Radicales y racionalización

1º Sumas y restas de radicales.

a) $\sqrt{32}-\sqrt{8}-\sqrt{128}$ b) $2\sqrt{3}+3\sqrt{108}-5\sqrt{12}$

c) $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{15}$ d) $4\sqrt[3]{81}-5\sqrt[3]{24}+2\sqrt[3]{78125}$

2º Raíz de raíz.

a) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ b) $\sqrt[5]{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}$

c) $\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}$ d) $\sqrt{2\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}}}}$

3º Racionalización.

a) $\frac{5}{3\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{3}+\sqrt{27}}$ c) $\frac{x+2}{3\sqrt{x+2}}$ d) $\frac{4}{\sqrt[3]{5}}$

e) $\frac{a}{3\sqrt[5]{a^2}}$ f) $\frac{3ab^3}{\sqrt[8]{b^{19}}}$ g) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ h) $\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

i) $\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ j) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$ k) $\frac{1}{5+\sqrt[3]{2}}$

l) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}$ m) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}}$ n) $\frac{1}{\sqrt[n]{p}-\sqrt[n]{q}}$ ñ) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3}}$

4º Calcula

a) $m,n\in Z:\quad \sqrt{8+\sqrt{60}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$

b) $m,n\in Z:\quad \sqrt{21+6\sqrt{12}}=n+\sqrt{m}$

5º Demuestra que si $p=\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}$, p^2 es un número entero y calcula su valor.

6º Simplifica la expresión: $\sqrt[3]{\frac{15\sqrt{8}+3\sqrt{128}}{\sqrt{32}-\sqrt{18}}}$

7º Demuestra que la razón entre la diagonal y el lado de un pentágono regular es el número áureo o de oro.

IES Leonardo da Vinci.
Departamento de Matemáticas
Alba de Tormes, Salamanca

1º

Se extraen factores de los radicales.

¿Cómo?

Recuerda $\sqrt{a^2} = a$

Si el exponente de a es mayor de 2:

$$\sqrt{a^7} = \sqrt{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a \cdot a \cdot a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{a^7} = a^3 \cdot \sqrt{2}$$

De modo sistemático: ¿cuántos grupos de 2 hay en 7?

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array} \rightarrow a^7 = a^{2\cdot 3+1} = a^{2\cdot 3} \cdot a \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\sqrt{a^7}}} = \sqrt{a^{2\cdot 3}} \cdot \sqrt{a} = \underline{\underline{a^3 \cdot \sqrt{a}}}$$

ⓐ $\sqrt{32} - \sqrt{8} - \sqrt{128}$

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad 2^5 \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad 2^3 \qquad \begin{array}{r|l} 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad 2^7$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2 \cdot \sqrt{2} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

$$\sqrt{128} = \sqrt{2^7} = 2^3 \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$$

$$\sqrt{32} - \sqrt{8} - \sqrt{128} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = (4-2-8)\sqrt{2} = \boxed{-6\sqrt{2}}$$

ⓑ $2\sqrt{3} + 3\sqrt{108} - 5\sqrt{12}$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 2^2 \cdot 3^3 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 2^2 \cdot 3$$

$$\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} - 5 \cdot 2\sqrt{3} = (2 + 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2)\sqrt{3} = \boxed{8\sqrt{3}}$$

ⓒ $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{15}.$

$$\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

$$\Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{15}}{3} - \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{5} + \sqrt{15} = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1\right)\sqrt{15} = \frac{3-5+15}{15} \cdot \sqrt{15}$$

$$\boxed{\frac{13\sqrt{15}}{15}}$$

d) $4\sqrt[3]{81} - 5\sqrt[3]{24} + 2\sqrt[3]{78125}$

Recuerda

$$\sqrt[3]{a^3} = a \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{a\cdot b} = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}.$$

$$\begin{array}{r|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 81 = 3^4 \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 24 = 2^3\cdot 3 \qquad \begin{array}{r|l} 78125 & 5 \\ 15625 & 5 \\ 3125 & 5 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 78125 = 5^7$$

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3} = 2\cdot\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{78125} = \sqrt[3]{5^7} = \sqrt[3]{5^3\cdot 5^3\cdot 5} = 5\cdot 5\cdot\sqrt[3]{5} = 25\sqrt[3]{5} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow 4\cdot 3\sqrt[3]{3} - 5\cdot 2\sqrt[3]{3} + 2\cdot 25\sqrt[3]{5} = \boxed{2\cdot\sqrt[3]{3} + 50\cdot\sqrt[3]{5}}$$

Algunas veces la extracción se "ve" muy bien así:

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{\underbrace{3\cdot 3\cdot 3}_{3}\cdot 3} = 3\cdot\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{78125} = \sqrt[3]{\underbrace{5\cdot 5\cdot 5}_{5}\cdot\underbrace{5\cdot 5\cdot 5}_{5}\cdot 5} = 5\cdot 5\cdot\sqrt[3]{5}.$$

Departamento de Matemáticas

2º Recuerda

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \bullet \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \bullet \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

Introducción de factores

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b} \quad \bullet \quad \boxed{a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}}$$

a) $$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt{\sqrt{3^2 \cdot 3\sqrt{3}}} = \sqrt{\sqrt{3^3\sqrt{3}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3^6 \cdot 3}}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt{\sqrt{3^7}}} = \boxed{\sqrt[8]{3^7}}$$

b) $$\sqrt[5]{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}}$$

- Producto de potencias de diferente índice. ¿cómo? mediante radicales equivalentes del mismo índice. (será el m.c.m. de los índices)

$$\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$$

$$m.c.m\,(2,3) = 6$$

$$\sqrt[2]{2} = \sqrt[6]{2^3}$$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 4^2} = \sqrt[6]{128} \Rightarrow$$

$$\sqrt[5]{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \sqrt[5]{\sqrt[6]{128}} = \boxed{\sqrt[30]{128}}$$

ⓒ $\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{x^3}}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}$

radicales equivalentes con mismo índice : m.c.m(4,3) = 12

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^9} \\ \sqrt[3]{x} = \sqrt[12]{x^4} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[12]{x^9}}{\sqrt[12]{x^4}} = \sqrt[12]{\dfrac{x^9}{x^4}} = \boxed{\sqrt[12]{x^5}}$$

ⓓ $\sqrt{2\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}}}}$

- $\sqrt{2}+\sqrt{8} = \sqrt{2}+\sqrt{2^3} = \sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

- $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{72}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{72}{2}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{36} = \dfrac{6}{3} = 2.$

- $2\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}}} = 2\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2^2\cdot 2} = \sqrt{8}$

- $\sqrt{2\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}}}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \boxed{\sqrt[4]{8}}$

7º

a) $$\frac{5}{3\sqrt{2}} = \underbrace{\frac{5}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{3\cdot(\sqrt{2})^2} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \boxed{\frac{5\cdot\sqrt{2}}{6}}$$

RECUERDA: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$

b) $$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{3}+\sqrt{27}}$$

1ª opción: hay una suma con raíces cuadradas en el denominador, por lo tanto, se multiplica y divide por el conjugado.

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{3}+\sqrt{27}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{27}}{\sqrt{3}-\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{72}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{27})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{27})^2} = \frac{\sqrt{3\cdot 72} - \sqrt{72\cdot 27}}{3-27}$$

• extraemos factores

$$\sqrt{3\cdot 72} = \sqrt{3\cdot 2^3\cdot 3^2} = 2\cdot 3\cdot\sqrt{2\cdot 3} = 6\sqrt{6}$$

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$2^3\cdot 3^2$

$$\sqrt{72\cdot 27} = \sqrt{2^3\cdot 3^2\cdot 3^3} = 2\cdot 3^2\sqrt{2\cdot 3} = 18\sqrt{6}$$

27	3
9	3
3	3
1	

$$\frac{6\sqrt{6}-18\sqrt{6}}{-24} = \frac{-12\sqrt{6}}{-24} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

2ª opción $\sqrt{3}+\sqrt{27} = \sqrt{3}+\sqrt{3^3} = \sqrt{3}+3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
$\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$$\frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{2(\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{6}}{2\cdot 3} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

RECUERDA:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2 = a-b.$$

ⓒ $$\frac{x+2}{3\sqrt{x+2}} = \frac{x+2}{3\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{(x+2)\cdot\sqrt{x+2}}{3\cdot(\sqrt{x+2})^2} = \frac{(x+2)\cdot\sqrt{x+2}}{3(x+2)} = \boxed{\frac{\sqrt{x+2}}{3}}$$

ⓓ $$\frac{4}{\sqrt[3]{5}} =$$

RECUERDA.

$$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$ en general

$$\sqrt[n]{a^p}\cdot\sqrt[n]{a^{n-p}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{5}} = \frac{4}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{4\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{4\cdot\sqrt[3]{5^2}}{5} = \boxed{\frac{4\cdot\sqrt[3]{25}}{5}}$$

ⓔ $\dfrac{a}{3\sqrt[5]{a^2}} = \dfrac{a}{3\sqrt[5]{a^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^3}} = \dfrac{a\cdot\sqrt[5]{a^3}}{3\cdot\sqrt[5]{a^5}} = \dfrac{a\cdot\sqrt[5]{a^3}}{3a} = \boxed{\dfrac{\sqrt[5]{a^3}}{3}}$

ⓕ $\dfrac{3ab^3}{\sqrt[8]{b^{19}}}$

observa $\sqrt[8]{b^{19}}$ $\quad 19 > 8 \Rightarrow$ se pueden extraer factores.

$\begin{array}{r|l} 19 & 8 \\ 3 & 2 \end{array} \Leftrightarrow 19 = 2\cdot 8 + 3 \Rightarrow \sqrt[8]{b^{19}} = b^2\cdot\sqrt[8]{b^3}$

$$\frac{3\cdot a\cdot b^3}{b^2\cdot\sqrt[8]{b^3}} = \frac{3\cdot a\cdot b}{\sqrt[8]{b^3}} \cdot \frac{\sqrt[8]{b^5}}{\sqrt[8]{b^5}} = \frac{3ab\sqrt[8]{b^5}}{\sqrt[8]{b^8}} = \frac{3\cdot a\cdot b\cdot\sqrt[8]{b^5}}{b}$$

$$= \boxed{3a\sqrt[8]{b^5}}$$

ⓖ $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{3\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \boxed{\dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}}$

ⓗ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \cdot \dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}\cdot(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}$

$$= \frac{6\sqrt{12}-4\sqrt{18}}{18-12} = \frac{12\sqrt{3}-12\sqrt{2}}{6} = \boxed{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{12} = \sqrt{2^2\cdot 3} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{18} = \sqrt{2\cdot 3^2} = 3\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

i) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Aparecen 3 sumandos y 2 raíces en el denominador. Se multiplica y divide por un conjugado

opciones $2+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ ó $2-\sqrt{3}+\sqrt{5}$

Se trata de reducir una raíz.

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4+4\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-5} =$$

$$= \boxed{\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+4\sqrt{3}}} \quad \text{(esta ya es conocida)}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+4\sqrt{3}} \cdot \frac{2-4\sqrt{3}}{2-4\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(2-4\sqrt{3})}{2^2-(4\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{4-8\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4(\sqrt{3})^2-2\sqrt{5}+4\sqrt{15}}{4-48} = \frac{-8-6\sqrt{3}-2\sqrt{5}+4\sqrt{15}}{-44}$$

$$= \boxed{\frac{4+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{22}}$$

Puedes comprobar la 2ª opción: antes recoloca los términos

$$2-\sqrt{3}+\sqrt{5} = 2+\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \ldots$$

(j) Para este tipo de ejercicios: raíces CÚBICAS, CUARTAS... hay que recordar algunas identidades.

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)} \quad (1)$$

$a=2 \quad b=\sqrt[3]{2}.$

$$\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\underbrace{2-\sqrt[3]{2}}_{a-b}}\cdot\frac{2^2+2\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}{\underbrace{2^2+2\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}_{a^2+ab+b^2}} \underset{(*)}{=}$$

(*) en el denominador aparece el producto de la identidad (1).

$$=\frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2^3-(\sqrt[3]{2})^3}=\frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{8-2}=\boxed{\frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{6}}$$

(k) Identidad $\boxed{a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)}$

$a=5 \quad b=\sqrt[3]{2}$

$$\frac{1}{5+\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{5+\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{5^2-5\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}{5^2-5\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}=\frac{5^2-5\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}{5^3+(\sqrt[3]{2})^3}$$

$$=\frac{25-5\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{125+2}=\boxed{\frac{25-5\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{127}}$$

l) Identidad $\boxed{a^4 - b^4 = (a-b)\cdot(a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3)}$

$$a = \sqrt[4]{5} \qquad b = \sqrt[4]{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}_{a-b}} \cdot \frac{(\sqrt[4]{5})^3 + (\sqrt[4]{5})^2\cdot(\sqrt[4]{3}) + \sqrt[4]{5}\cdot(\sqrt[4]{3})^2 + (\sqrt[4]{3})^3}{\underbrace{(\sqrt[4]{5})^3 + (\sqrt[4]{5})^2\cdot\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{5}\cdot(\sqrt[4]{3})^2 + (\sqrt[4]{3})^3}_{a^3+a^2b+ab^2+b^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{125} + \sqrt[4]{75} + \sqrt[4]{45} + \sqrt[4]{27}}{(\sqrt[4]{5})^4 - (\sqrt[4]{3})^4}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt[4]{125} + \sqrt[4]{75} + \sqrt[4]{45} + \sqrt[4]{27}}{2}}$$

m) $$\frac{1}{\sqrt[5]{4}+\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}{(\sqrt[4]{5})^2-(\sqrt[4]{3})^2}$$

$$(\sqrt[4]{5})^2 = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} \quad \bullet \; (\sqrt[4]{3})^2 = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \boxed{\frac{(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}}$$

h) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{p}-\sqrt[n]{q}}$

•) si n es impar.

Se aplica la identidad

$$a^n-b^n=(a-b)\cdot\left(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}b^2+\cdots+a\cdot b^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

con $a=\sqrt[n]{p}$

$b=\sqrt[n]{q}$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{p}-\sqrt[n]{q}}=\frac{1}{\sqrt[n]{p}-\sqrt[n]{q}}\cdot\frac{(\sqrt[n]{p})^{n-1}+(\sqrt[n]{p})^{n-2}\cdot\sqrt[n]{q}+\cdots+(\sqrt[n]{q})^{n-1}}{(\sqrt[n]{p})^{n-1}+(\sqrt[n]{p})^{n-2}\cdot\sqrt[n]{q}+\cdots+(\sqrt[n]{q})^{n-1}}$$

$$=\frac{(\sqrt[n]{p})^{n-1}+(\sqrt[n]{p})^{n-2}\cdot(\sqrt[n]{q})+\cdots+(\sqrt[n]{q})^{n-1}}{(\sqrt[n]{p})^{n}-(\sqrt[n]{q})^{n}}$$

$$=\frac{(\sqrt[n]{p})^{n-1}+(\sqrt[n]{p})^{n-2}\cdot(\sqrt[n]{q})+\cdots+(\sqrt[n]{q})^{n-1}}{p-q}.$$

•) si n es par

$$\frac{1}{\sqrt[n]{p}-\sqrt[n]{q}}=\frac{1}{\sqrt[n]{p}-\sqrt[n]{q}}\cdot\frac{\sqrt[n]{p}+\sqrt[n]{q}}{\sqrt[n]{p}+\sqrt[n]{q}}=\frac{\sqrt[2m]{p}+\sqrt[2m]{q}}{\sqrt[m]{p}-\sqrt[m]{q}}$$

$\boxed{n=2m}$ $\quad \sqrt[n]{p^2}=\sqrt[2m]{p^2}=\sqrt[m]{p}.$

Si m es par se repite el proceso y si m es impar se aplica el procedimiento anterior.

ñ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3}}$ suma o resta con diferente índice.

• se puede eliminar una raíz multiplicando numerador y denominador por

$\sqrt[3]{2^2}$ ó $\sqrt[4]{3^3}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2+\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{4}}=\boxed{\frac{\sqrt[3]{4}}{2+\sqrt[12]{6912}}}$$

$$\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{3^3}\cdot\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{3^3\cdot 4^4}=\sqrt[12]{6912}$$

• como el índice es par y es una suma

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{2+\sqrt[12]{6912}}\cdot\frac{2-\sqrt[12]{6912}}{2+\sqrt[12]{6912}}=\frac{\sqrt[3]{4}\cdot(2-\sqrt[12]{6912})}{2^2-(\sqrt[12]{6912})^2}=\frac{\sqrt[3]{4}\cdot(2-\sqrt[12]{6912})}{4-\sqrt[6]{6912}}$$

• repitiendo el proceso por ser el índice par:

$$\frac{\sqrt[3]{4}\cdot(2-\sqrt[12]{6912})}{4-\sqrt[6]{6912}}\cdot\frac{4+\sqrt[6]{6912}}{4+\sqrt[6]{6912}}=\frac{\sqrt[3]{4}\cdot(2-\sqrt[12]{6912})\cdot(4+\sqrt[6]{6912})}{16-\sqrt[3]{6912}}$$

• aplicamos la identidad

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

con $\left.\begin{array}{l} a=16 \\ b=\sqrt[3]{6912}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$$\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\left(2-\sqrt[12]{6912}\right)\cdot\left(4+\sqrt[6]{6912}\right)}{\underbrace{16-\sqrt[3]{6912}}_{a-b}}\cdot\frac{16^2+16\cdot\sqrt[3]{6912}+\sqrt[3]{6912^2}}{\underbrace{16^2+16\cdot\sqrt[3]{6912}+\sqrt[3]{6912^2}}_{a^2+ab+b^2}} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\left(2-\sqrt[12]{6912}\right)\cdot\left(4+\sqrt[6]{6912}\right)\cdot\left(256+16\sqrt[3]{6912}+\sqrt[3]{6912^2}\right)}{16^3-6912}}$$

• Si hubiéramos multiplicado por $\sqrt[4]{3^3}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3^3}+3} = \frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[12]{314928}+3}$$

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{27} = \sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{27^3} = \sqrt[12]{314928}$$

y habría que haber hecho lo mismo.

Creo que nadie en un examen te propondrá un problema de estas características. El interés es sólo el hecho de SABER CÓMO se resuelve.

Quedaría como un ejercicio el tratar de generalizar este proceso.

4º

(a) Observa

$$8+\sqrt{60} = 8+\sqrt{4\cdot 15} = 8+2\sqrt{15} = 8+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$$

$$= 3+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+5 = (\sqrt{3})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{8+\sqrt{60} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}$$

$$\sqrt{8+\sqrt{60}} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2} = \sqrt{3}+\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} m=3 \\ n=5 \end{matrix}}$$

(b) Observa

$$21+6\cdot\sqrt{12} = 21+2\cdot 3\cdot\sqrt{12} =$$

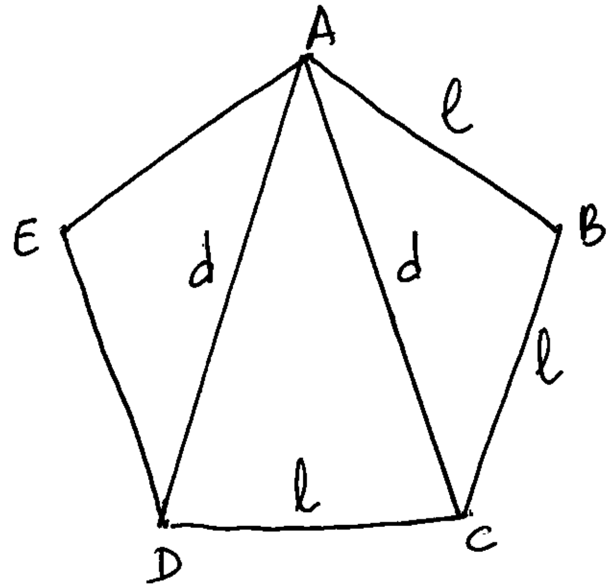
$$= 9+2\cdot 3\cdot\sqrt{12}+12 =$$

$$= 3^2+2\cdot 3\cdot\sqrt{12}+(\sqrt{12})^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{21+6\sqrt{12} = \left(3+\sqrt{12}\right)^2}$$

$$\sqrt{21+6\sqrt{12}} = \sqrt{(3+\sqrt{12})^2} = 3+\sqrt{12} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} n=3 \\ m=12 \end{matrix}}$$

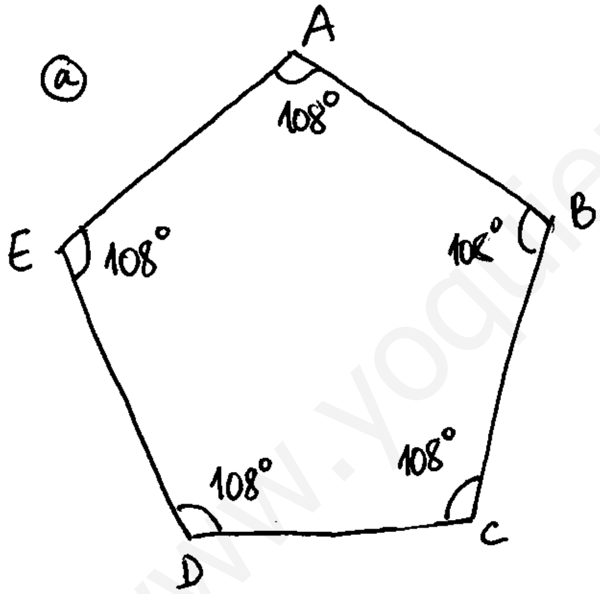
7º



Vamos a probar que en el pentágono regular ABCDE el cociente entre la diagonal (d) y el lado (l) es el número de oro

$$\boxed{\frac{d}{l} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

a)

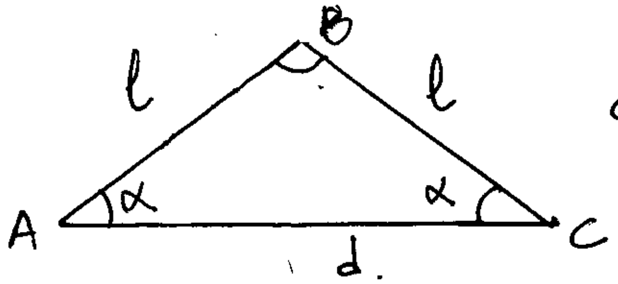


los ángulos $A = B = C = D = E$.

Cómo el pentágono queda descompuesto en 3 triángulos

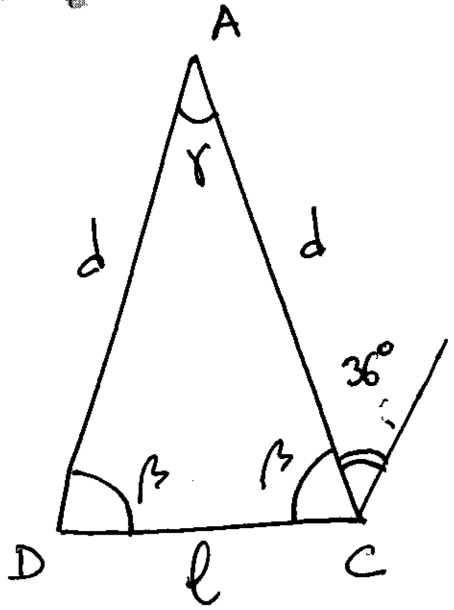
$$A = B = C = D = E = \frac{180° \cdot 3}{5} = \boxed{108°}$$

b) Los triángulos $\widehat{ADC}$ y $\widehat{ABC}$ son isósceles (tienen 2 lados iguales)



$= 108°$.

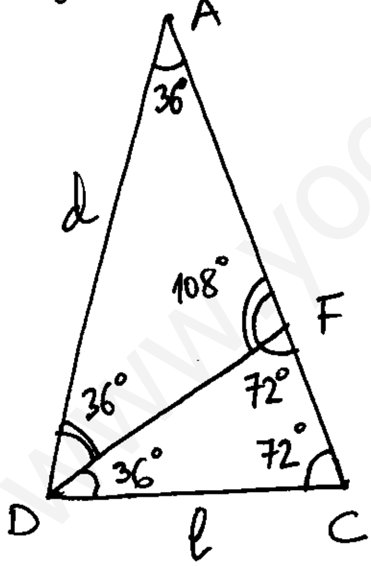
¿α? $2\alpha + 108° = 180° \rightarrow \boxed{\alpha = 36°}$



¿β? $\beta + 36° = 108° \longrightarrow \boxed{\beta = 72°}$

¿γ? $\gamma + 2\beta = 180° \longrightarrow \boxed{\gamma = 180° - 144° = 36°}$

ⓒ Figura clave donde se aplicará el teorema de Tales.
En el triángulo $\widehat{ADC}$ se construye otro con la bisectriz del ángulo D.



¿F? $180 - 36° - 72° = 72°$.

$\widehat{ADF}$ es isósceles

$AF = DF = \ell$

$\widehat{DFC}$ es isósceles $FC = d - \ell$

$\boxed{\text{clave}}$: los triángulos $\widehat{ADC}$ y $\widehat{DFC}$ son SEMEJANTES (tienen los mismos ángulos) $\Rightarrow$ el cociente de sus lados homólogos es igual.

$$\frac{AD}{DF} = \frac{DC}{FC} \iff \boxed{\frac{d}{\ell} = \frac{\ell}{d-\ell}}$$

$$\iff d\cdot(d-\ell) = \ell^2 \iff d^2 - d\ell = \ell^2 \iff \frac{d^2 - d\ell}{\ell^2} = 1$$

$$\iff \left(\frac{d}{\ell}\right)^2 - \frac{d}{\ell} = 1$$

llamando $R = \dfrac{d}{\ell} \implies \boxed{R^2 - R = 1} \iff R^2 - R - 1 = 0$

Resolviendo

$$R = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

como $R > 0$ sólo tiene sentido la solución positiva

$$\boxed{R = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{NÚMERO DE ORO}}$$

5º

Sea $p = \sqrt{6+4\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

$$p^2 = \left(\sqrt{6+4\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{6+4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \left(\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= 6+\underbrace{4\sqrt{2}} - 2\cdot\sqrt{(6+4\sqrt{2})\cdot(6-4\sqrt{2})} + 6-\underbrace{4\sqrt{2}}$$

$$= 12 - 2\cdot\sqrt{6^2-(4\sqrt{2})^2}$$

$$= 12 - 2\cdot\sqrt{36-32} = 12-2\cdot 2 = 8$$

$$\Rightarrow p^2 = 8 \Longrightarrow p = \sqrt{8}$$

6º Trabajemos cada parte por separado.

- $15\sqrt{8} + 3\sqrt{128}$

extraigamos factores $8 = 2^3 \to \sqrt{8} = 2\cdot\sqrt{2}$
$128 = 2^7 \to \sqrt{128} = 2^3\cdot\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ $\Big\} \Rightarrow$

$$15\cdot 2\sqrt{2} + 3\cdot 8\sqrt{2} = 30\sqrt{2} + 24\sqrt{2} = 54\sqrt{2}$$

- $\sqrt{32} - \sqrt{18} =$

$32 = 2^5 \to \sqrt{32} = 2^2\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ $\quad 18 = 2\cdot 3^2 \to \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{15\sqrt{8}+3\sqrt{128}}{\sqrt{32}-\sqrt{18}}} = \sqrt[3]{\frac{54\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2\cdot 3^3} = \boxed{3\cdot\sqrt[3]{2}}$$