuelto

Sumar las expresiones siguientes:

a) $\boldsymbol{x + x} = 2x$ **b)** $\boldsymbol{m + m} = 2m$

c) $\boldsymbol{a^2 + a^2} = 2a^2$ **d)** $\boldsymbol{x^2 + x^2 + x^2} = 3x^2$

3 Suma los monomios siguientes:

a) $a + a$ b) $m + m + m$

c) $x + x + x$ d) $n + n + n + n$

e) $x^2 + x^2$ f) $a^3 + a^3 + a^3 + a^3$

4 Ejercicio resuelto

Sumar estas expresiones:

a) $\boldsymbol{3x + x} = 4x$ **b)** $\boldsymbol{2m + 3m} = 5m$

c) $\boldsymbol{5a^2 + 2a^2} = 7a^2$ **d)** $\boldsymbol{3n^3 + n^3 + 2n^3} = 6n^3$

5 Suma las siguientes expresiones:

a) $4a + a$ b) $x + 5x$

c) $5m + 3m$ d) $4n + 4n$

e) $3x^2 + 6x^2$ f) $5a^2 + a^2 + 2a^2$

g) $m^3 + 2m^3 + 4m^3$ h) $3x^4 + 6x^4 + 2x^4$

6 Ejercicio resuelto

Restar las siguientes expresiones:

a) $\boldsymbol{5x - x} = 4x$ **b)** $\boldsymbol{2a - 6a} = -4a$

c) $\boldsymbol{4a^2 - a^2} = 3a^2$ **d)** $\boldsymbol{5x^3 - 2x^3} = 3x^3$

7 Resta estos monomios:

a) $8x - 3x$ b) $4a - 7a$

c) $7m - m$ d) $8n - 7n$

e) $11x^2 - 6x^2$ f) $5a^2 - 9a^2$

g) $7m^3 - 4m^3$ h) $4n^4 - n^4$

8 Ejercicio resuelto

Reducir.

a) $\boldsymbol{5x + 3 + x - 7} = \overbrace{5x + x} + \overbrace{3 - 7} = 6x - 4$

b) $\boldsymbol{3a + 2a^2 - 5a + a^2} = \overbrace{2a^2 + a^2} + \overbrace{3a - 5a} =$
$= 3a^2 - 2a$

9 Reduce todo lo posible.

a) $3x + x + 2 + 6$ b) $4a + 2a - 7 + 5$

c) $3a + 3 - 2a + 1$ d) $5 - 3x + 4x - 4$

e) $5x + 2 - 3x + x$ f) $2a - 3 - 2 + 3a$

g) $7 - 4a - 7 + 5a$ h) $4x - 3 - 4x + 2$

10 Reduce.

a) $x^2 + 4 + x^2 + 1$ b) $5x^2 - 3 - 4x^2 + 1$

c) $x^2 - 6x + 2x + x^2$ d) $3x + 4x^2 - x^2 + x$

e) $x^2 + 4x + 1 + 2x + 3$ f) $5x^2 + 3x - 4x^2 - 2x + 1$

g) $3x^2 + 4 - x^2 + 2x - 5$ h) $10 - 3x + x^2 - 7 - 4x$

11 Ejercicio resuelto

Eliminar paréntesis y reducir.

a) $\boldsymbol{(5x + 1) - (2x - 3)} = 5x + 1 - 2x + 3 =$
$= 5x - 2x + 1 + 3 = 3x + 4$

b) $\boldsymbol{(4x^2 - 6) - (x^2 - 2x + 1)} = 4x^2 - 6 - x^2 + 2x - 1 =$
$= 4x^2 - x^2 + 2x - 6 - 1 = 3x^2 + 2x - 7$

12 Quita paréntesis y reduce.

a) $3x + (2x - 1)$ b) $7x - (5x - 4)$

c) $6x - (4x + 2)$ d) $3x - (x + 5)$

e) $(x - 5) + (x - 3)$ f) $(4x + 2) - (3x + 2)$

13 Quita paréntesis y reduce.

a) $(3x^2 - 5x + 2) + (x^2 - 2x + 1)$

b) $(5x^2 - 2x - 3) - (4x^2 + 3x - 1)$

c) $(x - 3) + (x^2 + 2x + 1)$

d) $(6x^2 - x) - (3x^2 - 5x + 6)$

14 Calcula:

a) El valor numérico de $5x^2$ para $x = 1$.

b) El valor numérico de $-4x^2$ para $x = -3$.

c) El valor numérico de $-2xy$ para $x = 3$ e $y = -5$.

Multiplicación de monomios

Recordando que un monomio es un producto de números y letras, deducimos que el producto de dos monomios es otro monomio.

▼ EJEMPLO

$(3a)\cdot(2a) = 3\cdot 2\cdot a\cdot a = 6a^2$

$(5x)\cdot(-3x^2) = 5\cdot(-3)\cdot x\cdot x^2 = -15x^3$

$(3a)\cdot\left(\frac{5}{6}ab\right) = 3\cdot\frac{5}{6}\cdot a\cdot a\cdot b = \frac{15}{6}a^2b = \frac{5}{2}a^2b$

Observa

GRADO 3

GRADO 2

$(2x^2)\cdot(3x^3) = 6x^5$

GRADO 5

El grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores.

División de monomios

El cociente de dos monomios puede ser un número, otro monomio o una fracción algebraica.

▼ EJEMPLO

$(2a^2b):(3a^2b) = \frac{2\cancel{a^2}\cancel{b}}{3\cancel{a^2}\cancel{b}} = \frac{2}{3} \longrightarrow$ (número)

$(15x^4):(3x^3) = \frac{5\cdot\cancel{3x^3}\cdot x}{\cancel{3x^3}} = 5x \longrightarrow$ (monomio)

$(2ab):(6b^2) = \frac{\cancel{2}\cdot a\cdot\cancel{b}}{\cancel{2}\cdot 3\cdot\cancel{b}\cdot b} = \frac{a}{3b} \longrightarrow$ (fracción algebraica)

Teniendo en cuenta que las letras representan números, en las operaciones con expresiones algebraicas se conservan todas las propiedades de las operaciones numéricas.

Actividades

15 Haz las multiplicaciones siguientes:

a) $(3x)\cdot(5x)$

b) $(-a)\cdot(4a)$

c) $(4a)\cdot(-5a^2)$

d) $\left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot(6x)$

e) $\left(\frac{x^2}{3}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)$

f) $(5a)\cdot\left(-\frac{1}{5}a^2\right)$

16 **Ejercicio resuelto**

Multiplicar.

$(\mathbf{2ab^2})\cdot(\mathbf{3a^2b^2}) = 2\cdot 3\cdot a\cdot a^2\cdot b^2\cdot b^2 = 6a^3b^4$

17 Multiplica estos monomios:

a) $(3x)\cdot(5xy)$

b) $(-2ab)\cdot(4b)$

c) $(4x^3y)\cdot(xy)$

d) $\left(-\frac{2}{3}ab\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}ab\right)$

18 Simplifica como en los ejemplos.

- $\mathbf{\frac{20x^3}{4x^2} = \frac{5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{x^2}\cdot x}{\cancel{4}\cdot\cancel{x^2}} = \frac{5x}{1} = 5x}$
- $\mathbf{\frac{3a}{15a^2} = \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{a}}{\cancel{3}\cdot 5\cdot\cancel{a}\cdot a} = \frac{1}{5a}}$

a) $\frac{4x}{2}$

b) $\frac{3}{3a}$

c) $\frac{5x}{10x}$

d) $\frac{12a^2}{4a}$

e) $\frac{15x}{3x^2}$

f) $\frac{8a^2}{8a^3}$

19 Divide.

a) $(10x):(2x)$

b) $(5a^2):(15a^2)$

c) $(14a^2):(-7a)$

d) $(6x^3):(9x^2)$

e) $(10x^2):(5x^3)$

f) $(-5a):(-5a^3)$

3 Polinomios

- La suma (o resta) indicada de dos monomios es un **binomio.**
- La suma (o resta) indicada de tres monomios es un **trinomio.**
- En general, la suma (o resta) de varios monomios es un **polinomio.**

▼ **EJEMPLOS**

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x+y\\ a^2-1\end{array}\right\}\text{BINOMIOS}\\ \left.\begin{array}{l}x^2-3x+1\\ a^2-ab+2\end{array}\right\}\text{TRINOMIOS}\\ 5x^4-3x^3+2x-1\end{array}\right\}\text{POLINOMIOS}$$

GRADO DE UN POLINOMIO

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

▼ **EJEMPLO**

$$\underbrace{2x^4}_{\downarrow\ \boxed{\text{GRADO } 4}} - \underbrace{5x^2}_{\downarrow\ \boxed{\text{GRADO } 2}} + \underbrace{3x}_{\downarrow\ \boxed{\text{GRADO } 1}} - \underbrace{8}_{\downarrow\ \boxed{\text{GRADO } 0}} \longrightarrow \text{POLINOMIO DE CUARTO GRADO}$$

Valor numérico de un polinomio

Cuando en un polinomio las letras toman valores concretos, también el polinomio toma un valor concreto.

▼ **EJEMPLO**

Dado el polinomio $3x^2 - 2x + 5$:

- Para $x = 0 \rightarrow 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 5 = 0 - 0 + 5 = 5$
  El valor numérico de $3x^2 - 2x + 5$ para $x = 0$ es 5.
- Para $x = -2 \rightarrow 3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 5 = 12 + 4 + 5 = 21$
  El valor numérico de $3x^2 - 2x + 5$ para $x = -2$ es 21.

Observa que el valor numérico de un polinomio depende del valor que tomen las letras.

Actividades

1 Indica el grado de cada polinomio:

a) $x^2 - 3x + 7$ b) $x^4 - 2$ c) $5x^3 - 3x^2$

2 Calcula el valor numérico de $x^3 - 5x^2 - 11$.

a) Para $x = 1$. b) Para $x = -1$.

3 Calcula el valor numérico de $3ab^2 - 5a + 3b$ para $a = 2$ y $b = -1$.

4 Calcula, por tanteo, los valores de x que anulan cada polinomio:

a) $x^2 - 2x + 1$ b) $x^3 - 8$ c) $x^4 - x^3$

Suma de polinomios

Regla práctica

Para **sumar** dos (o más) **polinomios,** se colocan uno bajo el otro, haciendo coincidir, en la misma columna, los monomios semejantes.

Para sumar dos o más polinomios, tendremos en cuenta lo que ya sabemos sobre la suma de monomios.

Por ejemplo, sumemos los polinomios $A = 2x^3 - 3x^2 + 6$ y $B = x^2 - 5x + 4$:

- Con lo que ya sabemos, podríamos actuar así:

$$A + B = (2x^3 - 3x^2 + 6) + (x^2 - 5x + 4) = 2x^3 - 3x^2 + 6 + x^2 - 5x + 4 =$$
$$= 2x^3 - 3x^2 + x^2 - 5x + 6 + 4 = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 10$$

- En la práctica, se suele hacer de la manera siguiente:

$$\begin{array}{rcr} A & \rightarrow & 2x^3 - 3x^2 + 0x + 6 \\ B & \rightarrow & x^2 - 5x + 4 \\ \hline A + B & \rightarrow & 2x^3 - 2x^2 - 5x + 10 \end{array}$$

Resta de polinomios

Regla práctica

Para **restar** dos **polinomios,** se suma el primero con el opuesto del segundo. Es decir, se le cambia el signo al segundo y se suman.

Restemos los mismos polinomios A y B de antes.

- Con lo que ya sabemos, podríamos actuar como sigue:

$$A - B = (2x^3 - 3x^2 + 6) - (x^2 - 5x + 4) = 2x^3 - 3x^2 + 6 - x^2 + 5x - 4 =$$
$$= 2x^3 - 3x^2 - x^2 + 5x + 6 - 4 = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 2$$

- En la práctica, se suele hacer así:

$$\begin{array}{rcr} A & \rightarrow & 2x^3 - 3x^2 + 0x + 6 \\ -B & \rightarrow & -x^2 + 5x - 4 \\ \hline A - B & \rightarrow & 2x^3 - 4x^2 + 5x + 2 \end{array}$$

Producto de un polinomio por un número

Recuerda que para multiplicar un número por una suma, debemos multiplicar el número por cada sumando (propiedad distributiva).

▼ **EJEMPLO**

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 5x - 1 \\ \times\ 2 \\ \hline 2x^3 - 8x^2 + 10x - 2 \end{array} \rightarrow (x^3 - 4x^2 + 5x - 1) \cdot 2 = 2x^3 - 8x^2 + 10x - 2$$

Actividades

5 Copia y completa.

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x - 7 \\ +\ x^2 - 8x + 5 \\ \hline \square - \square - \square \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3x^3 - 6x^2 + 8x + 2 \\ +\ 2x^3 + 2x^2 - 6x - 9 \\ \hline \square - \square + \square - \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + \square - 1 \\ +\ \square - \square + x + \square \\ \hline 3x^3 - 6x^2 - 5x + 3 \end{array}$$

6 Dados los polinomios $A = 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$ y $B = 2x^3 - x^2 - 7x - 1$, calcula.

a) $A + B$

b) $A - B$

7 Calcula.

a) $3 \cdot (2x + 5)$

b) $5 \cdot (x^2 - x)$

c) $7 \cdot (x^3 - 1)$

d) $(-2) \cdot (5x - 3)$

4 Extracción de factor común

Cuando hablamos de extraer *factor común* nos referimos a una transformación a la que se pueden someter ciertas sumas y restas y que resulta muy útil en el cálculo algebraico.

Observa la siguiente expresión:

$$a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d \begin{cases} \text{— Es una suma cuyos sumandos son productos.} \\ \text{— Todos los productos tienen el } \textit{factor común } a. \end{cases}$$

Entonces, podemos transformar la suma en un producto **sacando factor común** y colocando un paréntesis.

$$\boxed{a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d = a \cdot (b + c - d)}$$

Observa que la transformación no es otra cosa que la aplicación de la propiedad distributiva.

▼ EJEMPLOS

a) $4 \cdot a + 4 \cdot b = 4 \cdot (a + b)$

b) $a^2 + ab = a \cdot a + a \cdot b = a \cdot (a + b)$

c) $x^3 - 2x^2 + 5x = x^2 \cdot x - 2x \cdot x + 5 \cdot x = (x^2 - 2x + 5) \cdot x$

Como caso particular, podemos estudiar qué ocurre cuando el factor común a extraer coincide con uno de los sumandos.

En este caso, en su lugar en la suma queda la unidad.

$$a + ab = a \cdot 1 + ab = a \cdot (1 + b)$$

▼ EJEMPLOS

a) $a^2 + 5a^3 = a^2 \cdot (1 + 5a)$

b) $x^3 + 6x^2 - x = (x^2 + 6x - 1) \cdot x$

c) $3m^2n - 2mn^2 + mn = mn \cdot (3m - 2n + 1)$

Actividades

1 Copia y completa.

a) $7x + 7y = 7 \cdot (\square + \square)$

b) $6a - 9b = 3 \cdot (\square - \square)$

c) $2x + xy = x \cdot (\square + \square)$

d) $x + x^2 - x^3 = x \cdot (\square + \square - \square)$

e) $5x^2 + 10xy + 15x = 5x \cdot (\square + \square + \square)$

2 Extrae factor común.

a) $8x + 8y$

b) $3a + 3b$

c) $5x + 10$

d) $8 + 4a$

e) $x^2 + xy$

f) $2a^2 + 6a$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Utiliza el lenguaje algebraico

1 ▼▽▽ Llamando x a un número cualquiera, escribe una expresión algebraica para cada uno de los siguientes enunciados:

a) El triple de x.

b) La mitad de su anterior.

c) El resultado de sumarle tres unidades.

d) La mitad de un número tres unidades mayor que x.

e) El triple del número que resulta de sumar a x cinco unidades.

f) Un número 5 unidades mayor que el triple de x.

2 ▼▽▽ En una granja hay C caballos, V vacas y G gallinas. Asocia cada una de estas expresiones al número de:

a) Patas

b) Cabezas

c) Orejas

d) Picos más alas

A 2C + 2V

B C + V + G

C 4(C + V) + 2G

D 3G

3 ▼▽▽ Copia en tu cuaderno y completa.

1	2	3	4	5	…	n
		22			…	$3n^2 - 5$

1	2	3	4	5	…	n
			10		…	$\frac{n(n+1)}{2}$

4 ▼▽▽ Siguiendo la lógica de la tabla, completa en tu cuaderno las casillas vacías.

1	2	3	5	10	15	20	n
0	3	8	24			399	

1	2	3	5	10	20	25	n
1	4	7	13			73	

5 ▼▽▽ Sabiendo que los valores a, b y c se relacionan mediante la fórmula

$$a = \frac{3b + 2c}{5}$$

completa la tabla en tu cuaderno.

b	0	0	2	3	4
c	0	5	7	3	9
a					

Monomios

6 ▼▽▽ Copia y completa.

MONOMIO	$8a$	$\frac{2}{3}xy$	
COEFICIENTE			1
PARTE LITERAL			a^3b
GRADO			

7 ▼▽▽ Opera.

a) $2x + 8x$

b) $7a - 5a$

c) $6a + 6a$

d) $15x - 9x$

e) $3x + x$

f) $10a - a$

g) $a + 7a$

h) $2x - 5x$

8 ▼▽▽ Reduce.

a) $3x + y + 5x$

b) $2a + 4 - 5a$

c) $7 - a - 5$

d) $3 + 2x - 7$

e) $2x + 3 - 9x + 1$

f) $a - 6 - 2a + 7$

g) $8a - 6 - 3a - 1$

h) $5x - 2 - 6x - 1$

9 ▼▽▽ Quita paréntesis y reduce.

a) $x - (x - 2)$

b) $3x + (2x + 3)$

c) $(5x - 1) - (2x + 1)$

d) $(7x - 4) + (1 - 6x)$

e) $(1 - 3x) - (1 - 5x)$

f) $2x - (x - 3) - (2x - 1)$

g) $4x - (2x - 1) + 5x - (4x - 2)$

10 ▼▽▽ Opera y reduce.

a) $5x \cdot 2$ b) $6x : 2$

c) $3x \cdot 4x$ d) $12x : 3x$

e) $\frac{2}{3}x \cdot 6x$ f) $\frac{3}{4}x^2 : \frac{1}{4}x$

g) $x^2 \cdot x^3$ h) $x^5 : x^2$

i) $3x \cdot 5x^3$ j) $15x^6 : 5x^4$

Polinomios

11 ▼▽▽ Indica el grado de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 3x^2 + 2x - 6$ b) $4 - 3x^2$

c) $2x^5 - 4x^2 + 1$ d) $7x^4 - x^3 + x^2 + 1$

12 ▼▽▽ Reduce.

a) $x^2 - 6x + 1 + x^2 + 3x - 5$

b) $3x - x^2 + 5x + 2x^2 - x - 1$

c) $2x^2 + 4 + x^3 - 6x + 2x^2 - 4$

d) $5x^3 - 1 - x + x^3 - 6x^2 - x^2 + 4$

13 ▼▽▽ Quita paréntesis y reduce.

a) $(3x^2 - 5x + 6) + (2x - 8)$

b) $(6 - 3x + 5x^2) - (x^2 - x + 3)$

c) $(9x^2 - 5x + 2) - (7x^2 - 3x - 7)$

d) $(3x^2 - 1) - (5x + 2) + (x^2 - 3x)$

14 ▼▽▽ Copia y completa.

$$\begin{array}{rrrr} & 3x^2 - & 5x - & 5 \\ + & \square x^2 + & \square x - & \square \\ \hline & 5x^2 - & x - & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & \square x^3 - & 3x^2 + & \square x - & 8 \\ + & 4x^3 + & \square x^2 - & 5x - & \square \\ \hline & 6x^3 + & 2x^2 - & x - & 10 \end{array}$$

15 ▼▽▽ Considera los polinomios siguientes:

$A = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 2$

$B = x^3 - 3x + 1$

$C = 2x^2 + 4x - 5$

Calcula.

a) $A + B$ b) $A - B$ c) $B - C$

Extracción de factor común

16 ▼▽▽ Extrae factor común en cada uno de los siguientes polinomios:

a) $3x + 3y + 3z$ b) $2x - 5xy + 3xz$

c) $a^2 + 3a$ d) $3a - 6b$

e) $2x + 4y + 6z$ f) $4x - 8x^2 + 12x^3$

g) $9a + 6a^2 + 3a^3$ h) $2a^2 - 5a^3 + a^4$

Relaciona y aplica tus conocimientos

17 ▼▽▽ En un campo de cultivo hay cuatro estanques. Llamando C a la cantidad de agua que tendrá un estanque dentro de m minutos, asocia cada estanque con la expresión que le corresponde.

ESTANQUE M: Contiene 4 500 litros de agua y se abre un grifo que le aporta 4 litros por minuto.

ESTANQUE N: Contiene 4 500 litros de agua y se le conecta una bomba que extrae 4 litros por minuto.

ESTANQUE P: Contiene 40 metros cúbicos de agua y se conecta a una tubería que aporta 4,5 metros cúbicos a la hora.

ESTANQUE Q: Contiene 40 metros cúbicos de agua y se abre una boca de riego que extrae 4,5 metros cúbicos a la hora.

$$\boxed{C = 40\,000 + \frac{4\,500 \cdot m}{60}} \qquad \boxed{C = 4\,500 - 4 \cdot m}$$

$$\boxed{C = 40\,000 - \frac{4\,500 \cdot m}{60}} \qquad \boxed{C = 4\,500 + 4 \cdot m}$$

18 ▼▼▽ El importe bruto, I, sin IVA, del recibo de la luz de cierta compañía eléctrica se calcula según la fórmula:

$$I = F + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot P$$

$F \rightarrow$ Gastos fijos y alquiler de equipos de medida (€)

$L_{AC} \rightarrow$ Lectura actual (kWh)

$L_{ANT} \rightarrow$ Lectura anterior (kWh)

$P \rightarrow$ Precio del kWh (€/kWh)

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

a) Escribe la fórmula en su versión actualizada, si los gastos fijos son de 8,50 € y el kilovatio hora cuesta 0,80 €.

b) ¿Cuál de las siguientes sería la fórmula actualizada de la factura, en su formato final, incluyendo el 18% de IVA?

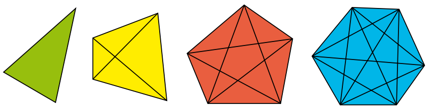
$$I = \frac{8{,}50 + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot 0{,}80 + 18}{100}$$

$$I = [8{,}50 + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot 0{,}80] \cdot 1{,}18$$

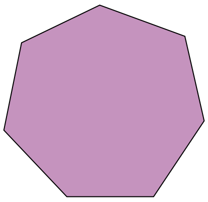
$$I = 8{,}50 + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot 0{,}80 + 1{,}18$$

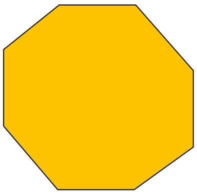
19 ▼▼▽ El empleado de la compañía eléctrica del ejercicio anterior leyó el mes pasado, en el contador de la vivienda de la familia Herranz, 2 457 kWh, y este mes, 2 516 kWh. ¿A cuánto asciende la factura de este mes?

20 ▼▼▼ Observa el número de diagonales de estos polígonos.



Traza las diagonales de un heptágono y de un octógono.





Comprueba que:

— El número de diagonales que salen de un vértice es igual al número de lados menos tres.

— Cada diagonal toca a dos vértices.

Teniendo eso en cuenta:

a) Completa la tabla en tu cuaderno.

N.° DE LADOS	3	4	5	6	7	8	10	20
N.° DIAGONALES	0	2	5	9				

b) Escribe la fórmula que te permite calcular el número de diagonales (D), sabiendo el número de lados (n).

Autoevaluación

¿Interpretas y aplicas el lenguaje algebraico en enunciados, fórmulas, propiedades, generalizaciones, etc.?

1 Completa en tu cuaderno las casillas vacías, siguiendo la lógica de la tabla.

1	3	5	8	10		15	n
2	12	22	37		57		

2 Llamando x a un número, expresa en lenguaje algebraico:

a) Su doble. b) El siguiente de su doble.

c) El doble de su siguiente. d) El triple de su mitad.

¿Reconoces los monomios, los polinomios y todos sus elementos?

3 ¿Cuáles son el coeficiente y el grado del monomio $-\frac{2}{3}xy^2$?

4 Calcula el valor numérico del polinomio $4x^2 - 3x + 7$ para $x = 1$.

¿Operas con monomios y polinomios?

5 Reduce estas expresiones:

a) $2x + 4 + x - 6$ b) $5x^2 + 2 + 6x - x - 3x^2 + 1$

6 Opera y reduce:

a) $3 \cdot (-5x)$ b) $6\,x \cdot \frac{1}{2}x$ c) $10x^2 : 5x$

7 Opera:

a) $5 \cdot (x - 2)$ b) $3 \cdot (x^2 - x + 1)$ c) $(-2) \cdot (2 - x)$

8 Opera y reduce:

a) $4 \cdot (x + 1) - 3x$ b) $3 \cdot (x - 2) - 2 \cdot (x - 3)$

c) $2 \cdot (x^2 + x) - (2x^2 + 5)$

9 Saca factot común: a) $5a + 5b$ b) $3x - 6$ c) $3a^2 + 6$

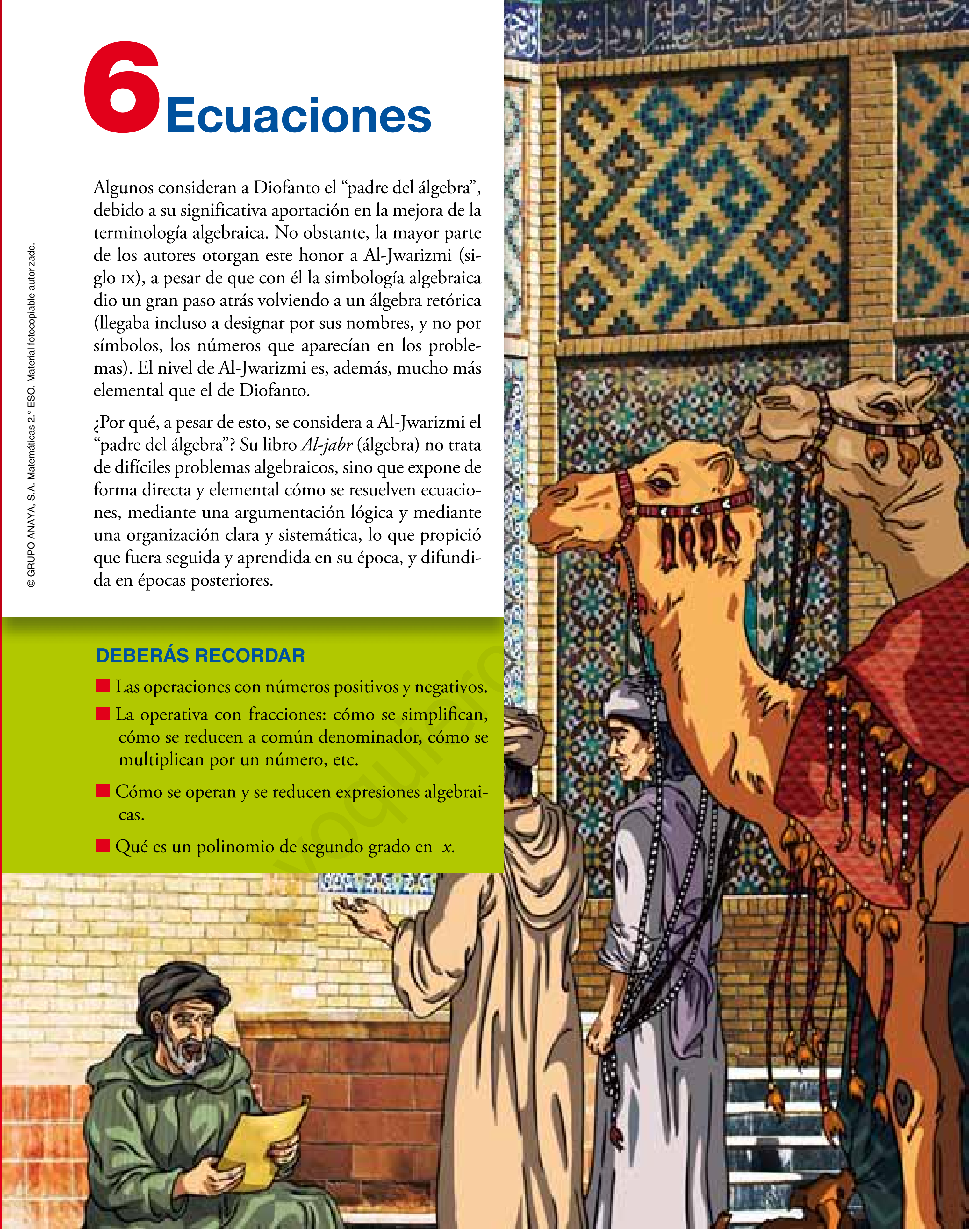
6 Ecuaciones

Algunos consideran a Diofanto el “padre del álgebra”, debido a su significativa aportación en la mejora de la terminología algebraica. No obstante, la mayor parte de los autores otorgan este honor a Al-Jwarizmi (siglo IX), a pesar de que con él la simbología algebraica dio un gran paso atrás volviendo a un álgebra retórica (llegaba incluso a designar por sus nombres, y no por símbolos, los números que aparecían en los problemas). El nivel de Al-Jwarizmi es, además, mucho más elemental que el de Diofanto.

¿Por qué, a pesar de esto, se considera a Al-Jwarizmi el “padre del álgebra”? Su libro *Al-jabr* (álgebra) no trata de difíciles problemas algebraicos, sino que expone de forma directa y elemental cómo se resuelven ecuaciones, mediante una argumentación lógica y mediante una organización clara y sistemática, lo que propició que fuera seguida y aprendida en su época, y difundida en épocas posteriores.

DEBERÁS RECORDAR

- Las operaciones con números positivos y negativos.
- La operativa con fracciones: cómo se simplifican, cómo se reducen a común denominador, cómo se multiplican por un número, etc.
- Cómo se operan y se reducen expresiones algebraicas.
- Qué es un polinomio de segundo grado en x.



1 Ecuaciones: significado y utilidad

Una ecuación expresa, mediante una igualdad algebraica, una relación entre cantidades cuyo valor, de momento, no conocemos.

Esas cantidades se representan con letras.

EJEMPLOS

- La mitad de un número es igual a su quinta parte más seis unidades:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Un número} \to x \\ \text{Su mitad} \to \dfrac{x}{2} \\ \text{Su quinta parte} \to \dfrac{x}{5}\end{array}\right\} \to \textbf{Ecuación} \to \frac{x}{2} = \frac{x}{5} + 6$$

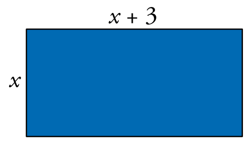
- La edad de Laura coincide con la quinta parte de la que tendrá dentro de 28 años:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Edad de Laura} \to x \\ \text{Edad dentro de 28 años} \to x + 28\end{array}\right\} \to \textbf{Ecuación} \to x = \frac{x + 28}{5}$$

- Una habitación rectangular es tres metros más larga que ancha, y su superficie es de 28 m^2:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ancho} \to x \\ \text{Largo} \to x + 3\end{array}\right\} \to \textbf{Ecuación} \to x \cdot (x + 3) = 28$$

Ejemplo



Área: $x \cdot (x + 3)$

¿Para qué sirven las ecuaciones?

Las ecuaciones permiten codificar relaciones en lenguaje algebraico y, a partir de ahí, manejarlas matemáticamente. Eso, como comprobarás más adelante, supone una **potentísima herramienta para resolver problemas.**

Pero antes, debes aprender a resolverlas.

¿Qué es resolver una ecuación?

Resolver una ecuación es encontrar el valor, o los valores, que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

EJEMPLO

En la ecuación $\frac{x}{2} = \frac{x}{5} + 6$, la igualdad se cumple solamente para el valor $x = 20$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{5} + 6 \\ x = 20\end{array}\right\} \underbrace{\frac{20}{2}}_{10} = \underbrace{\frac{20}{5} + 6}_{10}$$

Diremos, entonces, que la solución de la ecuación es $x = 20$.

Resuelve ecuaciones “con lo que ya sabes”

Antes de aprender ninguna técnica específica, ten en cuenta que razonando con lo que ya sabes, o tanteando, puedes resolver muchas ecuaciones.

EJEMPLOS

Para resolver las siguientes ecuaciones, responde a las preguntas sugeridas en cada caso:

a) $3x = 24$ → ¿Qué número multiplicado por 3 da 24?

b) $5x - 20 = 0$ → Piensa primero: ¿A qué número hay que restarle 20 para que el resultado sea 0?

Y, después: ¿Cuánto debe valer x?

c) $\dfrac{4x + 3}{5} = 1$ → Piensa primero: ¿Qué número dividido entre 5 da 1? ¿Cuál es el valor de $4x + 3$?

Y, después: ¿Cuánto debe valer $4x$? ¿Cuánto debe valer x?

d) $\sqrt{2x + 1} = 5$ → Piensa primero: ¿Qué número tiene 5 por raíz cuadrada? ¿Cuánto debe valer $2x + 1$?…

Y, después: ¿Cuánto debe valer $2x$? ¿Cuánto debe valer x?

Actividades

1 Asocia cada enunciado con la ecuación que lo expresa algebraicamente:

a) La tercera parte de un número es igual a su cuarta parte más una unidad.

b) La edad de Andrés es el triple que la de su hermana, y entre los dos suman 8 años.

c) Un rectángulo es 3 metros más largo que ancho, y su perímetro mide 26 metros.

d) He pagado 2 € por tres lapiceros y un bolígrafo. Pero el bolígrafo costaba el doble que un lapicero.

e) Un ciclista ha recorrido la distancia desde A hasta B a la velocidad de 15 km/h. Si hubiera ido a 10 km/h, habría tardado una hora más.

$\boxed{x + 3x = 8}$ $\boxed{x + (x + 3) + x + (x + 3) = 26}$

$\boxed{x + x + x + 2x = 2}$ $\boxed{\dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{4} + 1}$ $\boxed{\dfrac{x}{10} = \dfrac{x}{15} + 1}$

2 Resuelve en el orden en que aparecen.

a) $3x = 21$ b) $3x - 1 = 20$

c) $\dfrac{3x - 1}{5} = 4$ d) $\sqrt{\dfrac{3x - 1}{5}} = 2$

3 Resuelve con lo que sabes.

a) $7x = 35$ b) $4x - 12 = 0$

c) $x + 3 = 10$ d) $2x - 4 = 6$

e) $\dfrac{x + 1}{3} = 2$ f) $\dfrac{3x - 4}{2} = 1$

g) $\dfrac{7}{x + 1} = 1$ h) $\dfrac{10}{2x - 3} = 2$

i) $x^2 + 1 = 26$ j) $\sqrt{3x + 1} = 5$

4 Encuentra alguna solución por tanteo.

a) $x^2 + 2x + 1 = 4$ b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{8}{x} = 3$ d) $x^3 - \sqrt{x} = 0$

2 Ecuaciones: elementos y nomenclatura

- **Miembros de una ecuación:** Son cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo de igualdad.
- **Términos:** Son los sumandos que forman los miembros.

$$\overbrace{\underset{\uparrow}{3x}+\underset{\uparrow}{1}}^{\substack{\text{PRIMER MIEMBRO}\\ \downarrow}} = \overbrace{\underset{\uparrow}{9}-\underset{\uparrow}{x}}^{\substack{\text{SEGUNDO MIEMBRO}\\ \downarrow}}$$

TÉRMINOS

- **Incógnitas:** Son las letras que aparecen en la ecuación.

  Por ejemplo:

  $3x + 1 = 9 - x$ → Ecuación con una incógnita, x.

  $5x + 3y = y + 2$ → Ecuación con dos incógnitas, x e y.

- **Soluciones:** Son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

  Por ejemplo:

  $$3x + 1 = 9 - x \quad \begin{cases} x = 2 \text{ es solución, ya que } 3 \cdot 2 + 1 = 9 - 2. \\ x = 1 \text{ no es solución, ya que } 3 \cdot 1 + 1 \neq 9 - 1. \end{cases}$$

- **Grado de una ecuación:** Es el mayor de los grados de los monomios que forman los miembros, una vez reducida la ecuación.

  Por ejemplo:

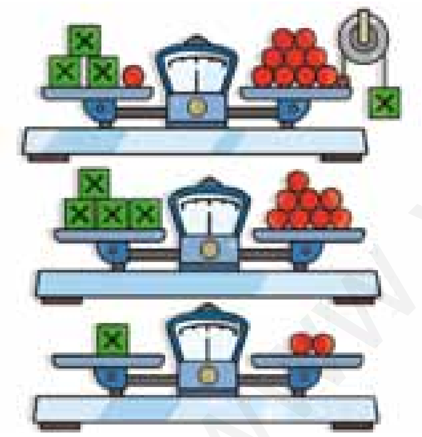
  $3x + 1 = 9 - x$ → Ecuación de primer grado.

  $x^2 - 3x + 1 = 2x - 5$ → Ecuación de segundo grado.

- **Ecuaciones equivalentes:** Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas incógnitas y las mismas soluciones.

  Por ejemplo:

  $$\left.\begin{array}{l} 3x + 1 = 9 - x \\ 4x + 1 = 9 \\ 4x = 8 \end{array}\right\} \text{Son equivalentes. Las tres tienen como solución } x = 2.$$



Actividades

1 Copia y asocia cada ecuación con su o sus soluciones:

$4x + 4 = 5$

$4x - 3 = x + 3$

$x^2 - 3 = 2x$

$3x = x + 1$

$\boxed{3}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$ $\boxed{-1}$ $\boxed{\frac{1}{4}}$ $\boxed{2}$

2 De las ecuaciones siguientes, agrupa las que sean equivalentes:

a) $4x = 20$

b) $3x - 1 = 8$

c) $5x - 4 = x$

d) $3x = 9$

e) $4x - 5 = 15$

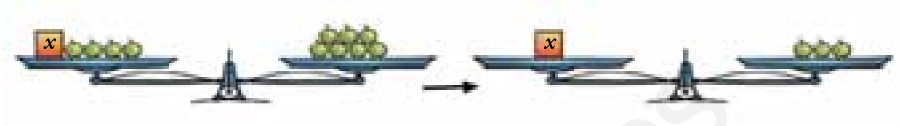
f) $4x - 4 = 0$

3 Primeras técnicas para la resolución de ecuaciones

Ahora vas a estudiar los procedimientos básicos para resolver ecuaciones. Aunque los ejemplos son muy sencillos y la solución salta a la vista, sigue las técnicas que se exponen, pues te servirán para resolver casos más complejos.

Resolución de la ecuación $x + a = b$

▼ **EJEMPLO:** $x + 4 = 7$



$x + 4 = 7$

$\downarrow$

$x + \cancel{4} - \cancel{4} = 7 - 4$

$\downarrow$

$x = 3$

- Restando 4 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 3$.

Para resolver la ecuación $x + a = b$, restamos a en ambos miembros.

$$x + a = b \;\rightarrow\; x + \cancel{a} - \cancel{a} = b - a \;\rightarrow\; x = b - a$$

En la práctica

REGLA

Lo que está sumando en uno de los miembros, pasa restando al otro.

EJEMPLOS

a) $x + 4 = 7$ $\downarrow$ $x = 7 - 4$ $\downarrow$ $x = 3$

b) $x + 5 = 1$ $\downarrow$ $x = 1 - 5$ $\downarrow$ $x = -4$

Resolución de la ecuación $x - a = b$

▼ **EJEMPLO:** $x - 2 = 6$

$x - 2 = 6$

$\downarrow$

$x - \cancel{2} + \cancel{2} = 6 + 2$

$\downarrow$

$x = 8$

- Sumando 2 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 8$.

Para resolver la ecuación $x - a = b$, sumamos a en ambos miembros.

$$x - a = b \;\rightarrow\; x - \cancel{a} + \cancel{a} = b + a \;\rightarrow\; x = b + a$$

En la práctica

REGLA

Lo que está restando en uno de los miembros, pasa sumando al otro.

EJEMPLOS

a) $x - 2 = 6$ $\downarrow$ $x = 6 + 2$ $\downarrow$ $x = 8$

b) $5 - x = 2$ $\downarrow$ $5 - 2 = x$ $\downarrow$ $x = 3$

Actividades

1 Resuelve aplicando las técnicas recién aprendidas.

a) $x + 3 = 4$ b) $x - 1 = 8$ c) $x + 5 = 11$

d) $x - 7 = 3$ e) $x + 4 = 1$ f) $x - 2 = -6$

g) $9 = x + 5$ h) $5 = x - 4$ i) $2 = x + 6$

2 Resuelve aplicando las técnicas anteriores.

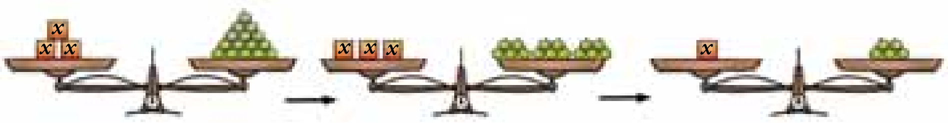
a) $x + 6 = 9$ b) $x - 4 = 5$ c) $2 - x = 4$

d) $5 + x = 4$ e) $3 + x = 3$ f) $6 = x + 8$

g) $0 = x + 6$ h) $1 = 9 - x$ i) $4 = x - 8$

Resolución de la ecuación $a \cdot x = b$

▼ **EJEMPLO:** $3x = 15$



$$3x = 15$$
$$\downarrow$$
$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{15}{3}$$
$$\downarrow$$
$$x = 5$$

- Dividiendo por 3 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 5$.

Para resolver la ecuación $ax = b$, dividimos ambos miembros por a. } $ax = b \rightarrow \frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}} = \frac{b}{a} \rightarrow x = \frac{b}{a}$

En la práctica

REGLA: Lo que está multiplicando a un miembro (a todo él) pasa dividiendo al otro.

EJEMPLOS

a) $3x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{3} \rightarrow x = 5$

b) $7x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{7}$

Casos especiales

- La ecuación $0 \cdot x = 6$ no tiene solución. No hay ningún número que multiplicado por cero dé seis.
- La ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones. Cualquier número multiplicado por cero da cero.

Resolución de la ecuación $x/a = b$

▼ **EJEMPLO:** $\frac{x}{4} = 3$

$$\frac{x}{4} = 3$$
$$\downarrow$$
$$\frac{x}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} = 3 \cdot 4$$
$$\downarrow$$
$$x = 12$$

- Multiplicando por 4 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 12$.

Para resolver la ecuación $\frac{x}{a} = b$, multiplicamos ambos miembros por a. } $\frac{x}{a} = b \rightarrow \frac{x}{\cancel{a}} \cdot \cancel{a} = b \cdot a \rightarrow x = b \cdot a$

En la práctica

REGLA: Lo que está dividiendo a un miembro (a todo él) pasa multiplicando al otro.

EJEMPLOS

a) $\frac{x}{4} = 3 \rightarrow x = 3 \cdot 4 \rightarrow x = 12$

b) $\frac{x}{2} = \frac{7}{10} \rightarrow x = \frac{7}{10} \cdot 2 \rightarrow x = \frac{7}{5}$

Actividades

1 Resuelve con las técnicas que acabas de aprender.

a) $4x = 20$ b) $\frac{x}{2} = 1$ c) $3x = 12$

d) $\frac{x}{5} = 2$ e) $8 = 4x$ f) $4 = \frac{x}{2}$

2 Resuelve combinando las técnicas anteriores.

a) $3x - 2 = 0$ b) $4x + 5 = 13$ c) $2x - 5 = 9$

d) $8 - 3x = 2$ e) $\frac{x}{2} + 4 = 7$ f) $\frac{x}{3} - 2 = 3$

4 Resolución de ecuaciones sencillas

El método para resolver una ecuación consiste en ir transformándola, mediante sucesivos pasos, en otras equivalentes más sencillas hasta despejar la incógnita.

Para transformar una ecuación en otra equivalente más sencilla, utilizaremos dos recursos:

- Reducir sus miembros.
- Transponer los términos.

Analiza los siguientes ejemplos y resuelve las ecuaciones que siguen. Para que puedas evaluar tu trabajo, tienes las soluciones al margen.

Ten en cuenta

- La ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones.
- La ecuación $0 \cdot x = k$, con $k \neq 0$, no tiene solución.

▼ EJEMPLO 1

$2x - 5 = 3$

TRANSPONER

$2x = 3 + 5$ Sumamos 5 en ambos miembros.

REDUCIR

$2x = 8$

TRANSPONER

$x = \frac{8}{2}$ Dividimos ambos miembros entre 2.

REDUCIR

$x = 4$

Soluciones

① 1 ② 1 ③ 2
④ –2 ⑤ 1 ⑥ 2
⑦ –4 ⑧ 3 ⑨ 1
⑩ –1 ⑪ 2/3 ⑫ –1/3
⑬ –1/2 ⑭ I.S.(*) ⑮ S.S.(**)
(*) → I.S. (infinitas soluciones).
(**) → S.S. (sin solución).

Practica

① $2x - 1 = 1$
② $5x - 3 = 2$
③ $7x - 5 = 9$
④ $10 + 3x = 4$
⑤ $2x - 3 = -1$
⑥ $8 = 5x - 2$
⑦ $0 = 3x + 12$
⑧ $5 - x = 2$
⑨ $6 - 2x = 4$
⑩ $4 - 5x = 9$
⑪ $3x - 1 = 1$
⑫ $4 = 3x + 5$
⑬ $5 = 4x + 7$
⑭ $0x + 2 = 2$
⑮ $0x + 1 = 4$

▼ EJEMPLO 2

$5x + 1 - 3x = 7$
R
$2x + 1 = 7$
T
$2x = 7 - 1$
R
$2x = 6$
T
$x = \frac{6}{2}$
R
$x = 3$

▼ EJEMPLO 3

$4x - x + 3 = 7 - 5$
R
$3x + 3 = 2$
T
$3x = 2 - 3$
R
$3x = -1$
T
$x = \frac{-1}{3}$
$x = -\frac{1}{3}$

Soluciones

⑯ 1 ⑰ 3 ⑱ –2
⑲ 2 ⑳ –4 ㉑ 1/2
㉒ –3 ㉓ –1 ㉔ 1
㉕ 0 ㉖ 1/5 ㉗ –4
㉘ 3/4 ㉙ I.S. ㉚ S.S.

Practica

⑯ $8x - 4 + x = 5$
⑰ $5x - 8 - x = 7 - 3$
⑱ $3x + 10 + x = 2$
⑲ $7x - 2x - 3 = 7$
⑳ $3x + 15 + 2x = -5$
㉑ $5 + 2x + 1 = 7$
㉒ $5 - x + 2 = 10$
㉓ $7x + 3 - 9x = 5$
㉔ $5 - 1 = x + 5 - 2x$
㉕ $1 = x + 1 + 2x$
㉖ $4 = x + 5 - 6x$
㉗ $9 = 4x + 1 - 6x$
㉘ $5 = 3x - 1 + 5x$
㉙ $7x + 2 - 7x = 3 - 1$
㉚ $5x + 3 - 5x = 7$

A medida que las ecuaciones se complican, se abren diferentes opciones de resolución. Cualquiera es válida, siempre que operes correctamente.

A continuación, puedes ver un ejemplo resuelto de dos formas:

▼ EJEMPLO 4

OPCIÓN A

La incógnita, en el miembro de la izquierda.

$$
\begin{array}{ll}
 & 2x - 1 - 5x = 2 + 3x + 1 \\
\text{R} & \\
 & -3x - 1 = 3 + 3x \\
\text{T} & \\
 & -3x - 3x = 3 + 1 \\
\text{R} & \\
 & -6x = 4 \\
\text{T} & \\
 & x = \dfrac{4}{-6} \\
\text{R} & \\
 & x = -\dfrac{2}{3}
\end{array}
$$

OPCIÓN B

La incógnita, en el miembro en el que tome coeficiente positivo.

$$
\begin{array}{ll}
 & 2x - 1 - 5x = 2 + 3x + 1 \\
\text{R} & \\
 & -3x - 1 = 3 + 3x \\
\text{T} & \\
 & -1 - 3 = 3x + 3x \\
\text{R} & \\
 & -4 = 6x \\
\text{T} & \\
 & \dfrac{-4}{6} = x \\
\text{R} & \\
 & x = -\dfrac{2}{3}
\end{array}
$$

Practica

㉛ $2x - 1 = x + 2$

㉜ $3x + 2 = x + 6$

㉝ $2x + 1 = 5x - 5$

㉞ $1 - x = 4 - 2x$

㉟ $x - 6 = 5x - 2$

㊱ $3 + 7x = 2x + 5$

㊲ $6x - 2 + x = 2x + 3$

㊳ $8x + 3 - 5x = 7 - 2x - 1$

㊴ $4x + 5 + x = 7 + 3x - 3$

㊵ $8 - x + 1 = 4x - 1 - 7x$

㊶ $7x - 4 - 3x = 2 + 4x - 6$

㊷ $2 + 3x - 5 = 4x - 2 - x$

Soluciones

㉛ 3	㉜ 2	㉝ 2
㉞ 3	㉟ –1	㊱ 2/5
㊲ 1	㊳ 3/5	㊴ –1/2
㊵ –5	㊶ I.S.	㊷ S.S.

Cuando una ecuación contiene paréntesis, comenzaremos suprimiéndolos y reduciendo.

▼ EJEMPLO 5

$$
\begin{array}{ll}
 & 5x - 2(2x - 2) = 8 - (3 + 2x) \\
\text{R} & \\
 & 5x - 4x + 4 = 8 - 3 - 2x \\
\text{R} & \\
 & x + 4 = 5 - 2x \\
\text{T} & \\
 & x + 2x = 5 - 4 \\
\text{R} & \\
 & 3x = 1 \\
\text{T} & \\
 & x = \dfrac{1}{3}
\end{array}
$$

Practica

㊸ $x - 7 = 6 - (x - 3)$

㊹ $x - (1 - 3x) = 8x - 1$

㊺ $1 - (3x - 9) = 5x - 4x + 2$

㊻ $13x - 15 - 6x = 1 - (7x + 9)$

㊼ $7x - (4 + 2x) = 1 + (x - 2)$

㊽ $2(3x - 1) - 5x = 5 - (3x + 11)$

㊾ $1 - 2(2x - 1) = 5x - (5 - 3x)$

㊿ $7 - (2x + 9) = 11x - 5(1 - x)$

(51) $4(5x - 3) - 7x = 3(6x - 4) + 10$

(52) $4 - 7(2x - 3) = 3x - 4(3x - 5)$

(53) $16x - 7(x + 1) = 2 - 9(1 - x)$

(54) $6 - (8x + 1) = 4x - 3(2 + 4x)$

Soluciones

㊸ 8	㊹ 0	㊺ 2
㊻ 1/2	㊼ 3/4	㊽ –1
㊾ 2/3	㊿ 1/6	(51) –2
(52) 1	(53) I.S.	(54) S.S.

5 Ecuaciones con denominadores

Cuando en los términos de una ecuación aparecen denominadores, la transformaremos en otra equivalente que no los tenga. Para ello, *multiplicaremos los dos miembros* de la ecuación por un número que sea múltiplo de todos los denominadores.

El múltiplo más adecuado es el más pequeño; es decir, el *mínimo común múltiplo de los denominadores.*

▼ **EJEMPLO**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{5x}{6} - 1 = \dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{4} \\ 12 \cdot \left(\dfrac{5x}{6} - 1\right) = 12 \cdot \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{4}\right) \end{array}\right\}$$

mín.c.m. (6, 3, 4) = 12

Multiplicamos los dos miembros por 12.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{60x}{6} - 12 = \dfrac{12x}{3} - \dfrac{36}{4} \\ 10x - 12 = 4x - 9 \end{array}\right\}$$

Al quitar paréntesis y reducir, desaparecen los denominadores.

$$\left.\begin{array}{l} 10x - 4x = -9 + 12 \\ 6x = 3 \\ x = \dfrac{3}{6} \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

A partir de ahí, actuaremos como ya sabemos.

Para **eliminar** los **denominadores** en una ecuación, se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de todos ellos.

Una estrategia similar

- Reducir a común denominador:

$$\frac{5x}{6} - \frac{1}{1} = \frac{x}{3} - \frac{3}{4}$$

Común denominador → 12

$$\frac{10x}{12} - \frac{12}{12} = \frac{4x}{12} - \frac{9}{12}$$

- Eliminar denominadores:

$$10x - 12 = 4x - 9$$

Actividades

1 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$ b) $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{1}{3}$

c) $4 - \dfrac{2x}{3} = x + \dfrac{2}{3}$ d) $1 + \dfrac{2x}{5} = \dfrac{1}{5} - 2x$

e) $\dfrac{1}{4} - x = \dfrac{3x}{4} - 1$ f) $\dfrac{3x}{2} + 5 = 2x - \dfrac{1}{2}$

2 Halla x en cada caso:

a) $1 - \dfrac{x}{4} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{3}{4} = 1$

c) $\dfrac{5x}{6} + 1 = x - \dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{7x}{10} + 1 = \dfrac{2}{5} + x$

e) $x + \dfrac{1}{5} = \dfrac{2x}{3}$

3 Resuelve:

a) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{15} + \dfrac{2x}{5}$ b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3} = \dfrac{2}{3} - x$

c) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = x - 1$ d) $\dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5x}{6} - 1$

e) $\dfrac{7x}{9} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{x}{3}$

4 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{3x}{4} + \dfrac{2x}{5} + \dfrac{x}{10} = 1$ b) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{3x}{5} - \dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{6} = \dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{5} + 1$

e) $x - \dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{4x}{5} - \dfrac{x}{2}$

SOLUCIONES

1. a) 3 b) –2 c) 2 d) –1/3 e) 5/7 f) 11

2. a) 2 b) 4/5 c) 8 d) 2 e) –3/5

3. a) –1 b) 1/8 c) 6 d) 10 e) 3/8

4. a) 4/5 b) –1/3 c) –1/2 d) 5 e) 2

Procedimiento general para la resolución de ecuaciones de primer grado

Para resolver ecuaciones de primer grado, conviene organizar el trabajo según las fases que se exponen en el siguiente ejemplo:

▼ **EJEMPLO**

- Primera fase:

  Quitar paréntesis. ⟶

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}-3\left(1-\dfrac{x}{4}\right)=\dfrac{x}{8}-2\\[2ex]\dfrac{x}{2}-3+\dfrac{3x}{4}=\dfrac{x}{8}-2\end{array}\right.$$

- Segunda fase:

  Quitar denominadores. (Para ello, multiplicamos ambos miembros por 8). ⟶

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{8x}{2}-24+\dfrac{24x}{4}=\dfrac{8x}{8}-16\\[2ex]4x-24+6x=x-16\end{array}\right.$$

- Tercera fase:

  Despejar la incógnita, reduciendo y transponiendo términos. ⟶

$$\left\{\begin{array}{l}10x-24=x-16\\10x-x=24-16\\9x=8\ \rightarrow\ x=\dfrac{8}{9}\end{array}\right.$$

Actividades

1 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\dfrac{3}{2}(1-x)+2=3x$

b) $2-\dfrac{1}{5}(2x-1)=\dfrac{7x}{10}$

c) $1-\dfrac{2x}{7}=x-2\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$

d) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}=\dfrac{1}{6}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+x$

e) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{7}{3}\right)$

2 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}+1\right)-\dfrac{2x}{3}=\dfrac{1}{6}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

b) $\dfrac{1}{2}(2x-3)+1=\dfrac{1}{3}(x-5)-x$

c) $2\left(\dfrac{4x}{9}-\dfrac{7}{6}\right)+\dfrac{2x}{3}=1-\dfrac{2x}{3}$

3 Halla el valor de x en cada caso:

a) $5x-\left(\dfrac{2x}{3}+\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{3}\left(9x-\dfrac{1}{2}\right)$

b) $5-2\left(\dfrac{x}{5}+1\right)=\dfrac{x}{10}+3\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$

SOLUCIONES

1. a) 7/9
   b) 2
   c) –7/15
   d) 1/4
   e) –5/6

2. a) 1
   b) –7/10
   c) 3/2

3. a) –1/5
   b) 3

7 Resolución de problemas con ecuaciones

En la información que aporta el enunciado de un problema, encontramos elementos conocidos *(datos)* y elementos desconocidos *(incógnitas).*

Si conseguimos *codificar algebraicamente* todos esos elementos, y relacionarlos mediante una igualdad, habremos construido una *ecuación*.

Resolviendo la ecuación e interpretando las soluciones en el contexto del enunciado, habremos resuelto el problema.

En esta página, y en las siguientes, verás varios ejemplos del proceso a seguir.

Problemas resueltos

1. Al sumar la tercera parte de un número con su mitad, se obtiene 20. ¿De qué número se trata?

- PRIMER PASO:

Identificar los elementos del problema, expresando algebraicamente los que son desconocidos.

El número $\longrightarrow x$

Su tercera parte $\longrightarrow \frac{x}{3}$

Su mitad $\longrightarrow \frac{x}{2}$

- SEGUNDO PASO:

Expresar, con una igualdad, la relación que liga los elementos del problema.

$$\boxed{\text{LA TERCERA PARTE DEL NÚMERO}} + \boxed{\text{LA MITAD DEL NÚMERO}} = \boxed{20}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 20$$

- TERCER PASO:

Resolver la ecuación.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 20 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x + 3x = 120 \rightarrow 5x = 120 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{120}{5} \rightarrow x = 24$$

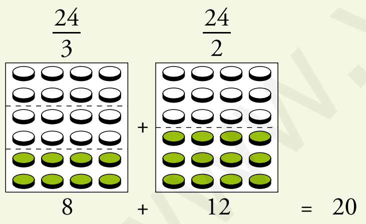
- CUARTO PASO:

Interpretar la solución dentro del enunciado del problema y comprobar si es correcta.

Solución: El número buscado es 24.

Comprobación:

$$\frac{24}{3} + \frac{24}{2} = 8 + 12 = 20$$



Actividades

1 Si al triple de un número le restas 8, obtienes 25. ¿Qué número es?

2 Si a cierta cantidad le restas su tercera parte y le sumas su quinta parte, obtienes 13 como resultado. ¿Cuál es esa cantidad?

3 Hemos sumado 13 a la mitad de un número y hemos obtenido el mismo resultado que restando 11 a su doble. ¿De qué número se trata?

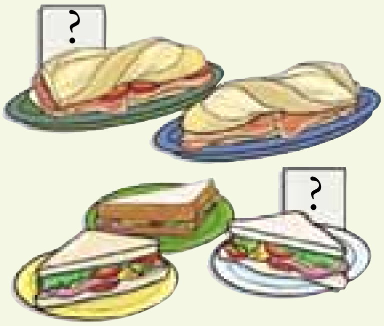
4 La suma de dos números consecutivos es 133. ¿Qué números son?

2. **La pandilla ha entrado a merendar en una bocadillería.**

Un bocadillo cuesta un euro más que un sándwich.

Por tres sándwiches y dos bocadillos, pagan 11 euros.

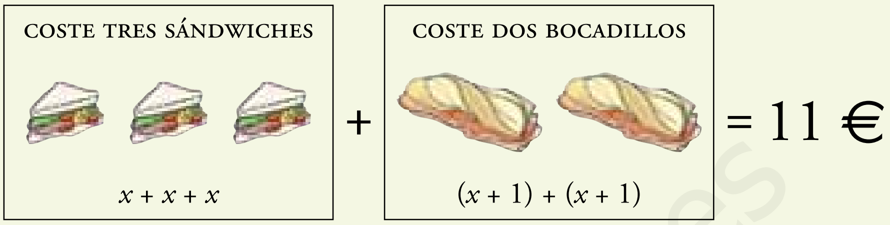
¿Cuánto cuesta un sándwich? ¿Y un bocadillo?



- PRIMER PASO: Identificar y codificar algebraicamente los elementos del problema.

$$\begin{cases} \text{Coste de un sándwich} \longrightarrow x \\ \text{Coste de un bocadillo} \longrightarrow x + 1 \end{cases}$$

- SEGUNDO PASO: Relacionar, mediante una ecuación, los elementos que intervienen.



$$3x + 2(x + 1) = 11$$

- TERCER PASO: Resolver la ecuación.

$$3x + 2(x + 1) = 11$$

$$3x + 2x + 2 = 11$$

$$5x = 11 - 2 \;\rightarrow\; 5x = 9 \;\rightarrow\; x = \frac{9}{5}$$

- CUARTO PASO: Interpretar la solución dentro del contexto del problema y comprobar si es correcta.

Solución: Coste de un sándwich $\longrightarrow x = \frac{9}{5} = 1{,}80$ €

Coste de un bocadillo $\longrightarrow x + 1 = 1{,}80 + 1 = 2{,}80$ €

Comprobación:

Coste de tres sándwiches $\longrightarrow 3 \cdot 1{,}80 = \;\; 5{,}40$ €

Coste de dos bocadillos $\longrightarrow 2 \cdot 2{,}80 = \;\; 5{,}60$ €

Coste total $\longrightarrow$ 11,00 €

Actividades

5 Un kilo de manzanas cuesta 0,50 € más que uno de naranjas.

Marta ha comprado tres kilos de naranjas y uno de manzanas por 5,30 €.

¿A cómo están las naranjas? ¿Y las manzanas?

$$\left.\begin{array}{l} \text{NARANJAS} \rightarrow x \\ \text{MANZANAS} \rightarrow x + 0{,}5 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\text{COSTE 3 KILOS NARANJAS}} + \boxed{\text{COSTE 1 KILO MANZANAS}} = 5{,}30 \text{ €}$$

6 Rosa tiene 25 años menos que su padre, Juan, y 26 años más que su hijo Alberto.

Entre los tres suman 98 años.

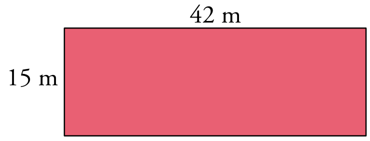
¿Cuál es la edad de cada uno?

$$\left.\begin{array}{l} \text{ROSA} \rightarrow x \\ \text{JUAN} \rightarrow x + 25 \\ \text{ALBERTO} \rightarrow x - 26 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\text{EDAD DE ROSA}} + \boxed{\text{EDAD DE JUAN}} + \boxed{\text{EDAD DE ALBERTO}} = 98 \text{ años}$$

Recuerda

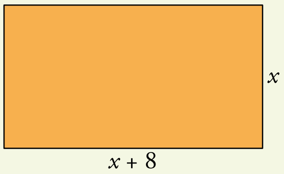
El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de los lados.



$P = 15 + 42 + 15 + 42 = 114$ m

3. La base de un rectángulo es 8 cm más larga que la altura, y el perímetro mide 56 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

- PRIMER PASO: Codificar algebraicamente los elementos.



Lado menor ⟶ x

Lado mayor ⟶ $x + 8$

Perímetro ⟶ 56 cm

- SEGUNDO PASO: Construir la ecuación.

$$\boxed{\text{SUMA DE LOS LADOS}} = \boxed{\text{PERÍMETRO}}$$

$$x + (x + 8) + x + (x + 8) = 56$$

- TERCER PASO: Resolver la ecuación.

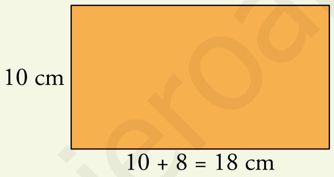
$$x + (x + 8) + x + (x + 8) = 56$$

$$x + x + 8 + x + x + 8 = 56$$

$$4x + 16 = 56 \rightarrow 4x = 40 \rightarrow x = 10$$

- CUARTO PASO: Interpretar y comprobar la solución.

Solución:

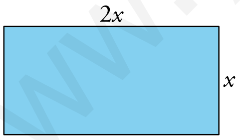


Comprobación:

Perímetro → 10 + 18 + 10 + 18 = 56 cm

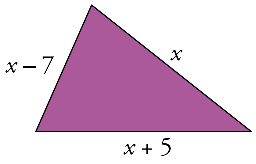
Actividades

7 Se han necesitado 150 metros de alambrada para cercar una finca rectangular que es el doble de larga que de ancha. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca?



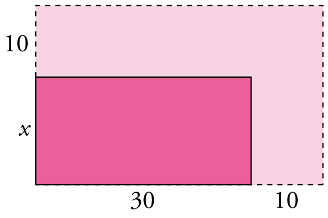
8 En un triángulo escaleno, el lado mediano mide 7 cm más que el lado menor y 5 cm menos que el lado mayor.

Si el perímetro mide 52 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado?



9 De una parcela rectangular se ceden, para calles, 10 m a lo largo y otros 10 m a lo ancho, con lo que la parcela pierde una superficie de 480 m^2.

Si el rectángulo resultante tiene una longitud de 30 m, ¿cuál es su anchura?



SUPERFICIE ORIGINAL ⟶ $40 \cdot (x + 10)$

SUPERFICIE RESULTANTE ⟶ $30 \cdot x$

SUPERFICIE PERDIDA ⟶ $40 \cdot (x + 10) - 30 \cdot x$

⟶ 480 m^2

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Ecuaciones sencillas

1 ▼▽▽ Resuelve mentalmente.

a) $x + 4 = 5$　b) $x - 3 = 6$　c) $7 + x = 10$

d) $7 - x = 5$　e) $9 = 15 - x$　f) $2 - x = 9$

2 ▼▽▽ Resuelve.

a) $2x - 5 + 3x + 1 = 3x - 2$

b) $x + 7 = 12x - 3 - 8x + 1$

c) $6x - 1 + x = 4 - 5x + 3$

d) $x + 2x + 3x - 5 = 4x - 9$

e) $5x + 4 - 6x = 7 - x - 3$

f) $4x + 2 + 7x = 10x + 3 + x$

3 ▼▽▽ Quita paréntesis y resuelve.

a) $6(x + 1) - 4x = 5x - 9$

b) $18x - 13 = 8 - 4(3x - 1)$

c) $3x + 5(2x - 1) = 8 - 3(4 - 5x)$

d) $5 - (4x + 6) = 3x + (7 - 4x)$

e) $x - 7(2x + 1) = 2(6 - 5x) - 13$

f) $11 - 5(3x + 2) + 7x = 1 - 8x$

g) $13x - 5(x + 2) = 4(2x - 1) + 7$

Ecuaciones de primer grado con denominadores

4 ▼▽▽ Quita denominadores y resuelve.

a) $x + \frac{1}{3} = \frac{x}{3}$　b) $\frac{5x}{3} + 1 = \frac{5}{6} + x$

c) $\frac{3x}{5} - \frac{1}{4} = x - \frac{7x}{10} - \frac{1}{5}$　d) $\frac{x}{3} + \frac{4}{15} - x = \frac{1}{6} - \frac{7x}{10}$

e) $\frac{7x}{4} - 1 - \frac{x}{8} = x + \frac{5x}{8} + 1$

f) $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} - \frac{x}{3} = \frac{x}{6} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$

5 ▼▽▽ Elimina los paréntesis y los denominadores y resuelve.

a) $2x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)$　b) $\frac{5}{6}(2x - 1) - x = \frac{x}{6}$

c) $\frac{x}{5} - 1 = 2\left(x - \frac{4}{5}\right)$　d) $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(2x - 5)$

6 ▼▽▽ Elimina denominadores y resuelve.

a) $1 - \frac{x + 1}{3} = 2x - \frac{1}{3}$

b) $1 - \frac{1 - x}{3} = x + \frac{1}{2}$

c) $\frac{3x - 1}{2} - 1 = 2x - 2$

d) $x + \frac{2 - 3x}{5} = \frac{x}{2} + 1$

e) $2x + \frac{x - 3}{2} = \frac{x - 3}{4}$

f) $\frac{3x}{5} - 1 = x - \frac{x + 1}{2}$

g) $\frac{x + 3}{5} - \frac{x - 6}{7} = 1$

h) $\frac{1 - x}{3} - \frac{x - 1}{12} = \frac{3x - 1}{4}$

Resuelve problemas con ecuaciones de primer grado

7 ▼▽▽ Busca un número cuyo doble más tres unidades sea igual a su triple menos cinco unidades.

8 ▼▽▽ Multiplicando un número por 5, se obtiene el mismo que sumándole 12.

¿Cuál es ese número?

9 ▼▽▽ La suma de dos números es 167, y su diferencia, 19.

¿Cuáles son esos números?

10 ▼▽▽ Calcula el número natural que sumado a su siguiente da 157.

EL NÚMERO → x

SU SIGUIENTE → $x + 1$

11 ▼▽▽ La suma de tres números consecutivos es 135.

¿Cuáles son esos números?

12 ▼▽▽ Teresa es siete años mayor que su hermano Antonio y dos años menor que su hermana Blanca. Calcula la edad de cada uno sabiendo que entre los tres suman 34 años.

ANTONIO → $x - 7$; TERESA → x; BLANCA → $x + 2$

13 ▼▽▽ Una ensaimada cuesta 10 céntimos más que un cruasán. Tres cruasanes y cuatro ensaimadas han costado 6 euros.

¿Cuál es el coste de cada pieza?

14 ▼▽▽ Narciso ha comprado en las rebajas dos pantalones y tres camisetas por 161 €.

¿Cuál era el precio de cada artículo, sabiendo que un pantalón costaba el doble que una camiseta?

15 ▼▽▽ Reparte 280 € entre tres personas, de forma que la primera reciba el triple que la segunda, y esta, el doble que la tercera.

1.ª PERSONA → $6x$
2.ª PERSONA → $2x$
3.ª PERSONA → x

16 ▼▼▽ Tres agricultores reciben una indemnización de 100 000 € por la expropiación de terrenos para la construcción de una autopista.

¿Cómo han de repartirse el dinero, sabiendo que el primero ha perdido el doble de terreno que el segundo, y este, el triple de terreno que el tercero?

17 ▼▼▽ En la caja de un supermercado hay 1 140 euros repartidos en billetes de 5, 10, 20 y 50 euros. Sabiendo que:

— Hay el doble de billetes de 5 € que de 10 €.

— De 10 € hay la misma cantidad que de 20 €.

— De 20 € hay seis billetes más que de 50 €.

¿Cuántos billetes de cada clase tiene la caja?

18 ▼▽▽ Se han repartido 500 litros de gasóleo, a partes iguales, en dos barriles.

¿Cuántos litros se han de pasar de uno al otro para que el segundo quede con el triple de cantidad que el primero?

19 ▼▼▽ Un hortelano siembra la mitad de su huerta de pimientos; la tercera parte, de tomates, y el resto, que son 200 m^2, de patatas. ¿Qué superficie tiene la huerta?

SUPERFICIE HUERTA → x
PIMIENTOS → $x/2$
TOMATES → $x/3$
PATATAS → 200 m^2

20 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

Joaquín tiene 14 años; su hermana, 16, y su madre, 42. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre ambos hijos igualen la edad de la madre?

	EDAD HOY	EDAD DENTRO DE x AÑOS
JOAQUÍN	14	$14 + x$
HERMANA	16	$16 + x$
MADRE	42	$42 + x$

Dentro de x años, debe ocurrir que:

$$\boxed{\text{EDAD DE JOAQUÍN}} + \boxed{\text{EDAD DE LA HERMANA}} = \boxed{\text{EDAD DE LA MADRE}}$$

$$(14 + x) + (16 + x) = 42 + x$$

$$2x + 30 = 42 + x \rightarrow x = 12$$

Solución: Deben transcurrir 12 años.

21 ▼▼▽ Un padre tiene 38 años, y su hijo, 11. ¿Cuántos años han de transcurrir para que el padre tenga solo el doble de edad que el hijo?

22 ▼▼▽ Dos ciclistas parten simultáneamente; uno, de A hacia B, a la velocidad de 24 km/h, y el otro, de B hacia A, a 16 km/h. Si la distancia entre A y B es de 30 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse?

TIEMPO HASTA EL ENCUENTRO → x (horas)
DISTANCIA RECORRIDA POR EL PRIMERO → $24x$
DISTANCIA RECORRIDA POR EL SEGUNDO → $16x$

23 ▼▼▽ Un ciclista sale de cierta población, por carretera, a la velocidad de 22 km/h. Hora y media después, sale en su búsqueda un motorista a 55 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?

24 ▼▼▽ Se han pagado 66 € por una prenda que estaba rebajada un 12%. ¿Cuál era el precio sin rebaja?

PRECIO ORIGINAL → x
REBAJA → $\dfrac{12x}{100}$
ECUACIÓN → $x - \dfrac{12x}{100} = 66$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

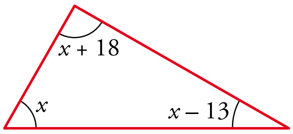
25 ▼▼▽ Laura ha comprado una falda y una blusa por 66 €. Ambas tenían el mismo precio, pero en la falda le han hecho un 20% de rebaja, y en la blusa, solo un 15%. ¿Cuánto costaba cada prenda?

26 ▼▼▽ Para delimitar en una playa una zona rectangular, el doble de larga que de ancha, se han necesitado 84 m de cinta.

¿Cuáles son las dimensiones del sector delimitado?

27 ▼▼▽ La amplitud de uno de los ángulos de un triángulo es 13 grados mayor y 18 grados menor, respectivamente, que las amplitudes de los otros dos ángulos.

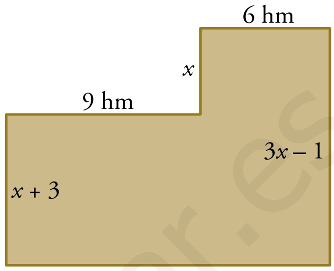
Calcula la medida de cada ángulo.



Analiza y exprésate

28 ▼▼▽ Estudia el problema siguiente y explica cómo se ha construido la ecuación:

Calcula el perímetro de esta finca, sabiendo que tiene una superficie de 129 hectáreas.



Resolución

$15 \cdot (3x - 1) - 9x = 129$

$45x - 15 - 9x = 129$

$36x = 144 \rightarrow x = 4$

Perímetro = 9 + 4 + 6 + 11 + 15 + 7 = 52 hm

Autoevaluación

¿Reconoces si un valor es solución de una ecuación?

1 ¿Cuál de los valores $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$, $x = 9$, $x = -1/2$ es solución de la ecuación $\frac{x^2 - 1}{5} = \sqrt{x} + 1$?

¿Resuelves ecuaciones sencillas, sin denominadores? ¿Y con denominadores?

2 Despeja la incógnita y resuleve la ecuación.

a) $x + 4 = 3$

b) $3 = x - 2$

c) $5 - x = 3$

d) $20 = 5x$

3 Resuelve.

a) $7x - 3 - 2x = 6 + 3x + 1$

b) $1 - 4x - 6 = x - 3 \cdot (2x - 1)$

4 Resuelve.

a) $1 - \frac{x}{5} = x + \frac{2}{5}$

b) $x - \frac{1}{2} = \frac{5x}{8} - \frac{3}{4}$

c) $\frac{2x}{3} - 4\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{15}$

¿Utilizas las ecuaciones como herramientas para resolver problemas?

5 Si la tercera parte de un número le sumas su cuarta parte, obtienes 14. ¿Cuál es el número?

6 Por seis tortas y cuatro bollos, Raquel ha pagado seis euros. Averigua el precio de unas y otros, sabiendo que una torta cuesta el doble que un bollo.

7 Sistemas de ecuaciones

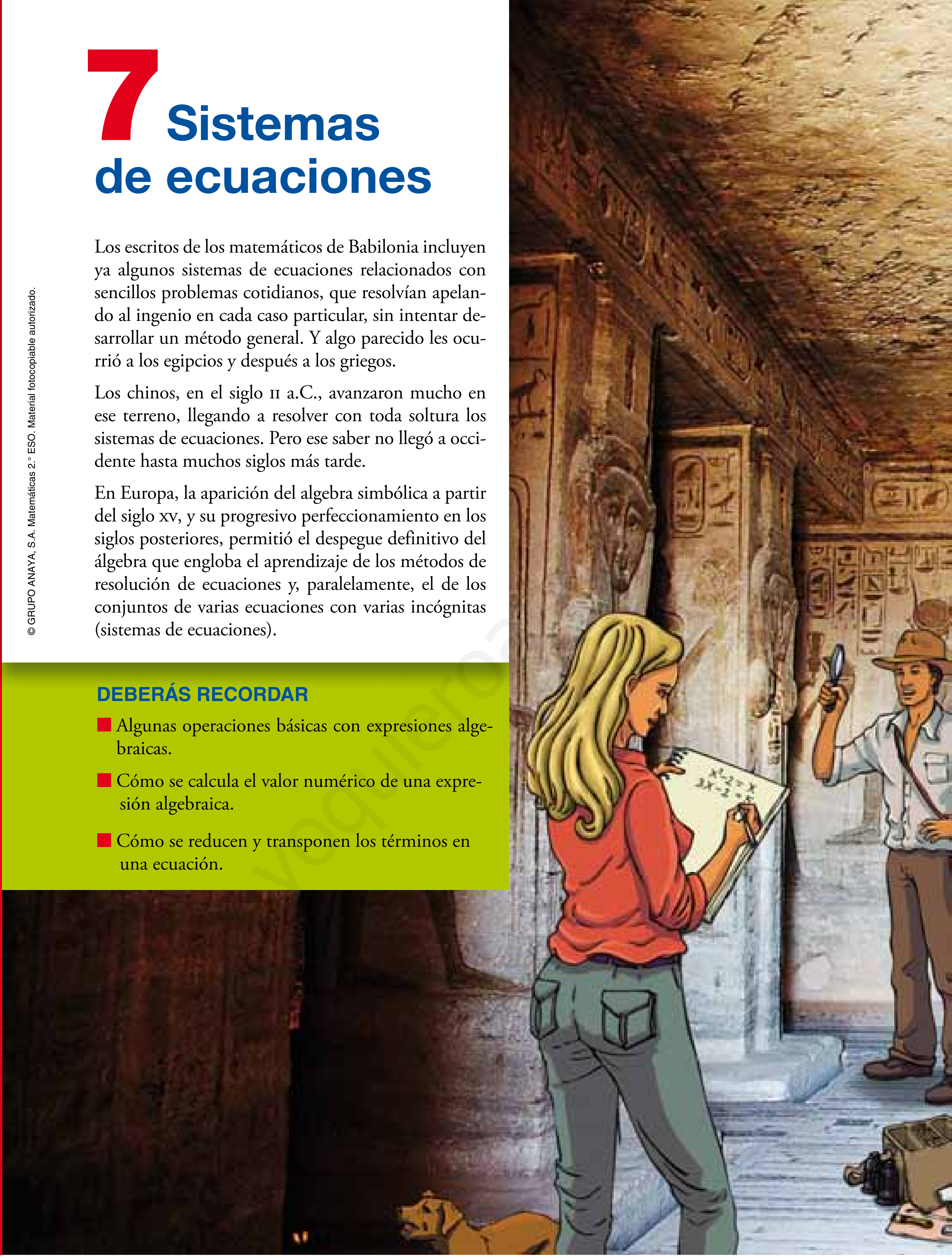
Los escritos de los matemáticos de Babilonia incluyen ya algunos sistemas de ecuaciones relacionados con sencillos problemas cotidianos, que resolvían apelando al ingenio en cada caso particular, sin intentar desarrollar un método general. Y algo parecido les ocurrió a los egipcios y después a los griegos.

Los chinos, en el siglo II a.C., avanzaron mucho en ese terreno, llegando a resolver con toda soltura los sistemas de ecuaciones. Pero ese saber no llegó a occidente hasta muchos siglos más tarde.

En Europa, la aparición del algebra simbólica a partir del siglo XV, y su progresivo perfeccionamiento en los siglos posteriores, permitió el despegue definitivo del álgebra que engloba el aprendizaje de los métodos de resolución de ecuaciones y, paralelamente, el de los conjuntos de varias ecuaciones con varias incógnitas (sistemas de ecuaciones).

DEBERÁS RECORDAR

- Algunas operaciones básicas con expresiones algebraicas.
- Cómo se calcula el valor numérico de una expresión algebraica.
- Cómo se reducen y transponen los términos en una ecuación.



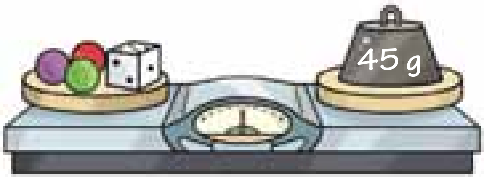
1

Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Una ecuación de primer grado con dos incógnitas expresa la relación existente entre dos valores desconocidos.

▼ EJEMPLO

En la siguiente balanza, no conocemos ni el peso de una pelota (x) ni el del dado (y):



Pero podemos afirmar que:

$$3x + y = 45$$

Observa que el par de valores $x = 10$, $y = 15$ hace cierta la igualdad:

$$3 \cdot 10 + 15 = 45$$

Decimos entonces que ese par de valores es una solución de la ecuación. Sin embargo, la solución no es única. Observa que hay otros pares que también verifican la igualdad:

$$\left.\begin{matrix} x = 5 \\ y = 30 \end{matrix}\right\} \; 3 \cdot 5 + 30 = 45 \qquad \left.\begin{matrix} x = 8 \\ y = 21 \end{matrix}\right\} \; 3 \cdot 8 + 21 = 45$$

Por tanto, si quisiéramos determinar los pesos de una pelota y del dado, necesitaríamos más datos.

En realidad, dando a x un valor cualquiera, se obtiene un valor correspondiente para y; es decir, la ecuación tiene infinitas soluciones.

Forma general

Toda ecuación lineal puede escribirse en la forma

$$ax + by = c$$

donde a, b y c son valores conocidos.

- Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas reciben el nombre de **ecuaciones lineales.**
- Una **solución de una ecuación lineal** es un par de valores que hace cierta la igualdad.
- Una ecuación lineal tiene **infinitas soluciones.**

Actividades

1 Averigua cuáles de los siguientes pares de valores son soluciones de la ecuación $3x - 4y = 8$.

a) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1/4 \end{cases}$

2 Busca tres soluciones diferentes de esta ecuación:

$$2x - y = 5$$

3 Copia y completa en tu cuaderno la tabla, con soluciones de la ecuación $3x + y = 12$.

x	0		3		5	–1		–3
y		9		0			18	

4 Reduce a la forma general las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 5 = y$ b) $y = \dfrac{x+1}{2}$

c) $x - 3 = 2(x + y)$ d) $\dfrac{x-y}{3} = \dfrac{x-1}{5}$

Representación gráfica de una ecuación lineal

Para obtener distintas soluciones de una ecuación lineal, se suele despejar una de las incógnitas y dar valores a la otra.

Los valores se recogen, ordenados, en una tabla.

Tomemos, por ejemplo, la ecuación relativa a la balanza de la página anterior:

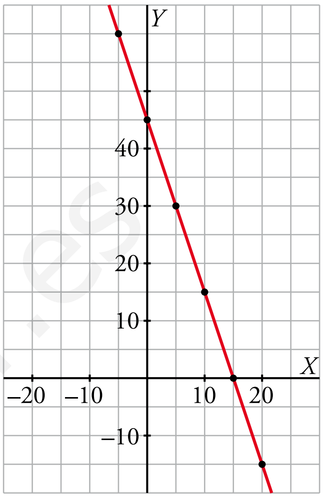
$$3x + y = 45$$

↓ Despejamos y.

$$y = 45 - 3x$$

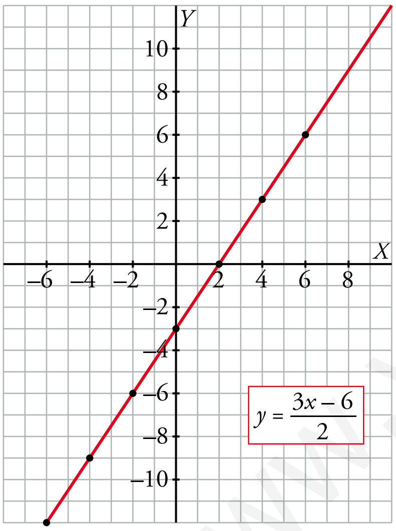
↓ Dando distintos valores a x, obtenemos los correspondientes de y.

x	0	5	10	15	20	–5	…
y	45	30	15	0	–15	60	…



Al representar estos valores en el plano, quedan alineados en una recta.

- Cada ecuación lineal tiene una recta asociada en el plano.
- Cada punto de esa recta representa una de las infinitas soluciones de la ecuación lineal.



Ejercicio resuelto

Representar gráficamente la ecuación $3x - 2y - 6 = 0$.

- Despejamos y para construir la tabla de valores:

$$3x - 2y - 6 = 0$$

$$3x - 6 = 2y$$

$$y = \frac{3x - 6}{2}$$

x	–6	–4	–2	0	2	4	6	…
y	–12	–9	–6	–3	0	3	6	…

- A la izquierda puedes ver la representación gráfica.

Actividades

5 Completa la tabla para cada ecuación y representa la recta correspondiente (hazlo en tu cuaderno).

a) $x - y = 0 \rightarrow y = x$

b) $x - 2y = 2 \rightarrow y = \frac{x - 2}{2}$

x	–6	–4	–2	0	2	4	6	…
y								…

6 Representa gráficamente.

a) $2x - y = 1$

b) $2x + y = 1$

c) $y = \frac{x}{2} + 3$

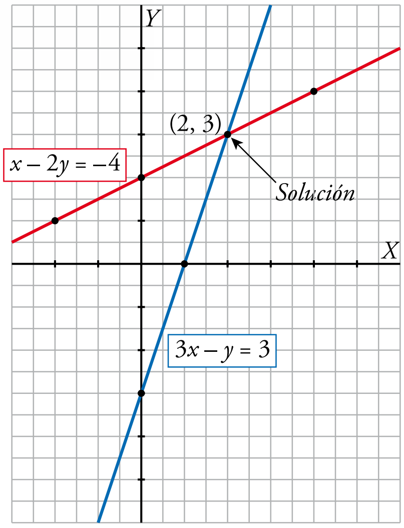
d) $y = \frac{x}{2} - 1$

e) $x + 3y = 3$

f) $2x - 3y - 3 = 0$

2 Sistemas de ecuaciones lineales

- Dos ecuaciones lineales forman un **sistema:** $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
- La **solución del sistema** es la solución común a ambas ecuaciones.



SOLUCIÓN DEL SISTEMA: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

EJEMPLO

Las dos ecuaciones siguientes forman un sistema: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$

Observa las tablas de soluciones de cada ecuación:

$3x - y = 3 \rightarrow y = 3x - 3$

x	–1	0	1	2	3	…
y	–6	–3	0	3	6	…

$x - 2y = -4 \rightarrow y = \dfrac{x + 4}{2}$

x	–2	0	2	4	6	…
y	1	2	3	4	5	…

La solución del sistema es el par de valores $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ que satisface ambas ecuaciones.

Observa, en la representación gráfica, que las dos rectas pasan por el punto (2, 3); es decir, se cortan en dicho punto.

La *solución de un sistema* de ecuaciones lineales coincide con el *punto de corte* de las rectas que representan a las ecuaciones.

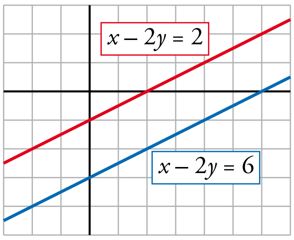
Casos especiales

SISTEMAS SIN SOLUCIÓN

Las ecuaciones son incompatibles.

Las rectas son paralelas.

Por ejemplo: $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

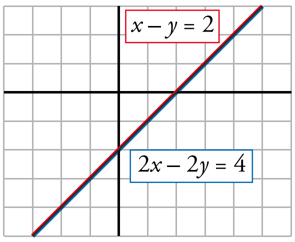


SISTEMAS CON INFINITAS SOLUCIONES

Las ecuaciones son equivalentes.

Las rectas se superponen.

Por ejemplo: $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$



Actividades

1 Representa gráficamente y escribe la solución.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2 + x/2 \\ y = 4 - x/2 \end{cases}$

2 Representa gráficamente.

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y - 6 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$

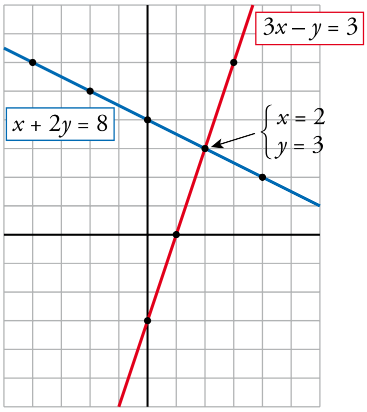
3 Método algebraico para la resolución de sistemas lineales

Vamos a aprender una técnica para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Consiste en obtener, a partir de las dos ecuaciones, otra *ecuación con una sola incógnita*. Resuelta esta, es fácil obtener el valor de la otra incógnita.

Método de sustitución

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y la expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación.

Ejercicio resuelto



Resolver por sustitución este sistema: $\begin{cases} \mathbf{3x - \ \ y = 3} \\ \mathbf{x + 2y = 8} \end{cases}$

a) Despejamos, por ejemplo, x en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 3x - \ \ y = 3 \\ \ \ x + 2y = 8 \end{cases} \rightarrow x = \boxed{8 - 2y}$$

b) Sustituimos la expresión obtenida en la primera ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 3 \\ x = 8 - 2y \end{array}\right\} \rightarrow 3(\underbrace{8 - 2y}) - y = 3$$

c) Ya tenemos una ecuación con una sola incógnita. La resolvemos:

$$3(8 - 2y) - y = 3 \rightarrow 24 - 6y - y = 3 \rightarrow 7y = 21 \rightarrow y = \frac{21}{7} \rightarrow \boxed{y = 3}$$

d) Sustituimos el valor $y = 3$ en la expresión obtenida al despejar x, y calculamos:

$$x = 8 - 2y \rightarrow x = 8 - 2 \cdot 3 \rightarrow \boxed{x = 2}$$

Solución del sistema → $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Actividades

1 Resuelve por sustitución y comprueba que obtienes las soluciones que se adjuntan abajo.

a) $\begin{cases} y = x \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 3$, $y = 3$ b) $x = 4$, $y = 2$ c) $x = 9$, $y = 10$ d) $x = 2$, $y = –1$

2 Resuelve por sustitución y comprueba las soluciones que se ofrecen.

a) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - \ \ y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + \ \ y = 1 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - \ \ y = 3 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 3$, $y = 4$ b) $x = 3$, $y = 5$ c) $x = 5$, $y = –2$ d) $x = –1$, $y = –4$

4

Resolución de problemas con ayuda de los sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones suponen una potente herramienta para resolver problemas.

Estudia con detenimiento los ejemplos que tienes a continuación, pues representan **problemas tipo** que te servirán de modelo para resolver otros similares.

Problemas resueltos

1. Pepa tiene 5 años más que su hermano Enrique, y entre los dos suman 21 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

a) Identifica los elementos del problema y codifícalos algebraicamente:

EDAD DE PEPA → x

EDAD DE ENRIQUE → y

b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre esos elementos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{PEPA TIENE 5 AÑOS MÁS QUE ENRIQUE.} \to x = y + 5\\ \text{LA SUMA DE LAS EDADES ES 21.} \to x + y = 21\end{array}\right\}$$

c) Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}x = y + 5\\ x + y = 21\end{array}\right\} \to \underbrace{(y + 5)}_{x} + y = 21 \to 2y + 5 = 21 \to$$

$$\to 2y = 21 - 5 \to 2y = 16 \to \boxed{y = 8}$$

$$x = y + 5 \to x = 8 + 5 \to \boxed{x = 13}$$

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala:

Solución: Pepa tiene 13 años, y su hermano, 8 años.

$$\textit{Comprobación:} \left\{\begin{array}{l}13 = 8 + 5\\ 13 + 8 = 21\end{array}\right.$$

Actividades

1 En una clase hay 29 alumnos y alumnas, pero el número de chicas supera en tres al de chicos.

¿Cuántos alumnos y cuántas alumnas hay en la clase?

CHICOS → x CHICAS → y

$$\left.\begin{array}{l}\text{CHICOS + CHICAS} = 29\\ \text{CHICAS = CHICOS} + 3\end{array}\right\}$$

2 La suma de dos números es 12, y el triple del menor supera en una unidad al doble del mayor.

¿Cuáles son esos números?

N.° MENOR → x N.° MAYOR → y

$$\left.\begin{array}{l}\text{MENOR + MAYOR} = 12\\ \text{TRIPLE DEL MENOR = DOBLE DEL MAYOR} + 1\end{array}\right\}$$

2. La semana pasada, dos entradas para el cine y una caja de palomitas nos costaron 10 €.

Hoy, por cuatro entradas y tres cajas de palomitas hemos pagado 22 €.

¿Cuánto cuesta una entrada? ¿Y una caja de palomitas?

a) Identifica y codifica algebraicamente los elementos del problema:

PRECIO DE UNA ENTRADA → x

PRECIO DE UNA CAJA DE PALOMITAS → y

b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre los elementos:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{COSTE DE 2 ENTRADAS}\\ \text{Y 1 CAJA DE PALOMITAS}\end{array}\right\} < \begin{array}{l}2x+y\\ 10\text{ €}\end{array} \to 2x+y=10\\[1em] \left.\begin{array}{l}\text{COSTE DE 4 ENTRADAS}\\ \text{Y 3 CAJAS DE PALOMITAS}\end{array}\right\} < \begin{array}{l}4x+3y\\ 22\text{ €}\end{array} \to 4x+3y=22\end{array}\right\}$$

c) Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}2x+\ \ y=10\\ 4x+3y=22\end{array}\right\} \xrightarrow{\qquad} y=10-2x$$

$$4x+3(10-2x)=22 \to 4x+30-6x=22 \to 2x=8 \to \boxed{x=4}$$

$$y=10-2\cdot 4 \to \boxed{y=2}$$

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala:

Solución: Una entrada cuesta 4 €, y una caja de palomitas, 2 €.

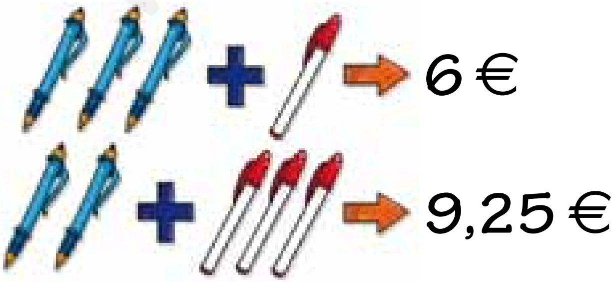
Comprobación: $\begin{cases}2\cdot 4+1\cdot 2=8+2=10\\ 4\cdot 4+3\cdot 2=16+6=22\end{cases}$

Actividades

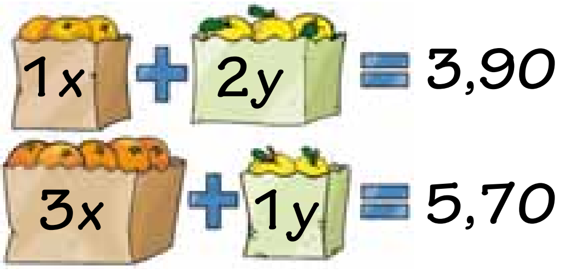
3 He comprado tres bolígrafos y un rotulador por 6 €.

Mi amiga Rosa ha pagado 9,25 € por dos bolígrafos y tres rotuladores.

¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Y un rotulador?



4 En la frutería, un cliente ha pagado 3,90 € por un kilo de naranjas y dos de manzanas. Otro cliente ha pedido tres kilos de naranjas y uno de manzanas, y ha pagado 5,70 €. ¿Cuánto cuesta un kilo de naranjas? ¿Y uno de manzanas?



Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

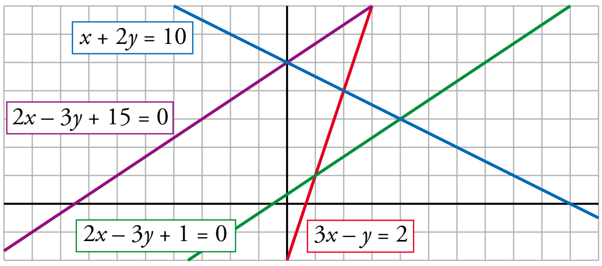
Sistemas de ecuaciones. Resolución gráfica

1 ▼▽▽ Resuelve gráficamente.

a) $\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \ \ x - 2y = 4 \\ 3x - \ \ y = -3 \end{cases}$

2 ▼▽▽ Observa el gráfico y responde.



a) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 2$, $y = 4$.

b) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 0$, $y = 5$.

c) Escribe un sistema sin solución.

Sistemas de ecuaciones. Resolución algebraica

3 ▼▽▽ Resuelve por sustitución despejando la incógnita más adecuada.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - \ \ y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \ \ x - 2y = 7 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \ \ x + 4y = 1 \\ 2x - \ \ y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = -5 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$

Resuelve problemas con sistemas de ecuaciones

4 ▼▽▽ La suma de dos números es 57, y su diferencia, 9.

¿Cuáles son esos números?

5 ▼▽▽ Entre Alejandro y Palmira llevan 15 euros. Si él le diera a ella 1,5 €, ella tendría el doble.

¿Cuánto lleva cada uno?

6 ▼▽▽ Un ciclista sube un puerto y, después, desciende por el mismo camino. Sabiendo que en la subida ha tardado 23 minutos más que en la bajada y que la duración total del paseo ha sido de 87 minutos, ¿cuánto ha tardado en subir? ¿Y en bajar?

7 ▼▽▽ En cierta cafetería, por dos cafés y un refresco nos cobraron el otro día 2,70 €. Hoy hemos tomado un café y tres refrescos y nos han cobrado 4,10 €.

¿Cuánto cuesta un café? ¿Y un refresco?

8 ▼▽▽ Un puesto ambulante vende los melones y las sandías a un tanto fijo la unidad. Andrea se lleva 5 melones y 2 sandías, que le cuestan 13 €. Julián paga 12 € por 3 melones y cuatro sandías.

¿Cuánto cuesta un melón? ¿Y una sandía?

9 ▼▼▽ Una tienda de artículos para el hogar pone a la venta 100 juegos de cama a 70 € el juego. Cuando lleva vendida una buena parte, los rebaja a 50 €, continuando la venta hasta que se agotan. La recaudación total ha sido de 6 600 €.

¿Cuántos juegos ha vendido sin rebajar y cuántos rebajados?

10 ▼▼▽ En el zoo, entre búfalos y avestruces hay 12 cabezas y 34 patas. ¿Cuántos búfalos son? ¿Y avestruces?

☞ *Búfalos* → x
Avestruces → y
Patas de búfalo → $4x$
Patas de avestruz → $2y$

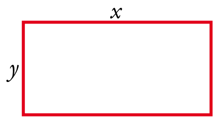
11 ▼▼▽ Cristina tiene el triple de edad que su prima María, pero dentro de diez años solo tendrá el doble. ¿Cuál es la edad de cada una?

☞

	HOY	DENTRO DE 10 AÑOS
CRISTINA	x	$x + 10$
MARÍA	y	$y + 10$

12 ▼▼▽ La base de un rectángulo es 8 cm más larga que la altura, y el perímetro mide 42 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo.

☞



Diferencia entre los lados:
$x - y = 8$
Perímetro: $x + y + x + y = 42$

13 ▼▼▽ Para cercar una parcela rectangular, 25 metros más larga que ancha, se han necesitado 210 metros de alambrada. Calcula las dimensiones de la parcela.

Analiza y describe. Exprésate

14 ▼▼▽ A continuación tienes un problema resuelto de dos formas. Indica sus diferencias e incluye las explicaciones oportunas para aclarar su desarrollo.

Un camión parte de cierta población a 90 km/h. Diez minutos después sale un coche a 110 km/h. Calcula el tiempo que tarda en alcanzarlo y la distancia recorrida desde el punto de partida.

Solución A

	VELOCIDAD	TIEMPO	DISTANCIA
COCHE	110	x	y
CAMIÓN	90	$x + 10/60$	y

$$\left.\begin{array}{l} y = 110x \\ y = 90(x + 1/6) \end{array}\right\} 110x = 90(x + 1/6) \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} \begin{array}{l} x = 3/4 \text{ h} \\ y = 82{,}5 \text{ km} \end{array}$$

Solución: Tarda 45 minutos y recorren 82,5 km.

Solución B

Distancia coche → d
Tiempo coche → distancia/velocidad = $d/100$
Tiempo camión → distancia/velocidad = $d/90$

$$\boxed{\text{TIEMPO CAMIÓN}} = \boxed{\text{T. COCHE} + 1/6 \text{ h}}$$

$$\frac{d}{90} = \frac{d}{110} + \frac{1}{6} \rightarrow d = 82{,}5 \text{ km}$$

$$\text{T. coche} = \frac{d}{110} = \frac{82{,}5}{110} = \frac{3}{4} \text{ h} = 45 \text{ min}$$

Autoevaluación

¿Representas en el plano ecuaciones de primer grado con dos incógnitas?

1 Representa gráficamente las ecuaciones siguientes:

a) $y = 2x - 1$

b) $2x + 3y - 3 = 0$

¿Resuelves gráficamente sistemas de ecuaciones lineales?

2 Resuelve gráficamente este sistema:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

¿Conoces y aplicas métodos algebraicos (sustitución, reducción, igualación) para resolver ecuaciones lineales?

3 Resuelve por el método de sustitución:

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

¿Utilizas los sistemas de ecuaciones como herramientas para resolver problemas?

4 La suma de dos números es 977, y su diferencia, 31. ¿Cuáles son esos números?

5 En la cafetería, ayer pagamos 3 € por dos cafés y una tostada. Sin embargo, hoy nos han cobrado 6,30 € por tres cafés y tres tostadas. ¿Cuánto cuesta un café y cuánto una tostada?

8 Teorema de Pitágoras. Semejanza

Los teoremas de **Pitágoras** y de **Tales** son dos importantísimos resultados geométricos. Sin duda has oído hablar del primero, aunque, acaso, aún no conozcas el segundo. Ambos se estudian en esta unidad.

Tales y Pitágoras fueron dos grandes matemáticos de la Antigüedad (siglo VI a.C.). Impulsaron el pensamiento griego y crearon la matemática deductiva. Sin embargo, es curioso que ninguno de ellos demostró el teorema que lleva su nombre: ambos logros hay que atribuírselos a **Euclides.**

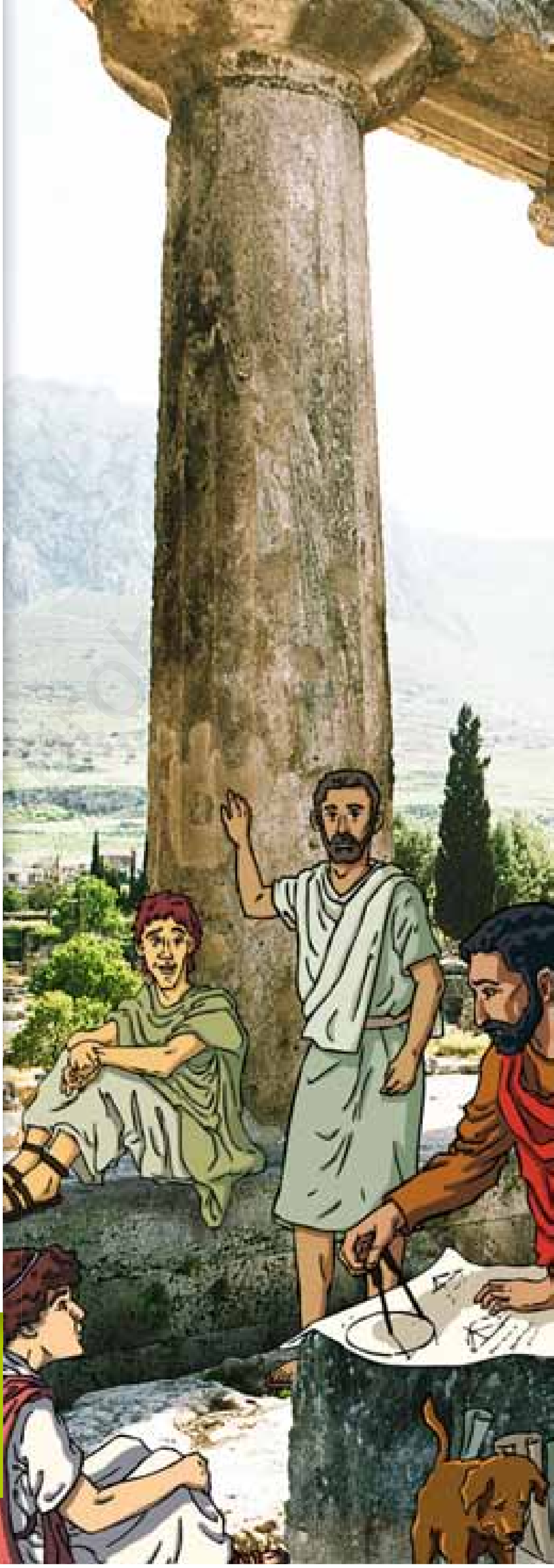
Tales, gran viajero, aprendió las matemáticas egipcias y babilonias. Se cuenta que calculó la altura de una de las pirámides midiendo su sombra y comparándola con la sombra arrojada por un bastón. Se trata de una aplicación del teorema que lleva su nombre. Pero no lo demostró.

Hace más de 3 000 años, tanto egipcios como babilonios manejaban triángulos rectángulos con lados de medidas enteras (3, 4 y 5 los egipcios; 5, 12 y 13 los babilonios) con los cuales construían ángulos rectos. Pitágoras conoció, indudablemente, estos resultados. Su mérito fue que enunció el teorema en forma general, relacionando las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de *cualquier* triángulo rectángulo.

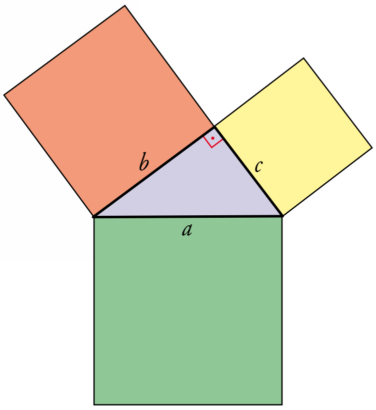
Euclides de Alejandría escribió sus *Elementos* en torno al año 300 a.C. Se trata de un conjunto de 13 libros en los que recopila, amplía y organiza todo el saber matemático de su época, aportándole una sólida estructura lógica. En el libro I demuestra el que ahora llamamos *teorema de Pitágoras*. En el libro VI, el *teorema de Tales*.

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se describen los triángulos.
- Cómo se calculan las áreas de algunas figuras planas.

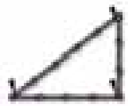


Teorema de Pitágoras. Aplicaciones



Son triángulos rectángulos

¿Recuerdas (página 207) el triángulo de cuerda con el que los egipcios construían ángulos rectos?



Puedes comprobar que, efectivamente, al sumar los cuadrados de los lados menores se obtiene el cuadrado del lado mayor:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Lo mismo ocurre con el triángulo babilonio:

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

En un triángulo rectángulo, los lados menores son los que forman el ángulo recto. Se llaman **catetos.** El lado mayor se llama **hipotenusa.**

b y c son los **catetos.**

a es la **hipotenusa.**

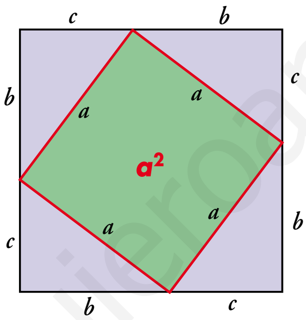
El **teorema de Pitágoras** dice que:

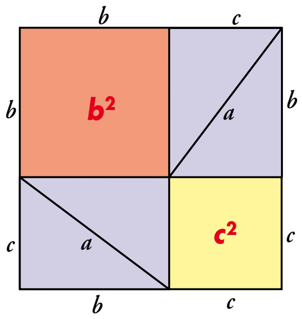
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Es decir, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Y esto es verdad solamente si el **triángulo** es **rectángulo.**

Para ver que es cierto, que siempre que el triángulo es rectángulo ocurre esto, analiza este curioso puzle:





Los dos cuadrados grandes, de lado $b + c$, son iguales. Si a cada uno de ellos le suprimimos cuatro triángulos iguales al triángulo inicial, queda:

a^2 en el primero

$b^2 + c^2$ en el segundo

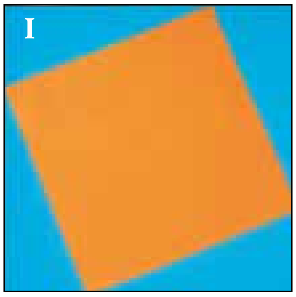
Por tanto, ha de ser $a^2 = b^2 + c^2$.

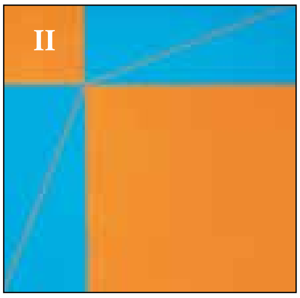
Actividades

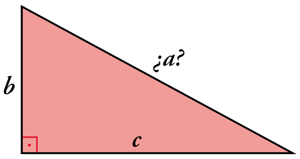
1 Dibuja en un papel aparte un cuadrado como los de arriba, de lado $b + c$. Recórtalo.

Dibuja cuatro triangulitos rectángulos iguales, de lados a, b y c. Recórtalos.

Situando los triangulitos sobre el cuadrado de una forma (I) u otra (II), podrás reproducir las dos composiciones que se dan arriba. Se demuestra, así, el teorema de Pitágoras.







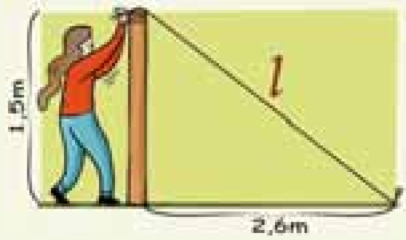
$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$\downarrow$$
$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Conociendo los dos catetos, calcular la hipotenusa

Si de un triángulo rectángulo conocemos los dos catetos, podemos **calcular la hipotenusa:** $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Problema resuelto

Para sostener un poste de 1,5 m de alto, lo sujetamos con una cuerda atada a 2,6 m de la base del poste. ¿Cuál es la longitud, *l*, de la cuerda?

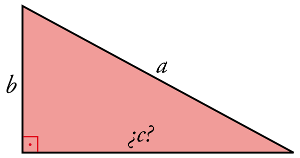


$l^2 = 1,5^2 + 2,6^2 = 9,01$

Si $l^2 = 9,01$, entonces $l = \sqrt{9,01}$.

Con calculadora obtenemos $l = 3,002$ m.

Solución: La cuerda mide 3 m, aproximadamente. Escribimos $l \approx 3$ m.



$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$\downarrow$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

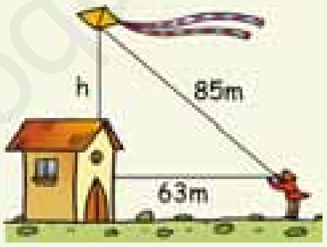
Conociendo la hipotenusa y un cateto, calcular el otro

Si de un triángulo rectángulo conocemos la hipotenusa y un cateto, podemos **calcular el otro cateto:**

$$a^2 = b^2 + c^2 \begin{cases} c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \\ b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} \end{cases}$$

Problema resuelto

La cuerda de una cometa mide 85 m, y esta se encuentra volando sobre una caseta que está a 63 m de Lucía. ¿A qué altura sobre el suelo está la cometa?



$h^2 + 63^2 = 85^2$

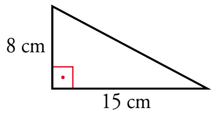
$h^2 = 85^2 - 63^2 = 7\,225 - 3\,969 = 3\,256$

$h = \sqrt{3\,256} \approx 57$ m

Solución: La altura es aproximadamente 57 m más la altura de la mano de Lucía.

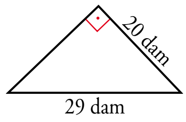
Actividades

2



Halla la longitud de la hipotenusa.

3



Halla la longitud del cateto desconocido.

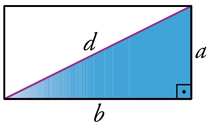
4 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 33 m y 27 m. Halla la longitud de la hipotenusa aproximando hasta los decímetros.

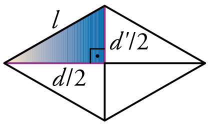
5 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 24 dm, y un cateto, 19 dm. Halla la longitud del otro cateto aproximando hasta los centímetros.

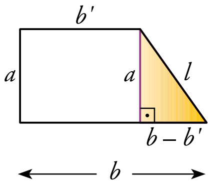
2 Más aplicaciones del teorema de Pitágoras

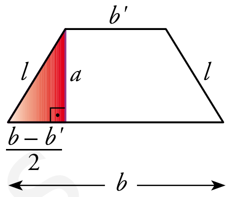
Hay multitud de figuras planas en las que aparecen triángulos rectángulos. Esto permite relacionar algunos de sus elementos mediante el teorema de Pitágoras.

Veamos algunos triángulos rectángulos detectados en cuadriláteros:





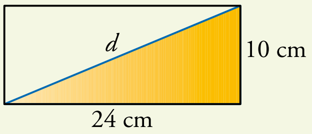




Ejercicios resueltos

1. **Las dimensiones de un rectángulo son *a* = 10 cm, *b* = 24 cm. Calcular la longitud de la diagonal.**

1.

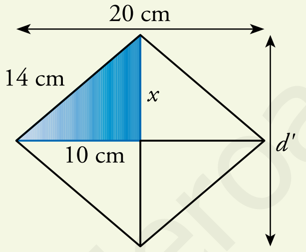


$d = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26$

La diagonal mide 26 cm.

2. **El lado de un rombo mide 14 cm, y una de sus diagonales, 20 cm. Hallar la longitud de la otra diagonal.**

2.



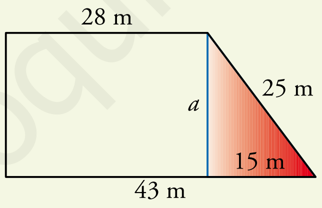
$x = \sqrt{14^2 - 10^2} = \sqrt{96} = 9{,}797958\ldots$

$x \approx 9{,}8$ cm $\rightarrow$ $d' = 2 \cdot 9{,}8 = 19{,}6$ cm

La otra diagonal mide 19,6 cm.

3. **Hallar la altura de un trapecio rectángulo cuyas bases miden 43 m y 28 m, y el lado oblicuo, 25 m.**

3.



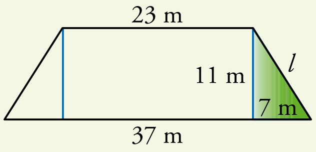
$43 - 28 = 15$

$a = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$ m

La altura mide 20 m.

4. **Las bases de un trapecio isósceles miden 23 m y 37 m. Su altura es de 11 m. Hallar su perímetro.**

4.



$37 - 23 = 14;\ \ 14 : 2 = 7$

$l = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170} = 13{,}038\ldots \approx 13$ m

Perímetro = 23 + 37 + 13 + 13 = 86 m

El perímetro es 86 m.

Actividades

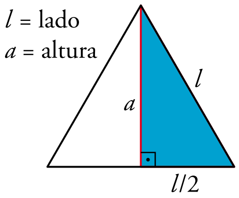
1 La diagonal de un rectángulo mide 65 cm, y uno de sus lados, 33 cm. Halla su perímetro.

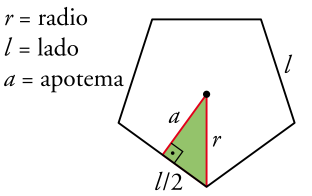
2 Las diagonales de un rombo miden 130 cm y 144 cm. Calcula su perímetro.

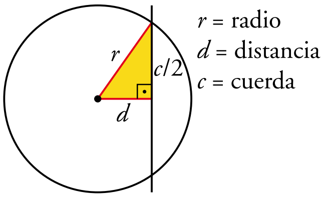
3 En un trapecio rectángulo, las bases miden 45 cm y 30 cm, y su altura, 8 cm. Halla su perímetro.

4 Halla la altura de un trapecio isósceles cuyas bases miden 8,3 m y 10,7 m, y el otro lado, 3,7 m.

Triángulos rectángulos en los polígonos regulares y en la circunferencia



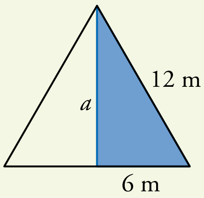




Ejercicios resueltos

1. Hallar la altura de un triángulo equilátero de 12 m de lado.

1.

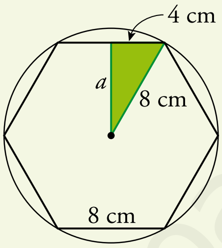


$a = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10{,}4$ m

La altura mide 10,4 m.

2. Hallar la apotema de un hexágono regular de 8 cm de lado.

2.



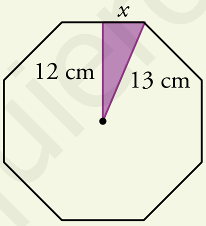
En un hexágono regular, el radio es igual al lado: $r = l$

$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6{,}9$ cm

La apotema mide 6,9 cm.

3. En un octógono regular, el radio mide 13 cm, y la apotema, 12 cm. Hallar su perímetro.

3.



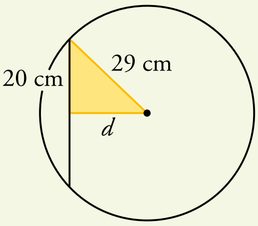
$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ cm

Lado $l = 2 \cdot 5 = 10$ cm; $10 \cdot 8 = 80$ cm

El perímetro es 80 cm.

4. En una circunferencia de radio 29 cm trazamos una cuerda de 40 cm. ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda?

4.



$c = 40$ cm $\rightarrow$ $c/2 = 20$ cm

$d = \sqrt{29^2 - 20^2} = \sqrt{441} = 21$ cm

La distancia es de 21 cm.

Actividades

5 Halla la altura de un triángulo equilátero cuyo perímetro mide 45 m.

6 Calcula la apotema de un hexágono regular de 37 cm de lado.

7 Calcula el perímetro de un pentágono regular de radio 21 cm y apotema 17 cm.

8 Una recta pasa a 28 cm de una circunferencia de 53 cm de radio. Halla la longitud de la cuerda que determina en ella.

3 Figuras semejantes

La maqueta de la moto de la izquierda es igual que la moto auténtica en forma, color, … en todo salvo en el tamaño. La moto y su maqueta son *figuras semejantes.* La *razón de semejanza* es 1:10, porque 1 dm de la maqueta corresponde a 10 dm = 1 m de la moto real.

Por lo mismo, el plano del circuito es semejante al circuito real. Y la fotografía es semejante al conjunto que formaban el director del equipo, el piloto y la moto en ese momento.

Veamos cuál es la razón de semejanza en el plano:

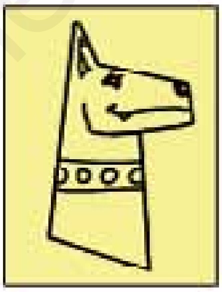
$$1 \text{ cm} \rightarrow 20 \text{ m} = 200 \text{ dm} = 2\,000 \text{ cm}$$

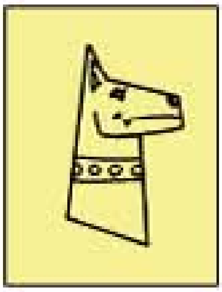
La razón de semejanza es 1:2 000. Se lee 1 es a 2 000, y quiere decir que cualquier longitud medida sobre el plano se multiplica por 2 000 para obtener la longitud real.

Dos **figuras** distintas son **semejantes** cuando solo difieren en su tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir, cada longitud en una de ellas se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo, llamado **razón de semejanza.**

EJEMPLO

Con una fotocopiadora hemos reducido el dibujo de la izquierda obteniendo el de la derecha. ¿Cuál ha sido la reducción?





Si dividimos cualquier segmento de la segunda figura por el correspondiente de la primera, el cociente es 0,8.

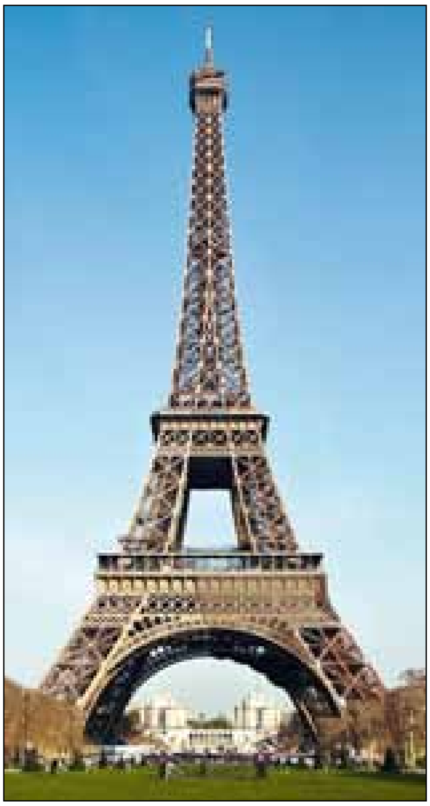
Por ejemplo: los de la izquierda $\rightarrow \dfrac{16}{20} = 0{,}8$

los de arriba $\rightarrow \dfrac{6{,}4}{8} = 0{,}8$

los de la derecha $\rightarrow \dfrac{10}{12{,}5} = 0{,}8$

Esta (0,8) es la razón de semejanza que transforma la primera figura en la segunda.

Las fotocopiadoras expresan la razón de semejanza en tantos por ciento. En este caso, es del 75%.



Problema resuelto

En las cercanías de la Torre Eiffel hay puestos en los que se venden reproducciones suyas de tamaños diversos. Nos fijamos en dos de ellas: una mide 30 cm de altura, y la otra, 12 cm de altura.

a) ¿Son figuras semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?

b) El lado de la base de la mayor es 10 cm. ¿Cuál es el lado de la base de la pequeña?

c) Si el lado de la base de la auténtica Torre Eiffel es 108 m, ¿cuál es su altura?

a) Sí, son semejantes porque tienen la misma forma; es decir, solo difieren en el tamaño. La razón de semejanza es $\frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

b) $\frac{10}{30} = \frac{l}{12} \rightarrow l = \frac{12 \cdot 10}{30} = 4$ cm

Se podría haber obtenido así: $l = \frac{10}{2{,}5} = 4$ cm

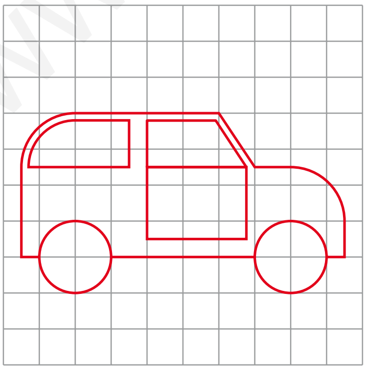
c) La relación $\frac{30}{10}$ entre la altura y el lado de la base se cumple también en la torre real.

$$\frac{\text{altura}}{108 \text{ m}} = \frac{30}{10} \rightarrow \text{altura} = \frac{30 \cdot 108}{10} = 324 \text{ m}$$

La altura real de la Torre Eiffel es 324 m.

Actividades

1 Toma una hoja de papel cuadriculado y dibuja sobre ella una ampliación del dibujo de abajo al doble de tamaño.



2 Dibuja un triángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm. Construye otro triángulo cuyos lados sean el doble de largos.

Observa que ambos triángulos tienen la misma forma, son semejantes. ¿Cuál es la razón de semejanza?

3 Las dimensiones de un rectángulo son 2 cm y 3 cm. ¿Cuáles de los siguientes rectángulos son semejantes a él?:

a) 36 cm y 54 cm
b) 12 cm y 20 cm
c)10 cm y 15 cm
d) 45 cm y 70 cm

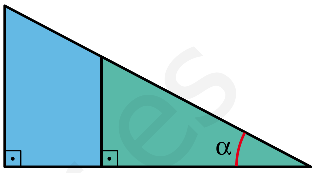
Di, también, cuál es la razón de semejanza en aquellos casos en los que los rectángulos sean semejantes.

4 Semejanza entre triángulos rectángulos. Aplicaciones

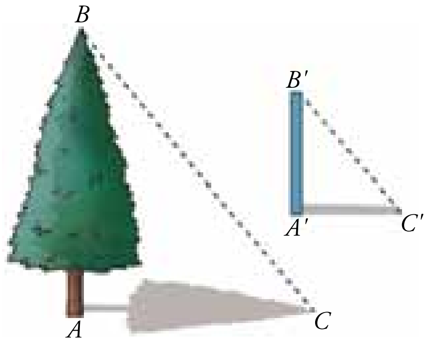
Los triángulos rectángulos son especialmente importantes. Veamos algunos criterios por los cuales se comprueba muy fácilmente si dos triángulos rectángulos son o no semejantes.

Dos triángulos rectángulos que tengan un ángulo agudo igual son semejantes.

Pues, en tal caso, se pueden poner en posición de Tales.



Cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra



Para calcular la altura de un árbol, $\overline{AB}$, procedemos del siguiente modo:

- Clavamos en el suelo, verticalmente, una estaca $A'B'$.
- Medimos la longitud de la estaca, $\overline{A'B'}$, y de las sombras, $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, del árbol y de la estaca, respectivamente, proyectadas por el Sol en el mismo instante.

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes porque tienen dos ángulos respectivamente iguales:

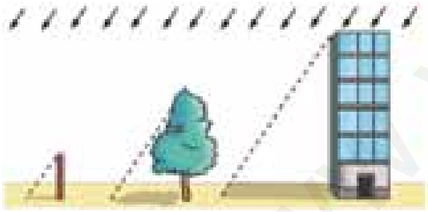
$\hat{A} = \hat{A}'$ porque los dos son rectos.

$\hat{C} = \hat{C}'$ porque *los rayos del Sol inciden sobre el árbol y la estaca con el mismo ángulo*.

Puesto que los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Como conocemos $\overline{AC}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{A'C'}$, podemos calcular la altura del árbol, $\overline{AB}$.



Los rayos del Sol llegan a la Tierra paralelos unos a otros.

Problema resuelto

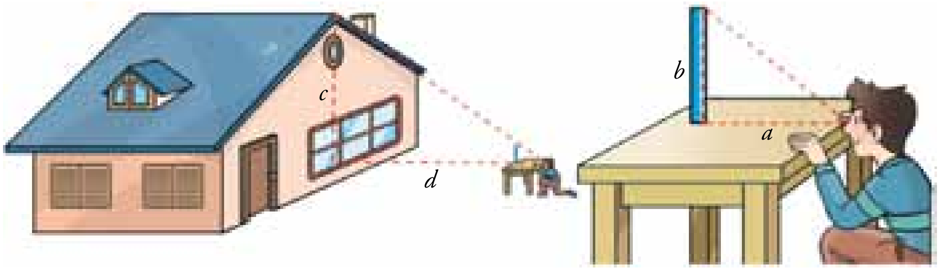
En la descripción anterior, calcular la altura del árbol sabiendo que:

longitud de la estaca = 1,6 m; sombra del árbol = 3,5 m; sombra de la estaca = 0,7 m.

$$\frac{\overline{AB}}{1,6} = \frac{3,5}{0,7} \rightarrow \overline{AB} = \frac{1,6 \cdot 3,5}{0,7} = 8$$

Solución: El árbol mide 8 m.

Cálculo de la altura de un objeto vertical sin recurrir a la sombra



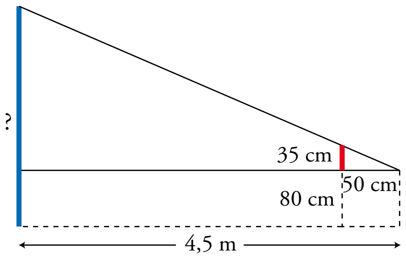
El chico lanza una visual desde el borde de la mesa al punto más alto de la casa. Estando en esa posición, mueve la regla, situándola de modo que su extremo quede alineado con la visual (la mesa debe estar en posición horizontal, y la regla, en vertical).

Los triángulos rectángulos, de catetos a, b y d, c, son semejantes, pues se encuentran en posición de Tales. Por tanto:

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$$

Conociendo a, b y d, se calcula c. La altura de la casa es igual a c más la altura de la mesa.

Problema resuelto



En la descripción anterior, calcular la altura de la casa sabiendo que:

longitud de la regla, b = 35 cm; distancia del borde de la mesa al pie de la regla, a = 50 cm; distancia del borde de la mesa a la casa, d = 4,5 m; altura de la mesa = 80 cm.

Expresamos todas las distancias en metros.

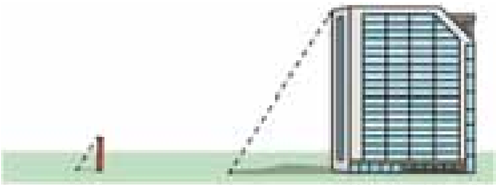
$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{c}{4,5} = \frac{0,35}{0,5} \rightarrow c = \frac{4,5 \cdot 0,35}{0,5} = 3,15 \text{ m}$$

$$3,15 + 0,8 = 3,95 \text{ m}$$

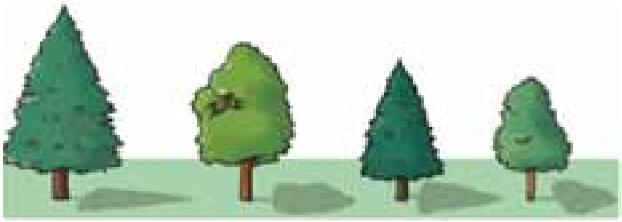
Solución: La altura de la casa es de 3,95 m.

Actividades

1 Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 49 m en el momento en que una estaca de 2 m arroja una sombra de 1,25 m.



2 Las sombras de estos árboles medían, a las cinco de la tarde, 12 m, 8 m, 6 m y 4 m, respectivamente. El árbol pequeño mide 2,5 m. ¿Cuánto miden los demás?

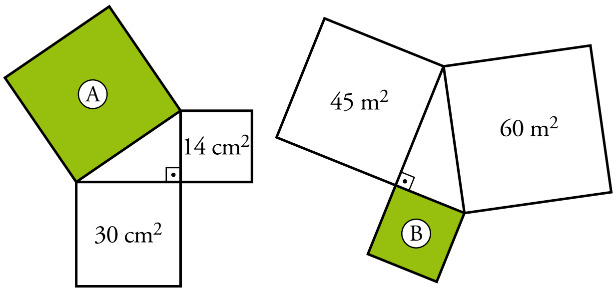


Ejercicios y problemas

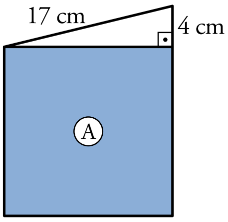
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

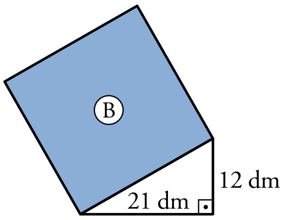
Teorema de Pitágoras

1 ▼▽▽ Calcula el área del cuadrado verde en cada uno de los siguientes casos:

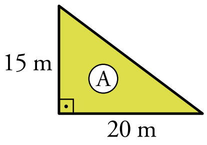


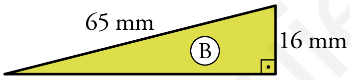
2 ▼▽▽ ¿Cuál es el área de los siguientes cuadrados?:



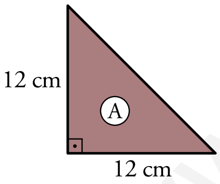


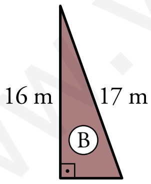
3 ▼▽▽ Calcula el lado desconocido en cada triángulo:

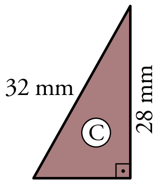




4 ▼▽▽ Calcula el lado desconocido en cada triángulo aproximando hasta las décimas:







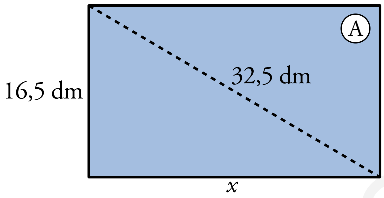
5 ▼▽▽ Calcula el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 5,8 cm, y uno de los lados, 4 cm.

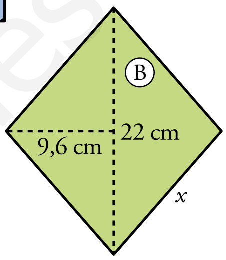
6 ▼▽▽ Los lados paralelos de un trapecio rectángulo miden 13 dm y 19 dm, y el lado oblicuo mide 10 dm. Calcula la altura.

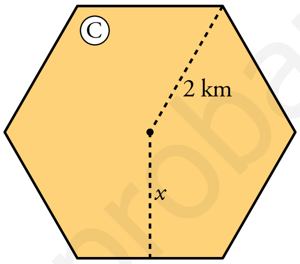
7 ▼▼▽ Sabiendo que las bases de un trapecio isósceles miden 2,4 cm y 5,6 cm, y que la altura es de 3 cm, calcula la longitud del lado oblicuo.

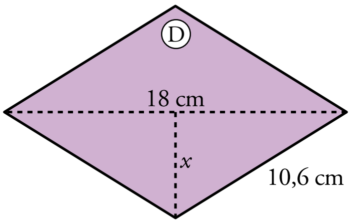
8 ▼▼▽ Calcula la medida del lado de un rombo cuyas diagonales miden 1 dm y 2,4 dm.

9 ▼▼▽ Halla la longitud *x* en cada una de las siguientes figuras:









10 ▼▼▽ Halla el área y el perímetro de las figuras descritas en…

a) …el ejercicio 10

b) …el ejercicio 11

c) …el ejercicio 12, A

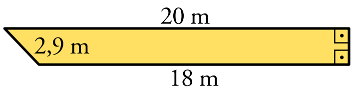
d) …el ejercicio 12, B

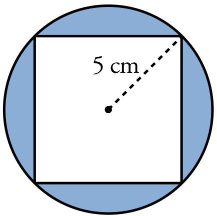
e) …el ejercicio 12, C

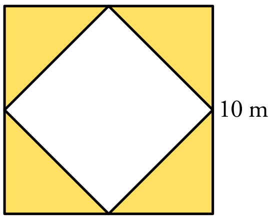
f) …el ejercicio 12, D

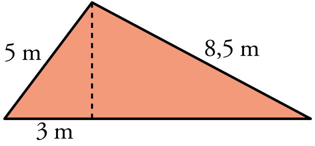
☞ *Ten en cuenta los resultados obtenidos en los ejercicios correspondientes.*

11 ▼▼▽ Halla el área y el perímetro de las figuras siguientes (parte coloreada):



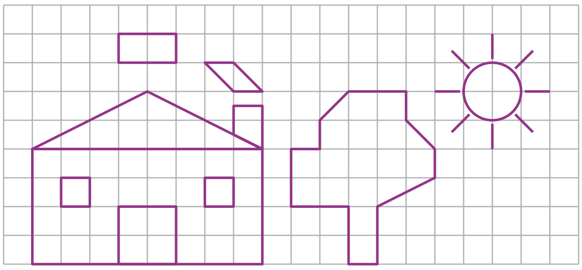






Semejanza

12 ▼▽▽ Sobre una hoja de papel cuadriculado, realiza una copia del siguiente dibujo, pero al doble de su tamaño.



13 ▼▽▽ La altura de la puerta de la casa mide 3 m. ¿Cuál es la altura de la casa? ¿Y la del árbol más alto?

14 ▼▽▽ Un rectángulo tiene unas dimensiones de 10 cm por 15 cm. El lado menor de otro rectángulo semejante a él mide 12 cm. Halla:

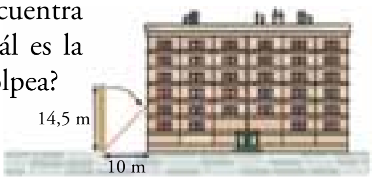
a) La razón de semejanza para pasar del primer al segundo rectángulo.

b) El lado mayor del segundo.

c) Las áreas de ambos rectángulos.

Resuelve problemas

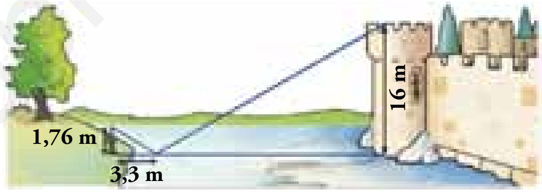
15 ▼▽▽ Se cae un poste de 14,5 m de alto sobre un edificio que se encuentra a 10 m de él. ¿Cuál es la altura a la que le golpea?



16 ▼▽▽ En la orilla del río Sena (París) hay una réplica a escala 1:4 de la Estatua de la Libertad que mide de 11,5 m de altura. Halla la altura de la estatua de Nueva York.

En Cenicero, un pueblo riojano, hay una Estatua de la Libertad de 1,2 m. ¿Cuál sería la escala de esta con respecto a la de Nueva York?

17 ▼▼▽ ¿Cuál es la distancia entre el chico y la base de la torre (el chico ve la torre reflejada en el agua)?



Autoevaluación

¿Utilizas la semejanza para calcular longitudes desconocidas?

1 Un modelo de coche tiene una longitud de 4,20 m. Una maqueta suya mide 16,8 cm.

¿A qué escala está hecha?

2 Los lados de un triángulo miden 6 cm, 8 cm y 13 cm. Otro triángulo semejante a él tiene un lado mediano de 12 cm.

Halla las longitudes de sus otros dos lados.

3 Un avión quiere viajar, en línea recta, entre Las Palmas de Gran Canaria y Palma de Mallorca. En un plano a escala 1:9 000 000, la distancia que medimos es de 26 cm.

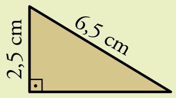
¿Cuántos kilómetros recorrerá el avión?

4 La regla mide 20 cm y está a 38 cm del borde de la mesa más cercano a la chica. Halla la altura de la caseta sabiendo que el tablero de la mesa está a 75 cm de altura y que la chica está a 7,6 m de la casa.

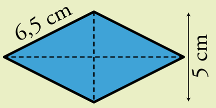
¿Dominas el teorema de Pitágoras y lo aplicas cuando conviene?

5 Halla el área de estos polígonos:

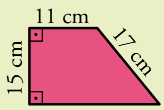
a)



b)



c)



9 Cuerpos geométricos

Los cuerpos geométricos más sencillos (prismas, pirámides, cilindros, conos, troncos, esferas) eran conocidos y manejados por las antiguas civilizaciones. Para el cálculo de áreas y volúmenes, los egipcios poseían procedimientos a los que, probablemente, llegaron de forma experimental. Unos producían resultados exactos y otros aproximados, aunque ellos no distinguían entre unos y otros y les daban a todos la misma validez. Dichos procedimientos eran descripciones de los pasos que había que dar para obtener la magnitud buscada: "la medida de la parte superior se multiplica por sí misma, se divide por cuatro y se suma…". Actualmente pondríamos una fórmula para resumir el proceso.

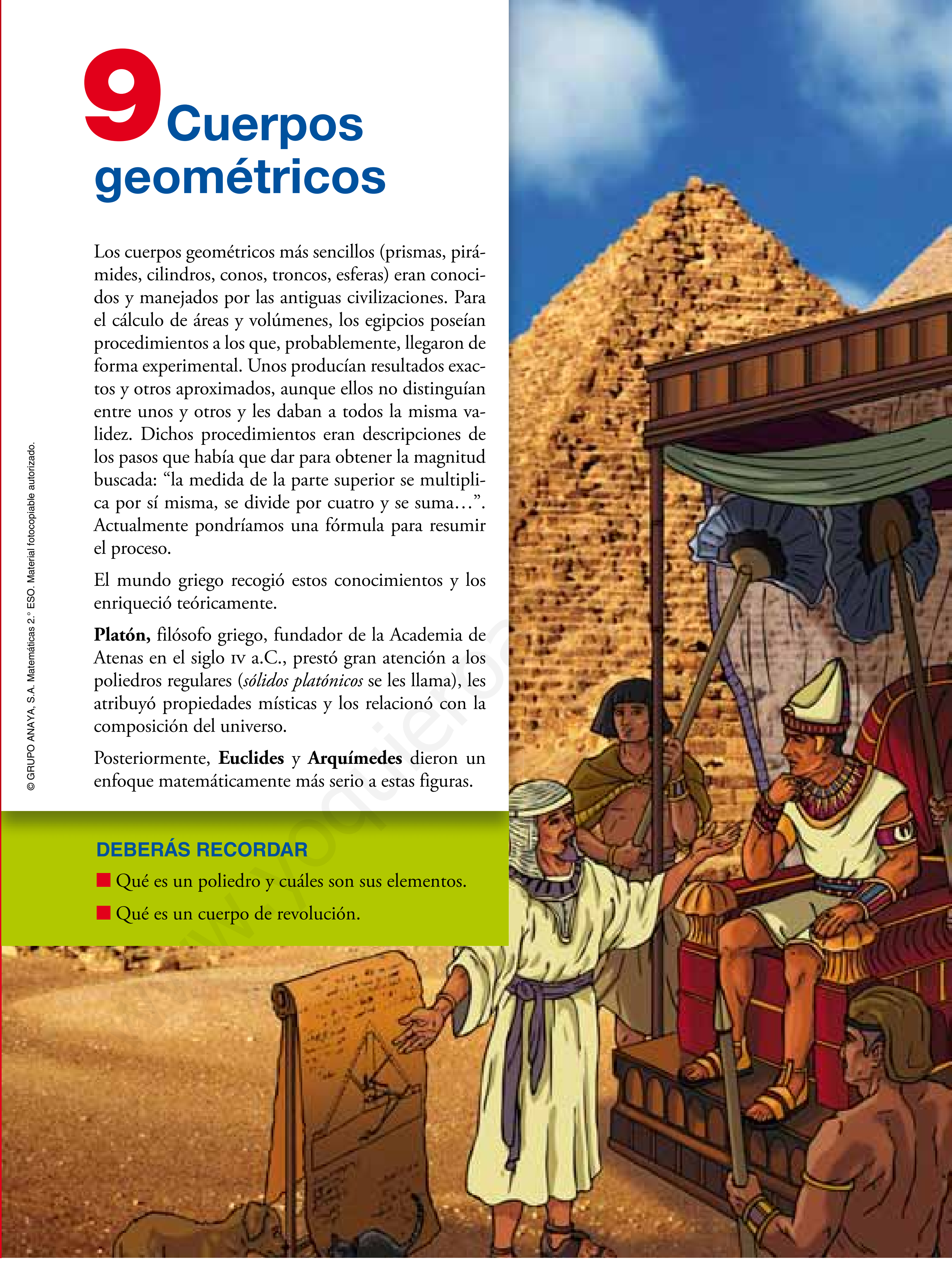
El mundo griego recogió estos conocimientos y los enriqueció teóricamente.

Platón, filósofo griego, fundador de la Academia de Atenas en el siglo IV a.C., prestó gran atención a los poliedros regulares (*sólidos platónicos* se les llama), les atribuyó propiedades místicas y los relacionó con la composición del universo.

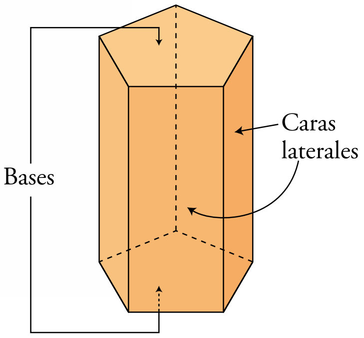
Posteriormente, **Euclides** y **Arquímedes** dieron un enfoque matemáticamente más serio a estas figuras.

DEBERÁS RECORDAR

- Qué es un poliedro y cuáles son sus elementos.
- Qué es un cuerpo de revolución.

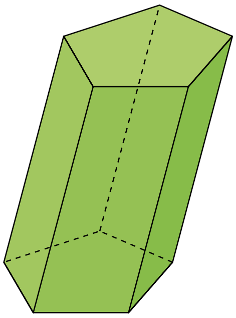


1 Prismas



PRISMA RECTO

- Un **prisma** es un poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos (llamados **bases**) y varios paralelogramos (llamados **caras laterales**).
- La **altura** del prisma es la distancia entre las bases.
- Si todas las caras laterales son rectángulos, serán perpendiculares a las bases, y entonces se llama **prisma recto.**
- Si las caras laterales no son perpendiculares a las bases, se llama **prisma oblicuo.**

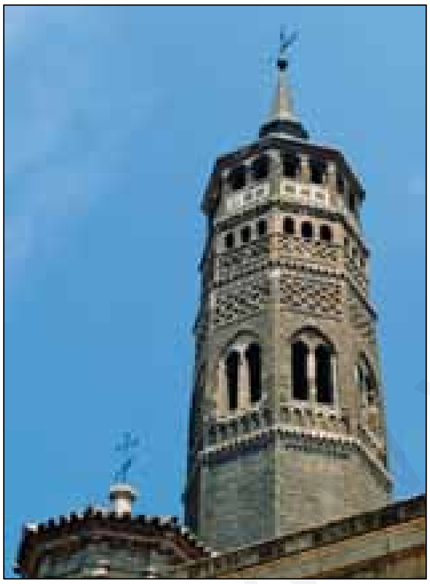


PRISMA OBLICUO

- Las aristas laterales de un prisma son segmentos iguales y paralelos entre sí. En los prismas rectos son perpendiculares a las bases y coinciden con la altura.

Etimología

Prisma. Viene del griego. Significa *lo que ha sido serrado*, porque las caras laterales del prisma están como serradas.



Las formas prismáticas se presentan con mucha frecuencia.

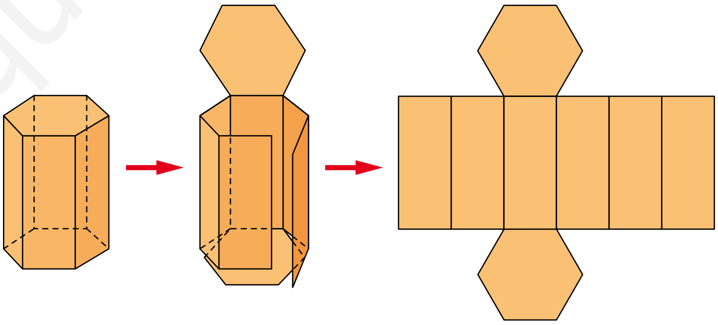
Clasificación según el polígono de las bases

Dependiendo de que las bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc., el **prisma** se llama **triangular, cuadrangular, pentagonal,** etc.

Los prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares se llaman **prismas regulares.**

Desarrollo de un prisma recto

Si cortamos un prisma recto a lo largo de algunas de sus aristas, lo abrimos y ponemos las caras sobre un plano, se obtiene lo siguiente:



El desarrollo lateral de un prisma recto es un rectángulo. La longitud de su base es el perímetro de la base del prisma, y su altura, la altura del prisma.

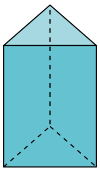
Actividades

1 Di qué tipo de prisma es cada uno de los siguientes.

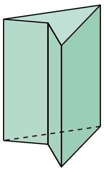
Indica cuáles son regulares.

Dibuja el desarrollo del primero de ellos.

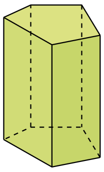
a)



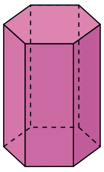
b)



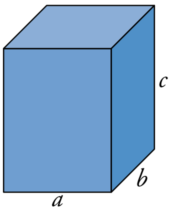
c)



d)



Ortoedro



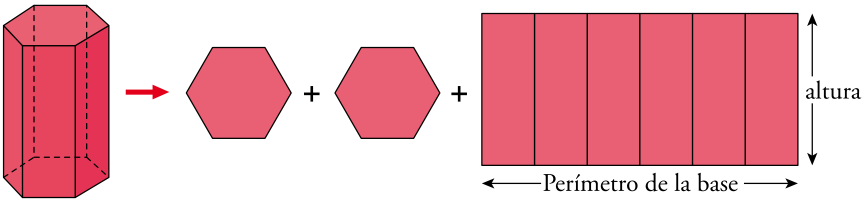
Un prisma recto cuya base es un rectángulo se llama **ortoedro.**

El área total de un ortoedro de dimensiones a, b y c es:

$$A_{TOTAL} = 2(ab + bc + ac)$$

Superficie de un prisma

El desarrollo del prisma permite ver con toda claridad cuál es su área:

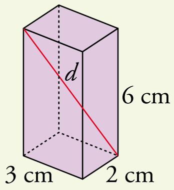


ÁREA LATERAL = perímetro de la base · altura

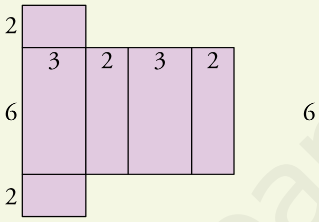
ÁREA TOTAL = ÁREA LATERAL + 2 · ÁREA DE LA BASE

Ejercicios resueltos

1. Hallar el área total de este ortoedro:



1.

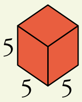


$A_{TOTAL} = 2(6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 72 \text{ cm}^2$

2. Hallar el área total de un cubo de 5 dm de arista.

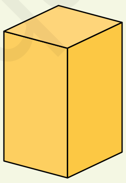
2. Cada cara tiene un área de $A = 5^2 = 25 \text{ dm}^2$.

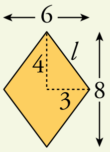
El área total es: $A_{TOTAL} = 6 \cdot 25 = 150 \text{ dm}^2$

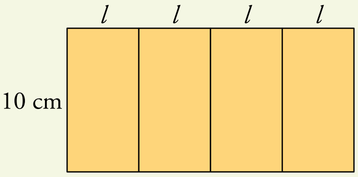


3. Las bases de un prisma recto son rombos cuyas diagonales miden 8 cm y 6 cm. La altura del prisma es 10 cm. Hallar su área total.

3.







Lado de la base: $l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$

$$\left.\begin{aligned} A_{BASE} &= 8 \cdot 6/2 = 24 \text{ cm}^2 \\ A_{LAT} &= (4 \cdot 5) \cdot 10 = 200 \text{ cm}^2 \end{aligned}\right\} A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 200 + 2 \cdot 24 = 248 \text{ cm}^2$$

Actividades

2 Las dimensiones de un ortoedro son 4 cm, 3 cm y 12 cm. Halla el área total.

3 Halla el área total de un cubo de 10 cm de arista.

4 La altura de un prisma recto es de 20 cm. Sus bases son trapecios rectángulos con las siguientes características: las bases del trapecio miden 11 cm y 16 cm, y la altura, 12 cm. Halla el área total del prisma.

2 Pirámides

Etimología

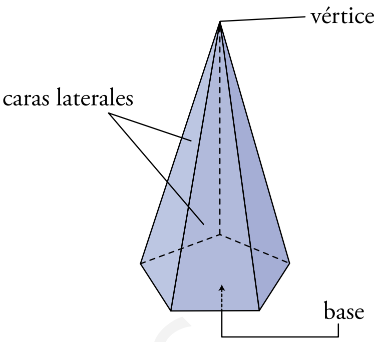
Pirámide. Viene del griego *pyros, fuego,* por ser piramidal la forma de la llama. Y también por tener esta forma las piras (cosas apiladas para ser quemadas).

Nota histórica

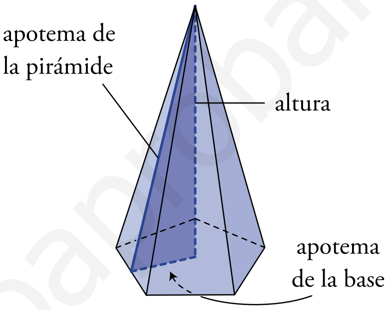
Las pirámides de Egipto fueron construidas como sepulcros de los faraones hace varios miles de años.

Son regulares y cuadrangulares. La mayor de ellas, la de Keops, tiene 146 m de altura y el lado de su base mide 230 m.

- Una **pirámide** es un poliedro que tiene por **base** un polígono cualquiera, y por **caras laterales,** triángulos con un vértice común, que se llama **vértice** de la pirámide.
- La **altura** de la pirámide es la distancia del vértice al plano de la base.
- Una **pirámide** es **regular** cuando la base es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de ese polígono.



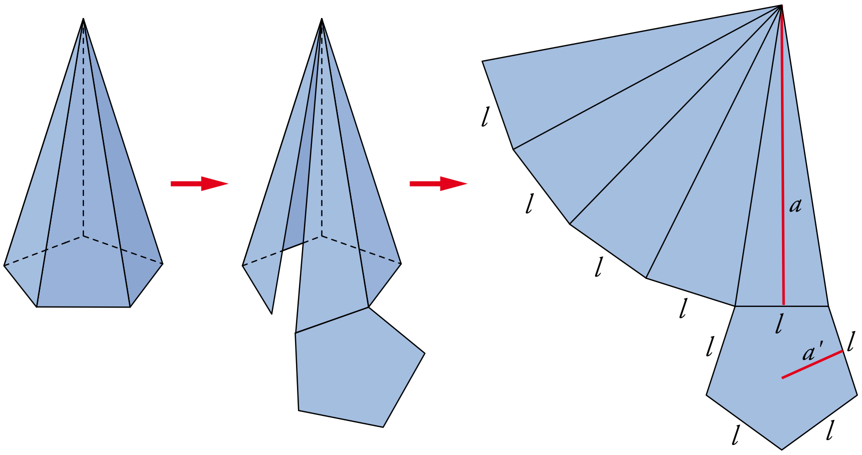
- En una pirámide regular, todas las aristas laterales son iguales y las caras laterales son triángulos isósceles iguales. Las alturas de los triángulos se llaman **apotemas** de la pirámide.



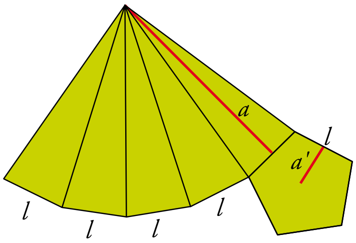
- La **apotema** de una pirámide regular es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura de la pirámide y la apotema del polígono de la base.
- Las **pirámides** se llaman **triangulares, cuadrangulares, pentagonales…** según que el polígono de la base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

Desarrollo de una pirámide regular

Si cortamos a lo largo de algunas aristas de una pirámide regular, la abrimos y extendemos su caras sobre el plano, obtenemos lo siguiente:



Superficie de una pirámide regular



El área lateral de una pirámide regular es la suma de las áreas de los n triángulos iguales (n es el número de lados de la base):

$$A_{\text{LAT}} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a}{2}$$

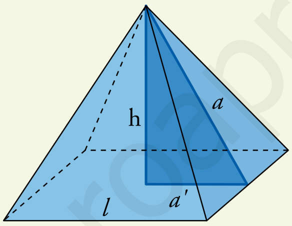
Puesto que la base es un polígono regular, su área es $\frac{\text{perímetro} \cdot a'}{2}$.

Por tanto:

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LAT}} + A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a}{2} + \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a'}{2}$$

Ejercicio resuelto

Hallar la superficie lateral de la pirámide de Keops descrita en la página anterior.



h = 146 m

l = 230 m

a' = 230 : 2 = 115 m

Empecemos por calcular la apotema a:

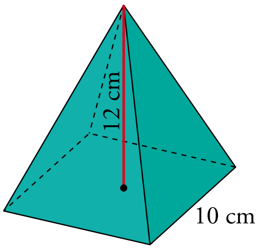
$$a = \sqrt{\text{h}^2 + (a')^2} = \sqrt{146^2 + 115^2} = \sqrt{34\,541} = 186 \text{ m}$$

$$A_{\text{LAT}} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a}{2} = \frac{(4 \cdot 230) \cdot 186}{2} = 85\,560 \text{ m}^2$$

Solución: La superficie lateral de la pirámide de Keops es de 85 560 m^2.

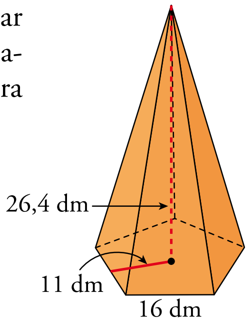
Actividades

1 Halla el área total de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 10 cm de lado y cuya altura es de 12 cm.



2 La base de una pirámide regular es un pentágono de 16 dm de lado y 11 dm de apotema. La altura de la pirámide es de 26,4 dm.

Halla su área total.



3

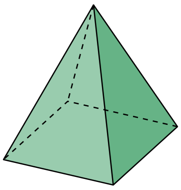
Poliedros regulares

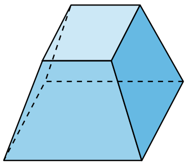
Etimología

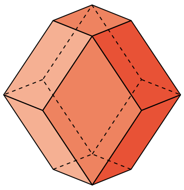
Poliedro. En griego, *poli* = muchos y *edro* = cara.

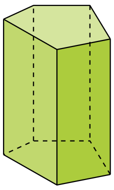
Icosaedro. En griego, *eikós* = veinte.

Los prismas y las pirámides, así como otros cuerpos geométricos limitados por caras poligonales se llaman, como ya sabes, **poliedros.**









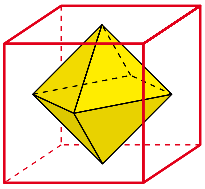
El área total de un poliedro es la suma de las áreas de los polígonos que lo forman.

Algunos poliedros con ciertas características se llaman **regulares.**

Un **poliedro** se llama **regular** cuando cumple estas dos condiciones:

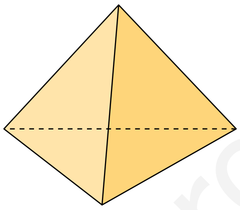
- Sus caras son polígonos regulares idénticos.
- En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.

¡Qué curioso!

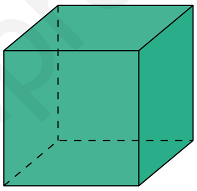


Si unimos los puntos medios de las caras de un cubo se obtiene un octaedro y si hacemos lo mismo con el icosaedro se obtiene un dodecaedro.

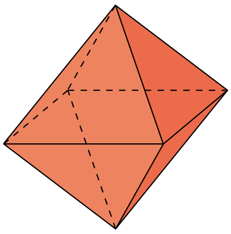
Sólo hay cinco poliedros regulares:



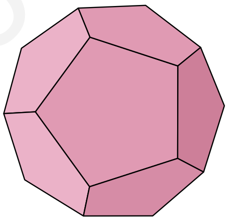
TETRAEDRO
(Cuatro caras triángulos)



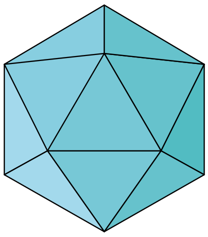
CUBO
(Seis caras cuadrados)



OCTAEDRO
(Ocho caras triángulos)



DODECAEDRO
(Doce caras pentágonos)



ICOSAEDRO
(Veinte caras triángulos)

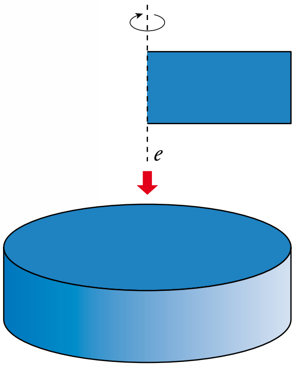
Actividades

1 Cuenta el número de caras (C), de vértices (V) y de aristas (A) de cada uno de estos cinco poliedros. Comprueba que en todos ellos se cumple:

$$C + V - A = 2$$

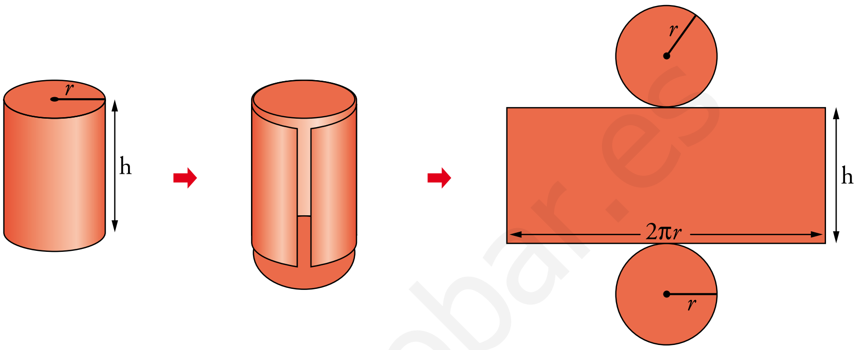
Comprueba que también se cumple esta relación en los demás poliedros que has manejado.

4 Cilindros



- Haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados, se genera un **cilindro recto.** Es, pues, un cuerpo de revolución.
- Las **bases** de un cilindro recto son círculos. La distancia entre las bases se llama **altura.**

Desarrollo y superficie de un cilindro recto



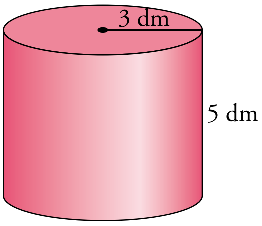
Etimología

Cilindro. Del griego *kulindo,* que significa *enrollado*, pues el cilindro tiene forma de rollo o cosa enrollada.

Se aprecia que la pared lateral del cilindro es un rectángulo cuya base es igual al perímetro del círculo, $2\pi r$, y cuya altura, h, es la del cilindro. Por tanto:

ÁREA LATERAL = $2\pi r \cdot h$

ÁREA TOTAL = ÁREA LATERAL + ÁREA DE LAS DOS BASES = $2\pi r h + 2\pi r^2$



Ejercicio resuelto

Hallar el área lateral y el área total del cilindro del margen.

$A_{LAT} = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi = 94{,}2 \text{ dm}^2$

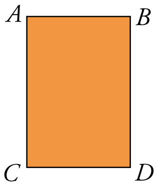
$A_{TOTAL} = 94{,}2 + 2\pi \cdot 3^2 = 94{,}2 + 56{,}52 = 150{,}72 \text{ dm}^2$

Actividades

1 Dibuja en tu cuaderno los cilindros que se generan al hacer girar este rectángulo:

a) Alrededor de *CD.*

b) Alrededor de *BD.*

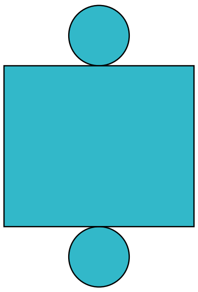


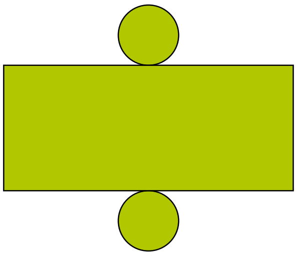
2 ¿Qué cantidad de chapa se necesita para construir un depósito cilíndrico cerrado de 0,6 m de radio de la base y 1,8 m de altura?

3 Se han de impermeabilizar el suelo y las paredes interiores de un aljibe cilíndrico abierto por arriba. El radio de su base mide 4 m, y la altura, 5 m. Si cuesta 18 € impermeabilizar 1 m^2, ¿cuál es el coste de toda la obra?

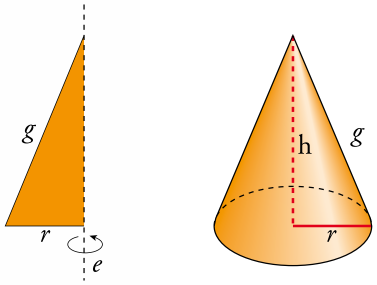
4 Dibuja el desarrollo de un cilindro recto cuya base tiene 2 cm de radio y cuya altura es de 8 cm.

5 Toma algunas medidas y decide cuál de los siguientes desarrollos corresponde a un cilindro.





5 Conos

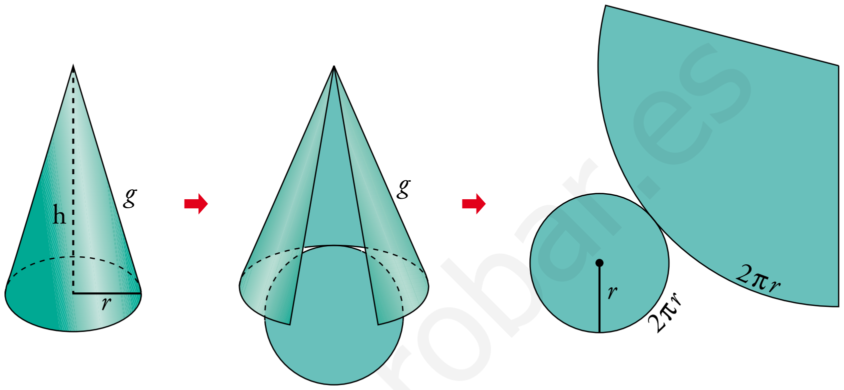


h, r y g cumplen la relación:

$$\boxed{g^2 = h^2 + r^2}$$

- Haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos, se obtiene un **cono recto.** Es, pues, un cuerpo de revolución.
- La **altura** es la distancia del vértice a la base. El segmento g (hipotenusa del triángulo rectángulo) recibe el nombre de **generatriz.**

Desarrollo y superficie de un cono recto



ÁREA LATERAL = $\pi r g$

ÁREA TOTAL = ÁREA LATERAL + ÁREA DE LA BASE = $\pi r g + \pi r^2$

Ejercicios resueltos

1. Hallar el área total de un cono en el que $r = 6$ cm y $g = 10$ cm.	**1.** $A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 6 \cdot 10 + \pi \cdot 6^2 = 188{,}5 + 113{,}1 = 301{,}6 \text{ cm}^2$
2. Hallar el área total de un cono en el que $r = 5$ cm y h = 12 cm.	**2.** Hemos de empezar calculando el valor de la generatriz: $g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$ $A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 5 \cdot 13 + \pi \cdot 5^2 = 204{,}2 + 78{,}5 = 282{,}7 \text{ cm}^2$

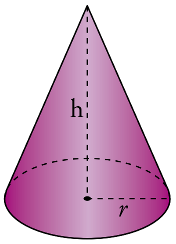
Actividades

1 Calcula el área lateral y el área total de este cono, sabiendo que:

$r = 13$ cm, h = 85 cm

Empieza por calcular g:

$$g = \sqrt{r^2 + h^2}$$

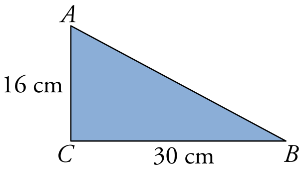


2 Dibuja los conos que se obtienen al hacer girar este triángulo rectángulo:

a) Alrededor de AC.

b) Alrededor de BC.

Halla el área total de ambos.

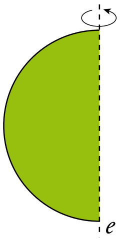


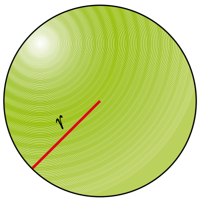
6 Esferas

Etimología

En griego, *sfaira* significa “pelota”.

- La **esfera** se genera haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro. Es, pues, un cuerpo de revolución que queda determinado por su radio, *r*.



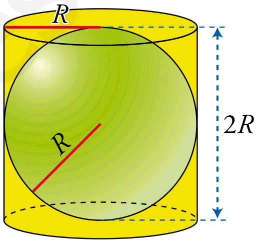


Superficie de la esfera

La superficie de la esfera se llama **superficie esférica.** Solo se puede desarrollar sobre el plano aproximadamente. Sin embargo, sí podemos medir su área mediante una sencilla fórmula.

Imaginemos la esfera envuelta por un cilindro que se ajusta por completo a ella. Pues bien, *el área de la esfera es igual que el área lateral de ese cilindro.*

$$A_{\text{LATERAL DEL CILINDRO}} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$$



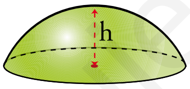
El área de la superficie esférica de radio R es $A = 4\pi R^2$.

Esta relación entre la esfera y el cilindro que la envuelve es muy interesante, porque vale también para porciones de esfera limitadas por planos paralelos.

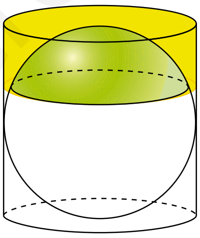
No te olvides

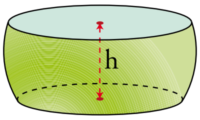
El área de un casquete esférico o de una zona esférico es igual a la porción correspondiente del cilindro tangente a la esfera:

$$2\,\pi R\,h$$

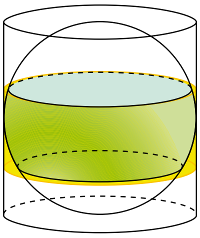


CASQUETE ESFÉRICO





ZONA ESFÉRICA



Ejercicio resuelto

La cúpula de un edificio tiene una altura de 4 m y corresponde a una esfera de 9 m de radio. Calcular su superficie.

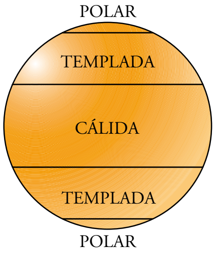
$$S = 2\pi \cdot 9 \cdot 4 \approx 226 \text{ m}^2$$

Actividades

1 En una esfera terrestre escolar de 20 cm de radio están señaladas las zonas climáticas.

Sabemos que cada casquete polar tiene 2 cm de altura, y cada zona templada, 10 cm de altura.

Halla la superficie de cada zona climática.



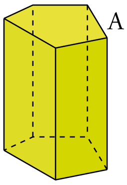
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

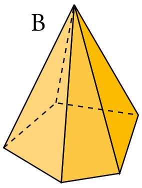
Tipos de cuerpos geométricos

1 ▼▽▽ Di, justificadamente, qué tipo de poliedro es cada uno de los siguientes:

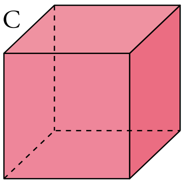
A



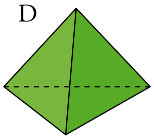
B



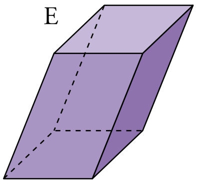
C



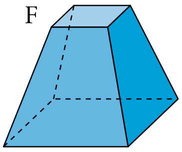
D



E



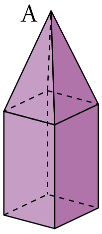
F



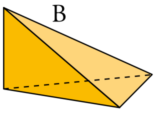
¿Hay entre ellos algún poliedro regular?

2 ▼▽▽ Algunos de los siguientes poliedros no son catalogables entre los que ya conocemos (prisma, pirámide, tronco de pirámide, poliedro regular). Señálalos y cataloga los demás.

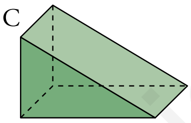
A



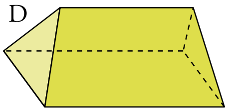
B



C

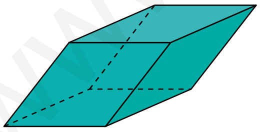


D



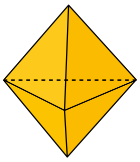
3 ▼▽▽ ¿Una pirámide cuadrangular regular es un poliedro regular? Explica por qué.

4 ▼▼▽ Esta figura está formada por seis rombos idénticos:



Aunque sus caras son iguales y concurren tres de ellas en cada vértice, no es un poliedro regular. Explica por qué.

5 ▼▽▽ Este poliedro está formado por seis triángulos equiláteros iguales. Sin embargo, no es un poliedro regular. Explica por qué.



6 ▼▽▽ ¿Hay algún poliedro regular que sea prisma? ¿Y alguno que sea pirámide?

7 ▼▽▽ ¿Cuáles de las siguientes figuras son cuerpos de revolución? Cataloga las que puedas: cilindro, cono, esfera, tronco…

a)

b)

c)

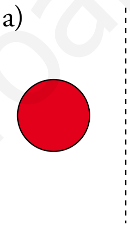
d)

e)

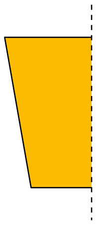
f)

8 ▼▼▽ Al girar cada una de las siguientes figuras planas alrededor del eje que se indica, se genera un cuerpo de revolución. Dibújala en tu cuaderno.

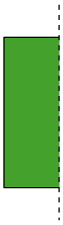
a)



b)



c)

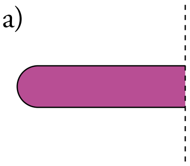


Relaciona cada una de las figuras que has dibujado con una del ejercicio anterior.

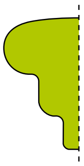
9 ▼▼▽ Dibuja la figura plana y el eje alrededor del que ha de girar para generar la lámpara (apartado a) del ejercicio 7), la taza (b), suprimiéndole el asa, y el bolo (d).

10 ▼▼▽ Dibuja el cuerpo de revolución que se engendra en cada uno de los siguientes casos:

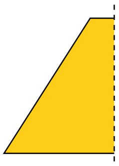
a)



b)



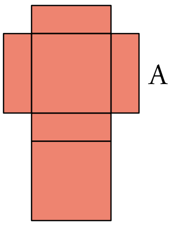
c)

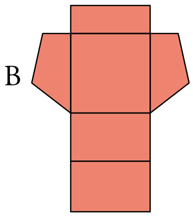


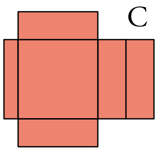
d)

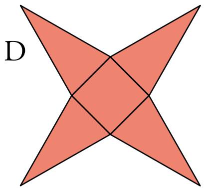
Desarrollo de cuerpos geométricos

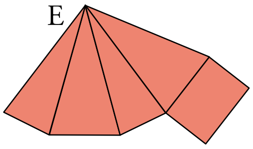
11 ▼▼▽ ¿Con cuáles de los siguientes desarrollos se puede completar un poliedro? Contesta razonadamente.

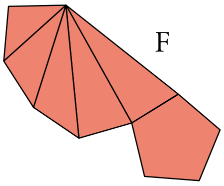




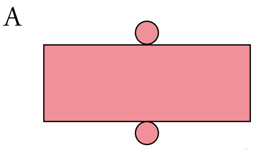


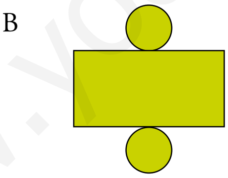


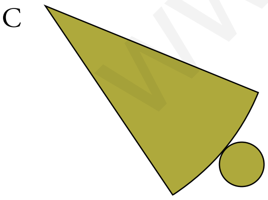


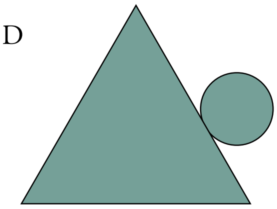


12 ▼▼▽ ¿Cuáles de los siguientes desarrollos corresponden a cuerpos de revolución? Dibújalos.







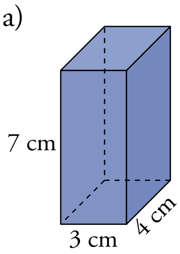


13 ▼▼▽ Dibuja el desarrollo de una pirámide hexagonal regular cuyas aristas laterales midan 6 cm, y las de la base, 4 cm.

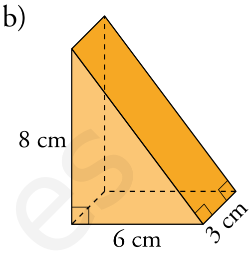
Áreas sencillas

Halla el área total de los siguientes cuerpos geométricos:

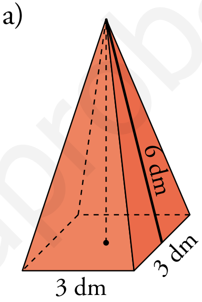
14 ▼▽▽ a)



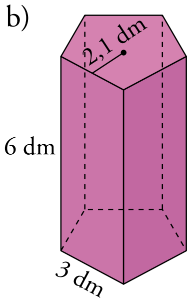
b)



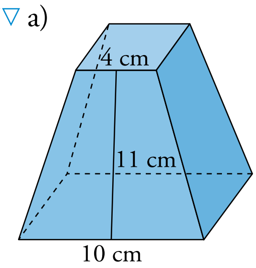
15 ▼▽▽ a)



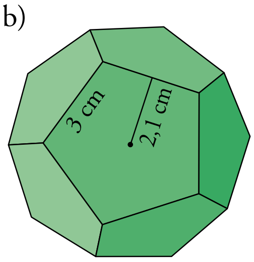
b)



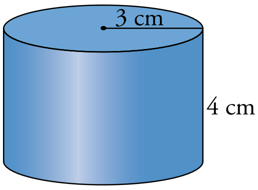
16 ▼▽▽ a)



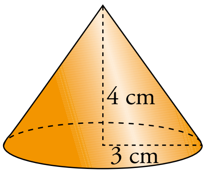
b)



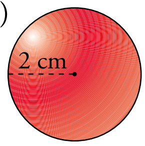
17 ▼▽▽ a)



b)



c)



Ejercicios y problemas

Aplica lo aprendido

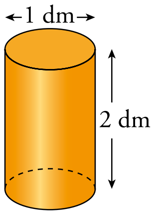
18 ▼▼▽ Halla el área de un tetraedro regular de 10 cm de arista.

19 ▼▼▽ Halla el área total de un prisma recto de 15 cm de altura cuyas bases son rombos de diagonales 16 cm y 12 cm.

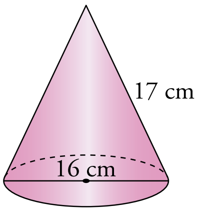
20 ▼▼▽ La base de una pirámide regular es un cuadrado de 6 dm de lado. Su altura es de 4 dm. Halla su área total.

21 ▼▼▽ Halla el área total de estos cuerpos:

a)



b)



22 ▼▼▽ Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 3 cm, 4 cm y 12 cm.

23 ▼▽▽ Halla las superficies del casquete esférico de 2 dm de altura y de una zona esférica de 4 dm de altura contenidos en una esfera de 10 dm de diámetro.

Resuelve problemas

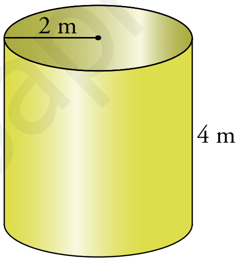
24 ▼▼▽ Queremos forrar un cajón de embalaje de dimensiones 0,6 m × 0,5 m × 0,4 m con una chapa metálica.

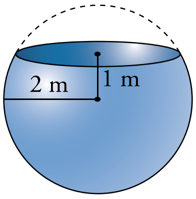
a) ¿Cuánto costará hacerlo si la chapa está a 18 €/m^2?

b) Si queremos cubrir las aristas con un embellecedor de madera de 23 €/m, ¿cuánto dinero hemos de pagar?

25 ▼▼▽ Deseamos construir con alambres el esqueleto de todos los poliedros regulares, de modo que cada una de las aristas mida 1 dm. ¿Qué cantidad de alambre utilizaremos en cada uno de ellos?

26 ▼▼▽ Un pintor ha cobrado 1 000 € por impermeabilizar el interior del depósito sin tapa de la izquierda. ¿Cuánto deberá cobrar por impermeabilizar el depósito de la derecha, también sin tapa?



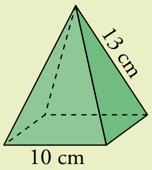


Autoevaluación

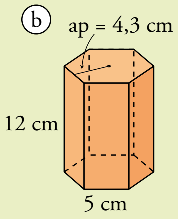
¿Sabes hallar la superficie de algunos poliedros y cuerpos de revolución, obteniendo previamente alguno de sus elementos, si fuera necesario?

Halla el área total de los siguientes cuerpos:

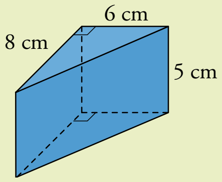
1 ⓐ



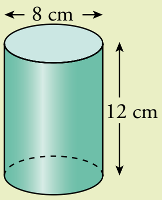
ⓑ



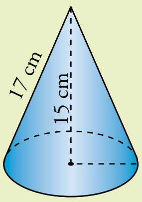
ⓒ



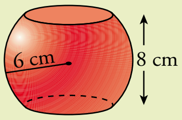
2 ⓐ



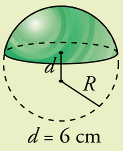
ⓑ



ⓒ



ⓓ



10 Medida del volumen

Euclides vivió en Alejandría hacia el año 300 a.C. Se sabe poco de su vida (incluso dónde y cuándo nació y murió), pero su obra se conserva y se conoce perfectamente. Sistematizó y dotó de estructura lógica el saber matemático de su época en los 13 tomos de que constan sus *Elementos*. En varios de ellos se trabajan los cuerpos geométricos:

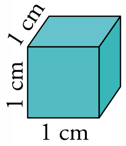
- En el libro XI trata la geometría tridimensional y los sólidos geométricos.
- En el libro XII, las áreas y los volúmenes de los cuerpos geométricos.
- Y en el libro XIII realiza un estudio muy minucioso de los poliedros regulares.

Arquímedes (siglo III a.C.), además de matemático, fue físico y un gran inventor. A diferencia de la línea tradicional del pensamiento griego, especulativo, él se valió de la experimentación para obtener resultados matemáticos que, después, demostraba rigurosamente.

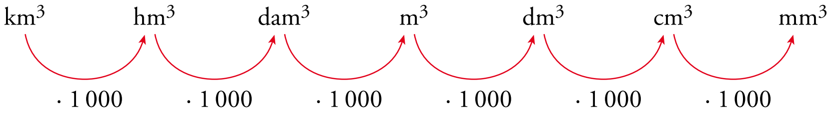
DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se calcula el volumen de un ortoedro.

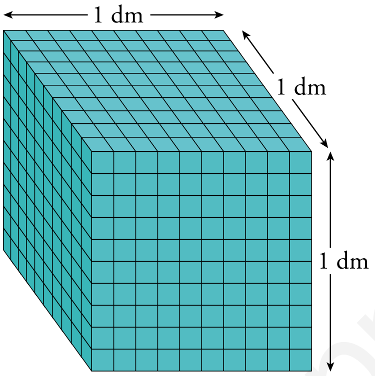
1 Unidades de volumen

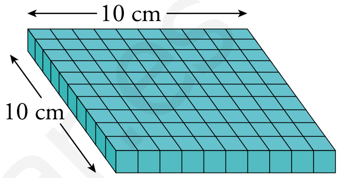


En el margen aparece un centímetro cúbico (1 cm^3). Es un cubo de 1 cm de lado. De la misma forma se definen el decímetro cúbico (dm^3), el metro cúbico (m^3) y las demás unidades de volumen. Son las siguientes:



Veamos por qué cada unidad cúbica contiene 1 000 unidades inferiores:





En cada nivel hay $10 \times 10 = 100$ cm^3.

Hay 10 niveles.

En total, $10 \times 10 \times 10 = 1\,000$ cm^3.

Por tanto, 1 dm^3 = 1 000 cm^3. Y, por lo mismo, 1 m^3 = 1 000 dm^3, …

Cada unidad de volumen es 1 000 veces la unidad de orden inferior y la milésima parte (0,001) de la unidad de orden superior.

Ponte en situación

Imagina cubos con las medidas descritas e intenta hacerte a la idea de cuánta agua podrían contener:

dm^3 → botella normal.

m^3 → Imagínalo señalado en una esquina de una habitación. Podrías ducharte entre 15 y 20 veces con el agua que cabe en él.

▼ EJEMPLOS

a) 438 m^3 12 dm^3 = $438 \cdot 10^6$ cm^3 + $12 \cdot 10^3$ cm^3 = 438 012 000 cm^3

b) 0,03972 dam^3 = $0{,}03972 \cdot 10^6$ dm^3 = 39 720 dm^3

c) 347,32 hm^3 = $347{,}32 \cdot 10^6$ m^3 = 347 320 000 m^3

Observa cómo la siguiente disposición facilita el paso de una unidad a otra:

	hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			
a)							4	3	8	0	1	2	0	0	0	→ 438 012 000 cm^3
b)						0	0	3	9	7	2	0				→ 39 720 dm^3
c)	3	4	7	3	2	0	0	0	0							→ 347 320 000 m^3

Actividades

1 Expresa en metros cúbicos.

a) 2 dam^3 123 m^3 52 dm^3

b) 29 320 000 cm^3

c) (453 cm^3 425 mm^3) · 500 000

d) 37 hm^3 12 dam^3 325 m^3 402 dm^3

2 Pasa a forma compleja.

a) 35 297 853 cm^3

b) (4 253 hm^3) · 2 000

c) 0,00030124 dm^3

d) 34,5832 hm^3

El litro, sus múltiplos y sus submúltiplos

A 1 dm^3 se le llama un **litro** (1 *l*).

Si se construye un cubo de cartulina de 1 dm^3, se llena de agua y esta se vierte, después, en una botella de 1 *l*, observamos que la llena por completo y no sobra nada.

$$1 \text{ dm}^3 = 1\ l$$

El litro tiene múltiplos y submúltiplos:

kilolitro (*kl*) ⟶ 1 000 *l*
hectolitro (*hl*) ⟶ 100 *l*
decalitro (*dal*) ⟶ 10 *l*
decilitro (*dl*) ⟶ 0,1 *l*
centilitro (*cl*) ⟶ 0,01 *l*
mililitro (*ml*) ⟶ 0,001 *l*

Vamos a incluirlos en la tabla junto con las unidades cúbicas:

m^3 ↘			dm^3 ↘			cm^3 ↘			mm^3		
		kl	*hl*	*dal*	*l*	*dl*	*cl*	*ml*			

Capacidad y volumen

La palabra **volumen** se suele utilizar para designar lo que ocupa un cuerpo en el espacio, y **capacidad,** para designar lo que cabe dentro de un recipiente. Pero son magnitudes idénticas y, por tanto, para medirlas se utilizan las mismas unidades.

Tanto las unidades cúbicas como los múltiplos y los divisores del litro se utilizan para medir volúmenes y capacidades. Sin embargo, se deben escoger las unidades según el tamaño de lo que se mide.

Por ejemplo:

- El volumen de un vaso o una botella, en *l*, en *cl* o en cm^3.
- El volumen de pequeños recipientes, en cm^3.
- El gasto mensual de agua en una casa, en m^3.
- La capacidad de un pantano, en hm^3 o, acaso, en km^3.

Actividades

3 Copia en tu cuaderno y añade la unidad en la que se expresa cada uno de los siguientes volúmenes:

a) Capacidad de un vaso: 1/4 ☐ o bien 250 ☐

b) Una cucharadita: 6 ☐

c) Consumo bimensual de agua en una casa:

63,834 ☐

d) Agua en un pantano: 680 ☐

4 Expresa en litros.

a) 45 dam^3 125 m^3 705 dm^3 500 cm^3

b) 590 000 mm^3 c) 0,000317 dam^3 d) 2 753 *ml*

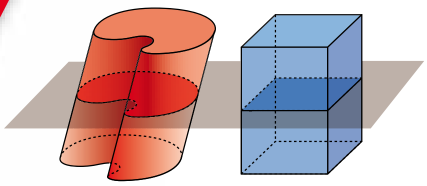
5 Expresa en unidades de volumen (forma compleja).

a) (457 210 *dal*) · 30

b) (12 845 235 *cl*) · 0,03

c) (42 753 *ml*) · 75

2 Volumen del prisma y del cilindro



De las dos figuras del margen, la de la izquierda es una **figura prismática** porque tiene dos bases iguales y paralelas. Además, cortándola por planos paralelos a las bases, se obtienen secciones idénticas a ellas.

La *figura prismática* y el ortoedro que hay a su derecha tienen la misma altura y, al cortarlos por planos paralelos a sus bases, producen figuras con la misma área. Por tanto, sus volúmenes coinciden.

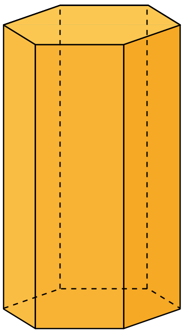
Volumen de la figura prismática = Área de su base · Altura

Los prismas y los cilindros son figuras prismáticas. Sus volúmenes son:

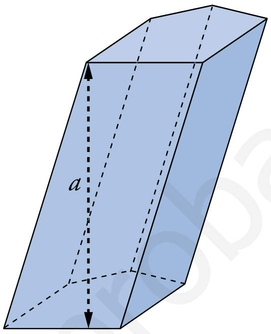
No lo olvides

VOLUMEN DE UNA FIGURA PRISMÁTICA

$$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura}$$

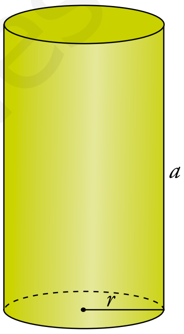


PRISMA RECTO



PRISMA OBLICUO

$$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura}$$



CILINDRO

$$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = \pi r^2 \cdot a$$

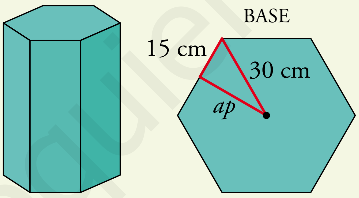
Ejercicio resuelto

Hallar el volumen de:

a) Un prisma hexagonal regular de lado de la base 30 cm y 1 m de altura.

b) Un cilindro de 30 cm de radio y 1 m de altura.

a)



En un hexágono regular, el radio y el lado son iguales. Por tanto, el cateto menor del triángulo rectángulo señalado es 15 cm.

$$\text{apotema} = \sqrt{30^2 - 15^2} \approx 26 \text{ cm}$$

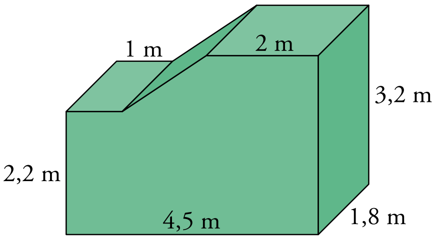
$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{30 \cdot 6 \cdot 26}{2} = 2\,340 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{PRISMA}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = 2\,340 \cdot 100 = 234\,000 \text{ cm}^3 = 234 \text{ litros}$$

b) $V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = \pi r^2 \cdot a = \pi \cdot 30^2 \cdot 100 \approx 282\,600 \text{ cm}^3 = 282{,}6\ l$

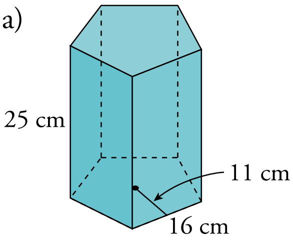
Actividades

1 Halla el volumen de este enorme depósito:

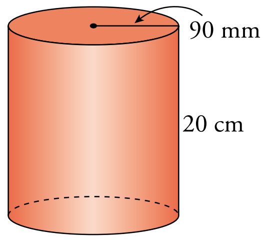


2 Halla el volumen de estos cuerpos geométricos:

a)

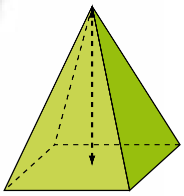


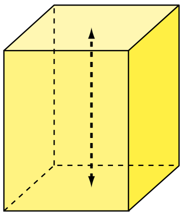
b)



3

Volumen de la pirámide y del cono

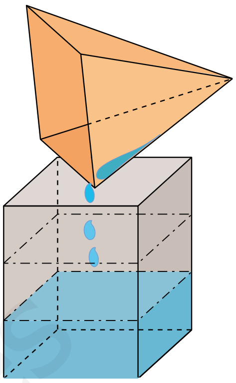




Tenemos un prisma y una pirámide con la misma base y la misma altura. Vamos a comparar sus volúmenes.

Si llenamos de agua la pirámide y la vertemos dentro del prisma, ocupará una tercera parte de este.

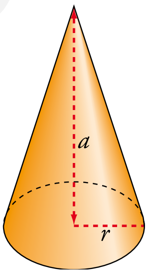
Es decir, se necesitan tres pirámides para completar el volumen del prisma.



El **volumen** de una **pirámide** es:

$$V = \frac{1}{3}\text{ Área de la base} \cdot \text{Altura}$$

Al igual que en la pirámide, el volumen de un cono es la tercera parte del área de la base por la altura. Es decir:



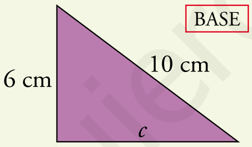
El **volumen** de un **cono** es:

$$V = \frac{1}{3}\text{ Área de la base} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{3}\pi r^2 a$$

Ejercicios resueltos

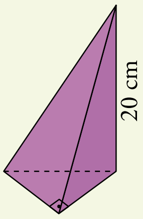
1. La altura de una pirámide es de 20 cm. Su base es un triángulo rectángulo con una hipotenusa de 10 cm y un cateto de 6 cm. Hallar su volumen.

1.



$c = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

El otro cateto de la base mide 8 cm.



$A_{\text{BASE}} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$ $\qquad V_{\text{PIRÁMIDE}} = \dfrac{1}{3} \cdot 24 \cdot 20 = 160 \text{ cm}^3$

2. Hallar el volumen de un cono de 4 dm de altura y el radio de cuya base es 20 cm.

2. Radio de la base = 20 cm = 2 dm

Área de la base = $\pi \cdot 2^2 = 12{,}5664$

Volumen = $\dfrac{1}{3} 12{,}5664 \cdot 4 \simeq 8{,}4 \text{ dm}^3 = 8{,}4$ litros

Actividades

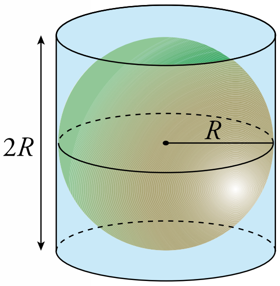
1 La gran pirámide de Keops es cuadrangular regular. El lado de la base mide 230 m, y la altura, 146 m.

Calcula cuántos hectómetros cúbicos tiene de volumen.

2 Halla el volumen de un cono cuya base tiene un radio de 8 cm y cuya altura es 2 dm.

3 ¿Cuánto acero hará falta para fabricar la cama de un faquir compuesta por 1 800 puntas en forma de cono cuyo diámetro de la base mide 2 cm, y la altura, 7 cm?

4 Volumen de la esfera



El volumen de la esfera es igual a los 2/3 del volumen del cilindro en el cual está inscrita.

El radio de la base del cilindro es el mismo que el de la esfera, R.

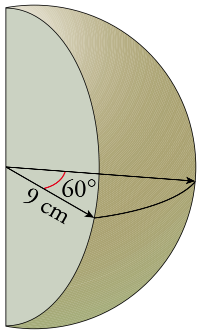
La altura del cilindro es $2R$.

Por tanto, el volumen del cilindro es $\pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$. Sus dos terceras partes son $\frac{4}{3}\pi R^3$.

El **volumen** de una **esfera** de radio R es:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ejercicios resueltos



1. Hallar el volumen de una cuña esférica de 60° correspondiente a una esfera de 9 cm de radio.

$\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$. El volumen del sector será, pues, la sexta parte del volumen de la esfera.

$$V_{\text{SECTOR ESFÉRICO}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 = 162\,\pi \approx 509 \text{ cm}^3$$

2. El radio de un balón es 25 cm, y sabemos que el grosor de la goma es de 3 mm.

¿Cuántos litros de goma son necesarios para fabricar un balón como el descrito?

$$V_{\text{BALÓN}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 25^3 \approx 65\,417 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{ESFERA INTERIOR}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 24{,}7^3 \approx 63\,090 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{GOMA}} = 65\,417 - 63\,090 = 2\,327 \text{ cm}^3 \approx 2{,}327 \text{ litros}$$

Solución: Se necesitan 2,33 litros de goma, aproximadamente.

Actividades

1 Metemos en una caja ortoédrica de base 25 cm por 20 cm y una altura de 16 cm sesenta bolas de radio 2,5 cm. ¿Cuántos litros de aceite caben todavía en la caja?

2 Sabiendo que la densidad del acero es 7 850 kg/m^3, calcula el peso de una esfera hueca de 20 cm de radio exterior y 1 cm de grosor.

3 ¿Cuántas bolas de 5 mm de diámetro podremos hacer fundiendo un cable cilíndrico de 3 m de largo y 5 mm de diámetro?

4 Tenemos un cajón cúbico de 40 cm de arista lleno en sus tres cuartas partes de serrín. Queremos ocultar en su interior un balón de 32 cm de diámetro. ¿Qué volumen de serrín sobra?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Unidades de volumen

1 ▼▽▽ Transforma en metros cúbicos las siguientes cantidades:

a) 0,025 hm^3 b) 459 hm^3 c) 45 214 dm^3
d) 0,015 km^3 e) 23 dam^3 f) 58 000 *l*

2 ▼▽▽ Transforma en litros.

a) 400 000 hm^3 b) 0,000047 hm^3
c) 6 dam^3 318 m^3 d) 0,32 *hl*

3 ▼▽▽ Copia y completa en tu cuaderno estas igualdades:

a) 0,0037 km^3 = … m^3
b) 0,36 hm^3 = … dm^3
c) 15 hm^3 13 dam^3 432 m^3 = … m^3
d) 15 hm^3 13 dam^3 432 m^3 = … *l*

4 ▼▽▽ Expresa estas cantidades en forma compleja:

a) 45 125 145 dm^3 b) 0,45124568 km^3
c) 451,14521 dm^3 d) 183 000 dam^3

5 ▼▽▽ Copia y completa en tu cuaderno estas igualdades:

a) 1 hm^3 = … *hl* b) 1 dam^3 = … *dal*
c) 1 m^3 = … *l* d) 1 dm^3 = … *dl*
e) 1 cm^3 = … *cl* f) 1 mm^3 = … *ml*

6 ▼▼▽ Para cada uno de los recipientes que se citan a continuación, se dan tres volúmenes. Solo uno de ellos es razonable. Di, en cada caso, cuál es:

a) Volumen de un pantano:
71 hm^3 387 000 *l* 4 000 000 000 cm^3
b) Un depósito de agua en una vivienda:
2 dam^3 0,8 m^3 45 000 *l*
c) Un vaso normal:
2 dm^3 0,2 dm^3 0,02 dm^3
d) Una cuchara de café:
3 *dl* 3 cm^3 3 mm^3
e) Una habitación:
1 dam^3 300 *l* 30 m^3
f) El cajón de una mesa:
0,3 m^3 23 dm^3 3 000 cm^3

Cálculo de volúmenes

7 ▼▽▽ Calcula el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 9 dm × 15 dm × 8 dm.

8 ▼▽▽ ¿Cuál es el volumen de un cubo de 15 cm de arista?

9 ▼▽▽ La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 15 cm. La altura del prisma es de 2 dm.

Halla su volumen.

10 ▼▽▽ Un prisma tiene sus bases en forma de rombo cuyas diagonales miden 40 dm y 28 dm. Su altura es 1,2 m.

Halla su volumen.

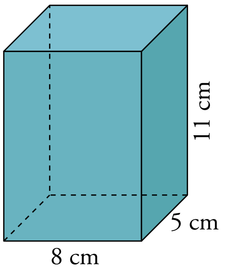
11 ▼▽▽ Halla el volumen de un cilindro de 10 cm de radio de la base y 20 cm de altura.

12 ▼▽▽ Halla el volumen de una esfera de 12 cm de diámetro.

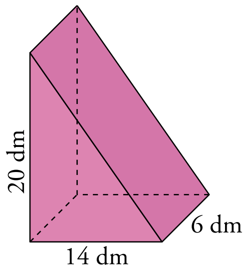
13 ▼▽▽ Halla el volumen de un cono de 6 dm de radio de la base y 15 cm de altura.

14 ▼▽▽ Halla el volumen de estos cuerpos:

a)

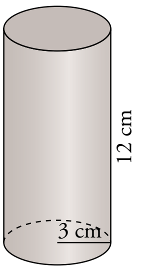


b)

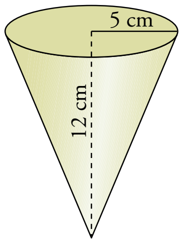


15 ▼▽▽ ¿Cuál es el volumen de estos cuerpos?

a)



b)

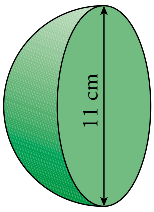


Ejercicios y problemas

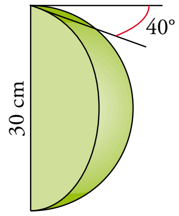
Aplica lo aprendido

Halla los volúmenes de los siguientes cuerpos:

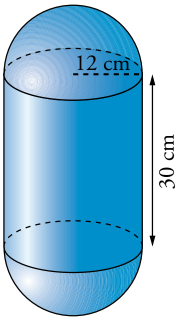
16 ▼▽▽ a)



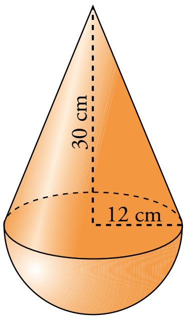
b)



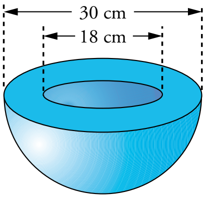
17 ▼▽▽ a)



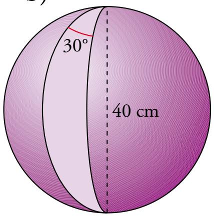
b)



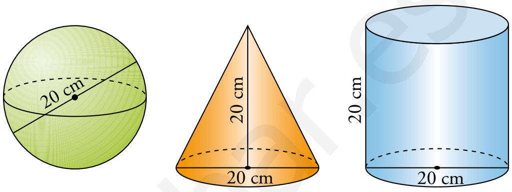
18 ▼▽▽ a)



b)

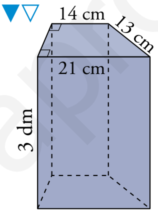


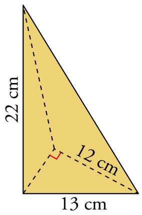
19 ▼▼▽ Comprueba que el volumen del cilindro es igual a la suma de los volúmenes de la esfera y el cono:



Halla los volúmenes de los siguientes cuerpos.

20 ▼▼▽





Autoevaluación

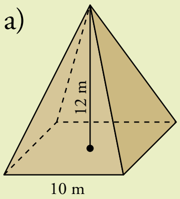
¿Conoces las unidades de volumen y sabes utilizarlas en problemas?

1 ¿Cuántas botellas con una capacidad de 3/4 *l* se pueden llenar con 0,45 dam^3 de agua?

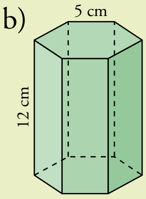
¿Sabes hallar el volumen de cuerpos geométricos, obteniendo previamente alguno de sus elementos, si fuera necesario?

2 Halla el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

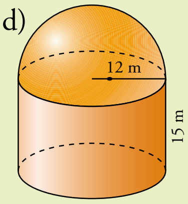
a)



b)

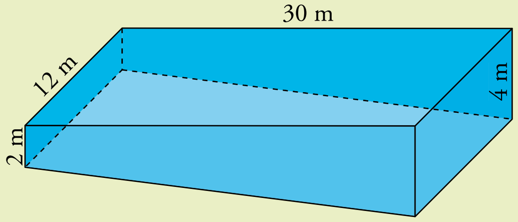


d)



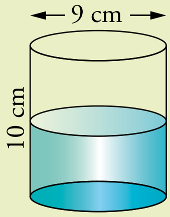
¿Aplicas el cálculo de volúmenes a la resolución de problemas?

3 La cubeta de una piscina tiene esta forma:



¿Cuál es su capacidad?

4 El interior de este vaso mide 9 cm de diámetro y 10 cm de altura. Está medio lleno de agua. Se echan dentro 50 canicas de 2 cm de diámetro. ¿Se derramará el agua?



11 Funciones

Las leyes de la naturaleza relacionan variables. Por ejemplo:

— La altura que alcanza una piedra que lanzamos hacia arriba depende de la fuerza con que se impulse.

— La cantidad de masa forestal de un bosque depende del tiempo que haya transcurrido desde que empezó a formarse.

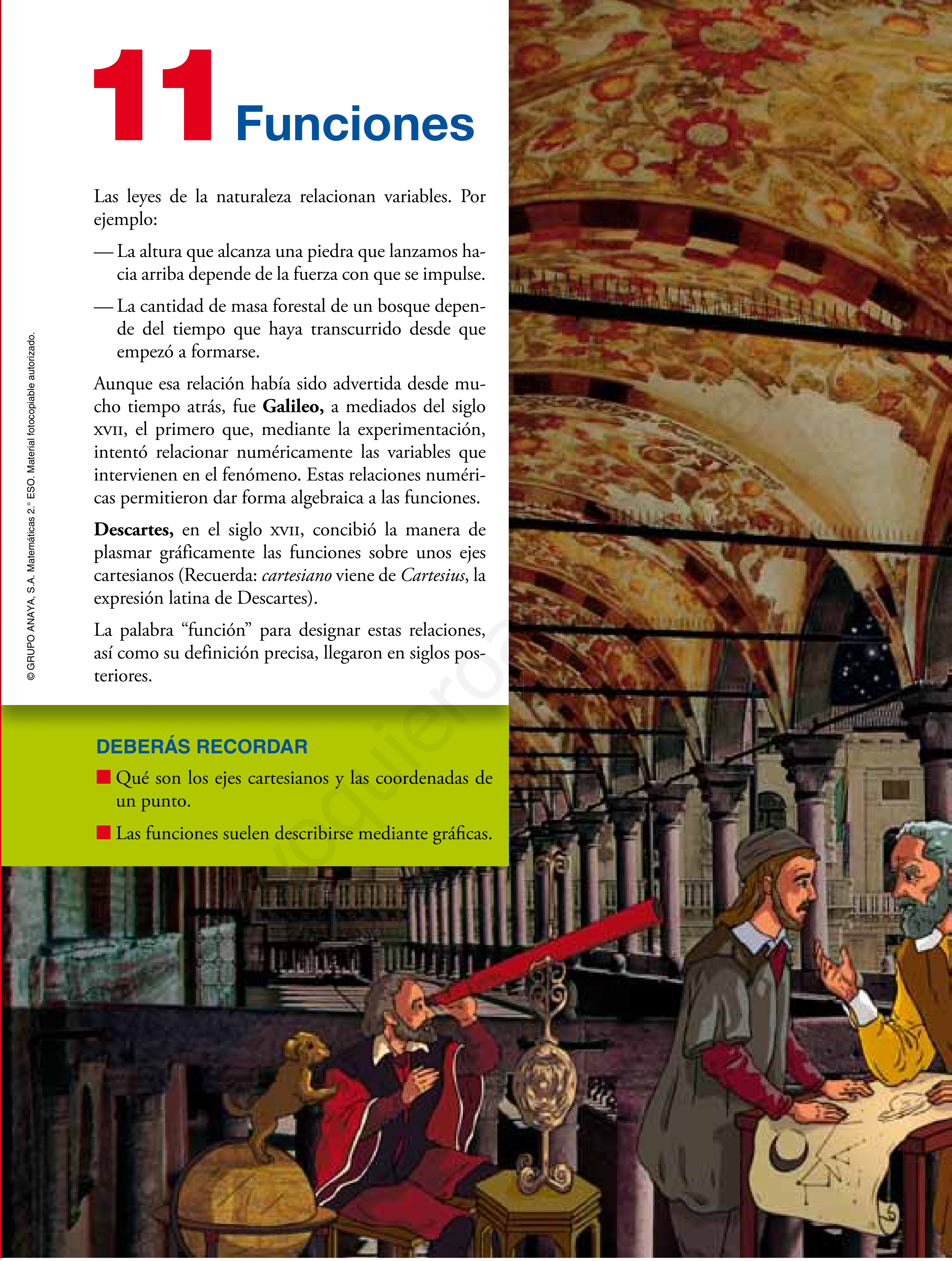
Aunque esa relación había sido advertida desde mucho tiempo atrás, fue **Galileo,** a mediados del siglo XVII, el primero que, mediante la experimentación, intentó relacionar numéricamente las variables que intervienen en el fenómeno. Estas relaciones numéricas permitieron dar forma algebraica a las funciones.

Descartes, en el siglo XVII, concibió la manera de plasmar gráficamente las funciones sobre unos ejes cartesianos (Recuerda: *cartesiano* viene de *Cartesius*, la expresión latina de Descartes).

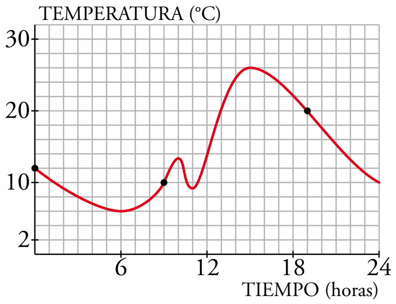
La palabra “función” para designar estas relaciones, así como su definición precisa, llegaron en siglos posteriores.

DEBERÁS RECORDAR

- Qué son los ejes cartesianos y las coordenadas de un punto.
- Las funciones suelen describirse mediante gráficas.



1 Concepto de función



Esta gráfica describe la temperatura ambiente, en un cierto lugar, en cada instante de un día.

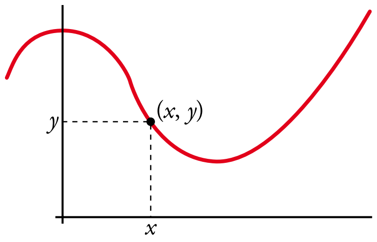
Cada punto de la gráfica relaciona un valor del eje horizontal (tiempo: hora del día) con otro del eje vertical (temperatura en °C):

— A las 0 h (12 de la noche), la temperatura era de 12 °C.

— A las 9 h, la temperatura era de 10 °C.

— A las 19 h (7 de la tarde), la temperatura era de 20 °C.

Es una función que hace corresponder a cada instante una temperatura.



Una **función** relaciona **dos variables.** En general se designan por x e y:

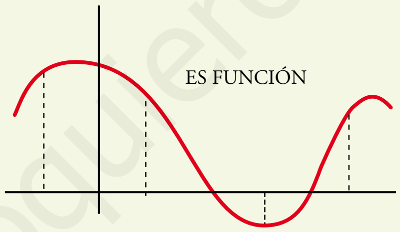
- x es la **variable independiente.**
- y es la **variable dependiente** (su valor depende del valor de x).

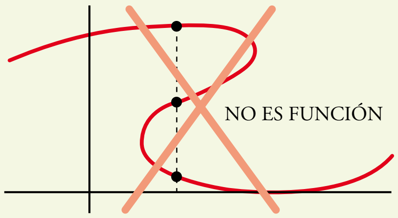
La función asocia a cada valor de x **un único** valor de y.

Para apreciar con claridad el comportamiento de una función, esta se representa gráficamente sobre unos ejes cartesianos.

Ejercicio resuelto

Explicar por qué la gráfica de la izquierda es función y la de la derecha no lo es.





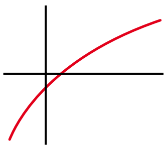
La primera gráfica es de una función porque a cada x le corresponde un único valor de y.

La segunda no lo es, porque a algunos valores de x les corresponden varios valores de y.

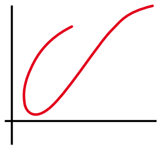
Actividades

1 Di cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones y cuáles no son funciones, justificando las respuestas:

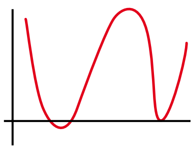
a)



b)



c)



2 En la gráfica de arriba (temperatura a lo largo del día):

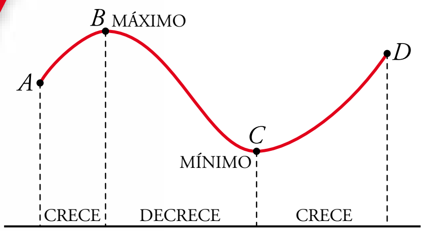
a) ¿Podemos decir que la mínima temperatura se dio a las 6 de la mañana? ¿Cuál fue?

b) ¿A qué hora fue la máxima temperatura? ¿Cuál fue?

c) ¿En qué momentos del día la temperatura fue de 14 °C?

d) Durante 1 h, aproximadamente, el Sol estuvo oculto por las nubes. ¿A qué hora fue?

2 Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos



Las funciones se analizan y se describen de izquierda a derecha. Esta función es *creciente* desde A hasta B, porque los valores de la ordenada son cada vez mayores. Es *decreciente* de B a C porque, recorriendo ese tramo de izquierda a derecha, los valores de la y son cada vez menores. Finalmente, vuelve a ser creciente en el tramo de C a D.

El valor *máximo* lo toma en el punto B, y el *mínimo,* en el C.

Una función es **creciente** en un tramo cuando al aumentar la x (es decir, al recorrerla de izquierda a derecha), aumenta la y.

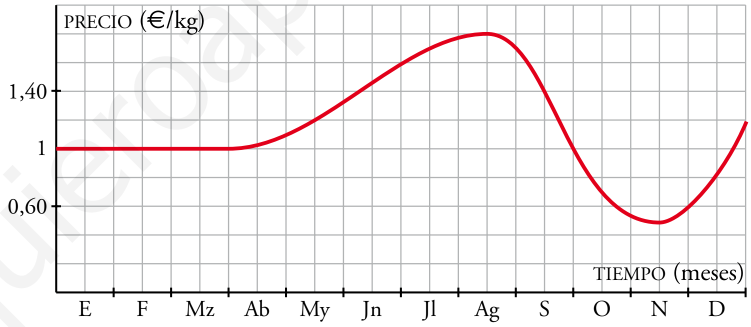
Es **decreciente** si, al aumentar la x, disminuye la y.

Si mantiene el mismo valor en todo un tramo, se dice que es **constante** en ese tramo.

El punto en el que la ordenada toma mayor valor se llama **máximo** de la función, y aquel en el que la ordenada toma el menor valor, **mínimo.**

EJEMPLO

Veamos la evolución del **precio** de las naranjas de zumo a lo largo de cierto año en el mercado de una localidad productora:



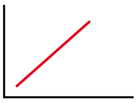
- En el primer trimestre se mantiene estable **(constante).**
- Tiene un tramo **creciente** desde principios de abril hasta mediados de agosto, que es cuando alcanza su **máximo.**
- **Decrece** hasta mediados de noviembre, cuando llega a su **mínimo.**
- Vuelve a subir (crece) hasta final de año.

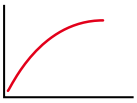
Evolución del precio

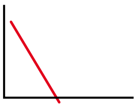
- E, F, Mz: **constante,** 1 €.
- 1.° de Ab hasta mediados de Ag: **crece** desde 1 € hasta 1,80 €.
- Mediados de Ag hasta mediados de N: **decrece** desde 1,80 € hasta 0,50 €.
- Mediados de N hasta final de año: **crece** desde 0,50 € hasta 1,20 €.

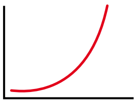
Actividades

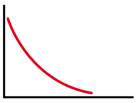
1 Hay muchas formas de crecer y de decrecer. Observa las siguientes funciones. ¿Cuáles son crecientes? ¿Cuáles son decrecientes? (Todas ellas son lo uno o lo otro).

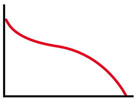
a) 

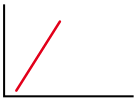
b) 

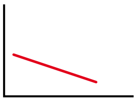
c) 

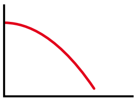
d) 

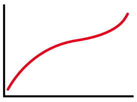
e) 

f) 

g) 

h) 

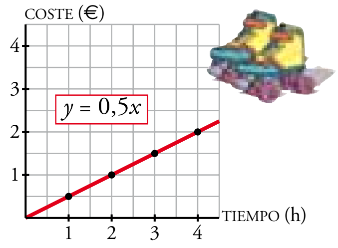
i) 

j) 

3 Funciones de proporcionalidad: $y = mx$

En un parque público hay una tienda donde se alquilan patines, a 0,50 € la hora; monopatines, a 1 €/h, y bicicletas, a 2 €/h.

Veamos cuáles son los costes en función del tiempo que se utilicen:

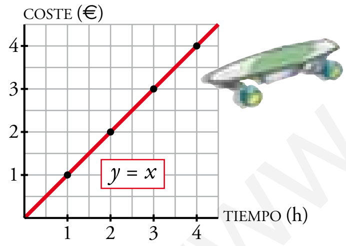


- PATINES: 0,50 € cada hora.

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	…	x
COSTE (€)	0	0,5	1	1,5	2	…	$0{,}5x$

El coste se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

$$y = 0{,}5x$$

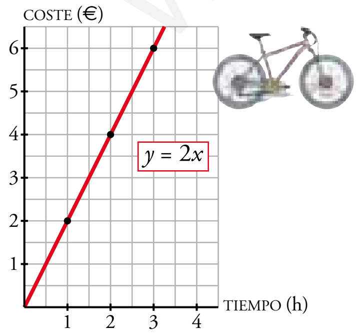


- MONOPATÍN: 1 € cada hora.

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	…	x
COSTE (€)	0	1	2	3	4	…	x

El coste se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

$$y = x$$



- BICICLETA: 2 € cada hora.

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	…	x
COSTE (€)	0	2	4	6	8	…	$2x$

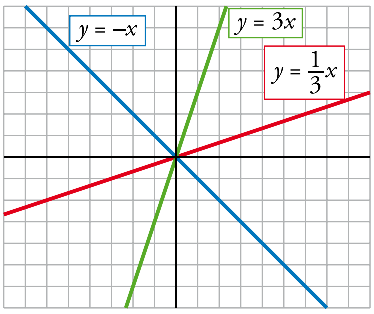
El coste se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

$$y = 2x$$

Lo que cuesta alquilar unos patines es **proporcional** al tiempo que los tengamos alquilados. Lo mismo ocurre con el precio de alquiler de un monopatín y de una bicicleta. Por eso, estas funciones que relacionan el coste con el tiempo:

$$y = 0{,}5x \qquad y = x \qquad y = 2x$$

se llaman *funciones de proporcionalidad.*



Se llama **función de proporcionalidad** a la que relaciona dos valores directamente proporcionales.

Tiene la ecuación $\boldsymbol{y = mx}$.

Se representa mediante **una recta** que pasa por el punto (0, 0).

La constante de proporcionalidad, m, puede ser positiva o negativa. Se llama **pendiente** de la recta y tiene que ver con su inclinación.

Ejercicio resuelto

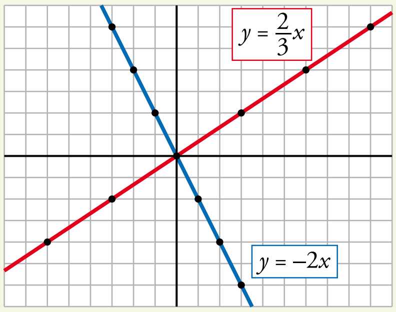
Representar: a) $\boldsymbol{y = -2x}$ **b)** $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x}$

a)

x	0	1	2	3	–1	–2
y	0	–2	–4	–6	2	4

b) Para obtener ordenadas (y) enteras, daremos a las abscisas (x) valores múltiplos de 3:

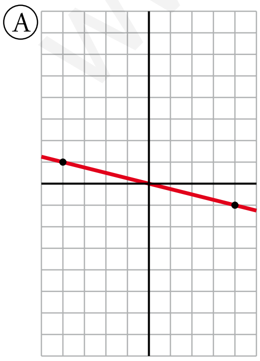
x	0	3	6	9	–3	–6
y	0	2	4	6	–2	–4

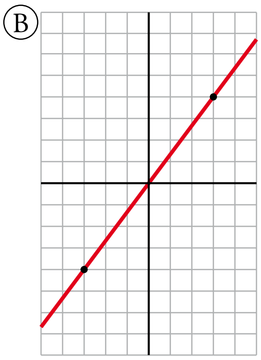


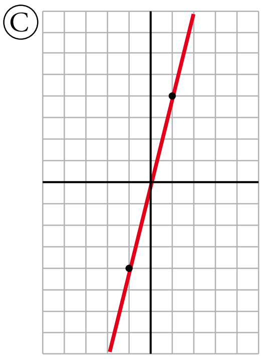
Actividades

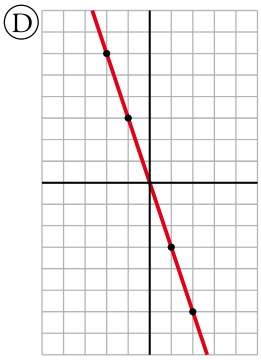
1 Asocia a cada una de las gráficas la ecuación que le corresponda:

a) $y = 4x$ b) $y = \frac{4}{3}x$ c) $y = \frac{-1}{4}x$ d) $y = -3x$









4 Funciones lineales: $y = mx + n$

El alquiler de una canoa cuesta 1 € cada hora. Pero, previamente, hemos de pagar 1,50 € para entrar en el recinto donde se encuentran. Por tanto, el coste de un paseo en canoa, en función del tiempo que estemos, es:

0 horas → 1,5 €

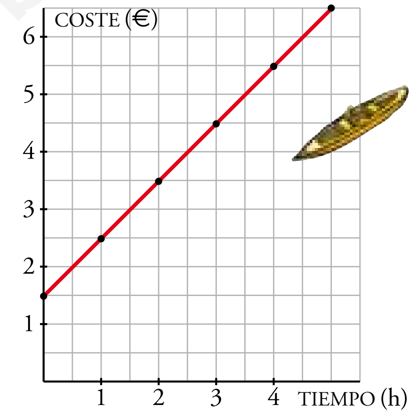
1 hora → 1,50 + 1 = 2,50 €

2 horas → 1,50 + 2 · 1 = 3,50 €

3 horas → 1,50 + 3 · 1 = 4,50 €

4 horas → 1,50 + 4 · 1 = 5,50 €

5 horas → 1,50 + 5 · 1 = 6,50 €



TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	…	x
COSTE (€)	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	…	$x + 1,5$

El coste se obtiene en función del tiempo mediante la ecuación $y = x + 1,5$.

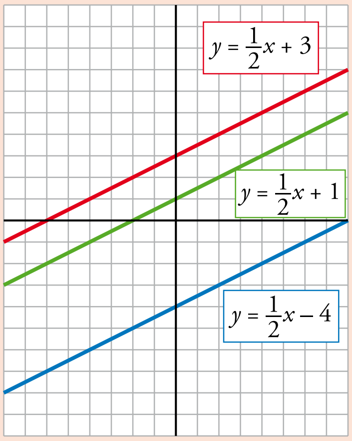
La ecuación $\boldsymbol{y = mx + n}$ se representa mediante una recta de **pendiente** m que corta al eje Y en el punto $(0, n)$.

n se llama **ordenada en el origen.**

Dos ecuaciones con la misma pendiente se representan mediante rectas paralelas.

Las funciones $y = mx + n$ se llaman **funciones lineales.**

Cuando $n = 0$ se trata de una función de proporcionalidad, $y = mx$.



Ten en cuenta

Las funciones representadas mediante rectas tienen por ecuación:

$$y = mx + n.$$

Si $n = 0$, estamos en el caso de una función de proporcionalidad:

$$y = mx$$

Ejercicios resueltos

1. Representar estas funciones:

a) $y = 2x - 5$

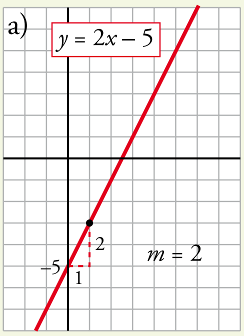
b) $y = -3x + 4$

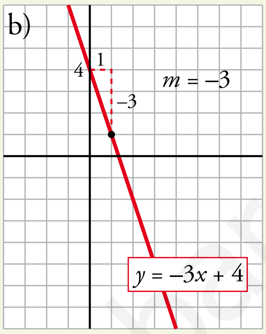
c) $y = \frac{2}{3}x + 2$

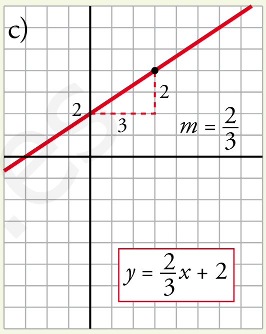
1. a) Para representar $y = 2x - 5$, nos fijamos en que $m = 2$ y $n = -5$. Por tanto, dibujaremos una recta que pase por (0, –5) y cuya pendiente sea 2 (avanza 1, sube 2).

b) Procediendo de forma análoga al caso anterior, dibujaremos una recta que pase por (0, 4) y cuya pendiente sea –3 (avanza 1, baja 3).

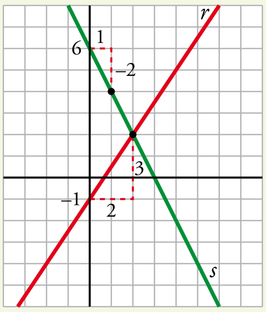
c) La recta pasará por (0, 2) y su pendiente será $\frac{2}{3}$ (avanza 3, sube 2).







2. Deducir la ecuación de las dos rectas representadas.



2. Al ser rectas, la ecuación de ambas es $y = mx + n$.

- Ecuación de r:

  Pasa por (0, –1). Por tanto, $n = -1$.

  Cuando avanza 2, sube 3. Su pendiente es $m = \frac{3}{2}$.

  Su ecuación es: $y = \frac{3}{2}x - 1$.

- Ecuación de s:

  Pasa por (0, 6). Por tanto, $n = 6$.

  Cuando avanza 1, baja 2. Su pendiente es $m = \frac{-2}{1} = -2$.

  Su ecuación es: $y = -2x + 6$.

Actividades

1 Representa las siguientes funciones:

a) $y = -2x + 5$

b) $y = x - 3$

c) $y = \frac{2}{3}x - 4$

d) $y = \frac{3}{2}x + 4$

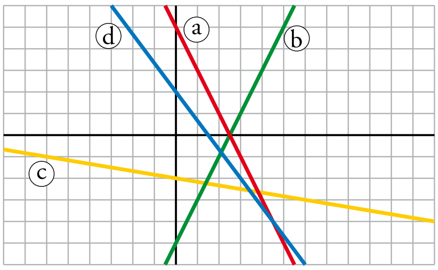
e) $y = -x - 1$

f) $y = x - 6$

g) $y = \frac{3}{5}x + 1$

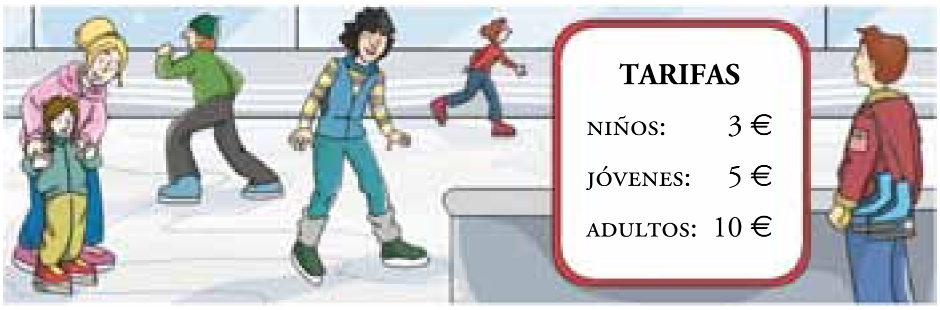
h) $y = -\frac{5}{3}x + 1$

2 Escribe las ecuaciones de estas funciones:



5

Funciones constantes: $y = k$

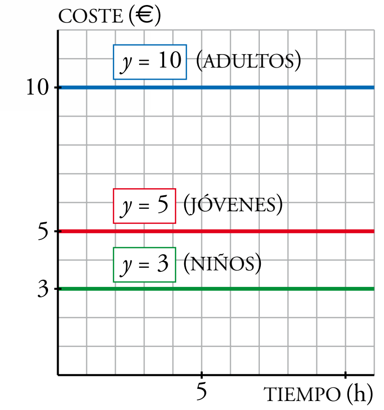


El acceso a las pistas de patinaje sobre hielo vale 3 € para los niños, 5 € para los jóvenes y 10 € para los adultos. Una vez en las pistas, se puede estar tanto tiempo como se quiera.

JÓVENES:

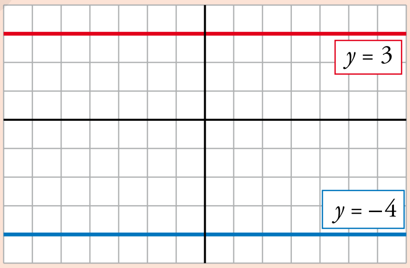
TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	…
COSTE (€)	5	5	5	5	5	…

El coste, en función del tiempo, es $y = 5$ para los jóvenes.



La función $y = k$, en la que el valor de y no depende de x, se llama **función constante.**

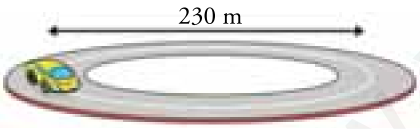
Se representa por una recta paralela al eje X, a una distancia k de este.



Ten en cuenta

La función constante $y = k$ es una función lineal, $y = mx + n$, en la que $m = 0$.

Problema resuelto



Un coche da vueltas alrededor de una pista circular con un diámetro de 230 m. Escribir la ecuación de la función que relaciona el tiempo transcurrido con la distancia del coche al centro de la pista.

La función que relaciona el tiempo transcurrido con la distancia del coche al centro de la pista es una función constante de ecuación $y = 115$.

Actividades

1 Representa las siguientes funciones:

a) $y = 7$ b) $y = -3$ c) $y = 0$

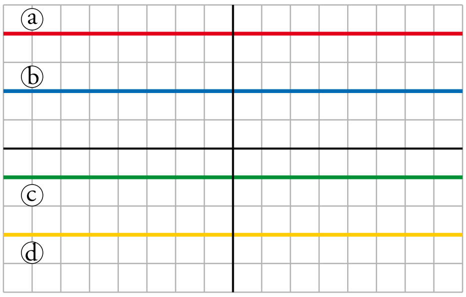
2 a) Representa la recta que pasa por estos puntos:

$A(-2, 3)$ $B(5, 3)$

b) Sin hacer ningún cálculo, ¿podrías dar la ecuación de la recta anterior?

c) ¿Cuál es la pendiente de dicha recta?

3 Escribe la ecuación de las siguientes funciones:



Ejercicios y problemas

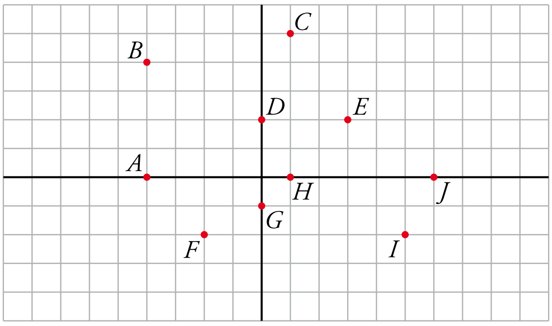
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Representación e interpretación de puntos

1 ▼▽▽ Dibuja sobre un papel cuadriculado unos ejes coordenados y representa los siguientes puntos:

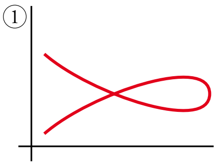
$A(3, 2)$; $B(3, 7)$; $C(4, -1)$; $D(-4, 3)$; $E(-6, -2)$;
$F(0, 5)$; $G(3, 0)$; $H(-2, 0)$; $I(0, -5)$; $J(0, 0)$

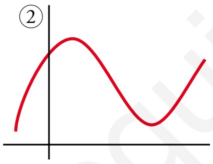
2 ▼▽▽ Di las coordenadas de cada uno de los siguientes puntos:



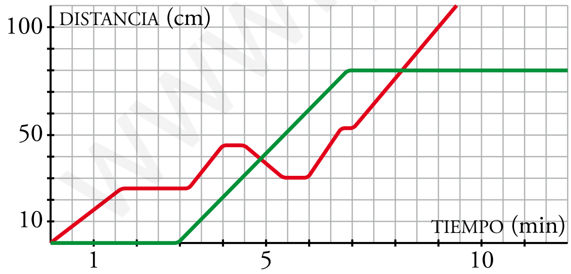
Funciones

3 ▼▽▽ ¿Cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función y cuáles no? Explica por qué.





4 ▼▼▽ Rafael y María ponen a competir, en una carrera, a sus caracoles; uno de ellos lleva una pegatina roja, y otro, una pegatina verde.



El verde tarda en salir y se para antes de llegar.

a) ¿Cuánto tiempo está parado en cada caso? ¿A qué distancia de la meta se para definitivamente?

b) ¿Cuántos centímetros y durante cuánto tiempo marcha el rojo en dirección contraria?

c) Describe la carrera.

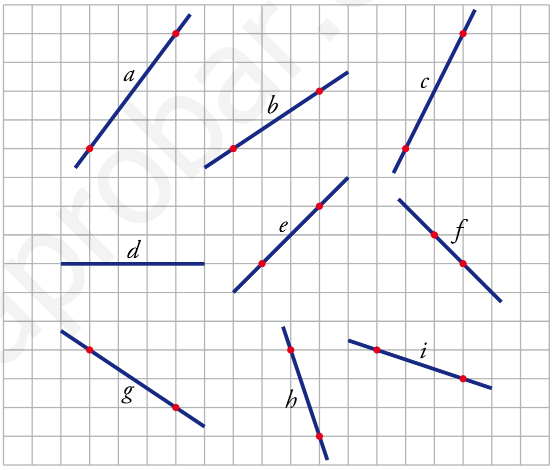
5 ▼▽▽ Se ha medido, mes a mes, la estatura de un niño desde que nace hasta que tiene un año. Estos son los resultados:

EDAD (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ESTATURA (cm)	54	58	62	64	67	69	71	72	74	75	77	78	80

Representa los resultados en una gráfica.

Funciones lineales

6 ▼▽▽ Halla la pendiente de cada una de las siguientes rectas:



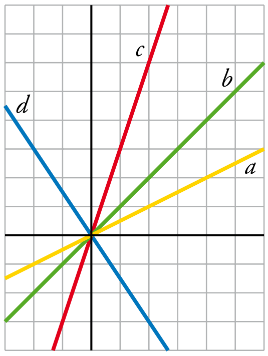
7 ▼▽▽ Representa las siguientes funciones:

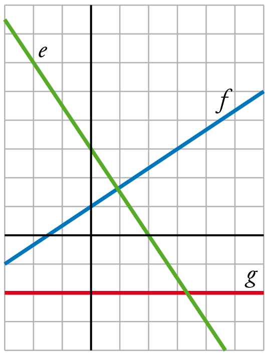
a) $y = 2x$ b) $y = \frac{1}{2}x$ c) $y = -3x$

d) $y = \frac{4}{3}x$ e) $y = -\frac{2}{5}x$ f) $y = \frac{3}{4}x$

g) $y = -3x + 5$ h) $y = -\frac{4}{3}x + 1$ i) $y = 3$

8 ▼▽▽ Escribe la ecuación de cada una de las siguientes funciones:

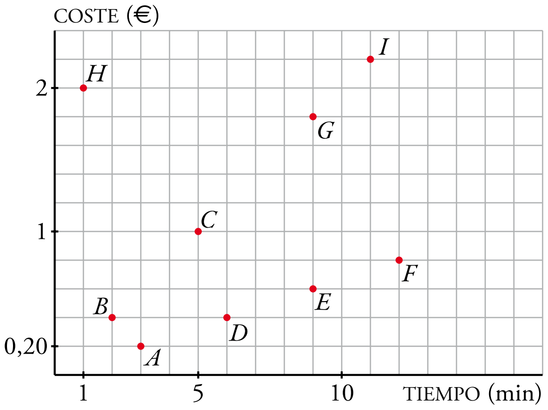




Ejercicios y problemas

Resuelve problemas

9 ▼▼▽ Cada punto del diagrama siguiente representa una llamada telefónica:



a) ¿Cuál ha sido la llamada más larga?

b) ¿Cuál ha sido la llamada más corta?

c) Una de las llamadas ha sido a Australia. ¿De cuál crees que se trata?

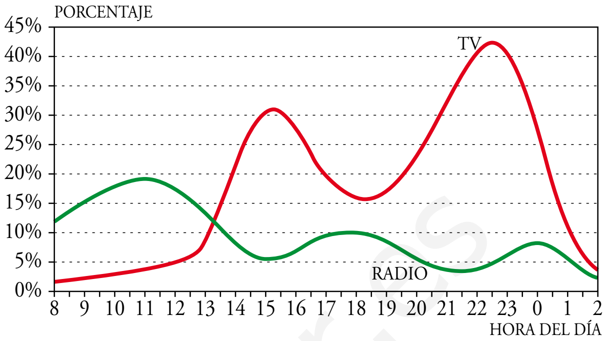
d) Hay varias llamadas locales. ¿Cuáles son?

10 ▼▼▽ Representa gráficamente esta carrera de 200 m entre dos corredores:

A sale más rápidamente que B, y en 5 segundos le saca 10 m de ventaja.

A se cae en el instante 5 segundos, y B le adelanta. Pero A se levanta en 2 segundos, y adelanta a B en la misma línea de meta.

11 ▼▼▽ Esta gráfica corresponde al porcentaje de personas que ven la televisión o escuchan la radio, en las distintas horas del día.



a) Describe la curva correspondiente a la televisión: dónde es creciente, dónde es decreciente, máximos, mínimos… Relaciónala con las actividades cotidianas: levantarse, acostarse, comida, cena…

b) Haz lo mismo con la curva de la radio.

c) Compara las dos curvas y relaciónalas.

12 ▼▼▽ Margarita pasea alejándose de su pueblo a una velocidad de 2 km/h. En este momento se encuentra a 4 km del pueblo.

a) ¿Dónde se encontrará dentro de una hora?

b) ¿Dónde se encontraba hace una hora?

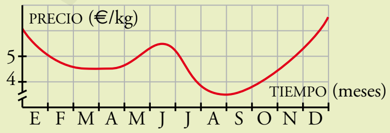
c) Representa su distancia al pueblo en función del tiempo transcurrido a partir de ahora.

d) Halla la ecuación de la función llamando x al tiempo e y a la distancia al pueblo.

Autoevaluación

¿Sabes reconocer, interpretar y analizar las gráficas de funciones?

1 a) Describe la evolución del precio de la miel a lo largo de un año.



b) ¿En qué tramos es creciente y en cuáles es decreciente?

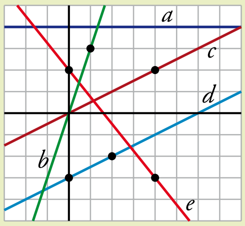
c) ¿Cuándo es mínimo el precio, y cuál es?

¿Sabes representar las funciones lineales dadas por su ecuación? ¿Sabes poner la ecuación que corresponde a una función lineal dada gráficamente?

2 Representa estas funciones:

a) $y = -\frac{5}{3}x$ b) $y = \frac{3}{4}x + 1$ c) $y = 2x - 5$

3 Escribe las ecuaciones de las siguientes funciones:



12

Estadística

Es sabido que, hace 2 000 años, César Augusto ordenó que se realizara en su imperio (Roma y sus colonias) una amplísima encuesta sobre habitantes, soldados, navíos, recursos de todo tipo y rentas públicas. A partir de entonces, los romanos realizaron censos similares cada cinco años. Esto es un antiguo antecedente de lo que actualmente se llama estadística. Pero no fue el primero.

Los recuentos estadísticos se remontan al origen de la historia. Existen documentos egipcios (papiros) de hace más de 5 000 años donde hay constancia de censos de población y de bienes públicos. Tal era su dedicación a estos asuntos, que concibieron una divinidad (*Saftnik*) “diosa de los libros y de las cuentas”.

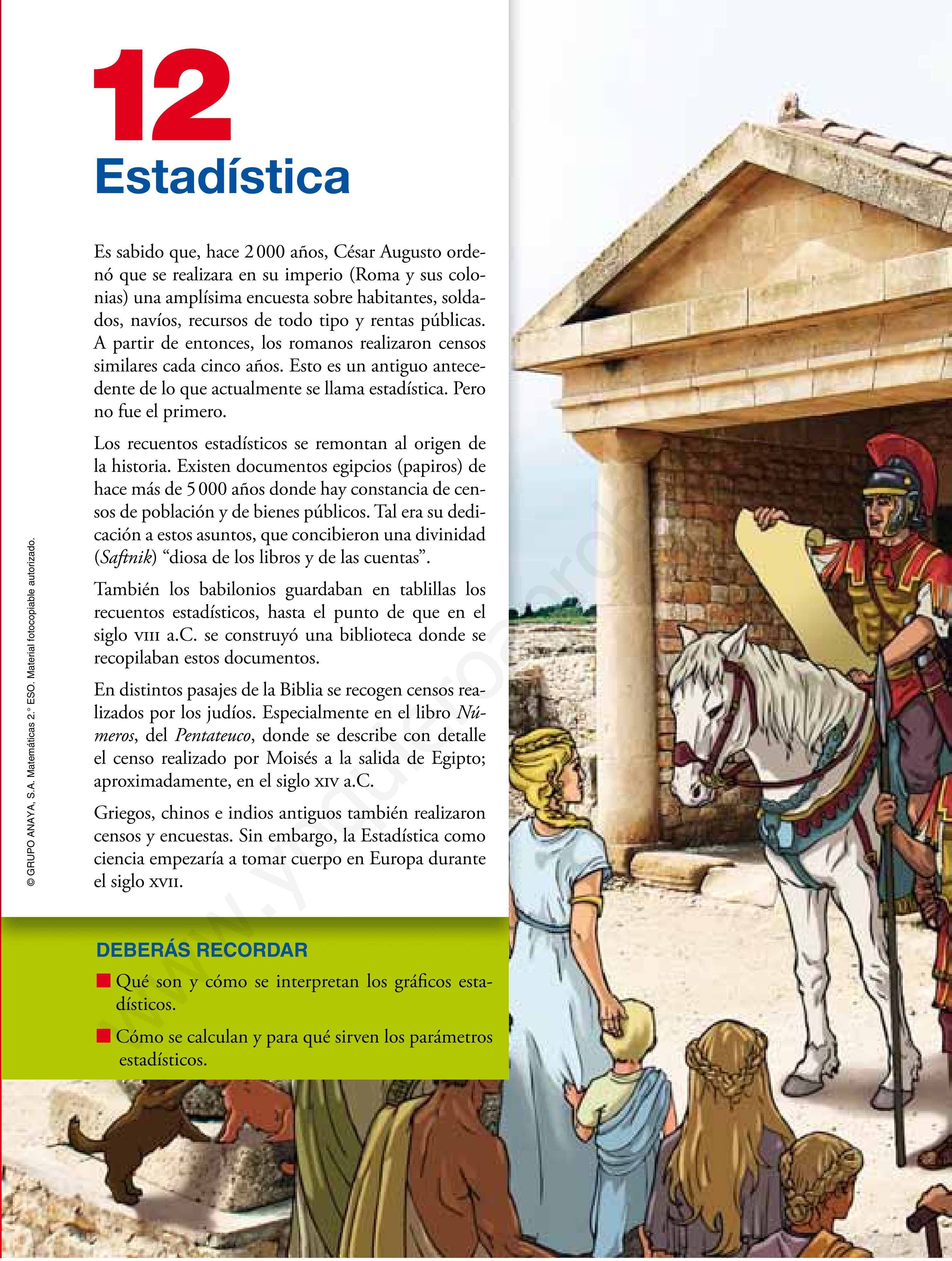
También los babilonios guardaban en tablillas los recuentos estadísticos, hasta el punto de que en el siglo VIII a.C. se construyó una biblioteca donde se recopilaban estos documentos.

En distintos pasajes de la Biblia se recogen censos realizados por los judíos. Especialmente en el libro *Números*, del *Pentateuco*, donde se describe con detalle el censo realizado por Moisés a la salida de Egipto; aproximadamente, en el siglo XIV a.C.

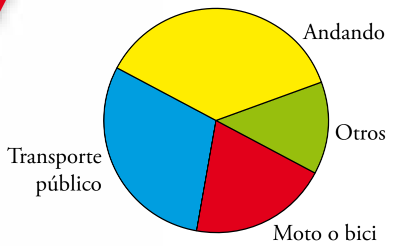
Griegos, chinos e indios antiguos también realizaron censos y encuestas. Sin embargo, la Estadística como ciencia empezaría a tomar cuerpo en Europa durante el siglo XVII.

DEBERÁS RECORDAR

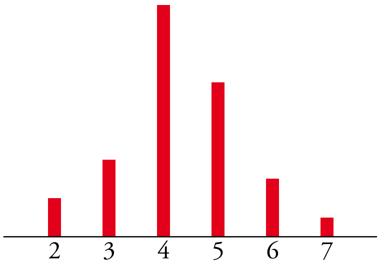
- Qué son y cómo se interpretan los gráficos estadísticos.
- Cómo se calculan y para qué sirven los parámetros estadísticos.



1 El proceso que se sigue para realizar estadísticas



¿CÓMO VIENES AL CENTRO?



N.º DE PERSONAS QUE VIVEN EN TU CASA

Los gráficos que hemos analizado en la página anterior son el final de un largo proceso.

¿CÓMO VIENES AL CENTRO HABITUALMENTE?

En transporte público (autobús, metro) ☐

Vengo andando ☐

Me traen (coche privado) ☐

Vengo en bici ☐

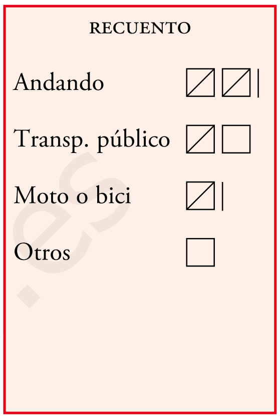
Vengo en moto ☐

Otros medios ☐

Cuáles ....

Diseñar una encuesta.

Recoger los datos.



RECUENTO

Andando	⧄⧄|
Transp. público	⧄☐
Moto o bici	⧄|
Otros	☐

Organizar los datos.

Pasos que se dan en un estudio estadístico

1. Elaboración de la encuesta, de modo que el encuestado tenga claro lo que se pregunta y cuáles son las posibles respuestas.
2. Recogida de datos: se pasa la encuesta y se anotan las respuestas.
3. Organización, clasificación y recuento de las respuestas.
4. Elaboración de tablas con los resultados.
5. Confección de gráficos.

Otros métodos de recoger datos

En lugar de una encuesta, los datos se pueden conseguir de otras formas diferentes:

— Buscar en anuarios, archivos…

— Observar.

— Experimentar.

Actividades

1 Tira tres dados y anota la puntuación intermedia.

Por ejemplo: si sale “1, 2, 6” → anota 2

“3, 5, 5” → anota 5

“1, 1, 4” → anota 1

Realiza la experiencia 20 veces.

2 Anota la marca de los primeros 15 coches que veas pasar. (Recogida de datos por observación).

3 Pregunta a diez personas por el día de su cumpleaños y anota si es en:

Primavera (P) Verano (V)

Otoño (O) Invierno (I)

4 Para hacer un estudio sobre el sexo (NIÑO, NIÑA) de los bebés nacidos en una localidad en el último mes, ¿dónde crees que se deberían recoger los datos?

El *color de los ojos* es una variable cualitativa.

Variables estadísticas

En cada uno de los dos ejemplos que se estudiaron en la segunda página de la unidad se analiza la distribución de una variable estadística.

En el segundo de ellos, la variable es el *número de personas que viven en tu casa*. Es una *variable numérica (cuantitativa)*, pues los valores que puede tomar son números: 2, 3, 4, 5, 6, 7, …

En el primer ejemplo, la variable es *cómo acudes al centro docente*. El resultado puede ser: ANDANDO, TRANSPORTE PÚBLICO, MOTO-BICI, OTROS. Este tipo de variable se llama *cualitativa.*

Una **variable** se llama **cuantitativa** cuando toma valores numéricos, y **cualitativa,** cuando toma valores no numéricos.

La *estatura* es una variable cuantitativa.

Frecuencia

El número de individuos (chicos y chicas) que acuden al centro docente en TRANSPORTE PÚBLICO es 9.

Lo expresamos así: f[TRANSPORTE PÚBLICO] = 9

Y se lee así: la frecuencia de TRANSPORTE PÚBLICO es 9.

El número de individuos correspondiente a cada valor de la variable se llama **frecuencia** de ese valor.

▼ EJEMPLO

Hemos preguntado a los miembros de un club musical por el número de CD que han comprado en la última semana. Estos son los resultados:

3, 0, 2, 4, 2, 3, 1, 2, 1, 4, 0, 1, 2, 1, 3

Comprueba que, según estos datos:

$f(0) = 2 \qquad f(1) = 4 \qquad f(2) = 4 \qquad f(3) = 3 \qquad f(4) = 2$

Actividades

5 Di si cada una de las siguientes variables estadísticas es cuantitativa o cualitativa:

a) Deporte preferido.

b) Número de calzado.

c) Estatura.

d) Estudios que se desea realizar.

e) Nota en el último examen de Matemáticas.

f) Goles marcados en una jornada por todos los equipos de primera división.

6 Lanzamos un dado 40 veces. Estos son los resultados:

1 6 1 4 5   6 2 3 2 4
2 6 6 5 1   2 6 5 3 4
1 6 2 4 6   1 4 6 3 4
2 6 4 3 5   5 2 1 5 3

Halla la frecuencia de cada uno de los valores de la variable.

2 Tablas de frecuencias

Una vez recogidos los datos correspondientes a una experiencia estadística, hay que tabularlos; es decir, hay que confeccionar con ellos una tabla en la que aparezcan ordenadamente:

— Los *valores de la variable* que se está estudiando.

— El *número de individuos* de cada valor; es decir, su *frecuencia*.

Para hacer el recuento, se leen los datos uno a uno y se marca una señal en el correspondiente valor. Si las señales se agrupan de cinco en cinco, es más fácil contarlas.

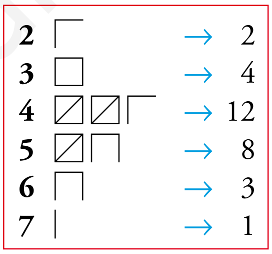
▼ **EJEMPLO**

NÚMERO DE PERSONAS QUE VIVEN EN TU CASA

DATOS

4	5	4	7	6
2	4	6	3	5
4	6	5	5	3
4	4	4	5	3
2	5	4	4	5
4	5	4	3	4

RECUENTO



2 → 2
3 → 4
4 → 12
5 → 8
6 → 3
7 → 1

TABLA

VALORES	FRECUENCIA
2	2
3	4
4	12
5	8
6	3
7	1
	30

La **tabla de frecuencias** adopta, finalmente, el aspecto que se ve arriba: cada valor tiene emparejada su frecuencia.

Actividades

1 Se pregunta a 40 estudiantes cuál de los siguientes deportes prefiere practicar: baloncesto (B), balonvolea (V), fútbol (F), tenis (T), ajedrez (A). Resultados:

F F B F F   F A F B T
V F F F A   B B F F A
B F F F F   B F B B T
F T F F B   B F T T A

Haz una tabla de frecuencias con los resultados.

2 Se ha contabilizado el número de asignaturas suspendidas en la 2.ª evaluación por los 30 estudiantes de un curso. Estos son los resultados:

1 3 1 0 4   4 1 0 2 3
0 1 1 2 3   2 3 1 1 6
1 1 2 1 2   0 0 2 1 4

Haz la correspondiente tabla de frecuencias.

3 Gráficas estadísticas

Las representaciones gráficas sirven para captar, de un solo golpe de vista, las características más sobresalientes de una distribución.

Hay muchos tipos de representaciones gráficas. Vamos a recordar algunas que ya conoces y a ver algunas nuevas.

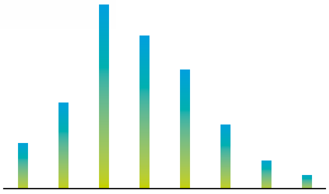
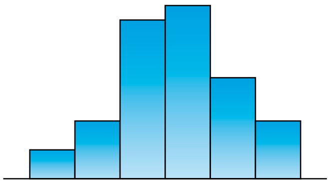


DIAGRAMA DE BARRAS

Diagrama de barras

Está formado por barras finas. Sirve para representar tablas de frecuencias de variables cualitativas, o bien cuantitativas que tomen pocos valores.

Las alturas de las barras son proporcionales a las frecuencias correspondientes.

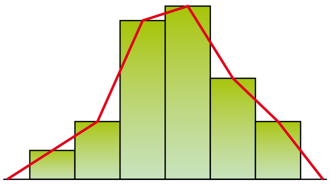


HISTOGRAMA

Histograma

Está formado por rectángulos anchos que se adosan unos a otros. Sirve para representar variables cuantitativas que tomen muchos valores diferentes.

Las áreas de los rectángulos son proporcionales a las frecuencias correspondientes.



POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Polígono de frecuencias

El polígono de frecuencias se utiliza para representar variables cuantitativas.

Se construye uniendo los puntos medios de los rectángulos de un histograma.

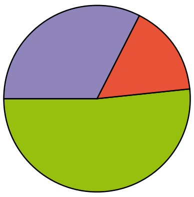


DIAGRAMA DE SECTORES

Diagrama de sectores

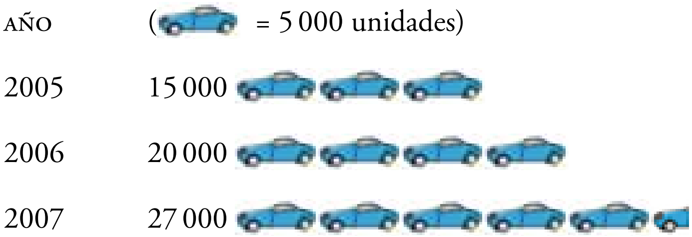
Sirven para representar variables de cualquier tipo. Cada sector representa un valor de la variable.

El ángulo de cada sector es proporcional a la frecuencia correspondiente.

Pictograma

Es un gráfico con figuras. Tiene la ventaja de que atrae la atención del no experto y de que queda muy claro de qué se está hablando.

PRODUCCIÓN DE COCHES EN UNA FACTORÍA



Observa

El inconveniente de los pictogramas es la mala representación de la fracción.

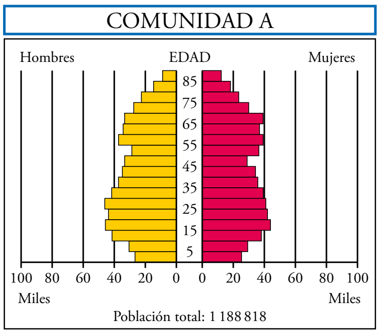
En nuestro ejemplo,  representa 2 000 coches.

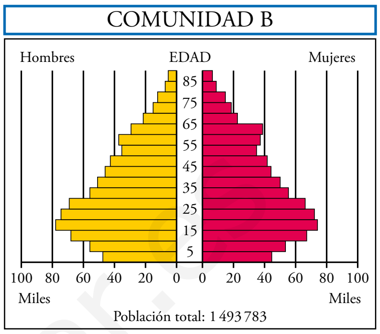
Pirámide de población

Una **pirámide de población** consiste en dos histogramas, uno para hombres y otro para mujeres, correspondientes a los habitantes de una cierta comunidad más o menos extensa, repartidos por edades. Resultan utilísimas para estudiar su situación demográfica y buscar explicación a problemas presentes y pasados. He aquí dos ejemplos:

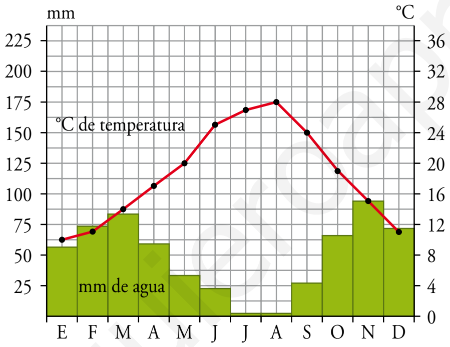
Observa

Se aprecia en la comunidad A una alta proporción de personas mayores. En la B, al contrario, la población es muy joven, con una reducidísima proporción de ancianos.





Climograma



En un **climograma** se señala la evolución, a lo largo de un año, de las **precipitaciones** y de la **temperatura** en un cierto lugar.

Observa

La temperatura se describe mediante un polígono. La cantidad de agua recogida se describe con una especie de histograma.

Actividades

1 Representa mediante un diagrama de barras la distribución de la ACTIVIDAD 2 de la página 168.

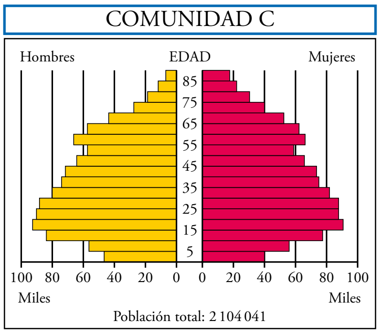
2 Representa mediante un diagrama de sectores la distribución de la ACTIVIDAD 1 de la página 168.

3 Comprueba que los datos del climograma de esta página corresponden a los de la siguiente tabla:

	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
TEMP. (°C)	10	11	14	17	20	25	27	28	24	19	15	11
LLUVIA (mm)	55	73	84	58	33	23	2	2	28	66	94	71

Averigua qué cantidad de lluvia (en mm) se recogió, en ese lugar, en cada uno de los cuatro trimestres del año.

4 Compara esta pirámide de población con las de las comunidades A y B que tienes arriba.



Refiérete a la proporción de niños (0 a 10 años), jóvenes (10 a 20 años) y ancianos (más de 75 años). Estudia la mayor longevidad de las mujeres.

4 Parámetros estadísticos

Los parámetros estadísticos son valores que se obtienen a partir de la distribución y que resumen alguna de sus características globales.

Parámetros de centralización

La media, la mediana y la moda se llaman medidas (o parámetros) de centralización, porque son valores alrededor de los cuales se distribuyen los datos.

Recordemos en qué consisten y cómo se calculan.

▼ **EJEMPLO.** Las respuestas de 13 alumnos a la pregunta *"¿Cuántos vivís en tu casa?"* han sido las siguientes: 2 3 3 4 4 4 5 5 6 6 7 8 8

Su **media** es $\bar{x} = \dfrac{2+3+3+4+4+4+5+5+6+6+7+8+8}{13} = \dfrac{65}{13} = 5$

Su **mediana** es $Me = 5$, porque es el valor que ocupa el lugar central cuando se sitúan ordenadamente: $\underbrace{2, 3, 3, 4, 4, 4}_{\text{hay 6}}, \underset{\uparrow}{5}, \underbrace{5, 6, 6, 7, 8, 8}_{\text{hay 6}}$

Su **moda** es $Mo = 4$, porque es el dato que se da más veces (3 veces).

La **media** de varias cantidades es la suma de todas ellas dividida por el número de las que hay.

Se llama **mediana** de un conjunto de datos numéricos al que, mirándolos en orden, ocupa el lugar central. Si hay un número par de datos, se asigna la mediana al valor intermedio entre los dos centrales.

La **moda** es el dato con mayor frecuencia. Este parámetro sí puede ser asignado a las variables cualitativas.

Ejercicio resuelto

Hallar $\bar{x}$, *Me* y *Mo* en las siguientes distribuciones:

a) N.º de libros leídos en un mes por 10 personas:

0, 1, 3, 4, 2, 8, 4, 6, 0, 4

b) Estación del año en la que nacieron 10 personas:

P, V, V, O, P, I, I, V, O, V

a) Media: $\bar{x} = \dfrac{0+1+3+4+2+8+4+6+0+4}{10} = \dfrac{32}{10} = 3{,}2$

Mediana. Se ordenan los datos:

$\underbrace{0, 0, 1, 2, 3}, \underbrace{4, 4, 4, 6, 8} \rightarrow Me = 3{,}5$ (el promedio de 3 y 4)

Moda: $Mo = 4$ (el dato que está más veces)

b) Es una variable cualitativa y no se le puede asignar media ni mediana. Su moda es $Mo = V$ (pues el número de personas nacidas en verano, 4, es mayor que en las demás estaciones).

Actividades

1 Halla $\bar{x}$, *Me* y *Mo* de las siguientes distribuciones:

a) Marcas de los coches que se están arreglando en un taller: R (Renault), S (Seat), C (Citroën), A (Audi), M (Mercedes):

R, A, C, S, R, S, S, M, C, R, S, S, R

b) Edades de varios chicos y chicas:

12, 15, 13, 12, 16, 10, 11, 12, 10, 11, 12, 9, 9, 10, 8

c) Número de asignaturas suspendidas en la última evaluación:

0, 1, 0, 2, 4, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 0, 0, 0, 1

Parámetros de dispersión

Las medidas de centralización dan una visión muy parcial de la distribución. Deben ser complementadas con otros parámetros que informan sobre el grado de dispersión de los datos. Veamos algunos de ellos.

Recorrido

El **recorrido** de una distribución es la diferencia entre los valores extremos:

RECORRIDO = valor mayor – valor menor

En las distribuciones de la página anterior, sus recorridos son:

RECORRIDO DE (I) = 10 – 1 = 9 RECORRIDO DE (II) = 30 – 1 = 29

Desviación media

La **desviación media,** DM, de una distribución es un parámetro asociado a su media: es el promedio de las distancias a la media de los valores de todos los individuos.

Por ejemplo, consideremos la distribución 5, 8, 10, 11, 15, 17.

$\bar{x} = 11 \rightarrow$

DATOS	5	8	10	11	15	17
DISTANCIA A LA MEDIA	6	3	1	0	4	6

Promedio de las distancias a la media:

$$DM = \frac{6 + 3 + 1 + 0 + 4 + 6}{6} = \frac{20}{6} = 3{,}33$$

Distancias a la media

La distancia de 5 a $\bar{x} = 11$ es:

$11 - 5 = 6$

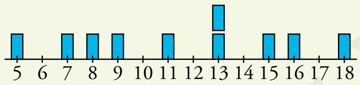
La distancia de 15 a $\bar{x} = 11$ es:

$15 - 11 = 4$

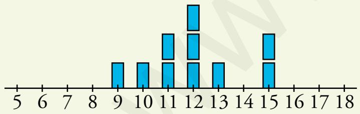
Ejercicio resuelto

Hallar la desviación media de las siguientes distribuciones:

(III) 5, 7, 8, 9, 11, 13, 13, 15, 16, 18



(IV) 9, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 15, 15



(III) Su media es $\bar{x} = 11{,}5$.

DATOS	5	7	8	9	11	13	13	15	16	18
DISTANCIA A 11,5	6,5	4,5	3,5	2,5	0,5	1,5	1,5	3,5	4,5	6,5

$\xrightarrow{\text{SUMA}}$ 35

$$\text{Desviación media: } DM = \frac{\text{suma de las distancias a } \bar{x}}{10} = \frac{35}{10} = 3{,}5$$

(IV) Su media es $\bar{x} = 12$.

DATOS	9	10	11	11	12	12	12	13	15	15
DISTANCIA A 12	3	2	1	1	0	0	0	1	3	3

$\xrightarrow{\text{SUMA}}$ 14

$$\text{Desviación media: } DM = \frac{14}{10} = 1{,}4$$

Los datos de (III) (DM = 3,5) están más dispersos que los de (IV) (DM = 1,4).

Actividades

2 Calcula el recorrido y la desviación media en las distribuciones A y B de la página anterior.

Cálculo de $\bar{x}$ en tablas de frecuencias

La distribución del *número de hijos* de un grupo de familias viene dada por la tabla siguiente. Queremos calcular su $\bar{x}$.

N.º DE HIJOS	FRECUENCIA
1	5
2	15
3	11
4	4
5	0
6	1

Cálculo de la media

¿Cuántas familias hay? Sumamos las frecuencias: $5 + 15 + 11 + 4 + 1 = 36$

¿Cuál es la suma total de hijos de las 36 familias? Esta suma es:

$$\overbrace{1 + 1 + 1 + 1 + 1}^{\text{5 veces}} + \overbrace{2 + 2 + \ldots + 2}^{\text{15 veces}} + \overbrace{3 + \ldots + 3}^{\text{11 veces}} + \overbrace{4 + 4 + 4 + 4}^{\text{4 veces}} + \overbrace{6}^{1}$$

Es más fácil hacerlo así: $5 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 90$

La media es, pues, $\bar{x} = \dfrac{90}{36} = 2{,}5$.

Cálculos directos sobre la tabla

Los cálculos anteriores se realizan muy cómodamente sobre la tabla.

x	*f*	*f* · *x*
1	5	5
2	15	30
3	11	33
4	4	16
5	0	0
6	1	6
	36	90

EL 2 ESTÁ 15 VECES
$15 \cdot 2 = 30$

EL 4 ESTÁ 4 VECES
$4 \cdot 4 = 16$

NÚMERO DE INDIVIDUOS

SUMA DE LOS VALORES DE TODOS LOS INDIVIDUOS

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{90}{36} = 2{,}5$

Actividades

3 Halla la media de las siguientes distribuciones.

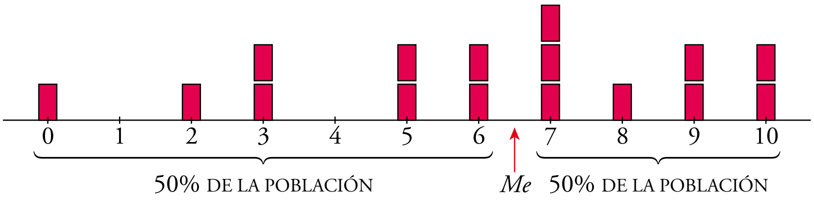
a)

x	2	3	4	5	6	7
f	2	4	12	8	3	1

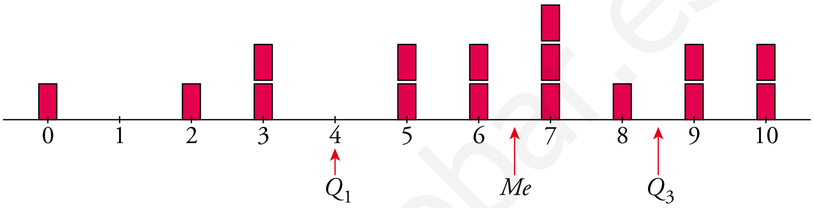
b)

x	1	2	3	4	6	7	12
f	9	7	3	3	1	1	6

A la derecha de la mediana, *Me*, está la mitad de la población. A su izquierda, la otra mitad. Es decir, la mediana parte en dos a la población:



¿Qué pasaría si quisiéramos partir la población en cuatro partes con el mismo número de individuos? Habría que señalar otros dos puntos:

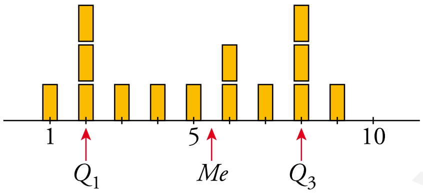


Observa

¿POR QUÉ SE LLAMAN Q_1 Y Q_3?

Porque la mediana sería el segundo cuartil $(Me = Q_2)$.

La mediana y los cuartiles son **medidas de posición.**



Esos dos nuevos puntos se llaman **cuartiles:**

- Q_1: cuartil inferior. Entre Q_1 y Me está un 25% de la población.
- Q_3: cuartil superior. Entre Me y Q_3 está un 25% de la población.

▼ **EJEMPLO**

DISTRIBUCIÓN: 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 9

Tiene 14 individuos. La cuarta parte (25%) es 14 : 4 = 3,5.

- Q_1 tiene que dejar a su izquierda "3 elementos y medio". Por tanto, hemos de situarlo en el cuarto individuo, considerando que "medio individuo" queda a su izquierda, y el "otro medio", a su derecha. Es decir: $Q_1 = 2$.
- Me tiene que dejar a su izquierda 7 individuos ($3{,}5 \cdot 2 = 7$). Por tanto, está entre el 7.° y el 8.° elemento; es decir, $Me = 5{,}5$.
- Q_3 tiene que dejar a su izquierda "10 elementos y medio" ($3{,}5 \cdot 3 = 10{,}5$). Por tanto, según el razonamiento seguido para hallar Q_1, Q_3 está en el 11.° elemento; es decir, $Q_3 = 8$.

Resumiendo:

$$1,\ 2,\ 2,\ \underset{\substack{\uparrow\\ Q_1 = 2}}{2},\ 3,\ 4,\ 5,\ \underset{\substack{\uparrow\\ Me = 5{,}5}}{\ }\ 6,\ 6,\ 7,\ \underset{\substack{\uparrow\\ Q_3 = 8}}{8},\ 8,\ 8,\ 9$$

Actividades

1 En cada una de las siguientes distribuciones:

a) Halla Q_1, Me y Q_3.

b) Representa los datos y sitúa Q_1, Me y Q_3 sobre ellos.

A: 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 9, 10

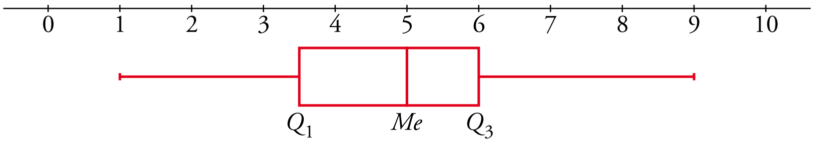
B: 1, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 16

C: 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 5, 10

Diagramas de caja (o "de caja y bigotes")

Esta representación gráfica está estrechamente ligada a las medidas de posición, mediana y cuartiles, que hemos aprendido en el apartado anterior.

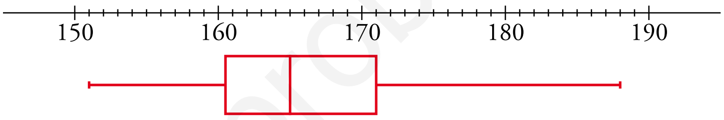
Consiste en representar estos tres valores, así como el recorrido, de manera muy clara. Por ejemplo, una distribución de notas representada así:



significa: el menor valor es 1, y el mayor, 9. $Q_1 = 3{,}5$; $Me = 5$; $Q_3 = 6$. Es decir, **la caja** describe el tramo que hay entre los dos cuartiles, señalando expresamente la mediana, y **los bigotes** se extienden a la totalidad de los datos.

EJEMPLO

Las estaturas de un grupo de jóvenes se representan mediante el siguiente diagrama de caja y bigotes:



A la vista del diagrama podemos decir:

El más bajo mide 151 cm, y el más alto, 188 cm.

Los cuartiles son $Q_1 = 160{,}5$ cm y $Q_3 = 171$ cm.

La mediana, $Me = 165$ cm.

Como consecuencia, un 25% de estos jóvenes miden entre 151 cm y 160,5 cm; otro 25%, entre 160,5 y 165 cm; otro 25%, entre 165 cm y 171 cm, y el último 25% (los más altos) miden entre 171 cm y 188 cm.

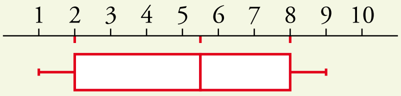
Ejercicio resuelto

Representa en un diagrama de caja y bigotes los datos:

1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 9

En la página anterior hemos obtenido sus medidas de posición:

$Q_1 = 2$ $\quad Me = 5{,}5$ $\quad Q_3 = 8$



Ponemos la escala.

Dibujamos el diagrama.

Actividades

2 Representa mediante un diagrama de caja y bigotes cada una de las tres distribuciones de la ACTIVIDAD 1 de la página anterior.

Utiliza los valores de la media, Me, y de los cuartiles, Q_1 y Q_3, obtenidos en esa actividad.

3 Representa mediante un diagrama de caja y bigotes las siguientes calificaciones de 35 individuos:

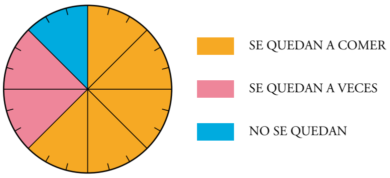
0 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5 5 6 6 6
6 7 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 8
9 9 9 10 10

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Gráficas estadísticas

1 ▼▼▽ Este diagrama de sectores representa los 24 estudiantes de una clase de 1.º de ESO, según se queden o no a comer en el colegio:

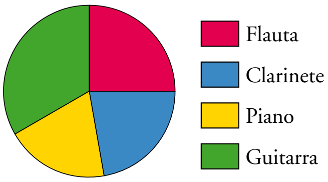


a) ¿Qué fracción de los alumnos se queda a comer?

b) ¿Qué porcentaje no se queda nunca?

c) ¿Qué tanto por ciento se queda a veces?

2 ▼▼▽ En clase de Música, cada alumno tiene que elegir un instrumento entre cuatro posibles. La distribución de los alumnos según el instrumento elegido viene dada por este diag,rama de sectores:



a) ¿Cuál es el instrumento más elegido? ¿Y el menos?

b) ¿Hay algún instrumento que lo hayan elegido exactamente el 25% de la clase?

c) Sabiendo que los alumnos que han elegido cada instrumento son 7, 8, 9 y 12, ¿qué número corresponde a cada uno de ellos?

3 ▼▼▽ Haz un climograma como el de la página 170 con los siguientes datos:

	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
T	14	13	20	22	26	29	32	30	28	22	16	12
LL	85	93	62	120	40	50	30	45	10	24	60	90

T: temperatura en °C. LL: pluviosidad en mm de agua.

Parámetros estadísticos

4 ▼▽▽ Halla la media, la mediana, el recorrido, la desviación media y los cuartiles de las siguientes distribuciones:

a) 1, 3, 8, 9, 4, 1, 1, 7, 10, 10

b) 1, 3, 5, 4, 2, 8, 9, 6, 10, 6

5 ▼▽▽ Compara la media y la mediana de cada una de las siguientes distribuciones y relaciona el resultado con su asimetría:

a) 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 8

b) 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10

c) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9

6 ▼▼▽ Lanzamos un dado 40 veces. Estos son los resultados:

3	5	1	2	5	5	3	4	6	2
4	3	6	4	1	6	4	2	6	1
4	3	5	6	2	1	5	6	6	2
4	2	3	2	6	5	4	1	6	1

a) Halla la frecuencia de cada uno de los valores de la variable.

b) Calcula la media y la moda de la distribución.

7 ▼▼▽ Halla la media y la desviación media de cada una de las siguientes distribuciones. Represéntalas.

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	0	0	1	1	6	15	9	4	3	0	1

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	9	6	1	1	0	1	1	1	1	7	12

Parámetros de posición

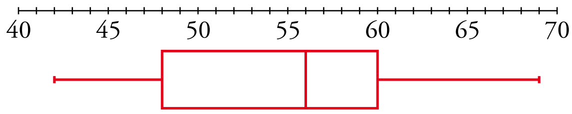
8 ▼▽▽ El número de errores que tuvieron en un test un grupo de estudiantes fueron:

1, 1, 2, 2, 4, 5, 5, 8, 8, 9

Halla la mediana y los cuartiles primero y tercero, y haz un diagrama de caja con esos datos.

9 ▼▽▽ Los tiempos que un grupo de personas han empleado en hacer un test se distribuyen entre 0 y 50 minutos. Construye el diagrama de caja sabiendo que $Q_1 = 23$, $Me = 34$ y $Q_3 = 39$.

10 ▼▽▽ Este diagrama de caja representa la distribución de los pesos de un grupo de alumnos y alumnas de una clase:



Completa en tu cuaderno estas frases observando el diagrama:

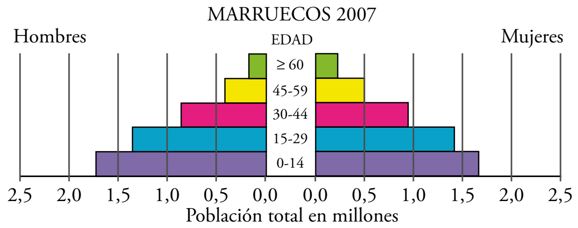
a) El 50% de los alumnos y las alumnas de esta clase pesan … o menos.

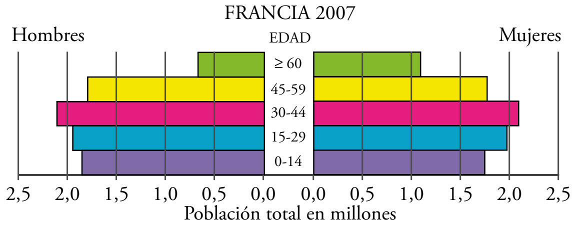
b) El 25% de los alumnos y las alumnas de esta clase pesan … o menos.

c) El 25% de los alumnos y las alumnas de esta clase pesan … o más.

d) El 50% de los pesos centrales varían entre … y …

11 ▼▼▽ Observa estas pirámides de población:





¿Verdadero o falso? Justifícalo:

a) La proporción de ancianos/as en Francia es mucho mayor que en Marruecos.

b) Hay más ancianas que ancianos en ambos países.

c) La proporción de niños/as es mayor en Marruecos que en Francia.

12 ▼▼▼ En una clase de 30 alumnos y alumnas hay 17 chicas. En total, hay 14 con gafas. Sabemos que 6 chicas tienen gafas. ¿Cuántos chicos hay sin gafas? Completa esta tabla en tu cuaderno:

	GAFAS	NO GAFAS	TOTAL
CHICAS			
CHICOS			
TOTAL			

Autoevaluación

¿Sabes hallar algunos parámetros estadísticos a partir de datos sueltos o dados en una tabla de frecuencias?

1 Halla la media, la mediana, la moda y la desviación media de las siguientes distribuciones:

a) 10, 12, 19, 15, 8, 10, 10

b) 0, 3, 3, 3, 3, 4, 5

2 Halla la media de esta distribución:

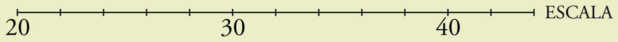
x	2	3	4	5	6	7	8	9
f	4	8	6	3	1	2	0	1

¿Sabes hallar algunos parámetros de posición y sabes construir e interpretar diagramas de caja?

3 Halla la mediana y los cuartiles de esta distribución:

23, 25, 26, 28, 31, 31, 34, 36, 36, 37, 38, 38, 39, 40

Construye un diagrama de caja.



¿Interpretas tablas de doble entrada?

4 Estas son las notas de un examen:

1	5	8	6	2	2	7	8	4	9
4	6	5	4	5	7	2	3	6	8
9	3	2	5	3	10	6	10	1	10
6	8	7	8	4	5	5	6	10	5

a) La variable, ¿es cualitativa o cuantitativa?

b) Representa los datos en una tabla de frecuencias.

c) Recoge los resultados en un diagrama de barras.

d) Halla la media, la mediana y la moda.

Registros de evaluación

Se ofrecen dos tipos de registros: el **informe individualizado de evaluación** recoge los criterios de evaluación y las competencias trabajadas en un conjunto de unidades. Le facilitará la elaboración de informes personalizados para anotar los criterios y las competencias superadas o pendientes. El **registro de evaluación por competencias para el aula, de un conjunto de unidades,** le ayudará en el seguimiento de la evolución personal y colectiva de cada grupo de alumnos.

Informe individualizado de evaluación

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	
UNIDAD 1 DIVISIBILIDAD Y NÚMEROS ENTEROS	
1.1. Reconoce si un número es múltiplo o divisor de otro.	
1.2. Obtiene el conjunto de los divisores de un número.	
1.3. Halla múltiplos de un número, dadas unas condiciones.	
1.4. Justifica las propiedades de los múltiplos y divisores.	
2.1. Identifica los números primos menores que 100.	
2.2. Dado un conjunto de números, separa los primos de los compuestos.	
3.1. Conoce y aplica los criterios de divisibilidad.	
3.2. Aplica procedimientos óptimos para descomponer un número en factores primos.	
4.1. Calcula mentalmente el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números sencillos.	
4.2. Conoce y aplica los algoritmos óptimos para calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números.	
4.3. Resuelve problemas apoyándose en el concepto de máximo común.	
4.4. Resuelve problemas apoyándose en el concepto de mínimo común múltiplo.	
5.1. Identifica, en un conjunto de números, los enteros.	
5.2. Coloca números naturales y enteros en diagramas que representan a estos conjuntos de números.	
6.1. Suma y resta números enteros.	
6.2. Multiplica y divide números enteros.	
6.3. Resuelve operaciones combinadas en $\mathbb{Z}$.	
7.1. Resuelve problemas de dos o más operaciones con números naturales.	
7.2. Resuelve problemas de números positivos y negativos.	
UNIDAD 2 SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL Y SISTEMA SEXAGESIMAL	
1.1. Lee y escribe números decimales.	
1.2. Conoce las equivalencias entre los distintos órdenes de unidades decimales y enteros.	
1.3. Distingue los distintos tipos de números decimales (exactos, periódicos, otros).	
2.1. Asocia los números decimales y sus correspondientes puntos en la recta numérica.	
2.2. Ordena un conjunto de números decimales.	
2.3. Aproxima, por redondeo, un decimal al orden de unidades deseado.	
2.4. Estima el error cometido en un redondeo.	
2.5. Intercala un decimal entre otros dos dados.	

Informe individualizado de evaluación

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	
3.1. Suma, resta y multiplica números decimales.	
3.2. Divide números enteros y decimales aproximando el cociente hasta el orden de unidades deseada.	
3.3. Multiplica y divide por la unidad seguida de ceros.	
3.4. Resuelve expresiones con operaciones combinadas de números decimales.	
3.5. Calcula la raíz cuadrada de un número con la aproximación deseada.	
4.1. Transforma amplitudes angulares y tiempos de forma compleja a incompleja.	
4.2. Transforma amplitudes angulares y tiempos de forma incompleja a compleja.	
5.1. Suma y resta amplitudes angulares y tiempos expresados en forma compleja.	
5.2. Multiplica y divide amplitudes angulares y tiempos por un número.	
6.1. Resuelve problemas con varias operaciones de números decimales.	
6.2. Resuelve problemas que exigen el manejo de cantidades sexagesimales en forma compleja.	
UNIDAD 3 LAS FRACCIONES	
1.1. Asocia una fracción a una parte de un todo.	
1.2. Expresa una fracción en forma decimal.	
1.3. Calcula la fracción de un número.	
2.1. Identifica si dos fracciones son equivalentes.	
2.2. Obtiene varias fracciones equivalentes a una dada.	
2.3. Obtiene la fracción equivalente a una dada con ciertas condiciones.	
3.1. Simplifica fracciones hasta obtener la fracción irreducible.	
3.2. Reduce fracciones a común denominador.	
3.3. Ordena fracciones reduciéndolas previamente a común denominador.	
4.1. Suma y resta fracciones.	
4.2. Multiplica y divide fracciones.	
4.3. Reduce expresiones con operaciones combinadas.	
5.1. Resuelve problemas en los que se calcula la fracción de un número.	
5.2. Resuelve problemas de sumas y restas de fracciones.	
5.3. Resuelve problemas de multiplicación y/o división de fracciones.	
5.4. Resuelve problemas utilizando el concepto de fracción de una fracción.	
6.1. Sitúa cada uno de los elementos de un conjunto numérico en un diagrama que relaciona los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.	

Informe individualizado de evaluación

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	
6.2. Identifica, en un conjunto de números, los que son racionales.	
6.3. Expresa en forma de fracción un decimal exacto.	
6.4. Expresa en forma de fracción un decimal periódico.	
7.1. Calcula potencias de base positiva o negativa y exponente natural.	
7.2. Interpreta y calcula las potencias de exponente negativo.	
8.1. Obtiene la descomposición polinómica de un número decimal, según las potencias de base diez.	
8.2. Obtiene una aproximación abreviada de un número muy grande o muy pequeño mediante el producto de un número decimal sencillo por una potencia de base diez.	
9.1. Calcula la potencia de un producto o de un cociente.	
9.2. Multiplica y divide potencias de la misma base.	
9.3. Calcula la potencia de otra potencia.	
9.4. Reduce expresiones utilizando las propiedades de las potencias.	
UNIDAD 4 PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES	
1.1. Obtiene la razón de dos números. Selecciona dos números que guardan una razón dada. Calcula un número que guarda con otra una razón dada.	
1.2. Identifica si dos razones forman proporción.	
1.3. Calcula el término desconocido de una proporción.	
2.1. Distingue las magnitudes proporcionales de las que no lo son.	
2.2. Identifica si la relación de proporcionalidad que liga dos magnitudes es directa o inversa, construye la tabla de valores correspondiente y obtiene, a partir de ella, distintas proporciones.	
3.1. Resuelve, reduciendo a la unidad, problemas sencillos de proporcionalidad directa.	
3.2. Resuelve, reduciendo a la unidad, problemas sencillos de proporcionalidad inversa.	
3.3. Resuelve problemas de proporcionalidad directa.	
3.4. Resuelve problemas de proporcionalidad inversa.	
3.5. Resuelve problemas de proporcionalidad compuesta.	
4.1. Asocia cada porcentaje a una fracción.	
4.2. Obtiene porcentajes directos.	
4.3. Obtiene el total, conocidos la parte y el porcentaje.	
4.4. Obtiene el porcentaje, conocidos el total y la parte.	
5.1. Resuelve problemas de porcentajes.	
5.2. Resuelve problemas de aumentos y disminuciones porcentuales.	
5.3. Resuelve problemas de interés bancario.	

Informe individualizado de evaluación

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

COMPETENCIAS/INDICADORES DE SEGUIMIENTO	
MATEMÁTICA	
Domina los conceptos de divisibilidad y los aplica.	
Aplica los conceptos y procedimientos relativos a operaciones, en el S.N.D. y en el sistema sexagesimal.	
Conoce las propiedades de las potencias y las justifica.	
Identifica y clasifica los números racionales.	
Identifica y diferencia las relaciones de proporcionalidad, y aplica distintos métodos para resolver situaciones.	
COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA	
Identifica la información matemática de un texto y, si es el caso, la relaciona con conceptos de divisibilidad.	
Expone con claridad ideas, conclusiones y procesos de resolución.	
Describe ordenadamente y con precisión los procesos de cálculo.	
Interpreta información cuantitativa.	
Entiende y construye mensajes en los que se utiliza la terminología básica de la matemática comercial.	
CONOCIMIENTO E INTERACCIÓN CON EL MUNDO FÍSICO	
Aplica los conceptos sobre números, divisibilidad y proporcionalidad para analizar, describir y resolver situaciones cotidianas.	
Valora los problemas “tipo” como recursos para mejorar el análisis y la comprensión de su entorno.	
TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN Y COMPETENCIA DIGITAL	
Busca por distintos medios información relacionada con textos leídos.	
Calcula potencias y raíces con la calculadora.	
Codifica y decodifica números.	
Usa la calculadora para realizar cálculos y comprobar resultados.	
SOCIAL Y CIUDADANA	
Aplica lo aprendido sobre números en el análisis y en la resolución de situaciones cotidianas.	
Aplica los porcentajes en el análisis y en la resolución de situaciones cotidianas.	
CULTURAL Y ARTÍSTICA	
Valora el legado cultural del pasado y el esfuerzo realizado en el camino hacia el saber.	
Muestra curiosidad por la construcción y la evolución de los sistemas de numeración a lo largo de la historia.	
Muestra interés por los retos de tipo lógico-matemático.	
APRENDER A APRENDER	
Muestra interés por conocer la estructura de los números y sus propiedades.	
Busca actividades de refuerzo cuando necesita afianzar algún aspecto de los contenidos. Profundiza en las actividades propuestas.	
Justifica los procedimientos presentados y muestra interés por comprenderlos.	
DESARROLLO DE LA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL Y COMPETENCIA EMOCIONAL	
Reconoce la necesidad de insistir en la resolución de expresiones con números como la forma de consolidar estrategias y evitar errores.	
Desarrolla estrategias de elaboración personal para resolver situaciones numéricas.	
Coopera con sus compañeros y busca ayuda para resolver las actividades.	
Valora lo aprendido como base de aprendizajes futuros.	

Informe individualizado de evaluación

Nombre y apellidos: ....

Curso: ....   **Fecha:** ....

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	
Unidad 5 Álgebra	
1.1. Traduce a lenguaje algebraico enunciados relativos a números desconocidos o indeterminados.	
1.2. Expresa, por medio del lenguaje algebraico, relaciones o propiedades numéricas.	
2.1. Interpreta relaciones numéricas expresadas en lenguaje algebraico (por ejemplo, completa una tabla de valores correspondientes conociendo la ley general de asociación).	
3.1. Identifica el grado, el coeficiente y la parte literal de un monomio.	
3.2. Clasifica los polinomios y los distingue de otras expresiones algebraicas.	
3.3. Calcula el valor numérico de un polinomio para un valor dado de la indeterminada.	
4.1. Suma, resta, multiplica y divide monomios.	
4.2. Suma y resta polinomios.	
4.3. Multiplica polinomios.	
4.4. Extrae factor común.	
4.5. Aplica las fórmulas de los productos notables.	
4.6. Transforma en producto ciertos trinomios utilizando las fórmulas de los productos notables.	
4.7. Simplifica fracciones algebraicas sencillas.	
Unidad 6 Ecuaciones	
1.1. Reconoce si un valor determinado es o no solución de una ecuación.	
1.2. Escribe una ecuación que tenga por solución un valor dado.	
2.1. Transpone términos en una ecuación (los casos inmediatos: $a + x = b$; $a - x = b$; $x - a = b$; $ax = b$; $x/a = b$).	
2.2. Resuelve ecuaciones sencillas (sin paréntesis ni denominadores).	
2.3. Resuelve ecuaciones con paréntesis.	
2.4. Resuelve ecuaciones con denominadores.	
2.5. Resuelve ecuaciones con paréntesis y denominadores.	
3.1. Resuelve problemas de relaciones numéricas.	
3.2. Resuelve problemas aritméticos sencillos (edades, presupuestos...).	
3.3. Resuelve problemas aritméticos de dificultad media (móviles, mezclas...).	
3.4. Resuelve problemas geométricos.	
4.1. Resuelve ecuaciones de segundo grado incompletas.	
4.2. Resuelve ecuaciones de segundo grado dadas en la forma general.	
4.3. Resuelve ecuaciones de segundo grado que exigen la previa reducción a la forma general.	

Informe individualizado de evaluación

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	
5.1. Resuelve problemas de relaciones numéricas.	
5.2. Resuelve problemas aritméticos sencillos.	
5.3. Resuelve problemas aritméticos de dificultad media.	
5.4. Resuelve problemas geométricos.	
UNIDAD 7 SISTEMAS DE ECUACIONES	
1.1. Reconoce si un par de valores (x, y) es solución de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.	
1.2. Dada una ecuación lineal, construye una tabla de valores (x, y), con varias de sus soluciones, y la representa en el plano cartesiano.	
2.1. Identifica, entre un conjunto de pares de valores, la solución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.	
2.2. Reconoce, ante la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales, si el sistema tiene solución; y, en caso de que la tenga, la identifica.	
3.1. Obtiene gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.	
3.2. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales por el método de sustitución.	
3.3. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales por el método de igualación.	
3.4. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales por el método de reducción.	
3.5. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales eligiendo el método que va a seguir.	
4.1. Resuelve problemas de relaciones numéricas con sistemas de ecuaciones.	
4.2. Resuelve problemas aritméticos sencillos con ayuda de los sistemas de ecuaciones.	
4.3. Resuelve problemas aritméticos de dificultad media con ayuda de los sistemas de ecuaciones.	
4.4. Resuelve problemas geométricos con ayuda de los sistemas de ecuaciones.	

Informe individualizado de evaluación

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

COMPETENCIAS/INDICADORES DE SEGUIMIENTO	
Matemática	
Reconoce los monomios, los polinomios y sus elementos. Opera con ellos.	
Resuelve ecuaciones de primer grado.	
Reconoce los tipos de ecuaciones de segundo grado y las resuelve.	
Representa un sistema de ecuaciones lineales y resuelve sistemas aplicando distintos métodos.	
Utiliza las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones para resolver problemas.	
Comunicación lingüística	
Interpreta facturas, artículos, etc., en los que aparecen fórmulas y recursos algebraicos.	
Utiliza códigos alfanuméricos, facilitadores de la información.	
Reconoce los elementos de una ecuación, los nombra y los integra en su lenguaje.	
Entiende y aplica el lenguaje algebraico como un recurso expresivo, con sus elementos y sus normas.	
Conoce la terminología relativa a las ecuaciones, la entiende y la integra en el lenguaje del área.	
Expresa ideas y conclusiones con claridad.	
Conocimiento e interacción con el mundo físico	
Utiliza el álgebra como un recurso sencillo para expresar fenómenos y situaciones del mundo real.	
Traduce enunciados reales a lenguaje algebraico.	
Tratamiento de la información y competencia digital	
Sabe utilizar internet para buscar información.	
Sabe utilizar internet para avanzar en su aprendizaje.	
Social y ciudadana	
Valora las aportaciones de otras culturas al desarrollo del saber.	
Participa activamente en el trabajo en grupo.	
Cultural y artística	
Valora las aportaciones de otras culturas al desarrollo del saber.	
Muestra interés por las actividades relacionadas con la matemática recreativa.	
Aprender a aprender	
Valora el álgebra como medio para simplificar procesos y facilitar el razonamiento en matemáticas.	
Aplica, en las expresiones algebraicas, las estrategias y propiedades de las operaciones con números.	
Actúa ordenadamente y utiliza distintos recursos en los procesos de investigación y búsqueda.	
Muestra creatividad y utiliza distintos recursos para resolver ecuaciones de diversos tipos.	
Analiza y critica problemas resueltos y justifica los procesos seguidos.	
Aplica lo que sabe en la elaboración de estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas.	
Desarrollo de la autonomía e iniciativa personal y competencia emocional	
Realiza las actividades y las corrige. Pide ayuda cuando la necesita.	
Muestra seguridad en sus capacidades y acepta, sin frustración, sus errores.	
Es tenaz y constante ante los problemas nuevos.	
Es capaz de autoevaluar sus conocimientos sobre sistemas de ecuaciones y sus aplicaciones.	

Informe individualizado de evaluación

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	
Unidad 8 Teorema de Pitágoras. Semejanza	
1.1. Dadas las longitudes de los tres lados de un triángulo, reconoce si es o no rectángulo.	
1.2. Calcula el lado desconocido de un triángulo rectángulo, conocidos los otros dos.	
1.3. En un cuadrado o rectángulo, aplica el teorema de Pitágoras para relacionar la diagonal con los lados y calcular el elemento desconocido.	
1.4. En un rombo, aplica el teorema de Pitágoras para relacionar las diagonales con el lado y calcular el elemento desconocido.	
1.5. En un trapecio rectángulo o isósceles, aplica el teorema de Pitágoras para establecer una relación que permita calcular un elemento desconocido.	
1.6. En un polígono regular, utiliza la relación entre radio, apotema y lado para, aplicando el teorema de Pitágoras, hallar uno de estos elementos a partir de los otros.	
1.7. Relaciona numéricamente el radio de una circunferencia con la longitud de una cuerda y su distancia al centro.	
1.8. Aplica el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas geométricos sencillos.	
1.9. Aplica el teorema de Pitágoras en el espacio.	
2.1. Calcula el área y el perímetro de un triángulo rectángulo, dándole dos de sus lados (sin la figura).	
2.2. Calcula el área y el perímetro de un rombo, dándole sus dos diagonales o una diagonal y el lado.	
2.3. Calcula el área y el perímetro de un trapecio rectángulo o isósceles cuando no se le da la altura o uno de los lados.	
2.4. Calcula el área y el perímetro de un segmento circular (dibujado), dándole el radio, el ángulo y la distancia del centro a la base.	
2.5. Calcula el área y el perímetro de un triángulo equilátero o de un hexágono regular dándole el lado.	
3.1. Reconoce, entre un conjunto de figuras, las que son semejantes, y enuncia las condiciones de semejanza.	
4.1. Construye figuras semejantes a una dada según unas condiciones establecidas (por ejemplo, dada la razón de semejanza).	
4.2. Conoce el concepto de escala y la aplica para interpretar planos y mapas.	
4.3. Obtiene la razón de semejanza entre dos figuras semejantes (o la escala de un plano o mapa).	
4.4. Calcula la longitud de los lados de una figura que es semejante a una dada y cumple unas condiciones dadas.	
5.1. Reconoce triángulos rectángulos semejantes aplicando criterios de semejanza.	
6.1. Calcula la altura de un objeto a partir de su sombra.	
6.2. Calcula la altura de un objeto mediante otros métodos, aplicando la semejanza de triángulos.	
Unidad 9 Cuerpos geométricos	
1.1. Conoce y nombra los distintos elementos de un poliedro (aristas, vértices, caras, caras laterales de los prismas, bases de los prismas y pirámides…).	
1.2. Selecciona, entre un conjunto de figuras, las que son poliedros y justifica su elección.	
1.3. Clasifica un conjunto de poliedros.	
1.4. Describe un poliedro y lo clasifica atendiendo a las características expuestas.	

Informe individualizado de evaluación

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	
1.5. Identifica, entre un conjunto de figuras, las que son de revolución, nombra los cilindros, los conos, los troncos de cono y las esferas, e identifica sus elementos (eje, bases, generatriz, radio...).	
2.1. Dibuja de forma esquemática el desarrollo de un ortoedro y se basa en él para calcular su superficie.	
2.2. Dibuja de forma esquemática el desarrollo de un prisma y se basa en él para calcular su superficie.	
2.3. Dibuja de forma esquemática el desarrollo de una pirámide y se basa en él para calcular su superficie.	
2.4. Dibuja de forma esquemática el desarrollo de un tronco de pirámide y se basa en él para calcular su superficie.	
3.1. Ante un poliedro regular, justifica su regularidad, lo nombra, lo analiza dando el número de caras, aristas, vértices y caras por vértice y dibuja esquemáticamente su desarrollo.	
3.2. Nombra los poliedros regulares que tienen por caras un determinado polígono regular.	
4.1. Calcula la diagonal de un ortoedro.	
4.2. Calcula la altura de una pirámide recta conociendo las aristas básicas y las aristas laterales.	
4.3. Calcula la superficie de una pirámide cuadrangular regular conociendo la arista de la base y la altura.	
4.4. Resuelve otros problemas de geometría.	
5.1. Dibuja a mano alzada el desarrollo de un cilindro, indica sobre él los datos necesarios y calcula el área.	
5.2. Dibuja a mano alzada el desarrollo de un cono, indica sobre él los datos necesarios y calcula el área.	
5.3. Dibuja a mano alzada el desarrollo de un tronco de cono, indica sobre él los datos necesarios y calcula el área.	
6.1. Calcula la superficie de una esfera, de un casquete o de una zona esférica, aplicando las correspondientes fórmulas.	
6.2. Conoce la relación entre la superficie de una esfera y la del cilindro que la envuelve, y utiliza esa relación para calcular el área de casquetes y zonas esféricas.	
Unidad 10 Medida del volumen	
1.1. Calcula el volumen de policubos por recuento de unidades cúbicas.	
1.2. Utiliza las equivalencias entre las unidades de volumen del SMD para efectuar cambios de unidades.	
1.3. Pasa una cantidad de volumen de complejo a incomplejo, y viceversa.	
2.1. Calcula el volumen de prismas, cilindros, pirámides, conos o una esfera, utilizando las correspondientes fórmulas (se dará la figura y sobre ella los datos necesarios).	
3.1. Calcula el volumen de un prisma de manera que haya que calcular previamente alguno de los datos para poder aplicar la fórmula (por ejemplo, calcular el volumen de un prisma hexagonal conociendo la altura y la arista de la base).	
3.2. Calcula el volumen de una pirámide de base regular, conociendo las aristas lateral y básica (o similar).	
3.3. Calcula el volumen de un cono conociendo el radio de la base y la generatriz (o similar).	
3.4. Calcula el volumen de troncos de pirámide y de troncos de cono (por descomposición de figuras).	
3.5. Calcula el volumen de cuerpos compuestos.	
3.6. Resuelve otros problemas de volumen (por ejemplo, que impliquen el cálculo de costes, que combinen con el cálculo de superficies, etc.).	

Informe individualizado de evaluación

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

COMPETENCIAS/INDICADORES DE SEGUIMIENTO	
MATEMÁTICA	
Reconoce los distintos tipos de figuras planas y espaciales, y sus características fundamentales.	
Domina y utiliza el teorema de Pitágoras para resolver problemas.	
Domina las semejanzas y el uso de las escalas.	
Usa la semejanza de triángulos para resolver problemas.	
Utiliza la semejanza cuando es necesario.	
Domina las unidades de volumen del SMD y las relaciones entre ellas.	
COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA	
Explica de forma clara y concisa los procedimientos y los resultados geométricos.	
Comprende los enunciados de los problemas y extrae la información necesaria para resolverlos.	
Extrae la información geométrica de un texto dado.	
CONOCIMIENTO E INTERACCIÓN CON EL MUNDO FÍSICO	
Reconoce elementos geométricos en su entorno.	
Reconoce semejanzas en su entorno.	
Reconoce la ayuda de la semejanza de triángulos para manejarse en el mundo físico.	
Utiliza las unidades de volumen para describir con exactitud fenómenos de la naturaleza.	
TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN Y COMPETENCIA DIGITAL	
Sabe utilizar internet para reforzar y avanzar en su aprendizaje.	
Utiliza internet para encontrar información.	
SOCIAL Y CIUDADANA	
Valora la aportación de otras culturas al desarrollo de la geometría.	
Toma conciencia de la utilidad de los conocimientos geométricos en multitud de labores humanas.	
CULTURAL Y ARTÍSTICA	
Reconoce el uso de semejanzas en distintas disciplinas (arte, arquitectura…).	
Reflexiona sobre la forma de hacer matemáticas en otras culturas.	
Crea o describe elementos artísticos geométricos con la ayuda de sus conocimientos.	
APRENDER A APRENDER	
Valora los conocimientos geométricos adquiridos.	
Amplía los contenidos básicos mediante la búsqueda de información.	
Es consciente de las carencias en sus conocimientos.	
Comprende el proceso de resolución de los problemas.	
Valora los conocimientos geométricos adquiridos como medio para resolver problemas.	
DESARROLLO DE LA AUTONOMÍA E INICIATIVA PERSONAL Y COMPETENCIA EMOCIONAL	
Resuelve problemas geométricos con ayuda de los conocimientos adquiridos.	
Elige el procedimiento más adecuado para resolver problemas de geometría espacial.	

Informe individualizado de evaluación

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	
Unidad 11 Funciones	
1.1. Localiza puntos en el plano a partir de sus coordenadas y nombra puntos del plano escribiendo sus coordenadas.	
2.1. Distingue si una gráfica representa o no una función.	
2.2. Interpreta una gráfica funcional y la analiza, reconociendo los intervalos constantes, los de crecimiento y los de decrecimiento.	
3.1. Dada la ecuación de una función, construye una tabla de valores (x, y) y la representa, punto por punto, en el plano cartesiano.	
4.1. Reconoce y representa una función de proporcionalidad, a partir de la ecuación, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.	
4.2. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.	
4.3. Obtiene la pendiente de una recta a partir de su gráfica.	
4.4. Identifica la pendiente de una recta y el punto de corte con el eje vertical a partir de su ecuación, dada en la forma $y = mx + n$.	
4.5. Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica.	
4.6. Reconoce una función constante por su ecuación o por su representación gráfica. Representa la recta $y = k$, o escribe la ecuación de una recta paralela al eje horizontal.	
4.7. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal existente entre dos magnitudes y la representa.	
Unidad 12 Estadística	
1.1. Distingue entre variables cualitativas y cuantitativas en distribuciones concretas.	
2.1. Elabora e interpreta tablas estadísticas sencillas (relativas a variables discretas).	
3.1. Representa e interpreta información estadística dada gráficamente (diagramas de barras, polígonos de frecuencias, histogramas, diagramas de sectores...).	
3.2. Interpreta pictogramas, pirámides de población y climogramas.	
3.3. Elabora e interpreta un diagrama de caja y bigotes.	
4.1. Calcula la media, la mediana, la moda y la desviación media de un pequeño conjunto de valores (entre 5 y 10).	
4.2. En una tabla de frecuencias, calcula la media y la moda.	
4.3. En un conjunto de datos (no más de 20), obtiene medidas de posición: Me, Q_1 y Q_3.	

Informe individualizado de evaluación

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

COMPETENCIAS/INDICADORES DE SEGUIMIENTO	
Matemática	
Extrae información a partir de una gráfica.	
Domina los elementos de las funciones y su representación gráfica.	
Representa rectas, calcula su ecuación y entiende el significado de su pendiente.	
Comprende qué implica la linealidad de una función.	
Domina los conceptos básicos relativos a la estadística.	
Comunicación lingüística	
Comprende la teoría y los ejemplos, y es capaz de aplicarlos en los ejercicios.	
Extrae de un texto la información necesaria para modelizar la situación que se propone mediante una función lineal.	
Se expresa con un lenguaje adecuado.	
Expresa concisa y claramente un análisis estadístico basado en un conjunto de datos.	
Conocimiento e interacción con el mundo físico	
Valora el uso de las funciones lineales como elementos matemáticos que describen multitud de fenómenos cotidianos.	
Valora la estadística como medio para describir y analizar multitud de procesos del mundo físico.	
Tratamiento de la información y competencia digital	
Sabe utilizar internet para avanzar en su aprendizaje.	
Obtiene información a partir de datos estadísticos y es capaz de analizarla críticamente.	
Social y ciudadana	
Domina el uso de las tablas de valores para poder entender informaciones dadas de este modo.	
Utiliza las funciones constantes para modelizar situaciones cotidianas.	
Domina los conceptos de la estadística como medio para analizar críticamente ciertas informaciones.	
Cultural y artística	
Reconoce la importancia de otras culturas en el desarrollo del estudio de las funciones.	
Utiliza las funciones lineales para modelizar situaciones cotidianas.	
Descubre el componente lúdico de las matemáticas.	
Aprender a aprender	
Amplía los contenidos básicos mediante la búsqueda de información.	
Es consciente de sus lagunas, a la vista de los problemas para representar una función.	
Extrae información de una función dada mediante su expresión analítica.	
Es capaz de autoevaluar sus conocimientos.	
Valora los conocimientos estadísticos adquiridos como medio para interpretar la realidad.	
Desarrollo de la autonomía e iniciativa personal y competencia emocional	
Analiza situaciones cotidianas mediante su representación gráfica.	
Sabe modelizar, mediante funciones lineales, una situación dada.	
Aprende a investigar elementos relacionados con las rectas.	
Desarrolla una conciencia crítica en relación con las noticias, los datos, los gráficos, etc., que obtenemos de los medios de comunicación.	

EVALUACIÓN UNIDADES 1 A 4

REGISTRO DE EVALUACIÓN

	MATEMÁTICA					COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA					CONOC. DEL MUNDO FÍSICO	
NOMBRE	Domina los conceptos de divisibilidad y los aplica.	Aplica los conceptos y procedimientos relativos a operaciones, en el S.N.D. y en el sistema sexagesimal.	Conoce las propiedades de las potencias y las justifica.	Identifica y clasifica los números racionales.	Identifica y diferencia las relaciones de proporcionalidad, y aplica distintos métodos para resolver situaciones.	Identifica la información matemática de un texto y, si es el caso, la relaciona con conceptos de divisibilidad.	Expone con claridad ideas, conclusiones y procesos de resolución.	Describe ordenadamente y con precisión los procesos de cálculo.	Interpreta información cuantitativa.	Entiende y construye mensajes en los que se utiliza la terminología básica de la matemática comercial.	Aplica los conceptos sobre números, divisibilidad y proporcionalidad para analizar, describir y resolver situaciones cotidianas.	Valora los problemas "tipo" como recursos para mejorar el análisis y la comprensión de su entorno.
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												
23												
24												
25												
26												
27												
28												
29												
30												
31												
32												
33												
34												
35												

POR COMPETENCIAS PARA EL AULA

T. INFORMACIÓN Y C. DIGITAL				SOCIAL Y CIUDADANA		CULTURAL Y ARTÍSTICA			APRENDER A APRENDER				INICIATIVA PERSONAL Y C. EMOCIONAL			
Busca por distintos medios información relacionada con textos leídos.	Calcula potencias y raíces con la calculadora.	Codifica y decodifica números.	Usa la calculadora para realizar cálculos y comprobar resultados.	Aplica lo aprendido sobre números en el análisis y en la resolución de situaciones cotidianas.	Aplica los porcentajes en el análisis y en la resolución de situaciones cotidianas.	Valora el legado cultural del pasado y el esfuerzo realizado en el camino hacia el saber.	Muestra curiosidad por la construcción y la evolución de los sistemas de numeración a lo largo de la historia.	Muestra interés por los retos de tipo lógico-matemático.	Muestra interés por conocer la estructura de los números y sus propiedades.	Busca actividades de refuerzo cuando necesita afianzar algún aspecto de los contenidos.	Profundiza en las actividades propuestas.	Justifica los procedimientos presentados y muestra interés por comprenderlos.	Reconoce la necesidad de insistir en la resolución de expresiones con números como la forma de consolidar estrategias y evitar errores.	Desarrolla estrategias de elaboración personal para resolver situaciones numéricas.	Coopera con sus compañeros y busca ayuda para resolver las actividades.	Valora lo aprendido como base de aprendizajes futuros.

EVALUACIÓN UNIDADES 5 A 7	REGISTRO DE EVALUACIÓN												
	MATEMÁTICA					COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA						C. DEL M. FÍSICO	
NOMBRE	Reconoce los monomios, los polinomios y sus elementos. Opera con ellos.	Resuelve ecuaciones de primer grado.	Reconoce los tipos de ecuaciones de segundo grado y las resuelve.	Representa un sistema de ecuaciones lineales y resuelve sistemas aplicando distintos métodos.	Utiliza las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones para resolver problemas.	Interpreta facturas, artículos, etc., en los que aparecen fórmulas y recursos algebraicos.	Utiliza códigos alfanuméricos, facilitadores de la información.	Reconoce los elementos de una ecuación, los nombra y los integra en su lenguaje.	Entiende y aplica el lenguaje algebraico como un recurso expresivo, con sus elementos y sus normas.	Conoce la terminología relativa a las ecuaciones, la entiende y la integra en el lenguaje del área.	Expresa ideas y conclusiones con claridad.	Utiliza el álgebra como un recurso sencillo para expresar fenómenos y situaciones del mundo real.	Traduce enunciados reales a lenguaje algebraico.
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													
26													
27													
28													
29													
30													
31													
32													
33													
34													
35													

POR COMPETENCIAS PARA EL AULA

T. INF. Y C. DIGITAL		SOCIAL Y CIUDAD.		CULT. Y ARTÍSTICA		APRENDER A APRENDER						INICIATIVA PERSONAL Y C. EMOCIONAL			
Sabe utilizar internet para buscar información.	Sabe utilizar internet para avanzar en su aprendizaje.	Valora las aportaciones de otras culturas al desarrollo del saber.	Participa activamente en el trabajo en grupo.	Valora las aportaciones de otras culturas al desarrollo del saber.	Muestra interés por las actividades relacionadas con la matemática recreativa.	Valora el álgebra como medio para simplificar procesos y facilitar el razonamiento en matemáticas.	Aplica, en las expresiones algebraicas, las estrategias y propiedades de las operaciones con números.	Actúa ordenadamente y utiliza distintos recursos en los procesos de investigación y búsqueda.	Muestra creatividad y utiliza distintos recursos para resolver ecuaciones de diversos tipos.	Analiza y critica problemas resueltos y justifica los procesos seguidos.	Aplica lo que sabe en la elaboración de estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas.	Realiza las actividades y las corrige. Pide ayuda cuando la necesita.	Muestra seguridad en sus capacidades y acepta, sin frustración, sus errores.	Es tenaz y constante ante los problemas nuevos.	Es capaz de autoevaluar sus conocimientos sobre sistemas de ecuaciones y sus aplicaciones.

EVALUACIÓN UNIDADES 8 A 10	REGISTRO DE EVALUACIÓN												
	MATEMÁTICA						COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA			CONOCIMIENTO DEL MUNDO FÍSICO			
NOMBRE	Reconoce los distintos tipos de figuras planas y espaciales, y sus características fundamentales.	Domina y utiliza el teorema de Pitágoras para resolver problemas.	Domina las semejanzas y el uso de las escalas.	Usa la semejanza de triángulos para resolver problemas.	Utiliza la semejanza cuando es necesario.	Domina las unidades de volumen del SMD y las relaciones entre ellas.	Explica de forma clara y concisa los procedimientos y los resultados geométricos.	Comprende los enunciados de los problemas y extrae la información necesaria para resolverlos.	Extrae la información geométrica de un texto dado.	Reconoce elementos geométricos en su entorno.	Reconoce semejanzas en su entorno.	Reconoce la ayuda de la semejanza de triángulos para manejarse en el mundo físico.	Utiliza las unidades de volumen para describir con exactitud fenómenos de la naturaleza.
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													
26													
27													
28													
29													
30													
31													
32													
33													
34													
35													

POR COMPETENCIAS PARA EL AULA

T. INF. Y C. DIGITAL		SOCIAL Y CIUDADANA		CULTURAL Y ARTÍSTICA			APRENDER A APRENDER					IN. PERSONAL Y C. EMOCIONAL	
Sabe utilizar internet para reforzar y avanzar en su aprendizaje.	Utiliza internet para encontrar información.	Valora la aportación de otras culturas al desarrollo de la geometría.	Toma conciencia de la utilidad de los conocimientos geométricos en multitud de labores humanas.	Reconoce el uso de semejanzas en distintas disciplinas (arte, arquitectura...).	Reflexiona sobre la forma de hacer matemáticas en otras culturas.	Crea o describe elementos artísticos geométricos con la ayuda de sus conocimientos.	Valora los conocimientos geométricos adquiridos.	Amplía los contenidos básicos mediante la búsqueda de información.	Es consciente de las carencias en sus conocimientos.	Comprende el proceso de resolución de los problemas.	Valora los conocimientos geométricos adquiridos como medio para resolver problemas.	Resuelve problemas geométricos con ayuda de los conocimientos adquiridos.	Elige el procedimiento más adecuado para resolver problemas de geometría espacial.

EVALUACIÓN UNIDADES 11 Y 12	REGISTRO DE EVALUACIÓN										
	MATEMÁTICA					COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA				CONOC. DEL MUNDO FÍSICO	
NOMBRE	Extrae información a partir de una gráfica.	Domina los elementos de las funciones y su representación gráfica.	Representa rectas, calcula su ecuación y entiende el significado de su pendiente.	Comprende qué implica la linealidad de una función.	Domina los conceptos básicos relativos a la estadística.	Comprende la teoría y los ejemplos, y es capaz de aplicarlos en los ejercicios.	Extrae de un texto la información necesaria para modelizar la situación que se propone mediante una función lineal.	Se expresa con un lenguaje adecuado.	Expresa concisa y claramente un análisis estadístico basado en un conjunto de datos.	Valora el uso de las funciones lineales como elementos matemáticos que describen multitud de fenómenos cotidianos.	Valora la estadística como medio para describir y analizar multitud de procesos del mundo físico.
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											
31											
32											
33											
34											
35											

POR COMPETENCIAS PARA EL AULA

T. INF. Y C. DIGITAL		SOCIAL Y CIUDADANA			CULTURAL Y ARTÍSTICA			APRENDER A APRENDER					INICIATIVA PERSONAL Y C. EMOCIONAL			
Sabe utilizar internet para avanzar en su aprendizaje.	Obtiene información a partir de datos estadísticos y es capaz de analizarla críticamente.	Domina el uso de las tablas de valores para poder entender informaciones dadas de este modo.	Utiliza las funciones constantes para modelizar situaciones cotidianas.	Domina los conceptos de la estadística como medio para analizar críticamente ciertas informaciones.	Reconoce la importancia de otras culturas en el desarrollo del estudio de las funciones.	Utiliza las funciones lineales para modelizar situaciones cotidianas.	Descubre el componente lúdico de las matemáticas.	Amplía los contenidos básicos mediante la búsqueda de información.	Es consciente de sus lagunas, a la vista de los problemas para representar una función.	Extrae información de una función dada mediante su expresión analítica.	Es capaz de autoevaluar sus conocimientos.	Valora los conocimientos estadísticos adquiridos como medio para interpretar la realidad.	Analiza situaciones cotidianas mediante su representación gráfica.	Sabe modelizar, mediante funciones lineales, una situación dada.	Aprende a investigar elementos relacionados con las rectas.	Desarrolla una conciencia crítica en relación con las noticias, los datos, los gráficos, etc., que obtenemos de los medios de comunicación.

Tratamiento de la diversidad

La Educación Secundaria Obligatoria se organiza de acuerdo con los principios de educación común y de atención a la diversidad del alumnado. Las medidas de atención a la diversidad de nuestro proyecto están orientadas a responder a las necesidades educativas concretas del alumnado y a la consecución de las competencias básicas y los objetivos del curso.

Atender a la diversidad del alumnado y conseguir una mejora de sus resultados académicos puede requerir la adopción de medidas como agrupamientos flexibles, apoyo en grupos ordinarios, desdoblamientos, adaptaciones del currículo, etc.

Para contribuir en esta tarea, nuestro proyecto presenta una serie de medidas cuya finalidad es preventiva o compensadora; en un momento dado, cualquier alumno puede precisarlas.

Las actividades que se proponen en este material se organizan en dos fichas de trabajo por cada unidad. Plantean cuestiones que permiten asociar diversos contenidos previamente estudiados y ejercitar diferentes destrezas. Tanto las fichas de **refuerzo** como las de **ampliación** son recursos dirigidos a desarrollar en los estudiantes las competencias básicas.

Al principio de cada unidad se encuentra un esquema de los contenidos tratados en ella, con actividades específicas para cada contenido. Y al final, ofrecemos las soluciones de todas las actividades.

Divisibilidad y números enteros

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

DIVISIBILIDAD Y NÚMEROS ENTEROS

DIVISIBILIDAD

PARA CALCULAR EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE VARIOS NÚMEROS

- Se descomponen en factores primos.
- Se toman los factores comunes, elevados al ....

EJEMPLO: máx.c.d. (168, 180)

168 | 2
84 | 2

180 | 2

$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

máx.c.d. (168, 180) =

PARA CALCULAR EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE VARIOS NÚMEROS

- Se descomponen en factores primos.
- Se toman todos los factores primos, elevado cada uno al ....

EJEMPLO: mín.c.m. (60, 72)

60 |

72 |

60 =

72 =

mín.c.m. (60, 72) =

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

SUMAS Y RESTAS CON PARÉNTESIS

- Al suprimir un paréntesis precedido del signo más, los signos interiores ....

  EJEMPLO:

  8 + (4 – 2 – 7 + 1) =

- Al suprimir un paréntesis precedido del signo menos, ...

  EJEMPLO:

  7 – (6 – 3 – 5 + 4) =

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

REGLA DE LOS SIGNOS:

+ · + = +
+ · – =
– · + =
– · – =

+ : + = +
+ : – =
– : + =
– : – =

EJEMPLOS:

(+3) · (+4) =

(–2) · (–5) =

(–15) : (+3) =

(+20) : (–4) =

OPERACIONES COMBINADAS

En las expresiones con operaciones combinadas hemos de atender:

- Primero, a las operaciones que están dentro de los paréntesis.
- Después, ...
- Por último, ...

EJEMPLO:

4 · (–5) – 3 · (8 – 6 – 4) = 4 · (–5) – 3 · (   ) =

=

Divisibilidad y números enteros

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

BORDILLOS PARA LAS CALLES

Tu madre acaba de empezar a trabajar en el departamento de producción de una empresa que se dedica a fabricar los bloques con los que se construyen los bordillos de las aceras. El primer trabajo que le encargan es estudiar el sistema de producción, por si puede optimizarse la fabricación y así ahorrar costes. Como todavía no tienes muchos deberes de clase, te pide que le ayudes con los cálculos.

1 En primer lugar, te enseña una tabla que confeccionó el encargado anterior, pero alguien de la oficina tiró café sobre ella y se han borrado algunos números. La tabla muestra datos sobre las cuatro líneas de producción de la empresa. Como es un trabajo fácil, tu madre te dice que la completes.

LÍNEAS	A	B	C	D
N.º DE PIEZAS QUE HACE (CAPACIDAD)	6	2 · (PIEZAS DE A – 1) =	12	$\frac{6 \cdot (\text{PIEZAS DE C})}{4} =$
TIEMPO EN QUE LAS HACE (MINUTOS)	10	12	15	15

"¿Son iguales todas las líneas, mamá?", le preguntas a tu madre. "Solo tienes que mirar bien la tabla. Por ejemplo: ¿cuántas veces es mayor la capacidad de la línea D que la capacidad de la línea A? ¿Y cuántas veces es mayor la de la línea C que la de la línea A?".

2 Después de recibir una llamada urgente de su jefe, tu madre te dice que una constructora acaba de hacerles un pedido de 3 600 bloques y necesita calcular cuántas piezas hace cada línea en 1 hora. Mientras ella está con otros cálculos, te pide que estos los hagas tú.

3 Y ahora, con los cálculos anteriores, ¿cuántas piezas hacen las cuatro líneas juntas en 1 hora?

Nombre y apellidos: ....

4 Un dato importante para el informe de tu madre es averiguar cuánto tardaría cada una de las cuatro líneas en producir ella sola los 3 600 bloques del pedido. ¿Puedes darle los datos?

5 El jefe vuelve a llamar: "Paralice lo que esté haciendo; necesito unos datos urgentes sobre el pedido de la constructora". Y envía por fax una tabla que tú puedes completar, fijándote bien en que en ella aparecen grupos de bloques con distintas longitudes.

N.° DE BORDILLOS	LONGITUD POR UNIDAD	LONGITUD TOTAL EN CENTÍMETROS	LONGITUD TOTAL EN METROS
1 450	120 cm		
1 000		60 000	
600	40 cm		
	30 cm	16 500	
		TOTAL	

6 No hay forma de trabajar: le siguen llegando informaciones y preguntas por el fax. Ahora, el encargado del almacén necesita saber cómo distribuir en palés 50 bloques de una longitud y 60 bloques de otra longitud, sin mezclar las dos clases. El número de bloques por palé debe ser el mayor posible y el mismo para las dos clases de bloques. Tu madre te pide que calcules cuántos bordillos deben poner en cada palé y cuántos palés harán falta.

7 Volviendo a las líneas de producción, recuerda que la línea A saca una tanda de bloques cada 10 minutos, y la línea B, una cada 12 minutos. Tu madre te dice que ambas líneas han coincidido a las 10 h 30 min en sus últimas tandas. ¿A qué hora volverán a coincidir?

Divisibilidad y números enteros

Nombre y apellidos: ....

Curso: ....   **Fecha:** ....

UNA VISITA A LA GRANJA

La primera excursión del año es a una granja de gallinas. Allí, el guía os explica el funcionamiento de algunas secciones. Al llegar a la zona donde se envasan los huevos, os da datos de las tres envasadoras que utilizan: no todas trabajan todos los días, cada una utiliza unos envases distintos... "¡Vaya lío!", dices después de un rato. "¿No podría darnos esos datos en una tabla?", le preguntas al guía. "Claro que sí, perdonad. Precisamente aquí tengo una de uso interno. Echadle un vistazo", te contesta.

EMPAQUETADORA	DÍAS QUE FUNCIONA	UTILIZA ENVASES DE...	HUEVOS ENVASADOS
A	Lunes	6 unidades	7 200 cada día
B	Martes	12 unidades	7 200 cada día
C	Miércoles	24 unidades	7 200 cada día

1 Junto a la empaquetadora A, os dice que el lunes pasado esta máquina utilizó 1 200 envases. Como esta parte de las matemáticas te gusta, mientras os dirigíais a las otras dos máquinas, le dices a tu compañera cuántos envases utilizaron las máquinas B y C el martes y el miércoles, respectivamente. ¿Cuántos fueron?

2 Parece que has ido demasiado deprisa. El guía os cuenta que el miércoles la máquina C se averió cuando había envasado 1 800 huevos, y tuvieron que poner en funcionamiento la máquina B hasta completar los 7 200 huevos. En ese momento tu amiga te susurra: "A ver, lumbrera, ¿cuántos envases utilizó cada máquina?".

3 Los viernes y los sábados funcionan todas las máquinas a la vez. Para ayudar al personal, se encienden unos pilotos de control con intervalos de 3 minutos para la máquina A, 5 minutos para la B y 9 minutos para la C. El sábado pasado, María estuvo atenta y vio que a las 10 h 45 min se encendieron los tres pilotos a la vez. "¿A qué hora se volvieron a encender?", le preguntas. "No lo recuerdo. ¿Por qué no lo calculáis vosotros?".

Nombre y apellidos: ....

Vista la zona de producción, pasáis a ver la de administración y ventas. Allí os deja el guía y os acompaña una de las administrativas.

4 "Perdone", interrumpe uno de tus compañeros, "¿podría decirnos cómo son de rápidas las máquinas empaquetadoras?". Tras pensar un momento contesta: "Envasan 1 200 huevos cada hora. En contabilidad anotan esa cantidad, descomponiéndola en factores primos. Haced vosotros esa descomposición".

5 La encargada de transporte acaba de averiguar que para enviar 2 160 huevos a un supermercado solo le quedan cajas de cartón de 24 cm de altura y una base que mide 60 cm × 60 cm. ¿Cuántas cajas tiene que pedir? "A lo mejor podemos ayudar", te ofreces tú, "pero necesitamos saber cuánto mide cada envase". Divertida por tu oferta, te dice: "Este envío es de envases de una docena, que miden 30 cm de largo, 10 cm de ancho y 8 cm de alto. ¿Te vale con estos datos?". Claro que te vale. Ya le puedes decir cuántos envases irán en cada caja y cuántas cajas necesitará.

6 "Oiga, ¿y todos los huevos son iguales?", pregunta una de tus compañeras. "No, claro que no. Nosotros producimos huevos de categoría A y huevos de categoría B. Precisamente ahora estaba preparando un envío. Tal vez podáis ayudarme: tengo que enviar 480 huevos de categoría A y 720 huevos de categoría B en envases de una docena y con esos envases llenar cajas. Las cajas deben ser de igual tamaño, lo más grandes que sea posible, y no se pueden mezclar huevos distintos en la misma caja. ¿Cuántas docenas debemos poner en cada caja y cuántas cajas necesitamos?".

Soluciones

Ficha de trabajo A (Refuerzo)

1

LÍNEAS	A	B	C	D
N.º DE PIEZAS QUE HACE (CAPACIDAD)	6	10	12	18
TIEMPO EN QUE LAS HACE (MINUTOS)	10	12	15	15

La capacidad de la línea D es 3 veces mayor que la capacidad de la línea A. La de la línea C es 2 veces mayor que la de la línea A.

2 A: 36 bloques/hora

B: 50 bloques/hora

C: 48 bloques/hora

D: 72 bloques/hora

3 En una hora, las cuatro líneas producen 206 bloques.

4 A: 100 h

B: 72 h

C: 75 h

D: 50 h

5

N.º DE BORDILLOS	LONGITUD POR UNIDAD	L. TOTAL EN CENTÍMETROS	L. TOTAL EN METROS
1 450	120 cm	174 000	1 740
1 000	60 cm	60 000	600
600	40 cm	24 000	240
550	30 cm	16 500	165
		TOTAL	2 745

6 Como máx.c.d. (50, 60) = 10, deben poner 10 bloques en cada palé. Necesitarán 11 palés.

7 Como mín.c.m. (10, 12) = 60 minutos, coincidirán otra vez a las 11 h 30 min.

Ficha de trabajo B (Ampliación)

1 B: 600 envases

C: 300 envases

2 B: 450 envases

C: 75 envases

3 Como mín.c.m. (3, 5, 9) = 45 minutos, los pilotos volvieron a coincidir a las 11 h 30 min.

4 En una hora envasan 1 200 = $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ huevos.

5 Podrá meter 36 envases en cada caja y necesitará 5 cajas.

6 Como máx.c.d. (480, 720) = 240 huevos, en cada caja podrán meter 20 envases de una docena. Con este dato, necesitarán 2 cajas para los huevos de categoría A y 3 cajas para los de categoría B.

Sistema de numeración decimal y sistema sexagesimal

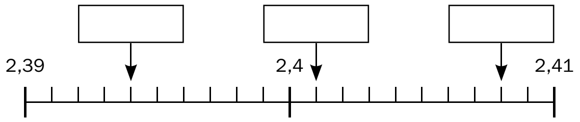
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

LOS DECIMALES EN LA RECTA NUMÉRICA

Entre dos decimales cualesquiera hay ....
....



APROXIMACIÓN DE DECIMALES

El **redondeo** consiste en ....
....

EJ.: 2,738406 → A LAS CENTÉSIMAS:
→ A LAS MILÉSIMAS:

OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

SUMA Y RESTA

$$\begin{array}{r} 2{,}41 \\ +\ 5{,}028 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}2 \\ -\ 1{,}283 \\ \hline \end{array}$$

MULTIPLICACIÓN

$$\begin{array}{r} 2{,}05 \\ \times\ 1{,}7 \\ \hline \end{array}$$

DIVISIÓN

$$3{,}8 \ \underline{|\ 0{,}45\quad}$$

SISTEMA SEXAGESIMAL

PASO DE COMPLEJO A INCOMPLEJO

EJEMPLO: Pasar a segundos 1 h 25 min 34 s.

1 h = 1 × 3 600 s =
25 min = 25 × 60 s =
34 s = =
1 h 25 min 34 s ⟶

PASO DE INCOMPLEJO A COMPLEJO

EJEMPLO: Pasar a horas, minutos y segundos 8084 s.

8084 |60
208 134 |60
284 14 2
44

8 084 s
134 min 44 s
h min s

OPERACIONES EN FORMA COMPLEJA

SUMA

$$\begin{array}{rrrr} & 13° & 24' & 38'' \\ + & 15° & 47' & 52'' \\ \hline & ° & ' & '' \\ \\ & ° & ' & '' \end{array}$$

RESTA

$$\begin{array}{rrrr} & 26° & 15' & 34'' \\ - & 18° & 40' & 56'' \\ \hline \end{array}$$

1° = 60' 1' = 60''

$$\begin{array}{rrrr} & 25° & 74' & 94'' \\ - & 18° & 40' & 56'' \\ \hline & ° & ' & '' \end{array}$$

COCIENTE

45° ×60 16' 24'' |8
5° → 300' 5° 39' ''
316'
——— × 60
4' → ——

Sistema de numeración decimal y sistema sexagesimal

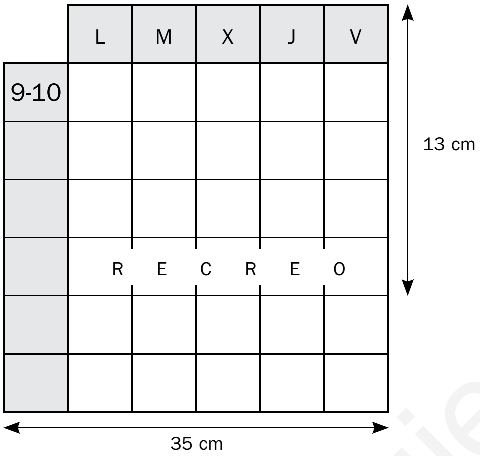
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

HORARIO DE CLASE

Todos los años, dos alumnos de tu clase confeccionan un horario para colgar en el tablón de anuncios. Este año te ha tocado a ti ser uno de ellos. Os reunís tú y tu compañera con vuestro tutor, quien os dará las indicaciones precisas para elaborarlo.

1 "A ver, aquí tenéis un esquema, con algunas medidas, de cómo debéis hacerlo; las demás las tendréis que calcular vosotros:



a) Todas las columnas deben ser igual de anchas. ¿Cuánto debe medir cada una (redondead a las décimas)?

b) Todas las filas han de ser igual de altas. ¿Cuánto debe medir cada una? ¿Qué alto total tendrá el horario?".

2 "Rectifico. Como seguramente empezaréis a dibujar el horario por la izquierda, al redondear la medida de las columnas, os sobrará algo de los 35 cm. Dádselo a la columna del viernes. ¿Cuánto medirá ahora?".

Una vez completado el horario, el profesor os pide ayuda con otro tema: la jefa de estudios tiene que elaborar un informe y necesita los datos que os pide a continuación:

3 Las sesiones de clase están repartidas indicando la hora inicial y la final, pero ella necesita la duración de cada sesión en minutos. Completad la tabla:

	HORARIO	MINUTOS
1.ª SESIÓN DEL DÍA	8:30 – 9:20	
2.ª SESIÓN DEL DÍA	9:20 – 10:15	
3.ª SESIÓN DEL DÍA	10:15 – 11:10	
RECREO	11:10 – 11:50	
4.ª SESIÓN DEL DÍA	11:50 – 12:40	
5.ª SESIÓN DEL DÍA	12:40 – 13:35	

Nombre y apellidos:..

4 Para poder comparar el tiempo dedicado a ciertas asignaturas, tenéis que completar esta tabla:

	HORARIO	MINUTOS	HORAS Y MINUTOS
MATEMÁTICAS	2 días: 11:50 – 12:40 2 días: 12:40 – 13:35		
LENGUA CAST. Y LITERATURA	3 días: 9:20 – 10:15 1 día: 8:30 – 9:20		
EDUCACIÓN FÍSICA	2 días: 10:15 – 11:10		
CIENCIAS DE LA NATURALEZA	3 días: 13:35 – 14:30		

5 Debe indicar cuánto tiempo más corresponde a la asignatura de Matemáticas que a la de Educación Física en una semana. Como no ha decidido aún cómo elaborará finalmente el informe, quiere el dato en minutos y en forma compleja.

6 "Otra más, chicos. ¿Cúanto tiempo más hay de Lengua Castellana que de Ciencias Naturales, en una semana?".

7 "Bueno, hemos llegado al final. Para que veáis que no todo son clases, el informe también pide unos datos sobre los recreos. Necesito que me digáis los minutos que duran todos los recreos de una semana. Y, por si acaso, escribidlo también en forma compleja".

Sistema de numeración decimal y sistema sexagesimal

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

LA COMPRA DEL SÁBADO

Este sábado, Irene y su padre, Jorge, han decidido ir juntos a la compra. Normalmente, no lo hacen, pero después de la experiencia lo repetirán; se lo han pasado muy bien haciéndose preguntas el uno al otro y contestándolas.

1 Al llegar compraron una revista que costó 1,80 €. Irene pidió un paquete de chicles e insistió en pagarlos ella. “Papá, ¿cuánto cuesta mi parte?”, le dijo. “Pues no sé, no he mirado las vueltas, pero la dependienta me dijo que costaba un sexto del precio de la revista”. ¿Cuánto costó el paquete de chicles?

2 Mientras Jorge compraba, Irene iba cronometrando el tiempo con su nuevo reloj. “Papá, hemos estado 0,5 horas en la frutería y 0,45 horas en la pescadería. ¿A que no sabes cuántos minutos faltan para que la suma sea una hora?” Ocupado en guardar las compras, Jorge retrasa su respuesta. ¿Puedes contestar tú a Irene?

3 Después de insistir en la pregunta, su padre contraataca: “A ver, listilla, ya que te gusta hacer preguntas sobre tiempo, respóndeme a estas:

a) Si en la pescadería hubiéramos estado una novena parte más de tiempo, ¿cuántos minutos habríamos estado en total comprando pescado?

b) Y, si en la frutería hubiéramos estado una quinta parte más de tiempo, ¿cuántos minutos nos hubiéramos entretenido comprando la fruta?”.

4 Irene se encuentra con su compañera Elisa y se entretiene hablando con ella. Jorge, curioso, les pregunta de qué hablaban. “Oh, de nada”, le contesta a Irene. “Están elaborando un trabajo que expondrán en clase el próximo viernes y dice que entre ella y sus dos compañeros, en tres días, le han dedicado 11,25 horas. ¿Tú sabes cuántos minutos, más o menos, ha dedicado Elisa al trabajo cada día?”.

Nombre y apellidos:...

5 Mientras esperan para pagar, Irene cronometra el tiempo que el chico de la caja tarda en atender al cliente que va delante de ellos: 4,25 minutos. “Vale”, le responde su padre, “¿y cuánto tardaría en cobrar a 72 clientes?”. Jorge está de broma, pero Irene se lo toma en serio y lo calcula. ¿Qué le contestó a su padre?

6 Mientras van hacia el coche, a Jorge se le cae uno de los tiques de compra sobre un charco y se borran algunas cifras. Ahora no podrá comprobar con calma qué ha comprado y cuánto le ha costado, pero Irene le echa un vistazo y piensa que puede completarlo fácilmente. Ayuda a Irene a completar todos los datos de la compra de la frutería.

	CANTIDAD	PRECIO (€/kg)	DESCUENTO (€/kg)	IMPORTE (€)	REDONDEO (CENTÉSIMAS)
TOMATES	2,5 kg	1,80			
CALABACINES	750 g	0,95		0,7125	
PEPINOS	1,25 kg	0,85			
PATATAS		0,45		2,475	
NARANJAS	3,5 kg	2,20			
MANZANAS	1 350 g	1,35		1,8225	
MELOCOTONES	1,75 kg		0,15	2,625	
				IMPORTE TOTAL	

OFERTA: por compras superiores a un kilo de tomates, de naranjas y de melocotones, se descuentan del precio marcado 0,15 €/kg.

7 Por último, Irene ha tomado nota de las horas de entrada y de salida del aparcamiento para ver cuánto tienen que pagar. Una vez hechos sus cálculos, quiere comprobar que no han engañado a su padre.

9:52	Estacionan el coche.
12:15	Recogen el coche.
TARIFAS	· 1,50 euros por la primera hora. · 1,15 euros por cada media hora o cada fracción de hora.

“Papá, ¿cuánto tiempo ha estado aparcado el coche?”. Responde a Irene según los datos de la tabla.

“¿Y cuánto te han cobrado?”.

Soluciones

Ficha de trabajo A (Refuerzo)

1 a) Cada columna debe medir 5,8 cm, y cada fila, 2,6 cm. El alto total será de 18,2 cm.

2 6 cm

3

	HORARIO	MINUTOS
1.ª SESIÓN DEL DÍA	8:30 – 9:20	50
2.ª SESIÓN DEL DÍA	9:20 – 10:15	55
3.ª SESIÓN DEL DÍA	10:15 – 11:10	55
RECREO	11:10 – 11:50	40
4.ª SESIÓN DEL DÍA	11:50 – 12:40	50
5.ª SESIÓN DEL DÍA	12:40 – 13:35	55

4

	HORARIO	min	h Y min
MATEMÁTICAS	2 días: 11:50 – 12:40 2 días: 12:40 – 13:35	210	3 h 30 min
LENG. CAST. Y LITERATURA	3 días: 9:20 – 10:15 1 día: 8:30 – 9:20	215	3 h 35 min
E. FÍSICA	2 días: 10:15 – 11:10	110	1 h 50 min
CC. DE LA NAT.	3 días: 13:35 – 14:30	165	2 h 45 min

5 1 h 40 min, es decir, 100 minutos más a la semana.

6 Hay 50 minutos más.

7 Los cinco recreos de una semana suman 200 minutos, que expresados en forma compleja son 3 h 20 min.

Ficha de trabajo B (Ampliación)

1 El paquete de chicles cuesta 0,30 €.

2 3 min

3 a) 30 min

b) 36 min

4 75 min

5 Para atender a 72 clientes ha necesitado 306 minutos que, expresados en forma compleja, son 5 h 6 min.

6

	CANTIDAD	PRECIO (€/kg)	DTO. (€/kg)	IMPORTE (€)
TOMATES	2,5 kg	1,80	0,15	4,13
CALABACINES	750 g	0,95	0	0,71
PEPINOS	1,25 kg	0,85	0	1,06
PATATAS	5,5 kg	0,45	0	2,48
NARANJAS	3,5 kg	2,20	0,15	7,18
MANZANAS	1 350 g	1,35	0	1,82
MELOCOTONES	1,75 kg	1,65	0,15	2,63
IMPORTE TOTAL				20,01

7 El coche ha estado aparcado 2 h 23 min, y han pagado 4,95 €.

Las fracciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

FRACCIONES

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES

Si se multiplican o se dividen los dos términos de una fracción por el mismo número, ...

....

EJEMPLOS: $\frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{\ }{\ }$ $\frac{4}{6} = \frac{4 : 2}{6 : 2} = \frac{\ }{\ }$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Simplificar una fracción es sustituirla por ....

....

EJEMPLOS: $\frac{15}{20} = \frac{\ }{\ }$ $\frac{12}{30} = \frac{\ }{\ }$

REDUCCIÓN DE FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR

- Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- Se multiplican los dos miembros de cada fracción por ....

EJEMPLO: $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10} \rightarrow$ mín.c.m (4, 5, 10) = 20

$\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5}, \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 4}, \frac{7 \cdot 2}{10 \cdot 2} \rightarrow \frac{15}{20}, \frac{\ }{\ }, \frac{\ }{\ }$

OPERACIONES CON FRACCIONES

SUMA Y RESTA

Para sumar o restar fracciones se reducen a ....

....

EJEMPLO:

$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{7}{10} =$

MULTIPLICACIÓN

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

EJEMPLO:

$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} =$

DIVISIÓN

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

EJEMPLO:

$\frac{4}{5} : \frac{3}{10} =$

POTENCIAS DE NÚMEROS RACIONALES

POTENCIA DE UN PRODUCTO

$(a \cdot b)^n =$

EJEMPLO: $(2 \cdot 4)^5 =$

POTENCIA DE UN COCIENTE

$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$

EJEMPLO: $\left(\frac{4}{2}\right)^3 =$

PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

$a^m \cdot a^n =$

EJEMPLO: $2^3 \cdot 2^5 =$

COCIENTE DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

$a^m : a^n =$

EJEMPLO: $3^6 : 3^4 =$

POTENCIA DE UNA POTENCIA

$(a^m)^n =$

EJEMPLO: $(5^2)^3 =$

POTENCIAS DE EXPONENTE NEGATIVO

$a^{-n} =$

EJEMPLO: $2^{-3} =$

Las fracciones

Nombre y apellidos:...

Curso:.. **Fecha:** ....

EL NEGOCIO DEL CAFÉ

Este año estás participando en la revista de tu instituto. Te han encargado que escribas un reportaje sobre el mundo de la hostelería y decides pasar toda una tarde en la cafetería de al lado de tu casa junto a Sofía y Carmen, las dueñas.

1 "¿Y cuál de vosotras tarda más tiempo en llegar aquí?", les preguntas. "Pues yo", dice Sofía, "necesito 16 minutos para recorrer los 2/3 del trayecto". "Y yo", interviene Carmen, "tardo 18 minutos en recorrer los 4/5". "Oye, ¿no podéis decírmelo de otra forma?", les comentas. "Venga, no te quejes, tú sabes responder a la pregunta". ¿Cuál de las dos tarda más tiempo en llegar a la cafetería?

2 El primer cliente de la tarde les pide un café con leche. "Carmen, ¿cuánto café echáis en cada taza?", le preguntas. "El café ocupa 1/3 de la capacidad de la taza", contesta.

a) Te gustaría preguntar qué fracción ocupa la leche, pero prefieres pensarlo tú mismo. ¿Cuál es esa fracción?

b) Le dices a Sofía que ya sabes las fracciones de café y de leche, pero necesitas el dato en centilitros. Ella te dice que una taza contiene 12 *cl*, y que calcules tú el resto.

3 Después, un cliente compró 2/5 de kilo de café natural y 1/4 de café "mezcla". "Oye, ¿y de cuál de los dos tipos ha comprado más?", le preguntas a Carmen. "Te lo digo si me dices qué fracción de kilo y cuántos gramos ha comprado en total", te responde. Contesta tú a las dos preguntas que os habéis planteado el uno al otro.

4 Al rato reciben una llamada telefónica de otro cliente que les pide, en dos paquetes separados, las siguientes cantidades de café. Ahora, es Sofía la que te pide que les digas cuántos gramos tendrá cada paquete.

PAQUETE A: 2/3 de 3/2 de kg

☐ 500 g ☐ 1 000 g ☐ 750 g

PAQUETE B: 2/3 de 3/4 de kg

☐ 400 g ☐ 750 g ☐ 500 g

Nombre y apellidos: ....

5 Aprovechan un rato en que no tienen clientes para resolver contigo algunas dudas. “Oye, ¿por qué no me dices cuánto pesan 32 paquetes de café de 1/4 de kg cada uno?”, te pregunta Sofía. Respóndele.

6 Comprobando una caja de infusiones (té, menta, manzanilla), Sofía observa que se han roto 12 paquetes, que representan las 2/7 partes del total. “¿Cuántos paquetes había en la caja?”, le pregunta Carmen. Ayuda a Sofía con la respuesta.

7 “Por cierto, Sofía, ¿cuánto dinero ganasteis ayer?”, preguntas. “Ayer, déjame pensar... Ah, sí. Ayer ganamos 520 euros”, te contesta. “¿Y hoy?”. “Hasta ahora hemos vendido 1/5 más que ayer; haz tú la cuenta”.

8 La señal luminosa de la cafetera se ha encendido, porque el agua está en su nivel mínimo: 2/10 de su capacidad. Carmen le añade 4 litros para llenarla. “Y antes de que me lo preguntes tú, lo hago yo: ¿cuántos litros de agua hay en el depósito lleno?”.

9 Te fijas en que en el termo de la leche caliente caben 4 litros. Sofía te dice que cada vaso de leche tiene una capacidad de 1/8 de litro. Carmen te dice que hasta ahora han servido 24 vasos de leche. Ante tanto dato, solo te queda preguntar cuántos litros les quedan en el termo, pero como sabes que no te van a contestar, haces tú la cuenta. ¿Cuántos litros de leche quedan?

Las fracciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

VOLUNTARIADO EN LA BIBLIOTECA

Este año, el instituto ha implantado un plan para la biblioteca del centro. Cada semana, dos alumnos deben pasar los recreos allí ayudando a la bibliotecaria. Esta semana te toca a ti, y te dispones a hacer lo que te diga la encargada.

1 Mientras revisas un libro de Historia, se te ocurre preguntarle cuántos libros de Historia hay en la biblioteca. “Pues no sé. Mira, en total hay 6 200 libros. Según un compañero tuyo que me ayudó la otra semana, en el primer trimestre consultasteis 72 libros de Historia, que representan los 2/5 del total de los libros de Historia. Haz tú la cuenta”.

2 La bibliotecaria está diseñando un plan de animación a la lectura y necesita unos datos. Solo tienes que rellenar la tabla siguiente, sabiendo que ha habido un total de 180 usuarios.

	1.° y 2.° ESO	3.°, 4.° ESO y 1.° BACHILLERATO	2.° BACHILLERATO
FRACCIÓN	15/45 del total	16/30 del total	
N.° DE ALUMNOS			

3 En otro rato, la bibliotecaria te pregunta cuántos libros hay en una estantería concreta. Quieres gastarle una broma y le dices: “Pues en el primer estante hay 12 libros; en cada uno de los dos siguientes hay el doble menos la mitad de libros que en el anterior y, por último, en el cuarto hay el doble menos la tercera parte de los que hay en el tercero”. ¿Puedes ayudarla con los cálculos?

4 Tenéis que preparar un lote de 36 libros que habéis donado. La encargada te dice que prepares 3 cajas para ello. Cuando le preguntas cuántos libros metes en cada caja, se acuerda de la faena que le hiciste antes y te contesta:

a) “En la primera caja mete 5/9 de 36”.

b) “En la segunda, 2^{-2} de 36”.

c) “Y en la tercera, (5/36) + (1/18) de 36”.

¿Cuántos libros debes meter en cada caja?

Nombre y apellidos: ....

5 Uno de tus compañeros, Alberto, está leyendo un libro para hacer un trabajo de clase. El libro tiene 192 páginas. Te cuenta que ayer leyó 3/8 del libro, que hoy ha leído 3/4 de las páginas que le faltaban y que espera acabar de leer todo el libro mañana. "¿Y cuántas páginas leerás mañana?", le preguntas. ¿Qué contesta Alberto?

6 Por curiosidad, estás leyendo un libro sobre cómo se "fabrican" los libros. En él se dice que el papel más común tiene un grosor de $12 \cdot 10^{-2}$ mm. Como estás aburrido, te dedicas a calcular el grosor del libro que estás leyendo, que tiene 250 hojas. ¿Cuál es ese grosor?

7 Tienes que colocar unos libros en una estantería. Todos los libros tienen el mismo tamaño y ahora mismo están vacías las 3/5 partes de la estantería. "Prueba a poner 42 libros más", te dice la encargada. Lo haces y ves que ahora están ocupadas las 3/4 partes de la estantería. ¿Cuántos libros habrá en la estantería cuando la ocupes totalmente?

8 Por último, la bibliotecaria te pide que le ayudes con las facturas. En el último año se gastaron 2 160 € en comprar material. Al hacer el pedido, se pagaron los 3/15 del total. Cuando se recibió, se pagó 1/12 de lo que quedaba y el resto se pagó en 6 mensualidades. La encargada quiere que hagas un informe económico, respondiendo a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos euros se pagaron al recibir los libros?

b) ¿Qué fracción del total representan los 6 pagos mensuales?

c) ¿Cuánto se pagó en cada mensualidad?

Soluciones

Ficha de trabajo A (Refuerzo)

1 Sofía tarda 24 min, y Carmen, 22,5 min. Tarda más Sofía.

2 a) 2/3

b) A la leche le corresponden 8 *cl*, y al café, 4 *cl*.

3 De café natural ha comprado 400 g, y de “mezcla”, 250 gramos, que son 13/20 de kilo. Ha comprado más café natural que de “mezcla”.

4 Paquete A: 1 000 g

Paquete B: 500 g

5 8 kg

6 En la caja había 42 paquetes.

7 624 €

8 En el depósito hay 5 litros.

9 Queda 1 *l* de leche.

Ficha de trabajo B (Ampliación)

1 Hay 180 libros de Historia.

2

	1.° Y 2.° ESO	3.°, 4.° ESO Y 1.° BACHILLERATO	2.° BACHILLERATO
FRACCIÓN	15/45 del total	16/30 del total	2/15 del total
N° DE ALUMNOS	60	96	24

3

ESTANTE	1.°	2.°	3.°	4.°
LIBROS	12	18	27	45

4

CAJA	LIBROS
1.ª	5/9 de 36 = 20
2.ª	2^{-2} de 36 = 9
3.ª	(5/36) + (1/18) de 36 = 7

5 30 páginas.

6 30 mm

7 120 libros.

8 a) 144 €

b) 11/15

c) 264 €

Proporcionalidad y porcentajes

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PROPORCIONALIDAD

PROPORCIÓN

- Una **proporción** es la igualdad de ....
  ....

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

- Los términos *a* y *d* se llaman ....
  Los términos *b* y *c* se llaman ....

CÁLCULO DEL TÉRMINO DESCONOCIDO DE UNA PROPORCIÓN

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \to a \cdot d = b \cdot c \to d = \frac{b \cdot c}{a}$$

EJEMPLO:

$$\frac{12}{x} = \frac{21}{35} \to x = \text{...........}$$

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

EJERCICIO:

Cuatro kilos cuestan 12 €.

¿Cuánto cuestan siete kilos?

- RESOLUCIÓN POR REGLA DE TRES

$$\begin{array}{ccc}\underline{\text{PESO (kg)}} & & \underline{\text{COSTE (€)}}\\ 4 & \longrightarrow & \left.\begin{array}{c}12\\ x\end{array}\right\}\\ 7 & \longrightarrow & \end{array}$$

La proporción:

$$\frac{4}{7} = \frac{12}{x} \to x = \text{...........}$$

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

EJERCICIO:

Tres operarios tardan 40 minutos.

¿Cuánto tardan ocho operarios?

- RESOLUCIÓN POR REGLA DE TRES

$$\begin{array}{ccc}\underline{\text{N.° OPERARIOS}} & & \underline{\text{TIEMPO (min)}}\\ 3 & \longrightarrow & \left.\begin{array}{c}40\\ x\end{array}\right\}\\ 8 & \longrightarrow & \end{array}$$

La proporción:

$$\frac{3}{8} = \frac{x}{40} \to x = \text{...........}$$

PROBLEMAS DE PORCENTAJES

UN PORCENTAJE ES UNA PROPORCIÓN

Para calcular el *a*% de *C*:

$$\left.\begin{array}{l}\text{De 100 tomo } a\\ \text{De } C \text{ tomo } x\end{array}\right\} \to \frac{100}{C} = \frac{a}{x} \to x = a\% \text{ de } C = \frac{C \cdot a}{100}$$

EJEMPLO:

15% de 820 =

CÁLCULO DEL TOTAL

$$\left.\begin{array}{l}\text{Total} \to x\\ \text{Porcentaje} \to 15\%\\ \text{Parte} \to 123\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{De 100 tomo 15}\\ \text{De } x \text{ tomo 123}\end{array}$$

$$\frac{100}{x} = \frac{15}{123} \to x = \text{...........}$$

CÁLCULO DEL PORCENTAJE

$$\left.\begin{array}{l}\text{Total} \to 820\\ \text{Porcentaje} \to x\\ \text{Parte} \to 123\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{De 820 tomo 123}\\ \text{De 100 tomo } x\end{array}$$

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} \to x = \text{...........}$$

Proporcionalidad y porcentajes

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

LA FÁBRICA DE AUTOMÓVILES

Tu padre trabaja en una fábrica de coches, en el departamento de control de calidad. Su labor es supervisar todas las fases de la producción, buscar fallos y optimizar los procesos. Un fin de semana te lleva a que veas la fábrica y sepas cómo trabaja. Disfruta la visita.

1 Lo primero que te enseña es el taller de motores. En él veis que están probando un nuevo modelo. En estos momentos el motor va a 3 000 revoluciones por minuto. "Papá", le preguntas, "y si funciona 4 minutos, ¿cuántas revoluciones dará?". "Mira, mejor me ayudas a rellenar esta tabla que necesito para un informe, y lo vemos juntos", te contesta.

TIEMPO (minutos)	0,5	1	2	4	8	10	30
N.° DE REVOLUCIONES		3 000					

"Oye, papá, ¿son el número de revoluciones y el tiempo magnitudes directa o inversamente proporcionales?", le preguntas. "¿Tú qué crees?", te reta.

2 Luego pasáis a la cadena de montaje. Allí, tu padre tiene que controlar unos tiempos. Comprobáis que los dos obreros tardan 6 minutos en montar las ruedas de un coche. "A ver, joven, ¿cuánto tiempo tardaría un obrero en hacer el mismo trabajo? ¿Y si fueran cuatro obreros?", te pregunta tu padre.

3 Tu padre te cuenta que han fabricado un prototipo que consume 6 litros de gasolina cada 100 km, circulando a 90 km/h. Te pide que completes una tabla de datos para pasársela a los ingenieros.

ESPACIO (km)	25		100	150		500	600
CONSUMO (litros)		3			18		

4 Para que veas el nuevo prototipo, vais al circuito de la fábrica. Allí, el coche rueda a 100 km/h. A esta velocidad, ha tardado 3 minutos en dar una vuelta completa a la pista. Uno de los técnicos está rellenando un cuadrante con los tiempos previsibles en dar una vuelta a la pista según la velocidad del coche. Ayuda al técnico a completar la tabla.

VELOCIDAD (km/h)	60	75	100	120	150	200
TIEMPO (minutos)			3			

Nombre y apellidos: ....

5 Más tarde os pasáis por el departamento de planificación. Os dicen que acaban de recibir un pedido de 4 200 coches para exportación, y necesitan que tu padre haga un estudio de la producción.

a) Sabiendo que la fábrica trabaja con los turnos diarios de 7 horas y que tiene una capacidad de producción de 25 coches a la hora, dile a tu padre cuántos días tardarían en cubrir el pedido.

b) Mientras haces los cálculos, vuelven a llamar diciendo que quieren 600 coches más. ¿Cuántas horas al día deberá trabajar cada turno para cubrir el nuevo pedido en el mismo tiempo previsto para el pedido anterior?

6 Por último, os pasáis por el departamento de ventas. El encargado os dice que, el mes anterior, las cantidades de furgonetas y de turismos enviados a tiendas han estado en proporción de 3/7, y que en total se vendieron 9 000 vehículos.

a) ¿Qué porcentaje de los vehículos que salieron de la fábrica son furgonetas?

b) ¿Cuántas furgonetas y cuántos turismos se vendieron?

7 El jefe de ventas comenta con tu padre que los 9 000 vehículos del mes pasado suponen unos buenos resultados, pero que este mes esperan vender un 10 % más. ¿Cuántos vehículos esperan vender este mes?

Proporcionalidad y porcentajes

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

REFORMAS EN LA CASA

Tus tíos tienen una casa en el campo que utilizan durante las vacaciones. Este año van a pintarla y a realizar algunas reparaciones en ella. Acompañas a tu tía a la tienda de pinturas para empezar con las compras.

1 La encargada de la tienda os informa de que la pintura se vende por litros, en envases de diferentes capacidades, en cuyas etiquetas figura la equivalencia “1 litro = 1,5 kg”. Ayuda a tu tía con las equivalencias de todos los recipientes posibles de pintura.

ENVASES (litros)	2	4	5	10	15
PESO (kilos)					

2 Para daros una idea del rendimiento de la pintura, la encargada os dice que ha gastado un bote de 4 litros para pintar una pared de 42 metros cuadrados.

a) Con este dato, completa la siguiente tabla.

PINTURA (litros)	1	2	3	4	5	8
SUPERFICIE (m^2)				42		

b) ¿Cuántos litros de pintura necesitarían tus tíos para el salón, que entre paredes y techo tiene una superficie de 63 metros cuadrados?

3 También os informa de que, al pintar el exterior, el rendimiento es un 20% menor: es decir, con la misma cantidad de pintura se cubre un 20% menos de superficie. Tu tía te dice que la superficie exterior de la casa es de 210 m^2, aproximadamente.

a) ¿Cuántos metros cuadrados de exterior se cubren con un litro de pintura?

b) ¿Puedes calcularle a tu tía los litros de pintura plástica que debe comprar para pintar el exterior, dando dos capas?

Nombre y apellidos: ....

4 Cuando ya sabes la cantidad de pintura que necesitan, tus tíos hablan con un pintor que les dice: "Puedo pintar vuestra casa en 5 días, trabajando 6 horas al día". Sin embargo, tu tío preferiría que lo hiciera en 4 días. ¿Cuántas horas diarias tendría que trabajar con el nuevo plazo?

5 Finalmente, y por un imprevisto, tus tíos necesitan que tarde solo 2 días y le proponen al pintor que contrate a cuatro pintores más. El pintor está de acuerdo, pero no sabe, entonces, cuántas horas al día tendrán que trabajar los 5 pintores para terminar. ¿Puedes ayudarle?

6 El cuarto de baño de la planta baja necesita una reparación total. Tu tío va a ver la obra y comprueba que los albañiles han colocado ya 12 metros cuadrados de azulejos, lo que supone el 75% del alicatado. ¿Cuántos metros cuadrados de alicatado lleva el baño en total?

7 El presupuesto total de las reparaciones asciende a 6 400 €, de los que 2 400 corresponden a la albañilería. ¿Qué porcentaje del presupuesto se lleva la albañilería?

8 ¿Cuál es el coste definitivo de las reparaciones, teniendo en cuenta que en la factura hay que cargar un 18% de IVA?

Soluciones

Ficha de trabajo A (Refuerzo)

1

TIEMPO (minutos)	N.° DE REVOLUCIONES
0,5	1 500
1	3 000
2	6 000
4	12 000
8	24 000
10	30 000
30	90 000

Son directamente proporcionales.

2 Un obrero tardará 12 minutos, y cuatro obreros, 3 minutos.

3

ESPACIO (km)	25	50	100	150	300	500	600
CONSUMO (litros)	1,5	3	6	9	18	30	36

4

VELOCIDAD (km/h)	60	75	100	120	150	200
TIEMPO (minutos)	5	4	3	2,5	2	1,5

5 a) Tardarán 12 días.

b) Deberán trabajar en turnos de 8 horas.

6 a) El 30% eran furgonetas.

b) Se vendieron 2 700 furgonetas y 6 300 turismos.

7 Esperan vender 9 900 vehículos.

Ficha de trabajo A (Ampliación)

1

ENVASES (litros)	2	4	5	10	15
PESO (kilos)	3	6	7,5	15	22,5

2 a)

PINTURA (litros)	1	2	3	4	5	8
SUPERFICIE (m^2)	10,5	21	31,5	42	52,5	84

b) 6 litros

3 a) 8,4 m^2

b) 50 litros de pintura

4 7,5 horas

5 3 horas

6 16 m^2

7 37,5%

8 7 552 €

Álgebra

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

MONOMIOS

Un **monomio** es el producto ....

....

EJEMPLOS: $4xy^2$,

Dos **monomios** son **semejantes** cuando tienen

....

EJEMPLOS: $5a^2b$ y $\frac{3}{4}a^2 b$,

SUMA Y RESTA DE MONOMIOS

Dos monomios solo se pueden sumar o restar si

....

EJEMPLOS:

$3a + 2a =$

$7x^2 - 4x^2 =$

PRODUCTO DE MONOMIOS

El producto de dos monomios es otro ....

....

EJEMPLOS:

$2a^2 \cdot 4a =$

$6x \cdot \frac{2}{3}x^3 =$

POLINOMIOS

Un **polinomio** es la suma ....

....

EJEMPLOS: · $3x^2 - 5x + 7$

·

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

$A = 5x^3 - 6x^2 - 4x + 7$ $\qquad$ $B = x^3 + 3x - 5$

$$\begin{array}{lcr} A & \rightarrow & 5x^3 - 6x^2 - 4x + 7 \\ B & \rightarrow & x^3 + 0x^2 + 3x - 5 \\ \hline A + B \rightarrow & & \end{array} \qquad \begin{array}{lcr} A & \rightarrow & 5x^3 - 6x^2 - 4x + 7 \\ -B & \rightarrow & -x^3 - 0x^2 - 3x + 5 \\ \hline A - B \rightarrow & & \end{array}$$

PRODUCTO DE POLINOMIOS

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 2 \\ \times \qquad 2x - 3 \\ \hline -3x^2 + 12x - 6 \\ \\ \hline \end{array}$$

PRODUCTOS NOTABLES

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times\ a + b \\ \hline ab + b^2 \\ a^2 + \quad ab \qquad \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 =$

$(a + b) \cdot (a - b) =$

Ficha de trabajo A

Álgebra

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

CALENDARIO DE CUMPLEAÑOS

Un alumno de 2.° A, Víctor, propone un juego a todos sus compañeros y compañeras de clase. Les presenta la tabla de la página siguiente y les dice:

"He hecho una tabla con todos los que somos en clase, ordenándola según el lugar que cada uno ocupamos en la lista de clase.

El juego consiste en averiguar qué día nació cada uno de nosotros (el mes lo dejaremos para otro juego). Para conseguirlo, hay que obtener el valor numérico de una expresión algebraica para x igual al número de lista del alumno en cuestión. Además, para los nueve primeros de la lista, la expresión algebraica no viene dada, sino que hay que obtenerla traduciendo enunciados al lenguaje algebraico.

Como ejemplos, vamos a averiguar en qué días nacieron Ana y Adrián:

- Ana (n.º 4) → El doble de: el triple de su número de la lista más la mitad de este.

$$2 \cdot \left(3x + \frac{x}{2}\right) \rightarrow 2 \cdot 14 = 28$$

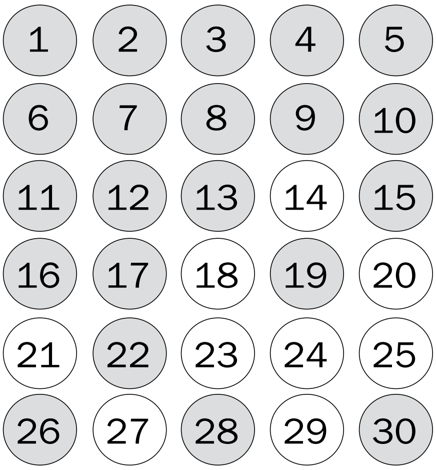
Luego Ana nació un día 28.

- Adrián (n.º 10) → $\frac{1}{5}x + x \rightarrow \frac{1}{5} \cdot 10 + 10 = 12$

Por tanto, Adrián nació un día 12.

Por si os sirve de algo, os puedo dar algunos datos:

- Cinco de nosotros nacimos un día 12 de un cierto mes, como Adrián, así es que solo le he incluido a él como representante de los cinco.
- Para el resto, todos los días son distintos.
- Hay, por tanto, 21 resultados distintos; los marcamos en esta tabla:



1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

A medida que vayáis hallando los resultados, podéis ir tachando los números correspondientes.

Nombre y apellidos: ....

ALUMNO/ ALUMNA	N.º DE LISTA	ENUNCIADO/ EXPRESIÓN ALGEBRAICA	DÍA DE NACIMIENTO
Irene	1	El cuadrado del consecutivo de su número de lista.	
Víctor	2	La tercera parte de sumar 14 al doble de su número de lista.	
Jaime	3	Su número menos la mitad del anterior, más once.	
Ana	4	El doble de: el triple de su número de lista más la mitad de este.	
María	5	El cuadrado de su número de lista menos el doble de su número.	
Rosa	6	El triple de la mitad de su número.	
Pedro	7	La tercera parte del resultado de sumarle 8 a su número de lista.	
Marina	8	A la suma de su número de lista más su consecutivo le restas el doble del anterior.	
Sonia	9	El triple de su número de lista más la tercera parte del número.	
Adrián	10	$\frac{1}{5}x + x$	$\frac{1}{5} \cdot 10 + 10 = 12$
Sara	12	$\frac{x}{2} + 2x - \frac{x}{3}$	
Verónica	13	$\frac{2x - 5}{3}$	
Roberto	14	$(x : 7) - 1$	
Sergio	15	$2 \cdot (x - 4)$	
Eduardo	16	$x^3 : x^2$	
Beatriz	17	$2x + 3x - 4x$	
Vicente	18	$1 + x - \frac{x}{2}$	
Héctor	19	$x - 2 - x + 4$	
Raquel	20	$(x : 2) + 1$	
Manuel	24	$(x : 2) - (x : 6)$	
Samuel	25	$2 \cdot (x : 5) + 9$	

Álgebra

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

JUEGO: RESUELVE Y MUEVE FICHA

Normas del juego:

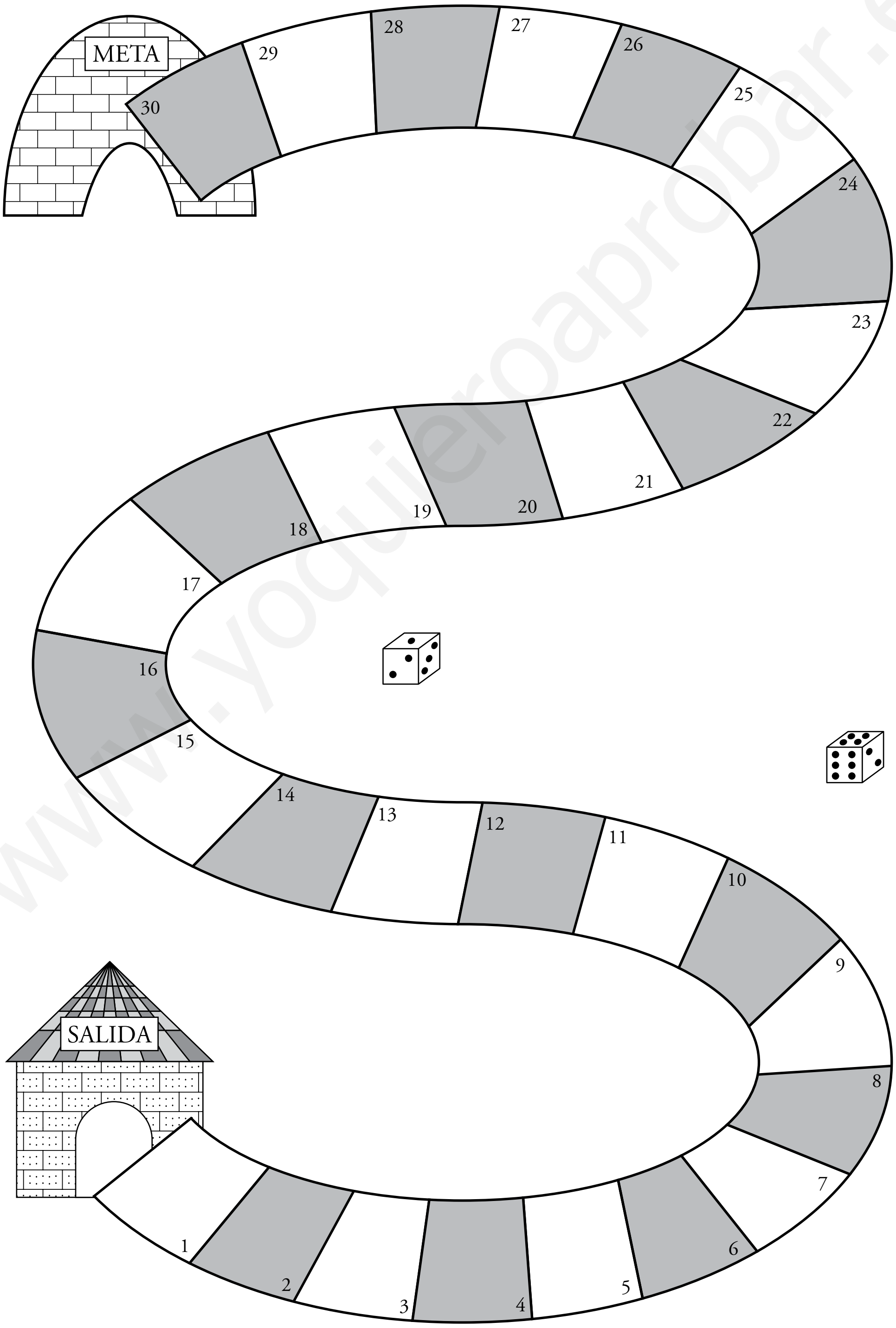
- Se necesita un tablero como el de la página siguiente y un dado.
- Pueden jugar dos o tres jugadores.
- Se realiza una tirada previa de un dado para establecer el orden de salida de los jugadores.
- El número que sale al tirar el dado es el que se asigna a la x para calcular el valor numérico del monomio, del polinomio o del producto notable.
- Si el resultado es positivo, se avanza tantas casillas como indique el resultado; y, si es negativo, se retrocede. Si se retrocede tanto que no quedan casillas para hacerlo, se vuelve a empezar desde la salida.
- En la primera ronda de tirar el dado, el número que sale corresponde al bloque I; en la 2.ª ronda, al bloque II, y en la 3.ª, al bloque III. Luego se repite: 4.ª ronda, al bloque I; 5.ª ronda, al bloque II; etc.
- Gana el jugador que llegue antes a la meta.
- Puede haber un árbitro por turno, que no juegue y que controle que la respuesta es correcta.
- El tiempo máximo para resolver el cálculo correspondiente es 30 segundos para el bloque I, y 45 segundos para los bloques II y III.
- Si en el tiempo establecido no se resuelve lo planteado, se pasa la vez al siguiente jugador.

	N.° DE PUNTOS AL LANZAR EL DADO	EXPRESIÓN ALGEBRAICA	RESOLUCIÓN
BLOQUE I	1	$(x + 1) : 2$	$(1 + 1) : 2 = 1 \rightarrow$ avanza 1 casilla
	2	$2 \cdot (x - 1)$	
	3	$2x - 2$	
	4	$(3x : 2) - 1$	
	5	$x^2 - (3x + 2)$	
	6	$6x - (1/3)x \cdot 2x$	

	N.° DE PUNTOS AL LANZAR EL DADO	EXPRESIÓN ALGEBRAICA	RESOLUCIÓN
BLOQUE II	1	$x^3 - 4x$	$1^3 - 4 = -3 \rightarrow$ retrocede 3 casillas
	2	$(8x : 4x) - x^2$	
	3	$(x^3 + 2) - 10x$	
	4	$x^2 : (x \cdot x)$	
	5	$(x - 1)^2 : 4$	
	6	$(x^2 + 3x) - (x^2 + 2x)$	

Nombre y apellidos: ....

	N.° DE PUNTOS AL LANZAR EL DADO	EXPRESIÓN ALGEBRAICA	RESOLUCIÓN
BLOQUE III	1	$(2x^3 + 3x^2 + 1) + (2x^2 - x)$	
	2	$(4x^3 - 4x) - (2x^3 + 2x)$	
	3	$2x \cdot (-x^2 + 5x - 5)$	
	4	$2x \cdot (x - 3)$	
	5	$(x - 2)^2$	
	6	$(x + 5) \cdot (x - 5)$	



Soluciones

Ficha de trabajo A (Refuerzo)

N.° DE LISTA	DÍA DE NACIMIENTO
1	$(x + 1)^2 \rightarrow 2^2 = 4$
2	$\frac{1}{3} \cdot (2x + 14) \rightarrow 18 : 3 = 6$
3	$x - \frac{x - 1}{2} + 11 \rightarrow 3 - 1 + 11 = 13$
4	$2 \cdot \left(3x + \frac{x}{2}\right) \rightarrow 2 \cdot 14 = 28$
5	$x^2 - 2x \rightarrow 25 - 10 = 15$
6	$3 \cdot \frac{x}{2} \rightarrow 3 \cdot 3 = 9$
7	$\frac{x + 8}{3} \rightarrow \frac{15}{3} = 5$
8	$x + (x + 1) - 2(x - 1) \rightarrow$ $\rightarrow 8 + 9 - 14 = 3$
9	$3x + \frac{x}{3} \rightarrow 27 + 3 = 30$
10	$\frac{1}{5} \cdot 10 + 10 = 12$
12	$\frac{12}{2} + 2 \cdot 12 - \frac{12}{3} = 26$
13	$\frac{26 - 5}{3} = 7$
14	$2 - 1 = 1$
15	$2 \cdot 11 = 22$
16	$x^3 : x^2 = x \rightarrow 16$
17	$2x + 3x - 4x = x \rightarrow 17$
18	$1 + 18 - 9 = 10$
19	$19 - 2 - 19 + 4 = 2$
20	$10 + 1 = 11$
24	$12 - 4 = 8$
25	$10 + 9 = 19$

Ficha de trabajo B (Ampliación)

	N.° DE PUNTOS AL LANZAR EL DADO	RESOLUCIÓN
BLOQUE I	1	$(1 + 1) : 2 = 1 \rightarrow$ avanza 1 casilla
	2	$2 \cdot (2 - 1) = 2$
	3	$2 \cdot 3 - 2 = 4$
	4	$(3 \cdot 4 : 2) - 1 = 5$
	5	$5^2 - (3 \cdot 5 + 2) = 8$
	6	$6 \cdot 6 - (1/3) \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = 12$

	N.° DE PUNTOS AL LANZAR EL DADO	RESOLUCIÓN
BLOQUE II	1	$1^3 - 4 = -3 \rightarrow$ retrocede 3 casillas
	2	$(16 : 8) - 4 = -2$
	3	$(27 + 2) - 30 = -1$
	4	$4^2 : (4 \cdot 4) = 1$
	5	$4^2 : 4 = 4$
	6	$(36 + 18) - (36 + 12) = 6$

	N.° DE PUNTOS AL LANZAR EL DADO	RESOLUCIÓN
BLOQUE III	1	$2 + 3 + 1 + 2 - 1 = 7$
	2	$(32 - 8) - (16 + 4) = 4$
	3	$6 \cdot (-9 + 15 - 5) = 6$
	4	$8 \cdot (4 - 3) = 8$
	5	$3^2 = 9$
	6	$11 \cdot 1 = 11$

Ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

ECUACIONES

NOMENCLATURA

PRIMER MIEMBRO

$$\underbrace{2x - 4 + x}_{} = \underbrace{11}_{}$$

Resolver una ecuación

Resolver una ecuación es calcular ....
....

$$2x - 4 + x = 11$$

SOLUCIÓN → $x = 5$ porque

$$2 \cdot 5 - 4 + 5 =$$

TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS

$x + a = b$ $x =$	$x - a = b$ $x =$
$a \cdot x = b$ $x =$	$\dfrac{x}{a} = b$ $x =$

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

$5x + 3 - 2x = 7 - 3x + 1$

REDUCIR

$3x + 3 = 8 - 3x$

TRANSPONER

REDUCIR

TRANSPONER

$x = \text{——}$

ELIMINACIÓN DE DENOMINADORES EN UNA ECUACIÓN

Para eliminar denominadores en una ecuación, se multiplica ....
....

EJEMPLO: $x - \dfrac{4}{5} = \dfrac{2x}{3} - 1$

↓ mín.c.m. (5, 3) = 15

$\left(x - \dfrac{4}{5}\right) \cdot 15 =$

↓

$=$

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON DENOMINADORES

$\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x+1}{3} = 1$

MULTIPLICAR POR EL mín.c.m.

$6 \cdot \left(\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x+1}{3}\right) = 6 \cdot 1$

OPERAR

$3(x - 1) - 2(x + 1) = 6$

QUITAR PARÉNTESIS

REDUCIR

TRANSPONER

REDUCIR

$x =$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

$x^2 = k$ $x = \pm\sqrt{k}$	$ax^2 + c = 0$ $x =$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0 \begin{cases} x = \\ x = \end{cases}$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x =$

Ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

LAS VACACIONES DE LUIS

El verano pasado, los padres de Luis alquilaron un apartamento en la playa y se fueron de vacaciones con sus tres hijos. Este año, Luis es tu compañero de pupitre y aprovechas para preguntarle cómo fueron sus vacaciones.

1 "¿Sabes?", le dices, "Yo soy el hijo pequeño. ¿Qué edades tienen en tu familia?". Luis, en vez de contestarte, te da unas pistas que te llevarán a la respuesta.

	DATOS	ECUACIÓN	AÑOS
LUIS			14
MARTA	El triple de su edad menos 10 es igual al doble de su edad.		
ÁNGEL	El doble de su edad más la edad de Luis es igual a 30.		
PADRE	Hace 12 años, su edad era igual al doble de la que actualmente tiene Luis.	Edad del padre: x; 12 años antes: $x - 12$ $x - 12 = 2 \cdot 14 \rightarrow x =$	
MADRE	Cuando pasen 16 años, su edad será el doble de la que tendrá Luis entonces, menos 10 años.		

2 "Oye, ¿y cuánto os costó el apartamento?". Luis te contesta que por día se gastaron 190 €. Él y sus padres pagaron la tarifa de adultos, y sus dos hermanos, 30 € menos. "Ya, pero ¿cuánto os costaba cada día a cada uno?", le preguntas. "Calcúlalo tú, que ya te he dado todos los datos".

Tarifa de adulto: x

Tarifa menores de 12 años: $x - 30$

Ecuación:

3 "¿Estabais muy lejos de la playa?", preguntas. "Verás, si al triple de esa distancia le quitas cuatrocientos metros, obtienes el mismo resultado que si al doble le quitas trescientos cincuenta". Ahora averígualo tú.

Nombre y apellidos: ....

4 Luego te cuenta que un día fueron a un parque acuático. "¿Y era muy caro?", le dices. "Pues, no sé. Pagamos 120 € por tres entradas de adulto y dos infantiles. Las de adulto costaban el doble que las infantiles". ¿Cuánto costaba cada entrada?

5 Luis te cuenta que ese día sus padres les dieron 18 € para los tres y que Marta recibió el doble que Ángel y Luis el triple que su hermano. "¿Y cuánto os tocó a cada uno?". No molestes más a Luis y calcúlalo tú.

Ángel: x euros.

6 "Qué gracioso", te dice Luis. "Un día, mi hermano preguntó a mi madre cuántos días quedaban de vacaciones y ella le contestó: 'si al triple de días que quedan le restas 4, es igual que si al doble le sumas 2'. Pobrecillo, tuve que ayudarle con las cuentas". ¿Qué le contó Luis a su hermano Ángel?

7 "¿Y qué tal la vuelta?", preguntas. "Bien. Fue triste, pero se nos pasó enseguida, porque al parar para descansar le preguntamos a mi padre que cuánto quedaba, y él nos dijo:

'Si a la tercera parte de la distancia a casa le sumamos 20 kilómetros, obtenemos el mismo resultado que si a esa misma distancia le restamos 80 kilómetros'.

Nos pasamos el resto del viaje haciendo cuentas". Pero ahora te toca hacerlo a ti. ¿Cuántos kilómetros quedaban?

Ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

FRUTAS Y VERDURAS

Tus tíos están pensando en comprar una finca agrícola. Para ver si les puede salir rentable hacerse cargo de ella, te piden que les acompañes un fin de semana para verla y hacer algunos cálculos.

1 Una de las parcelas de la finca es poco productiva y nadie se ha ocupado de ella en años. Tanto que ni siquiera saben sus dimensiones. Según unos documentos antiguos es rectangular, su perímetro es de 1 600 m y su largo mide 7 veces su ancho. Di a tus tíos las dimensiones de la parcela.

2 En otra de las parcelas os dicen que llevan cosechando manzanas tres años. El segundo año la cosecha aumentó 500 kilos respecto de la primera. El tercer año volvió a aumentar, y se recogió un quinto más que el segundo año, lo que supuso un total de 4 200 kg. A tus tíos esos datos no les dicen nada. Les gustaría saber cuántos kilogramos se recolectaron el primer año.

3 Hay otras dos parcelas rectangulares que saben lo que miden… o casi. El propietario os dice que las dos tienen la misma superficie y que en una el largo mide el doble que el ancho, mientras que, en la segunda, el largo es 40 m menos que el de la primera, y el ancho, 30 m más que el ancho de la primera. Tus tíos te piden que calcules las dimensiones de las dos parcelas.

4 El dueño os cuenta que vendió su última cosecha de escarolas y lechugas al mismo mayorista. “¿Y cuántas cajas de lechugas vendió?”, quiere saber tu tía. “Pues verá, exactamente no lo sé, pero en total eran 320, y por ambos productos obtuve los mismos ingresos, a pesar de que la caja de escarolas costaba el triple que la de lechugas”. Ayuda a tus tíos y diles el número de cajas de cada clase.

Nombre y apellidos: ....

5 La parcela dedicada a guisantes es cuadrada, y el agrimensor ha dicho que, si su lado aumentara en 3 metros, la superficie crecería un 69 %. ¿Cuánto mide el lado de la parcela?

6 En otra parcela rectangular, que mide 3 000 m^2, están poniendo una valla de madera alrededor. A una pregunta de tu tío, el hombre os dice que van a poner 220 m de valla. “Oye, ¿y cuánto miden los lados de la parcela?”, te pregunta tu tía.

7 “¿Cuánto cuesta un metro de valla?”, pregunta tu tío pensando en vallar otras parcelas. “Eso lo sabe el capataz. Cuando yo le pregunté por el precio, él me contestó: si pones el precio en euros, la suma de su cuadrado más su triple es igual a su quíntuplo”. Dile a tus tíos cuánto cuesta el metro de valla.

8 En un momento determinado hablan de la producción de peras: “Tengo unos 5 000 kilos casi a punto de recogida, pero están un poco verdes y conviene esperar a la semana que viene, pues se espera una subida del precio en un 10 %, lo que me supondría un aumento de los ingresos de unos 400 €. ¿Cuál es el precio actual de las peras?

9 Por último, os dicen que hay dos clases de tomates, los de primera categoría, que se venden a 2 €/kg, y los de segunda, a 1,20 €/kg. La semana pasada una empresa conservera se llevó una partida de 4 000 kilos, de las dos clases. Como eran para embotar, los mezclaron y la mezcla salió a 1,68 €/kg. ¿Puedes decir cuántos kilos de cada clase se llevó la conservera?

Soluciones

Ficha de trabajo A (Refuerzo)

1

	DATOS	ECUACIÓN	AÑOS
LUIS			14
MARTA	El triple de su edad menos 10 es igual al doble de su edad.	$3x - 10 = 2x$	10
ÁNGEL	El doble de su edad más la edad de Luis es igual a 30.	$2x + 14 = 30$	8
PADRE	Hace 12 años su edad era igual al doble de la que actualmente tiene Luis.	Edad del padre: x 12 años antes: $x - 12$ $x - 12 = 2 \cdot 14 \rightarrow$ $\rightarrow x = 40$	40
MADRE	Cuando pasen 16 años, su edad será el doble de la que tendrá Luis entonces, menos 10 años.	$x + 16 = 2 \cdot 30 - 10$	34

2 $3x + 2(x - 30) = 190$

Tarifa de adulto: 50 €

Tarifa para menores: 20 €

3 50 metros.

4 Entrada infantil: 15 €

Entrada de adulto: 30 €

5 Ángel → 3 €

Marta → 6 €

Luis → 9 €

6 Les quedaban 6 días de vacaciones.

7 150 km

Ficha de trabajo B (Ampliación)

1 Ancho: 100 m

Largo: 700 m

2 3 000 kg

3 La primera, 60 m × 120 m.

La segunda, 90 m × 80 m.

4 Fueron 8 cajas de escarolas y 240 de lechugas.

5 El lado mide 10 m.

6 Dimensiones: 50 m × 60 m

7 Cuesta 2 € el metro.

8 Las peras están actualmente a 0,80 €/kilo.

9 Se mezclaron 2 400 kg de primera categoría y 1 600 kg de segunda categoría.

Sistemas de ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

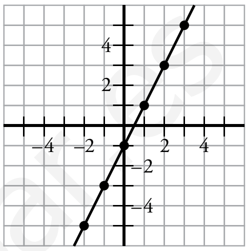
Curso: .... **Fecha:** ....

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ECUACIONES LINEALES

- Una **ecuación lineal** es una ecuación de primer grado con ....
- Una **solución de una ecuación lineal** es ....
- Cada punto de una recta representa ....

x	y
0	
1	
2	
3	
–1	
–2	



SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Dos ecuaciones lineales forman un ....

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - 3 \\ x + y = 5 \end{array}\right\}$$

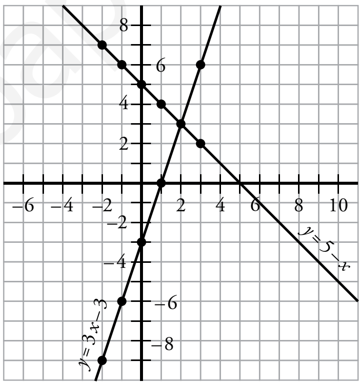
- La **solución del sistema** es la solución común a ....

$y = 3x - 3 \rightarrow$

x	–2	–1	0	1	2	3
y	–9					

$y = 5 - x \rightarrow$

x	–2	–1	0	1	2	3
y	7					



SOLUCIÓN → $\left\{\begin{array}{l} x = \\ y = \end{array}\right.$

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

SUSTITUCIÓN

Despejar una incógnita de una ecuación y sustituir su valor en la otra. ..

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 8 \\ 4x + 5y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 2x - 8 \\ 4x + 5 \cdot (2x - 8) = 2 \end{array}$$

IGUALACIÓN

Despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones e igualar los resultados. ....

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x - 8 \\ y = \dfrac{2 - 4x}{5} \end{array}\right\} 2x - 8 = \frac{2 - 4x}{5}$$

REDUCCIÓN

Multiplicar las ecuaciones por los números adecuados para que al sumarlas desaparezca una incógnita.

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 8 \\ 4x + 5y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 5} 10x - 5y = 40 \\ \xrightarrow{} \ \ 4x + 5y = \ \ 2 \\ \hline \quad 14x \qquad = 42 \end{array}$$

Sistemas de ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

LA FIESTA DE CUMPLEAÑOS

Tu compañera de clase, Isabel, te ha invitado a su fiesta de cumpleaños. La fiesta va a ser en un parque de atracciones.

1 Nada más llegar a casa, se lo dices a tu madre. “¿Cuándo es su cumpleaños?”, pregunta. Sintiéndote bromista, le contestas: “Los años que cumple son el doble del día en que nació menos 3”. “¿Cómo quieres que lo sepa con esa información?”.

a) “Puedes expresar el enunciado anterior mediante una ecuación lineal, llamando y a la edad de Isabel y x al día en que nació”.

b) “Vale, ya. ¿Y ahora?”, pregunta. “Te he preparado una tabla con algunas soluciones de la ecuación, y sabes que tiene mi edad, 13 años. Complétala”.

x	3	5	6	8	9	10	12
y		7					

c) “Bueno, mamá, ¿cuál crees ahora que es el día del cumpleaños de Isabel?”.

2 “¿Cuántos chicos y chicas vais a la fiesta?”, te dice tu madre. “Entre todos somos 12 y hay dos chicos más que chicas”, prosigues con la broma. “¿Más cuentas?”. “Venga, mamá, que te ayudo”.

a) “Llama y al número de chicas y x al de chicos. Escribe el sistema de ecuaciones”.

b) “Prueba a despejar la variable y en las dos ecuaciones”.

c) “Completa estas tablas con las soluciones de cada ecuación. ¿Cuál crees que es la respuesta a tu pregunta?”.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	11		9							

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y		0								8

Nombre y apellidos: ....

3 Los doce amigos quedáis en la puerta del parque a las once y media. A las once y cuarto llamas desde una cabina a tu madre para decirle que ya has llegado y te pregunta: "¿Estáis ya todos?". Cuentas a tus amigos y le dices: "No, mamá. El triple de los que hemos llegado menos los que faltan es igual a 20".

4 Mientras esperáis a que lleguen todos, tú y Pablo comparáis el dinero que lleváis cada uno. A ti te faltan 4 € para tener el triple que Pablo, y te sobran 8 € para tener tanto como él. ¿Cuánto dinero lleváis cada uno?

5 "Oye, Isabel, tu mochila está muy llena. ¿Cuánto pesa?". Isabel, tan graciosa como tú, te dice: "Dos botes de refresco y tres botellas de agua pesan 1 470 g; y una botella de agua y un bote de refresco, 610 g. Yo llevo dos botes de refresco y una botella de agua. Haz tú los cálculos".

6 Entre varios amigos compráis 6 bolsas de palomitas y 2 granizados de limón, que os cuestan 10 €. Luego le decís a Isabel, que no estaba con vosotros, que un granizado costaba el triple que una bolsa de palomitas menos 1 euro. "Anda, ahora calcula tú cuánto cuesta una bolsa de palomitas y cuánto un granizado".

7 Cuando bajas de la montaña rusa, te encuentras con Ana y con Juan, que acaban de salir de la casa del terror. Te dicen que primero salió Ana y luego Juan. "¿Estuvisteis mucho rato ahí dentro?", preguntas. "Pues la suma de los dos tiempos fue 10 minutos. Y el doble del tiempo que estuvo Juan menos el triple del que estuve yo es 0", te contesta Ana. ¿Cuánto tiempo estuvo cada uno en la casa del terror?

Sistemas de ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

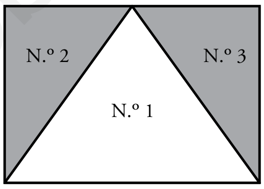
Curso: .... **Fecha:** ....

ÁLGEBRA EN LA GRANJA

A Javier le gusta ir de vacaciones a casa de sus tíos, que se dedican a la agricultura y a la cría de animales.

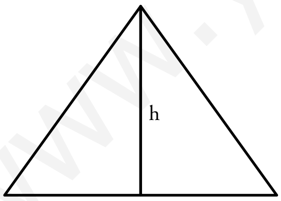
1 "Tío, ¿tú cuántos años tienes?", pregunta Javier. "Pues el doble de tu edad más la mía es 72. Y hace cuatro años, mi edad era el cuádruple de la tuya. Averigua tú mi edad".

2 Una de las parcelas que siembran tiene forma triangular. "Tío, ¿cuál es la superficie de la parcela n.° 1?", preguntas. "Es un triángulo isósceles cuyo perímetro es de 800 m, y los lados iguales miden 50 m menos que el lado desigual. Calcula tú el área". "Pero ¿cómo lo hago, tío?".



a) "Prueba a calcular lo que mide cada lado. Llama x a los lados iguales e y al lado desigual".

b) "Ahora, aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura, h, del triángulo y poder, así, hallar su área".



3 Después de ver la finca, tu tía te lleva a ver los animales. "Tía, ¿estos animales los vendéis?", preguntas. "Pues claro. La semana pasada vendimos pollos y conejos, 5 pollos más que conejos. Y el triple del número de pollos menos el doble del de conejos fue 25. ¿A que no sabes cuántos pollos y cuántos conejos vendimos?".

Nombre y apellidos: ....

4 “¿Y cuánto os pagaron por los pollos y los conejos?”. “Nos dieron 95 € en 12 billetes; unos eran de 10 € y otros de 5 €. Venga, dime cuántos billetes había de cada clase”.

5 Luego le preguntas por cuántos pollos y cuántos conejos les quedan. “Después de la venta puedes contar 88 patas. Si vendiéramos 2 conejos, habría doble número de pollos que de conejos. Haz tú el cálculo”.

6 Para alimentar a las gallinas y a los pollos utilizan una mezcla de pienso de maíz y cebada. El pienso de maíz lo compran a 0,80 €/kg y la cebada a 1,10 €/kg. ¿Cuántos kilos de cebada y de pienso de maíz necesitan para obtener 45 kilos de mezcla que resulte a un precio de 0,90 €/kilo?

7 “Tío, ¿cuántos vehículos tenéis?”, le dices. “Contando todos, tenemos 7. Unos son de dos ruedas (bicicletas y motocicletas), y otros, de cuatro (coches y tractores). La suma de la mitad y la cuarta parte de los de dos ruedas es igual a la suma de un tercio y de dos tercios de los de cuatro ruedas”. No preguntes más y calcula cuántos vehículos hay de cada clase.

Soluciones

Ficha de trabajo A (Refuerzo)

1 a) $y = 2x - 3$

b)

x	3	5	6	8	9	10	12
y	3	7	9	13	15	17	21

c) Nació el día 8.

2 a) $\begin{cases} y + x = 12 \\ y + 2 = x \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 12 - x \\ y = x - 2 \end{cases}$

c)

$\boxed{y = 12 - x}$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

$\boxed{y = x - 2}$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Hay 7 chicos y 5 chicas.

3 Llegaron 8 amigos y faltaban 4.

4 Tú → 14 €

Pablo → 6 €

5 Un refresco pesa 360 g, y una botella de agua, 250 g. Lo que Isabel lleva en la mochila pesa 970 g.

6 El precio de un granizado es 2 €, y el de una bolsa de palomitas, 1 €.

7 Juan estuvo 6 minutos, y Ana, 4.

Ficha de trabajo B (Ampliación)

1 La edad de Javier es 14 años, y la de su tío, 44 años.

2 a) $x = 250$ m

$y = 300$ m

b) h = 200 m

$A = 30\,000$ m^2

3 Vendieron 15 pollos y 10 conejos.

4 Había 7 billetes de 10 € y 5 billetes de 5 €.

5 Quedan 12 conejos y 20 pollos.

6 Necesitan 15 kg de cebada y 30 kg de pienso de maíz.

7 Tienen 4 vehículos de dos ruedas y 3 de cuatro ruedas.

Teorema de Pitágoras. Semejanza

Nombre y apellidos: ....

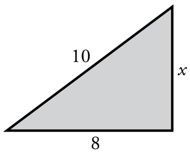
Curso: .... **Fecha:** ....

TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de ....

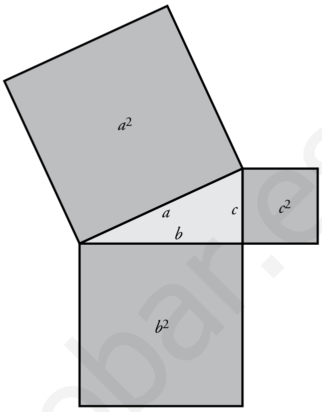
$$a^2 = b^2 + c^2$$

APLICACIÓN: cálculo de distancias.



$$10^2 = x^2 + 8^2$$

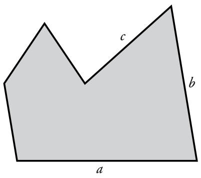
$$x = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

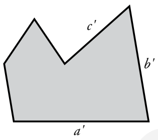


SEMEJANZA

FIGURAS SEMEJANTES

Dos figuras son semejantes cuando solo difieren en .... En tal caso, los segmentos correspondientes son ....





$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

El valor fijo k recibe el nombre de ....

$a = a' \cdot k$ $b = b' \cdot$ $c = c' \cdot$

ESCALAS

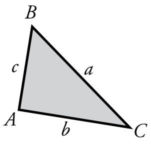
La escala de un mapa o de un plano es el cociente entre cada longitud del mapa (o plano) y la correspondiente ....

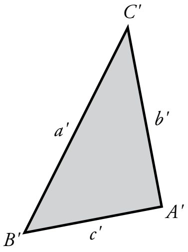
EJEMPLO: En un plano o escala 1:25 000, dos poblaciones están a 3 cm de distancia. Su distancia real es de .... km.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes si cumplen una de estas condiciones:

- Los ángulos son ....
- Los lados son ....





$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} =$$

Teorema de Pitágoras. Semejanza

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

MEDICIONES EN EL AULA

Al profesor de Matemáticas le encargan que haga un estudio de las dependencias del instituto por si se puede optimizar el uso del espacio disponible. Empieza su labor por vuestra aula, en la que da clase.

1 Primero se quiere dibujar un plano a escala de la clase, pero no tiene muy claro cuál será la escala. Así que os va pidiendo diversos dibujos para ver cuál se adecua mejor a sus intereses. “Este rectángulo representa una de vuestras mesas”, os dice. “Dibujad un rectángulo semejante que represente mi mesa, sabiendo que la razón de semejanza es 2”.

2 Los dibujos anteriores están hechos a escala 1:20. ¿Cuáles son las dimensiones reales de una mesa de alumno? ¿Cuáles son las dimensiones de la mesa del profesor? “Y recordad poner las dimensiones que obtengáis en el dibujo”, os dice el profesor.

3 “Como todavía no he decidido la escala a la que dibujaremos el plano, construid una figura semejante a la que representa vuestra mesa, cuya razón de semejanza sea 1/2. Tomad como punto de proyección el vértice A”.

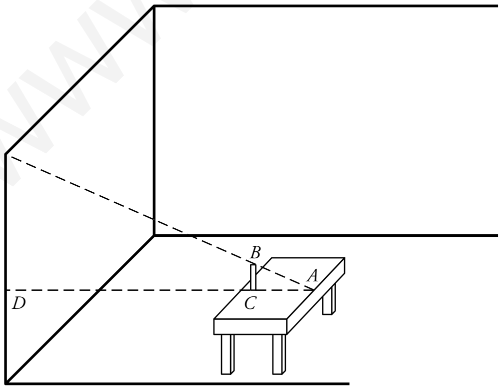
Nombre y apellidos: ....

4 “A ver, chicos, vamos a representar la superficie del aula a escala 1:100, mediante un rectángulo de lados 9 cm y 6 cm, respectivamente.

¿Cuáles son las dimensiones reales de la clase?

5 “Vamos a dibujar las ventanas. Tened en cuenta que miden 100 cm × 125 cm. Si utilizamos una escala 1:25, ¿cuáles serán sus dimensiones en el plano? Dibujad una de ellas como muestra, por favor”.

6 “También vamos a calcular la altura de la clase. ¿A alguien se le ocurre cómo podemos hacerlo?”, pregunta. Ana levanta la mano y contesta: “Podríamos utilizar la semejanza de triángulos”. “Muy bien, Ana. Utilizad el siguiente dibujo para calcular la altura que os pido. La altura de la mesa es de 70 cm. Además, $\overline{BC}$ = 20 cm, $\overline{AC}$ = 50 cm y $\overline{AD}$ = 4 m”.



7 Por último, vamos a calcular la distancia en el suelo de esquina a esquina opuesta.

– “Podemos medir con la cinta métrica”, dice Rosa.

– “También lo podemos calcular utilizando el teorema de Pitágoras”, dice Luis.

Bien, lo hacemos de las dos formas y comprobaremos que se obtiene el mismo resultado. Calcula tú esa distancia con los datos disponibles.

Teorema de Pitágoras. Semejanza

Nombre y apellidos:...

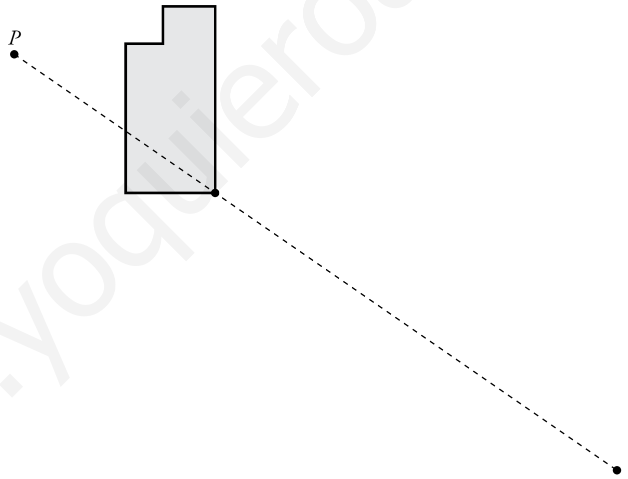
Curso:.. **Fecha:** ....

COMPRA DE CASA

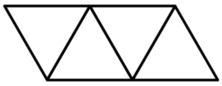
Tu prima Luisa y su novio, Arturo, quieren comprar una casa y van a la inmobiliaria. Te vas con ellos.

1 Al llegar allí, les enseñan una fotocopia del plano de la casa, pero ampliada un 150% para poder verlo mejor. Tus primos quieren que las medidas sean exactas y te preguntan si se pueden fiar de la fotocopia, si las dos figuras serán semejantes. ¿Qué les contestas? De serlo, ¿cuál sería la razón de semejanza?

2 A Arturo le gustaría ver ampliada la parte que corresponde a la cocina. Te pide que la amplíes al triple de su tamaño, utilizando como punto de proyección uno exterior a la figura. ¿Cómo te quedó?



3 Está previsto que una cenefa de triángulos equiláteros decore las paredes de la cocina. En el dibujo que les mostraron, el lado del triángulo medía 6 cm, y les dijeron que la razón de semejanza del dibujo era de 1/2. Arturo te pregunta qué altura tendría la cenefa de triángulos en la realidad.

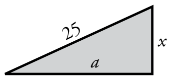


Nombre y apellidos: ....

4 Os enseñan otro plano en el que uno de los dormitorios mide 3,6 cm × 2,4 cm. Os dicen que en la realidad medirá 4,5 m × 3 m. Para posteriores mediciones, Luisa te pregunta por la escala de este plano.

5 Luego os muestra otro plano con la plaza de garaje. En él, la plaza mide 3 cm × 8 cm (ancho × largo), y os dice que la longitud real es de 6 m, pero que no recuerda la anchura. El comercial os dice que la plaza cuesta 12 150 €. ¿A cuánto sale el metro cuadrado?

6 La rampa que baja desde la calle al garaje tiene una longitud de 25 m, y visto en planta, en el plano anterior, mide a = 32 cm. ¿A qué profundidad se encuentra el suelo del garaje?



7 En otro plano, con una escala 1:75, el piso tiene una superficie de 240 cm^2. El precio final del piso es de 243 000 €. Luisa quiere saber cuánto cuesta el metro cuadrado, para compararlo con otras zonas. Díselo.

8 Ya en la calle, observando la construcción, Luisa y Arturo quieren saber la altura que tendrá finalmente. Tu prima midió con sus pasos (2 pasos) la sombra que proyectaba en la calle una señal de tráfico de 2 m de altura y la sombra del edificio (18 pasos). Te dijo que cada uno de sus pasos mide 75 cm. ¿Cuál es la altura aproximada del edificio?

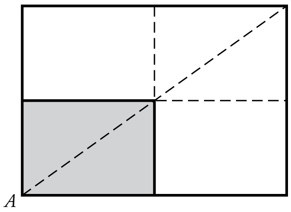
Soluciones

Ficha de trabajo A (Refuerzo)

1

2 La mesa del alumno mide 70 cm de largo y 50 cm de ancho. La longitud real de la mesa del profesor es 1,4 m, y su anchura, 1 m.

3



4 Las dimensiones reales son 9 m de largo y 6 m de ancho.

5 Las ventanas en el plano serían de 4 cm × 5 cm.

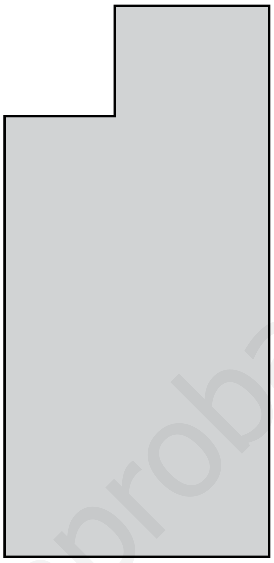
6 2,3 m

7 La diagonal mide 10,82 m.

Ficha de trabajo B (Ampliación)

1 Sí, son semejantes y la razón de semejanza entre la fotocopia y el plano original es 1,5.

2



3 10,4 cm

4 Escala 1:125

5 900 €/m^2

6 7 m

7 1 800 €/m^2

8 18 metros

Cuerpos geométricos

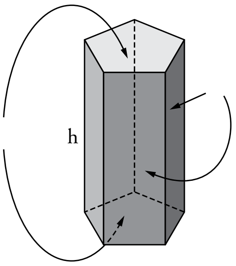
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

GEOMETRÍA DEL ESPACIO. POLIEDROS

POLIEDROS

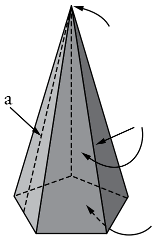
PRISMA



$A_{LAT} =$

$A_{TOTAL} =$

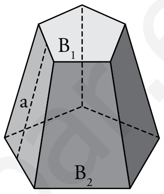
PIRÁMIDE



$A_{LAT} =$

$A_{TOTAL} =$

TRONCO DE PIRÁMIDE

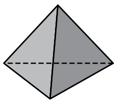


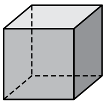
$A_{LAT} =$

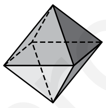
$A_{TOTAL} =$

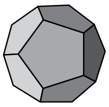
POLIEDROS REGULARES

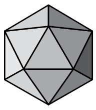
POLIEDRO







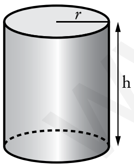




NOMBRE

CUERPOS DE REVOLUCIÓN

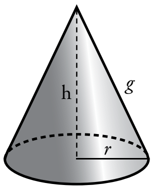
CILINDRO



$A_{LAT} =$

$A_{TOTAL} =$

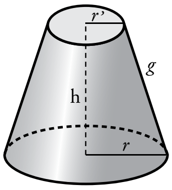
CONO



$A_{LAT} =$

$A_{TOTAL} =$

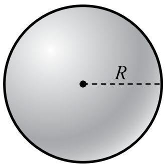
TRONCO DE CONO



$A_{LAT} =$

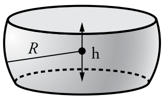
$A_{TOTAL} =$

ESFERA



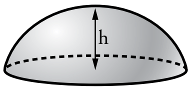
$A =$

ZONA ESFÉRICA



$A =$

CASQUETE ESFÉRICO



$A =$

Cuerpos geométricos

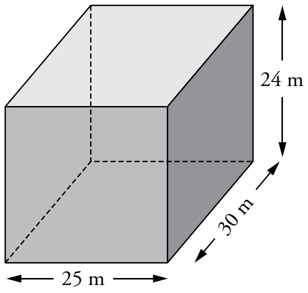
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

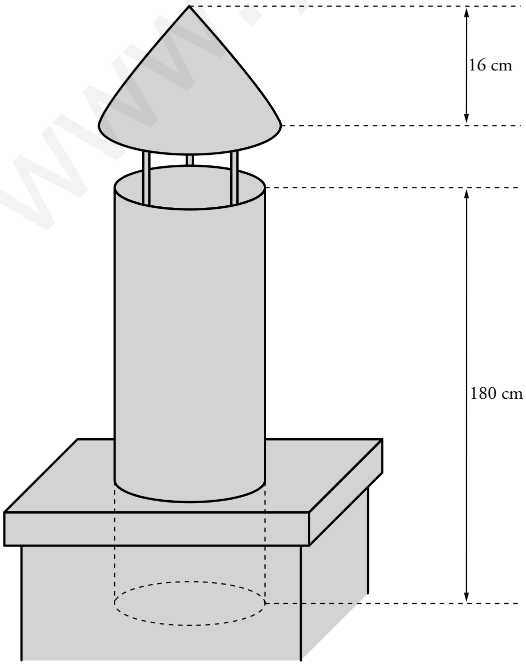
PASEO MATEMÁTICO

Carmen y su hermano, mayor que ella y estudiante de Matemáticas, vuelven a casa juntos. Mientras caminan, hablan de las matemáticas y del mundo real. Carmen se queja de que en la calle no se ven "matemáticas". Su hermano trata de sacarle de su error.

1 "Mira, fíjate, Carmen. La casa en la que vivimos es un paralelepípedo recto de 24 m de altura, y su base, un rectángulo de 25 m × 30 m, ¿no? Con esos datos puedes calcular el área lateral del edificio, es decir, la superficie lateral de las paredes". "Ya, pero ¿eso para qué sirve?", contraataca Carmen. "Imagínate que tuvieran que pintar las paredes exteriores. ¿No crees que sería importante ese dato? Venga, halla la superficie lateral".



2 "Ahora, observa: en la azotea hay una chimenea de chapa, de forma cilíndrica, con un radio de 10 cm y una altura de 1,80 m". "Y para que no entre el agua tiene una caperuza cónica, con un radio de 12 cm y una altura de 16 cm".



a) ¿Cuál es la superficie del cuerpo de la chimenea?

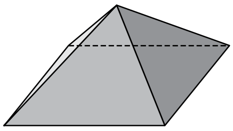
b) ¿Cuál es la superficie de la caperuza?

Nombre y apellidos:..

3 "A ver, déjame a mí, Fernando", le dice Carmen. "La sala comunitaria del edificio es un ortoedro que tiene 2,25 m de altura. El suelo es un rectángulo de 6 m × 4 m. La puerta de entrada mide 90 cm de ancho por 2 m de alto".

"Si quisiéramos pintar las paredes y el techo, ¿cuántos metros cuadrados pintaríamos?".

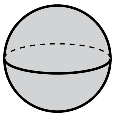
4 Carmen le dice: "Ahora que me fijo, las claraboyas de los patios interiores son pirámides. Seguro que te puedes inventar un problema con ellas" "Pues claro", le contesta, "miden 2 m de altura, y el lado de su base cuadrada mide 4 m. ¿A que no sabes cuántos metros cuadrados de material transparente se ha necesitado para cada una?".



5 "No está mal, hermanita, pero ahí va uno más difícil: la puerta principal del edificio es de 2 m de altura, y consta de 10 barrotes ortoédricos verticales, con base cuadrada de 9 cm^2. Ya lo hemos pintado otras veces y sabemos que se gastan 50 g de pintura por cada medio metro cuadrado de superficie. ¿Cuántos gramos de pintura necesitamos para pintar los barrotes? Y no olvides contar las superficies de las bases", le dice Fernando. Ayuda a Carmen con las cuentas.

6 "Venga, vamos a casa que ya es hora de comer. El último: en la entrada a la finca, el número está grabado sobre una esfera hueca de metacrilato, de 30 cm de diámetro".

"¿Podrías decirme cuánto pesa esa esfera, sabiendo que la chapa de metacrilato pesa a razón de 1,5 gramos el centímetro cuadrado?".



Cuerpos geométricos

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

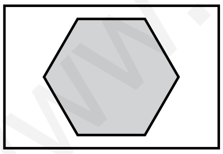
UN MIRADOR EN LA SIERRA

El último fin de semana fuiste con tus abuelos a un mirador que hay en la sierra, desde el que se contempla un paisaje impresionante. El mirador es una torre compuesta de tres estructuras: un ortoedro en la base, un prisma regular hexagonal en el centro y, en la parte superior, un tronco de cono.

1 Decides poner en aprietos a tu abuelo, aficionado a las matemáticas, y le dices: “Abuelo, aquí dice que la base del ortoedro es un rectángulo de dimensiones 24 m × 16 m y que su área total es equivalente a la de un cubo de 12 m de arista. ¿A que no sabes cuál es la altura de la estructura ortoédrica?”. ¿Qué contestó el abuelo?

2 El abuelo está leyendo el cartel donde se explica la construcción y dice: “Mira, según el cartel, la arista lateral del prisma hexagonal mide 40 m, y la arista de la base, 7 m”.

a) “A ver, listillo, ¿por qué no me dices la superficie que la torre hexagonal deja libre en la cara superior del ortoedro?”.

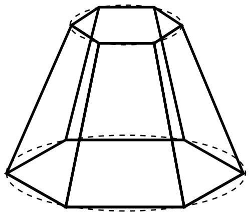


b) Interviene tu abuela: “Mirad, la superficie lateral de la torre hexagonal está recubierta con plaquetas rectangulares de 20 cm × 30 cm. ¿Cuántas plaquetas habrá en total?”.

Nombre y apellidos: ....

3 El cuerpo superior del mirador es un tronco de cono acristalado, cuya altura mide 4 m, y los radios de sus bases, 5 m y 2 m, respectivamente. “Abuelo, ¿por qué no calculas la superficie lateral de ese tronco de cono?”, le dices. “¿Y por qué no la calculas tú?”, te responde.

4 Para sostener la superficie del cuerpo superior se utilizó una estructura metálica construida con barras de hierro, coincidiendo con las aristas de un tronco de pirámide hexagonal, inscrito en el tronco de cono. ¿Cuántos metros lineales de barra de hierro se utilizaron?



5 Un guía que hay por allí se acerca a vosotros y os dice: “Vaya, veo que os gustan las matemáticas. Ahí va una buena pregunta: el ascensor en el que habéis subido ocupa el 20% de la plataforma del mirador. ¿Qué superficie queda disponible para los visitantes?”.

Soluciones

Ficha de trabajo A (Refuerzo)

1 $A_{LAT} = 2640$ m^2

2 a) 1,13 m^2

b) 753,6 cm^2

3 a) Pintaría 67,2 m^2.

4 38,63 m^2 si se considera la base; y 22,63 m^2 si no se cuenta con la base.

5 Necesitan 241,8 g de pintura.

6 Pesa 4,239 kg.

Ficha de trabajo B (Ampliación)

1 1,2 m

2 a) 257 m^2, aproximadamente.

b) 28 000 plaquetas.

3 110 m^2, aproximadamente.

4 Se utilizaron 72 metros de hierro.

5 Quedan aproximadamente 52 m^2 disponibles para los visitantes.

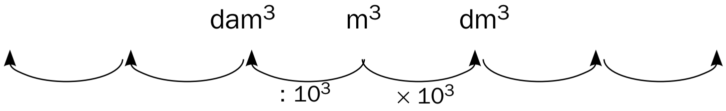
Medida del volumen

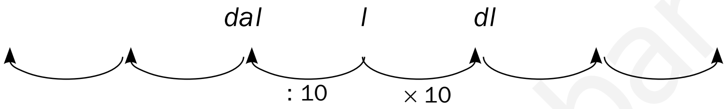
Nombre y apellidos: ....

Curso: ....   **Fecha:** ....

MEDIDA DEL VOLUMEN

UNIDADES DE VOLUMEN

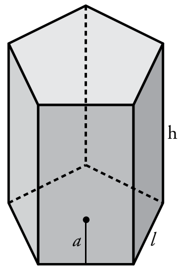




EJEMPLOS:

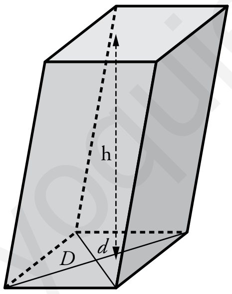
10 m^3 = ... cm^3 7 *l* = ... dam^3 1 hm^3 = ... *dl*

PRISMA



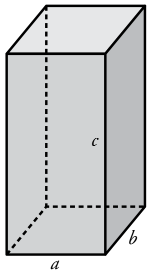
V =

PARALELEPÍPEDO



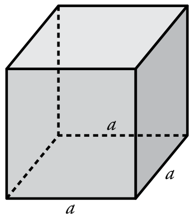
V =

ORTOEDRO



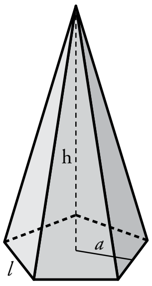
V =

CUBO



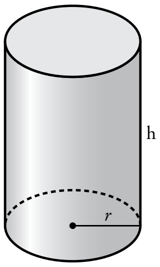
V =

PIRÁMIDE



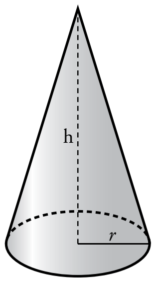
V =

CILINDRO



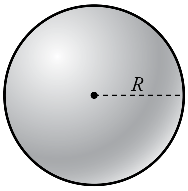
V =

CONO



V =

ESFERA



V =

Medida del volumen

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

ENVASES PARA REFRESCOS

El colegio os lleva a una fábrica de refrescos para que veáis cuál es el proceso de elaboración de estos productos. Allí la profesora de Matemáticas os va explicando todo mientras os hace algunas preguntas para ver si estáis atentos a la visita.

1 "Mirad aquí. Estamos viendo un depósito cilíndrico de 1 metro de diámetro y de 2 m de altura. Por lo que me han dicho, está lleno de refresco de naranja. ¿Cuántos litros de refresco caben en el depósito?".

2 "Los refrescos se comercializan en varios envases. Me han dado una tabla con los distintos tipos, pero no me han dicho cuántos envases de cada tipo se pueden llenar con los litros que habéis calculado antes. Vamos a hacerlo nosotros, ¿vale?".

CAPACIDAD DE LOS ENVASES	2 *l*	1/2 *l*	40 *cl*	250 *ml*	200 *ml*
N.º DE ENVASES					

3 "Como nos han visto hacer cálculos, me acaban de pedir que les completemos la siguiente tabla: en ella debe ir el número de envases de cada tipo que se necesitan para completar un litro de refresco. ¡Manos a la obra!".

CAPACIDAD DE LOS ENVASES	200 *ml*	25 *cl*	50 *cl*	1 dm^3	100 *ml*
N.º DE ENVASES					

4 "Para comercializar el refresco de limón, el envase que más utilizan es un cilindro metálico de 33 cm^2 de base y 10 cm de altura. ¿Cuántos centilitros caben en cada bote?".

Nombre y apellidos: ....

5 Un bote de refresco tiene 3,25 cm de radio en la base y 10 cm de altura.

a) Si duplicaran el radio y la altura, ¿por cuánto quedaría multiplicado su volumen?

b) Y si rebajaran a la mitad las medidas anteriores, ¿en cuánto quedaría reducido su volumen?

6 "El zumo de naranja lo venden envasado en *packs* de tres unidades. Cada unidad tiene la forma de un ortoedro de dimensiones 5 cm × 3,2 cm × 12,5 cm. A ver si me decís cuántos mililitros caben en un *pack*".

7 Para el zumo de piña utilizan un envase ortoédrico con una capacidad de 400 *ml*. Su base es un cuadrado de 5 cm de lado. ¿Cuál es la altura del envase?

8 "Me dicen que también envasan refresco de frutas con leche en un recipiente cúbico de 6,3 cm de arista. ¿Cuántos de estos cubos necesitan para envasar un litro?".

9 Ahora están investigando la viabilidad de un envase con forma de prisma hexagonal regular, con capacidad para 1,5 *l*. Si la altura prevista es de 20 cm, ¿cuántos centímetros cuadrados debe tener la base?

Medida del volumen

Nombre y apellidos:..

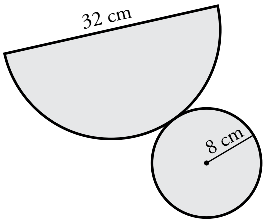
Curso:... **Fecha:** ....

EL MUNDO DE LAS CAJAS

Una de las excursiones más divertidas que hacéis todos los años es a la fábrica de cajas. En ella construyen cajas para regalo, para perfumería y para repostería. Seguís al guía por toda la planta.

1 "Mirad, chicos, aquí vemos a uno de los operarios mientras construye un cono de cartón plastificado, a partir de un semicírculo de 32 cm de diámetro y de una circunferencia de 8 cm de radio para la base del cono".

a) "¿Alguno puede decirme qué altura tendrá el cono?".



b) "¿Y cuál será su volumen?".

c) "A ver, para los más rápidos calculando: ¿podrá contener un litro de líquido?".

2 "En esta otra zona tenemos cajas construidas con forma de cilindro cuya base tiene 803,84 cm^2, y cuya altura mide 30 cm".

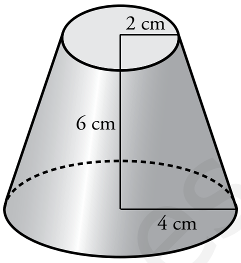
a) "Si se introduce en la caja un objeto de 20 dm^3, ¿qué volumen queda libre dentro de la caja?".

b) "El cartón de la caja tiene un grosor de 2 mm. ¿Podéis decirme cuál es su peso, sabiendo que 10 cm^3 pesan 5 g?".

Nombre y apellidos: ....

3 "En este taller también fabricamos un molde de plástico como el de la figura, en forma de tronco de cono. En las pastelerías se utilizan para rellenarlo de chocolate".

a) "¿Cuántos mililitros de chocolate fundido caben en el recipiente?".



b) "Calculad también su peso, sabiendo que 100 cm^3 de chocolate pesan 120 g".

4 "Para envasar perfumes, fabricamos unos recipientes esféricos de 10 cm de diámetro".

a) "¿Se pueden introducir 50 *cl* de perfume en cada uno de ellos?".

b) "Para su venta, nos piden que se presente el recipiente en una caja cúbica cuya área total mida 6 dm^2, sin contar solapas. ¿Cabrá el recipiente esférico en una caja así?".

5 "El departamento de diseño está estudiando, para un nuevo producto, la construcción de un envase que debe tener forma de tronco de pirámide cuadrado, con una capacidad de 140 mililitros, y cuyas bases tengan aristas de 4 cm y 2 cm, respectivamente. ¿Cuál será la altura del envase?".

Soluciones

Ficha de trabajo A (Refuerzo)

1 1 570 litros

2

CAPACIDAD DE LOS ENVASES	2 *l*	1/2 *l*	40 *cl*	250 *ml*	200 *ml*
N.º DE ENVASES	785	3 140	3 925	6 280	7 850

3

CAPACIDAD DE LOS ENVASES	200 *ml*	25 *cl*	50 *cl*	1 dm^3	100 *ml*
N.º DE ENVASES	5	4	2	1	10

4 33 *cl*

5 a) El volumen quedaría multiplicado por 8.

b) Su volumen sería $\frac{1}{8}$ del inicial.

6 600 *ml*

7 El envase tiene 16 cm de altura.

8 Son necesarios 4 cubos.

9 75 cm^2

Ficha de trabajo B (Ampliación)

1 a) h = 13,86 cm

b) $V = 928,44$ cm^3

c) No podrá contener un litro de líquido.

2 a) 4 115,2 cm^3 = 4,1152 dm^3

b) 299,56 g

3 a) 175,84 *ml*

b) 211 g

4 a) Sí, porque la capacidad del recipiente esférico es, aproximadamente, de 52,3 *cl.*

b) Sí, porque cada arista de la caja mide 10 cm.

5 La altura debe ser de 15 cm.

Funciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

FUNCIONES

LAS FUNCIONES Y SUS ELEMENTOS

Una función relaciona dos variables, x e y, y asocia a cada valor de x **un único** valor de y.

- A x se la llama variable ....
- A y se la llama variable ....

Las funciones se representan gráficamente.

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Una función es **creciente** en un tramo cuando al aumentar la x ....

EJEMPLO:

Una función es **decreciente** en un tramo cuando ....

EJEMPLO:

Si una función mantiene el mismo valor en todo un tramo, se dice que es ....

EJEMPLO:

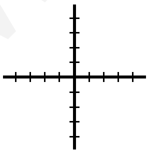
TIPOS DE FUNCIONES

- **Función de proporcionalidad** $y = mx$

  Estas funciones se representan mediante una recta que pasa por ....

  La constante de proporcionalidad, m, también se llama ....

  EJEMPLO:

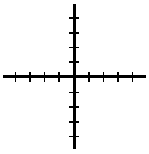


- **Función lineal** $y = mx + n$

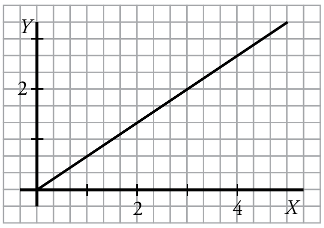
  Se representan mediante ....

  La ordenada en el origen es el punto de corte con ....

  EJEMPLO:



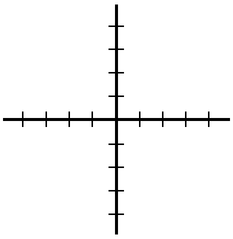
PENDIENTE DE UNA RECTA



La pendiente de esta recta es $m =$

EJEMPLO de recta con pendiente $m = -2$:

$y =$



Si m es positiva, la función es ....

Si m es negativa, la función es ....

Funciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

TRANSPORTE DE MERCANCÍAS

En el colegio estáis preparando la excursión de fin de curso. Un empresario de la localidad, dedicado al transporte de mercancías, se ofrece a hacer una buena aportación si le ayudáis a resolver unos problemas que tiene en su empresa. Vuestra profesora habla con él y acepta el reto, porque os ve capaces de ayudarle.

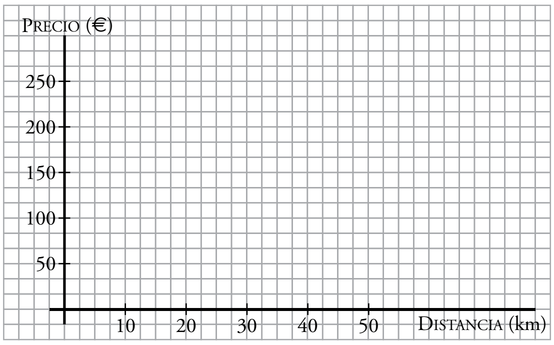
1 En primer lugar, os dice que el precio por transportar cualquier mercancía es directamente proporcional a la distancia recorrida. El empresario solo tiene unos pocos datos:

x (km)	10	20	25	30	40	45	50
y (€)		100	125			225	250

a) Le gustaría que le completarais la tabla.

b) Para estudios posteriores, le vendría muy bien que le dijerais cuál es la ecuación de la función.

c) Además, sería muy interesante ver representada la función en una gráfica. Vuestra profesora os pide que la dibujéis.

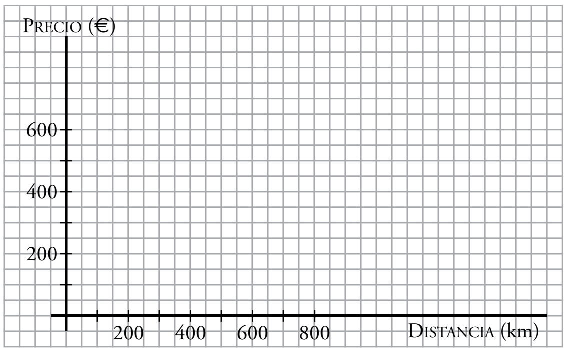


2 La empresa también ofrece un transporte con seguro de mercancías. Da igual el producto que se transporte, la función es $y = 0{,}5x + 100$. El empresario os vuelve a pedir que completéis una tabla de valores.

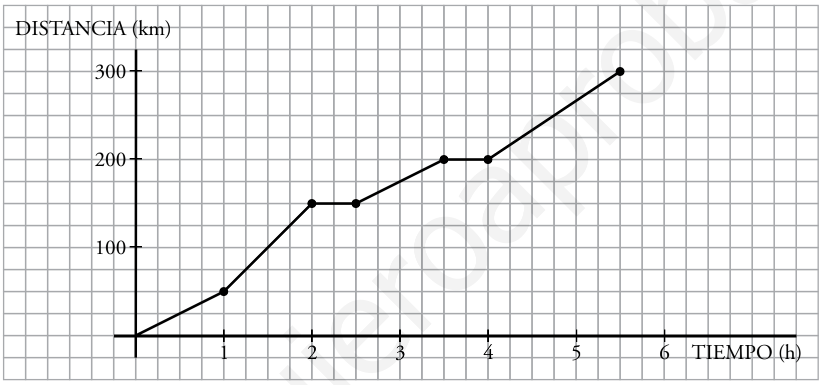
x (km)	0	100	200	300	400	500	600	700
y (€)	100	150						

Nombre y apellidos: ....

3 Ahora dibujad la gráfica del ejercicio anterior.



4 Por último, os enseña una gráfica correspondiente a un porte efectuado por un camión de la empresa. Os hace algunas preguntas.



a) ¿Ha hecho el conductor algún descanso como marca la ley? ¿Cuándo?

b) ¿En qué tramo del viaje circula más despacio? La profesora os sugiere que miréis las pendientes de los distintos tramos.

c) ¿Hay algún tramo creciente? ¿Cuál?

d) ¿Y algún tramo decreciente? ¿Cuál?

e) ¿Y algún tramo constante? ¿Cuál?

f) ¿Cuál fue la distancia total recorrida por el camión?

Funciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

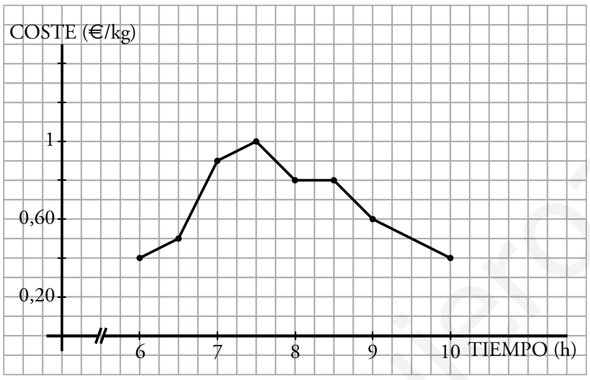
EL MERCADO MAYORISTA

Tus padres tienen una frutería en el barrio. Un día que estás de vacaciones, te vas con tu padre a hacer las compras al mercado de mayoristas.

1 Junto a uno de los distribuidores de tomates, hay un gráfico con los precios de los tomates según transcurren las horas.

a) "Podrías decirme los precios máximo y mínimo?".

b) "Me vendría bien que me dijeras en qué periodos los precios suben, en cuáles bajan y en cuáles el precio no varía".



2 Luego pasáis por una empresa que vende cerezas en distintos envases. Tu padre está mirando la tabla de precios según el peso del envase y te hace algunas preguntas.

PESO (kg)	0,5	1	1,5	2	3	5	10
PRECIO / CAJA (€)	1,25	2,5	3,75	5	7,5	12,5	25

a) "Oye, fíjate en estos datos. ¿Son directamente proporcionales el peso y el precio de las cajas?".

b) "¿Puedes decirme la ecuación de la función? ¿Es una función de proporcionalidad o una función lineal?".

c) "¿Cuál es la pendiente de la recta?".

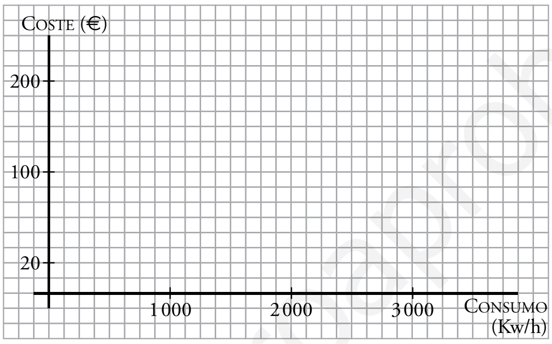
Nombre y apellidos: ....

3 En uno de los locales, tu padre tiene un amigo y hace un descanso hablando con él. “Oye, ¿y sale muy cara la factura de la luz aquí?”, le pregunta tu padre. “Pues mira, pagamos una cantidad fija bimestral de 20 €, más 6 céntimos por kilowatio. Creo que aquí tengo los últimos 6 recibos. Vaya, pues solo tengo las lecturas”, responde.

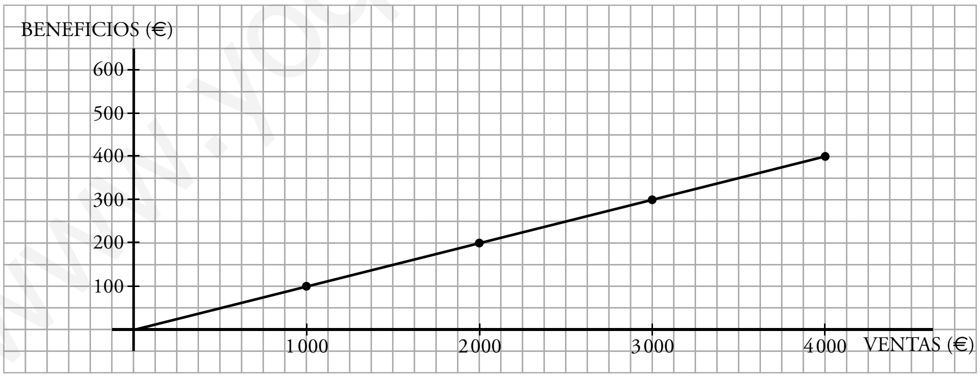
a) Tu padre te dice: “Completa la tabla que nos da el gasto de Ángel y escribe la ecuación que relaciona el coste del recibo con el consumo realizado”.

CONSUMO (km)	0	1 800	2 000	2 200	2 500	2 600	3 000
COSTE (€)							

b) “Y, ya que estás, podrías representar gráficamente la función, ¿vale?”.



4 Tu padre está pensando en cambiar la frutería por un local en el mercado mayorista. Para ello, necesita algunos datos que le digan si el cambio será rentable o no. Te enseña una gráfica que le ha dado un mayorista de fruta. En ella se ve la relación entre las ventas y los beneficios obtenidos en los últimos 8 días.



a) “¿Qué beneficio obtiene por cada 1 000 € vendidos? Exprésalo, además, mediante un porcentaje”.

b) “Dime cuál es la ecuación de la función”.

c) “¿Cuál debe ser el importe de las ventas para obtener un beneficio de 560 €?”.

Soluciones

Ficha de trabajo A (Refuerzo)

1 a)

x (km)	10	20	25	30	40	45	50
y (€)	50	100	125	150	200	225	250

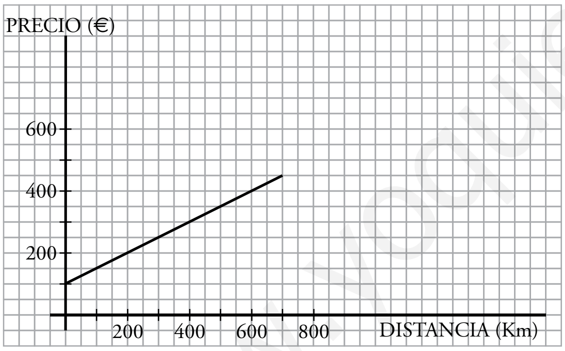
b) La ecuación es $y = 5x$.

c)

2

x (km)	0	100	200	300	400	450	500	600	700
y (€)	100	150	200	250	300	325	350	400	450

3



4 a) El camión ha parado dos veces, media hora cada vez. A las 2 horas y a las 3 horas y media.

b) Circula más despacio durante la primera hora y entre las 2,5 h y las 3,5 h del viaje.

c), d) y e) No hay ningún tramo decreciente. Hay dos tramos en los que la función es constante: de 2 h a 2,5 h, y de 3,5 h a 4 h. En los tramos no constantes, la función es creciente.

f) 300 km.

Ficha de trabajo B (Ampliación)

1 a) El precio mínimo es de 0,40 €, y el máximo, de 1 €.

b) Los precios suben entre las 6 h y las 7,5 h; bajan entre las 7,5 h y las 8 h, y entre las 8,5 h y las 10 h; y se mantienen constantes entre las 8 h y las 8,5 h.

2 a) Sí.

b) La ecuación es $y = 2{,}5x$. Es una función de proporcionalidad.

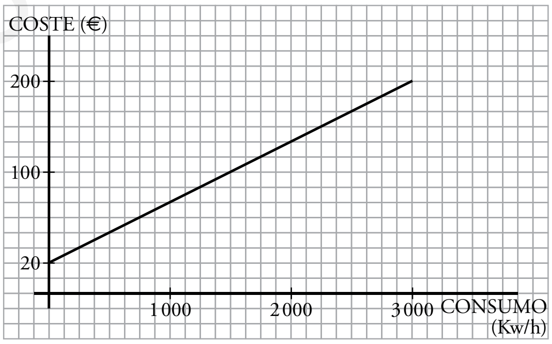
c) La pendiente es 2,5.

3 a)

CONSUMO (kw/h)	0	1 800	2 000	2 200	2 500	2 600	3 000
COSTE (€)	20	128	140	152	170	176	200

La ecuación es $y = 0{,}06x + 20$.

b)



4 a) Por cada 1 000 € vendidos obtiene un beneficio de 100 €; es decir, un 10%.

b) $y = \dfrac{x}{10}$

c) 5 600 €

Estadística

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

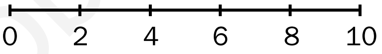
ESTADÍSTICA

TABLA DE FRECUENCIAS CON DATOS AGRUPADOS

Haz una tabla de frecuencias y construye el histograma correspondiente, con los siguientes datos de las notas de Matemáticas en una clase. Utiliza los intervalos de extremos 0 - 2 - 4 - 6 - 8 - 10.

9,5	0,8	5	6,2	4,5	5,5
3	4,8	7	1,5	2,5	5
7,5	5,2	7	3,5	5	6,5
5,5	3	2,5	4,5	7	5,5
1,5	7,5	4,5	5	3,5	5,5

NOTAS	FRECUENCIA
0 - 2	
2 - 4	



TABLAS DE DOBLE ENTRADA

Observa la tabla de la derecha sobre los hábitos de lectura en un grupo de personas.

¿Cuántas mujeres leen revistas? ....

¿Qué porcentaje de hombres lee libros? ....

¿Qué porcentaje de personas lee periódicos? ...

Del total de los que leen cómics, ¿cuál es el porcentaje de mujeres? ....

	HOMBRES	MUJERES	TOTAL
CÓMICS	15	5	20
LIBROS	17	25	42
REVISTAS	8	15	23
PERIÓDICOS	20	15	35
TOTALES	60	60	120

GRÁFICAS

Explica para qué se utiliza cada una de estas gráficas:

— Pirámides de población: ....

— Diagramas de caja: ....

— Pictogramas: ....

— Climogramas: ....

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

La **media** de varias cantidades es ....

La **mediana** de un conjunto de datos numéricos es ....

La **moda** en una distribución estadística es ....

La **desviación media** de un conjunto de datos es ....

Estadística

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

RELAJÁNDOSE EN EL CINE

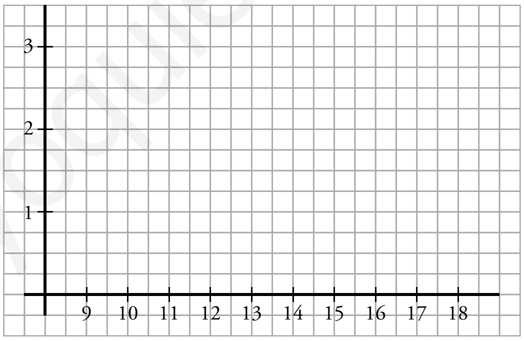
Un viernes por la tarde vas con unos amigos al cine. En la taquilla trabaja Laura, la hermana de uno de tus amigos. Como tenéis mucho tiempo hasta que empiece la película, os quedáis hablando con ella. “Oye, ¿tenéis muchos pases de películas al día?”, pregunta uno. “Como hay tantas salas, depende del día. Mirad, aquí tengo los datos de los últimos 16 días”:

9, 15, 12, 14, 10, 16, 11, 17, 9, 14, 10, 15, 12, 15, 11, 18

1 “Así no me aclaro”, dice Arturo. “Espera, que te hago una tabla de frecuencias”, le dices.

N.º DE PASES										
FRECUENCIA										

2 “Bueno, eso me dice algo más, pero ¿no podrías dibujarme un diagrama de barras?”, te pide. Dibújaselo.



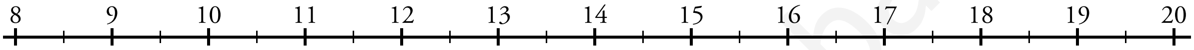
3 “¿Te vale así, o también quieres que te halle la media de los pases? ¡Y la mediana y la moda, si quieres…!”. “Ya que te ofreces…”. Calcula los tres parámetros a ver si Arturo deja de preguntar.

Nombre y apellidos: ....

4 Y Arturo insiste: “Para completar el estudio de los datos, nos queda calcular la desviación media”. “Eso lo calculas tú”, le contestas. ¿Cuál es el dato que consiguió tu amigo?

DATOS									
DIFERENCIAS A LA MEDIA									

5 Calcula los cuartiles Q_1 y Q_3 de la distribución anterior y construye un diagrama de caja y bigotes.



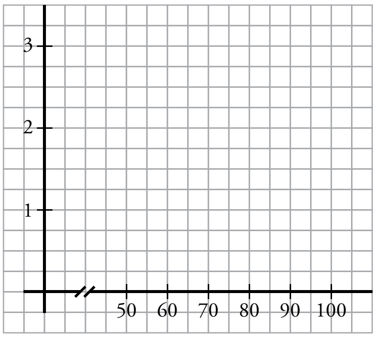
6 Antes de que te pregunten, decides contraatacar: “Laura, ¿suelen venir muchos espectadores a este cine?”. “Vamos a ver… Uno de los días en que hubo 10 pases, el número de espectadores que hubo en cada uno de ellos fue:

81, 98, 83, 94, 61, 75, 58, 73, 56, 85”

a) Marta se ofreció a hacer una tabla de frecuencias. Complétala tú.

INTERVALO	FRECUENCIA
De 50 a 60	
De 60 a 70	
De 70 a 80	
De 80 a 90	
De 90 a 100	

b) “Y yo haré su representación mediante un histograma”, dice Luis. ¿Qué aspecto tenía su representación gráfica?



Estadística

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

DOS DEPORTES

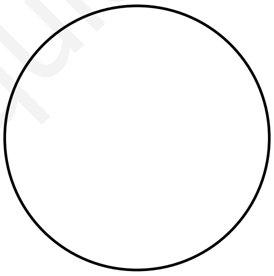
Se están celebrando los campeonatos interescolares. Tu hermana es árbitro de atletismo y vas con ella a una de las competiciones que tiene que dirigir.

1 En la pista te pones al lado del delegado de uno de los equipos. “Perdone, ¿qué edades tienen los participantes?”, le preguntas. “Pues los del otro equipo no sé, pero los de mi equipo tienen estas”, y te da una tabla de frecuencias.

EDADES	11	12	13	14	15	16
FRECUENCIAS	1	3	4	5	1	2

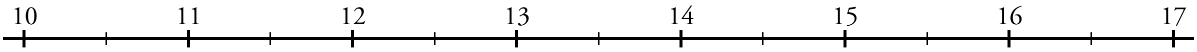
a) Te gustaría saber la media de edad del equipo, así que te pones a calcularla.

b) De tus clases, te acuerdas de que suele ser interesante ver los datos representados gráficamente. Se te ocurre hacer un diagrama de sectores. ¿Cómo te quedó?



2 “Como veo que estás interesado, calcula también la moda, la mediana y los cuartiles de esa distribución”.

3 Dibuja un diagrama de caja y bigotes con los datos que tienes de las edades de los atletas.



Nombre y apellidos: ....

4 Después te pasas por la cancha de baloncesto. En un panel hay una nota que informa de los puntos obtenidos por los dos equipos que están en la cancha, en los 6 partidos anteriores. Fueron estos:

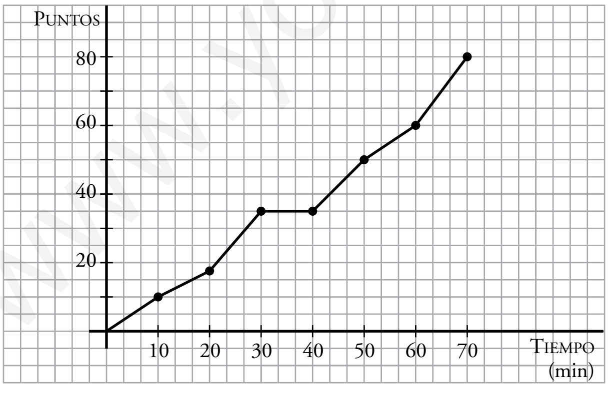
Equipo A: 48, 70, 102, 60, 120, 74

Equipo B: 70, 76, 66, 80, 68, 78

a) En el descanso, te da por calcular la media y la desviación media de los puntos conseguidos por cada equipo. ¿Cuáles son?

b) El delegado, que te ve, te pregunta: "¿En cuál de los dos equipos los resultados son más dispersos?".

5 Entusiasmado con tu labor, el delegado te ofrece que le ayudes durante todo el campeonato, porque ve que con tu interpretación de los datos puede preparar mejor los partidos. "Mira, lo último que te pido hoy: esta gráfica corresponde a un partido jugado por el otro equipo": (Nota: el partido se jugó en dos tiempos separados por un descanso).



"¿Puedes analizarla, esto es, decirme en qué tramos han conseguido más y menos canastas, si juegan mejor o peor al principio o al final del partido?; ya sabes, todo eso". Entusiasmado con la idea de ayudarle, y tras pensar un rato sobre la gráfica, le contestas.

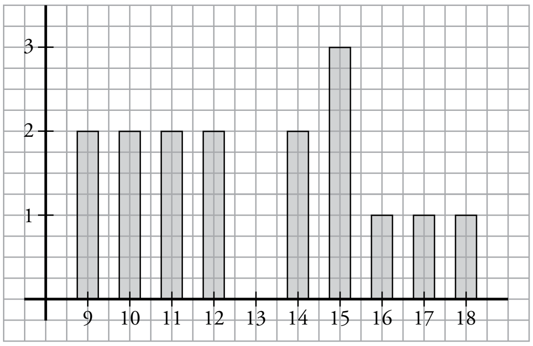
Soluciones

Ficha de trabajo A (Refuerzo)

1

N.º DE PASES	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
FRECUENCIA	2	2	2	2	0	2	3	1	1	1

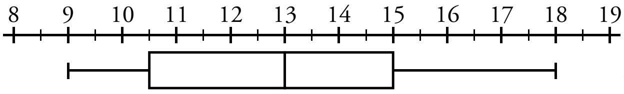
2



3 $\overline{x} = 13$; $Me = 13$; La moda es 15.

4 $DM = 2{,}5$

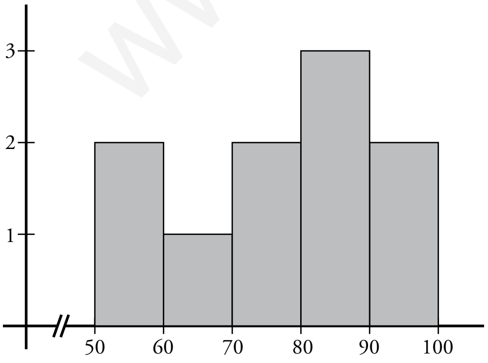
5 $Q_2 = 10{,}5$; $Q_3 = 15$; $Me = 13$



6 a)

ESPECTADORES	FRECUENCIA
De 50 a 60	2
De 60 a 70	1
De 70 a 80	2
De 80 a 90	3
De 90 a 100	2

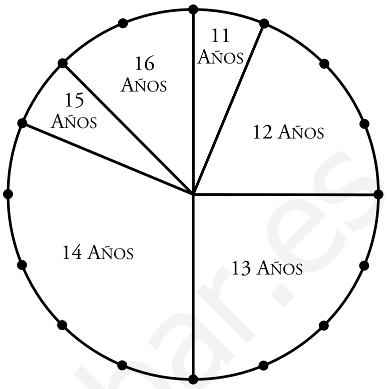
b)



Ficha de trabajo B (Ampliación)

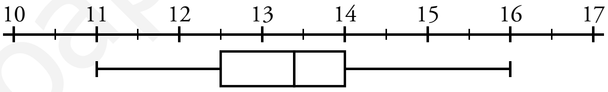
1 a) $\overline{x} = 13{,}5$

b)



2 La moda es 14 ; $Me = 13{,}5$; $Q_1 = 12{,}5$; $Q_3 = 14$

3



4 a) Equipo A: $\overline{x} = 79$; $DM \approx 21{,}3$

Equipo B: $\overline{x} \approx 73$; $DM \approx 5$

b) Los resultados son más dispersos en el equipo A, porque su desviación media es mayor.

5 Han conseguido más canastas en los últimos 10 minutos del partido, y menos canastas en el tramo del minuto 10 al 20.

Han jugado mejor al final del partido y al final de la primera parte que al principio del mismo. Ha habido un descanso de 10 minutos tras la primera media hora.

Material complementario para el desarrollo de las competencias básicas

La incorporación de las **competencias básicas** al currículo permite poner el acento en aquellos aprendizajes que se consideran imprescindibles desde un planteamiento integrador y orientado a la **aplicación de los saberes** adquiridos.

Cada una de las materias contribuye al desarrollo de diferentes competencias y, a su vez, cada una de las competencias básicas se alcanzará como consecuencia del trabajo en varias materias. Su logro capacitará al alumnado en su realización personal y en su incorporación satisfactoria a la vida adulta.

En este proyecto de Matemáticas para 2.° ESO, todas las tareas propuestas al alumnado están concebidas para el desarrollo progresivo de las competencias, al hilo de la secuenciación temática de los contenidos.

Coordinador: Carlos Marchena

Autora: M.ª José Parejo

Actividad I. Números enteros. Divisibilidad

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 Los enteros en nuestra vida

Interpreta, de forma numérica, los siguientes titulares de prensa:

a) ”El ibex **perdió** ayer **68** puntos, situándose en…”	
b) ”La cota de hielo y nieve se situará **entre** los **500** y los **1 000** m en el centro y la mitad norte…”	
c) ”La empresa estadounidense Odyssey recuperó una fortuna en artefactos y monedas que se encontraban a **1 700** pies de **profundidad**…”	
d) “Las temperaturas hoy en Albacete oscilarán **entre** los **10** °C de máxima y los **2** °C **bajo cero** de mínima…”	

Consulta la prensa, busca en Internet y añade tú nuevas situaciones reales donde aparezcan los números enteros.

2 Grandes diferencias en nuestro planeta

Busca en la red la información necesaria para completar el siguiente texto. Identifica cada imagen y resuelve las cuestiones que te planteamos.

El ______________ es la montaña más alta sobre el nivel del mar, con 8 848 m. Está localizada en el _________, en el continente _________. En 1865, la montaña fue nombrada en honor de Sir____________, geógrafo británico. Esta impresionante altura contrasta con el lugar más profundo del océano, y por lo tanto del planeta, llamado la fosa __________ que se localiza en el fondo del océano _______, con una profundidad de 11033 m. Bajo dicha fosa se encuentran cumbres más altas que cualquier montaña de tierra firme.

	EVEREST	FOSA
PRESIÓN (mm Hg)	238	814 720
TEMPERATURA (°C)	Enero: –36 a –60 Julio : –20	0 a 2

a) ¿Quién fue el primero que midió la altura del pico? ¿Qué instrumento utilizó?

b) ¿Quién descendió por primera y única vez, y con qué, a la fosa?

c) Si el monte estuviera situado junto a la fosa, ¿sabrías calcular la distancia que hay entre el punto más alto del pico y el más profundo de la fosa?

d) Si el monte tocara el fondo de la fosa, ¿emergería? ¿A qué distancia del nivel del mar se encontraría?

e) Sabiendo que la presión a nivel del mar es 1 atm = 760 mm Hg, compara las presiones de los dos lugares con ella.

f) ¿Qué diferencia de temperatura existe entre estos dos lugares del planeta, por ejemplo en julio?

g) Escribe un pequeño texto justificando por qué es tan difícil la vida en estos dos lugares del planeta. Expónselo a tus compañeros. Usa los datos anteriores y nueva información.

3 La bolsa en acción.

Ojeando la sección de economía en un periódico nacional, nos encontramos la siguiente tabla con los índices de referencia de los mercados de valores de diferentes países:

ÍNDICE	ÚLTIMO	ANTERIOR	DIFERENCIA
IBEX 35	10 499	10 567	
DOW JONES	12 170	12 258	
DAX	7 179	7 226	
CAC 40	4 020	4 060	
NASDAQ	2 360	2 372	
NIKKEI	10 694	10 586	
BOVESPA	65 001	64 609	
FTSE MIB	21 863	21 922	
FTSE 100	5 990	6 006	

a) ¿Sabes qué es la bolsa? ¿De dónde procede la palabra bolsa?

b) La bolsa tiene tres características: rentabilidad, seguridad y liquidez. Busca el significado de ellas.

c) ¿Qué es el IBEX 35? Investiga a qué país y a qué continente pertenece cada uno de los índices bursátiles anteriores.

d) Completa la tabla. ¿Qué índice ha sufrido la mayor subida? ¿Y la mayor caída? Ordena los índices y sus diferenciales de mayores ganancias a mayores pérdidas.

e) Mi padre tiene 300 títulos de una compañía de telefonía. Los compró a 21 € y hoy cotizan a 17 €. ¿Cuál es la rentabilidad obtenida a fecha de hoy?

f) Si la empresa pagara un dividendo de 1,6 € por acción, ¿cuánto le correspondería a mi padre?

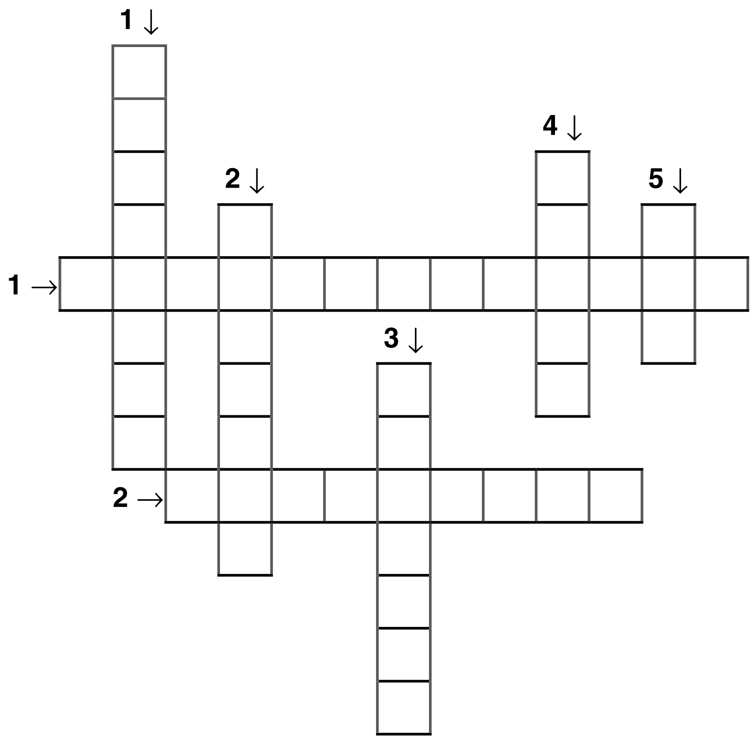
4 Completa el crucigrama

Horizontales

1. Si al dividir un número *a* entre otro *b* la división es exacta, ambos guardan una relación de …………..
2. Si un número no es primo, se llama …………

Verticales

1. Si *a* es divisible por *b*, entonces es ………… de *b*.
2. Si *a* es divisible por *b*, entonces *b* es ……… de *a*.
3. Los múltiplos de un número entero son iguales a los de su ……...
4. Un número entero es ……….. si tiene cuatro divisores (excepto el 1 y el –1).
5. Un número entero tiene un número ………. de divisores.



5 El extracto bancario

El extracto bancario de mi madre refleja los siguientes datos:

FECHA			
OPERACIÓN	**VALOR**	**CONCEPTO**	**EUROS**
01.02.2011	01.02.2011	Abono de intereses	1,00
01.02.2011	02.02.2011	Trans. otra entidad	200,00
02.02.2011	03.02.2011	Ingreso nómina	1 978,00
05.02.2011	05.02.2011	Recibo préstamo	–550,00
10.02.2011	10.02.2011	Cargo compra	–86,00
12.02.2011	13.02.2011	Ingreso cheque	300,00
12.02.2011	12.02.2011	Cobro comisión	-3,00
17.02.2011	17.02.2011	Recibo IBI	–450,00
22.02.2011	22.02.2011	Recibo de teléfono	–43,00
25.02.2011	25.02.2011	Recibo seguro vida	–157,00
28.02.2011	28.02.2011	Recibo luz	–53,00
28.02.2011	28.02.2011	Rec. gran almacén	–42,00
		SALDO FINAL	

a) Busca y explica el significado de transferencia, traspaso, fecha valor e IBI.

b) Clasifica los conceptos del extracto anterior en cargos y abonos (sepáralos en dos columnas).

c) Completa la tabla con el saldo final.

d) Sabiendo que los recibos del préstamo y del teléfono son mensuales; el de la luz, bimensual; el del seguro de vida, trimestral; y el del IBI, semestral, ¿cada cuánto tiempo coinciden todos? ¿En qué mes volverán a coincidir la próxima vez? Suponiendo un gasto medio de teléfono de 40 € y de luz de 50 €, ¿qué saldo mínimo deberá tener mi madre dicho mes para afrontar dichos gastos?

Actividad II. Sistema de numeración decimal y sexagesimal

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 Planeando nuestro viaje

¡Nos vamos a Disney World Orlando! ¿Dónde se encuentra? Nuestra primera intención es contratar el vuelo con una compañía *low cost.* ¿Qué tipo de compañías son?

Al final no ha podido ser y viajaremos con otro tipo de compañía. Analicemos la información de nuestro vuelo.

INFORMACIÓN DEL VIAJE

Salida: jueves, 21 abril, 1 escala **Duración del viaje:**

Salida 10:10 jueves, 21 abril
Terminal: 1 **Barajas** (MAD), Madrid-España

Llegada _____ jueves, 21 abril
Terminal: S **Hartsfield Jackson** (ATL), Atlanta- Estados Unidos

Delta Air Lines (DL 109)
Aerolínea operadora: Delta Air Lines

Conexión Cambio de avión
_____ jueves, 21 abril – 16:05 jueves, 21 abril
Duración de la escala:
¡Comprueba la hora y la puerta de embarque con la aerolínea!

Salida 16:05 jueves, 21 abril
Terminal: S **Hartsfield Jackson** (ATL) Atlanta – Estados Unidos

Llegada 17:35 jueves, 21 abril
Orlando Internacional (MCO), Orlando – Estados Unidos

Delta Air Lines (DL 449)
Aerolínea operadora: Delta Air Lines

a) ¿Con qué aerolínea viajamos? ¿Es un vuelo directo?

b) Si la duración del trayecto Madrid-Atlanta son 9 h 50 min, completa la tabla con la hora local a la que llegaremos a Atlanta.

c) Con el dato anterior y con la información de la tabla, completa la duración de la escala y la duración del viaje.

d) ¿A qué hora llegaremos a Orlando? ¿A qué aeropuerto?

e) El hotel que nos gusta se encuentra a 3,5 millas del aeropuerto. ¿De qué distancia en kilómetros estamos hablando?

f) Se nos permite realizar una reserva por internet que incluye cuatro noches de hotel y la entrada para cuatro días a los parques por 299 dólares cada adulto. ¿Cuánto sería en euros?

g) En la página del hotel se puede leer “Disney World only 0,5 miles away". ¿Significa eso que podremos ir paseando desde el hotel al parque?

h) Si el vuelo cuesta por persona 630,25 €, tasas incluidas, ¿cuál es el importe total por persona del viaje?

2 Vamos de compra. ¿Marcas blancas?

He quedado con mi madre para ayudarle a hacer la compra. Estoy a 25 minutos en bici del lugar donde hemos quedado:

a) ¿A qué hora tendré que salir de casa de mi amigo, si he quedado en casa con ella a las 19 h 15 min?

b) Mi madre me ha pedido ayuda para elegir los productos más económicos. Teniendo en cuenta este criterio, ¿podrías ayudarme a seleccionar el producto que debo escoger de cada fila de esta tabla?

PRODUCTO	MARCA BLANCA	OTRA MARCA
Detergente	6,50 € (50 dosis)	5,40 € (33 dosis)
Refresco cola	4,65 € (pack 4 unidades 2 *l*)	3,57 € (pack 3 unidades 2 *l*)
Aceite	9,00 € (garrafa 5 *l*)	1,80 € (botella 75 *cl*)
Queso	5,95 € (pieza 900 g)	4,95 € (pieza de 385 g)
Papel Higiénico	0,25 € (rollo de 25 m)	0,28 € (rollo 35 m)

c) Para hacer más rápida la compra, dejamos a mi hermano pequeño en la ludoteca infantil del centro comercial, que tiene una tarifa de 1,5 € cada 15 min (fracciones completas de 15 minutos). Si entró a las 19 h 30 min y lo recogimos a las 20 h 40 min ¿Cuánto tiempo estuvo allí? ¿Cuánto tendremos que pagar?

d) Busca información y escribe un pequeño texto para explicar qué son las marcas blancas, por qué reciben ese nombre y cuáles son algunas de sus ventajas e inconvenientes.

3 Trial deportivo en la ciudad

“No hace falta ser un superhéroe para iniciarse en el triatlón”. ¿Has pensado hacer uno?

¿Sabes qué es el triatlón? Investiga sobre sus orígenes y explícalo a tus compañeros. ¿Es un deporte olímpico?

DISTANCIA	NATACIÓN	CICLISMO	CARRERA A PIE
Olímpica	1 500 m	40 km	10 km
Sprint			
Súper Sprint			
Ironman	2,4 mi	112 mi	26,2 mi
Half Ironman	1,2 mi	56 mi	13,1 mi

a) Completa la tabla sabiendo que las distancias Sprint son la mitad de las olímpicas, y las Súper Sprint, la mitad del Sprint.

b) Calcula en kilómetros las distancias en Ironman. Redondea los cálculos a las décimas en la natación y a las unidades en ciclismo y carrera a pie.

c) ¿Qué diferencia de distancia, en kilómetros, existe entre la Ironman y la Olímpica? ¿Y en metros?

d) Dos buenos atletas han realizado el recorrido olímpico. Uno de ellos ha tardado 1h 10 min y el otro ha empleado 9 min en natación, 29 min en ciclismo, 30 min en la carrera a pie, 2 min en la primera transición y 3 min en la segunda. ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre los dos? ¿Quién llegó primero?

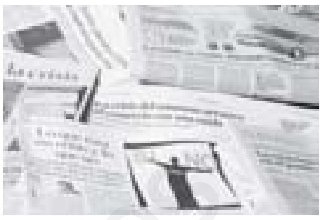
e) Escribe un pequeño texto sobre los beneficios físicos y mentales que puede reportarnos practicar deporte.

Actividad III. Las Fracciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 Interpretar titulares y anuncios de publicidad



“Dos de cada tres clientes prefieren…”.

“Cinco de cada diez espectadores eligieron…”.

“Una de cada dos mujeres de las orquestas españolas…”.

“Una de cada cuatro editoriales comercializará en versión digital…”.

a) Expresa con una fracción lo que dice cada titular.

b) Representa cada fracción coloreando figuras geométricas.

c) Ordena las fracciones obtenidas de mayor a menor. ¿Hay alguna equivalente?

2 Noticia: “Una parrilla de campeones”

En un diario de tirada nacional se podía leer lo siguiente:

“Es la segunda vez en la historia de la F1 que coinciden en un mundial cinco campeones del mundo”.

	SCHUMACHER	ALONSO	HAMILTON	BUTTON	VETTEL
Victorias/grandes premios	91/269	26/159	14/71	9/193	10/69
Podios	154	63	36	31	19
Poles	68	20	18	7	15

a) Investiga cuál es la nacionalidad de cada piloto y con qué escudería corre cada uno.

b) Explica el significado de las anotaciones de la primera fila de la tabla.

c) ¿Qué significado tiene podios y poles?

d) Expresa en forma de fracción los podios y los poles de cada uno.

3 Venta de "fracciones"

Para recaudar fondos para el viaje de fin de curso hemos organizado un desayuno en el instituto. Hemos preparado 4 tartas de galletas y 6 tartas de chocolate divididas en 8 partes iguales cada una, y 5 tartas de queso y 5 de manzana divididas en 10 partes iguales cada una. Para beber, tenemos vasos de 200 ml de capacidad de zumo o de leche fresca.

a) Si después de las ventas nos han sobrado 3 porciones de tarta de galleta y una porción y una tarta completa de queso, completa la tabla expresando en forma de fracción las porciones que hemos vendido y las que nos ha sobrado de cada tipo de tarta, y en total.

	VENDIDO	SOBRANTE
Tarta de galleta		
Tarta de queso		
Tarta de manzana		
Tarta de chocolate		
Total		

b) Si el zumo y la leche vienen en botellas de un litro, expresa en forma de fracción la capacidad de cada vaso de zumo o de leche.

c) Si por cada litro de leche queremos obtener 3 €, y 4 € por cada litro de zumo, ¿a cuánto tenemos que vender cada vaso?

d) ¿Cuánto hemos recaudado con la venta de las tartas, si con cada tarta de galleta queríamos recaudar 4 €, con cada una de las de chocolate 4,80 € y con cada una de manzana y queso 6,00 €?

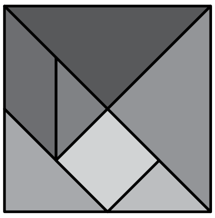
e) ¿A cuánto hemos vendido la porción de los diferentes tipos de tartas?

4 Fraccionando con el tangram

a) ¿Sabes qué es un tangram?

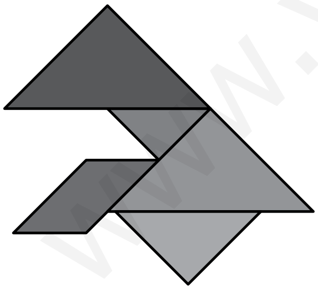
b) Realiza una pequeña investigación sobre su historia. ¿Has encontrado distintos tipos de tangram?

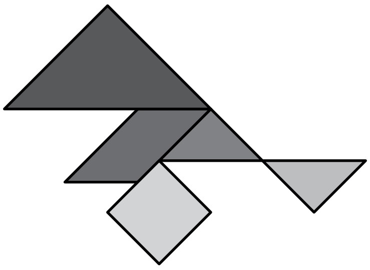
c) Nombra las figuras geométricas que ves en el tangram chino de la imagen.

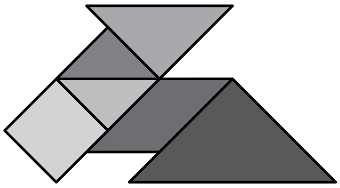


d) Tomando como unidad el cuadrado grande, ¿qué fracción representa cada una de las siete figuras planas que lo forman?

e) Teniendo en cuenta los datos del apartado anterior ¿qué fracción total representa cada una de las imágenes que te proponemos a continuación?







Actividad IV. Proporcionalidad y porcentajes

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 Los números a debate

Analiza la noticia: *La velocidad máxima en 8 800 km de autopistas y autovías ha sido limitada a 110 km/h desde el lunes 7 de marzo de 2011.*

> "Las revueltas árabes obligan a tomar importantes medidas para rebajar la factura energética".
>
> "La Rebaja en los límites de velocidad para ahorrar petróleo enciende el debate …".
>
> "Un plan "rentable" si multiplicamos las sanciones de tráfico por…".
>
> "En 2010, dos tercios del déficit comercial se debieron al petróleo".
>
> Fuente: Un diario nacional

a) Lee y comenta con tus compañeros el significado de los titulares de prensa.

b) El gobierno fijó el tope de 120 km/h en 1973 para responder a un posible estrangulamiento en el suministro de petróleo. ¿Cuál fue la razón de aquel temor? ¿Cuál es la razón actual para fijar el nuevo límite?

c) ¿Podrías contestar qué relación de proporcionalidad guardan las siguientes magnitudes: velocidad/tiempo; velocidad/espacio recorrido; velocidad/consumo de combustible?

La siguiente tabla muestra la procedencia del petróleo crudo importado por España. Son datos del año 2009. (1 ktep = 7 570 barriles)

PAÍS	MILES DE TONELADAS EQUIVALENTES DE PETRÓLEO	% RESPECTO DEL TOTAL
México	5 657	
Venezuela	2 680	
América (otros)	312	
Reino Unido	1 193	
Europa (otros)	987	
Rusia	8 201	
Argelia	1 081	
Nigeria	5 398	
África (otros)	5 867	
Libia	5 041	
Arabia Saudí	5 807	
Irak	2 250	
Irán	6 270	
Oriente Med. (otros)	731	

d) Completa la tabla. A tenor de los datos obtenidos ¿crees que es importante la dependencia de España del crudo procedente de Libia? ¿Cómo nos afectan los conflictos que se están produciendo en ese país?

e) Realiza los cálculos necesarios para completar el siguiente texto y responder a la pregunta final.

El gasto: El plan 20 de medidas de ahorro energético requiere una inversión estimada de 1 151 millones de euros.

El ahorro: El plan prevé ahorrar 2 300 millones de euros dejando de importar ________ de barriles de petróleo a 80,42 €/barril.

Los impuestos: En 2009, Hacienda ingresó 9 581 millones por el impuesto de hidrocarburos. El plan supone un recorte del 5%; es decir, ingresar _________millones menos, además del impacto sobre el IVA.

Las multas: en 2011 se prevé ingresar por multas de tráfico 409 millones.

El Balance: ¿Por cuánto se tendrían que multiplicar las multas si quisiéramos compensar los gastos?

f) Reflexiona y escribe otras posibles consecuencias de la reducción del limite de velocidad distintas a las económicas.

2 Noticia: La receta “secreta” de la golosina

En un diario de tirada nacional se podía leer el título y los siguientes subtítulos de nuestra actividad.

“Detallar los ingredientes de un alimento es obligatorio”.

“Las chucherías a granel no etiquetan sus componentes”.

“Los expertos reclaman más información nutricional”.

a) Lee y explica el sentido del titular y de los subtítulos. Investiga si son ciertos.

b) Busca en el diccionario la definición de golosina y de chuchería.

c) ¿Sabrías explicar la siguiente expresión: “calorías huecas o vacías”?

d) Investiga: ¿Sobre qué nos informa la “pirámide nutricional”? Según esta, en una dieta sana, ¿cómo debe ser el consumo de golosinas?

Observa la tabla y calcula:

e) Calcula el valor energético por gramo en cada golosina y expresa los resultados en una tabla. A tenor de los resultados, ¿qué tipo de golosina es la más energética?

■ INFORMACIÓN NUTRICIONAL DE GOLOSINAS

Promedio por unidad

	Peso (gr)	Energía (calorías)	Hidratos (gr)	Proteínas (gr)	Grasas (gr)
Caramelo con palo	9	34,4	8,6	0	0
Caramelo de goma/gelatina	8	28,8	6,9	0,3	0
Caramelo blando/toffe	5	20,6	4,5	0,2	0,2
Gel dulce/regaliz	5	17,6	4,1	0,2	0,05
Chicle hinchable	5	14,0	3,3	0	0
Caramelo duro	4	15,2	3,8	0	0
Caramelo duro sin azúcar	3	7,2	3,0	0	0
Chicle sin azúcar	2	5,8	1,6	0	0

Fuente: Capchi

EL PAÍS

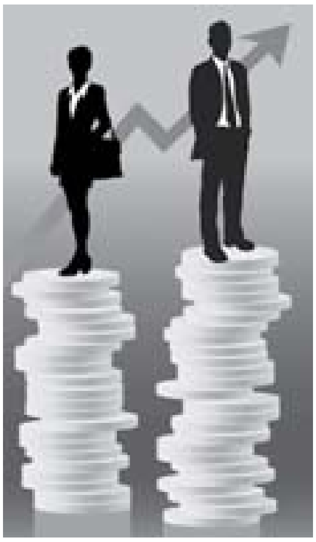
f) El contenido en hidratos de carbono, ¿está en la misma proporción en un caramelo con palo y uno de goma? En caso de que no sea así, ¿cuál de los dos tiene proporcionalmente más hidratos?

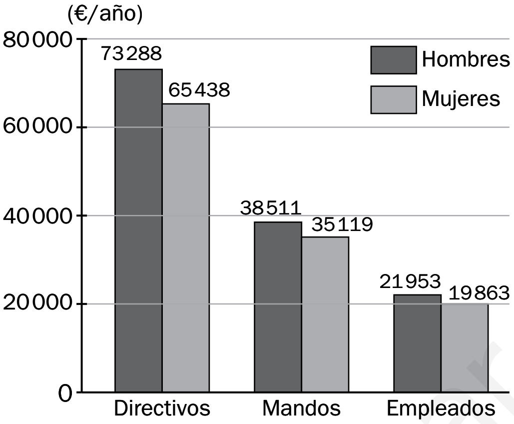
g) Discute con tus compañeros sobre la importancia del etiquetado de los productos. Elige una etiqueta e identifica los aspectos fundamentales que aparece en ella.

h) Busca información, escribe un pequeño texto y cuéntaselo a tus compañeros, sobre los efectos perjudiciales del consumo habitual de golosinas.

3 Noticia: "La brecha salarial entre sexos"

A veces los datos nos hacen pensar, observa el diagrama.





a) Analiza el significado del titular de prensa y coméntalo con tus compañeros.

b) Teniendo en cuenta los datos del gráfico, ¿cuál es la diferencia entre el salario de un hombre y una mujer que ocupan un cargo directivo? ¿Y si ocupan un puesto de mando? ¿Y entre los que son empleados?

c) ¿Qué tanto por ciento menos cobran las directivas, las empleadas y las que ocupan puestos de mandos intermedios con respecto a sus homólogos masculinos?

d) ¿En qué escala hay una mayor discriminación salarial? ¿Y una menor discriminación salarial? ¿Cuál es la horquilla que representa la diferencia de salarios?

Teniendo en cuenta los datos de la siguiente tabla, calcula:

SEXO	OCUPADOS	PARADOS
Mujeres	8166600	2103100
Hombres	10289900	2529300

e) ¿Cuál el porcentaje de paro por sexo?

f) Debate en grupo y haz propuestas de cómo mejorar la situación de la mujer en el mundo laboral.

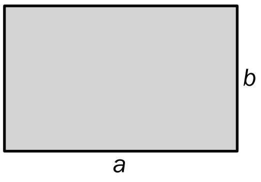
Actividad V. Álgebra

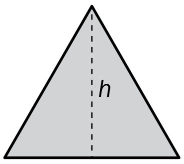
Nombre y apellidos: ....

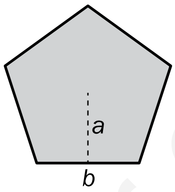
Curso: .... **Fecha:** ....

1 Completa la tabla

Te proponemos las siguientes figuras: un rectángulo, un triángulo equilátero y un pentágono regular. ¿Serías capaz de completar la tabla?







	RECTÁNGULO	TRIÁNGULO	PENTÁGONO
Área			
Perímetro			
Doble del área			
Cuarta parte del perímetro			
Total			

2 Mirando el recibo. Economía doméstica.

Estoy ayudando a mis padres a elegir la compañía eléctrica más barata. Tenemos contratado el servicio con la compañía ELIC y la compañía ESUR nos han hecho una propuesta de contratación. Estudiemos ambas, para decidir cuál es más ventajosa.

ELIC

Potencia contratada: 7,89 kw

Consumo: 0,128645 €/kwh

ESUR

Potencia contratada: 7,89 kw

Consumo: < 400 kwh, 0,108695 €/kwh

resto, 0,158811 €/kwh

a) El término fijo de potencia lo calcularemos multiplicando la potencia contratada por el numero de días, por un valor fijo (0,056529 €/kw día). Busca información de qué pagamos con este concepto. Escribe la expresión algebraica para calcular este importe. ¿Depende este importe del consumo realizado? Calcula el importe para 31 días y con la potencia indicada.

b) Para cada compañía, escribe la expresión algebraica para calcular los consumos. El histórico de nuestros consumos muestra durante 6 meses al año una media de 650 kwh (consumo A) y durante otros 6 meses una media de 300 kwh (consumo B). Realiza los cálculos necesarios para completar la tabla de consumo anual para cada compañía.

COMPAÑÍA	ELIC	ESUR
Término fijo de Potencia		
Coste Consumo A		
Coste Consumo B		
Total Factura Anual		

c) Según los datos anteriores, ¿qué compañía es la más beneficiosa? ¿Cuál es el ahorro anual de una con respecto a la otra? ¿Nos interesa el cambio de compañía? Discute los resultados.

3 **Con un gesto tan simple...**

Sabías que, simplemente cambiando la bombilla que se utiliza habitualmente por una de bajo consumo, podemos rebajar la factura de electricidad y además reducir las emisiones de CO_2?

Cada hogar expide unos 1 300 kg al año, lo que supone entre un 7-9% del total de emisiones.

Veamos un ejemplo para poner en práctica:

Una bombilla tradicional de 100 W (que cuesta unos 0,7 euros) proporciona la misma luz que una lámpara de bajo consumo de 20 W (unos 9 euros).

a) Escribe la expresión algebraica para calcular el consumo durante un año de una bombilla en función de su potencia y del número de horas de encendido.

b) Calcula el consumo eléctrico (kwh) a lo largo de un año de cada una, proporcionando las dos la misma luz, suponiendo que estén encendidas unas 6 horas diarias.

c) Suponiendo que en el recibo eléctrico se cobre el kwh a 0,14 €, ¿cuánto nos ahorraría al año la lámpara de bajo consumo?

d) Además, las lámparas de bajo consumo tienen una vida media de 8 000 h frente a las 1 000 h de una convencional. ¿Cuál sería el ahorro durante la vida útil de una de bajo consumo? (No olvides añadir el gasto de las bombillas).

e) Investiga: ¿Crees que puede existir una bombilla encendida desde hace más de 100 años? ¿A qué se le llama obsolescencia programada?

http://www.ecologiaverde.com/la-obsolescencia-programada/

f) Escribe un pequeño texto con nuevas iniciativas de ahorro doméstico (gas, electricidad, agua, etc.), que contribuyan a la sostenibilidad del planeta. Expónselo a tus compañeros.

Actividad VI. Ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 El regalo de Daniel

Es el cumpleaños de Daniel y varios compañeros de clase hemos pensado hacerle un regalo. Para ello hemos pedido 5,5 € por persona. A última hora se han sumado seis amigos más, por lo que solo debemos poner 3,85 € cada uno.

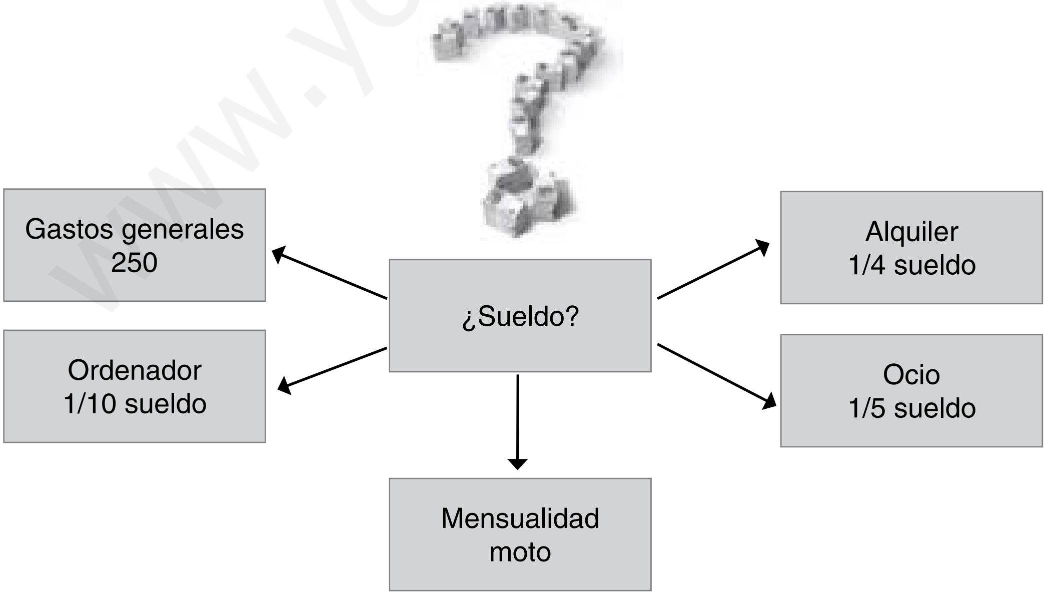
a) ¿Cuántos amigos participamos finalmente en el regalo?

b) ¿Cuánto dinero hemos recogido entre todos?

c) Explica a tus compañeros los procesos realizados y los razonamientos seguidos para resolver el problema. Te ayudará a formalizar el pensamiento.

2 Ecuaciones en mi economía

Me han ofrecido un nuevo puesto de trabajo y tengo que negociar con la empresa mi nuevo salario. El siguiente esquema muestra la distribución de mi presupuesto mensual, al que le he añadido un gasto temporal para comprarme una moto que cuesta 800 € y que puedo pagar en cuatro mensualidades sin intereses.



¿Qué sueldo mínimo tengo que negociar con la nueva empresa para aceptar el trabajo?

3 Operación desayuno

Los alumnos y las alumnas de 2.° de ESO necesitan recaudar 250 € para ir a ver un espectáculo. Por ello han pensado vender bocadillos y bebidas en el instituto durante la hora del recreo.

a) Si con la venta de bocadillos piensan recaudar 180 €, ¿podrías ayudarlos a averiguar el precio al que tienen que vender el bocadillo, si el de jamón debe costar 0,5 € más que el de chorizo y tienen para vender 90 de chorizo y 60 de jamón?

90 bocadillos

60 bocadillos

b) Con la venta 80 vasos de limonada y 50 vasos de zumo de naranja quieren recaudar el resto, sabiendo que un vaso de zumo de naranja cuesta 0,1 € más que el de limonada. ¿Cuál es el precio al que tienen que poner cada uno?

50 vasos

80 vasos

4 Fabricando nuestras cajas.

Con objeto de almacenar los bocadillos, vamos a hacer cajas de 144 dm^3 de volumen con cartones cuadrados que tenemos en el taller de tecnología. Para hacerlas, vamos a cortar en cada esquina un cuadrado de 4 dm de lado.

a) Haz un dibujo a escala 1/10 en tu cuaderno para ayudarte a resolver el problema.

b) ¿Qué tamaño debe tener el lado del cartón que escojamos?

Actividad VII. Sistemas de Ecuaciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 Trabajando en la red con WIRIS

a) Investiga: ¿Qué es WIRIS?

b) ¿A qué comunidades educativas en Europa ofrece servicios?

c) Completa el texto:

Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas reciben el nombre de .... Una .... de una ecuación lineales es un par de valores que hacen cierta la igualdad. Una ecuación lineal tiene .... soluciones. Para obtener distintas soluciones de una ecuación lineal, se suele despejar una de las incógnitas y dar .... a la otra.

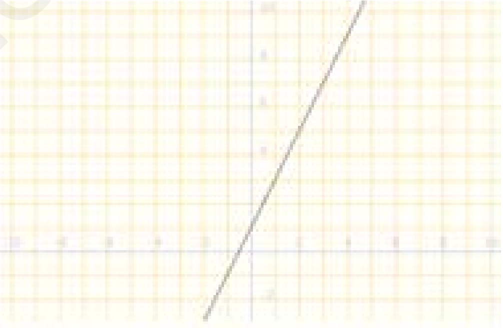
Cada ecuación lineal tiene una .... asociada en el plano. Cada .... de esa recta representa una de las infinitas soluciones de la ecuación lineal.

Para representar gráficamente una ecuación lineal despejamos la y para construir una tabla de valores, y al representarlos en el plano quedan alineados en una recta. Veamos un ejemplo:

$$2x - y = 1 \xrightarrow{\text{Despejamos } y} y = 2x + 1$$

Construimos la tabla de valores:

x	–1	0	1	2
y	–1	1	3	5



Y representamos estos valores en el plano:

Con la herramienta WIRIS podemos representar ecuaciones lineales de manera muy sencilla:

- Entra en la página: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/wiris/es/index.html
- O en la página http://herramientas.educa.madrid.org/wiris/
- En la pestaña Operaciones selecciona la opción dibujar .
- En tu escritorio aparecerá: **dibujar( )**
- Escribe entre los paréntesis la ecuación que quieres representar.

  Por ejemplo, **dibujar (y=2x+1)**
- Por último, haz clic sobre = y obtendrás la gráfica de la figura anterior.

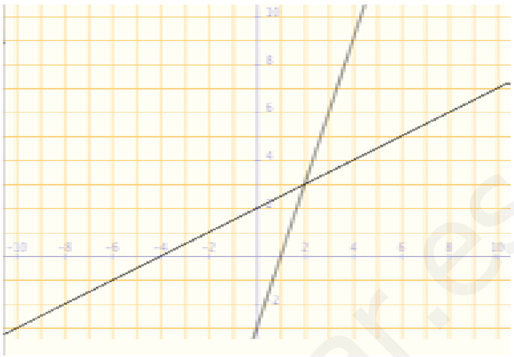
d) Representa con WIRIS las gráficas de las siguientes ecuaciones lineales:

$$y = x \qquad y = -x \qquad 2x - y = 1 \qquad y = \frac{x}{2} + 1$$

Con la herramienta WIRIS también se puede practicar la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales, ya que se pueden representar dos o más ecuaciones en los mismos ejes cartesianos. Basta para ello seguir los mismos pasos anteriores, escribiendo las dos expresiones analíticas entre llaves y separadas por una coma.

Veamos un ejemplo: $\begin{cases} y = 3x - 3 \\ y = \dfrac{x+4}{2} + 1 \end{cases}$

$\text{dibujar}\left(\left\{y=3x-3, y=\dfrac{x+4}{2}\right\}\right)$



Solución: Punto de corte de las rectas, (2, 3).

e) Resuelve gráficamente con WIRIS los siguientes sistemas de ecuaciones:

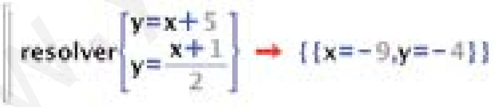
$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} y = x + 5 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$

Además de resolver los sistemas gráficamente, WIRIS nos permite resolver ecuaciones y sistemas conociendo su expresión analítica.

Para resolver sistemas de ecuaciones, en la pestaña `Operaciones` seleccionamos la opción `resolver sistema`. Aparecerá entonces en el escritorio un cuadro para seleccionar el número de ecuaciones. A continuación se escriben las expresiones analíticas de las mismas y se hace clic sobre el símbolo `=`.

Por ejemplo:



$\text{resolver}\begin{bmatrix} y=x+5 \\ y=\dfrac{x+1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=-9, y=-4\}\}$

También se pueden resolver cualquier tipo de ecuaciones. Para ello, basta con seleccionar en la pestaña `Operaciones` la opción `resolver ecuación`, escribir esta y pinchar sobre el símbolo `=`.

f) Resuelve las siguientes ecuaciones y sistemas:

$x^2 - 3x - 4 = 0$ $\qquad 2x + 1 = 0$ $\qquad \frac{1}{5}(2 + 5x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}$

$\begin{cases} x - y = 0 \\ 4x + 2y = 12 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

2 Aromaterapia

a) ¿Qué es la aromaterapia? ¿De dónde procede la palabra?

b) ¿Qué son aceites esenciales y cuál es su origen?

c) Nombra algunos de sus beneficios y alguna de las precauciones en su uso.

d) Los aceites esenciales se usan en gotas y diluidos en el excipiente base, que es un aceite vegetal portador. Sabiendo que se usan 1,5 *ml* (20 gotas) de aceite esencial por cada 30 *ml* de aceite base vegetal, ¿cuántos mililitros debo de añadir de cada uno para obtener un frasco de 200 *ml* de mezcla?

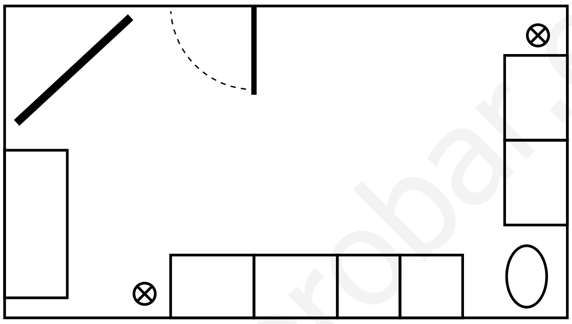
Actividad VIII. Pitágoras. Semejanzas

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

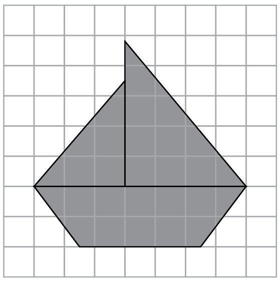
1 ¿Podré colocar la pantalla?

En casa estamos interesados en adquirir un proyector. La pantalla que queremos comprar es de 1,2 m y deseamos colocarla centrada en una de las esquinas del salón (formando un triángulo rectángulo isósceles), pero tenemos cerca la puerta, exactamente a 1 m. ¿Podremos comprar este tamaño y colocarla sin que toque el marco de la puerta?



2 Cartel publicitario.

Este barquito será el motivo central del cartel publicitario de una empresa de alquiler de embarcaciones de recreo. Cada cuadradito de la cuadrícula mide 0,25 cm^2.



a) ¿Cuántas unidades de medida enteras y que contengan trozos de dibujo en más de la mitad puedes encontrar?

b) Calcula el área aproximada del barco en el dibujo.

c) ¿Cuál sería el área del barco en el cartel publicitario si se amplia usando una escala 1:100?

3 Planeando una visita a la fiesta de la primavera en…

Te mostramos el plano del recinto donde se celebra una famosa fiesta de Primavera de una ciudad del sur de nuestro país y que queremos visitar:

a) ¿De qué famosa fiesta se trata? ¿En qué ciudad se celebra?

b) ¿Qué es el "Paseo de Caballos"? ¿Cuál es su origen?

c) El recinto anexo se llama "La calle del Infierno". ¿A qué está dedicado?

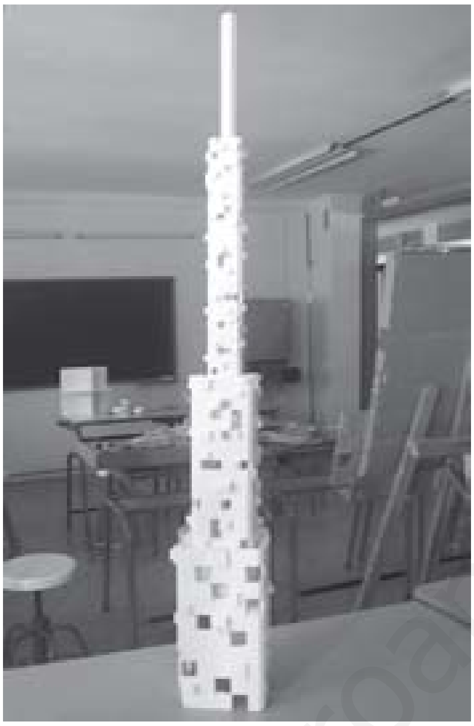
d) ¿A qué tipo de personajes se refiere el nombre de las calles del recinto?

e) Considerando las calles como líneas rectas, ¿cómo son entre ellas las calles Pascual Márquez, Juan Belmonte y Joselito el Gallo? ¿Y las calles Pepe Hillo y Pascual Márquez?

f) En nuestra visita nos ha impresionado la altura de La Portada. En este momento proyecta una sombra de unos 19 m y yo proyecto una sombra de unos 70 cm. Si mido 1,6 m, ¿podrías ayudarme a calcular la altura aproximada de la portada?

4 Nuestras creaciones con poliespán

En clase de dibujo hemos realizado una serie de maquetas con poliespán. David, nuestro profesor de dibujo, ha seleccionado el diseño de mi torre para hacer una reproducción de mayor tamaño, que formará parte de la decoración exterior de nuestro centro. Quiere que el trabajo tenga 2,40 m de altura y que sea realizado por todo el grupo. Si la altura de mi torre es 80 cm:



a) ¿Cuál es la razón de semejanza que guardarán ambas?

b) Si el lado de la base de la maqueta mide 25 cm, ¿cuánto tendrá que medir la base en la reproducción?

c) Realiza una pequeña investigación para saber a qué tipo de producto le llamamos poliespán, cuáles son sus ventajas y algunos de sus usos.

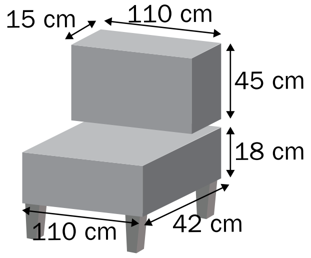
Actividad IX. Cuerpos Geométricos

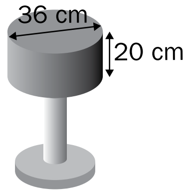
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 Geometría en el diseño

En casa vamos a tapizar en polipiel un pequeño sofá y dos taburetes como estos:





El sofá:

a) ¿Qué tipo de poliedro son el asiento y el respaldo del sofá?

b) Teniendo en cuenta que la pieza de tejido tiene 1,50 m de ancho, haz un dibujo en tu cuaderno, anotando las dimensiones del desarrollo más adecuado de cada uno de ellos, con objeto de comprar el mínimo posible de tela.

c) ¿Cuántos metros tenemos que comprar?

d) Calcula la superficie de polipiel que necesitaremos para tapizarlo.

El taburete:

e) ¿Qué cuerpo de revolución es el asiento del taburete?

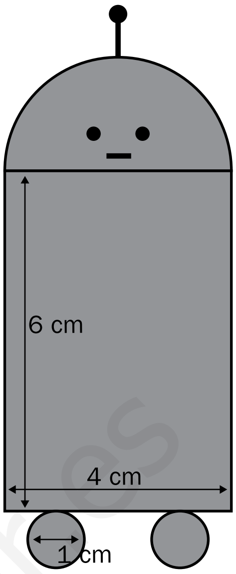
f) Dibuja en tu cuaderno su desarrollo y anota las dimensiones.

g) Calcula la superficie de polipiel que necesitaremos para tapizarlo.

h) Si el tejido se vende en piezas de 1 m de ancho, ¿cuántos metros de tejido tenemos que comprar?

2 Diseñando el personaje

Quiero diseñar este marcianito para un videojuego:



a) ¿Es posible calcular el área del marcianito directamente o es necesario descomponer el dibujo en figuras planas elementales?

b) ¿Cuál es el nombre de las figuras planas en las que has descompuesto el dibujo?

c) Escribe las fórmulas con las que vas a calcular el área de cada figura.

d) Halla el área del marcianito.

3 La mesa camilla de mi abuela

Mi abuela me ha pedido ayuda: quiere "vestir" una pequeña mesa como la del dibujo.

a) ¿Qué figura circular recortaré en la tela?

b) A mi abuela le gustan las cosas bien hechas. Quiere que el paño tenga un dobladillo de 5 cm. ¿Qué radio tendrá la circunferencia que hay que trazar sobre la tela?

c) Hay dos tejidos diferentes: uno lo venden en piezas de 2 m de ancho y el otro en piezas de 1,5 m. Si la abuela no quiere que el paño lleve añadidos, ¿qué tejido debo recomendarle que compre?

d) ¿Cuántos metros debe comprar?

4 El "móvil" del instituto

Carmen, nuestra profesora de plástica, nos ha propuesto realizar un "móvil" como el de la fotografía, para conmemorar el "Día de la Mujer", el 8 de marzo.

a) Cada carita tiene forma de pentágono regular. Si el diámetro de la circunferencia circunscrita mide 20 cm, y la apotema, 8 cm, ¿cuánto mide cada lado del pentágono que forma la *carita*? Si dispongo de cartulinas de colores que tienen unas medidas de 65 × 50 cm, ¿cuántas caritas podré sacar de cada cartulina?

b) Investiga qué se celebra el "Día de la Mujer", el 8 de marzo, y reflexiona sobre los logros conseguidos y lo que piensas que puede quedar por conseguir. Escribe un pequeño texto para exponer a tus compañeros.

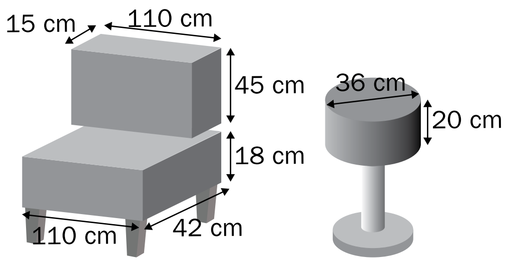
Actividad X. Volúmenes

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 “Gomaespuma” para el relleno

Vamos a cambiar el relleno de gomaespuma de este pequeño sofá y del taburete:



a) Investiga a qué material se le llama vulgarmente gomaespuma y cuáles son algunos de sus múltiples usos.

b) ¿Qué volumen, en decímetros cúbicos, emplearemos para hacer el cambio del asiento y del respaldo del sofá, y del asiento del taburete?

2 “Gigantes” Volúmenes

a) ¿Qué ves en la fotografía? ¿En qué zonas de nuestra geografía se encuentran los más famosos? ¿Con qué fueron confundidos por un famoso personaje de la literatura española? ¿De qué personaje, obra y autor hablamos?

b) ¿Qué país Europeo es conocido por tener en sus paisajes muchos de ellos? ¿Para qué se usaban?

c) El edificio consta de un cuerpo cilíndrico de 8 m de alto y 6 m de ancho, hecho de mampostería, y una cubierta de madera de 3 m de alto. ¿Podrías calcular el volumen total de la construcción?

d) Completa el texto:

Un molino es una máquina que sirve para ___________, básicamente de cereales, triturándolos entre dos piedras para convertirlos en ________. La piedra fija se llama _________ y sobre ella se mueve otra de forma semejante llamada _______ o _______. Las piedras llevan un tallado que depende del tipo de ______ que se vaya a ______ . Estas máquinas transforman energía ______ en energía ______, que mueve un mecanismo, el cual produce un trabajo útil para el hombre. Para aprovechar mejor la energía del ______ las aspas se recubren con unas ______ que ______ la superficie de las mismas con respecto a la que se conseguiría solo con el enrejado de madera y con menos peso que si las ______ estuvieran hechas de madera maciza. Por extensión, el término *molino* se utiliza vulgar e impropiamente con modernos artefactos llamados ______, que transforman la energía ______ en energía ______.

3 La nueva lata

Una importante empresa de bebidas refrescantes cumple 50 años en el mercado y para celebrarlo va a sacar una promoción en la que las latas de refrescos van a contener un tercio más de volumen, manteniendo el precio. Si las latas contienen normalmente 330 cm^3 y sus dimensiones son las que refleja el dibujo:

a) ¿Cuál será el volumen de refresco que contendrá cada lata durante la promoción?

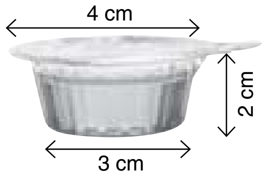
b) ¿Serías capaz de calcular la altura de la nueva lata, que es lo único que quieren variar de ella durante dicha promoción?

c) Realiza tú el desarrollo plano y el diseño de la nueva lata.

d) Investiga sobre los efectos en nuestra salud derivados de un consumo excesivo de refrescos carbonatados. Redacta un pequeño texto y discútelo con tus compañeros.

4 Aceite de oliva en monodosis

Existen empresas que envasan y comercializan aceites de oliva, vinagres, condimentos y salsas en innovadores envases monodosis como los de la fotografía.



a) ¿Sabrías explicar qué es un envase monodosis? ¿Podrías enumerar alguna de las ventajas de este tipo de envase?

b) ¿A qué cuerpo geométrico recuerda el envase? Calcula el volumen aceite de oliva que contendrá el recipiente del dibujo.

c) El aceite de oliva ha formado parte de la historia del hombre desde sus comienzo y sus usos han sido muy variados. Realiza una pequeña investigación sobre su historia y sus diferentes usos y redacta un pequeño informe para exponer en clase.

Actividad XI. Funciones

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 ¿Quién es quien?

La clase se dividirá en tres grupos. Cada uno se encargará de buscar información sobre la biografía de tres famosos matemáticos, cuyas fechas de nacimiento son:

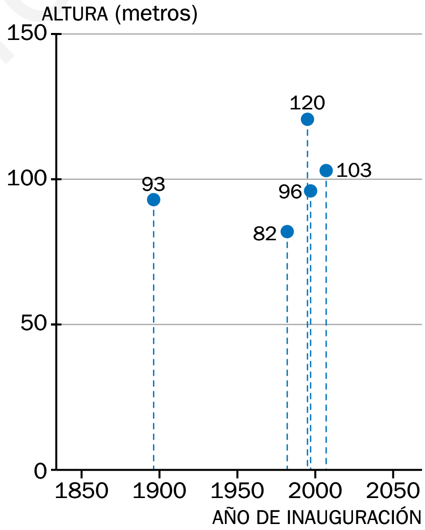
31 de marzo de 1536

1 de julio de 1646

15 de abril de 1707

Después, cada grupo hará un resumen y hará una breve exposición.

2 Grandes estatuas en el mundo



a) Asocia la foto de cada estatua con su nombre. Localiza el país donde se encuentra cada una y escribe un breve texto sobre lo que representan y su historia.

Pedro el Grande

Buda de Ushiku

La Libertad

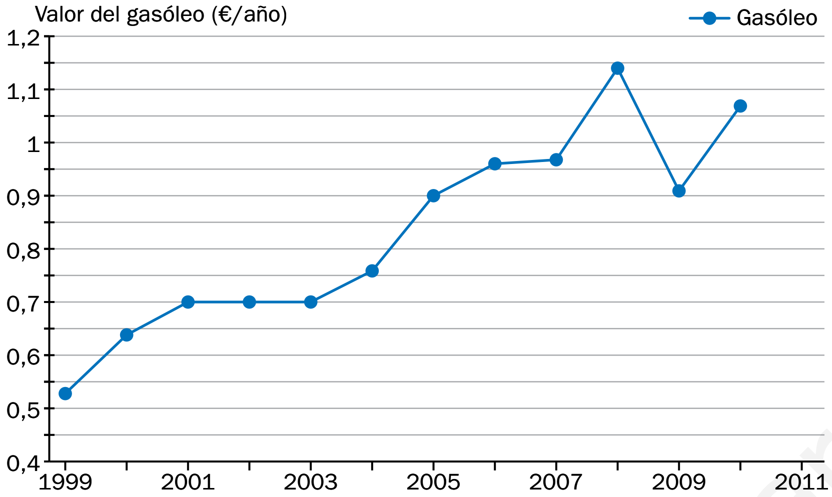
Emperadores Huangdi y Yandi

Madre Rusia

b) ¿Qué estatua representa cada punto de la gráfica?

3 “La sociedad adicta al petróleo”. Futuro energético

La siguiente gráfica muestra la evolución del precio medio del litro de gasóleo en España.



a) ¿Qué variables están representadas?

b) Construye una tabla de valores a partir del gráfico.

c) ¿Cuál es el precio máximo alcanzado? ¿En qué año?

d) ¿Qué significa el tramo horizontal?

e) ¿Serías capaz de escribir la fórmula que permita calcular el coste (*C*) de llenar el depósito de un vehículo en el año 1999? ¿Y en el año 2010?

f) Describe cuál ha sido la evolución de los precios.

g) Investiga las posibles causas del alza de los precios y el tipo de impuestos que gravan el combustible.

h) Opina: ¿Se podrá garantizar el futuro en las actuales condiciones de consumo energético o habrá que modificar los hábitos energéticos y las fuentes de abastecimiento?

4 Conéctate: las funciones con WIRIS

a) Clasifica las siguientes funciones.

$y = -3x$ $\qquad$ $y = -x + 1$ $\qquad$ $y = -2$

$y = \frac{3}{4}x$ $\qquad$ $y = 2x + 2$ $\qquad$ $y = 1$

b) Construye para cada función una tabla de valores.

c) Entra en la página: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/wiris/es/index.html y dibuja sus gráficas con WIRIS tal como te mostramos en la Actividad VII de este cuadernillo. Podemos hacerlo seleccionando la opción `representar` en la pestaña `Operaciones`.

Actividad XII. Estadística

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 Sin olvidar los números…

La siguiente tabla recoge el número de casos de SIDA declarados en España desde el año 1981 hasta el año 2005, por períodos de 5 años (datos de la Organización Mundial de la Salud):

AÑOS	N.° DE CASOS
1981-1985	246
1986-1990	10980
1991-1995	29834
1996-2000	21320
2001-2005	10736

a) La variable “número de enfermos”, ¿es cualitativa o cuantitativa?

b) ¿Cuál sería el número medio de enfermos por período de 5 años?

c) Representa mediante un diagrama de barras los valores de la tabla.

d) La enfermedad tuvo una expansión muy rápida. ¿Sabes cuál es el agente causante del SIDA? ¿Y cómo se contagia?

e) Puedes observar que a partir del año 1995 se produce un importante descenso en el número de enfermos que aparecen. Busca información y propón algunos factores que hayan podido contribuir al control de esta enfermedad.

2 Las grandes diferencias

La renta per cápita es un índice económico utilizado para estimar la riqueza de un país. El Banco Mundial elabora un listado con el valor de este índice para cada país del mundo. Aquí tienes la renta per capita estimada en el año 2009 para un grupo de países de África y América Latina.

ÁFRICA	
País	Renta per capita (dólares)
Guinea Ecuatorial	15 397
Libia	9 714
Gabón	7 502
Mauricio	6 742
Botswana	5 965
Namibia	4 338
Túnez	3 792
Angola	3 734
Marruecos	2 776
Rep. del Congo	2 361

AMÉRICA LATINA	
País	Renta per capita (dólares)
Méjico	8 144
Chile	9 645
Argentina	7 666
Panamá	7 155
Costa Rica	6 382
Colombia	5 056
Rep. Dominicana	4 618
Perú	4 345
Ecuador	4 202
El Salvador	3 598

a) ¿Sabes qué es el Banco Mundial? Entra en su página web y averígualo. http://www.bancomundial.org/

b) Representa, usando un diagrama de barras, los valores de renta per cápita de cada país.

c) Calculando la media de cada grupo comprobarás que el resultado es muy similar. Sin embargo, los valores individuales de cada grupo son muy diferentes. ¿Qué tipo de parámetros estadísticos debes utilizar para poner de manifiesto estas diferencias? Calcúlalos.

3 Stop "a los nuevos hábitos"

Piensa que quieres realizar un estudio estadístico de los hábitos nutricionales de tus compañeros de clase. Quieres analizar el tipo de alimentos que consumen durante el recreo. Para ello tienes que confeccionar una encuesta:

a) ¿Qué preguntas realizarías?

b) ¿De qué forma gráfica representarías los datos?

c) ¿Qué parámetros estadísticos calcularías para analizarlos?

4 Tantos años juntos…

A continuación presentamos los datos de una encuesta realizada para conocer el número de televisores que hay en cada casa:

NÚMERO DE TELEVISORES POR HOGAR	RESPUESTAS
0	1
1	270
2	460
3	170
4 o más	90

a) Para cada uno de los valores de la variable, calcula su frecuencia relativa.

b) Usando los valores de frecuencia relativa, construye un diagrama de sectores que nos muestre gráficamente el resultado de la encuesta.

c) Es evidente que la televisión se ha convertido en un elemento casi indispensable en nuestros vidas, pero esta situación es relativamente reciente. ¿Sabrías decir qué cadena empezó a emitir regularmente en España y en qué año?

Actividad I

1 Los enteros en nuestra vida. Interpreta los titulares

a) –68

b) 500 a 1 000

c) –1 700

d) –2 a 10

2 Grandes diferencias en nuestro planeta

Monte Everest; Himalaya; asiático; George Everest; de las Marianas; Pacífico.

a) El indio Radhanath Sikdar y utilizó teodolitos.

b) Jacques Piccard, en enero de 1960, en un batiscafo.

c) 8848 – (–11 033) = 19881 m

d) No. 11 033 – 8 848 = 2 185 m

e) Everest: 238 : 760 = 0,31 atm

Marianas: 814 720 : 760 = 1 072 atm

f) 2 – (–20) = 22 °C

g) Respuesta libre.

3 La bolsa en acción

a) La bolsa de valores es un mercado en el cual se compran y se venden participaciones en empresas.

La palabra *bolsa* tiene su origen en un edificio que perteneció a una familia de la ciudad belga de Brujas, de apellido Van Der Buërse, donde se realizaban encuentros de carácter mercantil. El escudo de armas de la familia contenía tres bolsas de cuero, los monederos de la época. Debido a la importancia de esas reuniones, se le acabó dando el nombre de *bolsa* a cualquier mercado financiero.

b) Rentabilidad: es la diferencia entre el precio de compra y el precio de venta; es decir, el beneficio obtenido al negociar con acciones.

Seguridad: es los mecanismos que utilizamos para tratar de controlar los riesgos asumidos al negociar con acciones.

Liquidez: es la facilidad que ofrecen este tipo de inversiones de comprar y de vender rápidamente.

c) El IBEX 35 es el principal índice de referencia de la bolsa española. Lo forman las 35 empresas españolas que más dinero mueven en la bolsa.

Según el orden de la tabla: España (Europa), Estados Unidos (América), Alemania (Europa), Francia (Europa), Estados Unidos (América), Japón (Asia), Brasil (América), Italia (Europa) e Reino Unido (Europa).

d)

ÍNDICE	ÚLTIMO	ANTERIOR	DIFERENCIA
IBEX 35	10 499	10 567	–68
DOW JONES	12 170	12 258	–88
DAX	7 179	7 226	–47
CAC 40	4 020	4 060	–40
NASDAQ	2 360	2 372	–12
NIKKEI	10 694	10 586	108
BOVESPA	65 001	64 609	392
FTSE MIB	21 863	21 922	–59
FTSE 100	5 990	6 006	–16

Mayor subida: BOVESPA

Mayor caída: DOW JONES

BOVESPA (392) > NIKKEI (108) > NASDAQ (–12) > FTSE 100 (–16) > CAC 40 (–40) > DAX (–47) > FTSE MIB (–59) > IBEX 35 (–68) > DOW JONES (–88)

e) Valor de compra: 300 · 21 = 6 300 €

Valor hoy: 300 · 17 = 5 100 €

La rentabilidad es negativa: 5 100 – 6 300 = = –1 200 €

f) 300 · 1,6 = 480 € en dividendos.

4 Completa el crucigrama

Horizontales: 1. DIVISIBILIDAD
2. COMPUESTO

Verticales: 1. MULTIPLO
2. DIVISOR
3. OPUESTO
4. PRIMO
5. PAR

5 El extracto bancario

a) Transferencia: movimiento de dinero entre dos cuentas bancarias.

Traspaso: movimiento de dinero entre dos cuentas bancarias con el mismo titular y en la misma entidad bancaria.

Fecha valor: fecha en la que la operación bancaria se ejecuta realmente.

IBI: impuesto anual que se paga al ayuntamiento por la posesión de un bien inmueble. Se paga en función del valor catastral de la finca.

b)

CONCEPTO	CARGOS	ABONOS
Abono de intereses		1,00
Trans. otra entidad		200,00
Ingreso nómina		1 978,00
Recibo préstamo	–550,00	
Cargo compra	–86,00	
Ingreso cheque		300,00
Cobro comisión	–3,00	
Recibo IBI	–450,00	
Recibo de teléfono	–43,00	
Recibo seguro vida	–157,00	
Recibo luz	–53,00	
Rec. gran almacén	–42,00	

c) El saldo final es de 1 095 €.

d) mín.c.m. (1, 2, 3, 6) = 6. Los recibos coinciden cada 6 meses. Volverán a coincidir en agosto.

El saldo mínimo necesario será, aproximadamente, de 1 250 €.

Actividad II

1 Planeando nuestro viaje

Disney World Orlando se encuentra en la ciudad de Orlando (Florida), en Estados Unidos.

Las compañías *low cost* ofrecen precios más baratos que las compañías aéreas convencionales, a cambio de eliminar muchos de los servicios al viajero.

a) Viajamos con Delta Airlines. Tiene una escala en Atlanta (Estados Unidos).

b) Llegamos a Atlanta a las 20:00, hora española, que serán las 14:00, hora de Atlanta.

c) La escala dura 2 h 5 min.

La duración del viaje es de 9 h 50 min + 2 h 5 min + 1 h 30 min = 13 h 25 min.

d) Llegamos a Orlando a las 17:35, al Orlando Internacional.

e) 3,5 millas = 5,6327 kilómetros

f) Suponiendo 1 dólar = 0,6976 euros: 208,58 €

g) El trayecto son 804,67 m.

h) Importe total = 630,25 + 208,58 = 838,83 €

2 Vamos de compras. ¿Marcas blancas?

a) 19 h 15 min – 0 h 25 min = 18 h 50 min

b)

PRODUCTO	MARCA BLANCA	OTRA MARCA
Detergente	6,50 : 50 = 0,13 €/dosis	5,40 : 33 = 0,16 €/dosis
Refresco cola	4,65 : 4 = 1,16 €/unidad	3,57 : 3 = 1,19 €/unidad
Aceite	9 : 5 = 1,80 €/litro	1,8 : 0,75 = 2,40 €/litro
Queso	5,95 : 0,9 = 6,61 €/kg	4,95 : 0,385 = 12,86 €/kg
Papel Higiénico	0,25 : 25 = 0,01 €/m	0,28 : 35 = 0,008 €/m

Hay que escoger el detergente, el refresco, el aceite y el queso de la marca blanca, y el papel higiénico de la otra marca.

c) 20 h 40 min – 19 h 30 min = 1 h 10 min

Habrá que pagar 1,5 · 1,25 = 7,50 €.

d) Las marcas blancas son las marcas propias de los distintos supermercados.

3 Trial deportivo en la ciudad

El triatlón es un deporte en el que se combinan la natación, la bicicleta y la carrera a pie. El triatlón moderno comenzó a finales de los años 70, como una forma de medir cuál de los tres deportes era más completo. Sin embargo, ya a principios del siglo XX hubo carreras, de lo que hoy llamaríamos triatlón, en Europa. Es olímpico desde Sydney 2000.

a) Sprint: 750 m a nado, 20 km en bicicleta y 5 km a pie.

Súpersprint: 375 m a nado, 10 km en bicicleta y 2,5 km a pie.

b) 1 mi = 1,609344 km

Natación: 2,4 · 1,609344 = 3,8624256 = 3,9 km

Ciclismo: 112 · 1,609344 = 180,246528 = 180 km

Carrera a pie: 26,2 · 1,609344 = 42,1648128 = = 42 km

c) Ironman: 3,9 + 180 + 42 = 225,9 km = 225 900 m

Olímpica: 1,5 + 40 + 10 = 51,5 km = 51 500 m

Diferencia: 225,9 – 51,5 = 174,4 km = 174 400 m

d) Atleta A: 1 h 10 min

Atleta B: 0 h 9 min + 0 h 2 min + 0 h 29 min + 0 h 3 min + 0 h 30 min = 1 h 13 min

Ganó el atleta A, por 3 minutos de diferencia.

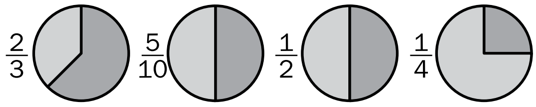
e) Respuesta libre.

Actividad III

1 Interpretar titulares y anuncios de publicidad

a) $\frac{2}{3}, \frac{5}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

b)



c) $\frac{2}{3} > \frac{5}{10} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

Son equivalentes $\frac{5}{10}$ y $\frac{1}{2}$.

2 Noticia: "Una parrilla de campeones"

a) Schumacher: Alemania – Mercedes
Alonso: España – Ferrari
Hamilton: Inglaterra – McLaren
Button: Inglaterra – McLaren
Vettel: Alemania – Red Bull

b) Nos indica el número de grandes premios ganados por cada corredor, sobre el total que ha corrido cada uno de ellos.

c) Podio: El piloto finaliza la carrera en uno de los tres primeros puestos.

Pole: El piloto inicia la carrera en primera posición.

d)

	SCHUMACHER	ALONSO	HAMILTON	BUTTON	VETTEL
Podios	154/269	63/159	36/71	31/193	19/69
Poles	68/269	20/159	18/71	7/193	15/69

3 Venta de "fracciones"

a)

	VENDIDO	SOBRANTE
Tarta de galleta	29/8	3/8
Tarta de queso	39/10	11/10
Tarta de manzana	50/10	
Tarta de chocolate	48/8	
Total	741/40	59/40

b) 200 *ml* : 1 000 *ml* = 1/5

c) Leche: 1/5 · 3 = 0,60 €

Zumo: 1/5 · 4 = 0,80 €

d) Tarta de galleta: 29/8 · 4 = 14,50 €

Tarta de chocolate: 48/8 · 4,80 = 28,80 €

Tarta de queso: 39/10 · 6 = 23,40 €

Tarta de manzana: 50/10 · 6 = 30 €

Total: 96,70 €

e) Tarta de galleta: 4/8 = 0,50 €

Tarta de chocolate: 4,8/8 = 0,60 €

Tarta de queso: 6/10 = 0,60 €

Tarta de manzana: 6/10 = 0,60 €

4 Fraccionando con el tangram

a) El tangram es un juego chino que consiste en formar siluetas de figuras con la siete piezas dadas, sin solaparlas.

b) Respuesta libre. Hay distintas clases de tangram: el tangram chino, el tangram de ocho piezas, el huevo, el cardiotangram, el tangram de Brügner…

c) Dos triángulos rectángulos grandes, un triángulo rectángulo mediano, dos triángulos rectángulos pequeños, un cuadrado y un paralelogramo.

d) Triángulo grande: 1/4

Triángulo mediano: 1/8

Triángulo pequeño: 1/16

Cuadrado: 1/8

Paralelogramo: 1/8

e) Figura A: le falta el cuadrado y un triángulo pequeño; es decir, cubre un 13/16.

Figura B: le falta un triángulo grande y el triángulo mediano; es decir, cubre un 10/16.

Figura C: le falta un triángulo grande; es decir, cubre 3/4.

Actividad IV

1 Los números a debate

a) Respuesta libre.

b) En 1973 se produjo una fuerte subida del precio del petróleo, al negarse los países productores (árabes) a vender a los aliados de Israel. En la actualidad está subiendo el precio debido a las 'revueltas árabes' de 2011, principalmente en Libia, gran exportador de petróleo.

c) Velocidad/tiempo: inversa

Velocidad/espacio recorrido: directa

Velocidad/consumo de combustible: directa

d)

PAÍS	MILES DE TONELADAS EQUIVALENTES DE PETRÓLEO	% RESPECTO DEL TOTAL
México	5657	10,99%
Venezuela	2680	5,21%
América (otros)	312	0,61%
Reino Unido	1193	2,32%
Europa (otros)	987	1,92%
Rusia	8201	15,93%
Argelia	1081	2,10%
Nigeria	5398	10,49%
África (otros)	5867	11,40%
Libia	5041	9,79%
Arabia Saudí	5807	11,28%
Irak	2250	4,37%
Irán	6270	12,18%
Oriente Med. (otros)	731	1,42%

Sí es importante nuestra dependencia de Libia, porque supone un 9,79% de nuestras importaciones de petróleo.

El conflicto impide la venta de petróleo, por lo que en España hay menos combustibles, que hace que el precio de estos suba.

e) 28,6 millones; 479

Las multas tendrían que multiplicarse por 3,4; es decir, tendrían que triplicarse.

f) Respuesta libre.

2 Noticia: la receta "secreta" de las golosinas

a) Respuesta libre.

b) Golosina: Manjar delicado, generalmente dulce, que sirve más para el gusto que para el sustento.

Chuchería: Alimento corto y ligero, generalmente apetitoso.

c) Energía sin nutrientes.

d) Es una guía sobre lo que hay que comer diariamente para obtener los nutrientes que el cuerpo necesita. El consumo de golosinas debe ser ocasional.

e)

TIPO DE GOLOSINA	Calorias /g
Caramelo con palo	34,9 : 9 = 3,8
Caramelo de goma /gelatina	28,8 : 8 = 3,6
Caramelo blando/toffe	20,6 : 5 = 4,1
Gel dulce/regalíz	17,6 : 5 = 3,5
Chicle	14,0 : 5 = 2,8
Caramelo duro	15,2 : 4 = 3,8
Caramelo duro sin azúcar	7,2 : 3 = 2,4
Chicle sin azúcar	3,8 : 2 = 1,9

f) Caramelo con palo: 8,6 : 9 = 0,96

Caramelo de goma: 6,9 : 8 = 0,86

No están en proporción. Tiene más hidratos un caramelo con palo.

g) Respuesta libre.

h) Respuesta libre.

3 Noticia: “La brecha salarial entre sexos”

a) Respuesta libre.

b) Directivos: 7 850 €

Mandos: 3 392 €

Empleados: 2 090 €

c) Directivas: 10,7%

Mandos: 8,8%

Empleados: 9,5%

d) La mayor desigualdad se da entre los directivos.

La menor desigualdad se da entre los mandos medios.

La horquilla está entre un 8,8% y un 10,7%.

e) Paro femenino: 20,5%

Paro masculino: 19,7%

f) Respuesta libre.

Actividad V

1 Completa la tabla

	RECTÁNGULO	TRIÁNGULO	PENTÁGONO
Área	$a \cdot b$	$(b \cdot h)/2$	$(5b \cdot a)/2$
Perímetro	$2a + 2b$	$3b$	$5b$
Doble del área	$2a \cdot b$	$b \cdot h$	$5b \cdot a$
Cuarta parte del perímetro	$(a + b)/2$	$3b/4$	$5b/4$

2 Mirando el recibo. Economía doméstica

a) Este importe nos lo cobran por el simple hecho de utilizar electricidad.

Término fijo: $P \cdot d \cdot 0{,}056529$

No depende del consumo realizado.

Término fijo: $7{,}89 \cdot 31 \cdot 0{,}056529 = 13{,}83$ €

b) ELIC: Gasto = $C \cdot 0{,}128645$

ESUR: Gasto < 400 kwh = $C \cdot 0{,}1089695$

Gasto ≥ 400 kwh = $C \cdot 0{,}158811$

COMPAÑÍA	ELIC	ESUR
Término fijo de Potencia	162,80	162,80
Coste Consumo A	501,72	619,36
Coste Consumo B	231,56	195,65
Total Factura Anual	896,08	977,81

c) La más beneficiosa es ELIC, con un ahorro de 81,73 €. No merece la pena cambiar de compañía.

3 Con un gesto tan simple

a) Consumo = $P \cdot t \cdot 365$

P es la potencia de la bombilla; t es el número de horas al día que está encendida la bombilla.

b) Bombilla normal:

$100 \cdot 6 \cdot 365 = 219\,000$ wh = 219 kwh

Bombilla bajo consumo:

$20 \cdot 6 \cdot 365 = 43\,800$ wh = 43,8 kwh

c) Gasto bombilla normal:

$219 \cdot 0{,}14 = 30{,}66$ €

Gasto bombilla bajo cosumo:

$43{,}8 \cdot 0{,}14 = 6{,}13$ €

Ahorro = 24,53 €

d) Gasto bombilla normal:

$100 \cdot 8\,000 = 800\,000$ wh = 800 kwh

$800 \cdot 0{,}14 = 112$ €

Precio bombillas = $8 \cdot 0{,}70 = 5{,}60$ €

Total = 112 + 5,60 = 117,60 €

Gasto bombilla bajo consumo:

$20 \cdot 8\,000 = 160\,000$ wh = 160 kwh

$160 \cdot 0{,}14 = 22{,}40$ €

Precio bombillas = 9 €

Total = 31,40 €

Ahorro = 117,60 – 31,40 = 86,20 €

e) Existe una bombilla encendida desde 1901, en un parque de bomberos de California.

La obsolescencia programada consiste en que los productos tienen una vida útil limitada, que provoca que tengamos que cambiarlos muy a menudo.

f) Respuesta libre.

Actividad VI

1 El regalo de Daniel

a) $5{,}5x = 3{,}85(x + 6)$

Somos 14 amigos.

b) Hemos recogido $20 \cdot 3{,}85 = 77$ €

c) Respuesta libre.

2 Ecuaciones en mi economía

Llamamos x a los gastos mensuales que tengo.

$x = 250 + (1/10)x + 200 + (1/5)x + (1/4)x$

$x = 1\,000$ €

El sueldo mínimo que tengo que negociar es 1 000 €.

3 "Operación desayuno"

a) $180 = 90x + 60(x + 0{,}5)$

$x = 1$

Hay que vender los bocadillos de chorizo a 1 €, y los de jamón, a 1,50 €.

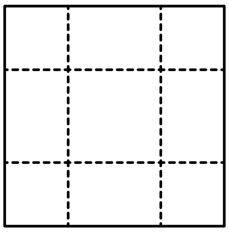
b) $70 = 80x + 50(x + 0{,}1)$

$x = 0{,}5$

Hay que vender el vaso de limonada a 0,50 €, y el de zumo de naranja, a 0,60 €.

4 Fabricando nuestras cajas

a)



b) V = área de la base · altura = $(x^2) \cdot 4 = 144$

$x = 6$ dm

El lado del cartón debe ser $6 + 4 + 4 = 14$ dm.

Actividad VII

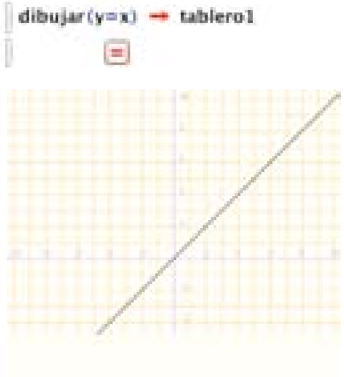
1 Trabajando en la red con WIRIS

a) WIRIS es un programa de álgebra computacional online.

b) WIRIS, en 2010, ofrece servicios en España Italia, Estonia, Luxemburgo, Holanda, Finlandia, Canadá y Sudamérica, en los idiomas locales.

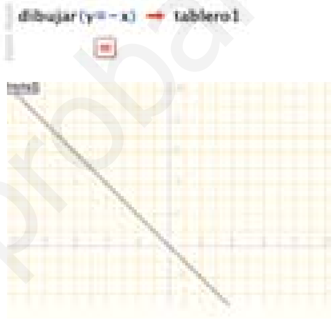
c) Ecuaciones lineales; solución; infinitas; valores; recta; punto

d) $y = x$



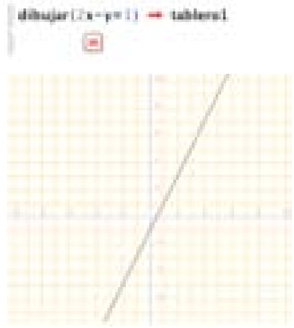
dibujar(y=x) → tablero1

$y = -x$



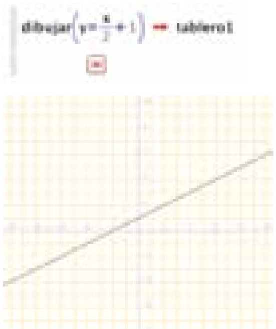
dibujar(y=−x) → tablero1

$2x - y = 1$



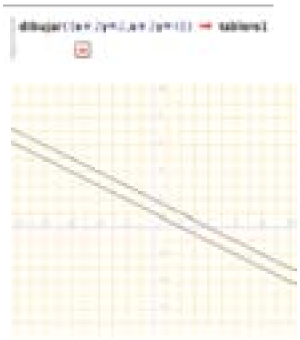
dibujar(2x−y=1) → tablero1

$y = \frac{x}{2} + 1$

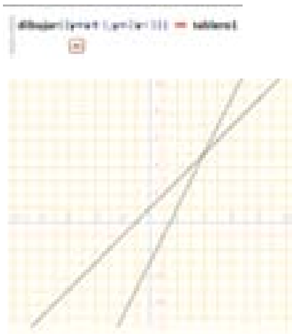


dibujar(y=x/2+1) → tablero1

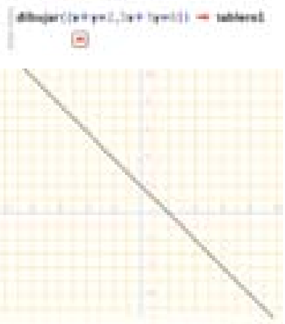
e) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$



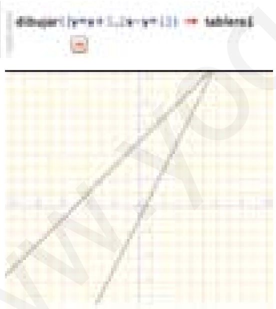
$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$



$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$



$\begin{cases} y = x + 5 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$



f) $x^2 - 3x - 4 = 0$

resolver($x^2-3x-4=0$) → {{x=−1},{x=4}}

$2x + 1 = 0$

resolver($2x+1=0$) → $\{\{x=-\frac{1}{2}\}\}$

$$\frac{1}{5}(2 + 5x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}$$

$\begin{cases} 4x + 2y = 12 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

resolver$\begin{bmatrix} 3x+y=10 \\ 2x-y=0 \end{bmatrix}$ → {{x=2,y=4}}

2 Aromaterapia

a) La aromaterapia es una rama de la herbolaria que, con la ayuda de aceites vegetales concentrados, trata de mejorar la salud física y emocional. Los aceites se inhalan o se aplican en la piel. Se considera una pseudociencia.

La palabra proviene del griego ‘aroma’, aroma, y ‘therapeia’, atención o curación.

b) Se trata de productos químicos intensamente aromáticos.

c) Se utilizan para distintas dolencias: analgésicos, fungicidas, diuréticos, etc.

No se deben aplicar en estado puro sobre la piel, pues podrían quemarla.

d) Hay que resolver el sistema:

$\begin{cases} x + y = 200 \\ 1{,}5/30 = x/y \end{cases}$

x = 9,52, y = 190,48

Tendremos que mezclar 9,52 *ml* de aceites esenciales con 194,48 *ml* de aceite base vegetal.

Actividad VIII

1 ¿Podré colocar la pantalla?

$1{,}2^2 = x^2 + x^2$

$x = 0{,}85$

Como cada lado del triángulo mide 0,85 m y el marco de la puerta está a 1 m, sí podré colocar la pantalla de ese tamaño.

2 Cartel publicitario

a) 28 unidades.

b) $28 \cdot 0{,}25 = 7$ cm²

c) $7 \cdot 100^2 = 70\,000$ cm² = 7 m²

3 Planeando una visita a la fiesta de la primavera en…

a) Se trata de la Feria de Abril de Sevilla.

b) Cada día de feria, al mediodía, el Real de la Feria se llena de personas a caballo. Su origen es el siglo XIX, cuando los tratantes de ganado iban a la feria en carruajes.

c) La “Calle del Infierno” es un parque de atracciones.

d) Son toreros.

e) Pascual Márquez, Juan Belmonte y Joselito el Gallo son paralelas.

Pepe Hillo y Pascual Márquez son perpendiculares.

f) Si H es la altura de La Portada:

H/1,6 = 19/0,7

H = 43,43

La altura de La Portada es de 43,43 m.

4 Nuestras creaciones con poliespán

a) Razón de semejanza = $\dfrac{240}{80} = 3$

b) Base = $240 \cdot \dfrac{25}{80} = 75$ cm

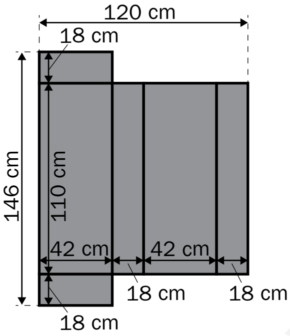
c) Respuesta libre. El poliespán se llama, realmente, poliestireno expandido (EPS). Destaca por su higiene, puesto que no constituye sustrato para microorganismos, por lo que no se pudre. Además es ligero, resiste la humedad y absorbe los impactos. Además se utiliza como aislante térmico y acústico.

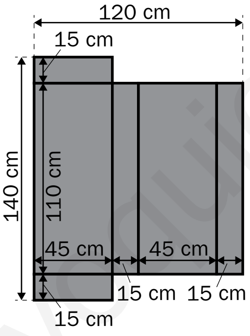
Actividad IX

1 Geometría en el diseño

a) Ortoedros.

b)





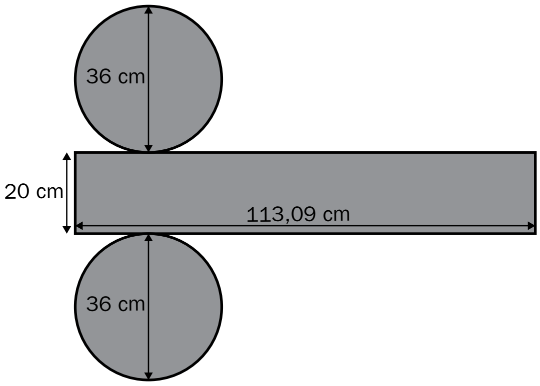
c) Conviene comprar, como mínimo, 1,20 m de tejido para tapizar ambas piezas. Recuerda poner algo más para las costuras.

d) $A_{\text{asiento}} = 2(110 \cdot 42 + 42 \cdot 18 + 110 \cdot 18) = 14\,712 \text{ cm}^2 = 1{,}47 \text{ m}^2$

$A_{\text{respaldo}} = 2(110 \cdot 45 + 45 \cdot 15 + 110 \cdot 15) = 14\,550 \text{ cm}^2 = 1{,}46 \text{ m}^2$

e) Un cilindro.

f)



g) $A = 4\,295{,}52 \text{ cm}^2 = 0{,}43 \text{ m}^2$

h) La longitud de la base del rectángulo es 1,13 m. Por tanto, esa es la cantidad que necesitamos, poniendo un poco más para las costuras.

2 Diseñando el personaje

a) Lo descompondremos en figuras planas.

b) Un semicírculo, un rectángulo y dos círculos.

c) $A_{\text{semicírculo}} = (\pi \cdot r^2) / 2$

$A_{\text{rectángulo}} = a \cdot b$

$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$

d) $A_{\text{marcianito}} = 31{,}85 \text{ cm}^2$

3 La mesa camilla de mi abuela

a) Un círculo.

b) El radio de la tela será el radio de la mesa más la altura de la mesa más los 5 cm del dobladillo; es decir; 20 + 70 + 5 = 95 cm.

c) Como el diámetro de la tela es de 190 cm, conviene comprar la tela de 2 m.

d) Habrá que comprar, por lo menos, 1,90 m de tela.

4 Móvil del instituto

a) El lado del pentágono mide 12 cm.

Como la circunferencia circunscrita tiene un diámetro de 20 cm, podremos dibujar 6 circunferencias de este tipo en cada cartulina, por lo que sacaremos 6 caritas de cada una.

b) Respuesta libre.

Actividad X

1 "Gomaespuma" para el relleno

a) La gomaespuma es espuma de poliuretano, que es un material plástico poroso formado por una agregación de burbujas.

b) $V_{\text{asiento}} = 110 \cdot 42 \cdot 18 = 83\,160 \text{ cm}^3 = 83{,}16 \text{ dm}^3$

$V_{\text{respaldo}} = 110 \cdot 45 \cdot 15 = 74\,250 \text{ cm}^3 = 74{,}25 \text{ dm}^3$

$V_{\text{taburete}} = \pi \cdot 18^2 \cdot 20 = 20\,357{,}2 \text{ cm}^3 = 20{,}36 \text{ dm}^3$

2 "Gigantes" volúmenes

a) Molinos de viento.

En Castilla-La Mancha.

Con gigantes.

El personaje es Don Quijote, del libro *El ingenioso hidalgo don Quijote de la Mancha,* escrito por Miguel de Cervantes.

b) Holanda.

Usados como bombas de agua para mantener el nivel de esta en el sistema de diques que les servía para ganar tierra al mar.

c) $V = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cono}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 =$
$= 254{,}47 \text{ m}^3$

d) Moler grano; harina; volandera; muela; cereal; moler; eólica; mecánica; viento; velas; aumentan; aspas; aerogeneradores; eólica; eléctrica.

3 La nueva lata

a) $330 + \left(\frac{1}{3}\right) 330 = 440\ ml$

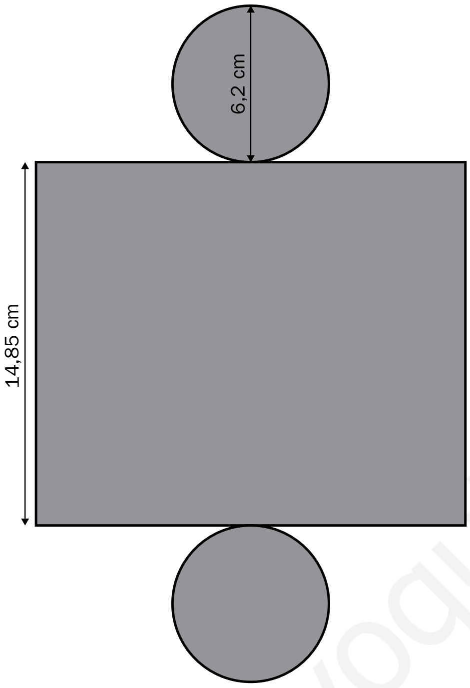
b) Como $440\ ml = 440 \text{ cm}^3$:

$440 = \pi \cdot 3{,}1^2 \cdot \text{h}$

$\text{h} = 14{,}58$

La nueva altura será de 14,58 cm.

c)



d) Respuesta libre.

4 Aceite de oliva en monodosis

a) Es un envase no reutilizable, que contiene una dosis unitaria del producto.

b) A un tronco de cono.

La altura del cono grande es 8 cm, y la del pequeño, 6 cm.

$V_{\text{envase}} = V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono pequeño}} = 19{,}36 \text{ cm}^3 =$
$= 19{,}36 \text{ ml}$

c) Respuesta libre.

Actividad XI

1 ¿Quién es quién?

31 de marzo de 1536: René Descartes

1 de julio de 1646: Gottfried von Leibniz

15 de abril de 1707: Leonhard Euler

2 Grandes estatuas del mundo

a) A - Pedro el Grande (Rusia)
B - Buda de Ushiku (Japón)
C - La Libertad (Estados Unidos)
D - Madre Rusia (Rusia)
E - Emperadores Huangdi y Yandi (China)

b) A - 96 m
B - 120 m
C - 93 m
D – 82 m
E – 103 m

3 "La sociedad adicta al petróleo". Futuro energético

a) Años y euros/litro.

b)

AÑO	1999	2000	2001	2002	2003	2004
€/l	0,53	0,64	0,70	0,70	0,70	0,76

AÑO	2005	2006	2007	2008	2009	2010
€/l	0,90	0,96	0,97	1,14	0,91	1,07

c) En 2008 se alcanzó 1,14 €/*l*.

d) El precio medio se mantuvo constante durante 2001, 2002 y 2003.

e) En 1999: $C = 0{,}53 \cdot l$

En 2010: $C = 1{,}07 \cdot l$

f) Los precios se han incrementado desde 1999 (salvo tres años en que estuvieron constantes) hasta 2008. En 2009 bajó el precio medio del petróleo, para volver a subir en 2010.

g) Respuesta libre.

h) Respuesta libre.

4 Conéctate: las funciones con WIRIS

a) Funciones de proporcionalidad:

$y = -3x,\ \ y = \frac{3}{4}x$

Funciones lineales: $y = -x + 1$, $y = 2x + 2$

Funciones constantes: $y = -2$, $y = 1$

b) Respuesta individual.

c) $y = -3x$

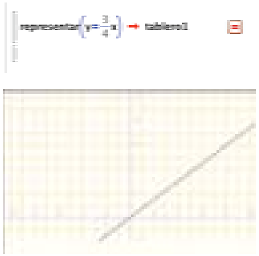
$y = -x + 1$

```
representar(y=−x+1) → tablero1
```

$y = -2$

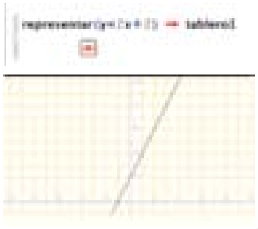
```
representar(y=−2) → tablero1
```

$y = \frac{3}{4}x$



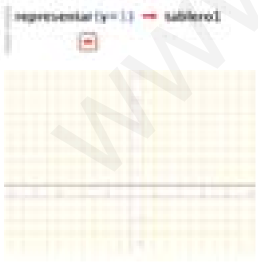
```
representar(y=3/4 x) → tablero1
```

$y = 2x + 2$



```
representar(y=2x+2) → tablero1
```

$y = 1$



```
representar(y=1) → tablero1
```

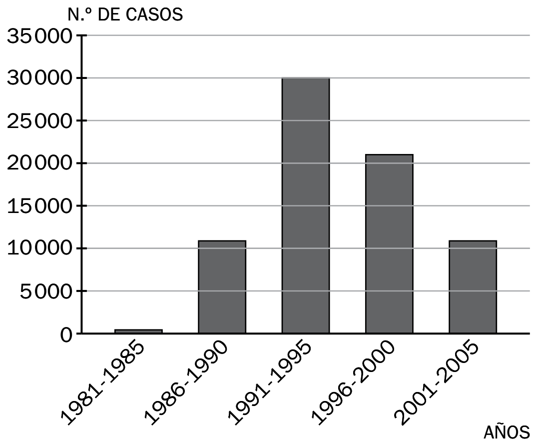
Actividad XII

1 Sin olvidar los números…

a) Cuantitativa.

b) La media es 14 623 casos.

c)



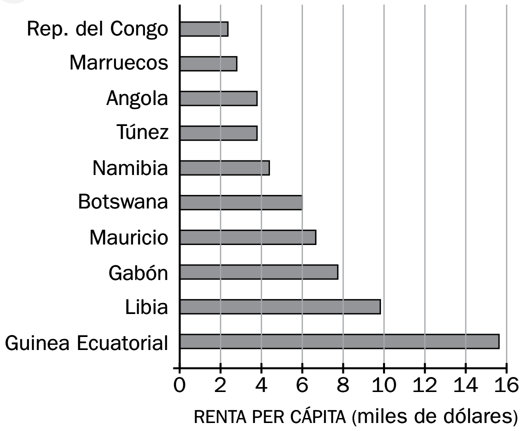
d) El agente causante del SIDA es el virus VIH. Se contagia mediante el intercambio de fluidos corporales.

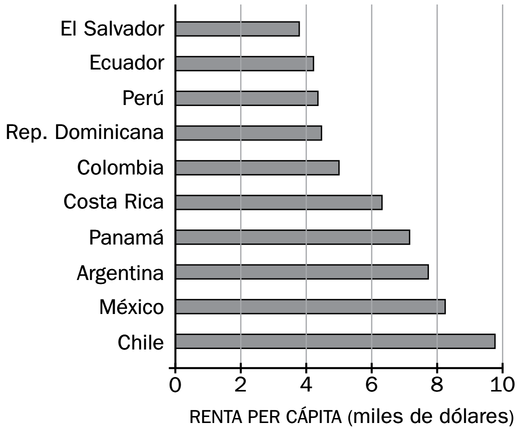
e) El número de casos bajó gracias a las campañas de información sobre la forma de evitar el contagio y al descubrimiento de los retrovirales.

2 Las grandes diferencias

a) Se creó tras la Segunda Guerra Mundial como forma de financiar la reconstrucción de los países destruidos durante la contienda.

b)





c) Media de África = 6 232 dólares

Media de América Latina = 6 018 dólares

Es necesario analizar la dispersión de los datos de cada grupo. Para ello se puede calcular el recorrido y la desviación media.

Recorrido África = 13 036

DM África = 2 885,3

Recorrido América Latina = 6 047

DM América Latina = 1 717,3

3 Stop a los nuevos hábitos

a) Respuesta libre. Por ejemplo:

ALIMENTO	FRECUENCIA (VECES POR SEMANA)				
	1	2	3	4	5
Frutas					
Bocadillos					
Cereales					
Chucherías					
Lácteos					

b) Mediante un diagrama de barras, por ejemplo.

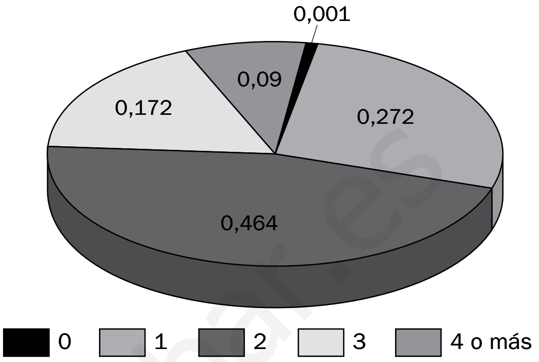
c) Para cada alimento calcularíamos la media y la desviación media. De esta manera, sabríamos si la media que obtenemos refleja la costumbre de la mayoría, o no.

4 Tantos años juntos…

a)

NÚMERO DE TELEVISORES POR HOGAR	FRECUENCIA RELATIVA
0	0,001 o 0,1%
1	0,272 o 27,2%
2	0,464 o 46,4%
3	0,172 o 17,2%
4 o más	0,09 o 9%

b)



c) Televisión Española (TVE), en 1956.

Tareas competenciales para preparar las pruebas de diagnóstico

Las tareas competenciales incluidas en este apartado pretenden ser un **material de apoyo** al profesorado en el trabajo por competencias destinado a preparar pruebas de diagnóstico, y en ningún caso tienen la intención de reemplazar el quehacer programador que cada profesor o profesora plantee al respecto.

Las tareas diseñadas tienen como objetivo ayudar al profesorado a determinar el **grado de consecución de las competencias básicas** por parte del alumnado, así como proporcionarle una ejemplificación práctica de «actividades competenciales». Es decir, por un lado, estas tareas buscan orientar al profesorado en el diseño de tareas competenciales, y, por otro, intentan proporcionarle una herramienta útil para «cuantificar» la realidad competencial de sus estudiantes, tanto individual como grupalmente.

Estas tareas deben **integrarse** dentro del **desarrollo continuado** que representa el trabajo por **competencias,** que, en ningún caso, puede responder a momentos esporádicos de ejecución.

Tareas 1 a 4
Autores: Amaya Gaztelu

Tarea 5
Coordinador: Carlos Marchena
Autor: Juan Antonio Bello

TAREA 1

Tareas competenciales para preparar las pruebas de diagnóstico

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 CÓDIGOS EN LOS FRASCOS DE ZUMO

Una fábrica de zumos tiene cuatro líneas de envasado, cada una para un sabor. Coloca en cada frasco una etiqueta con un código de barras con doce dígitos:

A						B	C				D

- A→ Fecha dd/mm/aa
- B→ Tipo de refresco:

  Naranja → 1 Piña → 2 Melocotón → 3 Tomate → 4
- C→ N.º de serie, que empieza en 0000, para cada línea de envasado, al comenzar el día.
- D→ Control de calidad (se efectúa aleatoriamente sobre una parte de las botellas):

  Realizado → 1 No realizado → 0

Al finalizar una jornada, los últimos frascos de cada línea llevan los siguientes códigos:

250408119780 250408208511 250408300000 250408406991

a) ¿De qué sabor se ha envasado mayor cantidad de recipientes?

b) ¿Qué línea ha permanecido inactiva durante ese día?

c) ¿Cuántos frascos de zumo se han envasado en la jornada?

d) ¿Ha pasado por el control de calidad el último frasco de zumo de piña producido por la cadena?

e) ¿Qué puedes decir del frasco que lleva el código 250408100011?

f) Observa los códigos de un tramo de veinte recipientes de una de las cadenas, elegido al azar durante ese mismo día:

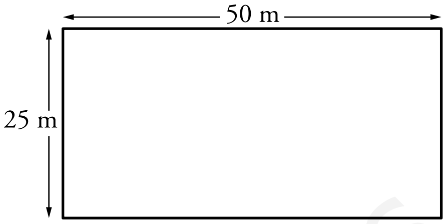
250408102321	250408102370	250408102420	250408102470
250408102330	250408102380	250408102430	250408102481
250408102340	250408102390	250408102440	250408102490
250408102351	250408102401	250408102450	250408102500
250408102361	250408102410	250408102460	250408102510

A la vista de estos códigos, ¿qué fracción de las botellas crees que pasa por el control de calidad?

Nombre y apellidos: ....

2 PÉRDIDAS EN LA PISCINA

El nivel de una piscina, con las dimensiones que ves en la figura, pierde 36 mm de altura cada semana, debido a la evaporación, a la actuación de los bañistas y a otras pérdidas incontroladas.



El nivel se restaura, periódicamente, abriendo un grifo que aporta un caudal de 3 litros por segundo.

La gerencia de la piscina tiene un contrato con la empresa suministradora del agua que establece estos precios para la temporada estival (del 20 de junio al 20 de septiembre):

- Los primeros 300 m^3 → 1,4444 €/m^3
- Los siguientes 300 m^3 → 2,4545 €/m^3
- El resto → 4,0000 €/m^3

a) ¿Cuántos metros cúbicos de agua pierde cada semana?

b) ¿Cuánto tiempo debe permanecer abierto el grifo cada semana para mantener el nivel?

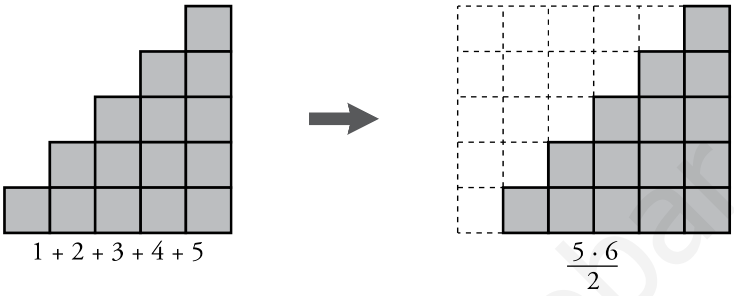
c) ¿Cuál es coste de la reposición de pérdidas de agua durante la temporada estival?

Nombre y apellidos: ....

3 SUMA DE LOS PRIMEROS NATURALES

Observa, con ayuda de la ilustración, el procedimiento que hemos usado para sumar los cinco primeros números naturales:

- Representamos la suma en un gráfico-escalera.
- Construimos un rectángulo que tiene el doble de casillas que el gráfico.
- Calculamos el número de casillas del rectángulo y lo dividimos entre 2.



$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

a) Calcula, de la misma forma, la suma de los 10 primeros números naturales.

b) Calcula también la suma de los treinta primeros números naturales.

c) Si llamamos S_n a la suma de los n primeros números naturales, calcula S_{50}.

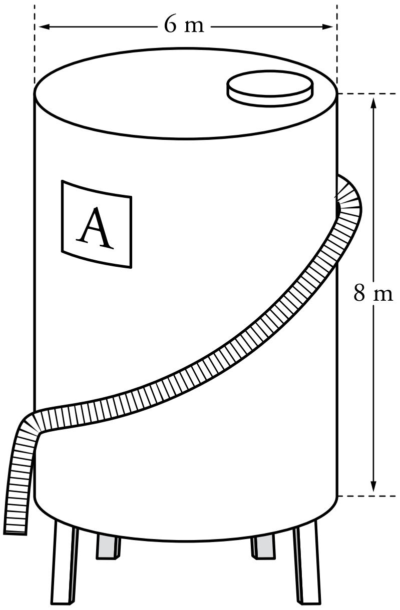
d) ¿Cuál o cuáles de estas fórmulas expresan la suma de los n primeros números naturales?

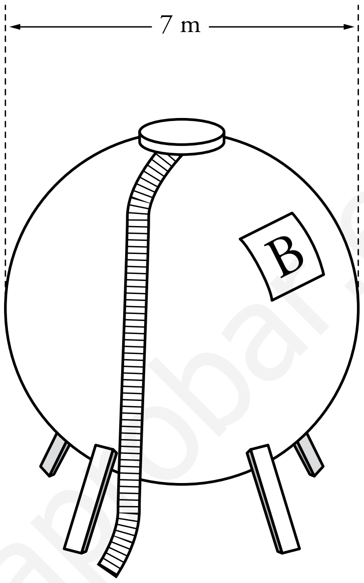
$$S_n = n \cdot (n + 1) \qquad S_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \qquad S_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \qquad S_n = \frac{n^2 - n}{2}$$

Nombre y apellidos: ....

4 PINTURA DE DEPÓSITOS

Una empresa de distribución de carburantes ha iniciado un programa de mantenimiento de sus instalaciones y necesita renovar la pintura de estos dos depósitos de combustible:





Antes de realizar el encargo, pide presupuestos a distintos profesionales y empresas del ramo de pintura:

– La empresa Pincolor, S.A. presenta un presupuesto de 925 € para el depósito A. También se pintará la base inferior.

– La empresa Colorán, S.L. presenta un presupuesto de 750 € para el depósito B.

(Nota: toma $\pi = 3{,}14$).

a) ¿Cuál es la superficie del depósito A?

b) ¿Cuál es la superficie del depósito B?

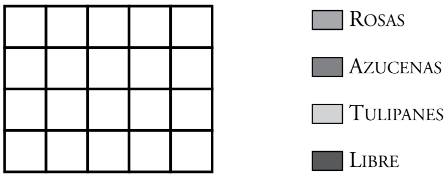
c) ¿Cuál de las dos empresas crees que es más cara? Justifica tu respuesta.

Nombre y apellidos: ....

5 FLORES EN EL JARDÍN

Rosario ha plantado de rosas la quinta parte de la superficie de su jardín. También ha plantado la cuarta parte de azucenas y dos décimas partes de tulipanes. Y, de momento, ha dejado libre el resto.

a) Representa gráficamente la zona ocupada por cada tipo de flores.



b) ¿Qué fracción de la superficie del jardín ha ocupado de momento? ¿Qué parte le queda libre todavía?

c) ¿Qué tanto por ciento de la superficie del jardín tiene libre?

d) Sabiendo que la parte sin flores ocupa 14 metros cuadrados, ¿qué superficie ocupa todo el jardín?

6 BOMBAS DE RIEGO

Un agricultor dispone de dos pozos para llenar un pilón de riego de 90 000 litros.

El primer pozo tiene una bomba extractora que aporta un caudal de 15 litros por segundo.

El segundo pozo tiene también su propia bomba, capaz de llenar el pilón en una hora y cuarto.

Cuando el agricultor riega, abre una compuerta que evacua del pilón 40 litros por segundo.

Con esos datos, calcula:

a) El tiempo que tarda la bomba del primer pozo en llenar el pilón.

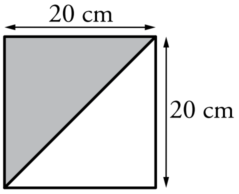
b) El caudal que aporta la segunda bomba.

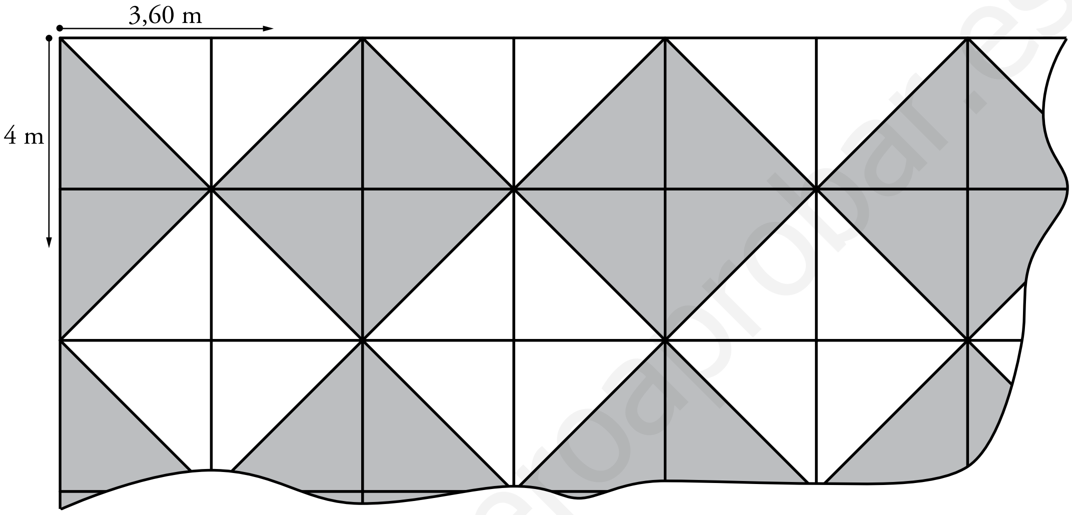
c) El tiempo que puede regar el agricultor, ininterrumpidamente, si empieza con el pilón lleno y conecta simultáneamente ambas bombas.

Nombre y apellidos: ....

7 BLANCO Y NEGRO

Con el modelo de baldosa que ves a la derecha, se cubre el suelo de una habitación de 3,60 m × 4 m, como se indica en la ilustración.





Calcula:

a) La superficie de uno de los cuadrados negros que forma el dibujo del suelo.

b) El perímetro de uno de esos cuadrados negros.

c) El porcentaje de la superficie del suelo cubierta de color blanco y el porcentaje de superficie cubierta de negro.

d) El número de baldosas necesarias para el suelo de la habitación.

Nombre y apellidos: ....

8 MOVIMIENTOS DE TIERRAS

Un empresario que se dedica a trabajos de movimiento de tierras recibe el encargo de hacer un desmonte para la construcción de una carretera.

Calcula que, empleando dos palas mecánicas, en jornadas normales de 8 horas, tardará 15 días en cumplir el encargo.

a) ¿Cuánto tardaría en hacer el trabajo si empleara tres palas mecánicas?

b) ¿Cuánto tardaría, con dos palas, pero trabajando jornadas de 10 horas?

c) Si su tarifa es de 80 € por máquina y hora, sin IVA, ¿cuál será el importe de la factura que presentará al finalizar el trabajo? (IVA: 18%)

9 CALCETINES

Unos talleres de confección se disponen a servir un pedido de 3 800 pares de calcetines, contratado en las siguientes condiciones:

- Los calcetines se entregarán enfajados en paquetes, unos de tres pares y otros de cinco pares.
- Las cantidades de fajos de tres y de cinco pares deben estar en relación tres a dos.
- Cada fajo de tres pares se pagará a 5,40 €.

a) ¿Cuántos paquetes de cada tipo debe preparar el taller?

b) ¿A cuánto se pagará cada fajo de cinco pares?

c) ¿A cuánto ascenderá la factura total del pedido, incluyendo el IVA (18%)?

Nombre y apellidos: ....

10 LETRAS POR NÚMEROS

Llamando n a un número, podemos expresar otras cantidades relacionadas con él. Así, por ejemplo, su siguiente se expresaría como $n + 1$, y su doble como $2n$.

Teniendo eso en cuenta…

a) Completa la tabla:

El número	n
Su siguiente	$n + 1$
Su anterior	
El doble de su siguiente	
La mitad de su anterior	
El resultado de restarle siete a su doble	
El número que resulta de sumarle siete a su mitad	
La mitad del número que resulta de sumarle siete	

b) Sabiendo que el número de la última fila de la tabla es 41, calcula el número original.

11 CABEZAS Y PATAS

En una pradera hay antílopes y avestruces. En total se cuentan 40 cabezas y 110 patas.

Si llamamos x al número de antílopes, podemos expresar del siguiente modo el resto de los elementos:

Número de antílopes → x
Número de avestruces → $40 - x$
Número de patas de antílope → $4x$
Número de patas de avestruz → $2(40 - x)$

Teniendo eso en cuenta:

a) Traduce a una ecuación :

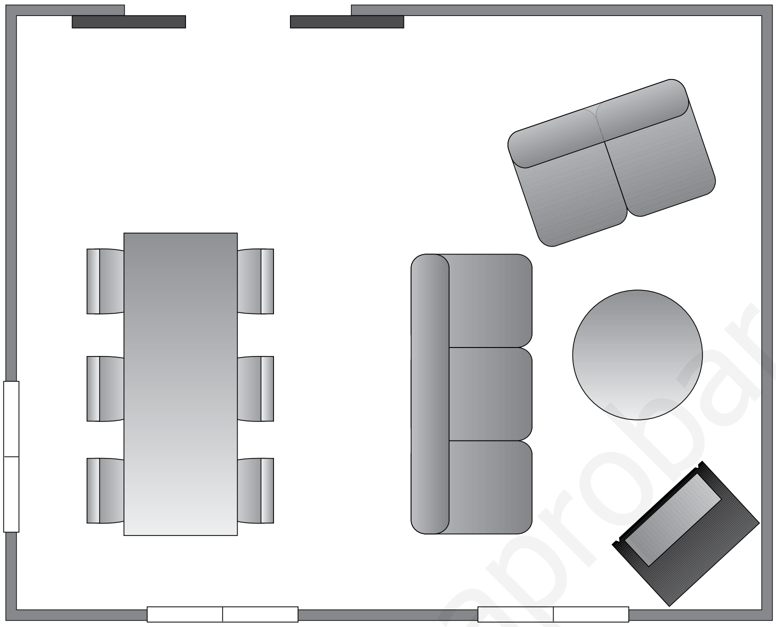
(PATAS DE ANTÍLOPE) + (PATAS DE AVESTRUZ) = CIENTO DIEZ

b) Resuelve la ecuación anterior y calcula cuántos antílopes y cuántos avestruces hay en la pradera.

Nombre y apellidos: ....

12 PLANO DEL SALÓN

Este es el plano, hecho a escala 1:50, del salón de una vivienda unifamiliar.



ESCALA 1:50

a) Calcula sus dimensiones (largo y ancho).

b) ¿Cuántos metros cuadrados tiene?

Nombre y apellidos: ....

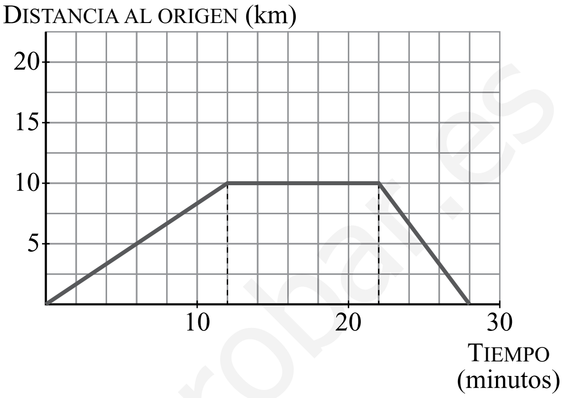
13 VIAJE EN MOTO

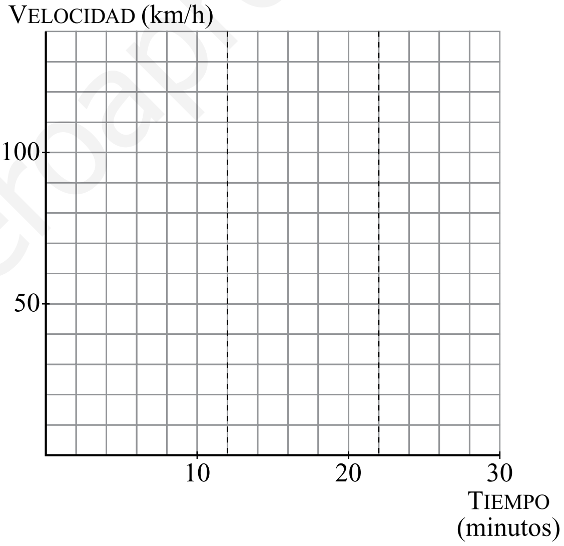
Un motorista sale de cierta pequeña población y viaja por carretera, a velocidad más o menos constante, hasta la población vecina. Allí se detiene para hacer una gestión y después regresa por el mismo camino, también a velocidad constante.

El viaje queda reflejado en esta gráfica, que relaciona la distancia en cada instante al punto de partida con el tiempo transcurrido.

a) Observa la gráfica y responde:

- ¿Cuánto duró el viaje de ida?
- ¿Cuánto tiempo estuvo parado?
- ¿Cuánto duró el viaje de vuelta?
- ¿Qué distancia recorrió en total el motorista?





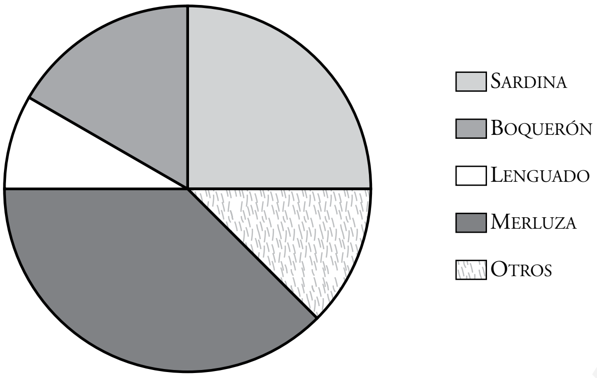
b) Calcula la velocidad media del viaje de ida y la velocidad media del viaje de vuelta.

c) Completa esta gráfica de velocidad-tiempo.

Nombre y apellidos: ....

14 CAPTURAS DE PESCA

La gráfica informa sobre la distribución del peso de las distintas capturas que han entrado en un puerto pesquero durante el mes vencido.



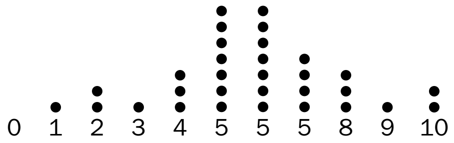
a) Calcula el porcentaje que corresponde a cada especie de pescado.

b) Sabiendo que en ese periodo han entrado 30 toneladas de sardinas, ¿cuántas toneladas de pescado se han capturado en total?

c) ¿Cuántas toneladas de merluza se han capturado?

15 NOTA MEDIA

En el gráfico puedes ver las notas que han obtenido en “Comentario de Texto” los 30 alumnos de un grupo de segundo de ESO.



Calcula:

a) La nota media conseguida por el grupo.

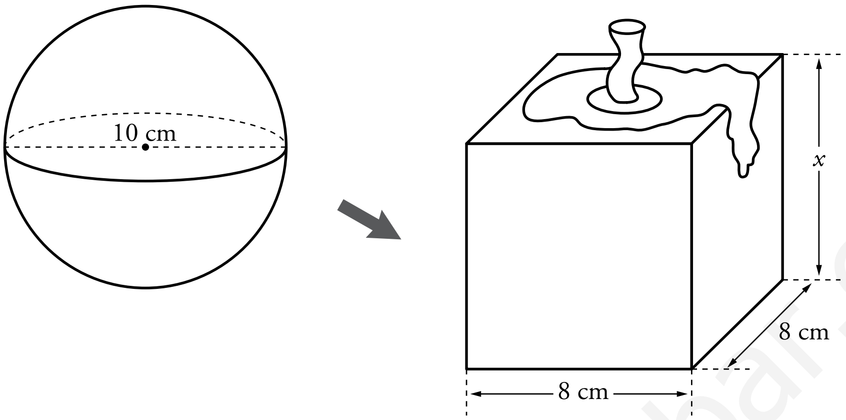
b) La mediana de la distribución.

c) La moda.

Nombre y apellidos: ....

16 CONSTRUCCIÓN DE UNA VELA

Con una bola de cera perfumada, de 10 cm de diámetro, se ha fabricado una vela de base cuadrada de 8 cm de lado.

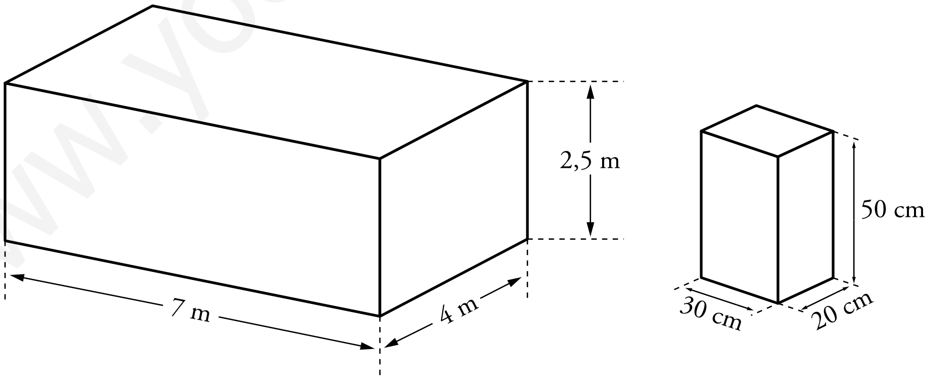


a) ¿Cuántos centímetros cúbicos de cera tenía la bola?

b) ¿Cuál es la altura de la vela?

17 CAJAS DE ALMACÉN

Se quieren almacenar cajas con forma de ortoedro de 30 × 20 × 50 centímetros, en una nave de 7 × 4 × 2,50 metros.



a) Estudia la forma de colocar las cajas para aprovechar el espacio al máximo.

b) ¿Cuál es el máximo número de cajas que caben en la nave?

c) ¿Qué cantidad de espacio quedaría desaprovechado?

Pautas de corrección

1 CÓDIGOS EN LOS FRASCOS DE ZUMO

Competencia	Comunicar. Representar. Razonar.
Elemento de competencia	Interpreta información. Observa y saca conclusiones. Generaliza resultados.
Contenido	Los números como códigos. Probabilidad.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Del sabor 1 (naranja) se han envasado 1978 unidades, cantidad superior a las de las otras líneas (2-0851, 3-0000, 4-0699).

b) La línea 3 (melocotón) ha permanecido inactiva, pues no ha sacado ningún envase: (3-0000).

c) Se han envasado 1978 + 851 + 0 + 699 = = 3528 frascos.

d) El último frasco de zumo de piña (250408-2-0851-1) ha pasado por el control de calidad, ya que el último campo del código es 1.

e) El frasco con el código 250408-1-0001-1 se ha fabricado el 25-04-08 (veinticinco de abril del 2008), es de naranja (1), es el primero que sale de su línea de envasado ese día (0001) y ha sido sometido al control de calidad (1).

f) De las 20 botellas, han pasado el control de calidad 5. Basándonos en este dato, suponemos que 5/20 = 1/4 de los frascos pasan el control de calidad.

2. Responde bien a cuatro o a cinco de las cinco primeras cuestiones.

Responde bien tres de las cinco primeras y, además, a la sexta.

1. Responde bien a tres cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

2 PÉRDIDAS EN LA PISCINA

Competencia	Plantear y resolver problemas. Pensar y razonar.
Elemento de competencia	Aplica modelos matemáticos a situaciones reales. Relaciona distintos contenidos matemáticos para lograr un objetivo.
Contenido	Cantidad. Volumen. Unidades del S.M.D. Sistema sexagesimal. Relaciones. Operaciones con números decimales.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) En una semana pierde 0,036 · 25 · 50 = = 45 m^3.

b) 45 m^3 son 45 000 litros.

El grifo debe permanecer abierto 45 000 : 3 = 15 000 s.

15 000 s = 250 min = 4 h 10 min

El grifo debe permanecer abierto cuatro horas y diez minutos.

c) La temporada estival, desde el 20 de junio hasta el 20 de septiembre, son 13 semanas.

En 13 semanas se reponen 45 · 13 = = 585 m^3, cuyo coste es:

Los primeros 300 m^3 →
→ 300 · 1,4444 = 433,32 €

Los restantes 285 m^3 →
→ 285 · 2,4545 = 699,53 €

En total → 1 132,85 €

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas.

Responde correctamente a dos preguntas.

Responde correctamente a la tercera pregunta.

1. Responde solo a una de las dos primeras preguntas.

0. En cualquier otro caso.

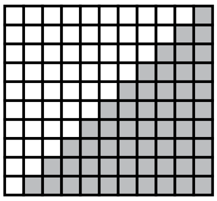
3 SUMA DE LOS PRIMEROS NATURALES

Competencia	Interpretar y comunicar. Generalizar. Modelar.
Elemento de competencia	Interpreta lenguaje gráfico. Detecta regularidades y relaciones, y las expresa. Traduce enunciados verbales a lenguaje simbólico.
Contenido	Cantidad. Números naturales. Lenguaje algebraico.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) La suma de los 10 primeros números naturales:



1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = = (10 · 11) : 2 = 55

b) La suma de los treinta primeros números naturales:
$1 + 2 + 3 + ….. + 29 + 30 = (30 \cdot 31) : 2 =$
$= 465$

c) Si llamamos S_n a la suma de los n primeros números naturales:

$$S_{50} = (50 \cdot 51) : 2 = 1\,275$$

d) Dos de las fórmulas son equivalentes y expresan la suma de los n primeros números naturales:

$$S_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \qquad S_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Responde correctamente a tres de las cuestiones.

1. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

4 PINTURA DE DEPÓSITOS

Competencia	Pensar y razonar. Argumentar. Resolver problemas.
Elemento de competencia	Encadena procesos lógicos. Interpreta un enunciado según una estructura matemática. Diferencia opciones de cara a un objetivo.
Contenido	Superficie de los cuerpos geométricos. Operaciones con números decimales.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Superficie del depósito cilíndrico:
$\pi \cdot 3^2 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 8 = 207{,}24\ m^2$

b) Superficie del depósito esférico:
$4\pi \cdot 3{,}5^2 = 153{,}86\ m^2$

c) Para valorar qué empresa es más cara, calculamos el coste por metro cuadrado:

– La empresa Pincolor, S.A. cobra
$925 : 207{,}24 = 4{,}46$ €/m^2

– La empresa Colorán, S.L. cobra
$750 : 153{,}86 = 4{,}87$ €/m^2

Por tanto, es más cara Colorán, S.A.

2. Concibe correctamente el problema, pero comete algún error en una de las dos primeras cuestiones.

1. Responde correctamente solo a una de las dos primeras cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

5 FLORES EN EL JARDÍN

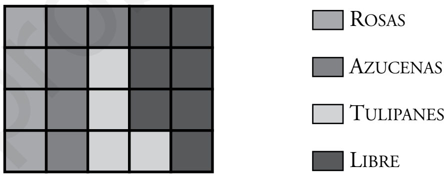
Competencia	Pensar y razonar. Resolver problemas. Comunicar.
Elemento de competencia	Aplica a una situación problemática los conocimientos matemáticos que requiere. Utiliza recursos gráficos como apoyo al pensamiento.
Contenido	Fracciones. Porcentajes. Concepto de superficie.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Rosas: 1/5 = 4/20; Azucenas: 1/4 = = 5/20; Tulipanes: 2/10 = 4/20

Representación:



b) Ha ocupado 4/20 + 5/20 + 4/20 = = 13/20 del jardín.

Quedan libres: 20/20 – 13/20 = 7/20

c) Quedan libres 7 partes de 20, que es lo mismo que 35 partes de 100:

$7/20 = (7 \cdot 5)/(20 \cdot 5) = 35/100$

Es decir, queda libre un 35 % del jardín.

d) 7 partes ocupan 14 m^2.

Una parte ocupa 14 : 7 = 2 m^2.

Veinte partes ocupan 2 × 20 = 40 m^2.

El jardín ocupa $(14 : 7) \cdot 20 = (14 : 35) \cdot$
$\cdot\ 100 = 40\ m^2$.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Responde correctamente a tres de las cuestiones.

1. Responde solo a dos cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

6 BOMBAS DE RIEGO

Competencia	Pensar y razonar. Resolver problemas.
Elemento de competencia	Aplica las herramientas adecuadas a una situación. Calcula.
Contenido	Relaciones entre magnitudes. Sistema decimal y sistema sexagesimal.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) 90 000 *l* : 15 *l*/s = 6 000 s

6 000 s = (6 000 : 60) min = 100 min = = 1 h 40 min

La bomba del primer pozo tarda una hora y 40 minutos en llenar el pozo.

b) Una hora y cuarto es igual a 1,25 h y también a (1,25 · 3 600) s = 4 500 s.

90 000 *l* : 4 500 s = 20 *l*/s

La segunda bomba aporta un caudal de 20 litros por segundo.

c) 15 + 20 – 40 = –5

Si el agricultor conecta ambas bombas y abre la compuerta de riego, el pilón pierde un caudal de 5 litros por segundo.

90 000 *l* : 5 *l*/s = 18 000 s =
(18 000 : 3 600) h = 5 h

El pilón tarda en vaciarse cinco horas. Luego el agricultor puede regar ininterrumpidamente durante 5 horas.

2. Da las tres respuestas correctas sin justificarlas. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las preguntas.

0. En cualquier otro caso.

7 BLANCO Y NEGRO

Competencia	Pensar y razonar. Plantear y resolver problemas. Comunicar.
Elemento de competencia	Aplica a una situación problemática los conocimientos matemáticos que requiere. Utiliza recursos gráficos como apoyo al pensamiento. Calcula.
Contenido	Relaciones entre magnitudes. Estructuración del espacio. Operaciones con números decimales.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Cada cuadrado negro se compone de cuatro medias baldosas, es decir, tiene la superficie de dos baldosas.

La superficie del cuadrado negro es
$2 \cdot 20 \cdot 20 = 800$ cm^2.

b) El lado del cuadrado negro es la diagonal de la baldosa, cuya longitud calculamos con la ayuda del teorema de Pitágoras.

Diagonal de la baldosa:
$d = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} = 28,28$ cm

Perímetro del cuadrado negro:
4 · 28,28 = 113,12 cm.

c) La mitad de cada baldosa es blanca y la otra mitad negra. Por tanto, el suelo tiene un 50 % de cada color.

d) En el ancho de la habitación caben 360 : 20 = 18 baldosas.

En el largo de la habitación caben 400 : 20 = 20 baldosas.

Para cubrir el suelo de la habitación, se necesitan 18 · 20 = 360 baldosas.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Responde correctamente a tres de las cuestiones.

1. Responde solo a dos de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

8 MOVIMIENTO DE TIERRAS

Competencia	Argumentar. Modelar. Comunicar. Plantear y resolver problemas.
Elemento de competencia	Traduce una situación a una estructura matemática. Aplica los conocimientos matemáticos adecuados para resolver una situación. Crea y expresa argumentos.
Contenido	Relaciones de proporcionalidad. Porcentajes.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Trabajando con una pala tardaría 15 · 2 = 30 días.

Trabajando con tres palas tardaría 30 : 3 = 10 días.

b) Si solo trabajara una hora diaria, tardaría 15 · 8 = 120 días.

Trabajando 10 horas diarias tardaría 120 : 10 = 12 días.

c) El importe de la factura ascenderá a 8 · 15 · 2 · 80 · 1,18 = 22 656 euros.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde correctamente solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

9 CALCETINES

Competencia	Pensar y razonar. Comunicar. Modelar.
Elemento de competencia	Encadena procesos lógicos. Traduce una situación a una estructura matemática. Expresa, utilizando recursos lingüísticos y matemáticos.
Contenido	Relaciones de proporcionalidad. Porcentajes.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Tres fajos de tres y dos fajos de cinco forman un grupo de $3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 19$ pares de calcetines. Así que con el total se pueden hacer $3\,800 : 19 = 200$ grupos.

El taller debe preparar $200 \cdot 3 = 600$ fajos de tres pares y $200 \cdot 2 = 400$ fajos de cinco pares.

Comprobación: $600 \cdot 3 + 400 \cdot 5 =$
$= 1\,800 + 2\,000 = 3\,800$ pares

$600/400 = 3/2$

b) Un par de calcetines se paga a $5{,}40 : 3 = 1{,}80$ €

Un fajo de cinco pares costará $1{,}80 \cdot 5 = 9$ €

c) La factura total ascenderá a $1{,}80 \cdot 3\,800 \cdot 1{,}18 = 8\,071{,}20$ €.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Responde a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

10 LETRAS POR NÚMEROS

Competencia	Comunicar. Utilizar el lenguaje simbólico y formal.
Elemento de competencia	Traduce un contexto a una estructura matemática. Traduce de lenguaje natural a lenguaje simbólico.
Contenido	Lenguaje algebraico. Resolución de ecuaciones.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Tabla

El número	n
Su siguiente	$n + 1$
Su anterior	$n - 1$
El doble de su siguiente	$2 \cdot (n + 1)$
La mitad de su anterior	$(n + 1)/2$
El resultado de restarle siete a su doble	$2n - 1$
El número que resulta de sumarle siete a su mitad	$n/2 + 7$
La mitad del número que resulta de sumarle siete	$(n + 7)/2$

b) $\dfrac{n+7}{2} = 41 \rightarrow n + 7 = 82 \rightarrow n = 75$

2. Responde parcialmente a la primera cuestión y correctamente a la segunda.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

11 CABEZAS Y PATAS

Competencia	Utilizar el lenguaje simbólico y formal.
Elemento de competencia	Interpreta el lenguaje simbólico. Traduce un contexto a una estructura matemática. Traduce de lenguaje natural a lenguaje simbólico.
Contenido	Lenguaje algebraico. Resolución de ecuaciones.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) $4x + 2(40 - x) = 110$

b) $4x + 80 - 2x = 110 \rightarrow 2x = 30 \rightarrow x = 15$

En la pradera hay 15 antílopes y $40 - 15 = 25$ avestruces.

2. Responde correctamente a la primera cuestión y comete algún error de cálculo en la segunda, aunque la interpreta bien.

1. Responde solo a una de las preguntas.

0. En cualquier otro caso.

Pautas de corrección

12 PLANO DEL SALÓN

Competencia	Representar. Comunicar.
Elemento de competencia	Interpreta modelos matemáticos en términos reales. Interpreta el lenguaje gráfico. Entiende y utiliza los conceptos matemáticos que requiere la situación.
Contenido	Relaciones de proporcionalidad geométrica. Superficie.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) • Largo:

– Medida en el plano: 10 cm

– Medida real: 10 cm · 50 = 500 cm = 5 m

• Ancho:

– Medida en el plano: 8 cm

– Medida real: 8 cm · 50 = 400 cm = 4 m

b) 5 m · 8 m = 40 m^2

El salón tiene una superficie de 40 metros cuadrados.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las preguntas.

0. En cualquier otro caso.

13 VIAJE EN MOTO

Competencia	Representar. Comunicar.
Elemento de competencia	Interpreta modelos matemáticos en términos reales. Interpreta el lenguaje gráfico. Expresa relaciones, utilizando herramientas matemáticas.
Contenido	Funciones y gráficas.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Interpretación de la gráfica:

- El viaje de ida duró 12 minutos.
- Estuvo parado 10 minutos.
- El viaje de vuelta duró 8 minutos.
- El motorista recorrió en total 20 kilómetros, 10 de ida y otros 10 de vuelta.

b) Velocidades medias:

- Viaje de ida: 12 minutos = 1/5 de hora.

V_{ida} = 10 km/(1/5 h) = 50 km/h

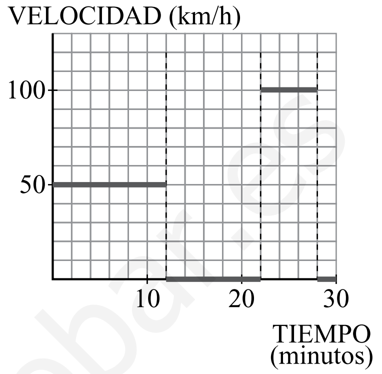
En el viaje de ida, la velocidad media fue de 50 kilómetros por hora.

- Viaje de vuelta: 6 minutos = 6/60 = = 1/10 de hora

V_{vuelta} = 10 km/(1/10 h) = 100 km/h

En el viaje de vuelta, la velocidad media fue de 100 kilómetros por hora.

c) Gráfica de velocidad-tiempo.



2. Da las respuestas correctas, sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

14 CAPTURAS DE PESCA

Competencia	Representar. Pensar y razonar.
Elemento de competencia	Interpreta información presentada en lenguaje gráfico. Aplica los conceptos matemáticos que requiere la situación. Representa información en distintos tipos de números.
Contenido	Gráficas estadísticas. Relaciones de proporcionalidad. Porcentajes.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Observando el gráfico se aprecia que:

La sardina ocupa la cuarta parte del gráfico → 100 · 1/4 = 100 : 4 = 25%

El boquerón ocupa 2/12 = 1/6 del gráfico → 100 · 1/6 = 100 : 6 = 16,66%

El lenguado ocupa 1/12 del gráfico → → 100 · 1/12 = 100 : 12 = 8,33%

La merluza ocupa 3/8 del gráfico → → 100 · 3/8 = 300 : 8 = 37,5%

El apartado "otros" ocupa 1/8 del gráfico → 1/8 · 100 = 100 : 8 = 12,5%

b) Como la sardina ocupa 1/4 del peso, el peso total es 30 · 4 = 120 toneladas.

c) El peso de la merluza es 3/8 de 120 toneladas = (120 · 3) : 8 = 45 toneladas.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

15 NOTA MEDIA

Competencia	Representar. Pensar y razonar.
Elemento de competencia	Interpreta información presentada en lenguaje gráfico. Aplica los conceptos y procedimientos matemáticos que requiere la situación.
Contenido	Gráficas y parámetros estadísticos.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Tabla:

NOTAS (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTALES
FRECUENCIAS (f)	0	1	2	1	3	7	4	6	3	1	2	30
$x \cdot f$	0	1	4	3	12	35	24	42	24	9	20	174

Nota media = 174 : 30 = 5,8

b) Ordenadas las treinta notas, las que ocupan los lugares decimoquinto y decimosexto son: n.º 15 → 6 y n.º 16 → 6.

(1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6 – 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 10)

La mediana es 6.

c) La moda es 5.

2. Comete algún error de recuento o cálculo en la primera cuestión y da correctamente las otras dos.

1. Responde correctamente solo a dos de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

16 CONSTRUCCIÓN DE UNA VELA

Competencia	Pensar y razonar. Plantear y resolver problemas.
Elemento de competencia	Interpreta el lenguaje gráfico. Encadena procesos lógicos. Traduce una situación a un modelo matemático. Aplica los conceptos y procedimientos matemáticos que requiere la situación problemática.
Contenido	Volumen de los cuerpos. Relaciones longitud-volumen.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Volumen de la bola de cera:
$(4 \cdot \pi \cdot 5^3)/3 = 523{,}33\ \text{cm}^3$

b) El volumen de la vela cuadrada es
$8 \cdot 8 \cdot x = 523{,}33$.

Y de ahí → $x = 523{,}33 : 64 = 8{,}18$ cm

La altura de la vela cuadrada es de 8,18 cm.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las preguntas.

0. En cualquier otro caso.

17 CAJAS EN EL ALMACÉN

Competencia	Pensar y razonar. Plantear y resolver problemas.
Elemento de competencia	Interpreta el lenguaje gráfico. Encadena procesos lógicos. Traduce una situación a un modelo matemático. Aplica los conceptos y procedimientos matemáticos que requiere la situación problemática.
Contenido	Volumen de los cuerpos. Relaciones longitud-volumen.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Las cajas se colocarán, de pie, alineando la cara de 30 cm con el largo de la nave (7 m). Así se ajustan al ancho y al alto, y sobran 10 cm a lo ancho (resto de 700 : 30 → 10 cm).

b) Colocando las cajas como se ha dicho, caben:

– 400 : 20 = 20 cajas a lo ancho.

– 250 : 50 = 5 cajas a lo alto.

– 700 : 30 → 23 cajas a lo ancho y sobran 10 cm.

El número total de cajas que caben en la nave es $20 \cdot 5 \cdot 23 = 2\,300$ cajas.

c) Sobraría $4\ \text{m} \cdot 2{,}5\ \text{m} \cdot 0{,}1\ \text{m} = 1\ \text{m}^3$.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Contesta correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

Tareas competenciales para preparar las pruebas de diagnóstico

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 GANANCIAS Y PÉRDIDAS

Los ocho departamentos que componen una empresa presentan los siguientes resultados de su actividad, correspondientes al mes vencido:

D1	D2	D3	D4
+12 563,56 €	–15 720,45 €	–6 284,70 €	+13 721,00 €
D5	D6	D7	D8
–32 208,62 €	–8 596,91 €	–2 005,22 €	+13 600,50 €

a) ¿Cuál ha sido el departamento con peores resultados? ¿Y el que los ha tenido mejores?

b) Ordena los ocho departamentos, atendiendo a los resultados obtenidos.

c) ¿Cuál o cuáles de estas expresiones reflejan el balance global del mes?

(Nota: en las dos últimas, cada resultado se ha codificado con las siglas del departamento. Así, por ejemplo, D3 = –6 284,70).

A → (12 563,56 + 13 721,00 + 13 600,50) – (15 720,45 + 6 284,70 +
+ 32 208,62 + 8 596,91 + 2 005,22)

B → (+12 563,56) + (–15 720,45) + (–6 284,70) + (+13 721,00) +
+ (–32 208,62) + (–8 596,91) + (–2 005,22) + (+13 600,50)

C → D1 + D2 + D3 + D4 + D5 + D6 + D7 + D8

D → D1 – D2 – D3 + D4 – D5 – D6 – D7 + D8

d) Calcula el balance global del mes vencido.

Nombre y apellidos: ....

2 LAS CUENTAS DE UN TRABAJADOR AUTÓNOMO EN UNA SEMANA

Un trabajador por cuenta propia utiliza en su hoja de cálculo el siguiente esquema para controlar sus cuentas semanales:

INGRESOS	→ IN	$IN = HT \cdot 15 + HE \cdot 25 + P$
• Horas trabajadas (horario normal)	→ HT	
• Horas trabajadas (horario especial)	→ HE	
• Primas	→ P	

GASTOS	→ GT	$GT = 150 + \frac{g \cdot 6{,}4}{100} \cdot K + M + GP$
Gastos fijos	→ 150 €	
Gastos de empresa • Kilometraje • Precio gasóleo (€/litro) • Materiales	 → K → g → M	
Gastos personales	→ GP	

SALDO DE LA SEMANA	→ SS	$SS = IN - GT$

a) ¿Cuánto cobra por hora trabajada en horario normal? ¿Y en horario especial?

b) Supón que su furgoneta gasta x litros cada 100 kilómetros y que el gasóleo cuesta 1,35 €/litro. Con esos datos, ¿cómo expresarías el gasto por kilómetro recorrido?

c) ¿Cuántos litros de gasóleo crees que consume la furgoneta cada 100 kilómetros? ¿Qué significado tiene la fracción $(g \cdot 6{,}4)/100$ en la fórmula de los gastos?

d) Durante la semana pasada, los datos para sus cuentas fueron los siguientes:

$HT = 38$ $HE = 5$ $P = 350$

$K = 325$ $g = 1{,}32$ $M = 135{,}32$ $GP = 147{,}56$

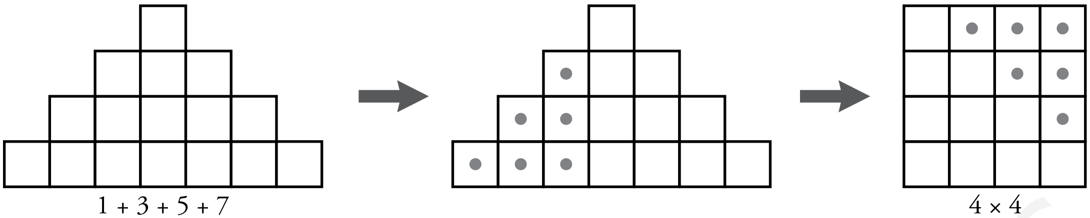
¿Cuál fue su saldo semanal?

e) Haz una estimación de su saldo semanal en una semana en la que permanezca inactivo.

Nombre y apellidos: ....

3 SUMA DE LOS *n* PRIMEROS NÚMEROS IMPARES

Observa, con ayuda de la ilustración, el procedimiento seguido para sumar los cuatro primeros números impares:



$$1 + 3 + 5 + 7 = 4 \cdot 4 = 4^2 = 16$$

a) Calcula, por el mismo método, la suma de los 8 primeros impares.

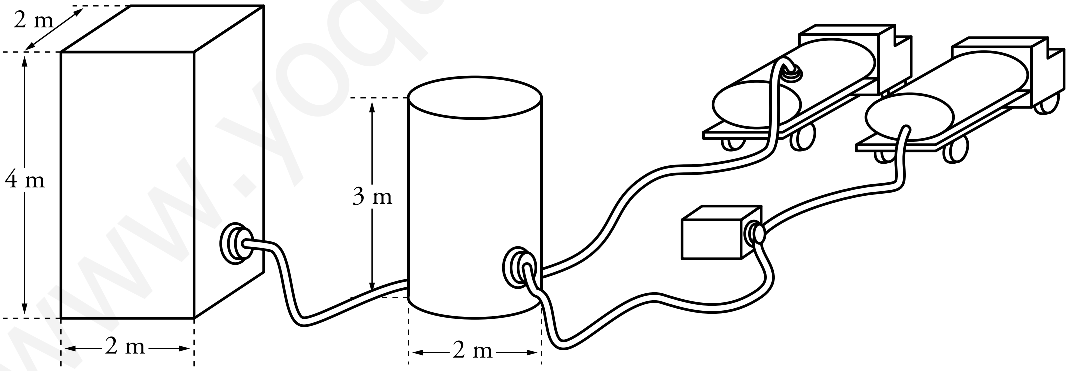
b) Llamando I_n a la suma de los n primeros números impares, completa la tabla:

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	…	I_8	…	I_n
1	4		16		…		…	

c) Calcula la suma de los 100 primeros números impares.

4 VINO DE DOS CALIDADES

Una bodega vinícola ha vendido a un mayorista el vino que tenía almacenado en dos depósitos que estaban llenos, y cuya forma y dimensiones puedes ver en la ilustración:



El vino de cada depósito era de diferente calidad. Así, el vino del primer depósito ha valido 16 000 €, y el del segundo, 14 130 €.

a) ¿Cuál es la capacidad, en litros, de cada depósito? (Nota: toma $\pi = 3{,}14$).

b) ¿Cuál de los dos depósitos contenía el vino de superior calidad?

c) Si el mayorista junta ambos vinos, para obtener una mezcla de calidad intermedia, ¿a cuánto le sale el litro de la mezcla?

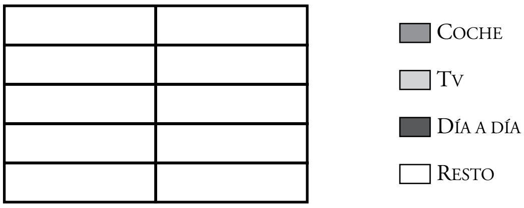
Nombre y apellidos: ....

5 COMPRA DE ENSERES

La familia Rivero gastó, el mes pasado, la mitad del dinero que tenía en la entrada para un coche nuevo. De lo que les quedaba, invirtieron la quinta parte en reponer el televisor, que se había estropeado sin posibilidad de arreglo. Además, gastaron la cuarta parte del resto en el funcionamiento del día a día.

De esta forma, cuando acabó el mes, la cuenta tenía un saldo de 3 000 €.

a) Representa en el gráfico la parte gastada en cada partida.



b) ¿En qué partida se invirtió una cantidad mayor, en el televisor o en los gastos del día a día?

c) ¿Con cuánto dinero comenzó el mes la familia?

6 COCHE CON ORDENADOR

Un conductor que acaba de llegar a su destino comprueba en el ordenador de a bordo que la distancia recorrida ha sido de 198 kilómetros, y la velocidad media, de 88 km/h. El viajero recuerda que a mitad del recorrido hizo una parada de media hora.

Teniendo en cuenta que el ordenador del coche calcula la velocidad media, contando solo el tiempo al volante, es decir, sin incluir el tiempo de las paradas, calcula:

a) El tiempo que ha estado conduciendo.

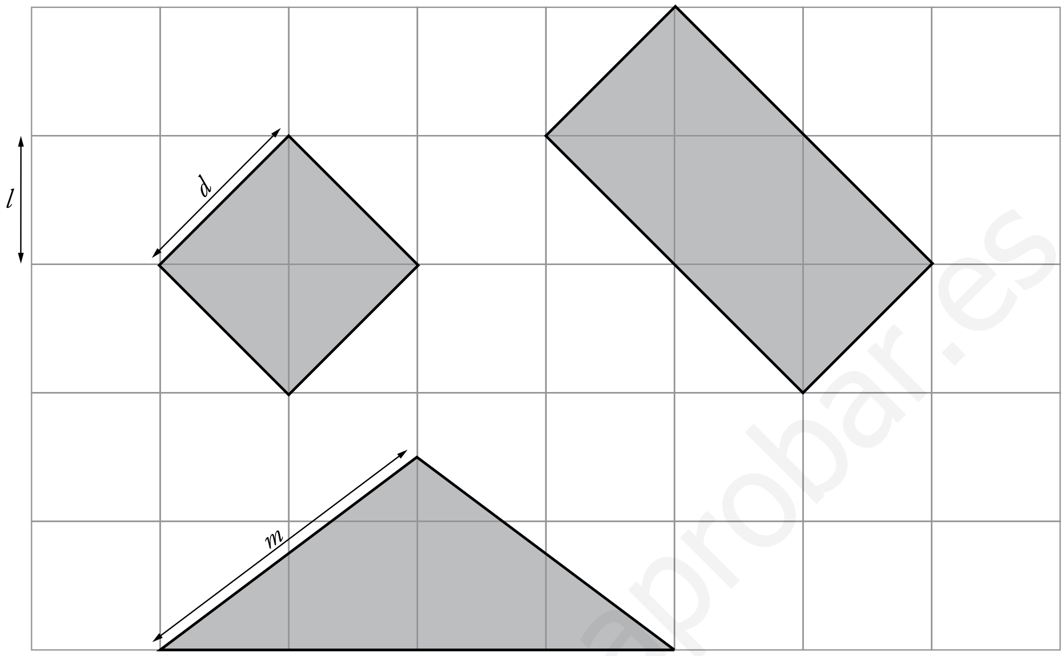
b) El tiempo total que ha durado el viaje.

c) La velocidad media real, incluyendo el tiempo de la parada.

Nombre y apellidos: ....

7 FIGURAS

Observa la cuadrícula y las figuras construidas sobre ella:



Sabiendo que el área de un cuadro de la cuadrícula mide 100 cm^2, calcula:

a) El área y el perímetro del cuadrado.

b) El área y el perímetro del rectángulo.

c) El área y el perímetro del triángulo.

8 MELONES

Jacinto, el frutero, vende melones de dos clases. Los más baratos, sin etiqueta, son de su propia huerta. Los otros vienen de Villaconejos, llevan etiqueta de calidad óptima y son el 20% más caros.

Rosa, que es clienta de toda la vida, se ha llevado un melón de la huerta, de dos kilos y tres cuartos, que le ha costado 2,20 €.

a) ¿Cuánto pagará Pablo por otro melón, también de la huerta, que pesa 3,250 kg?

b) ¿Cuánto pagará Adela por un melón de Villaconejos, que pesa tres kilos y medio?

c) Jacinto tiene una oferta para los melones de su huerta: llevando tres piezas, hace una rebaja del 25%. ¿A cuánto sale el kilo en ese caso?

Nombre y apellidos: ....

9 PROPORCIÓN

El recuento de la plantilla de una empresa conservera indica que el número de hombres y el de mujeres están en la relación uno a cuatro.

a) ¿Cuál es el porcentaje de mujeres en la empresa?

b) Si la plantilla completa es de 340 personas, ¿cuántos empleados hombres hay?

c) ¿Cuál sería el porcentaje de hombres si se contratara a 2 hombres y a 8 mujeres más?

d) ¿Y si, en vez de eso, se despidiera a 5 hombres y se contratara a 15 mujeres más?

10 EDADES Y LETRAS

A continuación, tienes algunos datos sobre las edades de la familia de Laura:

- La madre de Laura, Verónica, tenía 28 años cuando Laura nació.
- Su padre, Víctor, tiene cuatro años más que su madre.
- La hermana menor, Rosa, tiene dos años menos.
- El abuelo materno, Ramón, tiene 7/4 de la edad de Verónica.
- Sumando la edad del padre con la de madre y restando la de Laura, se obtiene la edad de Josefina, la abuela paterna.

Teniendo todo eso en cuenta:

a) Si llamamos a a la edad de Laura, completa la tabla de edades:

Laura	Verónica	Víctor	Rosa	Ramón	Josefina
a					

b) Completa la tabla con la edad que tenía cada uno de los miembros de la familia hace 7 años.

Laura	Verónica	Víctor	Rosa	Ramón	Josefina
$a - 7$					

c) Sabiendo que Laura tiene 16 años, calcula la edad de cada uno de los restantes miembros de la familia.

Laura	Verónica	Víctor	Rosa	Ramón	Josefina
16 años					

Nombre y apellidos: ....

11 MANZANAS Y NARANJAS

En el mercado, un kilo de manzanas cuesta veinte céntimos más que uno de naranjas. Por dos kilos de manzanas y tres de naranjas, hemos pagado 7,90 €.

Llamando x al precio del kilo de naranjas, podemos expresar así los elementos que aparecen en el enunciado anterior:

- Coste de un kilo de naranjas................ → x
- Coste de un kilo de manzanas.............. → $x + 0{,}20$
- Coste de dos kilos de manzanas .... → $2(x + 0{,}20)$
- Coste de tres kilos de naranjas .... → $3x$

Teniendo eso en cuenta:

a) Expresa con una ecuación la igualdad:

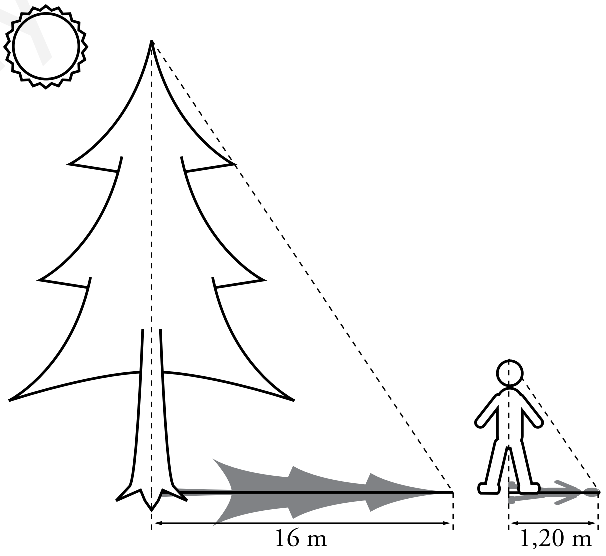
(COSTE 2 kg MANZANAS) + (COSTE 3 kg NARANJAS) = 7,90 €

b) Resuelve la ecuación anterior.

c) Calcula el precio de las manzanas y el de las naranjas.

12 SOMBRAS

Luis ha medido, a la misma hora, su sombra (1,20 m) y la sombra de un árbol del parque (16 m).

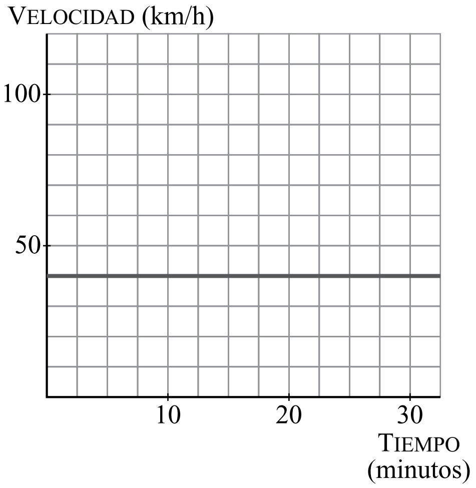


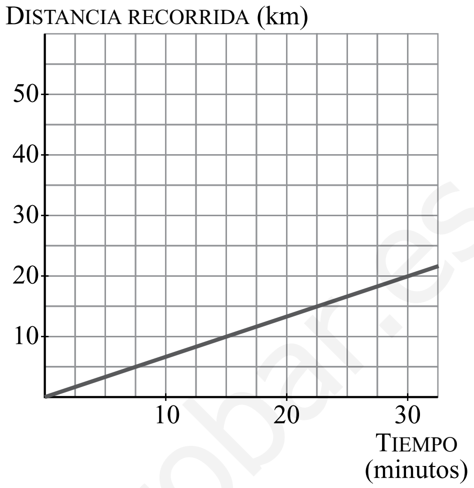
Sabiendo que la altura de Luis es de 1,80 m, ¿cuál es la altura del árbol?

Nombre y apellidos: ....

13 DESPLAZAMIENTO DE UN TRACTOR

Las gráficas corresponden al movimiento de un tractor que se desplaza por una carretera a velocidad constante.





a) ¿Cuál es la velocidad del tractor? ¿Qué distancia recorre en 30 minutos?

b) ¿Cuál de estas igualdades refleja la relación entre la distancia, en kilómetros, y el tiempo en horas?

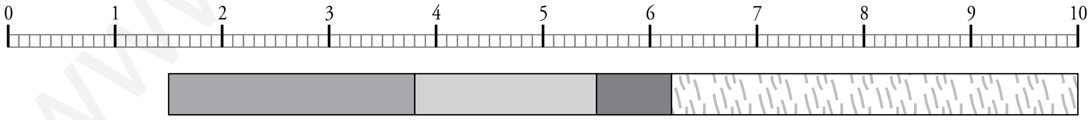
$D = 30 \cdot t$ $\quad D = 40 \cdot t$ $\quad D = 50/t$ $\quad t = 40 \cdot D$ $\quad D \cdot t = 30$

c) Dibuja, sobre los mismos ejes, las gráficas correspondientes para un camión que se desplaza a 80 kilómetros por hora.

14 NOTAS

En una clase de 32 alumnos y alumnas, se han hecho cuatro grupos, con el 25% de los alumnos en cada uno, según su nota en un control de Matemáticas.

Los resultados se han representado en la siguiente gráfica:



a) ¿Cuál ha sido la nota más alta? ¿Y la más baja?

b) ¿Cuál es la mediana de la distribución?

c) Sabiendo que ningún alumno ha obtenido cinco puntos y medio, ¿cuántos están por encima de esa nota?

d) Sabiendo que ninguna nota es exactamente 6,2, ¿qué porcentaje de los alumnos ha sacado menos de esa nota?

e) ¿Qué nota hay que tener para estar dentro del 25% más alto?

Nombre y apellidos: ....

15 NÚMERO DE HIJOS

En un estudio sobre las características sociológicas de una barriada de una gran ciudad, se ha anotado el número de hijos de las familias encuestadas, resultando la siguiente distribución:

Número de hijos en cada familia									
2	1	0	3	1	0	1	1	0	1
2	4	3	1	1	2	0	0	0	2
1	0	2	1	2	0	1	2	2	0
0	1	1	1	3	0	4	3	2	3
1	5	0	2	1	4	0	1	1	1

Calcula:

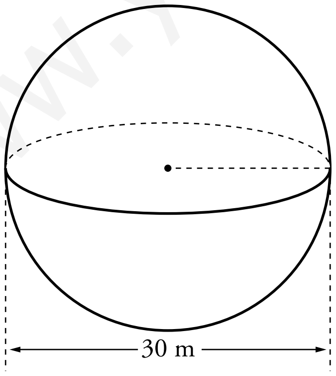
a) La media de hijos por familia en esa barriada.

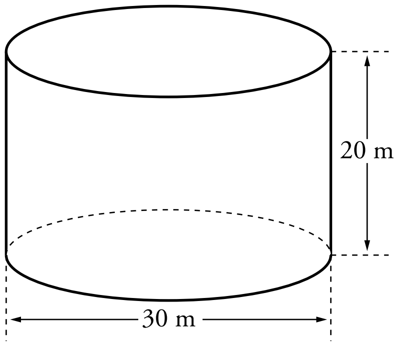
b) La moda de la distribución.

c) La mediana de la distribución.

16 DEPÓSITOS

Una compañía de distribución de carburantes dispone de dos depósitos para el almacenaje de gasolina, cuya forma y dimensiones puedes apreciar en la ilustración.





a) ¿Cuál de los dos tiene mayor capacidad?

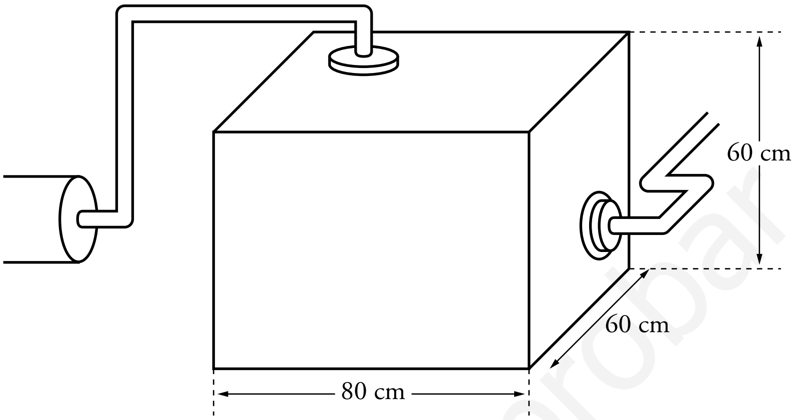
b) ¿Cuántos millones de litros pueden almacenar en total?

Nombre y apellidos: ....

17 CORTAR, DOBLAR Y SOLDAR

Un taller metalúrgico recibe el encargo de construir un depósito de chapa inoxidable para una conducción de agua. El depósito tendrá la forma y las dimensiones que puedes apreciar en la figura.

Para la construcción, se tendrá en cuenta que la chapa se puede doblar, y se buscará la mínima longitud de soldadura que sea posible.



Sabiendo que el taller cobra, por el producto terminado, 38,50 € por metro cuadrado de chapa y 23,60 € por metro lineal de soldadura, calcula:

a) El coste del material empleado para la construcción del depósito.

b) El coste de la soldadura.

c) El importe de la factura, cargando el 18% de IVA.

Pautas de corrección

1 GANANCIAS Y PÉRDIDAS

Competencia	Comunicar. Representar. Modelar.
Elemento de competencia	Interpreta mensajes en códigos numéricos. Traduce una situación real a una estructura matemática.
Contenido	Números enteros: orden y operaciones.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) El departamento con peores resultados ha sido el D5, con unas pérdidas de 32 208,62 euros.

El departamento con mejores resultados ha sido el D4, con una ganancias de 13 721,00 euros.

b) D5 < D2 < D6 < D3 < D7 < D1 < D8 < D4

c) Las tres primeras expresiones reflejan el balance global del mes.

A → Suma todas las ganancias, suma todas las pérdidas y resta los resultados.

B → Suma los resultados de todos los departamentos, cada uno con su signo. Es decir, las ganancias son positivas, y las pérdidas, negativas.

C → Si se sustituye la letra de cada departamento por el valor que representa, se obtiene la expresión anterior (B).

D → No es válida. Al sustituir cada letra por su valor, las pérdidas quedan positivas:

Por ejemplo, –D2 = –(–15 720,45) =
= +15 720,45.

d) El balance global del mes vencido es:

39 885,06 – 64 815,90 = –24 930,84 €

2. Contesta correctamente a tres de las cuestiones.

1. Responde solo a dos de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

2 LAS CUENTAS DE UN TRABAJADOR AUTÓNOMO EN UNA SEMANA

Competencia	Comunicar. Pensar y razonar. Argumentar.
Elemento de competencia	Interpreta mensajes en lenguaje simbólico. Toma decisiones en función de los datos y circunstancias. Aplica los conceptos y los procedimientos matemáticos que requiere la situación.
Contenido	Lenguaje algebraico. Operaciones con números positivos y negativos.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Cobra 15 €/h en horario normal y 25 €/h en horario especial.

b) $\frac{1{,}35x}{100}$

c) En la fracción $\frac{g \cdot 6{,}4}{100}$:

- g es el precio del gasóleo.
- 6,4 son los litros que gasta la furgoneta cada 100 kilómetros.
- $\frac{6{,}4}{100}$ es el gasto de la furgoneta, en litros por kilómetro.
- $\frac{g \cdot 6{,}4}{100}$ es el gasto, en euros, por kilómetro.

d) Ingresos:

$IN = 38 \cdot 15 + 5 \cdot 25 + 350 = 1\,045$ €

Gastos:

$GT = 150 + \frac{1{,}32 \cdot 6{,}4}{100} \cdot 325 + 135{,}32 +$
$+ 147{,}56 = 460{,}37$ €

Saldo de la semana:

$SS = IN - GT = 1\,045 - 454{,}10 = 590{,}90$ €

e) En una semana en la que permanece inactivo, se mantienen los gastos fijos y los personales. Calculamos estos últimos con los datos que tenemos:

$HT = 0$; $HE = 0$; $P = 0$; Gastos fijos = 150;
$K = 0$; $M = 0$; $GP = 145{,}54$
Así: $IN = 0$ €; $GT = 297{,}54$ €
$SS = -297{,}54$ €

Es decir, en una semana de inactividad, tiene un saldo negativo de unos 300 euros.

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Contesta correctamente a cuatro de las cuestiones.

1. Responde correctamente a tres de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

3 SUMA DE LOS *n* PRIMEROS NÚMEROS IMPARES

Competencia	Interpretar y comunicar. Generalizar. Modelizar.
Elemento de competencia	Interpreta el lenguaje gráfico. Detecta regularidades y relaciones, las generaliza y las expresa en lenguaje simbólico. Traduce enunciados verbales a lenguaje simbólico.
Contenido	Cantidad. Números naturales. Lenguaje algebraico.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) La suma de los 8 primeros números impares es:

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 =$
$= 8 \cdot 8 = 64$

b)

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	…	I_8	…	I_n
1	4	9	16	25	…	64	…	n^2

c) $I_{100} = 1 + 3 + 5 + ... + 199 = 100^2 =$
$= 10\,000$

2. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

4 VINO DE DOS CALIDADES

Competencia	Pensar y razonar. Argumentar. Resolver problemas.
Elemento de competencia	Encadena procesos lógicos de cara a un objetivo. Interpreta un enunciado según una estructura matemática. Diferencia opciones de cara a un objetivo.
Contenido	Volumen de los cuerpos geométricos. Operaciones con números decimales.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Volumen del depósito-prisma:

$2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ m^3 = 16 000 litros

Volumen del depósito-cilindro:

$\pi \cdot 1^2 \cdot 3 = 9{,}42$ m^3 = 9 420 litros

b) Precio del vino del depósito-prisma:

16 000 € : 16 000 *l* = 1 €/*l*

Precio del vino del depósito-cilindro:

14 230 € : 9 420 *l* = 1,5 €/*l*

El vino de calidad superior, el más caro, es el del depósito-cilindro.

c) Coste total:

16 000 € + 14 130 € = 30 130 €

Cantidad total de vino:

16 000 *l* + 9 420 *l* = 25 420 *l*

Precio del litro de mezcla:

30 130 : 25 420 ≈ 1,19 €/*l*

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

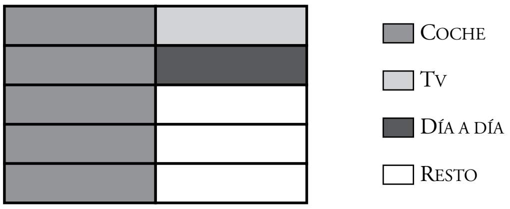
5 COMPRA DE ENSERES

Competencia	Comunicar. Pensar y razonar. Resolver problemas.
Elemento de competencia	Utiliza recursos gráficos como apoyo al pensamiento. Aplica a una situación problemática los conocimientos matemáticos que requiere.
Contenido	Fracciones.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Representación gráfica:



b) Como se ve en el gráfico, se invirtió la misma cantidad en el televisor que en los gastos del día a día.

Visto de otra forma (solución numérica):

En el coche:

- Gasta 1/2
- Queda 1/2

En el televisor:

- Gasta $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2} = \frac{1}{10}$
- Quedan $\frac{4}{5}$ de $\frac{1}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

En los gastos del día a día:

- Gasta $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$
- Quedan $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Como se ve, en el televisor y en los gastos del día a día, la familia invirtió la misma cantidad: 1/10 del dinero.

c)

	1000
	1000
	1000

- Quedan $\frac{3}{10}$ del dinero = 3 000 €
- $\frac{1}{10}$ del dinero = 3 000 : 3 = 1 000 €
- El total del dinero son 1 000 · 10 = = 10 000 €.

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Responde a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

6 COCHE CON ORDENADOR

Competencia	Pensar y razonar. Resolver problemas.
Elemento de competencia	Aplica las herramientas adecuadas a una situación. Calcula.
Contenido	Relaciones entre magnitudes. Sistema decimal y sistema sexagesimal.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) 198 km : 88 km/h = 2,25 h = 2 h 15 min

Sin contar la parada, ha estado al volante dos horas y cuarto.

b) 2 h 15 min + 30 min = 2 h 45 min

Incluyendo la parada, el viaje ha durado dos horas y tres cuartos.

c) 2 h 45 min = 2,75 h

198 km : 2,75 h = 72 km/h

Contando la parada, la velocidad media ha sido de 72 km/h.

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas.

1. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

7 FIGURAS

Competencia	Representar. Estructurar el espacio. Pensar y razonar.
Elemento de competencia	Aplica a una situación problemática los conocimientos matemáticos que requiere. Utiliza recursos gráficos como apoyo al pensamiento. Calcula.
Contenido	Medida de la superficie. Operaciones con números decimales.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

Cálculos previos:

- El lado del cuadro de la cuadrícula mide $l = \sqrt{100} = 10$ cm.
- La diagonal del cuadro de cuadrícula mide $d = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 14{,}14$ cm.
- Lado igual del triángulo isósceles: $m = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ cm

a) Área del cuadrado:

- El cuadrado equivale a dos cuadros de la cuadrícula.
- El área del cuadrado es de 200 cm^2.

Perímetro del cuadrado:

P = 4 · d = 4 · 14,14 = 56,56 cm

Pautas de corrección

b) Área del rectángulo:

- El rectángulo equivale a dos cuadrados, es decir, a cuatro cuadros de cuadrícula.
- El área del rectángulo es de 400 cm^2.

Perímetro del rectángulo:

$P = 6d = 6 \cdot 14{,}14 = 84{,}84$ cm

c) Área del triángulo:

- El triángulo equivale a tres cuadros de la cuadrícula.
- El área del triángulo es de 300 cm^2.

Perímetro del triángulo:

$P = 4\ l + 2$ m $= 40 + 50 = 90$ cm

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Responde a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

8 MELONES

Competencia	Argumentar. Modelizar. Plantear y resolver problemas.
Elemento de competencia	Traduce una situación a una estructura matemática. Aplica los conocimientos matemáticos adecuados para resolver una situación. Crea y expresa argumentos.
Contenido	Relaciones de proporcionalidad. Porcentajes.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

Cálculos previos:

- Un kilo de melones de la huerta sale por 2,20 : 2,750 = 0,80 €.
- Un kilo de melones de Villaconejos sale por 0,80 · 1,20 = 0,96 €.

a) 3,250 kg · 0,80 €/kg = 2,60 €

Pablo pagará dos euros y sesenta céntimos.

b) 3,5 kg · 0,96 €/kg = 3,36 €

Adela pagará tres euros y treinta y seis céntimos.

c) 75% de 0,80 = 0,80 · 0,75 = 0,60

La oferta de Jacinto pone los melones a 0,60 € el kilo.

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Responde a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

9 PROPORCIÓN

Competencia	Pensar y razonar. Comunicar. Modelizar. Resolver problemas.
Elemento de competencia	Encadena procesos lógicos. Traduce una situación a una estructura matemática. Utiliza recursos lingüísticos y matemáticos para expresarse.
Contenido	Relaciones de proporcionalidad. Porcentajes.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) De cada cinco trabajadores, cuatro son mujeres, y uno, hombre.

De cada 100 trabajadores, 80 son mujeres, y 20, hombres.

El porcentaje de mujeres es del 80% (y un 20% de hombres).

b) 20% de 340 = 340 · 0,20 = 68

En la plantilla hay 68 empleados hombres (y 272 mujeres).

c) El porcentaje no variaría, porque los diez nuevos contratos mantienen la proporción anterior:

- 2 hombres de 10 son un 20%.
- 8 mujeres de 10 son un 80%.

d) Entonces habría 63 hombres y 287 mujeres, que son 350 en total.

- En 350 de plantilla hay 63 hombres y 287 mujeres.
- En 50 de plantilla hay 9 hombres y 41 mujeres.
- En 100 de plantilla hay 18 hombres y 82 mujeres.
- En el supuesto del problema, habría un 18% de hombres y un 82% de mujeres.

2. Da las respuestas correctas pero sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las preguntas.

0. En cualquier otro caso.

Pautas de corrección

10 EDADES Y LETRAS

Competencia	Comunicar. Utilizar el lenguaje simbólico y formal.
Elemento de competencia	Traduce un contexto a una estructura matemática. Traduce del lenguaje natural al lenguaje simbólico.
Contenido	Lenguaje algebraico. Resolución de ecuaciones.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a)

Laura	Verónica	Víctor	Rosa	Ramón	Josefina
a	$a + 28$	$a + 32$	$a - 2$	$\frac{7a}{4} + 49$	$a + 60$

b)

Laura	Verónica	Víctor	Rosa	Ramón	Josefina
$a - 7$	$a + 21$	$a + 25$	$a - 9$	$\frac{7a}{4} + 42$	$a + 53$

c) Sabiendo que Laura tiene 16 años, la edad de cada uno de los restantes miembros de la familia es:

Laura	Verónica	Víctor	Rosa	Ramón	Josefina
16 años	44	48	14	77	76

2. Responde a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

11 MANZANAS Y NARANJAS

Competencia	Utilizar el lenguaje simbólico y formal.
Elemento de competencia	Interpreta el lenguaje simbólico. Traduce un contexto a una estructura matemática. Traduce del lenguaje natural al lenguaje simbólico.
Contenido	Lenguaje algebraico. Resolución de ecuaciones.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) $2(x + 0{,}20) + 3x = 7{,}90$

b) $2x + 0{,}40 + 3x = 7{,}90 \rightarrow 5x = 7{,}50 \rightarrow$
$\rightarrow x = 7{,}50/5 = 1{,}5$

c) Un kilo de naranjas cuesta $x = 1{,}50$ €.
Un kilo de manzanas cuesta
$x + 0{,}20 = 1{,}50 + 0{,}20 = 1{,}70$ €

2. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

12 SOMBRAS

Competencia	Representar. Comunicar.
Elemento de competencia	Interpreta modelos matemáticos en términos reales. Interpreta el lenguaje gráfico. Entiende y utiliza los conceptos matemáticos que requiere la situación.
Contenido	Relaciones de proporcionalidad geométrica.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

Las alturas de los objetos son directamente proporcionales a las longitudes de las sombras que arrojan.

$$\frac{x}{16} = \frac{1{,}80}{1{,}20} \rightarrow x = \frac{16 \cdot 1{,}80}{1{,}20} = 24$$

El árbol tiene una altura de 24 metros.

2. Razona bien el proceso, pero comete algún error en los cálculos.

1. Da la respuesta correcta, pero sin justificarla.

0. En cualquier otro caso.

13 DESPLAZAMIENTO DE UN TRACTOR

Competencia	Representar. Comunicar.
Elemento de competencia	Interpreta y utiliza el lenguaje gráfico. Expresa relaciones utilizando herramientas matemáticas.
Contenido	Funciones y gráficas.

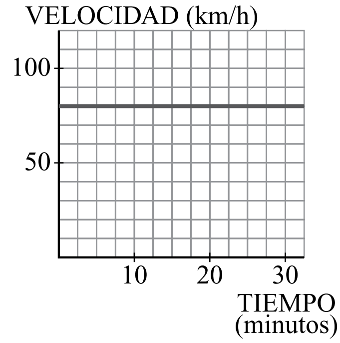
Niveles de puntuación:

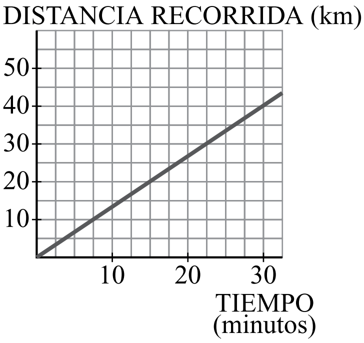
3. La solución correcta es:

a) La velocidad del tractor es de 40 km/h.
En media hora recorre 20 km.

b) $D = 40 \cdot t$

c) En 30 minutos recorre 40 kilómetros.





2. Responde a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

14 NOTAS

Competencia	Representar. Pensar y razonar.
Elemento de competencia	Interpreta información presentada en lenguaje gráfico. Aplica los conceptos matemáticos que requiere la situación.
Contenido	Gráficas estadísticas. Relaciones de proporcionalidad. Porcentajes.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) La nota más alta ha sido 10, y la más baja, 1,5.

b) La mediana de la distribución es 5,5.

c) La mitad de los alumnos (es decir, 16) han sacado más de 5,5.

d) El 75% de los alumnos han sacado menos de 6,2.

e) Para estar dentro del 25% más alto, hay que tener más de 6,2.

2. Responde correctamente a cuatro de las cuestiones.

1. Responde correctamente a tres de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

15 NÚMERO DE HIJOS

Competencia	Comunicar. Representar.
Elemento de competencia	Estructura la información para hacerla más accesible. Aplica los procedimientos matemáticos que requiere la situación.
Contenido	Tablas de frecuencias. Parámetros estadísticos.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

Procedimiento previo: construcción de la tabla de frecuencias

Número de hijos (*x*)	0	1	2	3	4	5	Más de 5	Total
Frecuencia (*f*)	13	18	10	5	3	1	0	50
$f \cdot x$	0	18	20	15	12	5	0	70

a) La media de hijos por familia es de 70/50 = 1,4.

b) La moda es 1.

c) La mediana es 1.

2. Responde a la primera cuestión y a otra más.

1. Responde solo a la primera cuestión. Responde solo a las dos últimas cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

16 DEPÓSITOS

Competencia	Pensar y razonar. Modelizar.
Elemento de competencia	Interpreta el lenguaje gráfico. Traduce una situación a un modelo matemático. Aplica los conceptos y procedimientos matemáticos que requiere la situación.
Contenido	Volumen de los cuerpos. Medida de capacidades.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Volumen del depósito esférico:

$4 \cdot \pi \cdot 15^3/3 = 14\,130 \text{ m}^3$

Volumen del depósito cilíndrico:

$\pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 14\,130 \text{ m}^3$

Los dos depósitos tienen la misma capacidad.

b) 14 130 m^3 · 2 = 28 260 m^3 =
= 28 260 000 litros

Entre ambos depósitos pueden almacenar 28,26 millones de litros.

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las preguntas.

0. En cualquier otro caso.

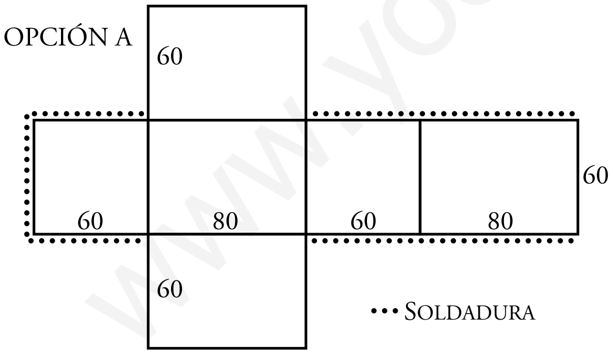
17 CORTAR, DOBLAR Y SOLDAR

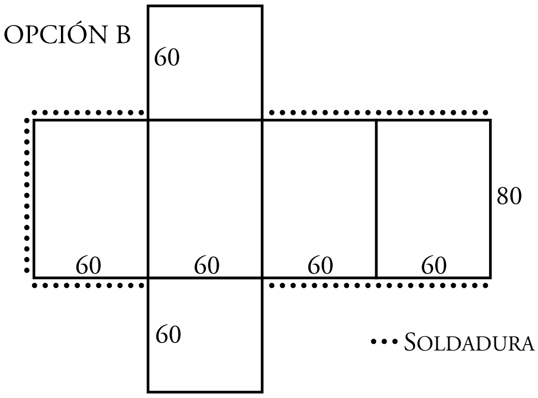
Competencia	Pensar y razonar. Plantear y resolver problemas. Comunicar.
Elemento de competencia	Interpreta y utiliza el lenguaje gráfico. Encadena procesos lógicos. Traduce una situación a un modelo matemático. Aplica los conceptos y procedimientos matemáticos que requiere la situación.
Contenido	Superficie de los cuerpos. Relaciones longitud-superficie.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

Procedimiento previo: Se estudian dos formas de cortar la chapa:





a) La superficie del depósito es:

$S = S_{LATERAL} + S_{SUELO} + S_{TECHO} = (80 + 60 +$
$+ 80 + 60) \cdot 60 + 2 \cdot 80 \cdot 60 =$
$= 26\,400 \text{ cm}^2 = 2{,}64 \text{ m}^2$

El coste del material es:

$C_m = 2{,}64 \cdot 38{,}5 = 101{,}64$ €

b) La longitud de la soldadura es:

Opción A → (60 + 60 + 80) · 2 + 60 =
= 460 cm = 4,60 m

Opción B → (60 + 60 + 60) · 2 + 80 =
= 440 cm = 4,40 m

Nos quedamos, por tanto, con la opción B.

El coste de la soldadura es:

$C_s = 4{,}40 \cdot 23{,}60 = 103{,}84$ €

c) Coste sin IVA = 101,64 + 103,84 =
= 205,48 €

Coste con IVA = 205,48 · 1,18 =
= 242,47 €

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las preguntas.

0. En cualquier otro caso.

Tareas competenciales para preparar las pruebas de diagnóstico

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 BOTES DE PINTURA

Una fábrica de pintura asigna un código a cada bote que sale de la cadena de producción. El código termina en un número de orden que va aumentando de uno en uno a medida que se van etiquetando los sucesivos botes. Automáticamente, la cadena somete a un control de calidad a todos los botes cuyo código termina en cero.

A continuación, la mercancía se envasa en cajas de 12 botes y pasa al almacén, lista para su distribución comercial.

a) Escribe los códigos de los tres primeros botes que se someterán al control de calidad después del que lleva el código AD45NH00684.

b) Si el código anterior corresponde al bote que completó una caja, escribe los códigos de los botes sometidos al control de calidad en las tres cajas siguientes.

c) ¿Cuántos botes de una misma caja pueden sufrir el control de calidad?

d) ¿Qué tanto por ciento de las cajas contienen dos botes pasados por el control de calidad?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja, elegida al azar, contenga dos botes que hayan sido controlados?

Nombre y apellidos: ....

2 EN LA PESCADERÍA

Un cliente entra en la pescadería, espera su turno y pide:

– Un kilo de lenguados, por favor.

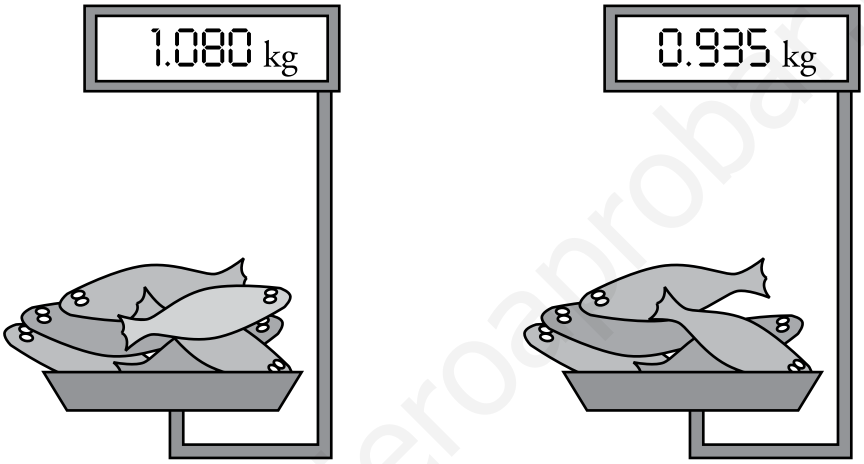
– Al instante…

– Ya está. Son seis piezas, pero se pasan 80 gramos… que se ponen… en 13,50 €. ¿Le quito uno?

– Sí, por favor.

– Bien. Ahora, con uno menos, son 935 gramos. ¿Está bien?

– Estupendo. Póngamelos. ¿Cuánto le debo?



a) El pescadero colocó seis lenguados en la balanza y después retiró uno. Razona si la pieza retirada era de las mayores o de las menores entre las seis que colocó.

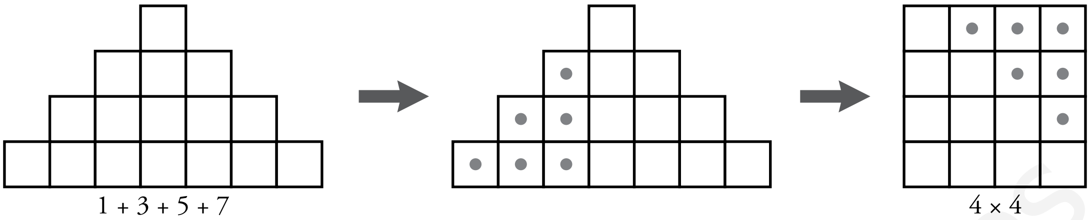
b) ¿A cómo estaba el kilo de lenguado?

c) ¿Cuánto deberá pagar el cliente por el pedido que se lleva?

Nombre y apellidos: ....

3 SUMA DE IMPARES HASTA UNO DADO

Observa, con ayuda de la ilustración, el procedimiento seguido para sumar los números impares hasta el 7:



$$1 + 3 + 5 + 7 = 4 \cdot 4 = 4^2 = 16$$

a) Calcula, por el mismo método, la suma de los números impares hasta el 9.

b) Experimenta con otras sumas de los primeros números impares hasta uno dado, y completa la tabla:

Suma de los primeros impares…							
hasta el 1	hasta el 3	hasta el 5	hasta el 7	hasta el 9	hasta el 11	hasta el 13	hasta el 15
1	4		16				

c) Si llamamos k a un número impar cualquiera, ¿cuál de las siguientes expresiones sirve para calcular la suma de los números impares hasta k?

$$S = k^2 \qquad S = (k-1)^2 \qquad S = \frac{(k+1)^2}{2} \qquad S = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$$

d) Utiliza la fórmula que has elegido para calcular la suma de los primeros números impares hasta el 99.

Nombre y apellidos: ....

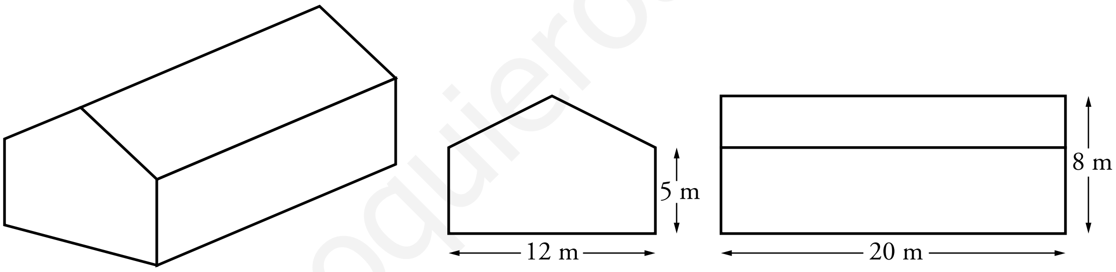
4 LOCAL CLIMATIZADO

Un distribuidor de calefacción y aire acondicionado ofrece distintos modelos de bomba de calor, en función del tamaño del local que se vaya a climatizar, según esta tabla:

Modelo	Potencia para volumen del local	Precio sin IVA
A	Hasta 200 m^3	700 €
B	Hasta 400 m^3	1350 €
C	Hasta 650 m^3	1900 €
D	Hasta 850 m^3	2800 €

En los locales más grandes se instalan dos o más aparatos, distribuidos estratégicamente para el reparto del aire frío/caliente.

Haz un estudio del modelo, o modelos más adecuados que se deberían colocar en la nave-taller que ves en la ilustración, atendiendo a sus dimensiones, a la potencia y al precio de los distintos modelos, y teniendo en cuenta que el técnico instalador cobra una tarifa de 100 € por aparato instalado (calcula los precios sin IVA y con IVA, que es un 18%).



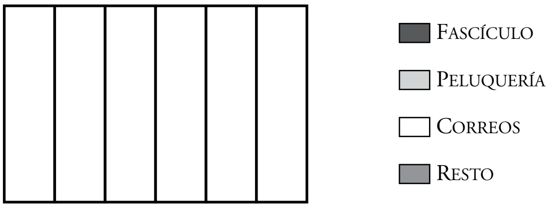
(Nota: a igualdad de coste, se elige, lógicamente, la opción que ofrece la potencia más holgada).

Nombre y apellidos: ....

5 TRES GASTOS

Don Andrés salió de su casa y compró en el quiosco de la esquina un fascículo coleccionable, en el que gastó la sexta parte del dinero que tenía. Después, fue a la peluquería, donde dejó, por cortarse el pelo, dos quintas partes del dinero con el que entró. Por último, fue a Correos a mandar un paquete, y por el envío pagó la tercera parte de lo que le quedaba. Al salir de Correos, aún tenía 10 euros.

a) Representa en el gráfico los distintos gastos de don Andrés.



b) ¿Qué fracción del total gastó en la peluquería?

c) ¿Cuánto dinero tenía al salir de casa?

6 DEPÓSITO CON GRIFO Y DESAGÜE

Una vivienda se abastece de agua desde un depósito colocado en la azotea, que tiene una capacidad de 1 350 litros.

El depósito dispone de una entrada de agua que aporta un caudal de medio litro por segundo, y se abre automáticamente cada vez que el nivel baja.

La tubería de distribución evacua del depósito un máximo de tres cuartos de litro por segundo.

a) ¿Cuánto tardaría en llenarse el depósito en caso de que, por una avería, se hubiera vaciado?

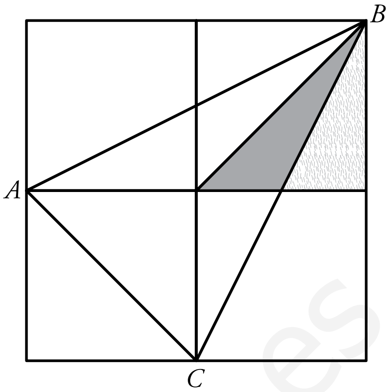
b) ¿Cuánto tardaría en vaciarse, en un momento de máxima demanda, si se estropeara la válvula de entrada de agua?

c) ¿Cuánto duraría el abastecimiento si todo funcionara correctamente y la demanda máxima se mantuviera de forma prolongada?

Nombre y apellidos: ....

7 TRIÁNGULOS

Observa este diseño, construido sobre cuatro cuadrados iguales, con una superficie total de 1 600 cm^2:



Calcula:

a) El área y el perímetro del triángulo más oscuro.

b) El área y el perímetro del triángulo rayado.

c) El área y el perímetro del triángulo *ABC*.

8 VENTA DE CAFÉ

Una cadena de supermercados ofrece su propia marca de café en dos tipos de paquetes: el pequeño, de 300 gramos, y el grande, de 800 gramos.

El pequeño va dirigido al consumo familiar, y cuesta 2,4 €.

El grande va dirigido a cafeterías y restaurantes, y sale (por kilo) un 10% más barato.

a) ¿A cuánto sale el kilo en los paquetes pequeños?

b) ¿Y en los paquetes grandes?

c) ¿Cuánto cuesta un paquete grande?

d) Una cafetería ha comprado 30 paquetes grandes. ¿Cuántos paquetes podría comprar, con el mismo gasto, de otra marca de café que es un 20% más cara y se comercializa en paquetes de medio kilo?

Nombre y apellidos: ....

9 DISCRIMINACIÓN EN LOS SUELDOS

En una empresa del sector del metal, anclada en el pasado, el sueldo medio de una mujer y el de un hombre de la misma categoría están en la relación de 5 a 6.

a) ¿Cuánto gana un hombre, oficial de primera, si el sueldo de una mujer de esa categoría es de 1 600 € al mes?

b) ¿En qué porcentaje habría que subirle el sueldo a una mujer para que ganara lo mismo que un hombre?

c) ¿Qué porcentaje del sueldo de un hombre equivale al de una mujer?

10 MONEDEROS

Roberto lleva en su monedero tres euros más que Rosa.

Ana lleva el doble que Rosa.

Óscar tiene tanto como Ana y Roberto juntos.

Victoria tiene un euro menos que Ana.

Teniendo todo eso en cuenta, y llamando x al capital de Rosa:

a) Completa la tabla:

Roberto tiene	Rosa tiene	Ana tiene	Óscar tiene	Victoria tiene	Entre todos tienen
	x				

b) Sabiendo que entre todos tienen 23 €, calcula cuánto tiene cada uno.

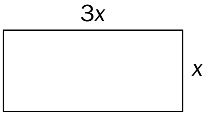
Nombre y apellidos: ....

11 DIMENSIONES DE UNA FINCA

Hemos pedido un presupuesto para vallar una finca rectangular que es el triple de ancha que de larga.

Nos han pedido 700 euros por la instalación de una valla de alambrada que se vende por rollos y sale, ya instalada, a 3,5 € el metro.

a) Llamando x a la anchura de la finca, expresa en función de x su perímetro.



Ancho → x
Largo → 3

⟹ Perímetro:

b) Expresa con una ecuación la siguiente igualdad:

(PERÍMETRO FINCA) · (COSTE DEL METRO DE VALLA) = PRESUPUESTO TOTAL

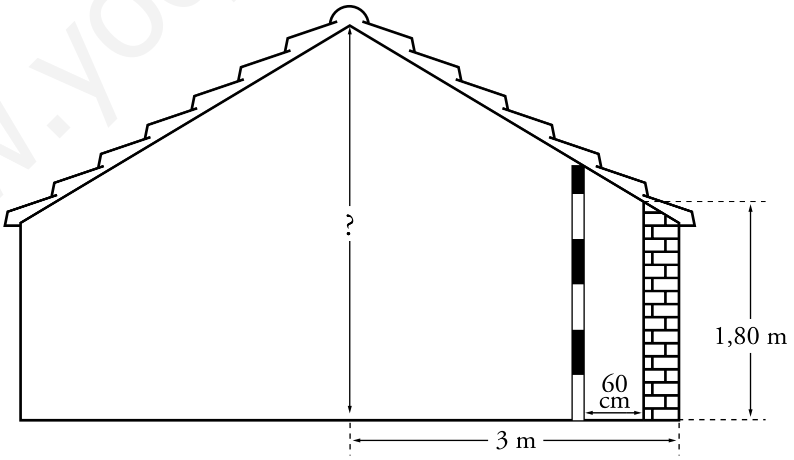
c) Resuelve la ecuación anterior y calcula las dimensiones de la finca.

12 ALTURA DE LA BUHARDILLA

Andrea tiene su habitación en la buhardilla. La eligió porque es la más independiente de la casa.

Ahora quiere medir la altura del techo en el punto más alto, pero no tiene escalera.

Se le ha ocurrido colocar un listón vertical, de dos metros de longitud, e ir desplazándolo hasta topar con el techo, como ves en la ilustración.



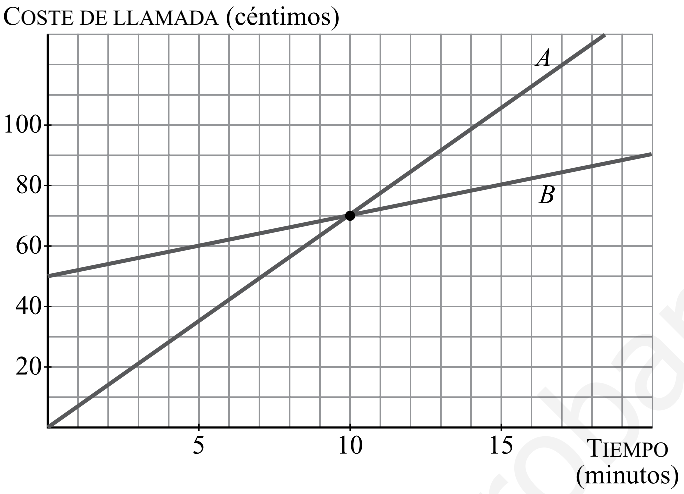
(Nota: la ilustración es solo un esquema gráfico, que ayuda a comprender el enunciado y aporta datos, pero no guarda las proporciones).

Con los datos de la ilustración, calcula la altura máxima del techo de la habitación de Andrea.

Nombre y apellidos: ....

13 CUOTAS TELEFÓNICAS

La gráfica representa el coste de las llamadas telefónicas, según el tiempo transcurrido, en dos compañías diferentes, *A* y *B*.



a) Observa la gráfica y contesta:

- ¿Cuál de las dos compañías tiene una cuota por establecimiento de llamada?
- Aparte de dicha cuota, ¿cuánto cuesta el minuto en cada operadora?
- ¿Cuánto cuesta una llamada de 5 minutos en cada compañía? ¿Y una llamada de 15 minutos?

b) Compara y contesta:

- ¿Cuánto debe durar una llamada para que el coste sea el mismo en ambas operadoras?
- ¿Con qué operadora interesa contratar, si el usuario suele hacer llamadas de larga duración?

c) Exprésate:

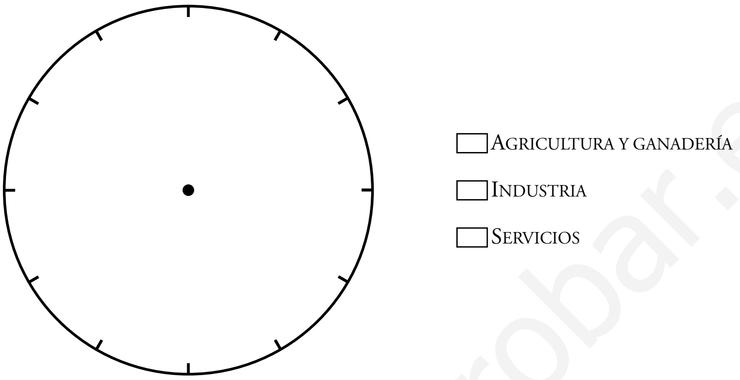
- Expresa con una ecuación el coste de cada llamada en función del tiempo transcurrido.
- Haz una descripción de los costes, comparando los de ambas empresas.

Nombre y apellidos: ....

14 ACTIVIDADES EN LA ALDEA

Las dos terceras partes de las familias de una aldea se dedican a la agricultura y a la ganadería; la cuarta parte trabaja en la industria, y el resto, en el sector de los servicios.

a) Representa en un gráfico de sectores la distribución de la población según su actividad económica.



b) ¿Qué fracción de la población atiende el sector servicios?

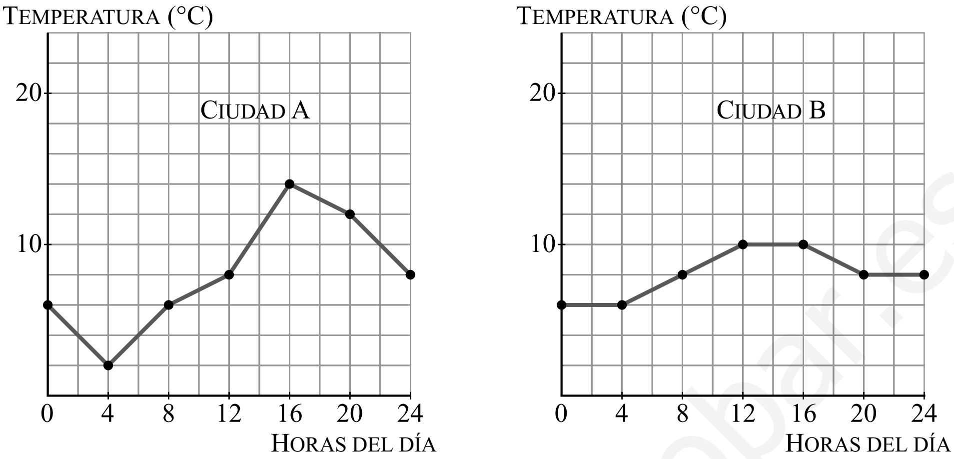
c) ¿Qué porcentaje de la población se dedica a cada una de las actividades mencionadas?

d) Sabiendo que en la aldea hay 240 familias, ¿cuántas viven de cada actividad?

Nombre y apellidos: ....

15 TEMPERATURAS MEDIAS

En las gráficas puedes observar las siete mediciones de la temperatura tomadas a lo largo de un día, en dos ciudades diferentes.



a) Observando las gráficas:

- ¿En cuál de las dos ciudades baja más la temperatura?
- ¿En cuál de las dos son más bruscas las variaciones de temperatura?
- ¿Cuál de las dos tiene un clima más suave?

b) Calcula:

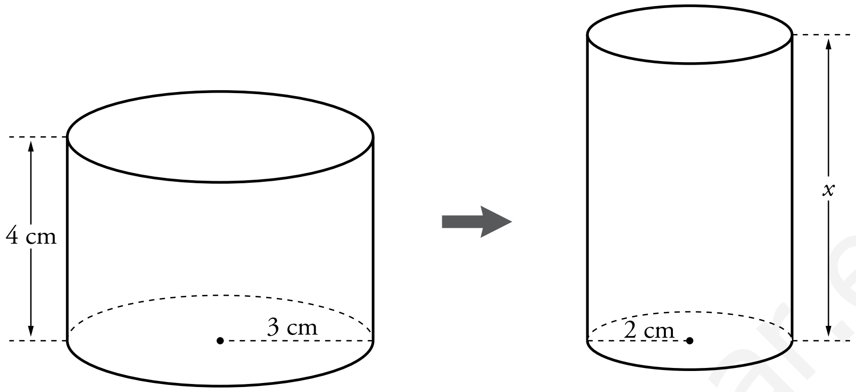
- La temperatura media de cada ciudad.
- La diferencia entre cada medición y su media.
- La desviación media.

c) Comprueba si se cumplen tus estimaciones y razona, a la vista de los datos que tienes, si son válidas.

Nombre y apellidos: ....

16 CILINDROS DE PLASTILINA

Se ha remodelado un cilindro de plastilina, de 3 cm de radio y 4 cm de altura, para formar otro cilindro de 2 cm de radio.

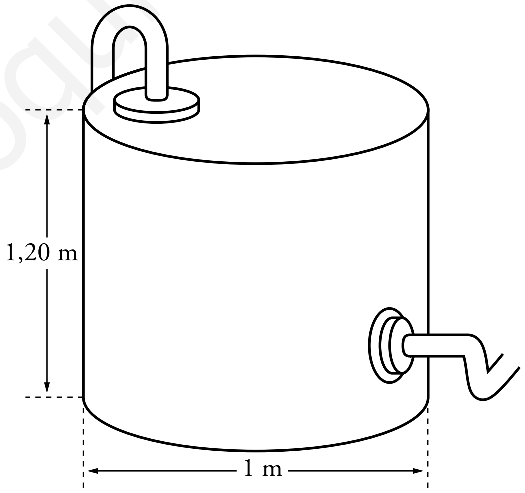


a) ¿Cuántos centímetros cúbicos de plastilina se han remodelado?

b) ¿Qué altura tiene el cilindro resultante?

17 DEPÓSITO CILÍNDRICO

Una bodega encarga a un taller metalúrgico la construcción de un depósito de chapa inoxidable, para el almacenaje de vino. El depósito tendrá la forma y dimensiones que puedes apreciar en la figura.



Sabiendo que el taller cobra, con el producto terminado, 38,50 € por metro cuadrado de chapa y 23,60 € por metro de soldadura, calcula:

a) El coste del material empleado para la construcción del depósito.

b) El coste de la soldadura.

c) El importe de la factura, cargando el 18% de IVA.

Pautas de corrección

1 BOTES DE PINTURA

Competencia	Comunicar. Representar. Razonar.
Elemento de competencia	Codifica y descodifica información. Ensaya, observa y saca conclusiones. Generaliza resultados.
Contenido	Los números como códigos. Porcentajes. Probabilidad.

Niveles de puntuación:

3. La respuesta correcta es:

a) Los códigos de los tres primeros botes sometidos al control de calidad después del que se indica son: AD45NH00690 – AD45NH00700 – AD45NH00710

b) Los botes controlados en las tres cajas siguientes son:

Primera: AD45NH00690

Segunda: AD45NH00700

Tercera: AD45NH00710 – AD45NH00720

c) En una misma caja puede haber uno o dos botes que hayan pasado el control de calidad.

d) De cada cinco cajas consecutivas que salen de la cadena de producción, una contiene dos botes sometidos al control de calidad. Es decir, en un 20% de las cajas se controlan dos botes.

e) La probabilidad de que una caja, elegida al azar, contenga dos botes sometidos a control es una entre cinco (P = 1/5).

2. Responde correctamente a cuatro de las cuestiones planteadas.

1. Responde correctamente a tres de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

2 EN LA PESCADERÍA

Competencia	Plantear y resolver problemas. Pensar y razonar. Argumentar.
Elemento de competencia	Aplica modelos matemáticos a situaciones reales. Relaciona distintos contenidos matemáticos para lograr un objetivo.
Contenido	Cantidad. Unidades de peso del S.M.D. Relaciones. Operaciones con números decimales.

Niveles de puntuación:

3. La respuesta correcta es:

a) El peso medio de los seis lenguados era de 1 080 : 6 = 180 gramos.

El lenguado que retiró pesaba 1 080 – 935 = 145 gramos, que está por debajo de la media.

Por tanto, el lenguado retirado era "de los pequeños".

b) 13,50 : 1,080 = 12,50

El kilo de lenguado costaba 12,50 euros.

c) 12,50 · 0,935 = 11,6875

El cliente deberá pagar 11,69 euros.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

3 SUMA DE IMPARES HASTA UNO DADO

Competencia	Interpretar y comunicar. Generalizar. Modelar.
Elemento de competencia	Interpreta lenguaje gráfico. Detecta regularidades y relaciones, y las expresa. Traduce enunciados verbales al lenguaje simbólico.
Contenido	Cantidad. Números naturales. Lenguaje algebraico.

Niveles de puntuación:

3. La respuesta correcta es:

a) La suma de los impares hasta el 9 tiene "cinco sumandos":

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2 = 25$$

b)

Suma de los primeros impares...							
hasta el 1	hasta el 3	hasta el 5	hasta el 7	hasta el 9	hasta el 11	hasta el 13	hasta el 15
1	4	9	16	25	36	49	64

c) El impar k ocupa el lugar $(k + 1)/2$ en la secuencia de los impares y la suma de los impares hasta k es:

$$S = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$$

d) La suma de los impares hasta el 99 es

$$S = \left(\frac{99+1}{2}\right)^2 = 50^2 = 2\,500$$

Pautas de corrección

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

4 LOCAL CLIMATIZADO

Competencia	Pensar y razonar. Argumentar. Resolver problemas.
Elemento de competencia	Encadena procesos lógicos. Interpreta un enunciado según una estructura matemática. Diferencia opciones de cara a un objetivo.
Contenido	Volumen de los cuerpos geométricos. Operaciones con números decimales.

Niveles de puntuación:

3. La respuesta correcta es:

- Volumen de la nave:

$$V = 12 \cdot 5 + \left(\frac{12 \cdot 3}{2}\right) \cdot 20 = 1\,560 \text{ m}^3$$

- Opciones para la nave de 1 560 m^3:

Modelo	N.º de aparatos	Volumen en m^3	Coste (sin IVA)	Coste (con IVA)
A	8	200 · 8 = 1600	6400 €	7552 €
B	4	400 · 4 = 1600	5800 €	6844 €
C	3	650 · 3 = 1950	6000 €	7080 €
D	2	850 · 2 = 1700	5800 €	6844 €

- Conclusión: La opción más adecuada es colocar dos aparatos del modelo D.

2. Desarrolla correctamente el proceso, pero comete algún error de cálculo.

1. Calcula correctamente el volumen de la nave, pero no acierta a elegir la opción más adecuada.

0. En cualquier otro caso.

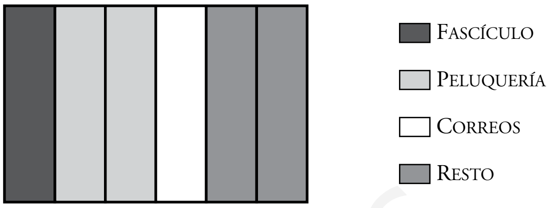
5 TRES GASTOS

Competencia	Pensar y razonar. Resolver problemas. Comunicar.
Elemento de competencia	Aplica a una situación problemática los conocimientos matemáticos que requiere. Utiliza recursos gráficos como apoyo al razonamiento.
Contenido	Fracciones.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Los distintos gastos de don Andrés son:



b) En la peluquería gastó 2/6 o, lo que es lo mismo, 1/3 del total.

c) Le quedan 2/6 = 1/3 del total.

1/3 del total son 10 euros.

3/3 del total son 30 euros.

Al salir de casa tenía 30 euros.

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

6 DEPÓSITO CON GRIFO Y DESAGÜE

Competencia	Pensar y razonar. Resolver problemas.
Elemento de competencia	Aplica las herramientas adecuadas a una situación. Calcula.
Contenido	Relaciones entre magnitudes. Sistema decimal y sistema sexagesimal.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) $1\,350 : \left(\frac{1}{2}\right) = 1\,350 \cdot 2 = 2\,700 \text{ s} =$

$= (2\,700 : 60) \text{ min} = 45 \text{ min}$

El depósito tardaría en llenarse tres cuartos de hora.

b) $1\,350 : \left(\frac{3}{4}\right) = (1\,350 \cdot 4) : 3 = 1\,800 \text{ s} =$

$= (1\,800 : 60) \text{ min} = 30 \text{ min}$

El depósito tardaría en vaciarse media hora.

c) El depósito pierde un cuarto de litro por segundo (entra medio litro y salen tres cuartos de litro).

Pautas de corrección

$$1350 : \left(\frac{1}{4}\right) = 1350 \cdot 4 = 5400 \text{ s} =$$

$$= (5400 : 60) \text{ min} = 90 \text{ min} = 1 \text{ h } 30 \text{ min}$$

El abastecimiento duraría hora y media.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

7 TRIÁNGULOS

Competencia	Pensar y razonar. Plantear y resolver problemas. Comunicar.
Elemento de competencia	Aplica a una situación problemática los conocimientos matemáticos que requiere. Utiliza recursos gráficos como apoyo al razonamiento. Calcula.
Contenido	Estructuración del espacio. Medida de superficies. Operaciones con números decimales.

Niveles de puntuación:

3. La respuesta correcta es:

Cálculos previos:

- Área de cada uno de los cuatro cuadrados → 1600 : 4 = 400 cm^2
- Lado de cada uno de los cuatro cuadrados → l = 20 cm.
- Diagonal de uno de esos cuadrados → $d = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28{,}28$ cm
- $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{40^2 + 20^2} = 44{,}72$ cm.

a) El área del triángulo más oscuro es la cuarta parte del área de uno de los cuadrados (puesto que la base es $l/2$, y la altura, l) → 400 : 4 = 100 cm^2

Perímetro del triángulo más oscuro:

$d + l/2 + \overline{BC}/2 = 28{,}28 + 10 + 22{,}36 =$ $= 60{,}64$ cm.

b) Área del triángulo rayado = Área del triángulo más oscuro = 100 cm^2, ya que tienen las mismas base y altura.

Perímetro del triángulo rayado:

$\overline{BC}/2 + l/2 + l = 22{,}36 + 10 + 20 =$ $= 52{,}36$ cm.

c) El triángulo ABC se compone de dos triángulos como el más oscuro, de otros dos como el rayado y de medio cuadrado.

Área del triángulo $ABC = 2 \cdot 100 +$ $+ 2 \cdot 100 + 200 = 600$ cm^2

Perímetro del triángulo $ABC = \overline{AB} = \overline{BC} +$ $+ d = 44{,}72 + 44{,}72 + 28{,}28 = 117{,}72$ cm

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

8 VENTA DE CAFÉ

Competencia	Argumentar. Plantear y resolver problemas. Comunicar.
Elemento de competencia	Traduce una situación a una estructura matemática. Aplica los conocimientos matemáticos adecuados para resolver una situación. Crea y expresa argumentos.
Contenido	Relaciones de proporcionalidad. Cálculo con números decimales.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) 300 gramos cuestan 2,4 €; 100 gramos cuestan 2,4 : 3 = 0,8 €; 1000 gramos cuestan 0,8 · 10 = 8 €.

En los paquetes pequeños, el café sale a 8 €/kg.

b) En los paquetes grandes, el café sale a 8 · 1,10 = 7,20 €/kg.

c) Un paquete grande cuesta 7,20 · 0,8 = = 5,76 €.

d) Coste de la compra: 30 · 0,8 · 7,20 = = 172,80 €.

Precio del café de la nueva marca:
7,20 · 1,20 = 8,64 €

Peso de café de la nueva marca, que se puede comprar con el mismo gasto:
(30 · 0.8 · 7,20) : (7,2 · 1,2) =
= (30 · 0,8) : 1,2 = 20 kg

Se pueden comprar 20 kilos, que son 40 paquetes.

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Responde correctamente a tres de las cuestiones.

1. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

9 DISCRIMINACIÓN EN LOS SUELDOS

Competencia	Pensar y razonar. Comunicar. Modelizar.
Elemento de competencia	Encadena procesos lógicos. Traduce una situación a una estructura matemática. Expresa conclusiones utilizando recursos lingüísticos y matemáticos.
Contenido	Relaciones de proporcionalidad. Porcentajes.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Sueldo de un oficial de primera, hombre:

$$\frac{5}{6} = \frac{1600}{x} \rightarrow x = \frac{1\,600 \cdot 6}{5} = 1\,920$$

El sueldo del oficial es de 1 920 €.

b) Por cada 5 que gana una mujer, habría que subirle 1, para llegar a los 6 que gana el hombre. Por cada 100 = 5 · 20, habría que subirle 1 · 20 = 20.

O bien:

$$\frac{5}{1} = \frac{100}{x} \rightarrow x = \frac{1\,000 \cdot 1}{5} = 20$$

Para que una mujer gane lo mismo que un hombre, habrá que subirle el sueldo un 20%.

c) ¿Qué porcentaje es 5 de 6?

$$\frac{6}{5} = \frac{160}{x} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 5}{6} = 83{,}33$$

El sueldo de una mujer es el 83,33% del sueldo de un hombre.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

10 MONEDEROS

Competencia	Comunicar. Utilizar el lenguaje simbólico y formal.
Elemento de competencia	Traduce un contexto a una estructura matemática. Traduce del lenguaje natural al lenguaje simbólico, y viceversa.
Contenido	Lenguaje algebraico. Resolución de ecuaciones.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Llamando x a los haberes de Rosa:

Roberto tiene	Rosa tiene	Ana tiene	Óscar tiene	Victoria tiene	Entre todos tienen
$x + 3$	x	$2x$	$3x + 3$	$2x - 1$	$9x + 5$

b) Sabiendo que entre todos tienen 23, podemos calcular cuánto vale x.

$9x + 5 = 23 \rightarrow 9x = 18 \rightarrow x = 2$

Entre todos tienen **23**	Roberto tiene	Rosa tiene	Ana tiene	Óscar tiene	Victoria tiene
$9x + 5 = 23$ $x = 2$	2 + 3 = **5**	**2**	2 · 2 = **4**	3 · 2 + 3 = = **9**	2 · 2 – 1 = = **3**

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

11 DIMENSIONES DE UNA FINCA

Competencia	Utilizar el lenguaje simbólico.
Elemento de competencia	Interpreta el lenguaje simbólico. Traduce del lenguaje natural al lenguaje simbólico. Traduce un contexto a una estructura matemática.
Contenido	Lenguaje algebraico. Resolución de ecuaciones.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Perímetro → $x + 3x + x + 3x$

b) Perímetro finca → $x + 3x + x + 3x$

Coste del metro de valla → 3,5 €

Presupuesto total → 700 €

Ecuación:

$(x + 3x + x + 3x) \cdot 3{,}5 = 700$

c) $(x + 3x + x + 3x) \cdot 3{,}5 = 700 \rightarrow 8x \cdot 3{,}5 =$
$= 700 \rightarrow 28x = 700 \rightarrow x = 700 : 28 \rightarrow$
$\rightarrow x = 25$

Dimensiones de la valla:

Ancho → $x = 25$ m

Largo → $3x = 3 \cdot 25 = 75$ m

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

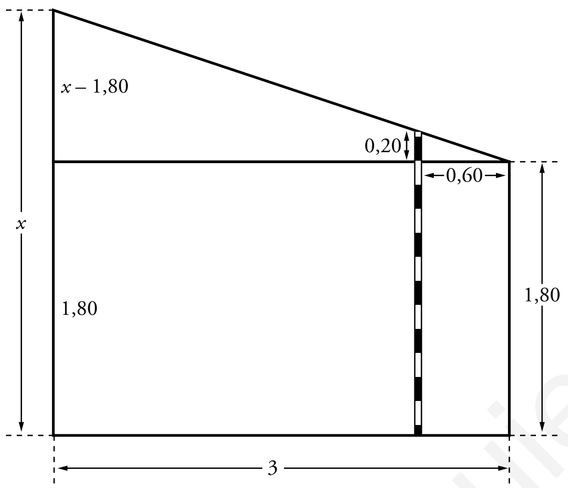
0. En cualquier otro caso.

12 ALTURA DE LA BUHARDILLA

Competencia	Representar. Comunicar.
Elemento de competencia	Aplica modelos matemáticos a situaciones reales. Interpreta el lenguaje gráfico. Entiende y utiliza los conceptos matemáticos que requiere la situación.
Contenido	Relaciones de proporcionalidad geométrica.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:



$$\frac{x-1,80}{3}=\frac{2-1,80}{0,60}\to x-1,80=$$

$$=\frac{3\cdot 0,20}{0,6}\to x-1,8=1\to$$

$$\to x=2,80$$

La altura máxima del techo es de 2,80 metros.

2. Desarrolla correctamente el proceso, pero comete algún error en los cálculos.

1. Da las respuestas correctas sin justificarlas.

0. En cualquier otro caso.

13 CUOTAS TELEFÓNICAS

Competencia	Representar. Comunicar.
Elemento de competencia	Interpreta el lenguaje gráfico. Expresa relaciones utilizando herramientas matemáticas.
Contenido	Funciones y gráficas.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Observando la gráfica vemos que:

- La compañía B cobra 50 céntimos por establecimiento de llamada.
- Aparte de dicha cuota:
  – La compañía A cobra 70 céntimos por 10 minutos; es decir, 7 céntimos/min.
  – La compañía B cobra 70 – 50 = 20 céntimos por 10 minutos; es decir, 2 céntimos por minuto.
- Una llamada de 5 minutos cuesta:
  – A → 5 · 7 = 35 céntimos
  – B → 50 + 5 · 2 = 60 céntimos
  Una llamada de 15 minutos cuesta:
  – A → 15 · 7 = 105 cént. = 1,05 €
  – B → 50 + 15 · 2 = 80 cént.

b)
- Una llamada de 10 minutos cuesta lo mismo en ambas operadoras:
  – A → 10 · 7 = 70 céntimos
  – B → 50 + 10 · 2 = 70 céntimos
- Para llamadas de más de 10 minutos, es más barato utilizar la compañía B.

c)
- El coste de cada llamada se expresa así mediante ecuaciones:
  – Compañía A → $C = t \cdot 7$
  – Compañía B → $C = 50 + t \cdot 2$
- Descripción:
  – En las llamadas cortas, de menos de 10 minutos, es más barato utilizar la compañía A, porque no tiene tarifa inicial. Pero como el coste por minuto es más alto, cuanto mayor sea el tiempo, menor es la diferencia entre ambas operadoras.
  – En las llamadas de 10 minutos, el coste es el mismo en ambas compañías.
  – En las llamadas de más de 10 minutos, a pesar de la tarifa inicial de 50 céntimos, el coste es menor en la operadora B, debido a que el precio por minuto es sensiblemente inferior.

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Contesta correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

Pautas de corrección

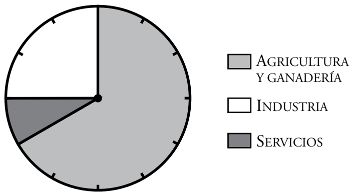
14 ACTIVIDADES EN LA ALDEA

Competencia	Representar. Pensar y razonar.
Elemento de competencia	Interpreta información dada en lenguaje gráfico. Aplica los conceptos matemáticos que requiere la situación. Representa información en distintos tipos de números.
Contenido	Gráficas estadísticas. Fracciones. Porcentajes.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Gráfico de sectores:



b) La agricultura, la ganadería y la industria recogen 2/3 + 1/4 = 11/12 de la población. El sector servicios recoge 1/12 de la población.

c) Porcentajes:

– Agricultura y ganadería → 2/3 → → (100 · 2) : 3 = 66,67%

– Industria → 1/4 → 100 : 4 = 25%

– Servicios → 100 – (66,67 + 25) = = 8,33%

d) Agricultura y ganadería → 2/3 de 240 = = (240 · 2) : 3 = 160 familias

Industria → 1/4 de 240 = 240 : 4 = 60 familias

Servicios → 240 – (160 + 60) = 20 familias (o también: 1/12 de 240 = = 240 : 12 = 20 familias)

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Responde correctamente a tres cuestiones.

1. Responde solo a dos de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

15 TEMPERATURAS MEDIAS

Competencia	Representar. Comunicar. Pensar y razonar.
Elemento de competencia	Interpreta información presentada en lenguaje gráfico. Aplica los conceptos y procedimientos matemáticos que requiere la situación. Expresa y justifica procesos y resultados.
Contenido	Gráficas y parámetros estadísticos.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Observando las gráficas:

- La temperatura baja más en la ciudad A.
- Las variaciones de temperatura son más bruscas en la ciudad A.
- La ciudad B tiene un clima más suave.

b) • Temperaturas medias:

A → (6 + 2+ 6 + 8 + 14 + 12 + 8) : 7 = = 56 : 7 = 8 → 8 °C

B → (6 + 6 + 8 + 10 + 10 + 8 + 8) : 7 = = 56 : 7 = 8 → 8 °C

Ambas ciudades presentan la misma temperatura media.

- Diferencias entre cada medición y su media:

Ciudad A → 2 - 6 - 2 - 0 - 6 - 4 - 0

Ciudad B → 2 - 2 - 0 - 2 - 2 - 0 - 0

- La desviación media:

A → (2 + 6 + 2 + 0 + 6 + 4 + 0) : 7 = = 2,86

B → (2 + 2 + 0 + 2 + 2 + 0 + 0) : 7 = = 8 : 7 = 1,14

c) Las dos ciudades presentan la misma temperatura media. Sin embargo, la desviación media es mayor en la ciudad A. Esto indica que en A las temperaturas a lo largo del día se alejan más de la media, es decir, que las variaciones de temperatura son más bruscas.

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

Pautas de corrección

16 CILINDROS DE PLASTILINA

Competencia	Pensar y razonar. Plantear y resolver problemas.
Elemento de competencia	Interpreta el lenguaje gráfico. Encadena procesos lógicos. Traduce una situación a un modelo matemático. Utiliza el lenguaje simbólico.
Contenido	Volumen de los cuerpos. Ecuaciones.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Volumen = $\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 113{,}04$ cm^3

La plastilina utilizada ocupa un volumen de 113,04 cm^3.

b) $\pi \cdot 2^2 \cdot x = 113{,}04$
$12{,}56 \cdot x = 113{,}04 \rightarrow x = 9$

El nuevo cilindro tiene una altura de 9 cm.

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Desarrolla correctamente el proceso, pero comete algún error en los cálculos.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

17 DEPÓSITO CILÍNDRICO

Competencia	Pensar y razonar. Plantear y resolver problemas.
Elemento de competencia	Interpreta el lenguaje gráfico. Encadena procesos lógicos. Aplica los conceptos y procedimientos matemáticos que requiere la situación problemática.
Contenido	Superficie de los cuerpos. Relaciones longitud-volumen. Operaciones con números decimales.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Superficie del depósito:
$S = \pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}20 =$
$= 5{,}338$ m^2

Coste del material:
5,338 · 38,5 = 205,51 €

b) Para la construcción del depósito es necesario soldar 1,20 m (lo correspondiente a la superficie lateral del cilindro), y después soldar las dos tapas o bases (longitud de dos circunferencias).

Longitud de la soldadura:
$l = 1{,}20 + 2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot 0{,}5) = 7{,}48$ m

Coste de la soldadura:
7,48 · 23,60 = 176,53 €

c) Importe de la factura sin IVA:
205,51 + 176,53 = 382,04 €

Importe de la factura con IVA:
382,04 · 1,18 = 450,8072 → 450,81 €

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Responde correctamente a dos cuestiones.

1. Responde solo a una de las preguntas.

0. En cualquier otro caso.

TAREA 4

Tareas competenciales para preparar las pruebas de diagnóstico

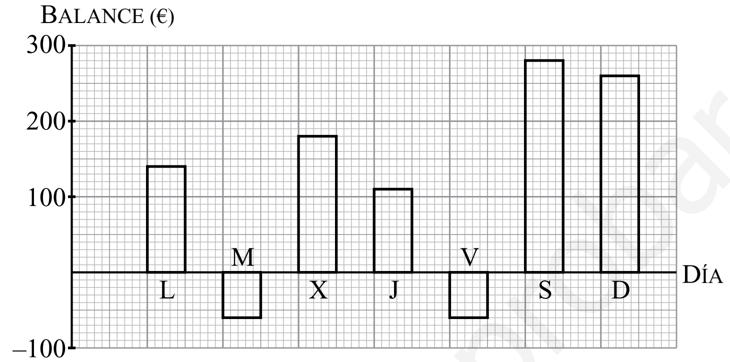
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

1 BALANCE SEMANAL

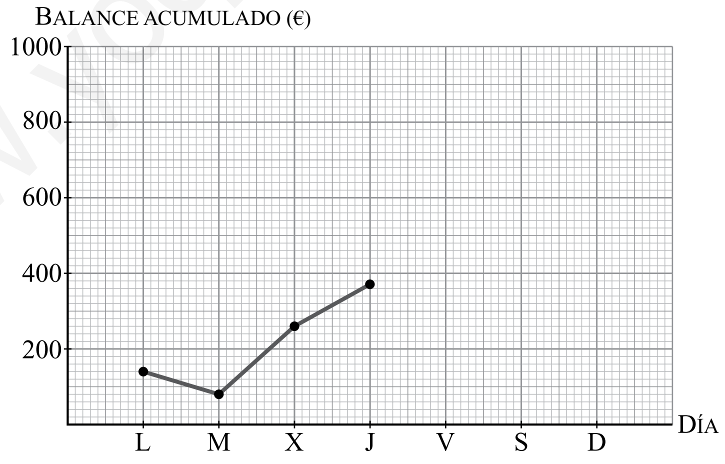
El gerente de una cafetería anota cada día, al cierre, el balance de la jornada (ingresos menos gastos del día).

Los resultados de la semana pasada se han representado en las columnas de esta gráfica:



a) ¿Cuál fue el mejor día de la semana? ¿Y el peor? Escribe, con números, el balance de cada uno de los siete días.

b) Completa la representación del balance acumulado desde el jueves hasta el domingo.



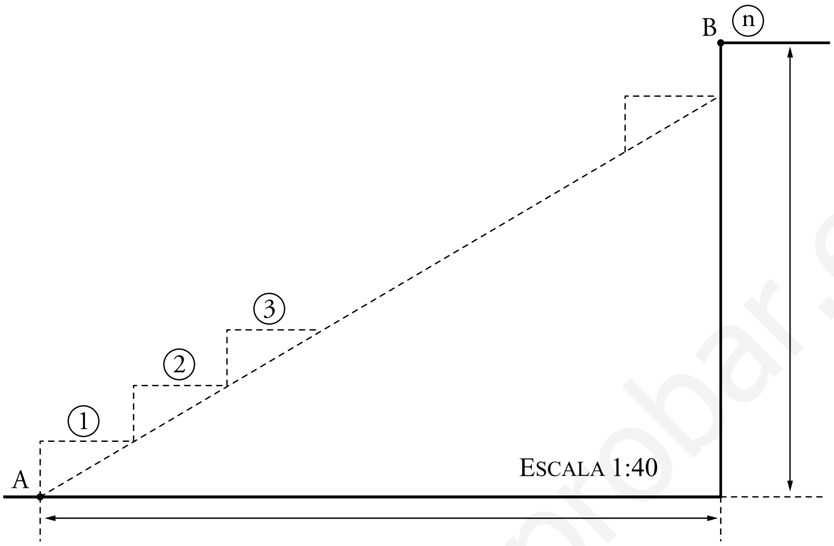
¿Cuál es el balance acumulado de toda la semana?

c) Calcula el balance medio diario en esa semana.

Nombre y apellidos: ....

2 TAMAÑO DE LOS ESCALONES

Un arquitecto debe diseñar una escalera, para acceder desde el punto A al punto B, según el siguiente plano:



El diseño debe cumplir la norma recomendada por cierta revista de arquitectura: una escalera es "cómoda" si todos sus peldaños son iguales y tienen unas dimensiones acordes con la siguiente tabla:

Escalones	Máxima	Mínima
ALTURA (*x*)	21 cm	17,5 cm
PROFUNDIDAD (*y*)	32 cm	26 cm

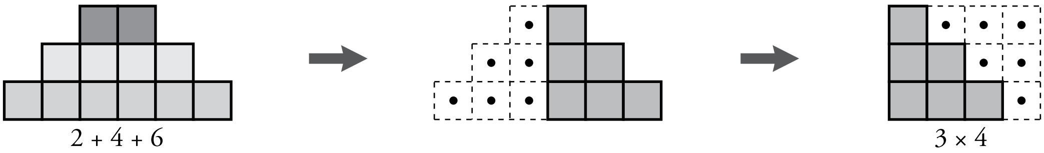
a) ¿Qué altura y qué profundidad debe salvar la escalera?

b) ¿Cuántos escalones debe tener, ateniéndose a la norma de comodidad?

Nombre y apellidos: ....

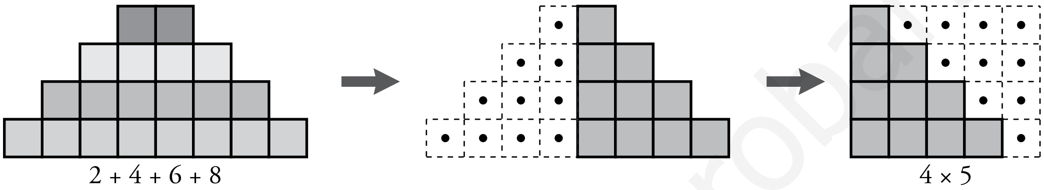
3 SUMA DE LOS *n* PRIMEROS NÚMEROS PARES

Observa cómo calculamos la suma de los tres primeros números pares:



$S_3 = 2 + 4 + 6 = 3 \cdot 4 = 12$

Y, aplicando el mismo procedimiento, calculamos, también, la suma de los cuatro primeros pares:



$S_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 4 \cdot 5 = 20$

a) Calcula, de la misma forma, la suma $S_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$

b) Calcula S_6, S_7, S_8, S_9, S_{15}.

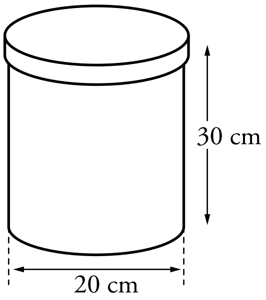
Escribe la fórmula para calcular la suma de los n primeros números pares S_n.

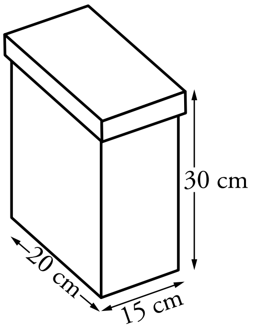
c) Utiliza la fórmula para calcular 2 + 4 + . . . + 100.

Nombre y apellidos: ....

4 RECIPIENTES

Un fabricante de jabones debe elegir entre dos envases para un nuevo detergente en polvo que va a lanzar al mercado:





Prescindiendo de criterios de estética, ha decidido optar por el que ofrezca una mejor relación capacidad-precio.

a) Calcula el volumen de cada envase.

b) Calcula la superficie de cada envase.

c) Estudia cuál de los dos le conviene, teniendo en cuenta que los costes de producción de ambos son similares y que su precio; por tanto, depende de la cantidad de cartón invertida en su fabricación.

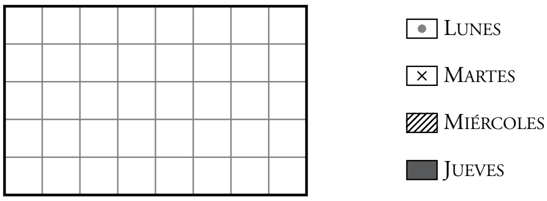
(Nota: se desprecia el reborde de las tapas, que no influye significativamente en el resultado final).

Nombre y apellidos: ....

5 AGUA PARA REGADÍO

Un hortelano, que llenó el domingo su pilón de riego, gastó el lunes medio pilón; el martes, la quinta parte de él; el miércoles, la octava parte, y el jueves gastó toda la que tenía.

a) Representa, en el gráfico, la parte gastada cada día.



b) ¿Qué fracción del pilón gastó el jueves?

c) Sabiendo que el miércoles por la noche aún le quedaban 14 000 litros de agua, ¿cuál es la capacidad total del pilón?

6 CONTRARRELOJ

Observa y completa la tabla que recoge los datos de algunos corredores en una carrera contrarreloj, organizada por un club de ciclismo aficionado:

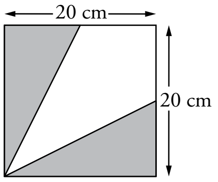
Corredor	Distancia	Hora de salida	Hora de llegada	Tiempo	Velocidad media (km/h)
A	55 km	12 h 23 min	14 h 13 min		
B	55 km	12 h 25 min		1 h 45 min	
C	55 km	12 h 27 min			27,5
D	55 km		14 h 09 min		33
E	55 km	12 h 31 min		2 h 5 min	

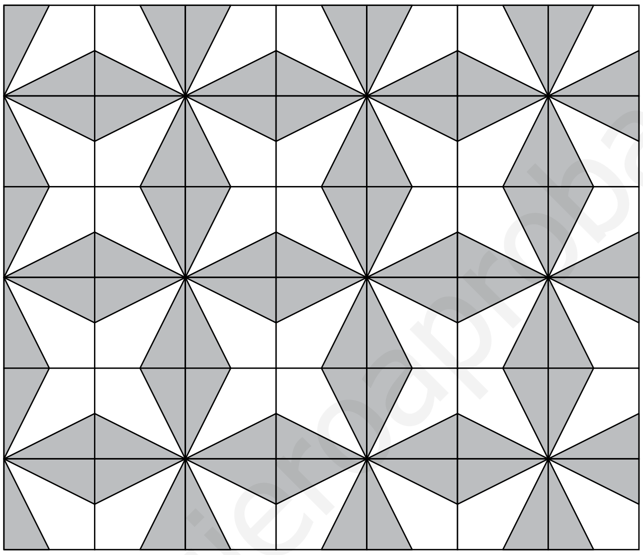
Ordena los corredores del más lento al más rápido.

Nombre y apellidos: ....

7 MOSAICO

Tomando como pieza base el cuadrado que ves en la figura, se construye el mosaico que hay debajo.





Calcula:

a) El área y el perímetro de uno de los rombos grises que componen el mosaico.

b) El área y el perímetro de una de las estrellas blancas.

Nombre y apellidos: ....

8 PAQUETES DE DOS TAMAÑOS

Una cadena de supermercados ofrece su propia marca de café en dos tipos de paquetes: el pequeño, de 300 gramos, y el grande, de 800 gramos.

El pequeño va dirigido a las familias, y el grande, a cafeterías y a restaurantes.

El caso es que del grande se venden menos unidades. Las estadísticas dicen que en la proporción 2 a 5.

Sabiendo eso, responde:

a) En lo que va de mes se han vendido 210 paquetes pequeños. ¿Cuántos paquetes grandes se habrán vendido, aproximadamente, en ese mismo período?

b) La semana pasada se vendieron en total 70 paquetes. ¿Cuántos eran de cada tamaño?

c) ¿Cuántos kilos de café se vendieron en total la semana pasada?

9 REPUESTOS DE AUTOMÓVIL

Una fábrica de repuestos del automóvil recibe el encargo de fabricar 2 000 unidades de un nuevo modelo de llantas de aleación ligera. El proceso está sujeto a las siguientes condiciones:

- Cada pieza del encargo tiene unos costes de producción de 82 €.
- La empresa obtiene sus ganancias facturando todos sus artículos con un 15% de recargo sobre los costes de producción.
- El jefe de la cadena, al planificar el trabajo, comprueba que, trabajando en jornadas normales de 8 horas, se tardaría 25 días en cumplir el encargo.
- El pedido se debe servir en 20 días.

a) ¿A cuánto ascenderá la factura total del pedido, sin IVA?

b) ¿A cuánto ascenderá la factura con IVA (18%)?

c) ¿Cuántas horas diarias deberán trabajar para cumplir el pedido a tiempo?

Nombre y apellidos: ....

10 PESOS Y LETRAS

Pablo pesa 7 kilos menos que Federico.

Federico pesa 5 kilos más que Marta.

Andrea pesa la mitad de lo que pesan Pablo y Marta juntos.

Rubén pesa 7/8 de lo que pesa Andrea.

Entre todos pesan 240 kilos.

Teniendo eso en cuenta, y llamando x al peso de Marta:

a) Expresa, en la tabla, el peso de cada uno:

Federico pesa	Pablo pesa	Marta pesa	Andrea pesa	Rubén pesa	Entre todos pesan
		x			240

b) Traduce a una ecuación la siguiente igualdad:

Peso de Federico	+	Peso de Pablo	+	Peso de Marta	+	Peso de Andrea	+	Peso de Rubén	=	Peso total

c) Resuelve la ecuación y calcula el peso de cada uno.

11 RELACIÓN DE EDADES

La edad de mi hermana es justo la cuarta parte de la de mi madre.

Sin embargo, dentro de cinco años será solamente la tercera parte.

Teniendo eso en cuenta, y llamando x a la edad que tiene hoy mi hermana:

a) Expresa, en la tabla, la edad de cada una en cada momento.

	Hoy	Dentro de 5 años
Edad de mi hermana	x	
Edad de mi madre		

b) Expresa con una ecuación el siguiente enunciado:

"La edad de mi madre dentro de cinco años será igual al triple de la edad que tendrá entonces mi hermana".

c) Resuelve la ecuación anterior y calcula la edad actual de mi madre y la de mi hermana.

Nombre y apellidos: ....

12 FOTOGRAFÍA

En la foto puedes ver a Álex con su hermano pequeño.

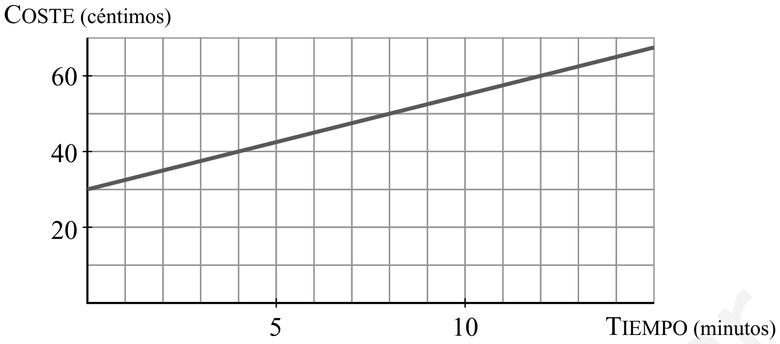
a) Sabiendo que Álex mide 1,10 metros, calcula la altura del hermano.

b) Expresa con números la relación entre el tamaño de Álex en la foto y su tamaño real.

Nombre y apellidos: ....

13 PRECIOS DIFERENTES

La gráfica representa el coste de las llamadas telefónicas en la operadora Telefón, S.L. en función del tiempo transcurrido.



Una segunda operadora, Baratel, S.A., se anuncia como más competitiva, ofreciendo "coste cero en establecimiento de llamada y una cuota de 5 céntimos por minuto".

a) ¿Cuál es el coste por establecimiento de llamada en la primera compañía? ¿Y la cuota por minuto?

b) Representa, sobre los mismos ejes, la gráfica de los costes en la segunda compañía.

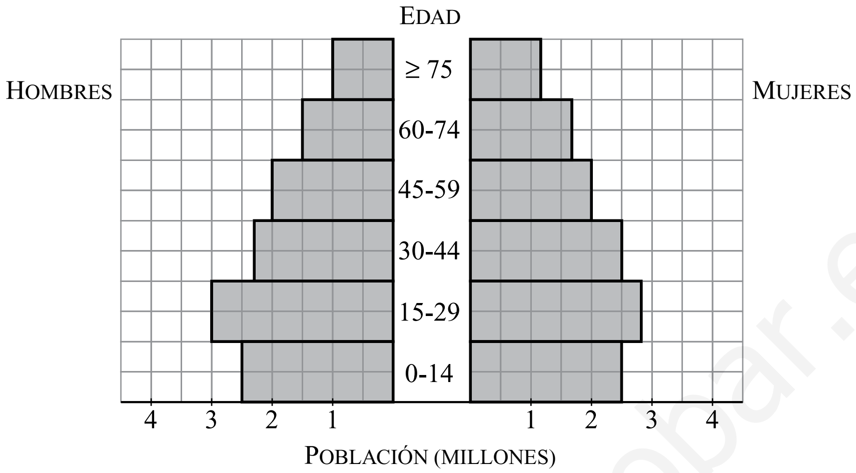
c) Expresa, con una ecuación, el coste de una llamada en cada operadora en función del tiempo transcurrido.

d) Haz un estudio comparativo de los costes, indicando en qué circunstancias interesa contratar una u otra operadora.

Nombre y apellidos: ....

14 PIRÁMIDE DE POBLACIÓN

La gráfica refleja la distribución, por edades y sexo, de la población de cierto país en vías de desarrollo.



a) Calcula, en millones, la población de hombres, la de mujeres y la total.

b) ¿Cuál es el porcentaje de hombres? ¿Y el de mujeres?

c) ¿Qué tanto por ciento de la población tiene menos de 30 años?

d) ¿Qué porcentaje de las mujeres tiene más de 60 años?

Nombre y apellidos: ....

15 NACIMIENTOS

Dos amigas comadronas, que trabajan en sendos hospitales, comparan los datos relativos a los nacimientos atendidos en sus respectivos centros de trabajo a lo largo de una semana.

HOSPITAL A		
L	𝍸 |||	
M	𝍸 𝍸	
X	𝍸 |||	
J	𝍸 ||||	
V	𝍸 𝍸		
S	𝍸 |||	
D	𝍸 ||||	

HOSPITAL B		
L	𝍸 𝍸 |||	
M	𝍸 𝍸 𝍸 |||	
X	𝍸 |||	
J	𝍸 ||	
V	𝍸 𝍸 |||	
S	𝍸 𝍸	
D	𝍸 𝍸 𝍸	

a) Calcula la media de nacimientos/día en cada hospital.

b) Calcula también:

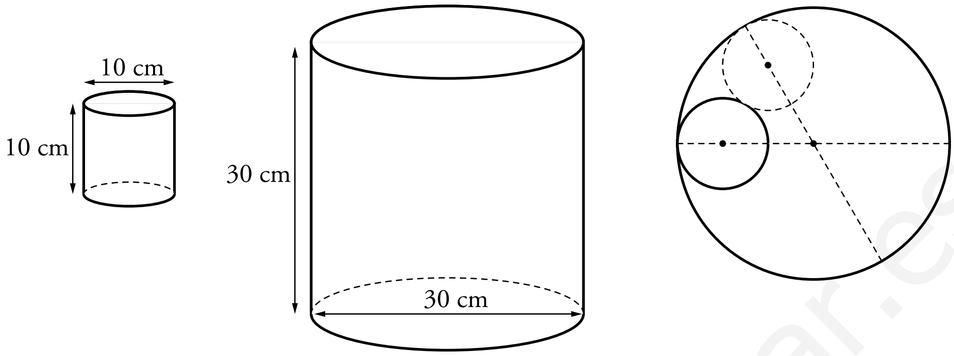
- La diferencia entre cada dato y su media.
- La media de esas diferencias en cada hospital.

c) A la vista de los resultados anteriores, haz una predicción sobre el número de bebés que nacerán mañana en cada uno de los hospitales.

Nombre y apellidos: ....

16 BOTES EN EL BIDÓN

Se desea almacenar botes de 10 cm de diámetro y 10 cm de altura, en un bidón de 30 cm de diámetro y 30 cm de altura.



a) Calcula el volumen de un bote y el volumen del bidón.

b) ¿Cuántos botes caben en el bidón?

c) Expresa, con una fracción y también con un porcentaje, la parte de bidón que queda ocupada por los botes y la que queda vacía.

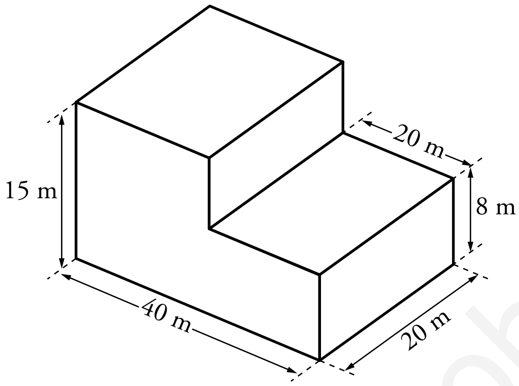
d) Expresa con números la relación entre la parte ocupada y la parte vacía.

Nombre y apellidos: ....

17 PINTURA DE FACHADAS

La comunidad de vecinos de un bloque de viviendas pide a una empresa de mantenimiento un presupuesto para pintar las fachadas del edificio y quitar las goteras de las terrazas.

La forma y las dimensiones del edificio se aprecian en el esquema de la figura:



La empresa decide cobrar la pintura a 9,75 € el metro cuadrado y el arreglo de suelo de terraza a 35 € el metro cuadrado, IVA incluido.

a) Representa las superficies de las fachadas y de las terrazas.

b) Calcula la superficie de paredes y de terrazas que tiene el edificio.

c) ¿A cuánto ascenderá el presupuesto?

Pautas de corrección

1 BALANCE SEMANAL

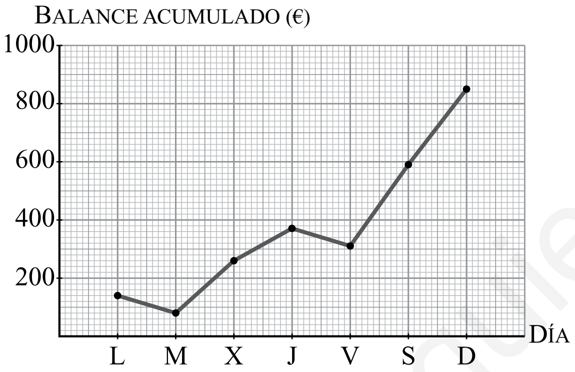
Competencia	Comunicar. Representar. Razonar.
Elemento de competencia	Interpreta información presentada en forma gráfica. Observa y saca conclusiones.
Contenido	Gráficas estadísticas. Media aritmética.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) El mejor día fue el sábado, y los peores, el martes y el viernes, ambos con idénticos resultados negativos.

Los balances de los sucesivos días fueron → L: 140 €, M: (–60 €), X: 180 €, J: 110 €, V: (–60 €), S: 280 €, D: 260 €.



El balance acumulado de toda la semana es de 850 €.

c) Balance medio diario:
850 : 7 = 121,43 €.

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

2 TAMAÑO DE DOS ESCALONES

Competencia	Plantear y resolver problemas. Pensar y razonar.
Elemento de competencia	Interpreta información gráfica. Relaciona distintos contenidos matemáticos para lograr un objetivo. Utiliza el lenguaje simbólico.
Contenido	Cantidad. Relaciones de proporcionalidad geométrica. Operaciones con números decimales. Lenguaje algebraico.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) En el plano (midiendo con la regla), la profundidad es de 9 cm, y la altura, de 6 cm.

Profundidad real:
9 cm · 40 = 360 cm = 3,60 m

Altura real:
6 cm · 40 = 240 cm = 2,40 m

b) Llamando n al número de escalones (incluido el último, cuando ya se ha llegado arriba), la altura del desnivel se divide en n partes iguales, y la profundidad en $n - 1$ partes iguales.

De esta forma, estudiamos las dimensiones, x e y de un escalón, según el número de peldaños de la escalera:

DIMENSIONES DE UN ESCALÓN	NÚMERO DE ESCALONES							
	n	10	11	12	13	14	15	16
Altura (x)	$240 : n$	24	21,82	20	18,46	17,14	16	15
Profundidad (y)	$360 : (n - 1)$	40	36	32,73	30	27,69	25,71	24

La escalera debe tener 13 escalones.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

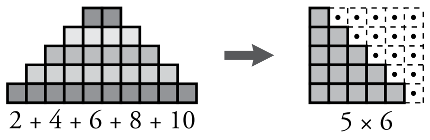
3 SUMA DE LOS *n* PRIMEROS NÚMEROS PARES

Competencia	Comunicar. Modelizar.
Elemento de competencia	Interpreta y utiliza el lenguaje simbólico. Detecta regularidades y relaciones, y las expresa. Generaliza.
Contenido	Cantidad. Números naturales. Lenguaje algebraico.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a)



$S_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 5 \cdot 6 = 30$

b) $S_6 = 2 + 4 + ... + 12 = 6 \cdot 7 = 42$

$S_7 = 2 + 4 + ... + 14 = 7 \cdot 8 = 56$

$S_8 = 2 + 4 + ... + 16 = 8 \cdot 9 = 72$

$S_9 = 2 + 4 + ...+ 18 = 9 \cdot 10 = 90$

$S_{15} = 2 + 4 + ... + 30 = 15 \cdot 16 = 240$

$S_n = 2 + 4 + ... + (2n) = n \cdot (n + 1)$

c) $S_{50} = 2 + 4 + ... + 100 = 50 \cdot 51 = 2550$

2. Responde a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

4 RECIPIENTES

Competencia	Pensar y razonar. Argumentar. Resolver problemas.
Elemento de competencia	Encadena procesos lógicos. Aplica los recursos matemáticos que requiere la situación. Diferencia opciones de cara a un objetivo.
Contenido	Superficie y volumen de los cuerpos geométricos. Operaciones con números decimales.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Volumen cilindro → $V_C = \pi \cdot 10^2 \cdot 30 = 9420\ cm^3$

Volumen prisma → $V_P = 20 \cdot 15 \cdot 30 = 9000\ cm^3$

b) Superficie cilindro → $S_C = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 30 + \pi \cdot 10^2 \cdot 2 = 2512\ cm^2$

Superficie prisma → $S_P = (20 + 15 + 20 + 15) \cdot 30 + 20 \cdot 15 \cdot 2 = 2700\ cm^2$

c) El cilindro tiene mayor volumen y menor superficie que el prisma. Esto es, puede guardar mayor cantidad de detergente y su fabricación requiere menos cartón, lo que quiere decir que es más barato.

Por tanto, el recipiente cilíndrico es el más adecuado.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

5 AGUA PARA REGADÍO

Competencia	Pensar y razonar. Resolver problemas. Comunicar.
Elemento de competencia	Aplica a una situación problemática los conocimientos matemáticos que requiere. Utiliza recursos gráficos como apoyo al pensamiento.
Contenido	Fracciones. Porcentajes. Concepto de superficie.

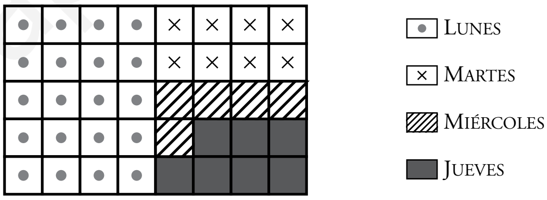
Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Antes de nada, reducimos las fracciones a común denominador (40):

Lunes → 1/2 = 20/40
Martes → 1/5 = 8/40
Miércoles → 1/8 = 5/40

Ahora se representan con facilidad:



b) Según el gráfico, el jueves gastó 7/40 del depósito.

A la misma conclusión llegamos numéricamente:

Entre los tres días gastó (20 + 8 + 5)/40 = = 33/40 del pilón.

El jueves gastó el resto, que son (40 – 33)/40 = 7/40 del pilón.

c) El miércoles por la noche quedaban 7/40 del depósito, que son 14 000 litros.

7/40 del depósito son … → 14 000 litros

1/40 del depósito son … → → 14 000 : 7 = 2000 litros

40/40 del depósito son … → → 2 000 · 40 = 80 000 litros

La capacidad del depósito es de 80 000 litros.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

6 CONTRARRELOJ

Competencia	Pensar y razonar. Comunicar. Resolver problemas.
Elemento de competencia	Aplica las herramientas adecuadas a una situación. Calcula.
Contenido	Relaciones entre magnitudes. Sistema decimal y sistema sexagesimal. Organización de la información: tablas de doble entrada.

Niveles de puntuación:

3. La respuesta correcta es:

Llamamos: $t \rightarrow$ tiempo
$v \rightarrow$ velocidad y $d \rightarrow$ distancia

- Corredor A:
  $t = 1\text{ h }50\text{ min} = \left(1 + \frac{5}{6}\right)\text{ h} = \frac{11}{6}\text{ h}$
  $v = 55 : \frac{11}{6} = 30\text{ km/h}$
- Corredor B:
  $t = 1\text{ h }45\text{ min} = \left(1 + \frac{3}{4}\right)\text{ h} = \frac{7}{4}\text{ h}$
  $v = 55 : \frac{7}{4} = 31{,}43\text{ km/h}$
- Corredor C:
  $t = 55 : 27{,}5 = 2\text{ h}$
- Corredor D:
  $t = 2\text{ h }5\text{ min} = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}\text{ h}$
  $v = 55 : \frac{25}{12} = 26{,}4\text{ km/h}$

Corredor	Distancia	Hora de salida	Hora de llegada	Tiempo	Velocidad media (km/h)
A	55 km	12 h 23 min	14 h 13 min	1 h 50 min	30
B	55 km	12 h 25 min	14 h 10 min	1 h 45 min	31,43
C	55 km	12 h 27 min	14 h 27 min	2 h	27,5
D	55 km	12 h 29 min	14 h 09 min	1 h 40 min	33
E	55 km	12 h 31 min	14 h 36 min	2 h 5 min	26,4

El orden, del más lento al más rápido, es: E, C, A, B y D.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas.

1. Comete errores en los cálculos en un máximo de dos de las filas de la tabla.

0. En cualquier otro caso.

7 MOSAICO

Competencia	Pensar y razonar. Plantear y resolver problemas. Comunicar.
Elemento de competencia	Aplica a una situación problemática los conocimientos matemáticos que requiere. Interpreta la información gráfica. Calcula.
Contenido	Superficie. Teorema de Pitágoras. Operaciones con números decimales.

Niveles de puntuación:

3. La respuesta correcta es:

Cálculos previos:

- El cuadrado base del mosaico tiene una superficie de $20 \cdot 20 = 400\text{ cm}^2$.

Y dentro de ese cuadrado:

- La parte blanca es la mitad del cuadrado, y tiene una superficie de 200 cm^2.
- La parte negra es la otra mitad del cuadrado, y tiene una superficie de 200 cm^2.
- La hipotenusa del triángulo gris es:
  $k = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22{,}36\text{ cm}$.
- Cada uno de los triángulos negros tiene una superficie de 100 cm^2.

a) Rombo gris del mosaico:

- Área $\rightarrow 4 \cdot 100 = 400\text{ cm}^2$
- Perímetro $\rightarrow 4 \cdot k = 4 \cdot 22{,}36 = 89{,}44\text{ cm}^2$

b) Estrella blanca del mosaico:

- Área $\rightarrow 4 \cdot 200 = 800\text{ cm}^2$
- Perímetro $\rightarrow 8 \cdot k = 8 \cdot 22{,}36 = 178{,}88\text{ cm}^2$

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Sigue el proceso correcto, pero comete errores de cálculo.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

8 PAQUETES DE DOS TAMAÑOS

Competencia	Argumentar. Modelizar. Comunicar. Plantear y resolver problemas.
Elemento de competencia	Traduce una situación a una estructura matemática. Aplica los conocimientos matemáticos adecuados para resolver una situación. Crea y expresa argumentos.
Contenido	Relaciones de proporcionalidad.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Paquetes grandes:

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{210} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 210}{5} = 84$$

En lo que va de mes se habrán vendido 84 paquetes grandes.

b) De un total de 7 paquetes, 2 serán grandes y 5 pequeños.

De un total de 70 paquetes, 20 son grandes y 50 pequeños.

c) 800 g $\cdot$ $20 + 300$ g $\cdot$ $50 = 31\,000$ g $=$
$= 31$ kg

La semana pasada se vendieron 31 kilos de café.

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

9 REPUESTOS DEL AUTOMÓVIL

Competencia	Pensar y razonar. Comunicar. Modelizar.
Elemento de competencia	Encadena procesos lógicos. Traduce una situación a una estructura matemática. Expresa, utilizando recursos lingüísticos y matemáticos.
Contenido	Relaciones de proporcionalidad. Porcentajes.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Coste de fabricación de 2 000 piezas:
$82 \cdot 2\,000 = 164\,000$ €

Coste del pedido incluyendo la ganancia de la empresa (15%):
$164\,000 \cdot 1{,}15 = 188\,600$ €
El coste del pedido ascenderá a 188 600 €.

b) Coste del pedido con IVA (18%) →
→ $188\,600 \cdot 1{,}18 = 222\,548$ €. La factura ascenderá a 222 548 €.

c) Jornada laboral:

Para cubrir el pedido en 25 días, deben trabajar 8 h/día.

Para cubrir el pedido en 1 día, deberían trabajar $8 \cdot 25 = 200$ h/día.

Para cubrir el pedido en 20 días, deben trabajar → $200 : 20 = 10$ h/día.

O bien, con una regla de tres inversa:

- Para cubrir el pedido en 25 días, deben trabajar 8 horas al día.
- Para cubrir el pedido en 20 días, deben trabajar x horas al día.

$$\frac{25}{20} = \frac{x}{8} \rightarrow x = \frac{8 \cdot 25}{20} = 10 \text{ h/día}$$

Deben trabajar 10 h/día para cumplir con el encargo.

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

10 PESOS Y LETRAS

Competencia	Utilizar el lenguaje simbólico y formal. Comunicar. Resolver problemas.
Elemento de competencia	Traduce un contexto a una estructura matemática. Traduce de lenguaje natural a lenguaje simbólico.
Contenido	Lenguaje algebraico. Resolución de ecuaciones.

Pautas de corrección

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Los pesos en función de x son:

Federico	Pablo	Marta	Andrea	Rubén	Entre todos
$x + 5$	$x - 2$	x	$x - 1$	$7(x - 1)/8$	240

b) Ecuación:

$$(x + 5) + (x - 2) + x + (x - 1) + \frac{7(x - 1)}{8} =$$
$$= 240$$

c) Cálculo de pesos:

$$8(x + 5) + 8(x - 2) + 8x + 8(x - 1) +$$
$$+ 7(x - 1) = 8 \cdot 240$$

$$8x + 40 + 8x - 16 + 8x + 8x - 8 + 7x - 7 =$$
$$= 1920$$

$$39x + 9 = 1920 \rightarrow 39x = 1911 \rightarrow$$
$$x = 1911 : 39 \rightarrow x = 49$$

Los pesos en kilos son:

Federico	Pablo	Marta	Andrea	Rubén	Entre todos
54	47	**49**	48	42	240

2. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

11 RELACIÓN DE EDADES

Competencia	Utilizar el lenguaje simbólico y formal. Comunicar. Resolver problemas.
Elemento de competencia	Traduce un contexto a una estructura matemática. Traduce del lenguaje natural al lenguaje simbólico.
Contenido	Lenguaje algebraico. Resolución de ecuaciones.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Las edades en función de x son:

	Hoy	Dentro de 5 años
Edad de mi hermana	x	$x + 5$
Edad de mi madre	$4x$	$4x + 5$

b) Ecuación:

$$4x + 5 = 3 \cdot (x + 5)$$

c) Edades:

$$4x + 5 = 3x + 15 \rightarrow 4x - 3x = 15 - 5 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = 10$$

Mi hermana tiene 10 años.

Mi madre tiene $4x = 4 \cdot 10 = 40$ años.

2. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

12 FOTOGRAFÍA

Competencia	Comunicar. Modelar. Resolver problemas.
Elemento de competencia	Interpreta modelos matemáticos en términos reales. Interpreta el lenguaje gráfico. Entiende y utiliza los conceptos matemáticos que requiere la situación.
Contenido	Relaciones de proporcionalidad geométrica.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Midiendo con la regla:

– Altura de Álex en la foto → 10 cm

– Altura de su hermano en la foto → 7,5 cm

– Altura real del hermano: x

$$\frac{10}{1{,}10} = \frac{7{,}5}{x} \rightarrow x = \frac{7{,}5 \cdot 1{,}10}{10} = 0{,}825$$

El hermano de Álex mide unos 83 cm de altura.

b) Proporción:

$$\frac{10}{110} = \frac{1}{11}$$

La altura de Álex es 11 veces su altura en la foto.

La relación de alturas entre la foto y la realidad es de 1 a 11.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Responde correctamente a dos de las cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

13 PRECIOS DIFERENTES

Competencia	Representar. Comunicar.
Elemento de competencia	Interpreta modelos matemáticos en términos reales. Interpreta y utiliza el lenguaje gráfico. Expresa relaciones utilizando herramientas matemáticas.
Contenido	Funciones y gráficas.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) El coste por establecimiento de llamada en Telefón, S.L. es de 30 céntimos.

Observando la gráfica, obtenemos la siguiente tabla de valores:

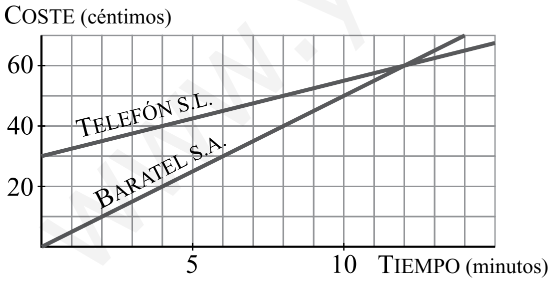
Minutos	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Coste llamada	30	35	40	45	50	55	60	65	70

Una llamada de 4 minutos cuesta 40 céntimos.

La cuota por minuto en esa compañía es de (40 – 30) : 4 = 10 : 4 = 2,5 céntimos.

b) Tabla de costes en la segunda operadora, Baratel S.A.:

Minutos	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16
Coste llamada	0	5	10	20	30	40	50	60	70	80



c) Llamando C al coste de una llamada, en euros, y t al tiempo que dura, en segundos, las ecuaciones que expresan C en función de t son:

Telefón, S.L. → $C = 0{,}30 + 0{,}025 \cdot t$

Baratel, S.A. → $C = 0{,}05 \cdot t$

d) De las tablas y las gráficas se deduce que:

- En las llamadas con una duración inferior a 12 minutos, es menor el coste en la compañía Baratel, S.A.
- Las llamadas de 12 minutos tienen el mismo coste en ambas operadoras.
- Las llamadas de duración superior a 12 minutos tienen menor coste en la compañía Telefón, S.L.

2. Responde correctamente a tres de las cuestiones.

1. Responde correctamente a dos cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

14 PIRÁMIDE DE POBLACIÓN

Competencia	Representar. Pensar y razonar.
Elemento de competencia	Interpreta información presentada en lenguaje gráfico. Aplica los conceptos matemáticos que requiere la situación.
Contenido	Gráficas estadísticas. Relaciones de proporcionalidad. Porcentajes.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Los valores que se aprecian en la gráfica son:

	0-14	15-29	30-44	45-59	60-74	≥ 75	Total
Hombres	2,5	3	2,3	2	1,5	1	12,3
Mujeres	2,5	2,8	2,5	2	1,7	1,2	12,7
Total	5	5,8	4,8	4	3,2	2,2	25

Hay 12,3 millones de hombres, 12,7 de mujeres y 25 en total.

b) Hay 25 millones de personas.

$$\text{Hombres: } \frac{12{,}3 \cdot 100}{25} = 49{,}2$$

$$\text{Mujeres: } \frac{12{,}7 \cdot 100}{25} = 50{,}8$$

El 49,2% son hombres y el 50,8%, mujeres.

c) Hay 5 + 5,8 = 10,8 millones de personas menores de 30 años.

$$\frac{10{,}8 \cdot 100}{25} = 43{,}2$$

El 43,2% de la población tiene menos de 30 años.

d) Hay 12,7 millones de mujeres. De ellas, 1,7 + 1,2 = 2,9 millones tienen más de 60 años.

$$\frac{12,7}{2,9} = \frac{100}{x} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 2,9}{12,7} = 22,83$$

El 22,83% de las mujeres tienen más de 60 años.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

15 NACIMIENTOS

Competencia	Representar. Pensar y razonar.
Elemento de competencia	Interpreta información presentada en lenguaje gráfico. Aplica los conceptos y procedimientos matemáticos que requiere la situación.
Contenido	Tablas y parámetros estadísticos.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

- Cálculos previos:

Hospital A:

	L	M	X	J	V	S	D	Total	
Nacimientos	8	10	8	9	11	8	9	63	Media = 63 : 7 = 9
Diferencia con la media	1	1	1	0	2	1	0	6	Media de diferencias 6 : 7 = 0,86

Hospital B:

	L	M	X	J	V	S	D	Total	
Nacimientos	13	18	8	7	13	10	15	84	Media = 84 : 7 = 12
Diferencia con la media	1	6	4	5	1	2	3	22	Media de diferencias 22 : 7 = 3,14

a) El hospital A tiene una media de 9 nacimientos por día.

El hospital B tiene una media de 12 nacimientos por día.

b) Las diferencias con la media son las expresadas en las tablas.

Las diferencias medias son:

- Hospital A: 0,86 ≈ 1
- Hospital B: 3,14 ≈ 3

c) A la vista de los resultados anteriores, se puede suponer que, en un día cualquiera:

- En el hospital A nacerán entre (9 – 1) y (9 + 1) niños. Es decir, ente 8 y 10.
- En el hospital B nacerán entre (12 – 3) y (12 + 3) niños. Es decir, entre 9 y 15.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Responde correctamente a dos cuestiones.

1. Responde solo a una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

16 BOTES EN EL BIDÓN

Competencia	Pensar y razonar. Representar. Plantear y resolver problemas.
Elemento de competencia	Utiliza apoyos gráficos como organizadores de ideas. Encadena procesos lógicos. Traduce una situación a un modelo matemático. Aplica los conceptos y procedimientos matemáticos que requiere la situación problemática. Utiliza distintos tipos de números.
Contenido	Volumen de los cuerpos.

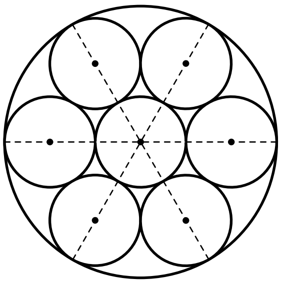
Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) $V_{bote} = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 785 \text{ cm}^3 = 0,785 \text{ dm}^3$

$V_{bidón} = \pi \cdot 152 \cdot 30 = 21\,195 \text{ cm}^3 =$
$= 21,195 \text{ dm}^3$.

b) Llenamos el bidón de botes:



- Como se ve en el gráfico, en un círculo de 30 cm de diámetro caben, sin superponerse, seis círculos de 10 cm de diámetro.
- Teniendo eso en cuenta, dentro del bidón, aprovechando el espacio al máximo, caben tres capas de 6 botes.

En total son 18 botes.

c) Los 18 botes ocupan:
$18 \cdot 0,785 = 14,130 \text{ dm}^3$

El volumen del bidón es de 21,195 dm³.

Los botes ocupan $\frac{14,130}{21,195} = \frac{2}{3}$ del bidón, un 66,67%.

Queda sin ocupar 1/3 del bidón, un 33,33%.

d) (2/3) : (1/3) = 2

La parte ocupada del bidón y la vacía están en relación de dos a uno.

2. Da las respuestas correctas sin justificarlas. Responde a tres de las cuestiones.

1. Responde a dos de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

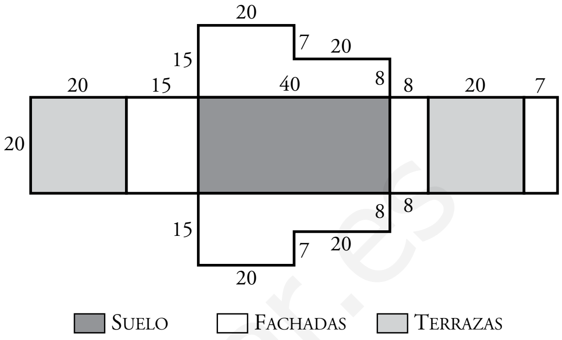
17 PINTURA DE FACHADAS

Competencia	Pensar y razonar. Representar. Comunicar. Plantear y resolver problemas.
Elemento de competencia	Interpreta y utiliza el lenguaje gráfico. Utiliza apoyos gráficos como organizadores de ideas. Aplica los conceptos y procedimientos matemáticos que requiere la situación.
Contenido	Superficie de los cuerpos.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) Representación de la superficie de las fachadas y de las terrazas:



b) Superficie de las terrazas:

$S_{Terrazas} = 2 \cdot 20 \cdot 20 = 800$ m^2.

Superficie fachada lateral (A):

$S_A = 15 \cdot 40 - 20 \cdot 7 = 460$ m^2.

Superficie de las fachadas:

$S_{Fachadas} = 2 \cdot 460 + 20 \cdot (15 + 8 + 7) =$
$= 1\,520$ m^2.

c) Presupuesto:

$P = 800 \cdot 35 + 1\,520 \cdot 9{,}75 = 42\,820$ €

2. Da las respuestas correctas, pero sin justificarlas. Resuelve correctamente dos cuestiones.

1. Responde solo una de las cuestiones.

0. En cualquier otro caso.

TAREA
5

Tareas competenciales para preparar las pruebas de diagnóstico

Nombre y apellidos:...

Curso:.. **Fecha:** ....

1 TIRAS DE NÚMEROS

Observa la siguiente serie de seis números:

1	1	2	3	5	8

Los dos primeros son elegidos al azar y cada uno de los siguientes se obtiene sumando los dos anteriores.

a) Comprueba que se cumple la siguiente relación: “La suma de los seis números es igual al quinto número multiplicado por cuatro”.

b) Siguiendo la misma regla, completa la siguiente tabla y comprueba si se sigue cumpliendo la relación mencionada en el apartado anterior:

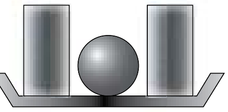
5	13				

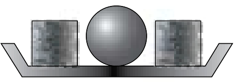
c) Hemos dicho que los dos primeros números se eligen al azar. ¿Se cumplirá siempre la relación? Ayúdate de la siguiente tabla y razona tu respuesta.

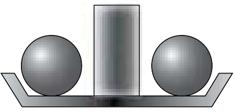
a	*b*				

2 BALANZAS

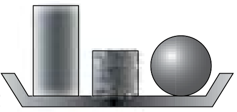
Estas tres balanzas están, según su peso, en orden decreciente: A pesa más que B, y B pesa más que C.

A


B


C


¿Qué lugar ocupa la balanza D en el orden anterior?

D


Nombre y apellidos: ....

3 GIRO POSTAL

La empresa LA SOLUCIÓN, S.C.A. nos ha realizado un servicio cuyo coste asciende a 300 euros y, según el contrato, debemos pagarlo en nuestro domicilio.

El tesorero de la empresa ha contactado con nosotros para comunicarnos la imposibilidad de desplazarse para cobrar el servicio. Nos pide que le enviemos el importe de la factura por giro postal, rebajándole la cantidad correspondiente a los gastos de este.

Hemos consultado las tarifas de correos en su página web y son las siguientes:

Giro Nacional

Precio final en euros con impuestos indirectos incluidos para envíos desde

PENÍNSULA Y BALEARES

	PRECIO FIJO	IMPORTE
A abonar en cuenta (OIC)	-	0,80%
A abonar en domicilio - Ordinario	1,55 €	0,80%
A abonar en domicilio - Urgente	4,26 €	0,80%
A abonar en oficina de correos	1,55 €	0,80%
Especiales	0,27 €	0,80%

En el apartado IMPORTE, el porcentaje 0,80% hay que aplicarlo sobre la cantidad enviada.

Tanto nuestro domicilio como el de destino del giro se encuentran en territorio peninsular.

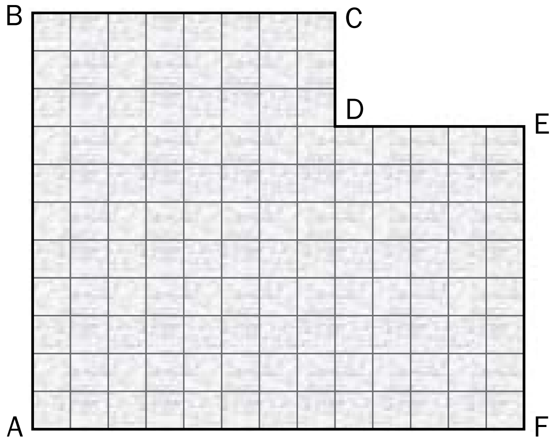
a) Si optamos por la modalidad “A abonar en cuenta (OIC)”, ¿qué cantidad debemos girar?

b) Si utilizamos la modalidad “A abonar en domicilio - Urgente”, ¿qué cantidad debemos girar?

Nombre y apellidos: ....

4 ENLOSADOS

El salón de nuestra casa tiene la siguiente forma:



En el dibujo, cada cuadradito corresponde a un cuadrado de 50 cm de lado.

Con las letras A, B, C, D, E y F hemos indicado cada uno de los rincones o esquinas de nuestro salón. Además, tiene las siguientes puertas:

- Una en la pared AF, cuyo ancho es de 150 cm.
- Una en la pared AB, de 160 cm de ancho.
- Una más en la pared DE, de 120 cm de ancho.

Queremos pavimentar el salón con unas baldosas que valen 12,50 euros por metro cuadrado y le vamos a poner un rodapié cuyo precio es de 14,20 euros por metro lineal.

El albañil nos ha dicho que el diez por ciento de las baldosas se estropean, las que hay que cortar para poner en los rincones o junto a las paredes.

El precio por colocar las baldosas (mano de obra y material) es de 40 euros cada metro cuadrado y el de colocar el rodapié, de 15 euros cada metro lineal.

a) ¿Cuánto mide cada una de las paredes de nuestro salón?

PARED	AB	BC	CD	DE	EF	AF
MEDIDA	5,50 m					

b) ¿Cuántos metros cuadrados de baldosas tendremos que comprar? Ten en cuenta que solo podemos comprar un número entero de metros cuadrados.

c) ¿Cuánto nos costarán las baldosas?

d) ¿Cuánto nos costará el rodapié? También tenemos que comprar un número entero de metros.

e) ¿Cuánto deberemos pagar por mano de obra?

Nombre y apellidos: ....

f) Los precios anteriores no incluyen el IVA. Si por este impuesto hay que pagar un 18%, tanto del importe total de materiales como del de la mano de obra, ¿cuál será el total de la factura correspondiente a toda la obra?

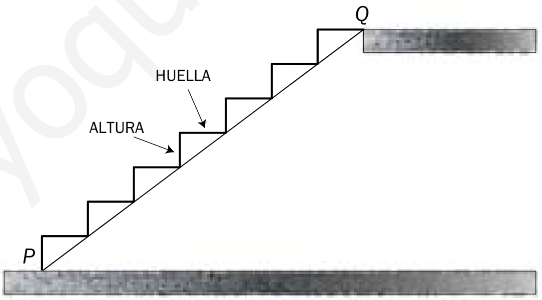
ARTÍCULO	PRECIO POR UNIDAD	UNIDADES	IMPORTE
BALDOSAS			
COLOCACIÓN DE LAS BALDOSAS			
RODAPIÉ			
COLOCACIÓN DEL RODAPIÉ			
	SUBTOTAL		
	IVA, 18%		
	TOTAL FACTURA		

5 ESCALERAS

Las escaleras son elementos arquitectónicos que se utilizan para salvar desniveles. Se utilizan en las viviendas, por ejemplo, para subir o bajar de una planta a otra.

Para su construcción deben seguirse unas reglas muy estrictas para que no resulten incómodas o, incluso, peligrosas.

A continuación te presentamos un boceto del perfil de una escalera:



A la distancia horizontal de un extremo del escalón al otro se la llama **huella** (H) y a la altura que se sube con cada paso se la llama **altura** del escalón (A).

Estas medidas, H y A, tienen que guardar cierta relación para que la escalera no resulte incómoda; la relación nos la da la **fórmula de Blondel:**

$$600 \leq 2A + H \leq 660,$$

donde A y H están expresados en milímetros.

En cierto edificio se ha construido una escalera, para acceder de la planta baja al primer piso, de 16 escalones, con una huella de 25 cm y una altura de 18,75 cm.

a) ¿Cumple la escalera la fórmula de Blondel?

Nombre y apellidos: ....

b) ¿Qué distancia separa las dos plantas que une la escalera?

c) El arquitecto, para garantizar la seguridad de la escalera, decidió colocar una viga de hierro que uniese el principio del escalón más bajo (*P*, en el dibujo) con el final del más alto (*Q*, en el dibujo). ¿Qué longitud tendrá la viga?

6 EL ALCOHOL, LA CURVA MÁS PELIGROSA DE LA CARRETERA

Bajo este titular, el periódico *EL PAÍS* en su edición del jueves 6 de enero de 2005 dedica un artículo a analizar la influencia del consumo de alcohol en los accidentes de tráfico.

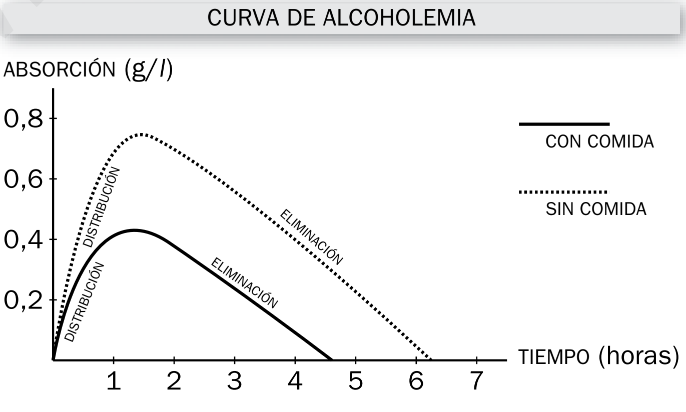
El problema es antiguo, como recoge el autor del artículo:

“La reina Isabel la Católica ya lo ordenó allá en el siglo XV: quedaba prohibido servir vino a los carreteros si a cada vaso no le acompañaba una rebanada de pan con carne. Si esto podía reducir los accidentes de caballerías y bueyes en los caminos de la Castilla bajomedieval, la tapa no es hoy suficiente para eliminar los riesgos de la conducción de máquinas mil veces más potentes que pueden ser letales si se conducen de modo criminal, tras haber bebido alcohol”.

La cuestión es tan preocupante que a su estudio se dedican diversas instituciones. Así, en la siguiente página web

http://www.uniovi.net/psiquiatria/docencia/material/PL-laboratorio-03.ppt

correspondiente a la Universidad de Oviedo, encontramos un análisis de los factores que influyen en el incremento o decremento de la tasa de alcoholemia, así como de su evolución desde la ingesta de alcohol hasta su metabolización, que se corresponde con la siguiente gráfica:



Se prohíbe conducir con una tasa de alcoholemia en sangre superior a 0,5 g/l.

He tomado cierta cantidad de vino, sin comer, y la curva que corresponde a mi alcoholemia es, exactamente, la que aquí ves.

Nombre y apellidos: ....

a) ¿Cuánto tiempo debo esperar para volver a coger el coche? Para averiguarlo, ayúdate, si es necesario, de una hoja transparente de papel milimetrado.

b) ¿Cuánto tiempo debo esperar si he tomado la misma cantidad de vino mientras comía?

Los profesionales de la conducción y los conductores noveles tienen prohibido conducir con una tasa superior a 0,3 g/*l*.

c) ¿Cuánto tiempo deberá esperar un conductor de autobús que ha tomado la misma cantidad de vino mientras comía?

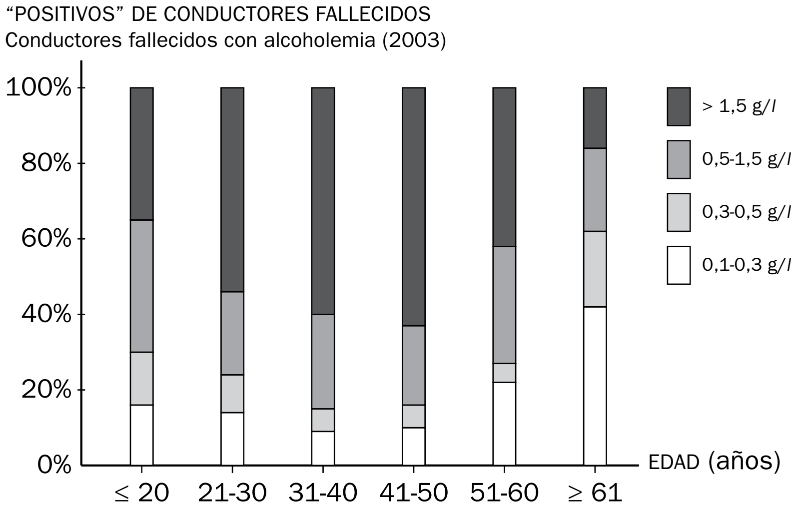
d) ¿Y un conductor novel que no ha comido nada mientras bebía?

La curva de alcoholemia, como es natural, depende de la cantidad de alcohol consumido, pero también de otros factores inherentes al consumidor.

No conviene prestar atención a ciertos mitos; por ejemplo, un exceso de peso del consumidor, en contra de lo que pudiera pensarse, contribuye al incremento de la tasa de alcoholemia, pues a mayor cantidad de tejido adiposo menor volumen de distribución del alcohol.

Así que lo mejor es consumir **cero gramos de alcohol** si tenemos que conducir.

En la siguiente gráfica, publicada por el periódico citado al principio, se recoge información sobre los conductores fallecidos con alcoholemia en 2003:



e) ¿Qué porcentaje de los conductores fallecidos menores de 20 años dio una tasa de alcoholemia superior 1,5 g/*l*?

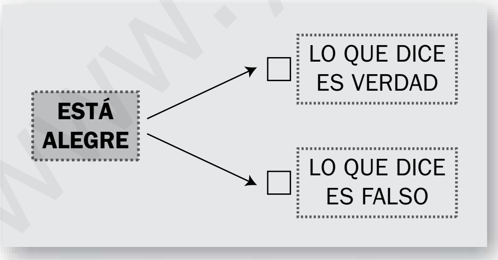
f) ¿En qué franja de edad se da el mayor porcentaje de conductores fallecidos con una tasa superior a 0,5 g/*l*?

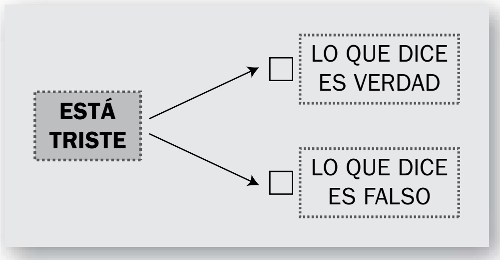
7 EL ALCOHOL, LA CURVA MÁS PELIGROSA DE LA CARRETERA

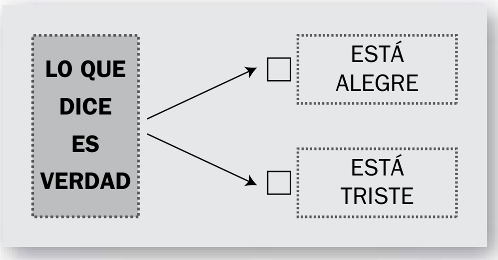
A mi hija pequeña le han regalado un muñeco hablador, que unas veces dice la verdad y otras miente, y unas veces está triste y otras, alegre.

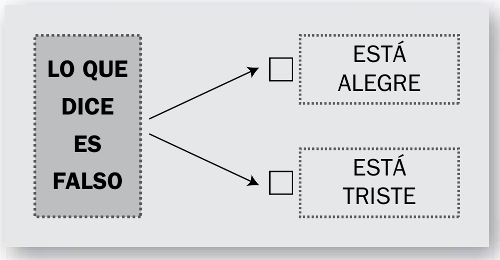
El manual dice que cuando está alegre, siempre dice la verdad.

Según esta indicación del manual, indica en cada caso, con un aspa, lo que puede ocurrir si el muñeco "está alegre" o "está triste", o "lo que dice es verdad" o "lo que dice es falso":









1 NÚMEROS Y PORTALES

Competencia	Razonar. Modelizar.
Elemento de competencia	Justifica resultados con argumentos de base matemática.
Contenido	Álgebra.

Niveles de puntuación:

3. La solución correcta es:

a) $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20 = 5 \cdot 4$

La relación se cumple.

b)

5	13	5 + 13 = 18	13 + 18 = 31	18 + 31 = 49	31 + 49 = 80

$5 + 13 + 18 + 31 + 49 + 80 = 196 = 49 \cdot 4$

Se cumple la relación.

c)

a	*b*	*a* + *b*	*a* + 2*b*	2*a* + 3*b*	3*a* + 5*b*

$a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) +$
$+ (3a + 5b) = 8a + 12b$

$(2a + 3b) \cdot 4 = 8a + 12b$

Siempre se cumple la relación.

2. Responde correctamente a dos de los tres apartados.

1. Responde correctamente a uno de los tres apartados.

0. En cualquier otro caso.

2 BALANZAS

Competencia	Organizar, comprender e interpretar información. Expresarse matemáticamente.
Elemento de competencia	Identifica el significado de la información numérica y simbólica. Justifica resultados con argumentos de base matemática.
Contenido	Contenidos comunes.

Niveles de puntuación:

3. La respuesta correcta es:

Si A pesa más que B, los dos rectángulos de A pesan más que los dos cuadrados de B, de donde se deduce que un rectángulo pesa más que un cuadrado.

Las balanzas A y D tienen en común un rectángulo y un círculo, y teniendo en cuenta que el otro rectángulo de A pesa más que el cuadrado de B, se deduce que A pesa más que D.

Las balanzas B y D tienen en común un cuadrado y un círculo, y como el rectángulo de D pesa más que el otro cuadrado de B, la balanza D pesa más que la B.

Tenemos, por tanto, que A > D > B, y podemos concluir que D está entre A y B.

2. Razona sobre los pesos de los objetos de las balanzas y llega a una conclusión, pero no es la acertada.

1. Ofrece la solución sin justificarla razonadamente.

0. En cualquier otro caso.

3 GIRO POSTAL

Competencia	Organizar, comprender e interpretar información. Plantear y resolver problemas.
Elemento de competencia	Comprende información presentada en formato gráfico. Traduce las situaciones reales a esquemas matemáticos.
Contenido	Números. Porcentajes.

Niveles de puntuación:

3. La respuesta correcta es:

a) La cantidad que debemos girar más los gastos por el envío debe sumar el importe total de nuestra deuda, 300 euros.

Llamamos C a la cantidad que debemos girar.

Coste del giro: 0,80% de $C = 0{,}80C : 100 =$
$= 0{,}008C$

$C + 0{,}008C = 300 \rightarrow 1{,}008C = 300 \rightarrow$
$\rightarrow C = 300 : 1{,}008 \rightarrow C = 297{,}62$ €

b) Al coste anterior del giro hay que sumarle una cantidad fija de 4,26 euros. Es decir:

$C + 0{,}008C + 4{,}26 = 300 \rightarrow 1{,}008C =$
$= 295{,}74 \rightarrow C = 295{,}74 : 1{,}008 =$
$= 293{,}39$ €

2. Razona correctamente en los dos apartados, pero comete algún error en los cálculos.

1. Ofrece el resultado correcto solo en uno de los dos apartados.

0. En cualquier otro caso.

4 ENLOSADOS

Competencia	Organizar, comprender e interpretar información. Plantear y resolver problemas. Expresarse matemáticamente.
Elemento de competencia	Comprende información presentada en formato gráfico. Traduce situaciones reales a esquemas matemáticos. Selecciona los datos apropiados para resolver un problema. Selecciona estrategias adecuadas. Utiliza formas adecuadas de representación.
Contenido	Geometría. Números.

Niveles de puntuación:

3. La respuesta correcta es:

a) La longitud de cada pared del salón es:

AB = 11 · 0,50 = 5,5 m

BC = 8 · 0,50 = 4 m

CD = 3 · 0,50 = 1,5 m

DE = 5 · 0,50 = 2,5 m

EF = 8 · 0,50 = 4 m

FA = 13 · 0,50 = 6,5 m

PARED	AB	BC	CD	DE	EF	AF
MEDIDA	5,50	4	1,5	2,5	4	6,5

b) Área del salón:

$6{,}50 \cdot 5{,}50 - 2{,}50 \cdot 1{,}50 = 32\ m^2$

(También se puede calcular descomponiendo el salón en dos rectángulos).

Añadimos un 10% más por las baldosas que se estropearán (10% de 32 = 3,2 m^2): 32 + 3,2 = 35,2 m^2

Como tenemos que comprar un número entero de metros cuadrados, la compra será de 36 m^2.

c) El coste total de las baldosas es 36 · 12,50 = = 450 euros.

d) Perímetro del salón: 5,5 + 4 + 1,5 + 2,5 + + 4 + 6,5 = 24 m

Restamos el ancho de las tres puertas (1,5 + + 1,6 + 1,2 = 4,3): 24 – 4,3 = 19,70 m

Tenemos que comprar 20 m de rodapié.

Coste del rodapié = 20 · 14,20 = 284 euros.

e) El coste de colocación de las baldosas es 32 · 40 = 1 280 euros.

El coste de colocación del rodapié es 19,70 · 15 = 295,50 euros.

El coste total de la mano de obra es 1 280 + 295,50 = 1 575,50 euros.

f)

ARTÍCULO	PRECIO POR UNIDAD	UNIDADES	IMPORTE
BALDOSAS	12,50	36	450,00
COLOCACIÓN DE LAS BALDOSAS	40	32	1 280,00
RODAPIÉ	14,20	20	284,00
COLOCACIÓN DEL RODAPIÉ	15	19,70	295,50
	SUBTOTAL		2 309,50
	IVA, 18%		415,71
	TOTAL FACTURA		2 725,21

2. Resuelve correctamente cuatro de los seis apartados.

1. Resuelve correctamente dos de los seis apartados.

0. En cualquier otro caso.

5 ESCALERAS

Competencia	Plantear y resolver problemas.
Elemento de competencia	Justifica resultados con argumentos de base matemática. Traduce situaciones reales a esquemas matemáticos. Selecciona los datos apropiados para resolver un problema. Selecciona estrategias adecuadas.
Contenido	Álgebra. Geometría.

Niveles de puntuación:

3. La respuesta correcta es:

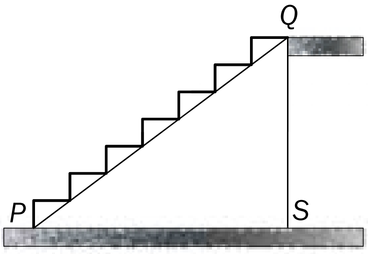
a) $2A + H = 2 \cdot 187{,}5 + 250 = 625$

Como $600 \le 625 \le 660$, la escalera sí cumple la fórmula de Blondel.

b) 18,75 · 16 = 300 cm = 3 m

c) Tenemos que calcular la longitud de *PQ*.

Si trazamos una vertical por *Q*, esta corta el suelo en un punto que llamaremos *S*.



$\widehat{PQS}$ es un triángulo rectángulo del que conocemos:

$\overline{QS} = 18{,}75 \cdot 16 = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m}$

$\overline{PS} = 25 \cdot 16 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$

Por el teorema de Pitágoras,

$\overline{PQ}^2 = \overline{QS}^2 + \overline{PS}^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow \overline{PQ} = 5 \text{ m}$

La viga tendrá una longitud de 5 m.

2. Razona adecuadamente y resuelve dos de los tres apartados.

1. Resuelve correctamente solo uno de los tres apartados.

0. En cualquier otro caso.

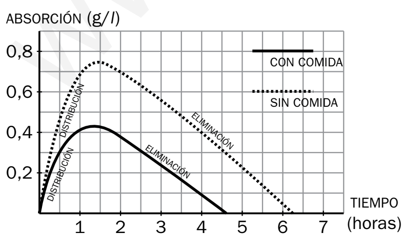
6 EL ALCOHOL, LA CURVA MÁS PELIGROSA DE LA CARRETERA

Competencia	Organizar, comprender e interpretar información.
Elemento de competencia	Comprende información presentada en formato gráfico.
Contenido	Funciones y gráficas.

Niveles de puntuación:

3. La respuesta correcta es:

a)



Tenemos que ver, en la gráfica, qué abscisa va asociada a la ordenada 0,5, en la curva que corresponde a un consumo sin comer, y en el tramo decreciente. El resultado es, aproximadamente, de 3,5 horas.

b) La curva “con comida” nunca llega a tomar el valor 0,5. Por tanto, no es necesario esperar para continuar conduciendo.

c) Tenemos que ver qué abscisa corresponde a la ordenada 0,3 en la curva “con comida”, en el tramo decreciente. Resulta, aproximadamente, de 2,5 horas.

d) En la curva correspondiente al consumo “sin comida”, la función toma el valor 0,3, en su tramo descendente, para un valor del tiempo igual a 4,5 horas, que será el tiempo que deberá esperar antes de volver a conducir.

e) Aproximadamente, 100 – 65 = 35%.

f) En la franja de 31 a 40 años.

2. Resuelve correctamente cuatro de los cinco apartados.

1. Resuelve correctamente dos de los cinco apartados.

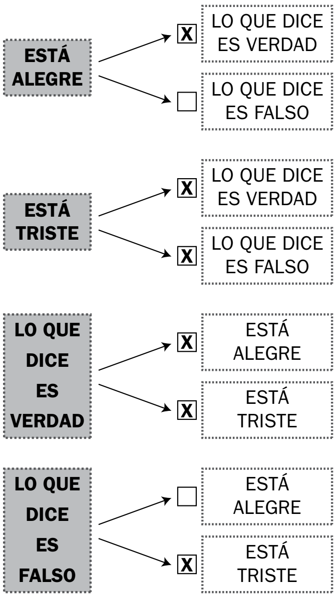
0. En cualquier otro caso.

7 RAZONAMIENTO LÓGICO

Competencia	Pensar. Razonar.
Elemento de competencia	Justifica resultados con argumentos de base matemática.
Contenido	Contenidos comunes.

Niveles de puntuación:

3.



2. Dos de las respuestas no son las acertadas.

1. El 50% de sus respuestas son acertadas.

0. En cualquier otro caso.