



PÁGINA 11

- 1 En una sala hay 10 taburetes de tres patas y 6 sillas de 4 patas. En todos ellos hay sentadas personas con dos piernas. ¿Cuántas piernas y patas hay en total?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Número de patas: } 10 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 30 + 24 = 54 \\ \text{Número de piernas: } (10 + 6) \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32 \end{array} \right\} \text{En total: } 54 + 32 = 86$$

- 2 En una habitación hay taburetes de tres patas y sillas de cuatro patas. Cuando hay una persona sentada en cada uno de ellos, el número total de patas y piernas es 27. ¿Cuántos asientos hay?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cada silla ocupada} \rightarrow 6 \text{ patas y piernas} \\ \text{Cada taburete} \rightarrow 5 \text{ patas y piernas} \end{array} \right\} \text{¿Cuántos y cuantos } \textcircled{5} \text{ hemos de juntar para conseguir 27?}$$

$$\left. \begin{array}{l} (6 \text{ patas y piernas}) \ n \text{ veces} \\ (5 \text{ patas y piernas}) \ m \text{ veces} \end{array} \right\} 27 \text{ patas y piernas}$$

n y m han de ser números naturales:

- Si $n = 0$, $5 \cdot m = 27 \rightarrow$ No hay solución.
- Si $n = 1$, $6 + 5 \cdot m = 27 \rightarrow$ No hay solución.
- Si $n = 2$, $12 + 5 \cdot m = 27 \rightarrow m = 3$.
- Si $n = 3$, $18 + 5 \cdot m = 27 \rightarrow$ No hay solución.
- Si $n = 4$, $24 + 5 \cdot m = 27 \rightarrow$ No hay solución.

La única posibilidad es 2 sillas y 3 taburetes.

Este es un auténtico problema. El anterior es un ejercicio.

PÁGINA 12

- 1 El precio de una botella más su tapón es de 1,10 €. La botella vale 1 € más que el tapón. ¿Cuánto vale el tapón?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Botella} + \text{Tapón} = 1,10 \\ \text{Botella} = \text{Tapón} + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Botella} \rightarrow 1,05 \text{ €} \\ \text{Tapón} \rightarrow 0,05 \text{ €} \end{array}$$

- 2 Un pastor tenía 17 ovejas. Los lobos mataron a todas salvo a 7. ¿Cuántas le quedaron?

El resultado se ofrece en el enunciado. Le quedaron 7 ovejas.

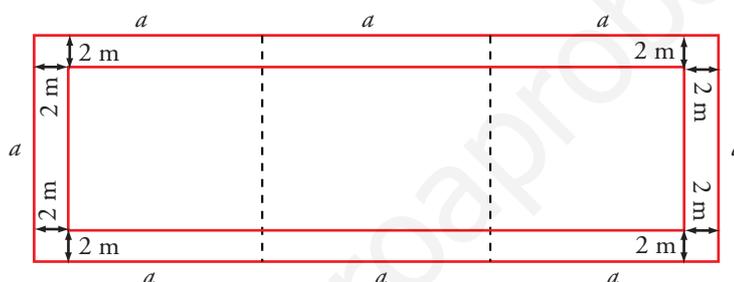
- 3 En una excursión, Pepe lleva 4 bocadillos y Rafa, 2 bocadillos. Cuando van a empezar a comer llega Javier, que no tiene comida. Reparten los bocadillos entre los tres por igual. Javier, como pago de lo que comió, les da 6 €. ¿Cómo se los deben repartir?



Seis bocadillos entre tres, tocan a 2 bocadillos cada uno. Por tanto, Rafa se come sus dos bocadillos, y los dos que se come Javier eran de Pepe. Es decir, el dinero que paga Javier por lo que se comió debe ser todo para Pepe, quien debe recibir los 6 €.

PÁGINA 13

- 1 Una parcela mide el triple de larga que de ancha. Dentro de la misma, en su parte externa, dejamos un pasillo de 2 m de ancho para plantar árboles. La parte interior se cierra con una empalizada que mide, en total, 144 m. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?



El perímetro de la parcela mide $(2 + 2) \cdot 4 = 16$ m más que el perímetro de la zona interior.

Por tanto, el perímetro de la parcela mide $144 + 6 = 160$ m.

8 veces a es 160 m. Por tanto: $a = 160 : 8 = 20$ m.

La parcela mide 20 m de ancha y 60 m de larga.

PÁGINA 15

- 1 En una granja se han vendido 1 782 huevos. Si dos docenas y media cuestan 4,5 €, ¿cuál ha sido la recaudación correspondiente a la venta de huevos?

$1\ 782 : 12 = 148,5 \rightarrow$ Se han vendido 148,5 docenas.

Calculamos el precio de una docena:

$$4,5 \text{ €} : 2,5 \text{ docenas} = 1,8 \text{ € cada docena}$$

Por tanto: $(148,5 \text{ docenas}) \times (1,8 \text{ € cada docena}) = 267,3 \text{ €}$ se han recaudado.

Otra resolución:

Dos docenas y media de huevos son 30 huevos.

$$4,5 \text{ €} : 30 \text{ huevos} = 0,15 \text{ € vale cada huevo}$$

$$0,15 \cdot 1\ 782 = 267,3 \text{ € es la recaudación total.}$$



- 2 Un empresario abre un negocio con una inversión inicial de 800 000 €. Durante el primer año pierde a razón de 60 000 € mensuales. A partir de ahí gana 40 000 € cada mes. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que inicia el negocio hasta que amortiza el gasto?

Durante el primer año pierde $60\,000 \cdot 12 = 720\,000$ €.

A las pérdidas del primer año les sumamos la inversión inicial y obtenemos los gastos:

$$80\,000 + 720\,000 = 1\,520\,000 \text{ € de gastos}$$

$$1\,520\,000 : 40\,000 = 38 \text{ meses han de transcurrir para recuperar los gastos.}$$

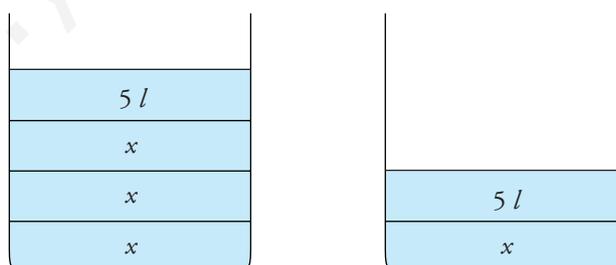
PÁGINA 16

Samuel, que es muy goloso, compra un tubo de chocolatinas. El primer día se come la mitad. El segundo día se come un tercio de lo que quedaba. El tercer día se come un cuarto del resto. El cuarto día se come 3 chocolatinas y se le termina el tubo. ¿Cuántas chocolatinas había?

El tubo tenía 12 chocolatinas. Comió 6 el primer día, 2 el segundo, 1 el tercero y 3 el cuarto.

- 1 En una garrafa hay doble cantidad de agua que en otra. Sacando 5 l de cada una, la primera quedaría con el triple de agua que la segunda. ¿Cuántos litros hay en cada garrafa?

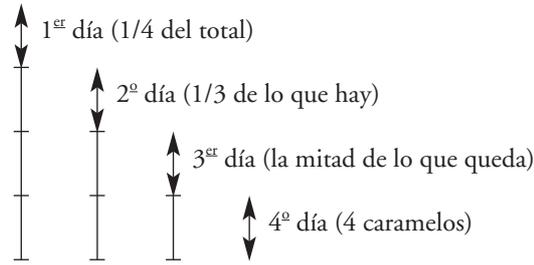
- Representa esquemáticamente la situación final y, después, añade 5 l y llega a la situación inicial.



Gráficamente se observa que 5 l es la cuarta parte de la primera garrafa y la mitad de la segunda.

Por tanto, en la primera hay 20 l, y en la segunda, 10 l.

- 2 Camila tiene una caja de caramelos. El primer día se come un cuarto. El segundo día se come un tercio de lo que le quedaba. El tercer día se come la mitad del resto. El cuarto día se come cuatro caramelos y se le termina la caja. ¿Cuántos caramelos había en la caja?

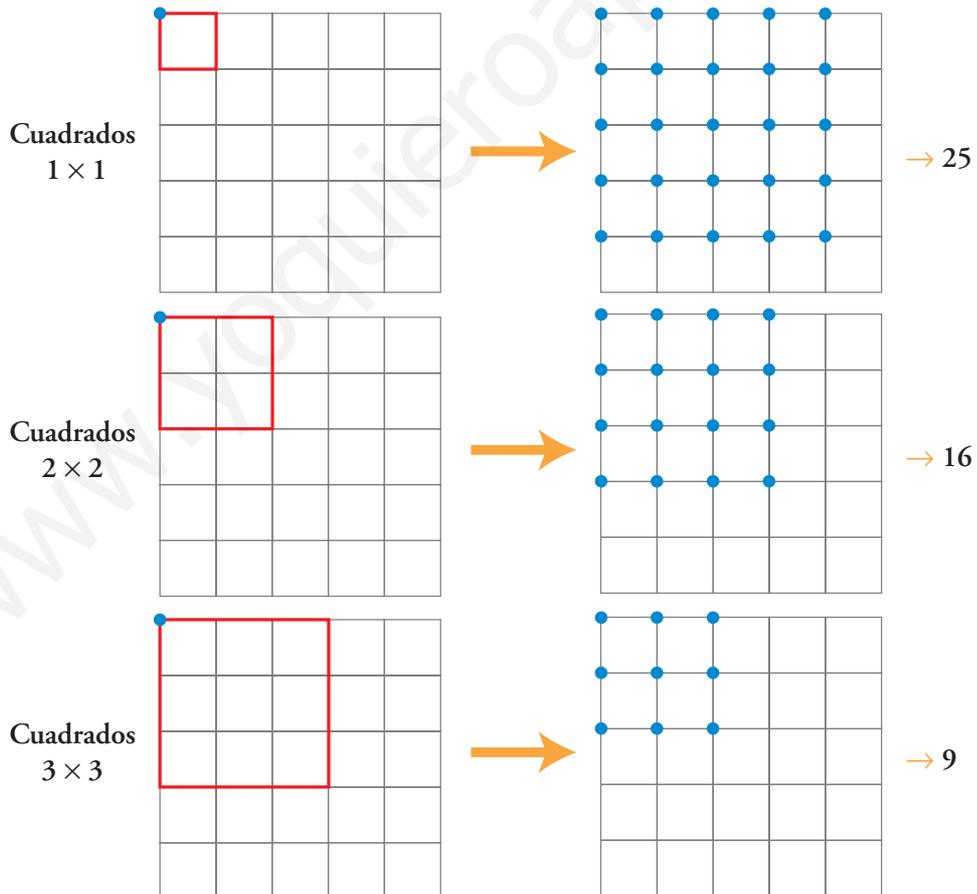


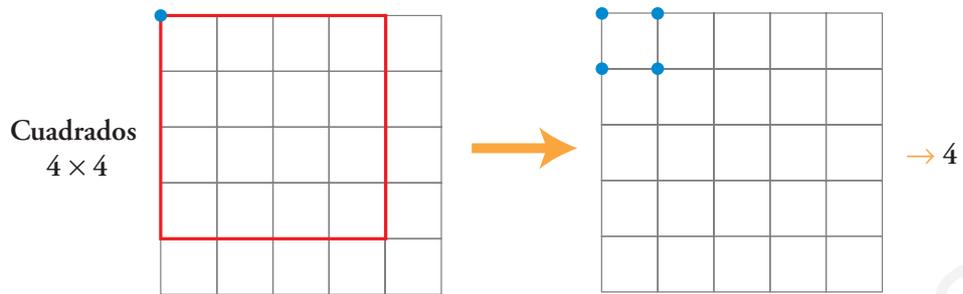
4 caramelos es la cuarta parte de lo que había en la caja.
Por tanto, en la caja había 16 caramelos.

PÁGINA 17

I ¿Cuántos cuadrados hay en una cuadrícula de 5×5 ? ¿Y en una cuadrícula de 6×6 ?

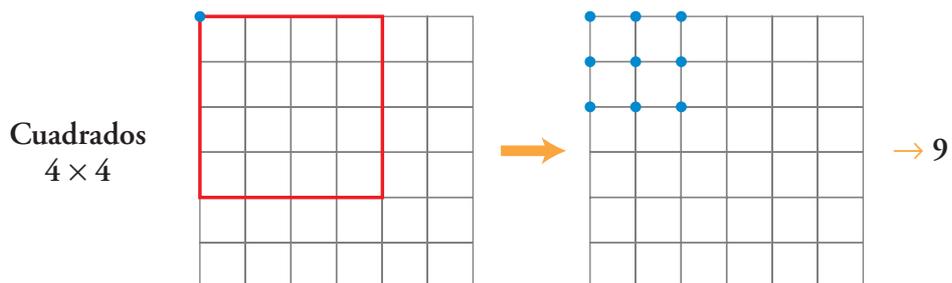
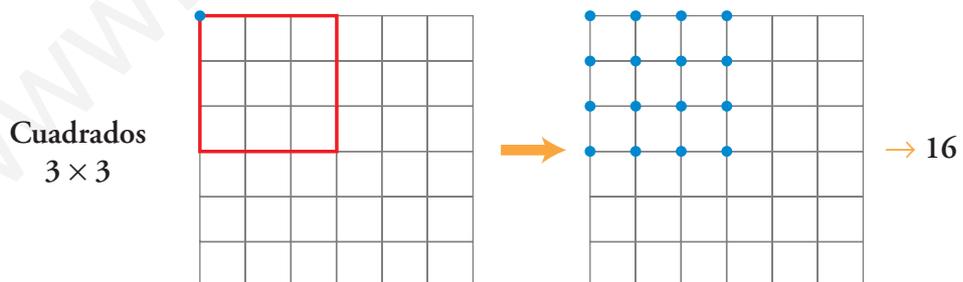
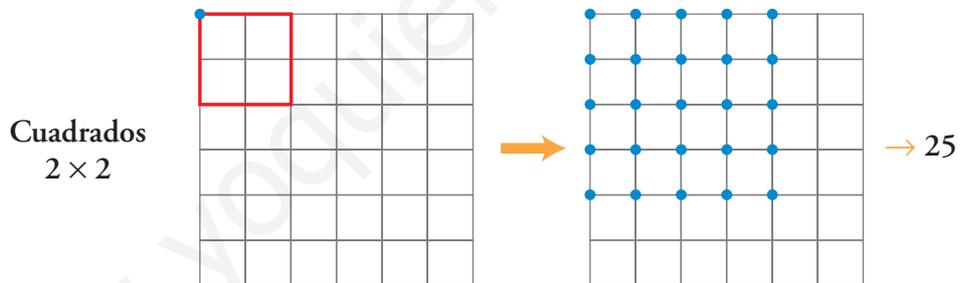
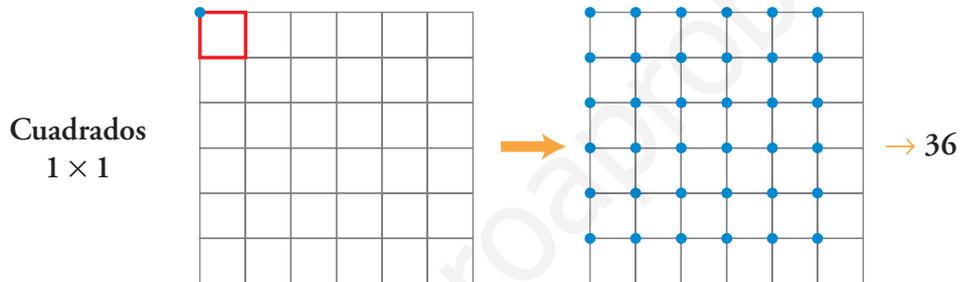
Cuadrícula 5×5 :

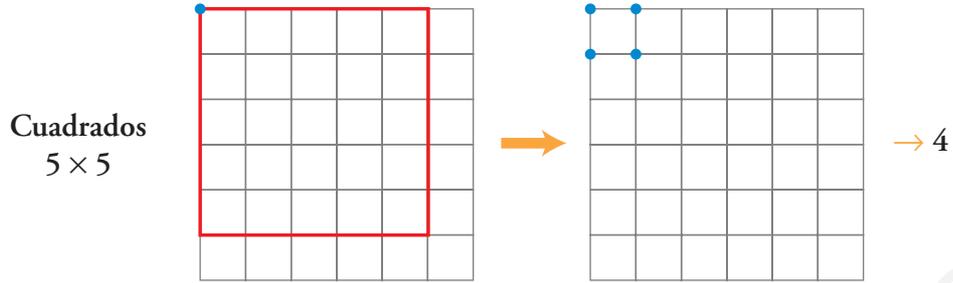




$$\text{Total} = 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$$

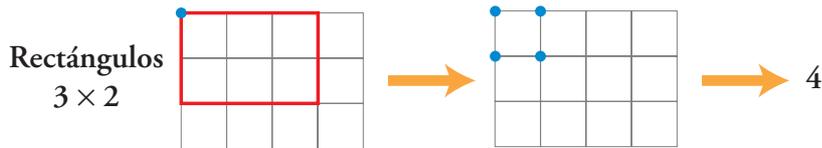
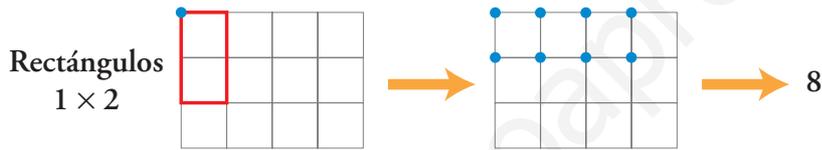
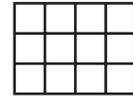
Cuadrícula 6×6 :

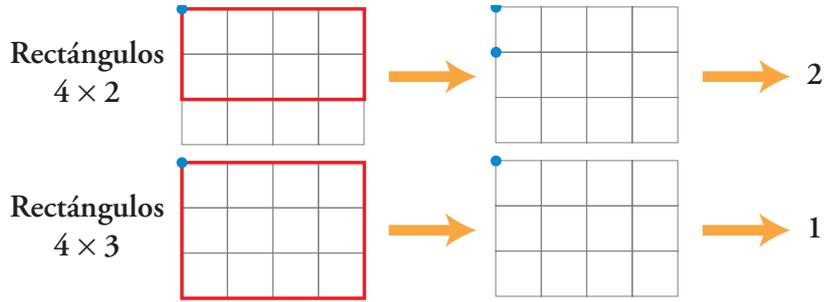




Total: $36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 91$

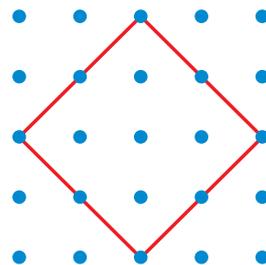
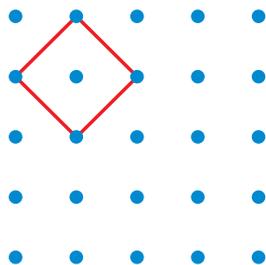
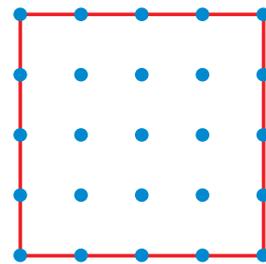
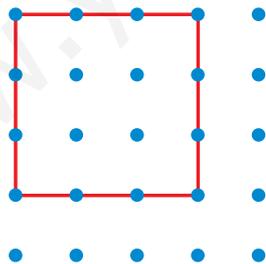
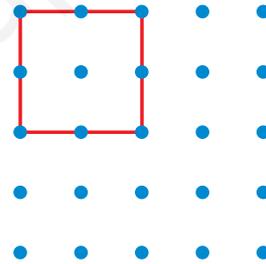
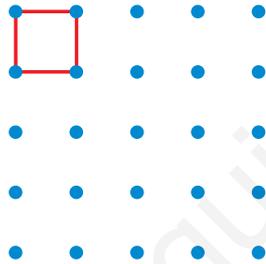
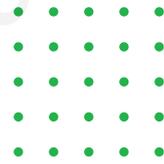
2 ¿Cuántos rectángulos no cuadrados hay en esta cuadrícula?

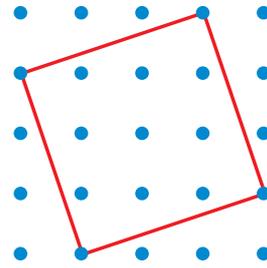
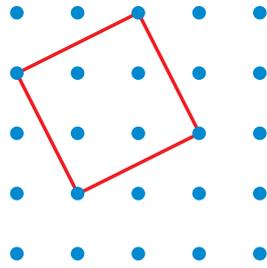




$$\text{Total} = 8 + 4 + 9 + 3 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 40$$

3 ¿Cuántos tipos de cuadrados se pueden dibujar con sus vértices en los puntos que ves a la derecha?



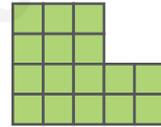


En total, 8 tipos de cuadrados.

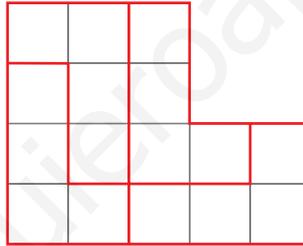
PÁGINA 18

1 Divide esta figura en cuatro partes de igual forma y tamaño:

■ Piensa primero cuántos cuadraditos debe tener cada parte.



Cada parte debe tener 4 cuadraditos. Tanteando, se llega a la siguiente solución:



2 Completa las casillas que faltan, de todas las formas posibles, para que la multiplicación esté bien hecha.

$$\begin{array}{r} \square \square 8 \\ \times \square \\ \hline \square 276 \end{array}$$

Tanteando, se llega a las dos soluciones siguientes:

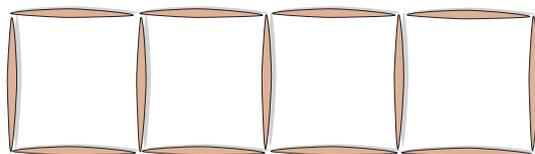
$$\begin{array}{r} 638 \\ \times 2 \\ \hline 1276 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 468 \\ \times 7 \\ \hline 3276 \end{array}$$

PÁGINA 19

■ PROBLEMAS

1 Para construir esta fila de 4 cuadrados se han necesitado 13 palillos.



¿Cuántos palillos se necesitan para construir una fila de 50 cuadrados?



Cada cuadrado se construye con tres palillos más de los que hay:

1 cuadrado \rightarrow 4 palillos

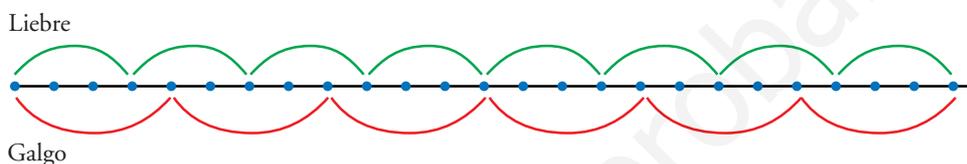
2 cuadrados \rightarrow $4 + 3 = 7$ palillos

3 cuadrados \rightarrow $7 + 3 = 10$ palillos

...

50 cuadrados \rightarrow $4 + (49 \cdot 3) = 4 + 147 = 151$ palillos

- 2 Un galgo persigue a una liebre. La liebre da saltos de 3 m y el galgo da saltos de 4 m. Si en un momento determinado las huellas del galgo coinciden con las de la liebre, ¿cuántas veces vuelve a ocurrir lo mismo en los siguientes 200 m?



Las huellas coinciden cada 12 metros.

En los siguientes 200 m coincidirán, por tanto, a los:

12 m 24 m 36 m 48 m 60 m 72 m 84 m 96 m
108 m 120 m 132 m 144 m 156 m 168 m 180 m 192 m

- 3 Entre Javier y Lorenzo tienen 16 canicas. Entre Javier y David tienen 13 canicas. Entre David y Lorenzo tienen 17 canicas. ¿Cuántas canicas tiene cada uno de los tres?

■ Si sumas $16 + 13 + 17 = 46$, ¿qué significado tiene esta cantidad? ¿Y la mitad de esta cantidad?

La suma de las tres cantidades es el doble del número de canicas que tienen entre los tres. Por tanto, entre los tres tienen $46 : 2 = 23$ canicas.

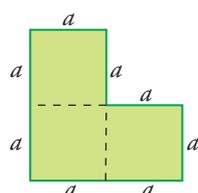
Para obtener lo que tiene cada uno, le restamos a esta cantidad lo que tienen entre los otros dos:

$23 - 16 = 7$ canicas tiene David.

$23 - 13 = 10$ canicas tiene Lorenzo.

$23 - 17 = 6$ canicas tiene Javier.

- 4 El perímetro de esta figura es de 160 mm. Calcula su área.



$$8a = 160 \text{ mm}$$

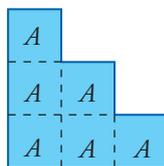
$$160 : 8 = a \rightarrow a = 20 \text{ mm}$$

$$\text{Área} = 3 \cdot a^2 = 3 \cdot (20)^2 = 1\,200 \text{ mm}^2 = 12 \text{ cm}^2$$





- 5 El área de esta finca es de 600 m^2 . ¿Cuál es la longitud de la valla que la rodea?



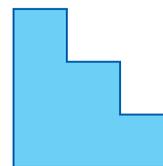
$$6A = 600 \text{ m}^2$$

$$A = 600 : 6 \rightarrow A = 100 \text{ m}^2$$

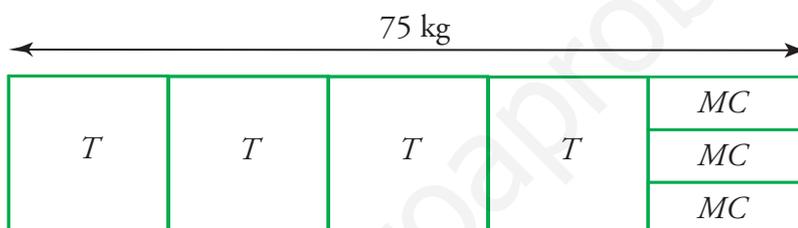
Por tanto, el lado de cada cuadrado pequeño mide $\sqrt{A} = 10 \text{ m}$.

La longitud de la valla que rodea la finca es:

$$12 \cdot 10 = 120 \text{ m}$$



- 6 Un transportista carga en su motocarro 4 televisores y 3 minicadenas musicales. Si cada televisor pesa como 3 minicadenas y en total ha cargado 75 kg , ¿cuánto pesa cada televisor?



Un televisor pesa $75 : 5 = 15 \text{ kg}$.

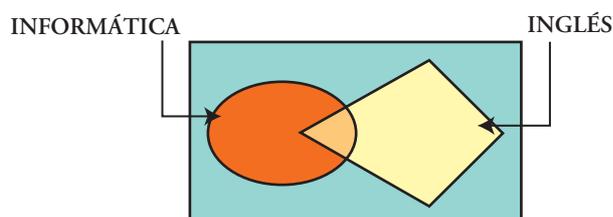
Una minicadena pesa $15 : 3 = 5 \text{ kg}$.

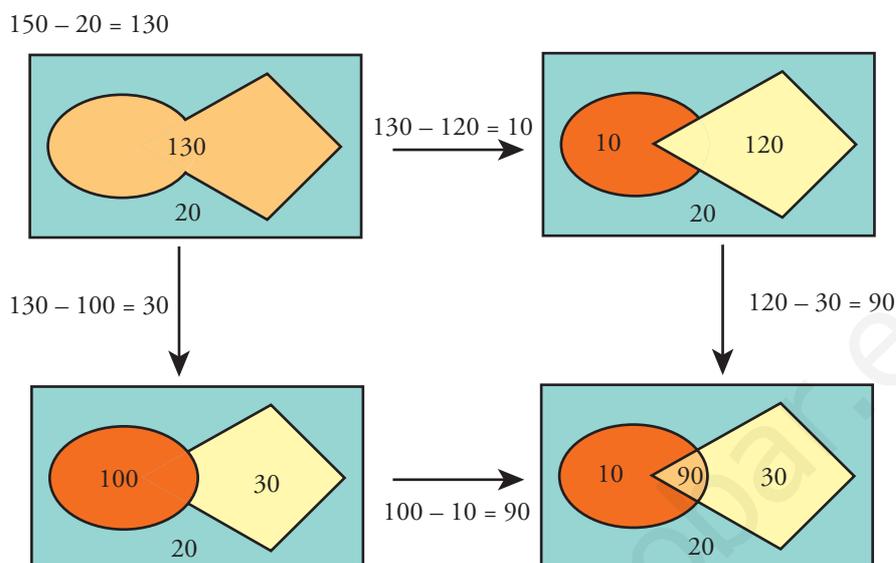
- 7 En un colegio hay dos clases de primero de ESO: A y B. Si en el grupo A se hacen equipos de 5 para jugar a baloncesto, sobran 3 personas. Si se hace lo mismo en el grupo B, sobran 4. ¿Cuántos sobrarán si se hacen los equipos después de juntar ambos grupos? Con los que sobran de cada clase, 3 y 4, se hace un equipo de 5 y sobran 2 personas.

- 8 De los 150 alumnos y alumnas de un colegio, 120 estudian inglés; 100, informática, y solo 20 ni lo uno ni lo otro.

¿Cuántos estudian ambas materias?

■ Representa los datos en un diagrama como este:





Hay 90 personas que estudian ambas materias.

- 9 En un examen de 20 preguntas, por cada pregunta acertada dan 3 puntos y por cada pregunta fallada (equivocada o no contestada) quitan 2.

¿Cuántas preguntas ha acertado y cuántas ha fallado un alumno que ha obtenido un resultado de 15 puntos?

El máximo número de puntos que se pueden conseguir es 60 (todas las preguntas acertadas): $20 \cdot 3 = 60$

Cada pregunta fallada cuesta 5 puntos, 3 por no acertar y 2 por fallar.

Un alumno ha perdido $60 - 15 = 45$ puntos:

$$45 : 5 = 9 \rightarrow \text{Ha fallado 9 preguntas.}$$

Por tanto, ha acertado 11 preguntas y ha fallado 9:

$$11 \cdot 3 - 9 \cdot 2 = 15$$

$$9 + 11 = 20$$

- 10 Un chico le dice a otro: “Tengo igual número de hermanos que de hermanas”.

Sin embargo, su hermana puede decir sin faltar a la verdad: “Tengo doble número de hermanos que de hermanas”. ¿Cuántos son en total entre unas y otros?

Son 4 hermanos y 3 hermanas.

PÁGINA 20

- 11 Un grupo de amigos entra en una cafetería.



Todos piden un café, y la quinta parte de ellos pide, además, un bollo.

Un café cuesta 0,85 € y un bollo, 1,10 €.

Para pagar le entregan 11 € al camarero.

¿Han dejado propina? Si es así, ¿cuánto?

Si una quinta parte de los amigos piden un bollo, en total son 5 ó 10 ó 15, ...

Si son 5, entonces 4 de ellos piden café y 1, café y bollo; de manera que tendrían que pagar:

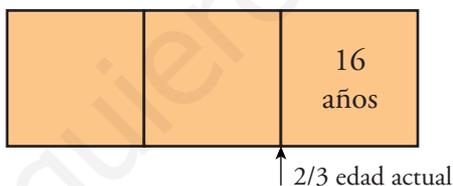
$$5 \cdot 0,85 \text{ €} + 1,10 \text{ €} = 5,35 \text{ €}. \text{ No vale.}$$

Si son 10 amigos, 8 piden café y 2 piden café y bollo, y pagarán:

$$10 \cdot 0,85 \text{ €} + 2,20 \text{ €} = 10,70 \text{ €}$$

Efectivamente, han de ser 10 amigos y dejan 0,30 € de propina.

12 Marta tenía, hace 16 años, $\frac{2}{3}$ de su edad actual. ¿Cuántos años tiene ahora?



16 años suponen $\frac{1}{3}$ de la edad actual.

Por tanto, la edad de Marta es $16 \cdot 3 = 48$ años.

13 Usando 10 palillos, se ha construido una casa con la fachada mirando hacia la izquierda, como muestra la figura.



Cambiando de posición dos palillos, ¿podrías conseguir que la casa quedara con la fachada mirando a la derecha?





14 ¿Cuántos números entre 100 y 400 contienen el dígito 2?

102, 112, 132, 142, ..., 192	son 9	} En total 138.
de 120 a 129	son 10	
de 200 a 299	son 100	
302, 312, 332, 342, ..., 392	son 9	
de 320 a 329	son 10	

15 Encuentra tres números naturales consecutivos cuya suma sea 264.

La suma de tres números consecutivos es tres veces el de en medio.

$$264 : 3 = 88$$

Los números son 87, 88 y 89.

16 Se ha cercado un corral cuadrado con cinco filas de alambre sostenidas por postes colocados a dos metros de distancia. Se han necesitado 60 postes. Si el metro de alambre está a 0,45 € y cada poste sale por 2 €, ¿cuál ha sido el coste de los materiales empleados?

Hay tantos espacios entre postes como postes. Por tanto, el perímetro del corral es $60 \cdot 2 = 120$ m.

Como hay 5 filas de alambre, se han necesitado $120 \cdot 5 = 600$ m de alambre.

El alambre cuesta $600 \cdot 0,45 \text{ €} = 270 \text{ €}$	} Total: 390 €
Los postes cuestan $60 \cdot 2 \text{ €} = 120 \text{ €}$	

17 Aurora, entre las moscas y las arañas de su colección de bichos, ha contado 11 cabezas y 76 patas. ¿Cuántas arañas y cuántas moscas tiene?

Las moscas tienen 6 patas, y las arañas, 8.

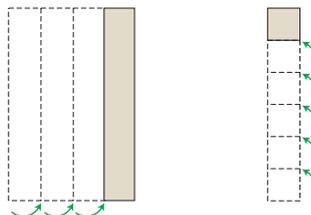
Si todas fuesen moscas (hay 11 cabezas), habría $6 \cdot 11 = 66$ patas.

Faltan, hasta el total de patas, $76 - 66 = 10$ patas.

Estas 10 patas corresponden a 5 arañas.

Por tanto, hay 6 moscas y 5 arañas.

18 Una hoja de papel con forma de rectángulo tiene un perímetro de 80 cm. Si la pliega en cuatro a lo largo y luego en seis a lo ancho, obtengo un cuadrado.



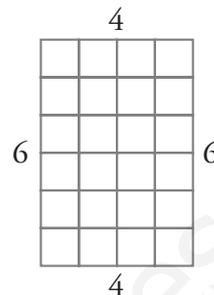


¿Cuáles son las dimensiones del papel?

En el gráfico vemos que el perímetro es $(6 + 4) \cdot 2 = 20$ veces el lado del cuadrado pequeño.

El lado del cuadrado mide $80 : 20 = 4$ cm

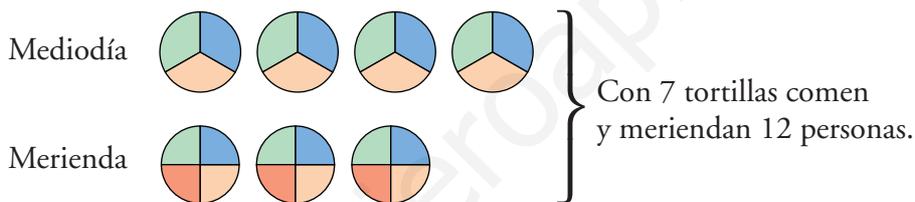
La hoja de papel mide 24 cm de largo y 16 cm de ancho.



19 Todos los chicos y chicas de la clase de Romualdo se van de excursión al campo. Entre otras cosas, encargan 14 tortillas.

Al mediodía, se reparten una tortilla para cada tres personas, y en la merienda, una para cada cuatro.

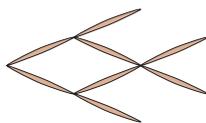
¿Cuántas personas fueron de excursión?



Con 14 tortillas comen y meriendan 24 personas.

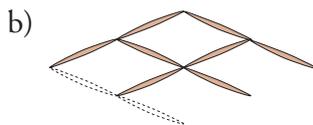
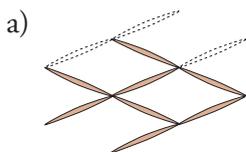
Van de excursión 24 personas.

20 Hemos construido un pez con 8 palillos.



a) Moviendo solo tres palillos, consigue que el pez vaya en la dirección contraria.

b) Si movemos solo dos palillos, podemos conseguir un pez que mire en otra dirección. Compruébalo.



21 ¿Cuántas veces utilizarás la cifra 5 si escribes todos los capicúas de tres cifras?

Capicúas de tres cifras que contienen la cifra 5:



151 656
 252 757
 353 858
 454 959
 555

11 veces

505
 515 565
 525 575
 535 585
 545 595

18 veces

Se utiliza 29 veces.

22 Si escribes todos los números impares entre el 55 y el 555, ¿cuántas veces habrás usado la cifra 6?

Del 61 al 69 → 5 veces
 Del 161 al 169 → 5 veces
 Del 261 al 269 → 5 veces
 Del 361 al 369 → 5 veces
 Del 461 al 469 → 5 veces

Total: $5 \cdot 5 = 25$ veces

23 ¿Cuántos números capicúas de dos cifras hay? ¿Y de tres cifras?

De dos cifras:

11 22 33 44 ... 99 → 9 números

De tres cifras:

101 111 121 131 ... 191 → 10 números

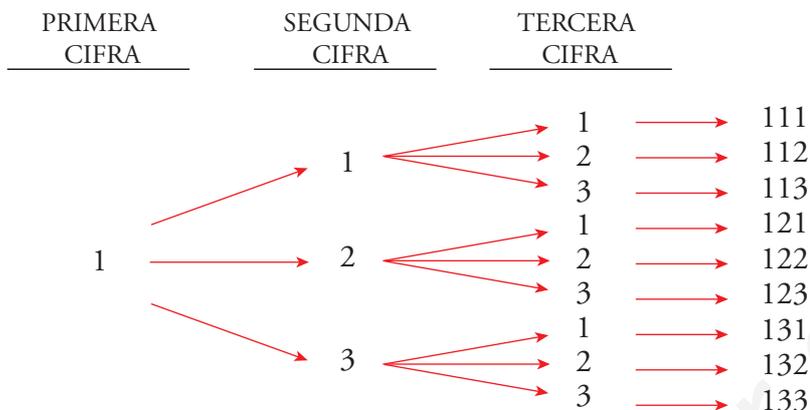
202 212 222 232 ... 292 → 10 números

...

909 919 929 939 ... 999 → 10 números

Total: $9 \cdot 10 = 90$ números

24 ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar utilizando solamente las cifras 1, 2 y 3?



Haciendo lo mismo si la primera cifra es un 2 o un 3, se concluye que en total se pueden formar 27 números distintos.

25 Expresa el número 10 utilizando cinco nueves y las operaciones que necesites. Busca varias soluciones.

$$99 : 9 - 9 : 9 = 11 - 1 = 10$$

$$9 \cdot 9 : 9 + 9 : 9 = 81 : 9 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$(9 + 9 - 9) + (9 : 9) = 9 + 1 = 10$$

$$(9 + 9 : 9) \cdot 9 : 9 = (9 + 1) \cdot 9 : 9 = 10 \cdot 9 : 9 = 90 : 9 = 10$$

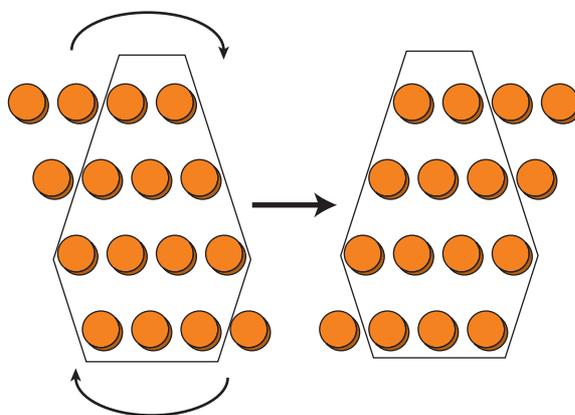
$$(99 : 99) + 9 = 1 + 9 = 10$$

26 Halla el número más pequeño que se pueda obtener multiplicando tres números enteros positivos cuya suma sea 12.

Se obtiene al multiplicar $1 \cdot 1 \cdot 10 = 10$

$$1 + 1 + 10 = 12$$

27 ¿Cuántas fichas es necesario mover para transformar una figura en la otra?



Hay que mover cuatro fichas.



PAGINA 21

- 28 Susana y Miguel conciertan una cita a las ocho de la tarde. El reloj de Susana está atrasado 10 minutos, pero ella cree que está 5 minutos adelantado. El reloj de Miguel está adelantado 5 minutos, pero él cree que está atrasado 10. ¿Quién llegará antes a la cita?

	CREE QUE LLEGARÁ A LAS...	SU RELOJ MARCA LAS...	EN REALIDAD SON LAS...
SUSANA	8	8 h 5 min	8 h 15 min
MIGUEL	8	7 h 50 min	7 h 45 min

Miguel llegará antes a la cita.

- 29 Tengo en el bolsillo 25 monedas. Todas son de 0,50 € o de 0,20 €. En total tengo 8 €. ¿Cuántas monedas tengo de cada clase?

MONEDAS DE 0,5 €	MONEDAS DE 0,2 €	TOTAL EUROS	TOTAL MONEDAS
16	0	8	16
14	5	8	19
12	10	8	22
10	15	8	25

Son, en total, 10 monedas de 0,5 € y 15 monedas de 0,2 €.

- 30 Estás junto a una fuente y dispones de una jarra de 5 litros y de otra de 3 litros. ¿Cómo te las arreglarías para medir un litro de agua?

JARRA DE 5 l	JARRA DE 3 l
0	3
3	0
3	3
5	1

→ Llenamos la jarra de 3 litros.

→ Pasamos el contenido de la pequeña a la grande.

→ Llenamos, de la fuente, la jarra de 3 litros.

→ Con el contenido de la jarra pequeña acabamos de llenar la grande, y nos queda en la pequeña 1 litro.

- 31 Un repartidor lleva en su camión siete cajas de refrescos llenas, siete medio llenas y siete vacías. Si desea repartir su mercancía en tres supermercados dejando en cada uno el mismo número de refrescos y el mismo número de cajas, ¿cómo debe hacer el reparto? Supón que tienen mucha prisa y no quiere andar cambiando botellas de unas cajas a otras. ¿Cómo se las arreglará?

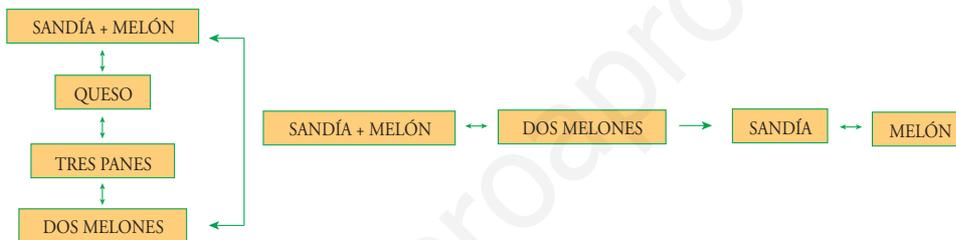


	PRIMER SUPERMERCADO	SEGUNDO SUPERMERCADO	TERCER SUPERMERCADO
CAJAS LLENAS	3	2	2
CAJAS MEDIO LLENAS	1	3	3
CAJAS VACÍAS	3	2	2

32 En el mercado del trueque se cambia:

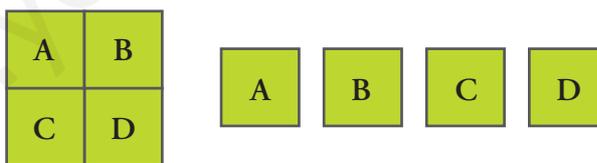
- Una sandía y un melón por un queso.
- Un queso por tres panes.
- Dos melones por tres panes.

¿Cuántas sandías te darán por un queso?

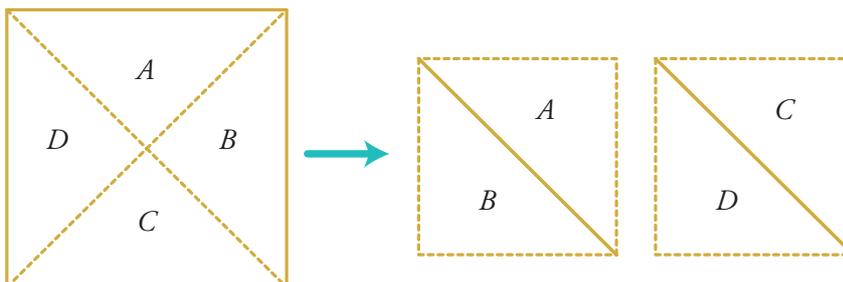


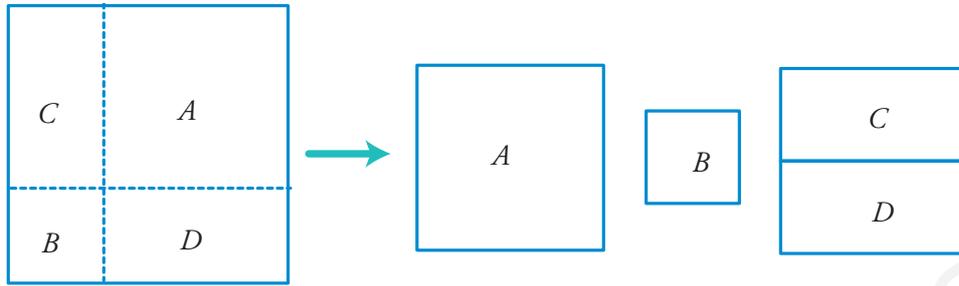
Por un queso darán dos sandías.

33 Dando dos cortes a un cuadrado se pueden obtener con facilidad 4 cuadrados:

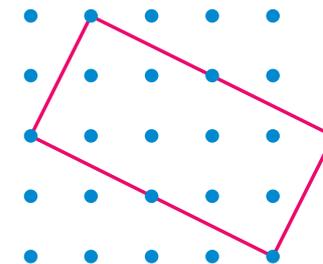
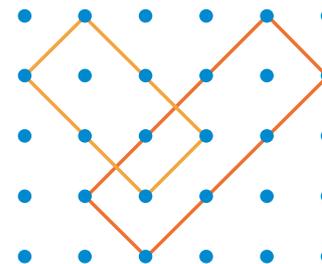
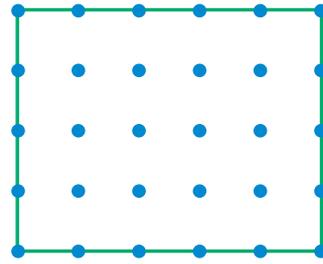
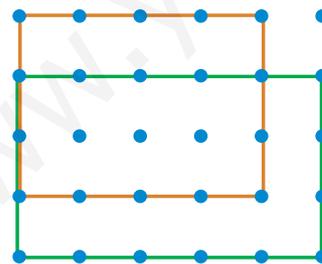
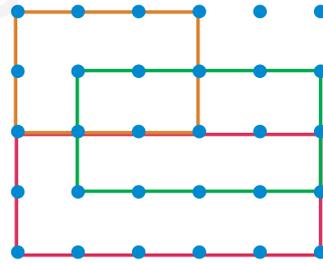
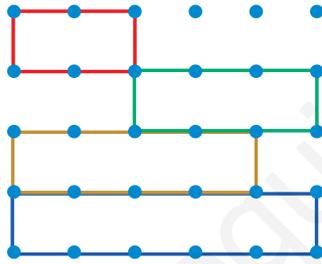
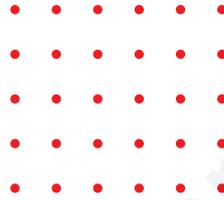


- ¿Sabrías construir dos cuadrados con los trozos obtenidos al dar dos cortes rectos a un cuadrado?
- ¡Más difícil todavía! ¿Sabrías construir tres cuadrados con los trozos obtenidos al dar dos cortes rectos a un cuadrado?





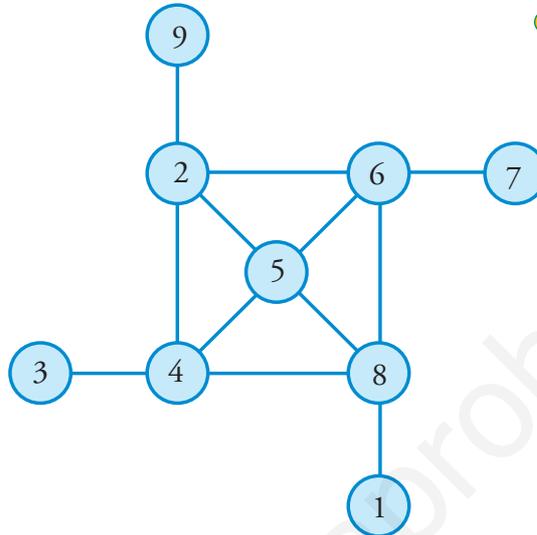
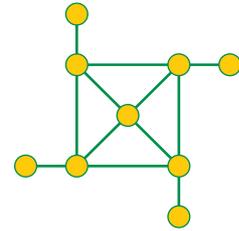
34 ¿Cuántos tipos de rectángulos no cuadrados se pueden dibujar con sus vértices en los puntos que aparecen debajo?



13 tipos.



35 Coloca los números del 1 al 9, cada uno en una casilla, de modo que los de la misma línea (horizontal o vertical) sumen lo mismo.



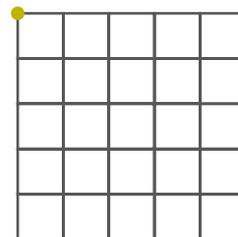
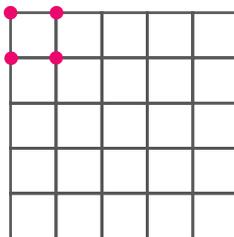
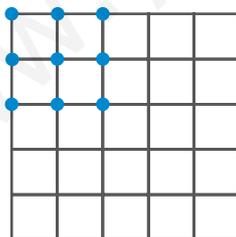
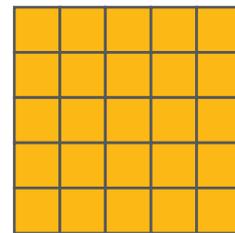
36 ¿Cuántos cuadrados de perímetro mayor que 10 hay en esta cuadrícula?

¿Y cuántos rectángulos de perímetro mayor que 15?

CUADRADOS

Para que el perímetro sea mayor que 10, el lado ha de ser 3 o más.

Es decir, son cuadrados 3×3 , 4×4 , 5×5 .



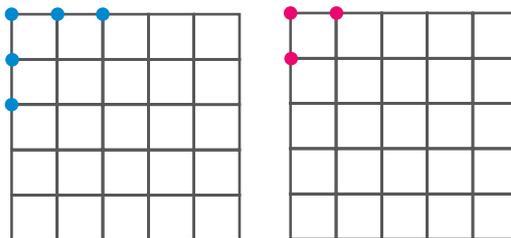
Hay 9 cuadrados 3×3 }
4 cuadrados 4×4 } En total 14 cuadrados de perímetro mayor que 10.
1 cuadrado 5×5 }

RECTÁNGULOS

Los rectángulos de perímetros mayor que 15 son de los siguientes tipos:

3×5 (perímetro 16)

4×5 (perímetro 18)



Hay 5 rectángulos 3×5 } En total hay 8 rectángulos de perímetro mayor que
 3 rectángulos 4×5 } 15.

37 Tengo tres cajas idénticas.

Una contiene caramelos de naranja; la otra, caramelos de limón, y la tercera, mezcla de caramelos de naranja y de limón.

Están etiquetadas con las referencias NN, LL y NL, pero ninguna caja lleva la etiqueta que le corresponde.

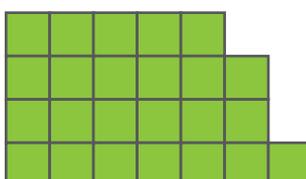
Raquel dice que si me da una caja y yo saco un caramelo y se lo enseño, puede adivinar el contenido de todas las cajas.

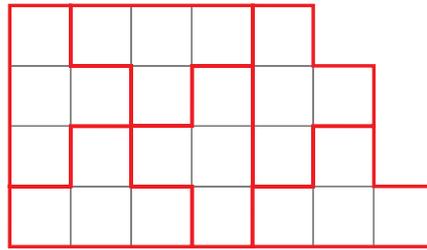
Si crees que es cierto lo que dice Raquel, explica cómo lo consigues.

Raquel debe darle la caja con la etiqueta NL. Ella sabe que esta caja no contiene mezcla de caramelos de naranja y de limón, porque ninguna caja lleva la etiqueta que le corresponde.

- Si el caramelo que saca es de naranja:
 - La caja etiquetada con NL contiene caramelos de naranja.
 - La caja etiquetada con LL, que no puede contener solo caramelos de limón, contendrá la mezcla.
 - La caja etiquetada con NN contendrá los caramelos de limón.
- Si el caramelo que se saca es de limón, el razonamiento es similar:
 - NL contiene caramelos de limón.
 - LL contiene caramelos de naranja.
 - NN contiene la mezcla.

38 Divide esta figura en seis partes de igual forma y tamaño.





www.yoquieroaprobar.es

PÁGINA 38

■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Sistemas de numeración

- 1 ▲▲▲ Con los símbolos $| = 1$, $\text{⎵} = 5$ y $\text{⎶} = 20$, escribe los números 8, 23, 65 y 118. ¿Crees que es un sistema adecuado para escribir números grandes? ¿Se trata de un sistema aditivo o es posicional?

$$8 = \text{⎵} | | |$$

$$65 = \text{⎶} \text{⎶} \text{⎶} \text{⎵}$$

$$23 = \text{⎶} | | |$$

$$118 = \text{⎶} \text{⎶} \text{⎶} \text{⎶} \text{⎶} \text{⎵} \text{⎵} \text{⎵} | | |$$

No es un buen sistema para los números grandes, pues se trata de un sistema aditivo que requeriría muchos símbolos.

- 2 ▲▲▲ ¿Qué números representaban estas inscripciones en el antiguo Egipto?



Los números representados son 234 y 3 012.

- 3 ▲▲▲ Traduce al sistema decimal:

LXXXIV

CCCXXXIII

MDLX

LXXXIV = 84

CCCXXXIII = 333

MDLX = 1 560

- 4 ▲▲▲ Escribe el valor de la cifra 9 en cada uno de estos números:

a) 193

b) 5 639

c) 6 937 000

a) 193 → 90

b) 5 639 → 9

c) 6 937 000 → 900 000

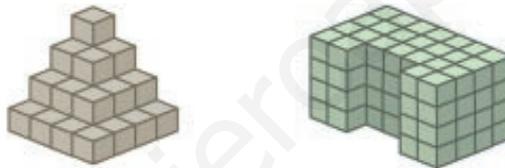
5 ▲▲▲ Observa la tabla y responde:

M	CM	DM	UM	C	D	U
				7	2	0
			3	5	2	8
4	5	0	0	0	0	0

- a) ¿Cuántas unidades haces con 72 decenas?
 b) ¿Cuántas centenas completas hay en 3 528 unidades?
 c) ¿Cuántas decenas de millar hay en cuatro millones y medio?
- a) 72 decenas = 720 unidades
 b) En 3 528 unidades hay 35 centenas completas.
 c) 4 millones y medio = 450 decenas de millar

Conteos, estimaciones, códigos

6 ▲▲▲ ¿Cuántos cubos hay en cada construcción?



Construcción izquierda:

$$1 + 4 + 9 + 16 = 30 \text{ cubos}$$

Construcción derecha:

$$(2 \cdot 1 \cdot 4) + (2 \cdot 1 \cdot 4) + (7 \cdot 2 \cdot 4) = 8 + 8 + 56 = 72$$

7 ▲▲▲ Observa esta serie y calcula:

2 5 7 9 11 13 ...

- a) El decimotercer término.
 b) El vigesimosegundo término.
 c) El término que ocupa el lugar trigésimo.
- a) A partir del segundo término son los números impares de la forma $2n + 1$:
 $2 \cdot 13 + 1 = 27$
- b) $2 \cdot 22 + 1 = 45$
 c) $2 \cdot 30 + 1 = 61$

8 ▲▲▲ ¿Cuántos coches hay matriculados entre los dos que llevan estas matrículas?

9998-BBC

0005-BBD

Hay 6 coches que llevan las matrículas →

{	9999BBC
	0000BBD
	0001BBD
	0002BBD
	0003BBD
	0004BBD

- 9 ▲▲▲ El código numérico 16-01-91 expresa la fecha de nacimiento de Clara. ¿Qué día es su cumpleaños? ¿Cuál es su edad actual?

Clara cumple años el 16 de enero.

Si estuviésemos en el año 2002, en este año habría cumplido 11 años.

Si estuviésemos en el año 2003, 12 años. Etc..

- 10 ▲▲▲ ¿Cuál es el código postal de tu domicilio? A la vista del mismo, ¿cuáles son los números que identifican la provincia en la que vives?

Respuesta abierta (son los dos primeros números).

Números grandes. Aproximaciones

- 11 ▲▲▲ Estima el número de inspiraciones que has realizado hasta el momento actual.

(Dato experimental: Mide tu número de inspiraciones por minuto).

Respuesta abierta. (Estimar primeramente el número de inspiraciones por minuto).

- 12 ▲▲▲ Aproxima a los millares, mediante truncamiento y mediante redondeo, estas cantidades:

- a) 2 721
- b) 6 412
- c) 16 232
- d) 37 940

	TRUNCAMIENTO	REDONDEO
a) 2 721	2 000	3 000
b) 6 412	6 000	6 000
c) 16 232	16 000	16 000
d) 37 940	37 000	38 000

13 ▲▲▲ ¿Cuál de las aproximaciones está más cerca del valor real?



El valor 16 600 € está más cercano al real.

PÁGINA 39

14 ▲▲▲ Reflexiona y contesta:

- ¿Cuántas centenas de mil hay en una decena de millón?
- ¿Cuántos millares tiene un millardo?
- ¿Cuántas centenas de millón hay en un billón?

a) En una decena de millón hay 100 centenas de mil:

$$10\,000\,000 = 100 \cdot 100\,000$$

b) Un millardo tiene un millón de millares:

$$1\,000\,000\,000 = 1\,000\,000 \cdot 1\,000$$

c) En un billón hay 10 000 centenas de millón:

$$1\,000\,000\,000\,000 = 10\,000 \cdot 100\,000\,000$$

15 ▲▲▲ Expresa, de forma aproximada, en millones, estas cantidades:

- | | |
|---------------|---------------|
| a) 3 521 273 | b) 8 009 999 |
| c) 9 999 999 | d) 59 845 000 |
| a) 4 000 000 | b) 8 000 000 |
| c) 10 000 000 | d) 60 000 000 |

16 ▲▲▲ Escribe con cifras:

- Medio billón.
 - Cuatro billones.
 - Ocho billones y medio.
- 500 000 000 000
 - 4 000 000 000 000
 - 8 500 000 000 000

Operaciones

18 ▲▲▲ Estima mentalmente una aproximación al resultado de estas operaciones y después comprueba con cálculo exacto:

- a) $26\,270 + 10\,975 + 7\,842$ b) $72\,746 - 52\,958 - 4\,706$
 c) $315 \cdot 188$ d) $4\,921 : 48$
 a) 45 087 b) 15 082
 c) 59 220 d) Cociente: 102; Resto: 25

19 ▲▲▲ Calcula el cociente y el resto en cada caso:

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $7\,896 : 12$ | b) $26\,978 : 41$ | c) $32\,941 : 50$ |
| a) $7896 \overline{) 12}$ | b) $26978 \overline{) 41}$ | c) $32941 \overline{) 50}$ |
| 069 658 | 237 658 | 294 658 |
| 96 | 328 | 441 |
| 00 | 00 | 41 |
| Cociente: 658 | Cociente: 658 | Cociente: 658 |
| Resto: 0 | Resto: 0 | Resto: 41 |

20 ▲▲▲ Añade dos términos a cada serie:

- a) 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, ...
 b) 1, 2, 4, 7, 11, 16, ...
 c) 3, 6, 12, 24, 48, ...
 d) 1, 3, 7, 15, 31, ...
- a) 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5
 b) 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29
 Se va añadiendo al anterior +1, +2, +3, +4, +5...
 c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192
 El doble del anterior.
 d) 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127
 El doble del anterior más 1.

21 ▲▲▲ Calcula:

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $22 - 15 + 3$ | b) $22 - (15 + 3)$ |
| c) $30 - 18 - 8$ | d) $30 - (18 - 8)$ |
| e) $45 - 30 + 15$ | f) $45 - (30 + 15)$ |
| a) $22 - 15 + 3 = 25 - 15 = 10$ | b) $22 - (15 + 3) = 22 - 18 = 4$ |
| c) $30 - 18 - 8 = 30 - 26 = 4$ | d) $30 - (18 - 8) = 30 - 10 = 20$ |
| e) $45 - 30 + 15 = 60 - 30 = 30$ | f) $45 - (30 + 15) = 45 - 45 = 0$ |

22 ▲▲▲ Calcula:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} 5 + 4 \cdot 3 \\ (5 + 4) \cdot 3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 7 \cdot 3 + 4 \\ (7 \cdot 3) + 4 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2 \cdot 9 - 5 \\ (2 \cdot 9) - 5 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3 \cdot 7 - 2 \\ (3 \cdot 7) - 2 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a)} \begin{cases} 5 + 4 \cdot 3 = 5 + 12 = 17 \\ (5 + 4) \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 7 \cdot 3 + 4 = 21 + 4 = 25 \\ 7 \cdot (3 + 4) = 7 \cdot 7 = 49 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 2 \cdot 9 - 5 = 18 - 5 = 13 \\ 2 \cdot (9 - 5) = 2 \cdot 4 = 8 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 3 \cdot 7 - 2 = 21 - 2 = 19 \\ 3 \cdot (7 - 2) = 3 \cdot 5 = 15 \end{cases}$$

23 ▲▲▲ Calcula:

a) $2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 8$

b) $3 + 5 \cdot 2 + 1$

c) $4 \cdot 3 - 2 + 5 \cdot 2$

d) $6 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3$

a) $2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 8 = 10 + 12 - 16 = 22 - 16 = 6$

b) $3 + 5 \cdot 2 + 1 = 3 + 10 + 1 = 14$

c) $4 \cdot 3 - 2 + 5 \cdot 2 = 12 - 2 + 10 = 20$

d) $6 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 6 - 6 + 12 = 12$

25 ▲▲▲ Calcula:

a) $5 \cdot (2 + 4) - 6$

b) $16 - 5 \cdot (8 - 6) + 4 \cdot 2$

c) $18 - 3 \cdot (4 \cdot 2 - 7) - 15$

a) $5 \cdot (2 + 4) - 6 = 5 \cdot 6 - 6 = 30 - 6 = 24$

b) $16 - 5 \cdot (8 - 6) + 4 \cdot 2 = 16 - 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 16 - 10 + 8 = 14$

c) $18 - 3 \cdot (4 \cdot 2 - 7) - 15 = 18 - 3 \cdot (8 - 7) - 15 = 18 - 3 - 15 = 0$

26 ▲▲▲ Calcula:

a) $4 \cdot 6 - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4$

b) $(4 \cdot 6 - 5) \cdot 2 + 3 \cdot 4$

c) $4 \cdot 6 - (5 \cdot 2 + 3 \cdot 4)$

d) $4 \cdot (6 - 5) \cdot 2 + 3 \cdot 4$

a) $4 \cdot 6 - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 24 - 10 + 12 = 26$

b) $(4 \cdot 6 - 5) \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 19 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 38 + 12 = 50$

c) $4 \cdot 6 - (5 \cdot 2 + 3 \cdot 4) = 24 - 10 - 12 = 2$

d) $4 \cdot (6 - 5) \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 8 + 12 = 20$

27 ▲▲▲ De una división conocemos:

$$\text{DIVIDENDO} = 85 \quad \text{COCIENTE} = 12 \quad \text{RESTO} = 1$$

¿Cuál es el divisor?

El cociente entero de $85 : 12$ es 7.

El divisor es $7 \rightarrow 12 \cdot 7 + 1 = 85$

28 ▲▲▲ Calcula el cociente y el resto por defecto y por exceso en estas divisiones:

a) $18 : 5$ b) $516 : 28$

$$18 = 3 \cdot 5 + 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cociente por defecto} \rightarrow 3 \\ \text{Resto por defecto} \rightarrow 3 \end{array} \right.$$

$$18 = 4 \cdot 5 - 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cociente por exceso} \rightarrow 4 \\ \text{Resto por exceso} \rightarrow -2 \end{array} \right.$$

$$b) 516 = 18 \cdot 28 + 12 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cociente por defecto} \rightarrow 18 \\ \text{Resto por defecto} \rightarrow 12 \end{array} \right.$$

$$516 = 19 \cdot 28 - 16 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cociente por exceso} \rightarrow 19 \\ \text{Resto por exceso} \rightarrow -16 \end{array} \right.$$

29 ▲▲▲ En una división, el resto por exceso es 5 y el resto por defecto es -2 .

¿Cuál es el divisor?

El divisor es $5 + 2 = 7$.

PÁGINA 40

Sistema monetario

30 ▲▲▲ Reflexiona y contesta:

- ¿Cuántas monedas de 20 céntimos hacen 5 euros?
 - ¿Cuántas monedas de 5 céntimos te cambian por una de 2 euros?
 - ¿Cuántas monedas de 50 céntimos te cambian por un billete de 10 euros?
 - ¿Cuántas monedas de 10 céntimos hacen 5 euros?
- 25 monedas de 20 céntimos hacen 5 euros.
 - 40 monedas de 5 céntimos se cambian por 2 euros.
 - 20 monedas de 50 céntimos se cambian por un billete de 10 euros.
 - 50 monedas de 10 céntimos hacen 5 euros.

31 ▲▲▲ Busca todas las formas de reunir 8 céntimos utilizando en cada caso diferentes monedas.

Recoge tus resultados en una tabla como esta:

1 cént.	2 cént.	5 cént.	SUMA
1	1	1	$1 + 2 + 5 = 8$
3	0	1	$1 + 1 + 1 + 5 = 8$
0	4	0	$2 + 2 + 2 + 2 = 8$
2	3	0	$1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8$
4	2	0	$1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 8$
6	1	0	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 8$
8	0	0	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$

Como se ve en la tabla, hay siete formas de reunir 8 céntimos utilizando diferentes monedas en cada caso.

32 ▲▲▲ Observa los precios y contesta:



a) Azucena compra la libreta y paga con una moneda de 2 euros. ¿Cuánto le devuelven?

b) Adrián compra la libreta y el rotulador y paga con un billete de 5 euros. ¿Cuánto le devuelven?

a) $2 \text{ €} - (1 \text{ € } 73 \text{ cént.}) = 27 \text{ cént.}$

A Azucena le devuelven 27 céntimos.

b) $(3 \text{ € } 15 \text{ cént.}) + (1 \text{ € } 73 \text{ cént.}) = 4 \text{ € } 88 \text{ cént.}$

$5 \text{ €} - (4 \text{ € } 88 \text{ cént.}) = 12 \text{ cént.}$

A Adrián le devuelven 12 céntimos.

Ejercicios para resolver con la calculadora

33 ▲▲▲ Para obtener $(3 + 5) \cdot 11$ se hace:

$3 \oplus 5 \ominus \times 11 \ominus \rightarrow$

Calcula de igual forma:

a) $(5 + 10) \cdot 8$

b) $(9 + 40) : 7$

c) $(73 - 37) : 6$

d) $(13 + 12 - 8) \cdot 4 \cdot 5$

a) $5 \oplus 10 \ominus \times 8 \ominus$

b) $9 \oplus 40 \ominus \div 7 \ominus$

c) $73 \ominus 37 \ominus \div 6 \ominus$

d) $13 \oplus 12 \ominus 8 \ominus \times 4 \times 5 \ominus$

- 34 ▲▲▲ Calcula el cuadrado de un número así:

$$15^2 \rightarrow 15 \otimes \ominus \rightarrow \boxed{225}$$

Halla los cuadrados de los números naturales comprendidos entre 20 y 30.

n	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n^2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900

- 35 ▲▲▲ Imagina que está estropeada la tecla \ominus . Para poner en la pantalla el número 10 puedes hacer:

$$2 \otimes 5 \ominus \quad 11 \ominus 1 \ominus \quad 9 \oplus 1 \ominus \dots$$

Escribe en la pantalla sin usar la tecla \ominus :

- a) 30 b) 80 c) 504 d) 509 e) 30 004

Solución abierta.

Por ejemplo:

- a) $6 \otimes 5 \ominus$
 b) $5 \otimes 8 \otimes 2 \ominus$; $79 \oplus 1 \ominus$
 c) $499 \oplus 5 \ominus$; $252 \otimes 2 \ominus$
 d) $498 \oplus 11 \ominus$; $254 \otimes 2 \oplus 1 \ominus$
 e) $29\,999 \oplus 5 \ominus$

- 36 ▲▲▲ Ahora imagina que, además de la tecla \ominus , están estropeadas \oplus y \ominus . Escribe en la pantalla:

- a) 30 b) 80 c) 100
 d) 500 e) 3 800 f) 1 000

Solución abierta.

Por ejemplo:

- a) $6 \otimes 5 \ominus$
 b) $5 \otimes 8 \otimes 2 \ominus$; $5 \otimes 16 \ominus$
 c) $25 \otimes 4 \ominus$
 d) $125 \otimes 4 \ominus$; $5 \otimes 25 \otimes 4 \ominus$
 e) $19 \otimes 2 \otimes 25 \otimes 4 \ominus$
 f) $125 \otimes 8 \ominus$

Problemas de números

- 37 ▲▲▲ Busca tres números naturales consecutivos cuya suma sea 42.

$$42 : 3 = 14$$

Los números son 13, 14 y 15.

38 ▲▲▲ ¿Qué tres números pares consecutivos suman 60?

$$60 : 3 = 20$$

Los números son 18, 20 y 22.

39 ▲▲▲ Busca tres números sabiendo que:

- Su suma es 100.
- El primero es 10 unidades mayor que el segundo.
- El segundo es 15 unidades mayor que el tercero.
- La suma de los tres es 100.
El mediano es 15 unidades mayor que el pequeño.
El mayor es 25 unidades mayor que el pequeño.
- Restando 15 y 25 a la suma, obtenemos el triple del pequeño:
 $100 - 15 - 25 = 60$
El pequeño es $60 : 3 = 20$.
El mediano es $20 + 15 = 35$.
El mayor es $20 + 25 = 45$.

40 ▲▲▲ ¿Cuántos números de cuatro cifras terminan en cero?

Si a un número de tres cifras se le añade un cero, se convierte en uno de los números objeto del problema.

Por tanto, basta contar los números de tres cifras, que son todos los comprendidos entre 100 y 999. Es decir, hay 900 números de tres cifras.

Solución: Hay 900 números de cuatro cifras terminados en cero.

41 ▲▲▲ ¿Cuántos números de tres cifras son capicuas?

Un número capicua de tres cifras tiene la forma $\boxed{a} \boxed{b} \boxed{a}$ donde a varía de 1 a 9 y b de 0 a 9.

Por tanto, hay $9 \cdot 10 = 90$ números capicuas de tres cifras.

Problemas de todos los días

42 ▲▲▲ Francisco tiene 75 €. Roberto tiene 13 € más que Francisco. Roger tiene 21 € menos que Roberto. ¿Cuánto tienen entre los tres?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Francisco} \rightarrow 75 \text{ €} \\ \text{Roberto} \rightarrow 75 + 13 = 88 \text{ €} \\ \text{Roger} \rightarrow 88 - 21 = 67 \text{ €} \end{array} \right\} \text{ Entre los tres tienen: } 75 + 88 + 67 = 230 \text{ €}$$

43 ▲▲▲ Aníbal trabaja en una fábrica que está a 18 km de su casa. ¿Cuántos kilómetros recorre a la semana sabiendo que libra los sábados y los domingos?

Aníbal recorre $18 \cdot 2 \cdot 5 = 180$ km cada semana.

- 44 ▲▲▲ Amelia ha recogido hoy, en su granja, 22 bandejas de huevos, y Arturo, 18 bandejas. Si en una bandeja entran dos docenas y media, ¿cuántos huevos han recogido entre los dos?

$22 + 18 = 40$ bandejas.

2 docenas y media son 30 huevos.

Recogen: $40 \cdot 30 = 1\ 200$ huevos.

PÁGINA 41

- 45 ▲▲▲ Un parque de atracciones recibe una media de 8 600 personas al día en primavera, 15 400 en verano, 6 200 en otoño y 1 560 en invierno. ¿Cuántos visitantes tiene en un año?

Consideramos que cada estación dura 3 meses (90 días):

$$8\ 600 \cdot 90 + 15\ 400 \cdot 90 + 6\ 200 \cdot 90 + 1\ 560 \cdot 90 =$$

$$= (8\ 600 + 15\ 400 + 6\ 200 + 1\ 560) \cdot 90 = 2\ 858\ 400 \text{ visitantes en un año}$$

- 46 ▲▲▲ Un restaurante pagó el mes pasado a su proveedor 1 144 € por una factura de 143 kg de carne. ¿Cuántos kilos ha gastado este mes sabiendo que la factura asciende a 1 448 €?

Por cada kilogramo de carne pagó: $1\ 144 : 143 = 8$ €

Este mes ha gastado: $1\ 448 : 8 = 181$ kg de carne

- 47 ▲▲▲ Un tendero compra 15 cajas de leche con 10 botellas de litro cada una. Cada caja le sale a 5 €. En el transporte se cae una caja y se rompen 5 botellas. Después vende la mercancía al detalle, a 1 € la botella. ¿Cuál es la ganancia que obtiene?

El tendero paga por la leche $15 \cdot 5 = 75$ €

Vende $15 \cdot 10 - 5 = 145$ botellas a 1 € cada botella.

Ganancia: $145 - 75 = 70$ €

- 48 ▲▲▲ Un almacenista compra 200 cajas de naranjas, de 20 kg cada una, por 1 000 €. El transporte vale 160 €. Las selecciona y las envasa en bolsas de 5 kg. En la selección desecha, por defectuosas, unos 100 kg. ¿A cómo debe vender la bolsa si desea ganar 400 €?

El almacenista compra $200 \cdot 20 = 4\ 000$ kg de naranjas.

Gasta: $1\ 000$ € + 160 € = $1\ 160$ €

Desecha: 100 kg → le quedan 3 900 kg

Los envasa en bolsas de 5 kg → $3\ 900 : 5 = 780$ bolsas

Quiere obtener $1\ 160$ € + 400 € = $1\ 560$ €

Debe vender cada bolsa por $1\ 560 : 780 = 2$ €

■ PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

- 49 Úrsula y Marina viven en la misma casa y van al mismo colegio. Úrsula, cuando va sola, tarda 20 minutos de casa al colegio. Marina, a su paso, tarda 30 minutos en el mismo recorrido. ¿Cuánto tardará Úrsula en alcanzar a Marina, si esta ha salido hoy con 5 minutos de ventaja?

En el recorrido completo Úrsula saca a Marina una ventaja de 10 minutos.

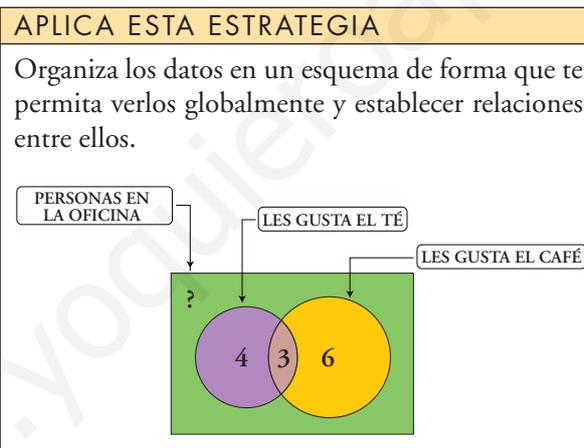
Si el recorrido fuera la mitad de largo, la ventaja de Úrsula sería de 5 minutos.

Por tanto, Úrsula alcanza a Marina a mitad de recorrido.

Es decir, Úrsula alcanza a Marina en 10 minutos.

- 50 De las 15 personas que trabajan en una oficina, hay 9 a las que les gusta el café y 7 a las que les gusta el té. También sabemos que hay 3 personas a las que les gustan ambos productos.

¿A cuántas personas de esa oficina no les gusta ni el café ni el té?



Teniendo en cuenta que 15 personas trabajan en la oficina:

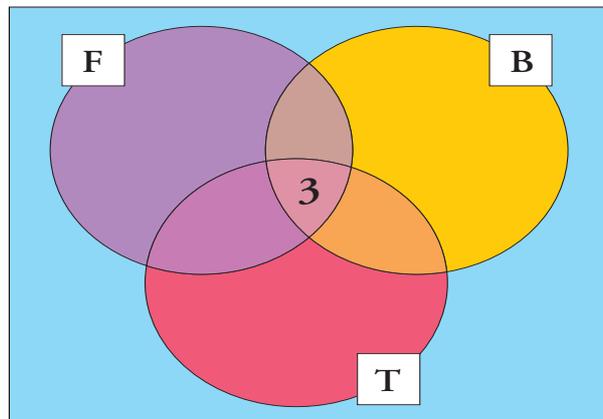
$$15 - (6 + 3 + 4) = 15 - 13 = 2$$

A dos personas no les gusta ni el té ni el café.

- 51 Una encuesta realizada entre los 30 alumnos y alumnas de una clase arroja los siguientes datos:

- 16 practican fútbol, 14 baloncesto y 13 tenis.
- 6 practican fútbol y baloncesto, 6 practican fútbol y tenis y 5 practican baloncesto y tenis.
- 3 practican los tres deportes.

¿Cuántos de esos 30 chicos y chicas no practican ni fútbol ni baloncesto ni tenis?

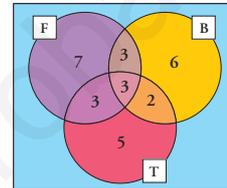


Practican alguno de estos deportes:

$$7 + 3 + 3 + 3 + 6 + 2 + 5 = 29$$

No practican ninguno de esos deportes:

$$30 - 29 = 1 \text{ persona}$$



52 Rosa tiene una granja de patos y gansos. Hoy ha vendido en el mercado 21 de sus animales por 350 euros.

Entre los animales vendidos había el doble de patos que de gansos, y un ganso vale el triple que un pato. ¿Qué precio tiene un pato? ¿Y un ganso?

$$\text{PATOS} + \text{GANSOS} = 21$$

- Hay doble número de patos que de gansos:

Ha vendido 7 gansos y 14 patos.

- Un ganso vale el triple que un pato.

PATOS	GANSOS
-------	--------

PRECIO DE GANSO	PRECIO DE PATO
7 GANSOS	14 PATOS

Cada ganso vale como 3 patos \rightarrow los 7 gansos valen como 21 patos.

$$21 \text{ patos} + 14 \text{ patos} = 35 \text{ patos}$$

$$350 : 35 = 10 \text{ € cada pato}$$

$$10 \text{ €} \cdot 3 = 30 \text{ € cada ganso}$$

Comprobamos la solución:

$$7 \cdot 30 + 14 \cdot 10 = 210 + 140 = 350 \text{ €}$$

PÁGINA 54

■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Cálculo de potencias

1 ▲▲▲ Calcula con lápiz y papel:

- | | | |
|----------------|-----------------|----------------|
| a) 5^4 | b) 15^2 | c) 1^7 |
| d) 6^3 | e) 3^5 | f) 2^8 |
| a) $5^4 = 625$ | b) $15^2 = 225$ | c) $1^7 = 1$ |
| d) $6^3 = 216$ | e) $3^5 = 243$ | f) $2^8 = 256$ |

2 ▲▲▲ Averigua el valor de x en cada caso:

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------|
| a) $8^x = 64$ | b) $11^x = 121$ | c) $30^x = 900$ |
| d) $4^x = 256$ | e) $6^x = 216$ | f) $5^x = 625$ |
| a) $8^x = 64 \rightarrow x = 2$ | b) $11^x = 121 \rightarrow x = 2$ | |
| c) $30^x = 900 \rightarrow x = 2$ | d) $4^x = 256 \rightarrow x = 4$ | |
| e) $6^x = 216 \rightarrow x = 3$ | f) $5^x = 625 \rightarrow x = 4$ | |

3 ▲▲▲ ¿Cuántas losas de 1 m^2 se necesitan para cubrir un patio cuadrado de 22 m de lado?La superficie del patio es $22 \cdot 22 = 484 \text{ m}^2$.Por tanto, se necesitan 484 losas de 1 m^2 .4 ▲▲▲ ¿Cuántos cubitos de arista unidad se necesitan para construir un cubo de arista 11 ?

$$11^3 = 1\,331$$

Se necesitan $1\,331$ cubitos de arista unidad para construir un cubo de arista 11 unidades.

5 ▲▲▲ Continúa hasta el décimo término cada una de estas series:

0 1 4 9 16...

0 1 8 27 64...

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1 000

6 ▲▲▲ Halla con la calculadora:

- | | | |
|----------|-----------|-----------|
| a) 4^8 | b) 5^9 | c) 8^6 |
| d) 9^6 | e) 14^4 | f) 15^3 |

- a) $4^8 = 65\,536$ b) $5^9 = 1\,953\,125$ c) $8^6 = 262\,144$
 d) $9^6 = 531\,441$ e) $14^4 = 38\,416$ f) $15^3 = 3\,375$

Potencias de base 10. Expresión abreviada de números grandes

7 ▲▲▲ Calcula mentalmente:

- a) 10^2 b) 10^3 c) 10^4
 d) 10^5 e) 10^6 f) 10^7
 a) $10^2 = 100$ b) $10^3 = 1\,000$ c) $10^4 = 10\,000$
 d) $10^5 = 100\,000$ e) $10^6 = 1\,000\,000$ f) $10^7 = 10\,000\,000$

8 ▲▲▲ Escribe como potencias de diez:

- a) Cien. b) Cien mil.
 c) Cien millones. d) Cien mil millones.
 e) Un billón. f) Cien billones.
 a) Cien $\rightarrow 100 = 10^2$
 b) Cien mil $\rightarrow 100\,000 = 10^5$
 c) Cien millones $\rightarrow 100\,000\,000 = 10^8$
 d) Cien mil millones $\rightarrow 100\,000\,000\,000 = 10^{11}$
 e) Un billón $\rightarrow 1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$
 f) Cien billones $\rightarrow 100\,000\,000\,000\,000 = 10^{14}$

9 ▲▲▲ Expresa con todas sus cifras:

- a) $6 \cdot 10^4$ b) $13 \cdot 10^7$
 c) $34 \cdot 10^9$ d) $62 \cdot 10^{11}$
 a) $6 \cdot 10^4 = 60\,000$ b) $13 \cdot 10^7 = 130\,000\,000$
 c) $34 \cdot 10^9 = 34\,000\,000\,000$ d) $62 \cdot 10^{11} = 6\,200\,000\,000\,000$

10 ▲▲▲ Escribe la descomposición polinómica de los siguientes números:

- a) 68 425 b) 245 000
 c) 2 530 000 d) 7 406 080
 a) $68\,425 = 6 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$
 b) $245\,000 = 2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3$
 c) $2\,530\,000 = 2 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4$
 d) $7\,406\,080 = 7 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10$

11 ▲▲▲ ¿Qué número expresa cada descomposición polinómica?

- a) $5 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2$

- b) $2 \cdot 10^8 + 10^7 + 6 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3$
 c) $10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0$
 a) $5 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2 = 5\,004\,852$
 b) $2 \cdot 10^8 + 10^7 + 6 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 = 210\,635\,000$
 c) $10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 = 1\,111\,111$

12 $\triangle\triangle\triangle$ Redondea a la centena de millar y escribe abreviadamente, con el apoyo de una potencia de base diez, el número de habitantes de cada una de estas ciudades:

MADRID $\rightarrow 2\,866\,850$

PARÍS $\rightarrow 2\,238\,740$

ROMA $\rightarrow 2\,645\,322$

EL CAIRO $\rightarrow 16\,248\,530$

MADRID $\rightarrow 2\,866\,850 \rightarrow 2\,900\,000 = 29 \cdot 10^5$

PARÍS $\rightarrow 2\,238\,740 \rightarrow 2\,200\,000 = 22 \cdot 10^5$

ROMA $\rightarrow 2\,645\,322 \rightarrow 2\,600\,000 = 26 \cdot 10^5$

EL CAIRO $\rightarrow 16\,248\,530 \rightarrow 16\,200\,000 = 162 \cdot 10^5$

Operaciones con potencias

14 $\triangle\triangle\triangle$ Calcula por el camino más corto:

- a) $2^4 \cdot 5^4$ b) $4^3 \cdot 25^3$ c) $20^3 : 5^3$
 d) $12^4 : 4^4$ e) $(5^3 \cdot 4^3) : 2^3$ f) $6^3 : (21^3 : 7^3)$
- a) $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$
 b) $4^3 \cdot 25^3 = (4 \cdot 25)^3 = 100^3 = 1\,000\,000$
 c) $20^3 : 5^3 = (20 : 5)^3 = 4^3 = 64$
 d) $12^4 : 4^4 = (12 : 4)^4 = 3^4 = 81$
 e) $(5^3 \cdot 4^3) : 2^3 = (5 \cdot 4)^3 : 2^3 = 20^3 : 2^3 = (20 : 2)^3 = 10^3 = 1\,000$
 f) $6^3 : (21^3 : 7^3) = 6^3 : (21 : 7)^3 = 6^3 : 3^3 = (6 : 3)^3 = 2^3 = 8$

15 $\triangle\triangle\triangle$ Reduce a una sola potencia:

- a) $a^2 \cdot a^3$ b) $x^4 \cdot x^2$ c) $m^2 \cdot m^5$
 d) $a^5 : a^4$ e) $x^8 : x^5$ f) $m^9 : m^3$
 g) $(a^4)^3$ h) $(x^2)^5$ i) $(m^3)^3$
 a) $a^2 \cdot a^3 = a^5$ b) $x^4 \cdot x^2 = x^6$ c) $m^2 \cdot m^5 = m^7$
 d) $a^5 : a^4 = a$ e) $x^8 : x^5 = x^3$ f) $m^9 : m^3 = m^6$
 g) $(a^4)^3 = a^{12}$ h) $(x^2)^5 = x^{10}$ i) $(m^3)^3 = m^9$

16 $\triangle\triangle\triangle$ Reduce a una sola potencia:

- a) $(a^2 \cdot a^2) : a^3$ b) $(x^6 : x^3) \cdot x^2$

c) $(m^6 : m^4) : m^2$

e) $(x^2)^3 : (x^2)^2$

a) $(a^2 \cdot a^2) : a^3 = a^4 : a^3 = a$

c) $(m^6 : m^4) : m^2 = m^2 : m^2 = m^0 = 1$

e) $(x^2)^3 : (x^2)^2 = x^6 : x^4 = x^2$

d) $(a^3)^5 : a^{12}$

f) $(m^6)^2 : (m^2)^5$

b) $(x^6 : x^3) \cdot x^2 = x^3 \cdot x^2 = x^5$

d) $(a^3)^5 : a^{12} = a^{15} : a^{12} = a^3$

f) $(m^6)^2 : (m^2)^5 = m^{12} : m^{10} = m^2$

PÁGINA 55**18** ▲▲▲ Reduce a una sola potencia y calcula:

a) $2^3 \cdot 4^2$

b) $25^4 : 5^7$

c) $(2^4 \cdot 8^2) : 16^2$

a) $2^3 \cdot 4^2 = 2^3 \cdot (2^2)^2 = 2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$

b) $25^4 : 5^7 = (5^2)^4 : 5^7 = 5^8 : 5^7 = 5$

c) $(2^4 \cdot 8^2) : 16^2 = [2^4 \cdot (2^3)^2] : (2^4)^2 = (2^4 \cdot 2^6) : 2^8 = 2^{10} : 2^8 = 2^2 = 4$

19 ▲▲▲ Calcula y razona:

a) $(2 + 3)^2$

b) $2^2 + 3^2$

c) $(4 + 6)^2$

d) $4^2 + 6^2$

e) $(1 + 10)^2$

f) $1^2 + 10^2$

¿Es igual el cuadrado de una suma que la suma de los cuadrados de los sumandos?

a) $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$

b) $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

c) $(4 + 6)^2 = 10^2 = 100$

d) $4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$

e) $(1 + 10)^2 = 11^2 = 121$

f) $1^2 + 10^2 = 1 + 100 = 101$

Como se muestra en los ejemplos anteriores, el cuadrado de una suma no es igual a la suma de los cuadrados de los sumandos.

20 ▲▲▲ Calcula y compara:

a) $(2 + 3)^3$

b) $2^3 + 3^3$

c) $(1 + 3)^4$

d) $1^4 + 3^4$

e) $(1 + 1)^5$

f) $1^5 + 1^5$

¿Qué observas?

a) $(2 + 3)^3 = 5^3 = 125$

b) $2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$

c) $(1 + 3)^4 = 4^4 = 256$

d) $1^4 + 3^4 = 1 + 81 = 82$

e) $(1 + 1)^5 = 2^5 = 32$

f) $1^5 + 1^5 = 1 + 1 = 2$

Como muestran los ejemplos anteriores, la potencia de una suma no es igual a la suma de las potencias de los sumandos.

Raíz cuadrada21 ▲▲▲ Busca el valor de a en cada caso:

a) $a^2 = 64$

b) $a^2 = 100$

c) $a^2 = 144$

d) $a^2 = 400$

e) $a^2 = 625$

f) $a^4 = 16$

a) $a = 8$

b) $a = 10$

c) $a = 12$

d) $a = 20$

e) $a = 25$

f) $a = 2$

22 ▲▲▲ Calcula, en cada caso, el valor de m :

a) $\sqrt{m} = 5$

b) $\sqrt{m} = 8$

c) $\sqrt{m} = 100$

d) $\sqrt{m} = 30$

a) $m = 25$

b) $m = 64$

c) $m = 10\,000$

d) $m = 900$

23 ▲▲▲ Calcula por tanteo el valor de la raíz entera:

a) $\sqrt{25}$

b) $\sqrt{55}$

c) $\sqrt{169}$

d) $\sqrt{728}$

e) $\sqrt{900}$

f) $\sqrt{10\,000}$

a) $\sqrt{25} = 5$

b) $7 < \sqrt{55} < 8 \rightarrow$ Raíz entera de 55 es 7

c) $\sqrt{169} = 13$

d) $26 < \sqrt{728} < 27 \rightarrow$ Raíz entera de 728 es 26

e) $\sqrt{900} = 30$

f) $\sqrt{10\,000} = 100$

24 ▲▲▲ Calcula con lápiz y papel, y después comprueba con la calculadora:

a) $\sqrt{650}$

b) $\sqrt{1\,369}$

c) $\sqrt{4\,225}$

d) $\sqrt{12\,568}$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{650} & 25 \\ -4 & \hline 250 & \\ -225 & \hline 25 & \end{array}$$

$\sqrt{650} = 25; \text{ Resto } 25$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1\,369} & 37 \\ -9 & \hline 469 & \\ -469 & \hline 0 & \end{array}$$

$\sqrt{1\,369} = 37$

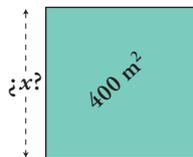
$$\begin{array}{r} \text{b) } \sqrt{4225} \quad 65 \\ -36 \quad \hline 625 \\ -625 \quad \hline 0 \end{array}$$

$$\sqrt{4225} = 65$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } \sqrt{12568} \quad 11 \\ -1 \quad \hline 025 \\ -21 \quad \hline 468 \\ 444 \quad \hline 24 \end{array}$$

$$\sqrt{12568} = 11; \text{ Resto } 24$$

- 25 ▲▲▲ Calcula el lado de un cuadrado que tiene una superficie de 400 m^2 .



$$l = \sqrt{400} = 20 \text{ m}$$

- 26 ▲▲▲ ¿Cuáles de estos números son cuadrados perfectos? Justifica tu respuesta:

a) 2 025

b) 8 281

c) 15 325

d) 116 964

a) $\sqrt{2025} = 45$

b) $\sqrt{8281} = 91$

c) $123 < \sqrt{15325} < 124$

d) $\sqrt{116964} = 312$

Son cuadrados perfectos 2 025, 8 281 y 116 964.

Operaciones con raíces

- 27 ▲▲▲ Calcula y compara, ¿qué observas?

a) $\sqrt{9+16}$

b) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$

c) $\sqrt{36+64}$

d) $\sqrt{36} + \sqrt{64}$

a) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

b) $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

c) $\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

d) $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$

Se observa que la raíz de una suma no coincide con la suma de las raíces de los sumandos.

- 28 ▲▲▲ Calcula y reflexiona, ¿qué observas?

a) $\sqrt{4 \cdot 9}$

b) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$

c) $\sqrt{9 \cdot 16}$

d) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6 & \text{b) } \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6 \\ \text{c) } \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12 & \text{d) } \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12 \end{array}$$

Se comprueba que la raíz de un producto coincide con el producto de las raíces de los factores.

29 ▲▲▲ Calcula y razona, ¿qué observas?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{\frac{36}{9}} & \text{b) } \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} \\ \text{c) } \sqrt{\frac{100}{25}} & \text{d) } \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} \\ \text{a) } \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2 & \text{b) } \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2 \\ \text{c) } \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2 & \text{d) } \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2 \end{array}$$

Se comprueba que la raíz de una fracción (cociente) es igual a la raíz del numerador (dividendo) partido por la raíz del denominador (divisor).

31 ▲▲▲ Extrae factores fuera de la raíz:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt{18} & \text{b) } \sqrt{50} & \text{c) } \sqrt{45} \\ \text{d) } \sqrt{72} & \text{e) } \sqrt{28} & \text{f) } \sqrt{200} \\ \text{a) } \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} \\ \text{b) } \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2} \\ \text{c) } \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5} \\ \text{d) } \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2} \\ \text{e) } \sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = 2 \cdot \sqrt{7} \\ \text{f) } \sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{2} \end{array}$$

■ PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

32 Rosana ha construido un gran cubo de 10 cm de arista utilizando cubitos blancos de 1 cm de arista.

¿Cuántos cubitos rojos, iguales a los anteriores, necesita para recubrir totalmente al gran cubo blanco?

El cubo blanco tiene 10 cm de arista y contiene $10^3 = 1\,000$ cubitos.

El nuevo cubo tiene 12 cm de arista y contiene $12^3 = 1\,728$ cubitos.

Los cubos rojos añadidos son: $1\,728 - 1\,000 = 728$

- 33 Con la calculadora de cuatro operaciones: ¿Cuál es el mayor número que puedes obtener en pantalla si solo puedes pulsar dos veces cada una de estas teclas? (Escribe una expresión con las operaciones que le mandas hacer a la máquina).

$$\boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=}$$

- Para las calculadoras que programan el factor constante con una sola pulsación la tecla $\boxed{\times}$:

$$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \rightarrow \boxed{234256}$$

La operación realizada ha sido:

$$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \rightarrow 22 \cdot 22 = 22^2$$

$$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \rightarrow (22 \cdot 22) \cdot (22 \cdot 22) = 22^2 \cdot 22^2 = 22^4 = 234\,256$$

- Para las calculadoras que necesitan dos pulsaciones en $\boxed{\times}$ para programar el factor constante:

$$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \quad \boxed{=} \rightarrow \boxed{10648}$$

La operación realizada ha sido:

$$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \rightarrow 22 \cdot 22 = 22^2$$

$$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \quad \boxed{=} \rightarrow 22 \cdot 22 \cdot 22 = 22^3 = 10\,648$$

PÁGINA 72**■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD****Múltiplos y divisores**

1 ▲▲▲ Calcula mentalmente para indicar si existe relación de divisibilidad entre estos números:

- | | | |
|-----------------------|----------------------|----------------------|
| a) 50 y 200 | b) 35 y 100 | c) 88 y 22 |
| d) 15 y 35 | e) 15 y 60 | f) 200 y 500 |
| a) Sí. $200 : 50 = 4$ | b) No | c) Sí. $88 : 22 = 4$ |
| d) No | e) Sí. $60 : 15 = 4$ | f) No |

2 ▲▲▲ Calcula mentalmente:

- Tres números que estén contenidos una cantidad exacta de veces en 200.
 - Tres divisores de 500.
 - Tres múltiplos de 30.
- a) 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200
b) 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500
c) Por ejemplo: 60, 90, 120

3 ▲▲▲ Razona si existe relación de divisibilidad entre:

- | | | |
|-------------|-------------|--------------|
| a) 15 y 900 | b) 14 y 210 | c) 45 y 145 |
| d) 25 y 675 | e) 17 y 162 | f) 142 y 994 |
- a) Sí. $900 : 15 = 60$
b) Sí. $210 : 14 = 15$
c) No. 45 no cabe un número exacto de veces en 145.
d) Sí. $675 : 25 = 27$
e) No. 17 no cabe un número exacto de veces en 162.
f) Sí. $994 : 142 = 7$

4 ▲▲▲ Responde justificando las respuestas:

- ¿Es 765 múltiplo de 5? ¿Y 819 de 52?
 - ¿Es 15 divisor de 765? ¿Y 17 divisor de 587?
- a) 765 es múltiplo de 5 $\rightarrow 765 = 5 \cdot 153$
819 no es múltiplo de 52. No hay ningún número que al multiplicarlo por 52 se obtenga 819.
- b) 15 es divisor de 765 porque $765 : 15 = 51$
17 no es divisor de 587 porque la división $587 : 17$ no es exacta.

- 5 ▲▲▲ Escribe todos los pares de números cuyo producto es 100.

$$1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10 = 100$$

- 6 ▲▲▲ Busca todos los divisores de:

a) 24 b) 50 c) 81

a) Divisores de 24 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

b) Divisores de 50 \rightarrow 1, 2, 5, 10, 25, 50

c) Divisores de 81 \rightarrow 1, 3, 9, 27, 81

- 7 ▲▲▲ Busca los múltiplos de 32 comprendidos entre 700 y 800.

$$32 \cdot 22 = 704$$

704, 736, 768, 800

Números primos y compuestos

- 8 ▲▲▲ Calcula mentalmente dos números cuyo producto sea:

a) 36 b) 360 c) 3 600

d) 42 e) 420 f) 4 200

Solución abierta.

a) $36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 18 = 12 \cdot 3 = 6 \cdot 6$

b) $360 = 4 \cdot 90 = 2 \cdot 180 = 36 \cdot 10 = 20 \cdot 18 = 12 \cdot 30 = 6 \cdot 60 = \dots$

c) $3\,600 = 4 \cdot 900 = 20 \cdot 180 = 36 \cdot 100 = 120 \cdot 30 = \dots$

d) $42 = 6 \cdot 7 = 3 \cdot 14 = 2 \cdot 21 = \dots$

e) $420 = 6 \cdot 70 = 30 \cdot 14 = 20 \cdot 21 = \dots$

f) $4\,200 = 60 \cdot 70 = 30 \cdot 140 = 20 \cdot 210 = \dots$

- 9 ▲▲▲ Descompón en producto de dos factores:

a) 144 b) 240

c) 238 d) 288

e) 675 f) 713

Solución abierta.

a) $144 = 2 \cdot 72 = 4 \cdot 36 = \dots$

b) $240 = 24 \cdot 10 = 6 \cdot 40 = \dots$

c) $238 = 119 \cdot 2 = 17 \cdot 14 = \dots$

d) $288 = 2 \cdot 144 = 12 \cdot 24 = \dots$

e) $675 = 3 \cdot 225 = 5 \cdot 135 = \dots$

f) $713 = 23 \cdot 31$

10 ▲▲▲ Descompón en factores primos:

a) 32

b) 180

c) 225

d) 392

e) 468

f) 1 260

$$a) 32 = 2^5$$

$$b) 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$c) 225 = 3^2 \cdot 5^2$$

$$d) 392 = 2^3 \cdot 7^2$$

$$e) 468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$$

$$f) 1\,260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

11 ▲▲▲ Separa los números primos de los compuestos:

91 17 49 97 15 71 57 53 81 27 111 29

Primos: 91, 17, 97, 71, 53 y 29

Compuestos: 49, 15, 57, 81, 27 y 111

Criterios de divisibilidad

12 ▲▲▲ Busca entre estos números los múltiplos de 2, los de 3, los de 5, los de 7 y los de 13:

104 130 140 119 143 182
186 147 200 255 245 203

Múltiplos de 2 → 104, 130, 140, 182, 186 y 200

Múltiplos de 3 → 186, 147 y 255

Múltiplos de 5 → 130, 140, 200, 255 y 245

Múltiplos de 7 → 140, 119, 182, 147, 245 y 203

Múltiplos de 13 → 104, 130, 143 y 182

13 ▲▲▲ Sustituye cada letra por una cifra, de manera que el número resultante sea divisible por 3:

2 4 A 7 3 B 4 9 C 7 D 4 E 5

Busca, en cada caso, todas las soluciones.

A → 0, 3, 6, 9

B → 2, 5, 8

C → 2, 5, 8

D → 2, 5, 8

E → 0, 3, 6, 9

14 ▲▲▲ Busca en cada caso todos los valores posibles de a para que el número resultante sea, a la vez, múltiplo de 2 y de 3:

1 | a

1 | 4 | a

7 | 5 | a

1 | a → 1 | 2 , 1 | 8

1 | 4 | a → 1 | 4 | 4

7 | 5 | a → 7 | 5 | 0 , 7 | 5 | 6

- 15 ▲▲▲ ¿Cómo sabes de un vistazo si un número es múltiplo de 100? ¿Y cómo sabes si es divisible entre 6?

Un número es múltiplo de 100 si sus dos últimas cifras son 00.

Un número es divisible entre 6 si acaba en cifra par y la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

- 16 ▲▲▲ Calcula mentalmente:

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| a) M.C.D. (4, 6) | b) M.C.D. (4, 8) |
| m.c.m. (4, 6) | m.c.m. (4, 8) |
| c) M.C.D. (20, 30) | d) M.C.D. (12, 18) |
| m.c.m. (20, 30) | m.c.m. (12, 18) |
| a) M.C.D. (4, 6) = 2 | b) M.C.D. (4, 8) = 4 |
| m.c.m. (4, 6) = 12 | m.c.m. (4, 8) = 8 |
| c) M.C.D. (20, 30) = 10 | d) M.C.D. (12, 18) = 6 |
| m.c.m. (20, 30) = 60 | m.c.m. (12, 18) = 36 |

PÁGINA 73

- 18 ▲▲▲ Calcula:

- | | |
|---|---------------------------|
| a) M.C.D. (72, 108) | b) M.C.D. (270, 234) |
| m.c.m. (72, 108) | m.c.m. (270, 234) |
| c) M.C.D. (560, 588) | d) M.C.D. (210, 315, 420) |
| m.c.m. (560, 588) | m.c.m. (210, 315, 420) |
| a) $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$ | |
| $108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^3$ | |
| M.C.D. (72, 108) = $2^2 \cdot 3^2 = 36$ | |
| m.c.m. (72, 108) = $2^3 \cdot 3^3 = 216$ | |
| b) $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$ | |
| $234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$ | |
| M.C.D. (270, 234) = $2 \cdot 3^2 = 18$ | |
| m.c.m. (270, 234) = $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 13 = 3\,510$ | |
| c) $560 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$ | |
| $588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$ | |
| M.C.D. (560, 588) = $2^2 \cdot 7 = 28$ | |
| m.c.m. (560, 588) = $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 11\,760$ | |

$$d) 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\text{M.C.D. } (210, 315, 420) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

$$\text{m.c.m. } (210, 315, 420) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1\,260$$

Para aplicar lo aprendido

- 19 ▲▲▲ ¿De cuántas formas diferentes se pueden disponer 72 baldosas cuadradas de manera que formen un rectángulo?

Hallamos primeramente los divisores de 72:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 12 \quad 18 \quad 24 \quad 36 \quad 72$$

Las baldosas se pueden disponer de seis formas diferentes:

$$1 \times 72 \quad 2 \times 36 \quad 3 \times 24 \quad 4 \times 18 \quad 6 \times 12 \quad 8 \times 9$$

- 20 ▲▲▲ Busca todas las formas posibles de hacer equipos de igual número de elementos con los chicos y chicas de una clase de 24 personas.

Divisores de 24 \rightarrow 1 2 3 4 6 8 12 24

1 equipo de 24 personas / 24 equipos de 1 persona

2 equipos de 12 personas / 12 equipos de 2 personas

3 equipos de 8 personas / 8 equipos de 3 personas

4 equipos de 6 personas / 6 equipos de 4 personas

- 21 ▲▲▲ En un colegio se reparten invitaciones para una obra de teatro subvencionada.

Ana observa que el número de entradas puede contarse exactamente de 2 en 2, de 3 en 3 y de 5 en 5.

¿Cuáles son los posibles números de entradas?

El número de entradas ha de ser múltiplo de 2, de 3 y de 5:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Así, el número de entradas puede ser 30 y todos sus múltiplos:

$$30, 60, 90, 120, 150 \dots$$

- 22 ▲▲▲ Para transportar 12 perros y 18 gatos se van a usar jaulas iguales que sean lo más grandes posible, y de forma que en todas quepa el mismo número de animales. ¿Cuántos animales deben ir en cada jaula?

NOTA: A nadie en su sano juicio se le ocurriría poner perros y gatos juntos.

Hemos de encontrar un divisor común de 12 y 18, el mayor:

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$\text{M.C.D. } (12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$$

Deben ir 6 animales en cada jaula.

- 23 ▲▲▲ El autobús de la línea A pasa por cierta parada cada 9 minutos y el de la línea B, cada 12 minutos. Si acaban de salir ambos a la vez, ¿cuánto tardarán en volver a coincidir?

Hemos de calcular el mínimo común múltiplo de 9 y 12:

$$\left. \begin{array}{l} 9 = 3^2 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \end{array} \right\} \text{m.c.m. } (9, 12) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

Volverán a coincidir al cabo de 36 minutos.

- 24 ▲▲▲ Se desea dividir un terreno rectangular, de 120 m de ancho por 180 m de largo, en parcelas cuadradas que sean lo más grandes posible. ¿Cuánto debe medir el lado de cada parcela?

En este caso hemos de hallar el máximo común divisor de 120 y 180:

$$\left. \begin{array}{l} 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \\ 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array} \right\} \text{M.C.D. } (120, 180) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Hay que dividir el terreno en parcelas cuadradas de 60 m de lado.

- 25 ▲▲▲ En un club de atletismo se han inscrito 18 chicos y 24 chicas. ¿Cuántos equipos se pueden hacer teniendo en cuenta que debe haber:

- en todos, el mismo número de chicos y el mismo número de chicas;
- el máximo número de equipos que sea posible?

$$\left. \begin{array}{l} 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \end{array} \right\} \text{M.C.D. } (18, 24) = 2 \cdot 3 = 6$$

Se pueden hacer 6 equipos de 3 chicos y 4 chicas cada uno.

- 26 ▲▲▲ ¿Cuál es el lado del menor cuadrado que se puede formar uniendo baldosas rectangulares de 6 cm por 15 cm?



$$\left. \begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 15 = 3 \cdot 5 \end{array} \right\} \text{m.c.m. } (6, 15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

El menor cuadrado que se puede formar tiene 30 cm de lado.

- 27 ▲▲▲ Se ha formado una pila de cubos de 20 cm de arista hasta alcanzar la misma altura que otra pila de cubos de 30 cm de arista. ¿Cuál será la altura de ambas pilas? (Busca al menos tres soluciones).

$$\left. \begin{array}{l} 20 = 2^2 \cdot 5 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array} \right\} \text{m.c.m. } (20, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

La mínima altura es de 60 cm (3 cubos de 20 cm y 2 cubos de 30 cm).

Otras soluciones pueden ser 120 cm (6 cubos de 20 cm y 4 cubos de 30 cm), 180 cm (9 cubos de 20 cm y 6 cubos de 30 cm), etc. Todas ellas múltiplos de 60.

■ PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

28 Un granjero, tras recoger en una cesta su cosecha de huevos, piensa:

- Si los envaso por docenas, me sobran 5.
- Si tuviera uno más podría envasarlos, exactamente, en cajas de 10.
- Casi he recogido 100.

¿Cuántos huevos tiene?

- Según la primera pista, es un múltiplo de 12 más un 5.
- Según la segunda pista, la cifra de las unidades es 9.
- Tiene casi 100 huevos.

Probamos:

$$12 \cdot 6 + 5 = 72 + 5 = 77 \rightarrow \text{No acaba en 9}$$

$$12 \cdot 7 + 5 = 84 + 5 = 89 \rightarrow \text{Puede valer}$$

$$12 \cdot 8 + 5 = 96 + 5 = 101 \rightarrow \text{No vale}$$

El número de huevos que ha recogido es 89.

29 ▲▲▲ Los participantes en un desfile pueden agruparse, para desfilar, de 3 en 3, de 5 en 5 o de 25 en 25, pero no pueden hacerlo ni de 4 en 4 ni de 9 en 9.

¿Cuál es el número de participantes si sabemos que está entre 1 000 y 1 250?

$$\text{m.c.m. } (3, 5, 25) = 75$$

El número tiene que ser múltiplo de 75 y estar entre 1 000 y 1 250:

$$1\ 050 \quad 1\ 125 \quad 1\ 200$$

El número 1 125 es múltiplo de 9 ($1\ 125 = 9 \cdot 125$) y 1 200 es múltiplo de 4 ($1\ 200 = 4 \cdot 300$).

Por tanto, el número de participantes es 1 050.

30 ▲▲▲ Divide la esfera del reloj en 6 partes de forma que los números que entran en cada parte sumen lo mismo.

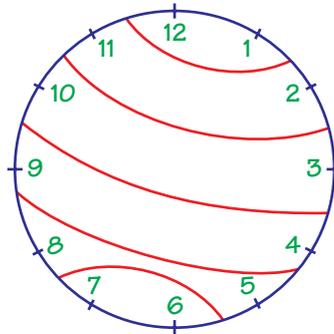
La suma de todos los números de la esfera del reloj es:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78$$

Así, cada una de las 6 partes debe sumar $78 : 6 = 13$.

Las regiones en las que hay que dividir el reloj son:

$$1 + 12 / 11 + 2 / 10 + 3 / 9 + 4 / 8 + 5 / 7 + 6$$



31 Fátima ha invitado a diez amigos a su fiesta de cumpleaños. Después de merendar, propone un acertijo con premio: “Se llevará la caja de bombones quien averigüe, sin abrirla, cuántos bombones contiene. Os doy tres pistas:

- Hay menos de cinco docenas.
- Están ordenados en filas de nueve.
- Si se repartieran entre todos los presentes, sobraría uno.”

¿Cuántos bombones contiene la caja?

- Hay menos de 60 bombones.
- Son un múltiplo de 9.
- Diez amigos más Fátima son once. El número de bombones es un múltiplo de 11 más uno.

Las posibilidades, según la última pista, son:

$$12 \quad 23 \quad 34 \quad 45 \quad 56 \quad 67 \quad \dots$$

Como ha de ser múltiplo de 9 y menor que 60, el número de bombones es 45.

PÁGINA 92**■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD****El conjunto \mathbb{Z} . Orden y representación**

1 ▲▲▲ Expresa matemáticamente, con operaciones de enteros, los siguientes enunciados:

- Me dan 5 € de paga.
- Me gasto 12 € en un disco.
- Me llega una factura de 20 €.
- Mi hermana me perdona una deuda de 25 €.
- Acabo de perder los 10 € que me ha dado mi tío Nicolás.
- Mi madre no me va a dar la paga de 5 € del domingo.
- +5
- -12
- +(-20)
- -(-25)
- -(+10)
- -(+5)

2 ▲▲▲ Descontando los gastos, deudas y facturas que tiene Ricardo de sus ingresos, haberes y ganancias, le quedan 1 580 €.

Si hoy su hermano le ha perdonado una deuda de 190 €, ¿cuál será su saldo en la actualidad?

$$1580 - (-190) = ?$$

$$1580 - (-190) = 1580 + 190 = 1770 \text{ €}$$

3 ▲▲▲ Escribe el opuesto de cada uno de los siguientes números:

- | | | | | |
|--------|--------|-------|------|-------|
| a) +13 | b) -21 | c) +1 | d) 0 | e) -8 |
| a) -13 | b) +21 | c) -1 | d) 0 | e) +8 |

4 ▲▲▲ Ordena de menor a mayor:

- a) +4, 0, +5, +9, +8, +2

- b) $-5, -3, 0, -1, -10, -2$
 c) $10, -3, -7, +5, -4, 6, -8$
 a) $0 < +2 < +4 < 5 < +8 < 9$
 b) $-10 < -5 < -3 < -2 < -1 < 0$
 c) $-8 < -7 < -4 < -3 < 5 < 6 < 10$

Suma y resta

- 5 ▲▲▲ Comprueba, con los números $(+5)$, (-7) y (-4) , que la suma es asociativa:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$(+5) + [(-7) + (-4)] = [(+5) + (-7)] + (-4)$$

$$(+5) + (-11) = (-2) + (-4)$$

$$-6 = -6$$

- 6 ▲▲▲ Quita paréntesis:

a) $+(-5)$

b) $-(-4)$

c) $-(+6)$

d) $-(+8)$

e) $+(+12)$

f) $+(-5)$

g) $-[-(-3)]$

h) $-[+(-5)]$

i) $-[-(+7)]$

a) -5

b) $+4$

c) -6

d) -8

e) $+12$

f) -5

g) -3

h) $+5$

i) $+7$

- 7 ▲▲▲ Calcula:

a) $12 - 8 + 4 - 9 - 3 + 10$

b) $5 - 9 - 7 + 4 - 6 + 8$

c) $-1 - 3 + 5 - 8 - 4 - 3 + 2$

d) $-6 - 9 + 4 + 12 - 15 + 21$

a) $12 - 8 + 4 - 9 - 3 + 10 = 12 + 4 + 10 - (8 + 9 + 3) = 26 - 20 = 6$

b) $5 - 9 - 7 + 4 - 6 + 8 = 5 + 4 + 8 - (9 + 7 + 6) = 17 - 22 = -5$

c) $-1 - 3 + 5 - 8 - 4 - 3 + 2 = 5 + 2 - (1 + 3 + 8 + 4 + 3) =$
 $= 7 - 19 = -12$

d) $-6 - 9 + 4 + 12 - 15 + 21 = 4 + 12 + 21 - (6 + 9 + 15) =$
 $= 37 - 30 = 7$

8 ▲▲▲ Calcula:

a) $(-5) - (-5) - (+5)$

b) $(-12) + (+6) - (-7)$

c) $(+6) + (-2) - (+5) - (-7)$

d) $(+18) - (-11) - (+10) + (-14)$

e) $(-8) - (-1) - (+3) + (-5) + (+9)$

f) $(+2) - (+12) + (-11) - (-15) - (-5)$

a) $(-5) - (-5) - (+5) = (-5) + 5 - 5 = -5$

b) $(-12) + (+6) - (-7) = -12 + 6 + 7 = 13 - 12 = 1$

c) $(+6) + (-2) - (+5) - (-7) = 6 - 2 - 5 + 7 = 13 - 7 = 6$

d) $(+18) - (-11) - (+10) + (-14) = 18 + 11 - 10 - 14 = 29 - 24 = 5$

e) $(-8) - (-1) - (+3) + (-5) + (+9) = -8 + 1 - 3 - 5 + 9 =$
 $= 10 - 16 = -6$

f) $(+2) - (+12) + (-11) - (-15) - (-5) = 2 - 12 - 11 + 15 + 5 =$
 $= 22 - 23 = -1$

10 ▲▲▲ Calcula:

a) $10 - (8 + 4)$

b) $6 - (3 - 12)$

c) $(5 + 7) - (2 - 8)$

d) $18 + (3 - 5 + 2 - 8)$

e) $15 - (8 - 2 - 6 + 1)$

f) $(5 - 3 + 2) - (10 - 5 - 3 + 1)$

a) $10 - (8 + 4) = 10 - 12 = -2$

b) $6 - (3 - 12) = 6 - (-9) = 6 + 9 = 15$

c) $(5 + 7) - (2 - 8) = 12 - (-6) = 12 + 6 = 18$

d) $18 + (3 - 5 + 2 - 8) = 18 + (-8) = 18 - 8 = 10$

e) $15 - (8 - 2 - 6 + 1) = 15 - (1) = 14$

f) $(5 - 3 + 2) - (10 - 5 - 3 + 1) = 4 - (3) = 1$

11 ▲▲▲ Quita paréntesis, como se ha hecho en la primera expresión:

a) $(+a) + (+b) = a + b$

b) $(+a) + (-b)$

c) $(+a) - (+b)$

d) $(+a) - (-b)$

e) $(-a) + (+b)$

f) $(-a) + (-b)$

g) $(-a) - (+b)$

h) $(-a) - (-b)$

a) $(+a) + (+b) = a + b$

b) $(+a) + (-b) = a - b$

c) $(+a) - (+b) = a - b$

d) $(+a) - (-b) = a + b$

e) $(-a) + (+b) = -a + b$

f) $(-a) + (-b) = -a - b$

g) $(-a) - (+b) = -a - b$

h) $(-a) - (-b) = -a + b$

PÁGINA 93

13 ▲▲▲ Calcula:

a) $(4 - 6) - [(-2) + (-7)]$

b) $(-9) + [(-4) - (-2) + (-3)]$

c) $(+12) - [(+2) + (-7) - (+14)]$

d) $[(-12) - (-20)] - [(+6) + (5 - 9) - (16 - 8 - 11)]$

a) $(4 - 6) - [(-2) + (-7)] = -2 - [-2 - 7] = -2 - (-9) = -2 + 9 = 7$

b) $(-9) + [(-4) - (-2) + (-3)] = (-9) + [-4 + 2 - 3] =$
 $= (-9) + (-5) = -9 - 5 = -14$

c) $(+12) - [(+2) + (-7) - (+14)] = (+12) - [2 - 7 - 14] =$
 $= (+12) - (-19) = 12 + 19 = 31$

d) $[(-12) - (-20)] - [(+6) + (5 - 9) - (16 - 8 - 11)] =$
 $= [-12 + 20] - [6 + (-4) - (-3)] = 8 - [6 - 4 + 3] = 8 - 5 = 3$

Multipliación y división

14 ▲▲▲ Calcula los productos:

a) $(+11) \cdot (+7)$

b) $(+5) \cdot (-12)$

c) $(-3) \cdot (+20)$

d) $(-5) \cdot (-15)$

e) $(-4) \cdot (+2) \cdot (-8)$

f) $(-3) \cdot (-1) \cdot (-5)$

g) $(+2) \cdot (+3) \cdot (-2)$

h) $(+5) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (+3)$

a) 77

b) -60

c) -60

d) 75

e) 64

f) -15

g) -12

h) 30

15 ▲▲▲ Halla el cociente:

a) $(+48) : (-6)$

b) $(-150) : (+3)$

c) $300 : (-6)$

d) $(-99) : (-11)$

e) $(-8) : (-1)$

f) $(+300) : (+12)$

g) $(-1000) : 25$

h) $(-1) : (-1)$

a) -8

b) -50

c) -50

d) 9

c) 8

f) 25

g) -40

h) 1

17 ▲▲▲ Calcula:

a) $(+5) \cdot (-4) \cdot (+3)$

b) $(+5) \cdot [(-4) \cdot (+3)]$

c) $[(+45) : (-15)] : (-3)$

d) $(+45) : [(-15) : (-3)]$

e) $([(+81) : (-3)] : (+9)) : (-3)$

f) $[(+81) : (-3)] : [(+9) : (-3)]$

a) $(+5) \cdot (-4) \cdot (+3) = (-20) \cdot (+3) = -60$

b) $(+5) \cdot [(-4) \cdot (+3)] = (+5) \cdot [-12] = -60$

c) $(+45) : (-15) : (-3) = (-3) : (-3) = 1$

d) $(+45) : [(-15) : (-3)] = (+45) : (+5) = 9$

e) $([(+81) : (-3)] : (+9)) : (-3) = ((-27) : (+9)) : (-3) = (-3) : (-3) = 1$

f) $[(+81) : (-3)] : [(+9) : (-3)] = [(-27)] : [(+9) : (-3)] \rightarrow$ No tiene solución entera.

18 ▲▲▲ Calcula:

a) $20 + 5 \cdot (6 - 9)$

b) $18 - 3 \cdot (4 + 2)$

c) $4 \cdot (2 - 6) - 5 \cdot (3 - 7)$

d) $150 : (7 - 12)$

e) $(35 - 15) : (5 - 8)$

f) $(6 - 2 - 10) : (5 - 11)$

a) $20 + 5 \cdot (6 - 9) = 20 + 5 \cdot (-3) = 20 - 15 = 5$

b) $18 - 3 \cdot (4 + 2) = 18 - 3 \cdot 6 = 18 - 18 = 0$

c) $4 \cdot (2 - 6) - 5 \cdot (3 - 7) = 4 \cdot (-4) - 5 \cdot (-4) = -16 + 20 = 4$

d) $150 : (7 - 12) = 150 : (-5) = -30$

e) $(35 - 15) : (5 - 8) = 20 : (-3) \rightarrow$ No tiene solución entera.

f) $(6 - 2 - 10) : (5 - 11) = (-6) : (-6) = 1$

20 ▲▲▲ Calcula:

a) $(-2) \cdot (+7) + (+5) \cdot (+6)$

b) $(+4) \cdot (-20) - (+2) \cdot (-40)$

c) $(+5) \cdot (+10) - (+4) \cdot (-20)$

d) $(+5) \cdot [(-3) + (+7)]$

e) $(-2) \cdot [8 - (+4) - (-10)]$

f) $[(-6) - (-3)] \cdot [(+5) - (-2)]$

a) $(-2) \cdot (+7) + (+5) \cdot (+6) = (-14) + (+30) = 16$

b) $(+4) \cdot (-20) - (+2) \cdot (-40) = -80 - (-80) = -80 + 80 = 0$

c) $(+5) \cdot (+10) - (+4) \cdot (-20) = 50 - (-80) = 50 + 80 = 130$

d) $(+5) \cdot [(-3) + (+7)] = (+5) \cdot (+4) = 20$

e) $(-2) \cdot [8 - (+4) - (-10)] = (-2) \cdot [8 - 4 + 10] = (-2) \cdot 14 = -28$

f) $[(-6) - (-3)] \cdot [(+5) - (-2)] = (-6 + 3) \cdot (5 + 2) = (-3) \cdot 7 = -21$

22 ▲▲▲ Calcula:

a) $(-5) \cdot [(-5) + (+2) - (4 + 6 - 1)]$

b) $(-3) \cdot (+2) - [(-5) + (-7) - (-1)] \cdot (-3)$

c) $3 \cdot [(+4) + (-6)] - (-2) \cdot [8 - (+4)]$

d) $6 + (3 - 5 + 4) \cdot 2 - 3 \cdot (6 - 9 + 8)$

a) $(-5) \cdot [(-5) + (+2) - (4 + 6 - 1)] = (-5) \cdot [-5 + 2 - (9)] =$
 $= (-5) \cdot (-12) = 60$

b) $(-3) \cdot (+2) - [(-5) + (-7) - (-1)] \cdot (-3) =$
 $= -6 - [-5 - 7 + 1] \cdot (-3) =$
 $= -6 - (-11) \cdot (-3) = -6 - 33 = -39$

$$\begin{aligned} \text{c) } 3 \cdot [(+4) + (-6)] - (-2) \cdot [8 - (+4)] &= 3 \cdot [4 - 6] - (-2) \cdot [8 - 4] = \\ &= 3 \cdot (-2) - (-2) \cdot 4 = -6 + 8 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 6 + (3 - 5 + 4) \cdot 2 - 3 \cdot (6 - 9 + 8) &= 6 + (2) \cdot 2 - 3 \cdot (+5) = \\ &= 6 + 4 - 15 = -5 \end{aligned}$$

Potencias y raíces

23 ▲▲▲ Calcula:

a) El cuadrado de (-10) .

b) El cuadrado de (-15) .

c) El cubo de (-5) .

d) El cubo de (-10) .

a) 100

b) 225

c) -125

d) $-1\,000$

24 ▲▲▲ Calcula:

a) $(-5)^3$

b) $(+5)^3$

c) -5^3

d) $(-5)^4$

e) $(+5)^4$

f) -5^4

a) -125

b) 125

c) -125

d) 625

e) 625

f) -625

25 ▲▲▲ Calcula el valor de x , y , z y k :

a) $(-x)^3 = -8$

b) $(+y)^4 = 81$

c) $z^5 = -1$

d) $(+k)^5 = -1$

a) $x = 2 \rightarrow (-2)^3 = -8$

b) $y = 3 \rightarrow (+3)^4 = 81$

c) $z = -1 \rightarrow -1^5 = -1$

d) $k = -1 \rightarrow [+(-1)]^5 = (-1)^5 = -1$

PÁGINA 94

26 ▲▲▲ Calcula, si existe:

a) $\sqrt{81} - \sqrt{100}$

b) $\sqrt{81 - 100}$

c) $\sqrt{81 + 144}$

d) $\sqrt{81} + \sqrt{144}$

a) $\sqrt{81} - \sqrt{100} = 9 - 10 = -1$

b) $\sqrt{81 - 100} \rightarrow$ No existe.

c) $\sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$

d) $\sqrt{81} + \sqrt{144} = 9 + 12 = 21$

27 ▲▲▲ Calcula:

a) $(-3)^2 \cdot (-3)$

b) $(-2)^2 \cdot (+2)^3$

c) $(+4)^3 : (+4)^2$

d) $(-5)^4 : (+5^2)$

a) $(-3)^2 \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27$

b) $(-2)^2 \cdot (+2)^3 = 4 \cdot 8 = 32$

c) $(+4)^3 : (+4)^2 = (+4)^{3-2} = (+4)^1 = 4$

d) $(-5)^4 : (+5^2) = 625 : 25 = 25 = 5^2$

Problemas28 ▲▲▲ Un día de invierno a las doce de la mañana, la temperatura en el patio del colegio era de -4 °C, y en el interior de la clase, de 17 °C. ¿Cuál era la diferencia de temperatura entre el interior y el exterior?

$$17 - (-4) = 21 \text{ °C}$$

29 ▲▲▲ Ayer, la temperatura a las nueve de la mañana era de 15 °C. A mediodía había subido 6 °C, a las cinco de la tarde marcaba 3 °C más, a las nueve de la noche había bajado 7 °C y a las doce de la noche aún había bajado otros 4 °C. ¿Qué temperatura marcaba el termómetro a medianoche?

$$15 + 6 + 3 - 7 - 4 = 24 - 11 = 13 \text{ °C}$$

- 30 ▲▲▲ La tabla expresa las temperaturas máxima y mínima de varias ciudades en un día de julio.

	MÁXIMA	MÍNIMA
ATENAS	36	25
LISBOA	38	26
LONDRES	25	18
MADRID	38	21
PEQUÍN	28	20
BUENOS AIRES	15	4
SANTIAGO DE CHILE	9	-2

¿Qué ciudad tuvo una variación de temperatura más brusca? ¿Cuántos grados supuso esa variación?

Las variaciones de temperatura son:

$$\text{Atenas} \rightarrow 36 - 25 = 11$$

$$\text{Lisboa} \rightarrow 38 - 26 = 12$$

$$\text{Londres} \rightarrow 25 - 18 = 7$$

$$\text{Madrid} \rightarrow 38 - 21 = 17$$

$$\text{Pequín} \rightarrow 28 - 20 = 8$$

$$\text{Buenos Aires} \rightarrow 15 - 4 = 11$$

$$\text{Santiago de Chile} \rightarrow 9 - (-2) = 9 + 2 = 11$$

La variación de temperatura más brusca corresponde a Madrid, con 17 °C de diferencia entre la máxima y la mínima.

- 31 ▲▲▲ Aristóteles, uno de los filósofos más influyentes de todos los tiempos, vivió entre los años 106 y 43 a.C. ¿A qué edad murió? ¿Cuántos años hace de eso?

$$(-43) - (-106) = -43 + 106 = 63$$

Aristóteles murió a los 63 años de edad.

Si estuviésemos en el año 2002, de esto haría:

$$2002 - (-43) = 2045 \text{ años}$$

Si estuviésemos en el 2003, de esto haría:

$$2003 - (-43) = 2003 + 43 = 2046 \text{ años}$$

Etc.

32 ▲▲▲ ¿En qué año nos situamos medio siglo antes del año 15 de nuestra era?

$$15 - 50 = -35$$

Nos situamos en el año 35 a.C.

33 ▲▲▲ En las vidas de Cicerón y Séneca encontramos numerosos rasgos comunes. Los dos eran ciudadanos de Roma, cultos, buenos oradores y metidos en política, lo que a ambos les costó la vida.

Sin embargo, vivieron en distinta época:

- Cicerón nació en el año 106 a.C. y vivió 63 años.
- Séneca nació 47 años después de la muerte de Cicerón y vivió 61 años. ¿En qué año murió Séneca?

Cicerón murió en el año 43 a.C., ya que:

$$-106 + 63 = -43$$

Séneca nació en el año 4 d.C., ya que:

$$-43 + 47 = +4$$

Séneca murió en el año 65 d.C., ya que:

$$4 + 61 = 65$$

34 ▲▲▲ El empresario de una estación invernal resume así la marcha de su negocio durante el año pasado:

1 ^{er} TRIMESTRE	Ganancias de 3 875 € cada mes
2 ^o TRIMESTRE	Pérdidas de 730 € cada mes
3 ^{er} TRIMESTRE	Pérdidas de 355 € cada mes
4 ^o TRIMESTRE	Ganancias de 2 200 € cada mes

¿Cuál fue el balance final?

$$(3\,875 \cdot 3) - (730 \cdot 3) - (355 \cdot 3) + (2\,200 \cdot 3) =$$

$$= (3\,875 - 730 - 355 + 2\,200) \cdot 3 = 4\,990 \cdot 3 = 14\,970$$

El balance final es una ganancia de 14 970 €.

- 35 ▲▲▲ Azucena tenía el cinco de septiembre 187 € en su cuenta bancaria. La cuenta ha sufrido las variaciones que se indican a continuación:

BANCO KOKO		EXTRACTO DE MOVIMIENTOS nº de cuenta.....		
FECHA	D	H	CONCEPTO	
10 - IX	18 €		Extracción cajero	
13 - IX		3 €	Abono intereses cuenta	
1 - X		1084 €	Abono nómina	
5 - X	93 €		Recibo compañía telefónica	
15 - X	53 €		Gasto comercio	
15 - X	520 €		Préstamo hipotecario	

¿Cuál es su saldo el día quince de octubre?

$$187 - 18 + 3 + 1084 - 93 - 53 - 520 = 590$$

El saldo de Azucena, el día 15 de octubre, es de 590 € a su favor.

PÁGINA 95

Números negativos con calculadora

- 37 ▲▲▲ Utilizando los procedimientos del ejercicio anterior, escribe en la pantalla de tu calculadora:

a) -6

a) $0 \text{ [-] } 6 \text{ [=]}$

6 [M-] [MR]

b) -15

b) $0 \text{ [-] } 15 \text{ [=]}$

15 [M-] [MR]

c) -585

c) $0 \text{ [-] } 585 \text{ [=]}$

585 [M-] [MR]

- 38 ▲▲▲ Fijándote en la operación que se da resuelta, di las soluciones de las que se te proponen.

Después, comprueba con la calculadora.

$143 - 156 = -13$

a) $243 - 256$

b) $43 - 156$

c) $143 - 256$

d) $543 - 556$

$320 : 80 = 4$

e) $(+32) : (+8)$

f) $(-32) : (-8)$

g) $(-320) : (+80)$

h) $(-320) : (-8)$

$143 - 156 = -13$

a) $243 - 256 = -13$

b) $43 - 156 = -113$

c) $143 - 256 = -113$

d) $543 - 556 = -13$

$320 : 80 = 4$

e) $(+32) : (+8) = 4$

f) $(-32) : (-8) = 4$

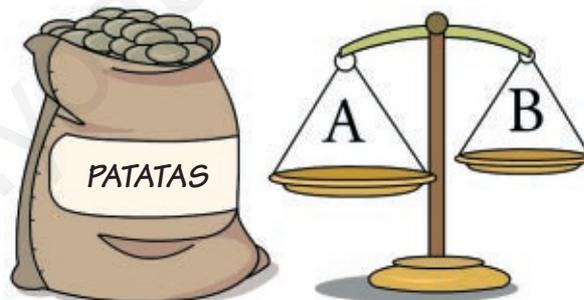
g) $(-320) : (+80) = -4$

h) $(-320) : (-8) = 40$

■ PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

39 Dispones de:

- Una balanza con dos platillos, A y B.
- Tres pesas: una de 1 kg, otra de 3 kg y la tercera de 5 kg.
- Un saco de patatas.



Busca todas las cantidades de patatas que podrías pesar, con una sola pesada, usando la balanza y una, dos o las tres pesas.

Por ejemplo: para pesar dos kilos de patatas puedes colocar la pesa de 5 kg en el platillo A y la de 3 kg, en el platillo B.

Recoge tus resultados en una tabla como la que ves a la derecha.

PESO (en kg)	PLATILLO A	PLATILLO B
1	1	0
2	5	3
3
4
5
...

PESO (en kg)	PLATILLO A	PLATILLO B
1	1	0
2	5	3
3	3	0
4	5	1
5	5	0
6	1 + 5	0
7	5 + 3	1
8	5 + 3	0
9	1 + 3 + 5	0

→ (también 5 en A y
3 en B)

→ (también 1 + 3 en
A y 0 en B)

40 Supón que tienes una balanza y estas cuatro pesas.

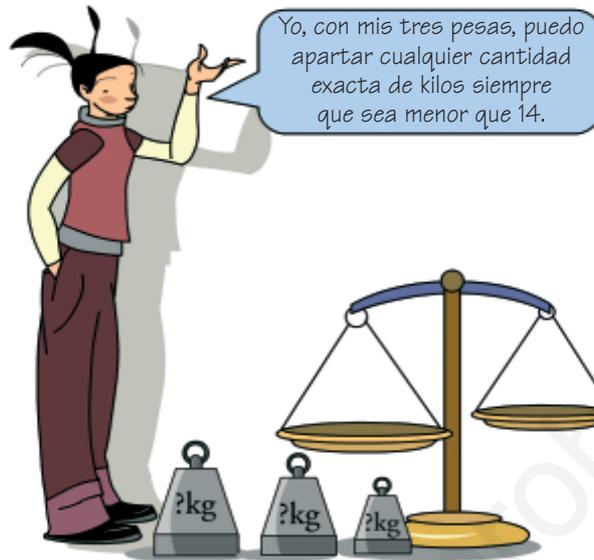


¿Cómo pesarías con ellas las siguientes cantidades?

- | | |
|----------|----------|
| a) 6 kg | b) 5 kg |
| c) 14 kg | d) 29 kg |
| e) 30 kg | f) 38 kg |

	PESO (EN kg)	PLATILLO A	PLATILLO B
a)	6	9	3
b)	5	9	1 + 3
c)	14	27	1 + 3 + 9
d)	29	27 + 3	1
e)	30	27 + 3	0
f)	38	27 + 9 + 3	1

41 Lee atentamente lo que Nuria puede hacer con sus tres pesas y una balanza:



¿Sabrías decir de cuántos kilos es cada una de las tres pesas de Nuria?

Nuria puede pesar, como máximo, 13 kg (menor que 14). Por tanto, la suma de sus pesas ha de ser de 13 kg.

Comprobamos que con pesas de 1 kg, 3 kg y 9 kg puede conseguirse:

PESO (EN kg)	PLATILLO A	PLATILLO B
1	1	0
2	3	1
3	3	0
4	1 + 3	0
5	9	1 + 3
6	9	3
7	9 + 1	3
8	9	1
9	9	0
10	9 + 1	0
11	9 + 3	1
12	9 + 3	0
13	9 + 3 + 1	0

PÁGINA 130

■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Unidades de longitud, capacidad y peso

1 ▲▲▲ Pasa a metros:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a) 4,72 km | b) 21,3 hm |
| c) 720 dm | d) 3 540 mm |
| a) 4,72 km = 4 720 m | b) 21,3 hm = 2 130 m |
| c) 720 dm = 72 m | d) 3 540 mm = 3,54 m |

2 ▲▲▲ Expresa en metros:

- a) 5 km 2 hm 7 dam
 b) 5 m 2 cm 4 mm
 c) 27,46 dam + 436,9 dm
 d) 38 600 mm + 9 540 cm
 e) 0,83 hm + 9,4 dam + 3 500 cm
- a) 5 km 2 hm 7 dam → 5 000 m + 200 m + 70 m = 5 270 m
 b) 5 m 2 cm 4 mm → 5 m + 0,02 m + 0,004 m = 5,024 m
 c) 27,46 dam + 436,9 dm → 274,6 m + 43,69 m = 318,29 m
 d) 38 600 mm + 9 540 cm → 38,6 m + 95,4 m = 134 m
 e) 0,83 hm + 9,4 dam + 3 500 cm → 83 m + 94 m + 35 m = 212 m

3 ▲▲▲ Expresa en centímetros:

- a) 2 dam 7 m 5 dm 4 cm 3 mm
 b) 3 hm 4 m 2 mm
 c) 0,092 km + 3,06 dam + 300 mm
 d) 0,000624 km - 0,38 m
- a) 2 dam 7 m 5 dm 4 cm 3 mm → 2 000 cm + 700 cm + 50 cm + 4 cm + 0,3 cm = 2 754,3 cm
 b) 3 hm 4 m 2 mm → 30 000 cm + 400 cm + 0,2 cm = 30 400,2 cm
 c) 0,092 km + 3,06 dam + 300 mm → 9 200 cm + 3 060 cm + 30 cm = 12 290 cm
 d) 0,000624 km - 0,38 m → 62,4 cm - 38 cm = 24,4 cm

4 ▲▲▲ Pasa a centilitros:

- | | | |
|------------|-------------|-----------|
| a) 0,04 hl | b) 0,52 dal | c) 5,7 l |
| d) 0,3 l | e) 51 dl | f) 420 ml |

- a) $0,04 \text{ hl} = 400 \text{ cl}$ b) $0,52 \text{ dal} = 520 \text{ cl}$ c) $5,7 \text{ l} = 570 \text{ cl}$
 d) $0,3 \text{ l} = 30 \text{ cl}$ e) $51 \text{ dl} = 510 \text{ cl}$ f) $420 \text{ ml} = 42 \text{ cl}$

5 ▲▲▲ Traduce a litros:

- a) $3 \text{ kl } 5 \text{ hl } 4 \text{ l}$
 b) $3 \text{ hl } 8 \text{ dal } 6 \text{ l } 5 \text{ dl}$
 c) $6 \text{ dal } 5 \text{ l } 8 \text{ dl } 7 \text{ cl}$
 d) $42 \text{ dl } 320 \text{ cl } 2600 \text{ ml}$
 a) $3 \text{ kl } 5 \text{ hl } 4 \text{ l} \rightarrow 3000 \text{ l} + 500 \text{ l} + 4 \text{ l} = 3504 \text{ l}$
 b) $3 \text{ hl } 8 \text{ dal } 6 \text{ l } 5 \text{ dl} \rightarrow 300 \text{ l} + 80 \text{ l} + 6 \text{ l} + 0,5 \text{ l} = 386,5 \text{ l}$
 c) $6 \text{ dal } 5 \text{ l } 8 \text{ dl } 7 \text{ cl} \rightarrow 60 \text{ l} + 5 \text{ l} + 0,8 \text{ l} + 0,07 \text{ l} = 65,87 \text{ l}$
 d) $42 \text{ dl } 320 \text{ cl } 2600 \text{ ml} \rightarrow 4,2 \text{ l} + 3,2 \text{ l} + 2,6 \text{ l} = 10 \text{ l}$

6 ▲▲▲ Pasa a gramos:

- | | | |
|------------|-------------|------------|
| a) 0,25 kg | b) 1,04 kg | c) 48 hg |
| d) 58 dag | e) 6,71 dag | f) 5,3 dg |
| g) 635 dg | h) 720 cg | i) 7400 mg |
- a) $0,25 \text{ kg} = 250 \text{ g}$ b) $1,04 \text{ kg} = 1040 \text{ g}$ c) $48 \text{ hg} = 4800 \text{ g}$
 d) $58 \text{ dag} = 580 \text{ g}$ e) $6,71 \text{ dag} = 67,1 \text{ g}$ f) $5,3 \text{ dg} = 0,53 \text{ g}$
 g) $635 \text{ dg} = 63,5 \text{ g}$ h) $720 \text{ cg} = 7,2 \text{ g}$ i) $7400 \text{ mg} = 7,4 \text{ g}$

7 ▲▲▲ Calcula y expresa el resultado en forma compleja:

- a) $0,96241 \text{ km} + 2537 \text{ mm}$
 b) $375,2 \text{ dam} - 16593 \text{ cm}$
 c) $(0,84963 \text{ km}) \times 42$
 d) $(324,83 \text{ hm}) : 11$
 a) $0,96241 \text{ km} + 2537 \text{ mm} = 962410 \text{ mm} + 2537 \text{ mm} = 964947 \text{ mm} =$
 $= 9 \text{ hm } 6 \text{ dam } 4 \text{ m } 9 \text{ dm } 4 \text{ cm } 7 \text{ mm}$
 b) $375,2 \text{ dam} - 16593 \text{ cm} = 3752 \text{ m} - 165,93 \text{ m} = 3586,07 \text{ m} =$
 $= 3 \text{ km } 5 \text{ hm } 8 \text{ dam } 6 \text{ m } 7 \text{ cm}$
 c) $(0,84963 \text{ km}) \times 42 = 35,68446 \text{ km} = 35 \text{ km } 6 \text{ hm } 8 \text{ dam } 4 \text{ m } 4 \text{ dm } 6 \text{ cm}$
 d) $(324,83 \text{ hm}) : 11 = 29,53 \text{ hm} = 2 \text{ km } 9 \text{ hm } 5 \text{ dam } 3 \text{ m}$

8 ▲▲▲ Calcula y expresa el resultado en litros:

- a) $(8 \text{ hl } 5 \text{ dal } 7 \text{ l } 3 \text{ dl}) + 36070 \text{ cl}$
 b) $325 \text{ dal} - (4 \text{ hl } 5 \text{ dal } 8 \text{ l})$
 c) $(2 \text{ dl } 5 \text{ cl } 4 \text{ ml}) \times 25$
 d) $(5 \text{ hl } 4 \text{ dal } 3 \text{ l } 4 \text{ dl}) : 13$

- a) $(8 \text{ hl } 5 \text{ dal } 7 \text{ l } 3 \text{ dl}) + 36\,070 \text{ cl} = 857,3 \text{ l} + 360,7 \text{ l} = 1\,218 \text{ l}$
 b) $325 \text{ dal} - (4 \text{ hl } 5 \text{ dal } 8 \text{ l}) = 3\,250 \text{ l} - 458 \text{ l} = 2\,792 \text{ l}$
 c) $(2 \text{ dl } 5 \text{ cl } 4 \text{ ml}) \times 25 = (0,254 \text{ l}) \times 25 = 6,35 \text{ l}$
 d) $(5 \text{ hl } 4 \text{ dal } 3 \text{ l } 4 \text{ dl}) : 13 = (543,4 \text{ l}) : 13 = 41,8 \text{ l}$

Unidades de superficie

9 ▲▲▲ Pasa a decímetros cuadrados:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------|---------------------------|
| a) $0,083 \text{ dam}^2$ | b) $5,2 \text{ m}^2$ | c) $0,87 \text{ m}^2$ |
| d) $4\,500 \text{ cm}^2$ | e) 237 cm^2 | f) $80\,000 \text{ mm}^2$ |
- a) $0,083 \text{ dam}^2 = 830 \text{ dm}^2$ b) $5,2 \text{ m}^2 = 520 \text{ dm}^2$
 c) $0,87 \text{ m}^2 = 87 \text{ dm}^2$ d) $4\,500 \text{ cm}^2 = 45 \text{ dm}^2$
 e) $237 \text{ cm}^2 = 2,37 \text{ dm}^2$ f) $80\,000 \text{ mm}^2 = 8 \text{ dm}^2$

10 ▲▲▲ Expresa en metros cuadrados:

- a) $4 \text{ hm}^2 \ 34 \text{ dam}^2 \ 30 \text{ dm}^2 \ 86 \text{ cm}^2$
 b) $0,00496 \text{ km}^2 + 3\,800 \text{ cm}^2$
 c) $0,036 \text{ hm}^2 - 3,401 \text{ m}^2$
 d) $(3\,200 \text{ cm}^2) \times 6\,200$
 e) $(324 \text{ dam}^2) : 18$
- a) $4 \text{ hm}^2 \ 34 \text{ dam}^2 \ 30 \text{ dm}^2 \ 86 \text{ cm}^2 = 40\,000 \text{ m}^2 + 3\,400 \text{ m}^2 + 0,30 \text{ m}^2 + 0,0086 \text{ m}^2 = 43\,400,3086 \text{ m}^2$
 b) $0,00496 \text{ km}^2 + 3\,800 \text{ cm}^2 = 4\,960 \text{ m}^2 + 0,38 \text{ m}^2 = 4\,960,38 \text{ m}^2$
 c) $0,036 \text{ hm}^2 - 3,401 \text{ m}^2 = 360 \text{ m}^2 - 3,401 \text{ m}^2 = 356,599 \text{ m}^2$
 d) $(3\,200 \text{ cm}^2) \times 6\,200 = (0,32 \text{ m}^2) \times 6\,200 = 1\,984 \text{ m}^2$
 e) $(324 \text{ dam}^2) : 18 = (32\,400 \text{ m}^2) : 18 = 1\,800 \text{ m}^2$

11 ▲▲▲ Calcula y expresa el resultado en forma compleja:

- a) $0,04698 \text{ km}^2 + 36,42 \text{ ha} + 5\,000 \text{ a}$
 b) $136,72 \text{ m}^2 - 0,485 \text{ dam}^2$
 c) $(27 \text{ dam}^2 \ 43 \text{ m}^2 \ 50 \text{ cm}^2) \times 40$
 d) $(845\,527,11 \text{ m}^2) : 20$
- a) $0,04698 \text{ km}^2 + 36,42 \text{ ha} + 5\,000 \text{ a} = 4,698 \text{ hm}^2 + 36,42 \text{ hm}^2 + 50 \text{ hm}^2 = 91,118 \text{ hm}^2 = 91 \text{ hm}^2 \ 11 \text{ dam}^2 \ 80 \text{ m}^2$
 b) $136,72 \text{ m}^2 - 0,485 \text{ dam}^2 = 136,72 \text{ m}^2 - 48,5 \text{ m}^2 = 88,22 \text{ m}^2 = 88 \text{ m}^2 \ 22 \text{ dm}^2$
 c) $(27 \text{ dam}^2 \ 43 \text{ m}^2 \ 50 \text{ cm}^2) \times 40 = (2\,743,0050 \text{ m}^2) \times 40 = 109\,720,2 \text{ m}^2 = 10 \text{ hm}^2 \ 97 \text{ dam}^2 \ 20 \text{ m}^2 \ 20 \text{ dm}^2$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad (845\,527,11 \text{ m}^2) : 20 &= 42\,276,3555 \text{ m}^2 = \\ &= 4 \text{ hm}^2 \, 22 \text{ dam}^2 \, 76 \text{ m}^2 \, 35 \text{ dm}^2 \, 55 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

12 ▲▲▲ Expresa en hectáreas:

- a) 384 943 a
 b) 386 500 m²
 c) (0,846 km²) × 50
 d) (5 km² 23 hm² 40 dam²) × 0,02
 e) (43 m² 11 dm² 10 cm²) × 20 000
- a) 384 943 a = 3 849,43 ha
 b) 386 500 m² = 38,65 hm² = 38,65 ha
 c) (0,846 km²) × 50 = (84,6 hm²) × 50 = 4 230 hm² = 4 230 ha
 d) (5 km² 23 hm² 40 dam²) × 0,02 = (523,4 hm²) × 0,02 = 10,468 ha
 e) (43 m² 11 dm² 10 cm²) × 20 000 = (0,00431110 hm²) × 20 000 = 86,222 ha

Unidades de volumen

13 ▲▲▲ Pasa a metros cúbicos:

- a) 0,000005 hm³
 b) 52 dam³
 c) 749 dm³
 d) 450 000 cm³
 a) 0,000005 hm³ = 5 m³
 b) 52 dam³ = 52 000 m³
 c) 749 dm³ = 0,749 m³
 d) 450 000 cm³ = 0,45 m³

14 ▲▲▲ Expresa en centímetros cúbicos:

- a) 8,23 dm³
 b) 5 800 mm³
 c) 9,4 dl
 d) 32 cl
 a) 8,23 dm³ = 8 230 cm³
 b) 5 800 mm³ = 5,8 cm³
 c) 9,4 dl = 0,94 l = 0,94 dm³ = 940 cm³
 d) 32 cl = 0,32 l = 0,32 dm³ = 320 cm³

PÁGINA 131

15 ▲▲▲ Expresa en litros:

- a) 5,2 m³
 b) 0,08 m³
 c) 3,4 dm³
 d) 2 600 cm³
 a) 5,2 m³ = 5 200 dm³ = 5 200 l
 b) 0,08 m³ = 80 dm³ = 80 l
 c) 3,4 dm³ = 3,4 l
 d) 2 600 cm³ = 2,6 dm³ = 2,6 l

16 ▲▲▲ Calcula y expresa el resultado en metros cúbicos:

a) $6\,400\text{ dm}^3 + (2,5\text{ m}^3 + 3\,600\text{ dm}^3)$

b) $0,008\text{ hm}^3 - (5,3\text{ dm}^3 + 780\text{ m}^3)$

c) $(6,2\text{ cm}^3 + 1\,800\text{ mm}^3) \times 2\,000$

a) $6\,400\text{ dm}^3 + (2,5\text{ m}^3 + 3\,600\text{ dm}^3) = 6,4\text{ cm}^3 + 2,5\text{ m}^3 + 3,6\text{ m}^3 = 12,5\text{ m}^3$

b) $0,008\text{ hm}^3 - (5,3\text{ dm}^3 + 780\text{ m}^3) = 8\,000\text{ m}^3 - 780,0053\text{ m}^3 = 7\,219,9947\text{ m}^3$

c) $(6,2\text{ cm}^3 + 1\,800\text{ mm}^3) \times 2\,000 = 8\text{ cm}^3 \times 2\,000 = 16\,000\text{ cm}^3 = 0,016\text{ m}^3$

Problemas

17 ▲▲▲ ¿Cuál es la longitud de un meridiano terrestre?

Un cuadrante del meridiano \rightarrow 10 000 000 m

Un meridiano \rightarrow 40 000 000 m

18 ▲▲▲ ¿Cuál es el peso de la carga de un depósito que contiene 8 dam³ de agua?

Un litro de agua pesa un kilogramo.

Un metro cúbico de agua (1 000 l) pesa una tonelada (1 000 kg).

8 dam³ = 8 000 m³ de agua pesan 8 000 t.

19 ▲▲▲ ¿Cuántas botellas de 750 cm³ se necesitan para envasar 300 litros de refresco?

$$750\text{ cm}^3 = 0,75\text{ l}$$

$$(300\text{ l}) : 0,75 = 400\text{ botellas}$$

20 ▲▲▲ Un terreno de 5,3 ha se vende a 4,8 €/m². ¿Cuál es el precio total del terreno?

$$5,3\text{ ha} = 53\,000\text{ m}^2$$

$$(53\,000\text{ m}^2) \times 4,8 = 254\,400\text{ €}$$

21 ▲▲▲ Una bodega vende vino al por mayor a 1,45 €/l. ¿Cuál es el coste de un camión cisterna que transporta 5 m³ de ese vino?

$$5\text{ m}^3 = 5\,000\text{ l}$$

$$(5\,000\text{ l}) \times 1,45 = 7\,250\text{ €}$$

22 ▲▲▲ Un camión transporta 50 cajas con botellas llenas de agua.

Cada caja contiene 20 botellas de litro y medio.

Una caja vacía pesa 1 500 g, y una botella vacía, 50 g.

¿Cuál es el peso total de la carga?

Una botella pesa $\rightarrow 0,05 \text{ kg} + 1,5 \text{ kg} = 1,55 \text{ kg}$

Una caja pesa $\rightarrow 1,5 \text{ kg} + 20 \times (1,55 \text{ kg}) = 32,5 \text{ kg}$

La carga pesa $\rightarrow (32,5 \text{ kg}) \times 50 = 1\,625 \text{ kg}$

Problemas de estrategia

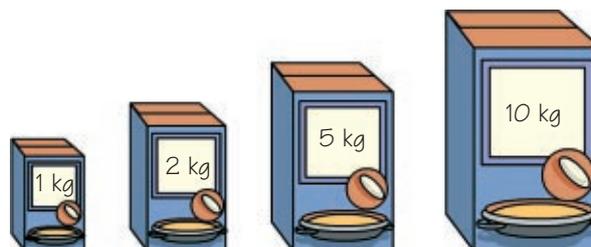
- 23 Estás junto a una fuente y tienes dos cántaros, uno de 7 litros y otro de 5 litros. ¿Qué harías para medir 4 litros?



- Llenar el mayor.
- Con el contenido del grande, llenar el pequeño.
- Vaciar el pequeño.
- Pasar el contenido del mayor al menor.
- Llenar el grande.
- Con el grande, llenar el pequeño.

ESTADO DE LOS JARROS	
EL MAYOR	EL MENOR
7 l	0 l
2 l	5 l
2 l	0 l
0 l	2 l
7 l	2 l
4 l	5 l

- 24 Un comerciante vende el arroz envasado en bolsas de 1 kg, de 2 kg, de 5 kg, y de 10 kg.



- ¿De cuántas formas distintas, en cuanto a las bolsas elegidas, puede un cliente llevarse 15 kg de arroz?

$$10 \text{ kg} + 5 \text{ kg}$$

$$10 \text{ kg} + 2 \times 2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}$$

$$10 \text{ kg} + 2 \text{ kg} + 3 \times 1 \text{ kg}$$

$$10 \text{ kg} + 5 \times 1 \text{ kg}$$

$$3 \times 5 \text{ kg}$$

$$2 \times 5 \text{ kg} + 2 \times 2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}$$

$$2 \times 5 \text{ kg} + 2 \text{ kg} + 3 \times 1 \text{ kg}$$

$$2 \times 5 \text{ kg} + 5 \times 1 \text{ kg}$$

$$5 \text{ kg} + 5 \times 2 \text{ kg}$$

$$5 \text{ kg} + 4 \times 2 \text{ kg} + 2 \times 1 \text{ kg}$$

$$5 \text{ kg} + 3 \times 2 \text{ kg} + 4 \times 1 \text{ kg}$$

En total son 22 formas diferentes.

$$5 \text{ kg} + 2 \times 2 \text{ kg} + 6 \times 1 \text{ kg}$$

$$5 \text{ kg} + 2 \text{ kg} + 8 \times 1 \text{ kg}$$

$$5 \text{ kg} + 10 \times 1 \text{ kg}$$

$$7 \times 2 \text{ kg} + 3 \times 1 \text{ kg}$$

$$6 \times 2 \text{ kg} + 3 \times 1 \text{ kg}$$

$$5 \times 2 \text{ kg} + 5 \times 1 \text{ kg}$$

$$4 \times 2 \text{ kg} + 7 \times 1 \text{ kg}$$

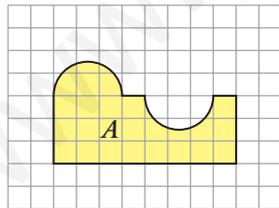
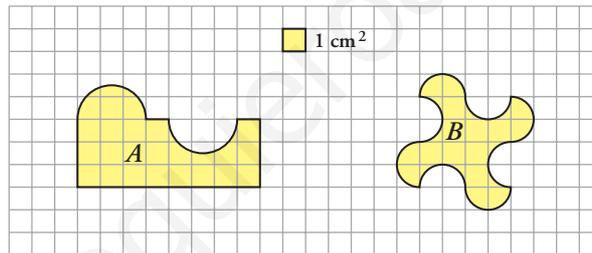
$$3 \times 2 \text{ kg} + 9 \times 1 \text{ kg}$$

$$2 \times 2 \text{ kg} + 11 \times 1 \text{ kg}$$

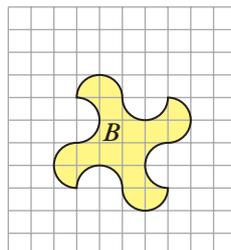
$$2 \text{ kg} + 13 \times 1 \text{ kg}$$

$$15 \times 1 \text{ kg}$$

25 Calcula, en centímetros cuadrados, la superficie de estas figuras:

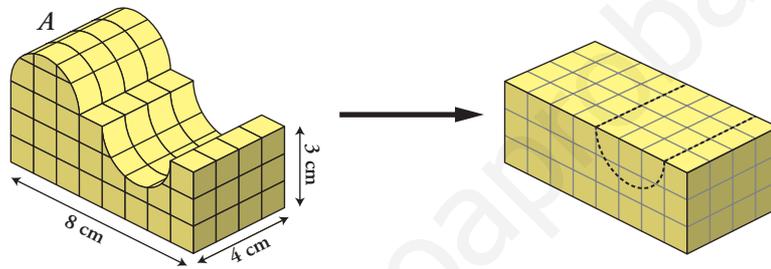
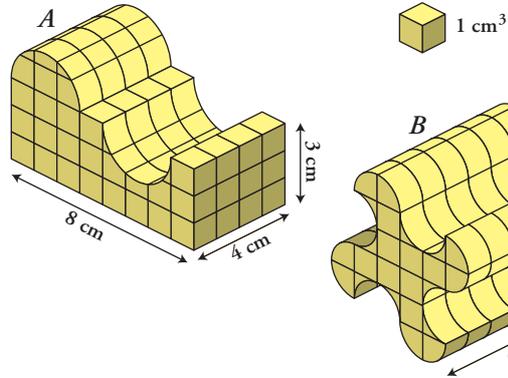


$$S_A = 3 \times 8 = 24 \text{ cm}^2$$

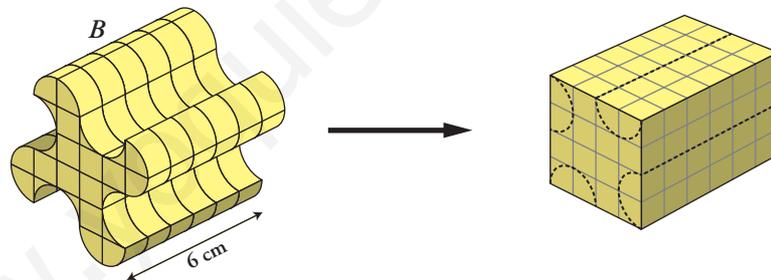


$$S_B = 4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$$

26 Calcula, en centímetros cúbicos, el volumen de estas figuras:



$$V_A = 8 \times 4 \times 3 = 96 \text{ cm}^3$$



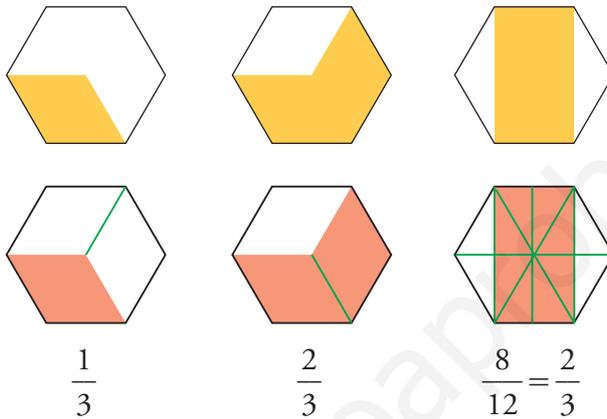
$$V_B = 4 \times 4 \times 6 = 96 \text{ cm}^3$$

PÁGINA 146

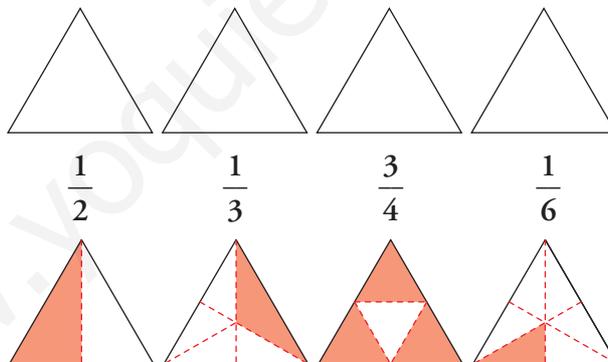
■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Fracciones: significado y representación

1 ▲▲▲ ¿Qué fracción se ha representado en cada una de estas figuras?



2 ▲▲▲ Colorea en cada triángulo la fracción que se indica:



3 ▲▲▲ Calcula mentalmente:

a) $\frac{3}{4}$ de 400

b) $\frac{5}{8}$ de 800

c) $\frac{3}{4}$ de 1 000

d) $\frac{5}{6}$ de 60

e) $\frac{2}{7}$ de 14

f) $\frac{3}{5}$ de 25

a) 300

b) 500

c) 750

d) 50

e) 4

f) 15

4 ▲▲▲ Calcula mentalmente en el orden en que aparecen:

a) $\frac{1}{4}$ de 20

b) $\frac{3}{4}$ de 20

c) $\frac{1}{5}$ de 30

d) $\frac{3}{5}$ de 30

e) $\frac{1}{6}$ de 42

f) $\frac{5}{6}$ de 42

g) $\frac{1}{7}$ de 28

h) $\frac{3}{7}$ de 28

a) 5

b) 15

c) 6

d) 18

e) 7

f) 35

g) 4

h) 12

5 ▲▲▲ Calcula:

a) $\frac{2}{7}$ de 735

b) $\frac{5}{13}$ de 104

c) $\frac{5}{6}$ de 498

d) $\frac{3}{8}$ de 1 160

e) $\frac{4}{9}$ de 153

f) $\frac{7}{11}$ de 1 650

a) $\frac{2}{7} \cdot 735 = (735 : 7) \cdot 2 = 105 \cdot 2 = 210$

b) $\frac{5}{13} \cdot 104 = (104 : 13) \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40$

c) $\frac{5}{6} \cdot 498 = (498 : 6) \cdot 5 = 83 \cdot 5 = 415$

d) $\frac{3}{8} \cdot 1 160 = (1 160 : 8) \cdot 3 = 145 \cdot 3 = 435$

e) $\frac{4}{9} \cdot 153 = (153 : 9) \cdot 4 = 17 \cdot 4 = 68$

f) $\frac{7}{11} \cdot 1 650 = (1 650 : 11) \cdot 7 = 150 \cdot 7 = 1 050$

6 ▲▲▲ Calcula mentalmente y completa:

a) Los $\frac{3}{4}$ de valen 15.

b) Los $\frac{2}{3}$ de valen 8.

c) Los $\frac{4}{5}$ de valen 20.

a) 20 b) 12 c) 25

8 ▲▲▲ Completa el número que falta en cada casilla:

a) $\frac{1}{3}$ de \square = 20

b) $\frac{2}{3}$ de \square = 40

c) $\frac{1}{5}$ de \square = 8

d) $\frac{3}{5}$ de \square = 24

e) $\frac{5}{6}$ de \square = 65

f) $\frac{3}{8}$ de \square = 36

a) $\frac{1}{3}$ de \square = 20 \rightarrow $\square = \frac{3}{1} \text{ de } \square = 3 \cdot 20 = 60$

b) $\frac{2}{3}$ de \square = 40 $\rightarrow \frac{1}{3}$ de \square = $40 : 2 = 20 \rightarrow \square = 20 \cdot 3 = 60$

c) $\frac{1}{5}$ de \square = 8 $\rightarrow \square = 8 \cdot 5 = 40$

d) $\frac{3}{5}$ de \square = 24 $\rightarrow \square = (24 : 3) \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40$

e) $\frac{5}{6}$ de \square = 65 $\rightarrow \square = (65 : 5) \cdot 6 = 13 \cdot 6 = 78$

f) $\frac{3}{8}$ de \square = 36 $\rightarrow \square = (36 : 3) \cdot 8 = 12 \cdot 8 = 96$

9 ▲▲▲ Transforma cada una de estas fracciones en un número decimal:

a) $\frac{3}{10}$

b) $\frac{25}{1000}$

c) $\frac{145}{10}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{5}{4}$

f) $\frac{5}{8}$

g) $\frac{1}{3}$

h) $\frac{6}{25}$

i) $\frac{17}{50}$

a) 0,3

b) 0,025

c) 14,5

d) 0,8

e) 1,25

f) 0,625

g) $0,\widehat{3}$

h) 0,24

i) 0,34

10 ▲▲▲ Expresa estos decimales en forma de fracción:

a) 0,1

b) 0,7

c) 0,02

d) 0,005

e) 0,0003

f) 0,000001

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{7}{10}$

c) $\frac{2}{100}$

d) $\frac{5}{1\ 000}$

e) $\frac{3}{10\ 000}$

f) $\frac{1}{1\ 000\ 000}$

11 ▲▲▲ Expresa en forma de fracción:

a) 1,2

b) 0,12

c) 5,03

d) 0,024

e) 2,400

f) 15,7

a) $\frac{12}{10}$

b) $\frac{12}{100}$

c) $\frac{503}{100}$

d) $\frac{24}{1\ 000}$

e) $\frac{2\ 400}{1\ 000}$

f) $\frac{157}{10}$

PÁGINA 147

Equivalencia, comparación y ordenación de fracciones

12 ▲▲▲ Escribe tres fracciones equivalentes en cada caso:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{4}{8}$

Solución abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$

b) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20}$

c) $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{12}{24}$

13 ▲▲▲ Busca pares de fracciones equivalentes:

$$\frac{2}{3}; \frac{9}{15}; \frac{2}{7}; \frac{6}{18}; \frac{3}{5}; \frac{10}{15}; \frac{6}{21}; \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$$

$$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

15 ▲▲▲ Simplifica:

a) $\frac{4}{8}$

b) $\frac{6}{8}$

c) $\frac{7}{21}$

d) $\frac{6}{18}$

e) $\frac{15}{25}$

f) $\frac{12}{16}$

g) $\frac{18}{27}$

h) $\frac{25}{75}$

i) $\frac{75}{100}$

a) $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

c) $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

d) $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

e) $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

f) $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

g) $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$

h) $\frac{25}{75} = \frac{1}{3}$

i) $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

17 ▲▲▲ Busca:

a) Una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$ que tenga 12 por denominador.b) Una fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ que tenga 9 de numerador.c) Una fracción equivalente a $\frac{10}{15}$ cuyo denominador sea 18.

a) $\frac{2}{3} = \frac{?}{12} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

b) $\frac{3}{5} = \frac{9}{?} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15}$

c) $\frac{10}{15} = \frac{?}{18} = \frac{(10 : 5) \cdot 6}{(15 : 5) \cdot 6} = \frac{12}{18}$

18 ▲▲▲ Simplifica:

a) $\frac{100}{200}$

b) $\frac{126}{180}$

c) $\frac{273}{546}$

a) $\frac{100}{200} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{126}{180} = \frac{63}{90} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$

c) $\frac{273}{546} = \frac{91}{182} = \frac{1}{2}$

19 ▲▲▲ Completa el término que falta:

a) $\frac{2}{5} = \frac{3}{\boxed{?}}$

b) $\frac{5}{7} = \frac{\boxed{?}}{21}$

c) $\frac{2}{6} = \frac{5}{\boxed{?}}$

d) $\frac{6}{15} = \frac{\boxed{?}}{10}$

a) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

b) $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$

c) $\frac{2}{6} = \frac{5}{15}$

d) $\frac{6}{15} = \frac{4}{10}$

20 ▲▲▲ Calcula x en cada caso:

a) $\frac{1}{2} = \frac{x}{6}$

b) $\frac{3}{5} = \frac{24}{x}$

c) $\frac{15}{20} = \frac{x}{8}$

d) $\frac{10}{x} = \frac{14}{21}$

a) $x = 3$

b) $x = 40$

c) $x = 6$

d) $x = 15$

21 ▲▲▲ Reduce a común denominador y ordena:

a) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}$

c) $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}$

d) $\frac{7}{2}, \frac{8}{3}, \frac{9}{5}$

a) m.c.m. (4, 2, 8) = 8

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \quad \frac{1}{2} = \frac{4}{8} \quad \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{3}{4}$$

b) m.c.m. (2, 5, 10) = 10

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} \quad \frac{3}{5} = \frac{6}{10} \quad \frac{7}{10}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{7}{10}$$

c) m.c.m. (4, 5, 10) = 20

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20} \quad \frac{4}{5} = \frac{16}{20} \quad \frac{7}{10} = \frac{14}{20}$$

$$\frac{7}{10} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

d) m.c.m. (2, 3, 5) = 30

$$\frac{7}{2} = \frac{105}{30} \quad \frac{8}{3} = \frac{80}{30} \quad \frac{9}{5} = \frac{54}{30}$$

$$\frac{9}{5} < \frac{8}{3} < \frac{7}{2}$$

22 ▲▲▲ Ordena de menor a mayor:

a) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{11}{16}, \frac{7}{8}$

b) $\frac{3}{5}, \frac{13}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$

a) m.c.m. (4, 8, 16, 8) = 16

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16} \quad \frac{5}{8} = \frac{10}{16} \quad \frac{11}{16} \quad \frac{7}{8} = \frac{14}{16}$$

$$\frac{5}{8} < \frac{11}{16} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8}$$

b) m.c.m. (5, 20, 10, 4) = 20

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20} \quad \frac{13}{20} \quad \frac{7}{10} = \frac{14}{20} \quad \frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

$$\frac{3}{5} < \frac{13}{20} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}$$

c) m.c.m. (2, 3, 6, 12) = 12

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{12} \quad \frac{1}{3} = \frac{4}{12} \quad \frac{5}{6} = \frac{10}{12} \quad \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{5}{6}$$

PÁGINA 148

Suma y resta de fracciones

23 ▲▲▲ Calcula mentalmente:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

b) $1 - \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{4}$

24 ▲▲▲ Calcula:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$

c) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

a) m.c.m. (2, 3) = 6

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

b) m.c.m. (3, 5) = 15

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15}$$

c) m.c.m. (6, 3) = 6

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$$

25 ▲▲▲ Opera:

a) $2 - \frac{3}{7}$

b) $\frac{5}{3} - 1$

c) $\frac{2}{3} - 2$

a) $2 - \frac{3}{7} = \frac{14}{7} - \frac{3}{7} = \frac{11}{7}$

b) $\frac{5}{3} - 1 = \frac{5}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{4}{3}$

26 ▲▲▲ Calcula:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{3} - \frac{8}{9} + \frac{24}{27}$

c) $2 - \frac{3}{2} - \frac{5}{6}$

d) $\frac{7}{8} - 1 + \frac{5}{3}$

a) m.c.m. (2, 4, 8) = 8

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} - \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

b) m.c.m. (3, 9, 27) = 27

$$\frac{1}{3} - \frac{8}{9} + \frac{24}{27} = \frac{9}{27} - \frac{24}{27} + \frac{24}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

c) m.c.m. (2, 6) = 6

$$2 - \frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \frac{12}{6} - \frac{9}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

d) m.c.m. (8, 3) = 24

$$\frac{7}{8} - 1 + \frac{5}{3} = \frac{21}{24} - \frac{24}{24} + \frac{40}{24} = \frac{37}{24}$$

27 ▲▲▲ Calcula:

a) $\frac{3}{4} - 1 - \frac{1}{3} + \frac{5}{9}$

b) $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{7}{10} + \frac{7}{20}$

a) m.c.m. (4, 3, 9) = 36

$$\frac{3}{4} - 1 - \frac{1}{3} + \frac{5}{9} = \frac{27}{36} - \frac{36}{36} - \frac{12}{36} + \frac{20}{36} = -\frac{1}{36}$$

b) m.c.m. (2, 5, 4, 10, 20) = 20

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{7}{10} + \frac{7}{20} = \frac{10}{20} - \frac{8}{20} + \frac{15}{20} - \frac{14}{20} + \frac{7}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

29 ▲▲▲ Realiza estas operaciones:

a) $\left(2 + \frac{3}{5}\right) - \left(3 - \frac{1}{3}\right)$

b) $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

c) $\left(\frac{5}{3} + \frac{3}{4}\right) - \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)$

d) $\frac{3}{4} - \left[1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right]$

a) $\left(2 + \frac{3}{5}\right) - \left(3 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{10}{5} + \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{9}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{5} - \frac{8}{3} = \frac{39}{15} - \frac{40}{15} = -\frac{1}{15}$

b) $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{12}{12} - \left(\frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12}\right) = \frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

c) $\left(\frac{5}{3} + \frac{3}{4}\right) - \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{20}{12} + \frac{9}{12}\right) - \left(\frac{12}{12} - \frac{8}{12} + \frac{9}{12}\right) = \frac{29}{12} - \frac{13}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

$$d) \frac{3}{4} - \left[1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{9}{12} - \left[\frac{12}{12} - \left(\frac{4}{12} + \frac{3}{12} \right) \right] = \frac{9}{12} - \frac{5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Multiplicación y división de fracciones

30 ▲▲▲ Calcula y simplifica:

$$a) 3 \cdot \frac{1}{6}$$

$$b) 5 \cdot \frac{3}{10}$$

$$c) \frac{2}{3} \cdot 6$$

$$d) 5 \cdot \frac{4}{15}$$

$$e) \frac{3}{5} \cdot 10$$

$$f) \frac{3}{8} \cdot 2$$

$$a) 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$b) 5 \cdot \frac{3}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$c) \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{12}{3} = 4$$

$$d) 5 \cdot \frac{4}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

$$e) \frac{3}{5} \cdot 10 = \frac{30}{5} = 6$$

$$f) \frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

31 ▲▲▲ Calcula y reduce:

$$a) \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

$$b) \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$$

$$c) \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{10}$$

$$d) \frac{3}{14} \cdot \frac{7}{9}$$

$$e) \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{16}$$

$$f) \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8}$$

$$a) \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$b) \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$c) \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{10} = \frac{15}{120} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

$$d) \frac{3}{14} \cdot \frac{7}{9} = \frac{21}{126} = \frac{7}{42} = \frac{1}{6}$$

$$e) \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{16} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$$

$$f) \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

32 ▲▲▲ Calcula y reduce:

$$a) 1 : \frac{3}{4}$$

$$b) 1 : \frac{5}{7}$$

$$c) \frac{1}{5} : 2$$

$$d) 4 : \frac{2}{3}$$

e) $2 : \frac{4}{3}$

f) $\frac{3}{5} : 6$

a) $1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$

b) $1 : \frac{5}{7} = \frac{7}{5}$

c) $\frac{1}{5} : 2 = \frac{1}{10}$

d) $4 : \frac{2}{3} = \frac{12}{2} = 6$

e) $2 : \frac{4}{3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

f) $\frac{3}{5} : 6 = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

33 ▲▲▲ Calcula y simplifica:

a) $\frac{1}{4} : \frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{5} : \frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$

e) $\frac{3}{7} : \frac{9}{14}$

f) $\frac{3}{10} : \frac{9}{20}$

a) $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{5}{4}$

b) $\frac{1}{5} : \frac{1}{4} = \frac{4}{5}$

c) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \frac{24}{4} = 6$

e) $\frac{3}{7} : \frac{9}{14} = \frac{42}{63} = \frac{2}{3}$

f) $\frac{3}{10} : \frac{9}{20} = \frac{60}{90} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

34 ▲▲▲ Opera y reduce:

a) $\frac{4}{9} : \frac{1}{3} : 2$

b) $\frac{4}{9} : \left(\frac{1}{3} : 2\right)$

c) $\left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) : \left(6 \cdot \frac{1}{3}\right)$

d) $2 \cdot \left(\frac{1}{4} : \frac{1}{3}\right) \cdot 6$

a) $\frac{4}{9} : \frac{1}{3} : 2 = \frac{12}{9} : 2 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{9} : \left(\frac{1}{3} : 2\right) = \frac{4}{9} : \frac{1}{6} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$

c) $\left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) : \left(6 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{4} : \frac{6}{3} = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$

d) $2 \cdot \left(\frac{1}{4} : \frac{1}{3}\right) \cdot 6 = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 6 = \frac{36}{4} = 9$

PÁGINA 149

36 ▲▲▲ Calcula:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 : \left(\frac{5}{7}\right)^3$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{8} = \frac{27}{32}$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 : \left(\frac{5}{7}\right)^3 = 1 : \frac{5}{7} = \frac{7}{5}$

38 ▲▲▲ Calcula:

a) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(1 - \frac{5}{6}\right)$

b) $\left(1 - \frac{3}{2}\right) : \left(1 - \frac{4}{3}\right)$

c) $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) : \left(1 + \frac{1}{2}\right)$

a) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(1 - \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) : \frac{1}{6} = \frac{1}{6} : \frac{1}{6} = 1$

b) $\left(1 - \frac{3}{2}\right) : \left(1 - \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$

c) $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) : \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

40 ▲▲▲ Calcula:

a) $\frac{1}{5} : \left[\frac{2}{5} - 2 \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right)\right]$

b) $\frac{3}{4} \cdot \left[\frac{7}{3} - 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right]$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{5} : \left[\frac{2}{5} - 2 \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right)\right] &= \frac{1}{5} : \left[\frac{2}{5} - 2 \cdot \frac{3}{10}\right] = \frac{1}{5} : \left[\frac{2}{5} - \frac{6}{10}\right] = \\ &= \frac{1}{5} : \left[\frac{4}{10} - \frac{6}{10}\right] = \frac{1}{5} : \left(-\frac{2}{10}\right) = \frac{1}{5} : \left(-\frac{1}{5}\right) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{7}{3} - 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right] &= \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{7}{3} - 3 \cdot \frac{2}{3} \right] = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{7}{3} - 2 \right] = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{7}{3} - \frac{6}{3} \right] = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{1}{3} \right] = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Problemas

41 ▲▲▲ Contesta a las siguientes preguntas resolviendo mentalmente:

- En una clase de 20 alumnos y alumnas, $\frac{2}{5}$ son chicos. ¿Cuántas son las chicas?
- En una población, el 20% de las personas está en el paro. ¿Qué fracción de la población no tiene trabajo?
- Me he gastado, primero, la mitad de lo que llevaba y, después, la mitad de lo que me quedaba. ¿Qué fracción del total me he gastado?
- Rafael tenía 50 € y se ha gastado 20 €. ¿Qué fracción le queda de lo que tenía?
- ¿Qué fracción de bolas no son rojas?
¿Qué fracción de bolas “no rojas” son amarillas?
- ¿Cuánto es un tercio de los dos tercios de nueve?



- Las chicas son $\frac{3}{5}$ de 20 = 12
- No tiene trabajo $\frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ de la población.
- Se ha gastado $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de lo que llevaba.
- Le queda $\frac{3}{5}$ de lo que tenía.
- De 9 bolas, 3 son rojas, 2 son amarillas y 4 son azules.
Fracción de bolas no rojas $\rightarrow \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
Fracción de bolas amarillas entre las no rojas $\rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 9 \right) = \frac{18}{9} = 2$

- 42 ▲▲▲ En una clase hay 10 chicas y 14 chicos. ¿Qué fracción de la clase representan las chicas? ¿Y los chicos?

$$\text{Chicas} \rightarrow \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$\text{Chicos} \rightarrow \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

- 43 ▲▲▲ De una tarta que pesaba 1,3 kg, ya se han consumido $\frac{3}{8}$. ¿Cuánto pesa el trozo que queda?

Quedan $\frac{5}{8}$ de la tarta.

$$\frac{5}{8} \cdot 1,3 \text{ kg} = \frac{5}{8} \cdot \frac{13}{10} \text{ kg} = \frac{65}{80} \text{ kg} = 0,8125 \text{ kg} = 812,5 \text{ g}$$

- 44 ▲▲▲ Se han consumido los $\frac{5}{6}$ de una caja de 30 bombones. ¿Qué fracción queda? ¿Cuántos bombones quedan?

Queda $\frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ de caja.

Quedan $\frac{1}{6} \cdot 30 = 5$ bombones.

- 45 ▲▲▲ Una huerta tiene una extensión de $8\,000 \text{ m}^2$, de los que $\frac{3}{5}$ están sembrados de maíz, y el resto, de alfalfa. ¿Cuántos metros cuadrados se han dedicado a cada cultivo?

$$\text{Maíz} \rightarrow \frac{3}{5} \text{ de } 8\,000 = (8\,000 : 5) \cdot 3 = 1\,600 \cdot 3 = 4\,800 \text{ m}^2$$

$$\text{Alfalfa} \rightarrow \frac{2}{5} \text{ de } 8\,000 = 1\,600 \cdot 2 = 3\,200 \text{ m}^2$$

- 46 ▲▲▲ En una huerta hay $4\,800 \text{ m}^2$ dedicados al cultivo del maíz, lo que supone $\frac{3}{5}$ de la superficie total. ¿Cuál es la superficie total de la huerta?

$$\frac{3}{5} \text{ de huerta} = 4\,800 \text{ m}^2$$

$$\frac{1}{5} \text{ de huerta} = (4\,800 : 3) \text{ m}^2 = 1\,600 \text{ m}^2$$

$$\text{Superficie de la huerta} = (1\,600 \cdot 5) \text{ m}^2 = 8\,000 \text{ m}^2$$

- 47 ▲▲▲ Un agricultor riega por la mañana $\frac{2}{5}$ de un campo. Por la tarde riega el resto, que son $6\,000 \text{ m}^2$. ¿Cuál es la superficie del campo?

Por la tarde riega $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ del campo.

Si $\frac{3}{5}$ son 6 000 m² $\rightarrow \frac{1}{5}$ son $6\,000 : 3 = 2\,000$ m²

Si $\frac{1}{5}$ son 2 000 m² $\rightarrow \frac{5}{5}$ son $2\,000 \cdot 5 = 10\,000$ m²

La superficie del campo es de 10 000 m².

48 ▲▲▲ Tres cuartos de kilo de queso cuestan 8,70 €. ¿Cuánto cuesta un kilo?

$\frac{3}{4}$ kg cuestan 8,70 €

$\frac{1}{4}$ kg cuesta $(8,70 : 3) = 2,9$ €

1 kg cuesta $2,9 \cdot 4 = 11,6$ €

PÁGINA 150

49 ▲▲▲ ¿Cuántos habitantes tiene una población sabiendo que los menores de quince años son 2 800 y suponen los $\frac{2}{7}$ del total?

$\frac{2}{7}$ de la población = 2 800

$\frac{1}{7}$ de la población = 1 400

Total habitantes = $1\,400 \cdot 7 = 9\,800$

50 ▲▲▲ Se ha vendido por 12 000 € una parcela que ocupaba los $\frac{3}{7}$ de un terreno. ¿Cuánto costaba el terreno completo?

$\frac{3}{7}$ del terreno = 12 000 €

$\frac{1}{7}$ del terreno = 4 000 €

Coste del terreno = $4\,000 \cdot 7 = 28\,000$ €

52 ▲▲▲ ¿Cuántos gramos de oro puro hay en un colgante de 20 quilates que pesa 6 gramos?

20 quilates $\rightarrow \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$ de pureza

$$\frac{5}{6} \text{ de } 6 \text{ gramos} = 5 \text{ gramos}$$

Hay 5 gramos de oro puro

- 53 ▲▲▲ ¿Cuántos gramos de oro puro hay en un lingote de un kilo de peso y 14 quilates de ley?

$$14 \text{ quilates} \rightarrow \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \text{ de pureza}$$

$$\frac{7}{12} \cdot 1000 \text{ g} = 583,\hat{3} \text{ gramos}$$

Hay 583,3 gramos de oro puro.

- 54 ▲▲▲ Con un recipiente que contenía $\frac{3}{4}$ de litro de agua, hemos llenado un vaso de $\frac{2}{5}$ de litro de capacidad. ¿Qué fracción de litro queda en el primer recipiente?

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$$

Quedan $\frac{7}{20}$ litros en el primer recipiente.

- 55 ▲▲▲ En una encuesta sobre consumo, $\frac{1}{2}$ de las personas encuestadas afirman que les gusta el café; $\frac{1}{3}$ declaran que no les gusta, y el resto, no contestan. ¿Qué fracción de los encuestados contestan? ¿Qué fracción no contestan?

$$\text{Contestan: } \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ de los encuestados}$$

$$\text{No contestan: } 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \text{ de los encuestados}$$

- 56 ▲▲▲ Un estanque de riego se ha llenado por la noche. Por la mañana se consumen $\frac{3}{8}$ de su capacidad, y por la tarde, $\frac{1}{5}$ de la misma. ¿Qué fracción de estanque se ha consumido en el día? ¿Qué fracción queda?

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{5} = \frac{23}{40}$$

Se ha consumido $\frac{23}{40}$ del estanque.

$$\text{Quedan } 1 - \frac{23}{40} = \frac{17}{40} \text{ del estanque.}$$

- 57 ▲▲▲ Un paseante recorre en la primera hora $\frac{3}{7}$ del camino; en la segunda, $\frac{1}{4}$ del camino, y en la tercera hora, el resto. ¿En cuál de las tres horas ha caminado más deprisa?

$$\text{En la tercera hora recorre: } 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{7} = \frac{28}{28} - \frac{7}{28} - \frac{12}{28} = \frac{9}{28}$$

$$\text{Ha recorrido: } \frac{3}{7}, \frac{1}{4} \text{ y } \frac{9}{28}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{12}{28} \quad \frac{1}{4} = \frac{7}{28} \quad \frac{9}{28}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{9}{28} < \frac{3}{7}$$

En la primera hora ha caminado más deprisa.

- 58 ▲▲▲ Un peregrino recorre en la primera semana $\frac{1}{6}$ del camino, en la segunda, $\frac{1}{3}$ del camino, y en la tercera, $\frac{2}{9}$ del camino. ¿Qué fracción del camino le queda por recorrer al principio de la cuarta semana?

El peregrino ha recorrido, en las tres primeras semanas:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{3}{18} + \frac{6}{18} + \frac{4}{18} = \frac{13}{18} \text{ del camino}$$

$$\text{Le falta por recorrer: } 1 - \frac{13}{18} = \frac{5}{18} \text{ del camino}$$

- 59 ▲▲▲ Un tornillo avanza $\frac{2}{5}$ de milímetro por vuelta. ¿Cuántos milímetros avanza en 20 vueltas?

$$\text{En 20 vueltas avanza } \frac{2}{5} \cdot 20 = \frac{40}{5} = 8 \text{ milímetros.}$$

- 60 ▲▲▲ Un tornillo penetra 8 mm en 20 vueltas. ¿Cuál es el paso de rosca? (El paso de rosca de un tornillo es la longitud que avanza en una vuelta).

$$\text{El paso de rosca es } \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \text{ milímetros.}$$

- 61 ▲▲▲ Una camioneta transporta en cada viaje $\frac{3}{4}$ de tonelada de arena. Si en un día hace 5 viajes, ¿cuántas toneladas transporta en 4 días?

$$\text{En cuatro días transporta } \frac{3}{4} \cdot 5 \cdot 4 = 15 \text{ toneladas.}$$

- 62 ▲▲▲ Con una garrafa de 5 litros se llenan 30 vasos. Indica con una fracción la capacidad de un vaso.

$$\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

- 63 ▲▲▲ De una botella de $\frac{3}{4}$ de litro, se ha consumido las dos quintas partes. ¿Qué fracción de litro queda?

$$\text{Quedan: } \frac{3}{4} - \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4} - \frac{6}{20} = \frac{15}{20} - \frac{6}{20} = \frac{9}{20} \text{ de litro}$$

- 64 ▲▲▲ Un pantano estaba lleno en enero. En mayo se había consumido $\frac{2}{7}$ de su capacidad. Durante el mes de junio se consume $\frac{1}{5}$ de lo que quedaba.

¿Qué fracción del total del pantano se ha consumido en junio?

¿Qué fracción total se ha consumido en el primer semestre?

¿Qué fracción del pantano ocupa el agua que queda?

En junio se ha consumido:

$$\frac{1}{5} \left(1 - \frac{2}{7} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1}{7} \text{ de la capacidad del pantano}$$

En el primer semestre se ha consumido:

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

El agua que queda ocupa:

$$1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \text{ de la capacidad del pantano}$$

- 65 ▲▲▲ En una clase, $\frac{5}{6}$ de los alumnos han aprobado un control de matemáticas.

Si $\frac{1}{5}$ de los aprobados tienen calificación de notable, ¿qué fracción del total son notables?

¿Cuántos han obtenido notable si la clase tienen 30 alumnos?

$$\text{Notable} \rightarrow \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Número de alumnos con notable} \rightarrow \frac{1}{6} \cdot 30 = 5$$

PÁGINA 151

- 66 ▲▲▲ En una carrera ciclista, durante la primera semana se retiran $\frac{2}{13}$ de los corredores. Durante la segunda semana abandonan $\frac{3}{11}$ de los que quedaban.

¿Qué fracción de los ciclistas quedan en carrera después de los quince primeros días? ¿Cuántos quedan si inicialmente eran 117 los participantes?

$$\text{Se retiran} \rightarrow \frac{2}{13} + \left(\frac{3}{11} \cdot \frac{11}{13}\right) = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} = \frac{5}{13}$$

$$\text{Quedan} \rightarrow 1 - \frac{5}{13} = \frac{8}{13}$$

$$\frac{8}{13} \cdot 117 = 72 \text{ corredores}$$

- 67 ▲▲▲ Un depósito, de 1 500 litros de capacidad, está lleno de agua. Se sacan, primero, dos quintos de su contenido y, después, un tercio de lo que quedaba.

a) ¿Qué fracción de depósito se ha extraído?

b) ¿Qué fracción de depósito queda?

c) ¿Cuántos litros se han extraído?

d) ¿Cuántos litros quedan?

$$\text{a) Se extrae: } \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\text{b) Quedan } 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \text{ de depósito.}$$

$$\text{c) Se han extraído } \frac{3}{5} \cdot 1\,500 = 900 \text{ litros.}$$

$$\text{d) Quedan } 1\,500 - 900 = 600 \text{ litros.}$$

- 68 ▲▲▲ Una familia, cuyos ingresos mensuales son de 3 000 €, invierte las tres décimas partes de su presupuesto en comida, un quinto en ropa, un décimo en ocio y un cuarto en otros gastos. ¿Cuánto ahorra en un año?

$$\text{En un año ingresan } 3\,000 \cdot 12 = 36\,000 \text{ €}$$

$$\text{Gastan: } \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{6}{20} + \frac{4}{20} + \frac{2}{20} + \frac{5}{20} = \frac{17}{20} \text{ del total}$$

$$\text{Ahorran: } 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20} \text{ del total}$$

$$\frac{3}{20} \cdot 36\,000 = 5\,400 \text{ €}$$

69 ▲▲▲ Un agricultor dice:

- Las heladas me estropearon $\frac{3}{10}$ de la cosecha.
- La sequía me hizo perder otros $\frac{3}{10}$.
- Y luego, una vez recogida, la inundación me ha estropeado $\frac{4}{10}$ de lo que tenía en el almacén.
- Por lo tanto ($\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{10}{10}$), no me queda nada.

Un amigo le contesta:

- No exageres, has salvado casi la cuarta parte de la cosecha.

¿Cuál de los dos tiene razón? Justifica la respuesta.

Entre heladas y sequía el agricultor perdió $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$ de su cosecha.

Le quedó $\frac{4}{10}$ de cosecha.

La inundación le hizo perder $\frac{4}{10}$ de lo recogido.

Es decir, $\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{16}{100}$.

Le quedó: $\frac{4}{10} - \frac{16}{100} = \frac{40}{100} - \frac{16}{100} = \frac{24}{100}$ de la cosecha

El agricultor no tiene razón, pero sí su amigo, porque $\frac{24}{100}$ está muy próximo a $\frac{1}{4}$:

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

■ PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

70 Una cuadrilla de 4 segadores trabaja 4 horas por la mañana en un campo de trigo. Por la tarde se les unen otros 4 segadores y trabajan todos juntos otras cuatro horas. Al final del día se han segado tres quintas partes del campo.

¿Cuánto tardarán 4 segadores en rematar la faena?

APLICA ESTA ESTRATEGIA				
Haz un dibujo.				
4 segadores en 4 horas	8 segadores en 4 horas	4 segadores ¿Cuánto tiempo?		

En el mismo tiempo (4 horas), 8 segadores siegan el doble que 4.

En total, 4 en 4 horas y 8 en 4 horas siegan $\frac{3}{5}$ de un campo.

Por tanto, 4 segadores en 4 horas siegan $\frac{1}{5}$ de campo.

Así, en segar $\frac{2}{5}$ de campo, que es lo que queda, 4 segadores tardarán 8 horas.

- 71 Una cuadrilla de 3 segadores trabaja por la mañana 4 horas en un campo.
Por la tarde se les unen otros 3 segadores y trabajan juntos otras cuatro horas.
El resto del trabajo lo terminan 3 segadores en una mañana más.
¿Cuánto habría tardado un único segador en hacer, él solo, todo el trabajo?



Un segador segar: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ de terreno en 4 horas

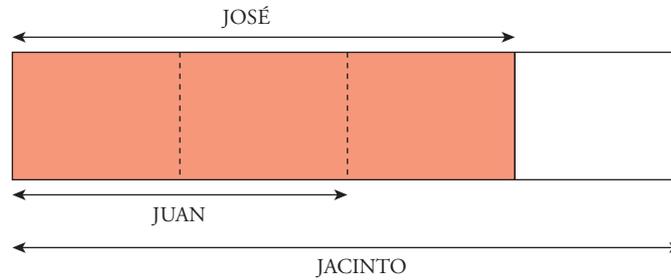
Para segar el terreno entero necesitará: $12 \cdot 4 = 48$ horas

- 72 Juan, José y Jacinto han trabajado buzzoneando propaganda.



Si José hubiera hecho un tercio menos de trabajo, habría ganado lo mismo que Juan, y si hubiera hecho un tercio más, habría ganado lo mismo que Jacinto.

Sabiendo que todos han repartido un número exacto de paquetes y que estos son más de 25 pero menos de 30, ¿cuántos paquetes ha repartido cada uno?



Si José hubiese repartido 3 paquetes, Juan habría repartido 2 y Jacinto, 4. En total:

$$3 + 2 + 4 = 9$$

Buscamos, por tanto, un número de paquetes múltiplo de 9 y que estén entre 25 y 30. Deben ser 27 en total.

De esos 27 paquetes, 9 corresponden a José, 6 a Juan y 12 a Jacinto.

Estos datos cumplen las condiciones del problema:

$$\text{Juan} \rightarrow 9$$

$$\text{José} \rightarrow 9 - \frac{1}{3} \cdot 9 = 9 - 3 = 6$$

$$\text{Jacinto} \rightarrow 9 + \frac{1}{3} \cdot 9 = 9 + 3 = 12$$

PÁGINA 167

■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Las relaciones de proporcionalidad

1 ▲▲△ Indica los pares de magnitudes que son directamente proporcionales (D), los que son inversamente proporcionales (I) y los que no guardan relación de proporcionalidad (X).

- El gasto de energía de una bombilla y el tiempo que está encendida.
 - La velocidad de un tren y el tiempo que tarda en cubrir el trayecto entre dos ciudades.
 - El número de asistentes a una excursión y la cantidad que aporta cada uno para pagar el autobús.
 - El diámetro de la rueda de un coche y la velocidad que este alcanza.
 - El precio de un coche y el número de asientos que lleva.
 - El número de horas trabajadas y el salario percibido.
- D. Cuanto más tiempo está encendida, más gasto de energía hay.
 - I. Cuanto mayor es la velocidad, menos tiempo tarda.
 - I. Cuantos más excursionistas, menos tendrá que pagar cada uno por el alquiler del autobús.
 - X. No hay relación entre la velocidad de un coche y el diámetro de sus ruedas.
 - X. No hay relación entre el precio de un coche y el número de asientos que lleva.
 - D. Cuantas más horas trabajadas, mayor será el salario percibido.

2 ▲▲△ Completa estas tablas y di cuáles contienen pares de valores proporcionales:

a)

1	2	3	4
0,2	0,4	0,6	?

b)

1	2	3	4
1	8	27	?

c)

1	2	3	4	9	12
36	18	12	9	?	?

d)

0	3	10	11	20	21
5	8	15	16	25	?

a)

1	2	3	4
0,2	0,4	0,6	0,8

Proporcionalidad directa.

- b)

1	2	3	4
1	8	27	64

 Los valores no son proporcionales.
Los de abajo se obtienen elevando al cubo los de arriba.

- c)

1	2	3	4	9	12
36	18	12	9	4	3

 Proporcionalidad inversa.

- d)

0	3	10	11	20	21
5	8	15	16	25	26

 Los valores no son proporcionales.
Los de abajo se obtienen sumando 5 a los de arriba.

- 3 ▲▲▲ Completa las tablas de forma que los pares de valores correspondientes sean directamente proporcionales:

a)

3	6	9	21	30
5				

b)

3	6	9	18	36
1				

a)

3	6	9	21	30
5	10	15	35	50

b)

3	6	9	18	36
1	2	3	6	12

- 4 ▲▲▲ Completa las tablas para que los pares de valores sean inversamente proporcionales:

a)

10	20	30	5
6			

b)

15	30	60	5
12			

a)

10	20	30	5
6	3	2	12

b)

15	30	60	5
12	6	3	36

- 5 ▲▲▲ Calcula en cada caso el término desconocido siguiendo el mismo proceso que en el ejemplo resuelto:

a) $\frac{12}{20} = \frac{15}{x} \rightarrow 12 \cdot x = 15 \cdot 20$

$12 \cdot x = 300 \rightarrow x = 300 : 12 = 25$

b) $\frac{35}{40} = \frac{28}{x}$

c) $\frac{13}{25} = \frac{52}{x}$

d) $\frac{65}{39} = \frac{x}{21}$

e) $\frac{x}{63} = \frac{52}{78}$

f) $\frac{31}{x} = \frac{44}{176}$

g) $\frac{x}{12} = \frac{12}{16}$

b) $\frac{35}{40} = \frac{28}{x} \rightarrow 35 \cdot x = 40 \cdot 28 \rightarrow 35 \cdot x = 1\,120 \rightarrow x = 1\,120 : 35 = 32$

c) $\frac{13}{25} = \frac{52}{x} \rightarrow 13 \cdot x = 25 \cdot 52 \rightarrow 13 \cdot x = 1\,300 \rightarrow x = 1\,300 : 13 = 100$

d) $\frac{65}{39} = \frac{x}{21} \rightarrow 65 \cdot 21 = 39 \cdot x \rightarrow 1\,365 = 39 \cdot x \rightarrow x = 1\,365 : 39 = 35$

e) $\frac{x}{63} = \frac{52}{78} \rightarrow x \cdot 78 = 63 \cdot 52 \rightarrow x \cdot 78 = 3\,276 \rightarrow x = 3\,276 : 78 = 42$

f) $\frac{31}{x} = \frac{44}{176} \rightarrow 31 \cdot 176 = x \cdot 44 \rightarrow 5\,456 = x \cdot 44 \rightarrow x = 5\,456 : 44 = 124$

g) $\frac{x}{12} = \frac{12}{16} \rightarrow x \cdot 16 = 12 \cdot 12 \rightarrow x \cdot 16 = 144 \rightarrow x = 144 : 16 = 9$

- 6 ▲▲▲ Completa esta tabla de valores directamente proporcionales.

2	3	4
6	9	?

Escribe con ellos tres pares de fracciones equivalentes.

2	3	4	$\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$	$\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$	$\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$	$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$...
6	9	12					

- 7 ▲▲▲ Completa esta tabla de valores inversamente proporcionales.

2	6	10
15	5	?

Escribe con ellos tres pares de fracciones equivalentes.

2	6	10	$\frac{2}{6} = \frac{5}{15}$	$\frac{2}{10} = \frac{3}{15}$	$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$...
15	5	3				

Problemas de proporcionalidad

- 8 ▲▲▲ Resuelve mentalmente:

- a) Por tres horas de trabajo, Alberto ha cobrado 60 €. ¿Cuánto cobrará por 5 horas?
- b) Tres obreros descargan un camión en dos horas. ¿Cuánto tardarán dos obreros?
- c) Trescientos gramos de queso curado cuestan 600 céntimos. ¿Cuánto cuestan doscientos gramos?
- d) Un camión, a 60 km/h, tarda 40 minutos en cubrir cierto recorrido. ¿Cuánto tardará un coche a 120 km/h?

- a) 100 €
- b) 3 horas
- c) 400 céntimos
- d) 20 minutos

PÁGINA 168

- 10 ▲▲▲ Por 5 días de trabajo he ganado 390 €. ¿Cuánto ganaré por 18 días?

$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ días} \rightarrow 390 \text{ €} \\ 18 \text{ días} \rightarrow x \end{array} \right\} \text{Proporcionalidad directa}$$

$$\frac{5}{18} = \frac{390}{x} \rightarrow 5 \cdot x = 18 \cdot 390 \rightarrow 5 \cdot x = 7020 \rightarrow x = 7020 : 5 = 1404$$

Por 18 días ganará 1 404 €.

- 11 ▲▲▲ Tres cajas de cereales pesan dos kilos y cuarto. ¿Cuánto pesarán cinco cajas iguales a las anteriores?

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ cajas} \rightarrow 2250 \text{ gramos} \\ 5 \text{ cajas} \rightarrow x \end{array} \right\} \text{Proporcionalidad directa}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{2250}{x} \rightarrow 3 \cdot x = 5 \cdot 2250 \rightarrow 3 \cdot x = 11250 \rightarrow x = 11250 : 3 = 3750$$

Las cinco cajas pesarán 3 kilos y tres cuartos.

- 12 ▲▲▲ Dos palas excavadoras hacen la zanja de una conducción de cable telefónico en 10 días. ¿Cuánto tardarían en hacer la zanja cinco palas?

$$\left. \begin{array}{l} 2 \text{ palas} \rightarrow 10 \text{ días} \\ 5 \text{ palas} \rightarrow x \end{array} \right\} \text{Proporcionalidad inversa}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{10} \rightarrow 2 \cdot 10 = 5 \cdot x \rightarrow 20 = 5 \cdot x \rightarrow x = 4$$

Las cinco palas tardarán en hacer la zanja 4 días.

- 13 ▲▲▲ Una fábrica de automóviles ha producido 8 100 vehículos en 60 días. Si se mantiene el ritmo de producción, ¿cuántas unidades fabricará en un año?

$$\left. \begin{array}{l} 60 \text{ días} \rightarrow 8100 \text{ vehículos} \\ 365 \text{ días} \rightarrow x \end{array} \right\} \text{Proporcionalidad directa}$$

$$\frac{60}{365} = \frac{8\,100}{x} \rightarrow 60 \cdot x = 365 \cdot 8\,100 \rightarrow 60 \cdot x = 2\,956\,500 \rightarrow x = 49\,275$$

En un año fabricará 49 275 vehículos.

- 14 ▲▲▲ Un camión que carga 3 toneladas necesita 15 viajes para transportar cierta cantidad de arena. ¿Cuántos viajes necesita para hacer el mismo porte otro camión que carga 5 toneladas? (1 t = 1 000 kg).

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ toneladas} \rightarrow 15 \text{ viajes} \\ 5 \text{ toneladas} \rightarrow x \end{array} \right\} \text{Proporcionalidad inversa}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{15} \rightarrow 3 \cdot 15 = 5 \cdot x \rightarrow 45 = 5 \cdot x \rightarrow x = 45 : 5 = 9$$

El camión de 5 toneladas necesita hacer 9 viajes.

- 15 ▲▲▲ Un conductor invierte tres horas y media en un recorrido de 329 km. ¿Cuánto tiempo invertirá en otro recorrido, en condiciones similares al anterior, de 282 km de longitud?

$$\left. \begin{array}{l} 329 \text{ km} \rightarrow 3,5 \text{ horas} \\ 282 \text{ km} \rightarrow x \end{array} \right\} \text{Proporcionalidad directa}$$

$$\frac{329}{282} = \frac{3,5}{x} \rightarrow 329 \cdot x = 3,5 \cdot 282 \rightarrow 329 \cdot x = 987 \rightarrow x = 3$$

En recorrer 282 km tardará 3 horas.

- 16 ▲▲▲ Un taxi que va a 100 km/h necesita 20 minutos para cubrir la distancia entre dos pueblos. ¿Cuánto tardaría si fuera a 80 km/h?

P. INVERSA	
VELOCIDAD (km/h)	TIEMPO (min)
100	20
80	x

$$\left. \begin{array}{l} 100 \text{ km/h} \rightarrow 20 \text{ minutos} \\ 80 \text{ km/h} \rightarrow x \end{array} \right\} \text{Proporcionalidad inversa}$$

$$\frac{100}{80} = \frac{x}{20} \rightarrow 100 \cdot 20 = 80 \cdot x \rightarrow 2\,000 = 80 \cdot x \rightarrow x = 2\,000 : 80 = 25$$

Si fuese a 80 km/h tardaría 25 minutos.

- 17 ▲▲▲ Un camión, a una media de 70 km/h, ha tardado tres cuartos de hora en ir de la ciudad A hasta la ciudad B. ¿Cuál ha sido la velocidad media de un coche que ha invertido 35 minutos en el mismo recorrido?

$$\left. \begin{array}{l} 70 \text{ km/h} \rightarrow 45 \text{ minutos} \\ x \rightarrow 35 \text{ minutos} \end{array} \right\} \text{Proporcionalidad inversa}$$

$$\frac{70}{x} = \frac{35}{45} \rightarrow 70 \cdot 45 = x \cdot 35 \rightarrow 3150 = x \cdot 35 \rightarrow x = 3150 : 35 = 90$$

Su velocidad media ha sido de 90 km/h.

- 18 ▲▲▲ En el plano de una casa, el salón mide 10 cm de largo y 7 cm de ancho. Si en la realidad el salón tiene 5 metros de largo, ¿cuál es su ancho real?

$$\left. \begin{array}{l} 10 \text{ cm} \rightarrow 5 \text{ m} \\ 7 \text{ cm} \rightarrow x \end{array} \right\} \text{Proporcionalidad directa}$$

$$\frac{10}{7} = \frac{5}{x} \rightarrow 10 \cdot x = 35 \rightarrow x = 3,5$$

En la realidad, el salón tiene un ancho de 3,5 metros.

- 19 ▲▲▲ Una máquina embotelladora llena 240 botellas en 20 minutos. ¿Cuántas botellas llenará en hora y media?

$$\left. \begin{array}{l} 240 \text{ botellas} \rightarrow 20 \text{ minutos} \\ x \rightarrow 90 \text{ minutos} \end{array} \right\} \text{Proporcionalidad directa}$$

$$\frac{240}{x} = \frac{20}{90} \rightarrow 240 \cdot 90 = x \cdot 20 \rightarrow 21600 = x \cdot 20 \rightarrow x = 21600 : 20 = 1080$$

En una hora y media llenará 1080 botellas.

- 20 ▲▲▲ ¿Cuántos metros por segundo recorre un coche que va a 120 kilómetros por hora?

P. DIRECTA		
TIEMPO		DISTANCIA
1 hora	}	120 km
60 minutos		120 : 60 = 2 km = 2 000 m
1 minuto	}	?
60 segundos		?
1 segundo		?

$$1 \text{ hora} = 60 \text{ minutos} \rightarrow 120 \text{ km}$$

$$1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos} \rightarrow 120 : 60 = 2 \text{ km} = 2\,000 \text{ m}$$

$$1 \text{ segundo} \rightarrow 2\,000 : 60 = 33,\widehat{3} \text{ m}$$

$$120 \text{ km/h} = 33,\widehat{3} \text{ m/s}$$

- 21 ▲▲△ Un ciclista recorre 4 metros en un segundo. ¿Cuál es su velocidad en kilómetros por hora?

$$1 \text{ segundo} \rightarrow 4 \text{ m}$$

$$60 \text{ segundos} = 1 \text{ minuto} \rightarrow 4 \cdot 60 = 240 \text{ m}$$

$$60 \text{ minutos} = 1 \text{ hora} \rightarrow 240 \cdot 60 = 14\,400 \text{ m} = 14,4 \text{ km}$$

$$4 \text{ m/s} = 14,4 \text{ km/h}$$

- 22 ▲▲△ Dos ciudades, A y B, separadas 85 km en la realidad, están a 34 cm de distancia en un plano. ¿Cuál será la distancia real entre otras dos, M y N, separadas 12 cm en el plano?

$$\left. \begin{array}{l} 85 \text{ km} \rightarrow 34 \text{ cm} \\ x \rightarrow 12 \text{ cm} \end{array} \right\} \text{ Proporcionalidad directa}$$

$$\frac{85}{x} = \frac{34}{12} \rightarrow 85 \cdot 12 = x \cdot 34 \rightarrow 1\,020 = x \cdot 34 \rightarrow x = 1\,020 : 34 = 30$$

Las ciudades M y N , están separadas 30 km.

- 23 ▲▲△ En un concurso televisivo, cada participante recibe una cantidad de dinero inversamente proporcional al número de fallos cometidos. Un concursante que cometió cinco fallos se llevó 1 000 €.

¿Cuánto se llevará uno que solamente haya cometido dos fallos?

$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ fallos} \rightarrow 1\,000 \text{ €} \\ 2 \text{ fallos} \rightarrow x \end{array} \right\} \text{ Proporcionalidad inversa}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{x}{1\,000} \rightarrow 5 \cdot 1\,000 = 2 \cdot x \rightarrow 5\,000 = 2 \cdot x \rightarrow x = 2\,500$$

El concursante se llevará 2 500 €.

PÁGINA 169

- 24 ▲▲△ Un padre le da la paga a sus tres hijas, de forma que a cada una le corresponde una cantidad directamente proporcional a su edad. La mayor tiene 20 años y recibe 50 €.

¿Cuánto corresponderá a la mediana y a la menor que tienen, respectivamente, 15 y 8 años?

$$\left. \begin{array}{l} 20 \text{ años} \rightarrow 50 \text{ €} \\ 15 \text{ años} \rightarrow x \\ 8 \text{ años} \rightarrow y \end{array} \right\} \text{Proporcionalidad directa}$$

$$\frac{20}{15} = \frac{50}{x} \rightarrow 20 \cdot x = 15 \cdot 50 \rightarrow 20 \cdot x = 750 \rightarrow x = 750 : 20 = 37,5$$

$$\frac{20}{8} = \frac{50}{y} \rightarrow 20 \cdot y = 8 \cdot 50 \rightarrow 20 \cdot y = 400 \rightarrow y = 400 : 20 = 20$$

A la mediana, de 15 años, le corresponden 37,5 € y a la pequeña, de 8 años, 20 €.

25 ▲▲▲ En una granja, 20 vacas han consumido 1 000 kg de pienso en un mes.

a) ¿Cuánto pienso consumirán 10 vacas en dos meses?

b) ¿Cuánto pienso consumirán 10 vacas en cinco meses?

a) 20 vacas \rightarrow 1 000 kg \rightarrow 1 mes

10 vacas \rightarrow 500 kg \rightarrow 1 mes

10 vacas \rightarrow 1 000 kg \rightarrow 2 meses

Las 10 vacas consumirán, en 2 meses, 1 000 kg de pienso.

b) 10 vacas \rightarrow 500 kg \rightarrow 1 mes

10 vacas \rightarrow 2 500 kg \rightarrow 5 meses

Las 10 vacas consumirán, en 5 meses, 2 500 kg de pienso.

27 ▲▲▲ Con 60 kg de pienso se puede alimentar a 5 caballos durante 4 días.

¿Cuánto tiempo se puede alimentar a 2 caballos con 120 kg de pienso?

$$\left. \begin{array}{l} 60 \text{ kg} \rightarrow 5 \text{ caballos} \rightarrow 4 \text{ días} \\ 120 \text{ kg} \rightarrow 2 \text{ caballos} \rightarrow x \end{array} \right\}$$

60 kg \rightarrow 5 caballos \rightarrow 4 días

60 kg \rightarrow 1 caballo $\rightarrow 4 \cdot 5 = 20$ días

120 kg \rightarrow 1 caballo $\rightarrow 20 \cdot 2 = 40$ días

120 kg \rightarrow 2 caballos $\rightarrow 40 : 2 = 20$ días

Con 120 kg de pienso se puede alimentar a 2 caballos durante 20 días.

Porcentajes**28** ▲▲▲ Calcula mentalmente:

- | | |
|-----------------|---------------|
| a) 10% de 2 500 | b) 10% de 250 |
| c) 10% de 25 | d) 12% de 200 |
| e) 12% de 50 | f) 12% de 250 |
| g) 12% de 25 | h) 12% de 125 |
| i) 12% de 150 | j) 30% de 500 |
| k) 30% de 50 | l) 30% de 20 |
-
- | | |
|--------|--------|
| a) 250 | b) 25 |
| c) 2,5 | d) 24 |
| e) 6 | f) 30 |
| g) 3 | h) 15 |
| i) 18 | j) 150 |
| k) 15 | l) 6 |

29 ▲▲▲ Calcula con lápiz y papel y después comprueba con la calculadora:

- | | |
|----------------|------------------|
| a) 15% de 380 | b) 13% de 25 000 |
| c) 120% de 450 | d) 70% de 2 350 |
| e) 6% de 65 | f) 150% de 400 |
-
- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $\frac{15}{100} \cdot 380 = 57$ | b) $\frac{13}{100} \cdot 25\,000 = 3\,250$ |
| c) $\frac{120}{100} \cdot 450 = 540$ | d) $\frac{70}{100} \cdot 2\,350 = 1\,645$ |
| e) $\frac{6}{100} \cdot 65 = 3,9$ | f) $\frac{150}{100} \cdot 400 = 600$ |

30 ▲▲▲ Calcula (si el resultado no es exacto redondea a las unidades):

- | | |
|-----------------|------------------|
| a) 18% de 3 250 | b) 12% de 17 000 |
| c) 84% de 3 675 | d) 3% de 27 200 |
| e) 16% de 325 | f) 11% de 1 386 |
| g) 73% de 2 648 | h) 67% de 5 680 |

a) $\frac{18}{100} \cdot 3\,250 = 585$

b) $\frac{12}{100} \cdot 17\,000 = 2\,040$

c) $\frac{84}{100} \cdot 3\,675 = 3\,087$

d) $\frac{3}{100} \cdot 27\,200 = 816$

e) $\frac{16}{100} \cdot 325 = 52$

f) $\frac{11}{100} \cdot 1\,386 = 152$

g) $\frac{73}{100} \cdot 2\,648 = 1\,933$

h) $\frac{67}{100} \cdot 5\,680 = 3\,806$

31 ▲▲▲ Completa:

a) Para calcular el 50% dividimos entre...

b) Para calcular el 25% dividimos entre...

c) Para calcular el 20% dividimos entre...

d) Para calcular el 10% dividimos entre...

e) Para calcular el 5% dividimos primero entre 10 y después entre...

a) 2

b) 4

c) 5

d) 10

e) 2

32 ▲▲▲ Completa con el porcentaje adecuado en cada caso:

a) $\boxed{50} \% \text{ de } 50 = 250$

b) $\boxed{?} \% \text{ de } 180 = 90$

c) $\boxed{?} \% \text{ de } 160 = 40$

d) $\boxed{?} \% \text{ de } 140 = 14$

e) $\boxed{?} \% \text{ de } 83 = 8,3$

f) $\boxed{?} \% \text{ de } 25 = 5$

g) $\boxed{?} \% \text{ de } 400 = 300$

b) 50% (90 es la mitad de 180)

c) 25% (40 es la cuarta parte de 160)

d) 10% ($14 = 140 : 10$)e) 10% ($8,3 = 83 : 10$)f) 20% ($5 = 25 : 5$)

g) $75\% \left(300 = \frac{3}{4} \cdot 400 \right)$

PÁGINA 170

34 ▲▲▲ El 12% de un número es 42,6. ¿Cuál es el número?

$$\left. \begin{array}{l} 100 \rightarrow 12 \\ x \rightarrow 42,6 \end{array} \right\}$$

$$\frac{100}{x} = \frac{12}{42,6} \rightarrow 100 \cdot 42,6 = x \cdot 12 \rightarrow 4\,260 = x \cdot 12 \rightarrow x = 4\,260 : 12 = 355$$

El número es el 355.

35 ▲▲▲ El 27% de un número es 621. ¿Cuál es el número?

$$\frac{100}{x} = \frac{27}{621} \rightarrow 100 \cdot 621 = x \cdot 27 \rightarrow 62\,100 = x \cdot 27 \rightarrow x = 62\,100 : 27 = 2\,300$$

El número es el 2 300.

36 ▲▲▲ Completa:

a) 15% de ... = 63

b) 17% de ... = 76,5

c) 80% de ... = 140

d) 72% de ... = 522

a) $\frac{100}{15} = \frac{x}{63} \rightarrow 6\,300 = 15 \cdot x \rightarrow x = 6\,300 : 15 = 420$

15% de 420 = 63

b) $\frac{100}{17} = \frac{x}{76,5} \rightarrow 7\,650 = 17 \cdot x \rightarrow x = 7\,650 : 17 = 450$

17% de 450 = 76,5

c) $\frac{100}{80} = \frac{x}{140} \rightarrow 14\,000 = 80 \cdot x \rightarrow x = 14\,000 : 80 = 175$

80% de 175 = 140

d) $\frac{100}{72} = \frac{x}{522} \rightarrow 52\,200 = 72 \cdot x \rightarrow x = 52\,200 : 72 = 725$

72% de 725 = 522

Problemas con porcentajes

37 ▲▲▲ En una clase de 30 alumnos, el 60% son chicos y el 40%, chicas. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase?

$$\frac{60}{100} \cdot 30 = (30 \cdot 60) : 100 = 1\,800 : 100 = 18$$

$$\frac{40}{100} \cdot 30 = 1200/100 = 12$$

Son 18 chicos y 12 chicas.

- 38 ▲▲▲ En una ciudad de dos millones de habitantes, el 82% son europeos; el 9%, africanos; el 6%, asiáticos, y el resto, americanos. ¿Cuál es el porcentaje de americanos? ¿Cuántos hay en cada grupo?

$$\left. \begin{array}{l} 82 + 9 + 6 = 97 \\ 100 - 97 = 3 \end{array} \right\} \text{ Los americanos son el 3\% de la población.}$$

$$\text{Europeos} \rightarrow \frac{82}{100} \cdot 2\,000\,000 = 20\,000 \cdot 82 = 1\,640\,000$$

$$\text{Africanos} \rightarrow \frac{9}{100} \cdot 2\,000\,000 = 20\,000 \cdot 9 = 180\,000$$

$$\text{Asiáticos} \rightarrow \frac{6}{100} \cdot 2\,000\,000 = 20\,000 \cdot 6 = 120\,000$$

$$\text{Americanos} \rightarrow \frac{3}{100} \cdot 2\,000\,000 = 20\,000 \cdot 3 = 60\,000$$

- 39 ▲▲▲ Los habitantes de cierta ciudad se distribuyen según esta tabla:

EUROPEOS	880 000
AFRICANOS	60 000
AMERICANOS	50 000
ASIÁTICOS	10 000

¿Qué porcentaje supone cada grupo, respecto del total?

$$880\,000 + 60\,000 + 50\,000 + 10\,000 = 1\,000\,000$$

$$\text{Europeos} \rightarrow 880\,000 \cdot 100 : 1\,000\,000 = 88 \rightarrow 88\%$$

$$\text{Africanos} \rightarrow 60\,000 \cdot 100 : 1\,000\,000 = 6 \rightarrow 6\%$$

$$\text{Americanos} \rightarrow 50\,000 \cdot 100 : 1\,000\,000 = 5 \rightarrow 5\%$$

$$\text{Asiáticos} \rightarrow 10\,000 \cdot 100 : 1\,000\,000 = 1 \rightarrow 1\%$$

- 40 ▲▲▲ Actualmente me dan 15 € mensuales de paga, pero he convencido a mis padres para que me suban el 15%. ¿Cuál será mi paga a partir de ahora?

$$\frac{15}{100} \cdot 15 = 2,25$$

$$15 + 2,25 = 17,25$$

La paga será de 17,25 €.

OTRO MÉTODO: Si le suben el 15%, le darán el 115%.

$$\frac{15}{100} \cdot 15 = 17,25 \text{ €}$$

- 41 ▲▲△ Una cinta de música cuesta 11,35 €. ¿Cuánto pagaré si me hacen una rebaja del 40%?

$$\frac{40}{100} \cdot 11,35 = 4,54$$

$$11,35 - 4,54 = 6,81$$

Pagará 6,81 € por la cinta.

OTRO MÉTODO: Si le rebajan el 40%, pagará el 60%.

$$\frac{60}{100} \cdot 11,35 = 6,81 \text{ €}$$

- 42 ▲▲△ Un pantano contenía el mes pasado tres millones y medio de metros cúbicos de agua. ¿Cuál es su contenido actual si con las últimas lluvias ha ganado un 20%?

$$\frac{20}{100} \cdot 3\,500\,000 = 20 \cdot 35\,000 = 700\,000$$

$$3\,500\,000 + 700\,000 = 4\,200\,000$$

El pantano contiene ahora 4 200 000 m³.

OTRO MÉTODO:

Si ha ganado un 20%, ahora contiene un 120%.

$$\frac{120}{100} \cdot 3\,500\,000 = 120 \cdot 35\,000 = 4\,200\,000 \text{ m}^3$$

- 43 ▲▲▲ En una granja, el 15% de los animales son vacas. Sabiendo que hay 30 vacas, ¿cuál es el número total de animales?

$$\frac{15}{100} \cdot x = 30$$

$$\frac{15}{100} = \frac{30}{x} \rightarrow 15 \cdot x = 3\,000 \rightarrow x = 3\,000 : 15 = 200$$

En la granja hay 200 animales.

- 44 ▲▲▲ Ayer la barra de pan subió un 10%. Si ahora cuesta 55 céntimos, ¿cuál era el precio anterior?

Si ha subido un 10%, ahora cuesta un 110% de lo que costaba.

$$\frac{55}{110} = \frac{x}{100} \rightarrow 5\,500 = 110 \cdot x \rightarrow x = 5\,500 : 110 = 50$$

La barra de pan costaba 50 céntimos.

- 45 ▲▲▲ Un jersey, rebajado en un 20%, me ha costado 40 €. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?

Como se ha rebajado un 20%, por el jersey se ha pagado el 80% de su precio inicial.

$$\frac{80}{40} = \frac{100}{x} \rightarrow 80 \cdot x = 4\,000 \rightarrow x = 4\,000 : 80 = 50$$

El jersey costaba 50 euros.

- 46 ▲▲▲ Un jersey costaba 50 € y he pagado 40 €. ¿Qué porcentaje me han rebajado?

En este caso, 50 € es el 100% de su valor y 40 € es el porcentaje pagado por el jersey.

$$\frac{50}{100} = \frac{40}{x} \rightarrow 50 \cdot x = 4\,000 \rightarrow x = 4\,000 : 50 = 80$$

Por el jersey se ha pagado el 80%, luego lo han rebajado un 20%.

Otros problemas

- 47 ▲▲▲ Por 3 kg de melocotones y 4 kg de peras he pagado 5 €. Si las peras están a 0,8 €/kg, ¿cuánto cuestan 2 kg de melocotones y uno de peras?



1 kg de peras \rightarrow 0,8 €

4 kg de peras \rightarrow $0,8 \cdot 4 = 3,2$ €

3 kg de melocotones \rightarrow $5 \text{ €} - 3,2 \text{ €} = 1,8 \text{ €}$

1 kg de melocotones $\rightarrow 1,8 : 3 = 0,6 \text{ €}$

2 kg de melocotones $\rightarrow 0,6 \cdot 2 = 1,2 \text{ €}$

Por 2 kg de melocotones y 1 kg de peras, habrá que pagar:

$$1,2 \text{ €} + 0,8 \text{ €} = 2 \text{ €}$$

- 48 ▲▲▲ Un trabajador cobra 60 € cada vez que trabaja de día, y 90 € cada vez que trabaja de noche. Si el próximo mes tiene 22 días hábiles y quiere ganar más de 1 800 €, ¿cuántas jornadas de noche debe trabajar, como mínimo?

Trabajando de día cobrará, en los 22 días hábiles del mes:

$$22 \cdot 60 = 1\,320 \text{ €}$$

Hasta 1 800 € le faltan $1\,800 - 1\,320 = 480 \text{ €}$.

Para conseguir los 1 800 €, como mínimo, tiene que trabajar de noche:

$$480 : 90 = 5,3$$

Es decir, un mínimo de 6 noches.

- 49 ▲▲▲ En un supermercado se venden naranjas a 1,5 €/kg, pero por cada cinco kilos que compres y pagues, te regalan un kilo extra. El dueño de un restaurante se lleva 12 kg de naranjas. ¿Cuánto habrá pagado por ellas? ¿Y si se hubiera llevado 30 kilos?

- 12 kg de naranjas $\rightarrow 12 = (5 + 1) \cdot 2$

Ha comprado 10 kg ($5 \cdot 2$) y le han regalado 2 kg ($1 \cdot 2$).

Ha pagado $1,5 \cdot 10 = 15 \text{ €}$.

- 30 kg de naranjas $\rightarrow 30 = 6 \cdot 5 = (5 + 1) \cdot 5 \rightarrow 5 \cdot 5$ compradas y $1 \cdot 5$ regaladas

Habría comprado 25 kg y le habrían regalado 5 kg.

Coste de la compra: $25 \cdot 1,5 = 37,5 \text{ €}$

- 50 ▲▲▲ Por 200 gramos de jamón y tres cajas de quesitos he pagado 6,8 €. Si la caja de quesitos está a 1,2 €, ¿a cuánto sale el kilo de jamón?

1 caja de quesitos $\rightarrow 1,2 \text{ €}$

3 cajas de quesitos $\rightarrow 1,2 \cdot 3 = 3,6 \text{ €}$

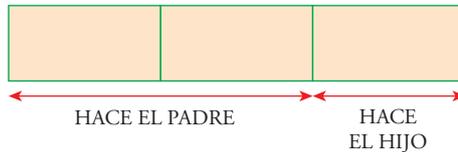
200 g de jamón $\rightarrow 6,8 \text{ €} - 3,6 \text{ €} = 3,2 \text{ €}$

1 kg de jamón $\rightarrow 3,2 \cdot 5 = 16 \text{ €}$

Un kilo de jamón cuesta 16 €.

- 51 ▲▲▲ Un granjero, cuando está solo, tarda una hora y cuarto en dar de comer a su ganado. ¿Cuánto tardará si le ayuda su hijo, sabiendo que, en el mismo tiempo, el hijo hace la mitad de trabajo que su padre?

En el mismo tiempo:



Si trabajan juntos, mientras que el padre hace los $\frac{2}{3}$ del trabajo, el hijo hace $\frac{1}{3}$.

Cuando el padre está solo, tarda 75 minutos en hacer el trabajo entero.

Por tanto, en hacer $\frac{2}{3}$ del trabajo tardará:

$$\frac{2}{3} \cdot 75 = 50 \text{ minutos}$$

Entre los dos tardarán en hacer el trabajo entero 50 minutos.

PÁGINA 169

■ PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

- 52 Ana, Rosa, Marta y Pilar son cuatro amigas que en su tiempo libre practican distintas aficiones: música, senderismo, jardinería y fotografía. Sabemos que:

- Cada una practica dos de esas actividades.
- Ninguna hace el par *senderismo-música* ni tampoco el par *fotografía-jardinería*.
- Todas practican diferente par de aficiones.
- Marta y Pilar no coinciden en sus gustos.
- A Pilar no le gusta nada la jardinería.
- Ana no es aficionada a la música, pero le encanta la jardinería.

¿Cuál es el par de actividades que practica cada una?

APLICA ESTA ESTRATEGIA

Organiza los datos en una tabla que te permita manejarlos globalmente y te ayude a establecer relaciones.

	MÚSICA	SENDERISMO	JARDINERÍA	FOTOGRAFÍA
MÚSICA	×	⊗		
SENDERISMO	×	×	ANA	
JARDINERÍA	×	×	×	⊗
FOTOGRAFÍA	×	×	×	×

- Eliminamos las casillas de la diagonal y las de abajo, pues están repetidas. (×)
- Eliminamos también las casillas que descarta la condición b) del enunciado. (⊗)
- Observando las casillas restantes y atendiendo a la última condición del enunciado f), deducimos que Ana practica senderismo y jardinería.

Termina tú de completar la tabla, atendiendo a las condiciones d) y e) que se dan en el enunciado.

Las tres parejas de actividades que quedan son:

jardinería – música / fotografía – música / senderismo – fotografía

Por la condición d), las opciones de Marta y Pilar son:

jardinería – música / senderismo – fotografía

Por la condición e), Pilar practica *senderismo – fotografía*.

Para Marta queda *jardinería – música*.

Y para Rosa, *fotografía – música*.

	MÚSICA	SENDERISMO	JARDINERÍA	FOTOGRAFÍA
MÚSICA	×	⊗	MARTA	ROSA
SENDERISMO	×	×	ANA	PILAR
JARDINERÍA	×	×	×	⊗
FOTOGRAFÍA	×	×	×	×

53 Tres amigos motoristas, Roberto Rojo, Bartolomé Blanco y Genaro Gris, se disponen a salir de paseo:

- ¿Os habéis fijado —dice Roberto— que una de nuestras motos es roja, otra blanca y otra gris, pero en ningún caso el color coincide con el apellido del dueño?
- Pues no me había fijado —dice el de la moto blanca—, pero tienes razón. ¿De qué color es la moto de cada uno?



Primero habla Roberto Rojo.

Contesta el dueño de la moto blanca, que no puede ser Bartolomé, luego es Genaro Gris.

Así, la moto roja es de Bartolomé Blanco y la gris es de Roberto Rojo.

Roberto Rojo → moto gris

Bartolomé Blanco → moto roja

Genaro Gris → moto blanca

PÁGINA 191

■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Expresiones algebraicas

1 ▲▲▲ Haz corresponder cada enunciado con su expresión algebraica:

- La mitad de un número.
- El triple de la mitad de un número.
- La distancia recorrida en x horas por un tren que va a 60 km/h.
- El precio de x kilos de naranjas que están a 1,3 €/kilo.
- La edad de Pedro, sabiendo que su abuelo, que ahora tiene x años, tenía 60 años cuando nació Pedro.
- El área de un triángulo de base 1,3 m y altura x metros.

$$1,3x$$

$$\frac{3x}{2}$$

$$\frac{x}{2}$$

$$x - 60$$

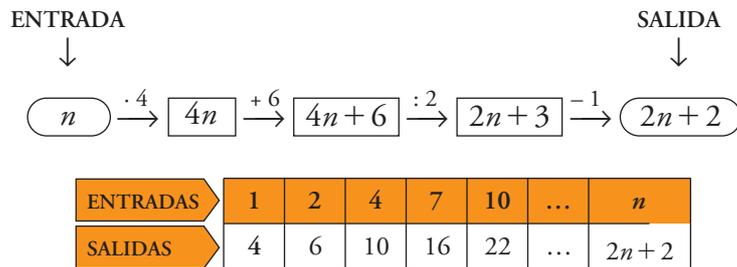
$$\frac{1,3x}{2}$$

$$60x$$

- La mitad de un número $\rightarrow \frac{x}{2}$
- El triple de la mitad de un número $\rightarrow \frac{3x}{2}$
- La distancia recorrida en x horas por un tren que va a 60 km/h $\rightarrow 60x$
- El precio de x kilos de naranjas que están a 1,3 €/kilo $\rightarrow 1,3x$
- La edad de Pedro, sabiendo que su abuelo, que ahora tiene x años, tenía 60 años cuando nació Pedro $\rightarrow x - 60$
- El área de un triángulo de base 1,3 m y altura x metros $\rightarrow \frac{1,3x}{2}$

2 ▲▲▲ Completa la tabla atendiendo a los siguientes enunciados:

- Teresa tiene x años.
- Su hija tiene 25 años menos que ella.
- Su madre tiene doble edad que ella.
- Su padre le saca 6 años a su madre.
- Teresa tenía 8 años cuando nació su hermano Lorenzo.



6 ▲▲▲ Completa el valor que corresponde a un número cualquiera n :

0	1	2	3	4	...	n
0	1	8	27	64	...	

2	4	8	16	20	...	n
2	3	5	9	11	...	

0	1	2	3	4	...	n
0	1	8	27	64	...	n^3

2	4	8	16	20	...	n
2	3	5	9	11	...	$\frac{n}{2} + 1$

Monomios y operaciones

7 ▲▲▲ Completa la tabla siguiente:

MONOMIO	$2x^3$	$-5ax$	$\frac{2}{3}x^2y^2$	$-x^2y^3$
COEFICIENTE				
PARTE LITERAL				
GRADO				

MONOMIO	$2x^3$	$-5ax$	$\frac{2}{3}x^2y^2$	$-x^2y^3$
COEFICIENTE	2	-5	$\frac{2}{3}$	-1
PARTE LITERAL	x^3	ax	x^2y^2	x^2y^3
GRADO	3	2	4	5

8 ▲▲▲ Reduce las siguientes expresiones:

a) $x + x + x + x + x$

b) $3x + 2x$

c) $10x - 6x$

d) $3x - 7$

e) $3x + 2x + x$

f) $10x - 6x + 2x$

g) $a + a + b$

h) $5a - 3a + 4b + b$

i) $a^2 + 2a^2$

j) $a^2 + a + a$

k) $3a + 5a + 2a^2 + 4a^2$

a) $x + x + x + x + x = 5x$

c) $10x - 6x = 4x$

e) $3x + 2x + x = 6x$

g) $a + a + b = 2a + b$

i) $a^2 + 2a^2 = 3a^2$

k) $3a + 5a + 2a^2 + 4a^2 = 8a + 6a^2$

l) $2a^2 + 6a - a^2 - a^2$

b) $3x + 2x = 5x$

d) $3x - 7 \rightarrow$ No se puede reducir más.

f) $10x - 6x + 2x = 6x$

h) $5a - 3a + 4b + b = 2a + 5b$

j) $a^2 + a + a = a^2 + 2a$

l) $2a^2 + 6a - a^2 - a^2 = 6a$

PÁGINA 192

9 ▲▲▲ Opera y reduce:

a) $2 \cdot (5a)$

c) $(5x) \cdot (-x)$

e) $(2a) \cdot (-5ab)$

g) $\left(\frac{2}{3}x\right) \cdot (3x)$

a) $2 \cdot (5a) = 10a$

c) $(5x) \cdot (-x) = -5x^2$

e) $(2a) \cdot (-5ab) = -10a^2b$

g) $\left(\frac{2}{3}x\right) \cdot (3x) = 2x^2$

b) $(-4) \cdot (3x)$

d) $(2x) \cdot (3x)$

f) $(6b) \cdot \left(\frac{1}{3}b\right)$

h) $\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \left(\frac{5}{2}x^2\right)$

b) $(-4) \cdot (3x) = -12x$

d) $(2x) \cdot (3x) = 6x^2$

f) $(6b) \cdot \left(\frac{1}{3}b\right) = 2b^2$

h) $\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \left(\frac{5}{2}x^2\right) = x^3$

10 ▲▲▲ Quita paréntesis:

a) $3 \cdot (1 + x)$

c) $(-3x) \cdot (x + x^2)$

e) $a^2 \cdot (a - 1)$

g) $5ab \cdot (a + 2b)$

a) $3 \cdot (1 + x) = 3 + 3x$

c) $(-3x) \cdot (x + x^2) = -3x^2 - 3x^3$

e) $a^2 \cdot (a - 1) = a^3 - a^2$

b) $2a \cdot (a - b)$

d) $(-5) \cdot (1 - 2a)$

f) $3x \cdot (2x - 3y)$

h) $a^2b \cdot (1 + a + b)$

b) $2a \cdot (a - b) = 2a^2 - 2ab$

d) $(-5) \cdot (1 - 2a) = -5 + 10a$

f) $3x \cdot (2x - 3y) = 6x^2 - 9xy$

$$g) 5ab \cdot (a + 2b) = 5a^2b + 10ab^2 \quad h) a^2b \cdot (1 + a + b) = a^2b + a^3b + a^2b^2$$

11 ▲▲△ Reduce:

a) $5(1 + 2x) - 5$

b) $3(x + 1) - 2(x - 1)$

c) $a(1 + a) - (1 + a^2)$

d) $a(a - b) + b(a - b)$

e) $5x(2x + 3) - 4x(2x + 3)$

f) $ab \cdot (1 - a) - ab(1 - b)$

a) $5(1 + 2x) - 5 = 5 + 10x - 5 = 10x$

b) $3(x + 1) - 2(x - 1) = 3x + 3 - 2x + 2 = x + 5$

c) $a(1 + a) - (1 + a^2) = a + a^2 - 1 - a^2 = a - 1$

d) $a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

e) $5x(2x + 3) - 4x(2x + 3) = 10x^2 + 15x - 8x^2 - 12x = 2x^2 + 3x$

f) $ab(1 - a) - ab(1 - b) = ab - a^2b - ab + ab^2 = ab^2 - a^2b$

12 ▲▲△ Opera y reduce:

a) $(2x) : (2x)$

b) $(6a) : (-3a)$

c) $(3b) : (6b)$

d) $(15x^2) : (3x)$

e) $(-8x) : (4x^2)$

f) $(a^3b^2) : (ab^2)$

g) $(10x) : (5x^3)$

h) $(2a^2b) : (4ab^2)$

a) $\frac{2x}{2x} = 1$

b) $\frac{6a}{-3a} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot a}{-\cancel{3} \cdot a} = -2$

c) $\frac{3b}{6b} = \frac{\cancel{3} \cdot b}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot b} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{15x^2}{3x} = \frac{\cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{x} \cdot x}{\cancel{3} \cdot \cancel{x}} = 5x$

e) $\frac{-8x}{4x^2} = \frac{-\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{x}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot x \cdot \cancel{x}} = -\frac{2}{x}$

f) $\frac{a^3b^2}{ab^2} = \frac{\cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot \cancel{b} \cdot b}{\cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot b} = a^2$

g) $\frac{10x}{5x^3} = \frac{2 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{x}}{\cancel{5} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x} = \frac{2}{x^2}$

h) $\frac{2a^2b}{4ab^2} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot b}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{a} \cdot b \cdot b} = \frac{a}{2b}$

Ecuaciones para resolver por tanteo

13 ▲▲△ $x^2 = 25$

$x = 5, x = -5$

14 ▲▲△ $x^2 - 1 = 24$

$x = 5, x = -5$

15 $\triangle\triangle\triangle x^2 + 10 = 35$

$x = 5, x = -5$

16 $\triangle\triangle\triangle x^2 + x = 30$

$x = 5, x = -6$

17 $\triangle\triangle\triangle (x + 1)^2 = 36$

$x = 5, x = -7$

18 $\triangle\triangle\triangle (x + 1)^2 = 100$

$x = 9, x = -11$

19 $\triangle\triangle\triangle \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4$

$x = 4, x = -4$

20 $\triangle\triangle\triangle (3x)^2 = 81$

$x = 3, x = -3$

21 $\triangle\triangle\triangle x \cdot (x + 1) = 30$

$x = 5, x = -6$

22 $\triangle\triangle\triangle x \cdot (x - 1) = 20$

$x = 5, x = -4$

23 $\triangle\triangle\triangle x \cdot (x + 2) = 120$

$x = 10, x = -12$

24 $\triangle\triangle\triangle x \cdot (x - 2) = 80$

$x = 10, x = -8$

25 $\triangle\triangle\triangle \sqrt{x} = 7$

$x = 49$

$$26 \quad \triangle\triangle\triangle \quad \sqrt{x-1} = 7$$
$$x = 50$$

$$27 \quad \triangle\triangle\triangle \quad \sqrt{x-9} = 4$$
$$x = 25$$

$$28 \quad \triangle\triangle\triangle \quad \sqrt{\frac{x-8}{2}} = 1$$
$$x = 10$$

Ecuaciones sencillas

$$29 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 2x + 1 = 21$$
$$2x = 20; \quad x = \frac{20}{2}; \quad x = 10$$

$$30 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 2x = x + 5$$
$$2x - x = 5; \quad x = 5$$

$$31 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 7x + 15 = 1$$
$$7x = 1 - 15$$
$$x = -\frac{14}{7}$$
$$x = -2$$

$$32 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 4x - 1 = x + 1$$
$$4x - x = 1 + 1$$
$$3x = 2$$
$$x = \frac{2}{3}$$

$$33 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 2x + 3 = 6x + 1$$
$$2x - 6x = 1 - 3$$
$$-4x = -2$$
$$x = \frac{-2}{-4}; \quad x = \frac{1}{2}$$

$$34 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 2x + 5 + x = 4 - 2x$$

$$3x + 2x = 4 - 5$$

$$5x = -1; \quad x = -\frac{1}{5}$$

$$35 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 2 + 3x - 5 = x + 5$$

$$3x - x = 5 - 2 + 5$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$36 \quad \triangle\triangle\triangle \quad x + 8 - 2x = 18 + x$$

$$-x - x = 18 - 8$$

$$-2x = 10$$

$$x = -\frac{10}{2}; \quad x = -5$$

$$37 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 9x - x = x + 4 + 7x$$

$$8x = 8x + 4$$

$$8x - 8x = 4$$

$$0x = 4 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$38 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 6 + 5x = 9x - 4 + 6x$$

$$5x - 15x = -4 - 6$$

$$-10x = -10$$

$$x = \frac{-10}{-10}; \quad x = 1$$

$$39 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 2x = 6 - 4x + 2 - 2x$$

$$2x + 6x = 8$$

$$8x = 8$$

$$x = \frac{8}{8}; \quad x = 1$$

$$40 \quad \triangle\triangle\triangle \quad x + 2x + 4x + 14 = x + 2$$

$$7x - x = 2 - 14$$

$$6x = -12$$

$$x = -\frac{12}{6}; \quad x = -2$$

$$41 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 8x + 3 - 5x = x - 5 - 3x$$

$$3x + 2x = -5 - 3$$

$$5x = -8$$

$$x = -\frac{8}{5}$$

$$42 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 5x + 8 - 7x = 3x - 9 - 7x$$

$$-2x + 4x = -9 - 8$$

$$2x = -17$$

$$x = -\frac{17}{2}$$

$$43 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 7x - 4 + x - 6x = x - 3 + x - 1$$

$$2x - 2x = -4 + 4$$

$$0 = 0$$

La ecuación tiene infinitas soluciones.

PÁGINA 193

Ecuaciones con paréntesis

$$46 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 5 - (3x - 2) = 4x$$

$$5 - 3x + 2 = 4x$$

$$-3x - 4x = -5 - 2$$

$$-7x = -7$$

$$x = \frac{-7}{-7}$$

$$x = 1$$

$$47 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 8x + 11 = 6 - (3 - 7x)$$

$$8x + 11 = 6 - 3 + 7x$$

$$8x - 7x = 3 - 11$$

$$x = -8$$

48 ▲▲▲ $3(x + 2) = 18$

$$3x + 6 = 18$$

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

49 ▲▲▲ $2(x - 1) = 5x - 3$

$$2x - 2 = 5x - 3$$

$$2x - 5x = -3 + 2$$

$$-3x = -1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

50 ▲▲▲ $6 + 2(x + 1) = 2$

$$6 + 2x + 2 = 2$$

$$2x = 2 - 8$$

$$x = -\frac{6}{2}; x = -3$$

51 ▲▲▲ $5x - (1 - x) = 3(x - 1) + 2$

$$5x - 1 + x = 3x - 3 + 2$$

$$6x - 3x = -1 + 1$$

$$3x = 0; x = 0$$

52 ▲▲▲ $5(2x - 1) - 3x = 7(x - 1) + 2$

$$10x - 5 - 3x = 7x - 7 + 2$$

$$7x - 7x = -5 + 5; 0 = 0 \rightarrow \text{La ecuación tiene infinitas soluciones.}$$

53 ▲▲▲ $3(2x - 1) + 2(1 - 2x) = 5$

$$6x - 3 + 2 - 4x = 5$$

$$2x = 5 + 1$$

$$x = \frac{6}{2}; x = 3$$

$$54 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 6(x - 2) - x = 5(x - 1)$$

$$6x - 12 - x = 5x - 5$$

$$5x - 5x = -5 + 12$$

$$0x = 7 \rightarrow \text{La ecuación no tiene solución.}$$

$$55 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 4x + 2(x + 3) = 2(x + 2)$$

$$4x + 2x + 6 = 2x + 4$$

$$6x - 2x = 4 - 6$$

$$4x = -2; \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$56 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 2(1 - x) - 3 = 3(2x + 1) + 2$$

$$2 - 2x - 3 = 6x + 3 + 2$$

$$-2x - 6x = 5 + 1$$

$$-8x = 6$$

$$x = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$57 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 6 - 8(x + 1) - 5x = 2(3 + 2x) - 5(3 + x)$$

$$6 - 8x - 8 - 5x = 6 + 4x - 15 - 5x$$

$$-2 - 13x = -9 - x$$

$$-13x + x = -9 + 2$$

$$-12x = -7$$

$$x = \frac{7}{12}$$

Ecuaciones con denominadores

$$58 \quad \triangle\triangle\triangle \quad \frac{x}{6} - 1 = 0$$

$$6\left(\frac{x}{6} - 1\right) = 0$$

$$x - 6 = 0; \quad x = 6$$

$$59 \quad \triangle\triangle\triangle \quad \frac{x}{13} = \frac{5}{13}$$
$$13\left(\frac{x}{13}\right) = 13\left(\frac{5}{13}\right)$$
$$x = 5$$

$$60 \quad \triangle\triangle\triangle \quad \frac{x}{7} - 1 = \frac{2}{7}$$
$$7\left(\frac{x}{7} - 1\right) = 7 \cdot \frac{2}{7}$$
$$x - 7 = 2; \quad x = 9$$

$$61 \quad \triangle\triangle\triangle \quad \frac{x}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$$
$$3\left(\frac{x}{3} + \frac{5}{3}\right) = 3 \cdot \frac{7}{3}$$
$$x + 5 = 7$$
$$x = 7 - 5; \quad x = 2$$

$$62 \quad \triangle\triangle\triangle \quad x = 4 + \frac{x}{5}$$
$$5x = 5\left(4 + \frac{x}{5}\right)$$
$$5x = 20 + x$$
$$5x - x = 20$$
$$4x = 20; \quad x = 5$$

$$63 \quad \triangle\triangle\triangle \quad 6 - \frac{x}{3} = 2 + \frac{5x}{3}$$
$$3\left(6 - \frac{x}{3}\right) = 3\left(2 + \frac{5x}{3}\right)$$
$$18 - x = 6 + 5x$$
$$-x - 5x = 6 - 18$$
$$-6x = -12$$
$$x = \frac{-12}{-6}; \quad x = 2$$

$$64 \quad \triangle\triangle\triangle \quad \frac{x}{3} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{2x}{3}$$

$$6\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 6\left(\frac{1}{2} - \frac{2x}{3}\right)$$

$$2x - 6 = 3 - 4x$$

$$2x + 4x = 3 + 6$$

$$6x = 9$$

$$x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$65 \quad \triangle\triangle\triangle \quad \frac{x}{2} + \frac{4}{5} = \frac{2x}{5} + 1$$

$$10\left(\frac{x}{2} + \frac{4}{5}\right) = 10\left(\frac{2x}{5} + 1\right)$$

$$5x + 8 = 4x + 10$$

$$5x - 4x = 10 - 8$$

$$x = 2$$

$$66 \quad \triangle\triangle\triangle \quad x - \frac{x}{3} = \frac{7}{15} + \frac{2x}{3}$$

$$15\left(x - \frac{x}{3}\right) = 15\left(\frac{7}{15} + \frac{2x}{3}\right)$$

$$15x - 5x = 7 + 10x$$

$$10x - 10x = 7$$

$$0x = 7$$

La ecuación no tiene solución.

$$67 \quad \triangle\triangle\triangle \quad \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{3x}{2}$$

$$4\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = 4\left(1 - \frac{3x}{2}\right)$$

$$2x - 1 = 4 - 6x$$

$$2x + 6x = 4 + 1$$

$$8x = 5$$

$$x = \frac{5}{8}$$

$$68 \quad \triangle\triangle\triangle \quad \frac{x}{9} - \frac{1}{6} = \frac{2x}{9} - \frac{1}{2}$$

$$18\left(\frac{x}{9} - \frac{1}{6}\right) = 18\left(\frac{2x}{9} - \frac{1}{2}\right)$$

$$2x - 3 = 4x - 9$$

$$2x - 4x = -9 + 3$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

$$69 \quad \triangle\triangle\triangle \quad x - \frac{1}{4} - \frac{x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{x}{2} - 1$$

$$4\left(x - \frac{1}{4} - \frac{x}{2}\right) = 4\left(\frac{3}{4} + \frac{x}{2} - 1\right)$$

$$4x - 1 - 2x = 3 + 2x - 4$$

$$2x - 2x = -1 + 1$$

$$0 = 0$$

La ecuación tiene infinitas soluciones.

Problemas para resolver con ecuaciones

70 $\triangle\triangle\triangle$ El triple de un número, menos cinco, es igual a 16. ¿Cuál es el número?

Triple de un número $\rightarrow 3 \cdot x$

$$3x - 5 = 16$$

$$3x = 16 + 5$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

El número es el 7.

71 $\triangle\triangle\triangle$ La suma de tres números consecutivos es 702. ¿Cuáles son esos números?

Tres números consecutivos $\rightarrow x, x + 1, x + 2$

$$x + x + 1 + x + 2 = 702$$

$$3x + 3 = 702$$

$$3x = 699$$

$$x = 233$$

Los números son 233, 234 y 235.

- 72 ▲▲▲ Un número, su anterior y su posterior suman 702. ¿Qué números son? (Compara el enunciado de este ejercicio con el anterior. ¿Qué relaciones ves?)

$$\left. \begin{array}{l} \blacksquare \text{ PRIMER NÚMERO} \rightarrow x - 1 \\ \text{SEGUNDO NÚMERO} \rightarrow x \\ \text{TERCER NÚMERO} \rightarrow x + 1 \end{array} \right\} \text{CONSECUTIVOS}$$

$$x - 1 + x + x + 1 = 702$$

$$3x = 702$$

$$x = 234 \rightarrow \text{Su anterior es } 233$$

$$\rightarrow \text{Su posterior es } 235$$

Los números son 233, 234 y 235.

- 73 ▲▲▲ Al sumar un número natural con el doble de su siguiente, se obtiene 44. ¿De qué número se trata?

$$\text{Número natural} \rightarrow x$$

$$\text{Doble de su siguiente} \rightarrow 2(x + 1)$$

$$x + 2(x + 1) = 44$$

$$x + 2x + 2 = 44$$

$$3x = 42; x = 14$$

Se trata del número 14.

PÁGINA 194

- 74 ▲▲▲ Al sumarle a un número 60 unidades, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 5. ¿Cuál es el número?

$$x + 60 = 5x$$

$$x - 5x = -60$$

$$-4x = -60$$

$$x = \frac{-60}{-4}; x = 15$$

Es el número 15.

- 75 ▲▲▲ Reparte 680 € entre dos personas de forma que la primera se lleve el triple que la segunda.

La segunda se lleva x .

La primera se lleva $3x$.

$$x + 3x = 680$$

$$4x = 680$$

$$x = 170 \rightarrow 3x = 510$$

La primera se lleva 510 € y la segunda, 170 €.

- 76 ▲▲▲ En un cine hay 511 personas. ¿Cuál es el número de hombres y cuál el de mujeres, sabiendo que el de ellas sobrepasa en 17 al de ellos?

■ HOMBRES $\rightarrow x$

MUJERES $\rightarrow x + 17$

TOTAL $\rightarrow 511$

$$x + x + 17 = 511$$

$$2x = 511 - 17$$

$$x = \frac{494}{2} = 247 \rightarrow x + 17 = 264$$

Hay 247 hombres y 264 mujeres.

- 77 ▲▲▲ Marisa es tres años más joven que su hermana Rosa y un año mayor que su hermano Roberto. Entre los tres igualan la edad de su madre, que tiene 38 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

■ MARISA $\rightarrow x$

ROSA $\rightarrow x + 3$

ROBERTO $\rightarrow x - 1$

$$x + x + 3 + x - 1 = 38$$

$$3x = 38 - 2$$

$$3x = 36$$

$$x = 12$$

Marisa tiene 12 años; Rosa, 15, y Roberto, 11 años.

- 78 ▲▲▲ Pedro, Pablo y Paloma reciben 1 200 € como pago por su trabajo de socorristas en una piscina. Si Pablo ha trabajado el triple de días que Pedro, y Paloma el doble que Pablo, ¿cómo harán el reparto?

Pedro $\rightarrow x$

Pablo $\rightarrow 3x$

Paloma $\rightarrow 2 \cdot 3x = 6x$

$$x + 3x + 6x = 1\,200$$

$$10x = 1200$$

$$x = 120 \rightarrow 3x = 360 \rightarrow 6x = 720$$

Pedro, 120 €; Pablo, 360 €, y Paloma, 720 €.

- 79 ▲▲△ Marta gasta la mitad de su dinero en la entrada para un concierto, y la quinta parte del mismo, en una hamburguesa. ¿Cuánto tenía si aún le quedan 2,70 €?

Su dinero $\rightarrow x$

Concierto $\rightarrow \frac{x}{2}$

Hamburguesa $\rightarrow \frac{x}{5}$

$$x - \frac{x}{2} - \frac{x}{5} = 2,7$$

$$10 \left(x - \frac{x}{2} - \frac{x}{5} \right) = 10 \cdot 2,7$$

$$10x - 5x - 2x = 27$$

$$3x = 27$$

$$x = 9$$

Marta tenía 9 €.

- 80 ▲▲△ En una granja, entre gallinas y conejos, hay 20 cabezas y 52 patas. Estudia la tabla adjunta y traduce a lenguaje algebraico la siguiente igualdad:

PATAS DE GALLINA MÁS PATAS DE CONEJO ES IGUAL A 52

	CABEZAS	PATAS
GALLINAS	x	$2x$
CONEJOS	$20 - x$	$4(20 - x)$

¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en la granja?

$$2x + 4(20 - x) = 52$$

$$2x + 80 - 4x = 52$$

$$-2x = 52 - 80$$

$$-2x = -28$$

$$x = 14$$

Hay 14 gallinas y 6 conejos.

- 81 ▲▲▲ Un yogur de frutas cuesta 10 céntimos más que uno natural. ¿Cuál es el precio de cada uno si he pagado 2,6 € por cuatro naturales y seis de frutas?

Yogur natural $\rightarrow x$

Yogur de frutas $\rightarrow x + 10$

$$4x + 6(x + 10) = 260$$

$$4x + 6x + 60 = 260$$

$$10x = 200$$

$$x = 20$$

El yogur natural vale 20 céntimos y el de frutas, 30 céntimos.

- 83 ▲▲▲ Paz y Petra tienen 6 y 9 años, respectivamente. Su madre, Ana, tiene 35 años. ¿Cuántos años deben pasar para que, entre las dos niñas, igualen la edad de la madre?

	HOY	DENTRO DE x AÑOS
PAZ	6	$6 + x$
PETRA	9	$9 + x$
ANA	35	$35 + x$

$$6 + x + 9 + x = 35 + x$$

$$2x + 15 = 35 + x$$

$$2x - x = 35 - 15$$

$$x = 20$$

Han de pasar 20 años.

- 84 ▲▲▲ Tengo en el bolsillo 13 monedas, unas de 2 céntimos y otras de 5 céntimos. Si las cambio todas por una moneda de 50 céntimos, ¿cuántas tengo de cada clase?

	MONEDAS DE 2 CÉNTIMOS	MONEDAS DE 5 CÉNTIMOS
NÚMERO DE MONEDAS	x	$13 - x$
VALOR	$2x$	$5(13 - x)$

$$2x + 5(13 - x) = 50$$

$$2x + 65 - 5x = 50$$

$$-3x = -15$$

$$x = 5$$

Tiene 5 monedas de 2 céntimos y 8 de 5 céntimos.

- 85 ▲▲▲ Montse tiene el triple de cromos que Rocío. Intercambian 8 de Montse (fáciles) por 3 de Rocío (más difíciles). Ahora Montse tiene el doble que Rocío.

¿Cuántos cromos tiene ahora cada una?

	ROCÍO	MONTSE
TENÍAN	x	$3x$
CAMBIAN	$x - 3 + 8$	$3x - 8 + 3$

→ Montse, doble que Rocío.

$$3x - 5 = 2(x + 5)$$

$$3x - 5 = 2x + 10$$

$$3x - 2x = 10 + 5$$

$$x = 15$$

Rocío tenía 15 cromos y Montse, 45 cromos.

Ahora, Rocío tiene 20 cromos y Montse, 40 cromos.

- 86 ▲▲▲ En una prueba de 20 preguntas, dan 5 puntos por cada respuesta correcta y quitan 3 puntos por cada fallo.

¿Cuántas preguntas ha acertado Mario si ha obtenido 68 puntos?

	ACIERTOS	FALLOS
NÚMERO	x	$20 - x$
PUNTUACIÓN	$5x$	$-3(20 - x)$

$$5x - 3(20 - x) = 68$$

$$5x - 60 + 3x = 68$$

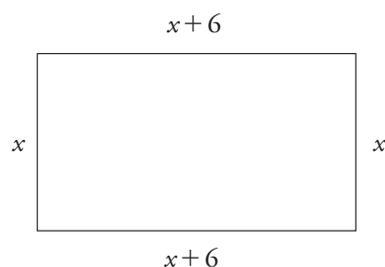
$$8x = 128$$

$$x = 16$$

Mario ha acertado 16 preguntas y ha fallado 4.

- 87 ▲▲▲ Un jardín rectangular es 6 metros más largo que ancho.

Si su perímetro mide 92 metros, ¿cuáles son las dimensiones del jardín?



$$2x + 2(x + 6) = 92$$

$$2x + 2x + 12 = 92$$

$$4x = 80$$

$$x = 20$$

El jardín tiene 20 m de ancho y 26 m de largo.

PÁGINA 195

■ PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

Para realizar los ejercicios que te proponemos a continuación, aplica ordenadamente esta estrategia:

ESTRATEGIA:

- Estudia, primeramente, los casos sencillos.
- Ordena en una tabla los datos que vayas obteniendo.
- Observa regularidades en esos datos y escribe la ley general.

88 Palillos y cuadrados



4 PALILLOS



7 PALILLOS



10 PALILLOS

- ¿Cuántos palillos se necesitan para formar una tira de 5 cuadrados?
- ¿Y para una tira de 10 cuadrados?
- ¿Y para una tira de n cuadrados?
- Completa esta tabla:

Nº DE CUADRADOS	1	2	3	4	5	6	10	...	n
Nº DE PALILLOS	4	7	10						

El primer cuadrado se forma con 4 palillos, y para formar los siguientes hay que añadir 3 palillos al anterior.

$$4 - 4 + 3 - 4 + 3 + 3 - 4 + 3 + 3 + 3 \dots$$

Así, para hacer 5 cuadrados, por ejemplo, hay que poner:

$$4 + \underbrace{3 + 3 + 3 + 3}_{\text{el } 3, 4 \text{ veces}} \text{ palillos}$$

Y para hacer n cuadrados se necesitarán

$$4 + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{\text{el } 3, n-1 \text{ veces}} \text{ palillos}$$

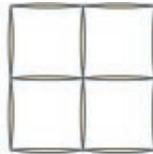
La tabla queda así:

Nº DE CUADRADOS	1	2	3	4	5	6	10	...	n
Nº DE PALILLOS	4	7	10	13	16	19	31	...	$4 + 3(n-1) = 1 + 3n$

89 Palillos y parejas de cuadrados



7 PALILLOS



12 PALILLOS



17 PALILLOS

Completa la siguiente tabla:

Nº DE PAREJAS DE CUADRADOS	1	2	3	4	5	6	10	...	n
Nº DE PALILLOS	7	12	17						

En este caso se necesitan, para la primera pareja de cuadrados, 7 palillos, y para las siguientes, 5 más cada vez.

$$7 - 7 + 5 - 7 + 5 + 5 - 7 + 5 + 5 + 5 \dots$$

Para formar n parejas de cuadrados se necesitará este número de palillos:

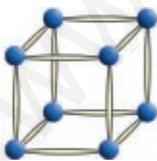
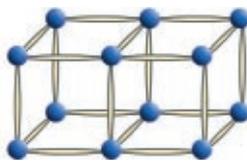
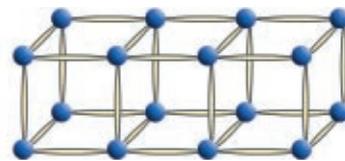
$$7 + \underbrace{5 + 5 + \dots + 5}_{\text{el } 5, \ n - 1 \text{ veces}}$$

La tabla quedará así:

Nº DE PAREJAS DE CUADRADOS	1	2	3	4	5	6	10	...	n
Nº DE PALILLOS	7	12	17	22	27	32	52	...	$7 + 5(n - 1)$

$$\downarrow \\ = 2 + 5n$$

90 Palillos, bolas y cubos

12 PALILLOS
8 BOLAS20 PALILLOS
12 BOLAS28 PALILLOS
16 BOLAS

Completa esta tabla:

Nº DE CUBOS	1	2	3	4	5	6	10	...	n
Nº DE PALILLOS	12	20	28						
Nº DE BOLAS	8	12	16						

Partiendo de 12 palillos para el primer cubo, para formar un nuevo cubo se necesitan, cada vez, 8 palillos más.

Partiendo de 8 bolas para el primer cubo, se necesitan, para formar nuevos cubos, 4 bolas más para cada uno.

Así, para formar n cubos necesitaremos:

$$12 + \underbrace{8 + 8 + \dots + 8}_{n-1 \text{ veces}} \text{ palillos}$$

$$8 + \underbrace{4 + 4 + \dots + 4}_{n-1 \text{ veces}} \text{ bolas}$$

La tabla queda así:

Nº DE CUBOS	1	2	3	4	5	6	10	...	n	
Nº DE PALILLOS	12	20	28	36	44	52	84	...	$12 + 8(n-1)$	$= 4 + 8n$
Nº DE BOLAS	8	12	16	20	24	28	44	...	$8 + 4(n-1)$	$= 4 + 4n$

PÁGINA 213

■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Operaciones con ángulos y tiempos

1 ▲▲▲ Efectúa las siguientes operaciones:

a) $27^\circ 31' 15'' + 43^\circ 42' 57''$

b) $163^\circ 15' 43'' - 96^\circ 37' 51''$

c) $(37^\circ 42' 19'') \times 4$

d) $(143^\circ 11' 56'') : 11$

$$\begin{array}{r} \text{a) } 27^\circ 31' 15'' \\ + 43^\circ 42' 57'' \\ \hline 70^\circ 73' 72'' \rightarrow \boxed{71^\circ 14' 12''} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 163^\circ 15' 43'' \quad 162^\circ 74' 103'' \\ - 96^\circ 37' 51'' \rightarrow - 96^\circ 37' 51'' \\ \hline \boxed{66^\circ 37' 52''} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c) } 37^\circ \times 4 = 148^\circ \\ 42' \times 4 = 168' = 2^\circ 48' \\ 19'' \times 4 = 76'' = 1' 16'' \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 37^\circ \\ 42' \\ 19'' \end{array}} \right\} \rightarrow (37^\circ 42' 19'') \times 4 = \boxed{150^\circ 49' 16''}$$

$$\begin{array}{r} \text{d) } 143^\circ 11' 56'' \quad \boxed{11} \\ \hline 033 \quad 00 \quad 01'' \quad 13^\circ 1' 5'' \\ 00 \end{array}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} \text{Cociente} \rightarrow 13^\circ 1' 5'' \\ \text{Resto} \rightarrow 1'' \end{cases}$$

2 ▲▲▲ En el ángulo $\hat{A} = 80^\circ 42' 56''$, trazamos su bisectriz. ¿Cuánto mide cada ángulo resultante?

$$\begin{array}{r} \text{Cada uno mide: } 80^\circ 42' 56'' \quad \boxed{2} \\ \hline 00 \quad 00 \quad 00 \quad 40^\circ 21' 28'' \end{array}$$

3 ▲▲▲ Halla el cuarto ángulo de un cuadrilátero sabiendo que los otros tres miden:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= 47^\circ 11' 15'', & \hat{B} &= 96^\circ 51' 33'', & \hat{C} &= 68^\circ 3'' \\ \hat{D} &= 360^\circ - (47^\circ 11' 15'' + 96^\circ 51' 33'' + 68^\circ 3'') = 147^\circ 57' 9'' \end{aligned}$$

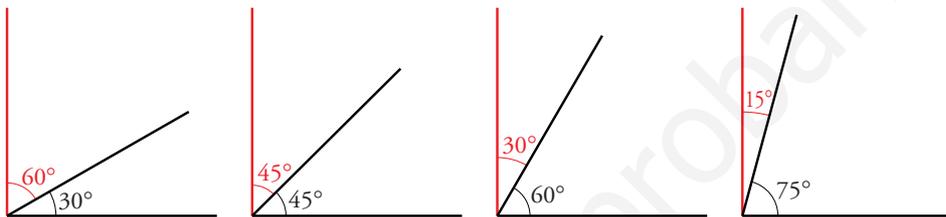
- 4 ▲▲▲ Halla en grados, minutos y segundos el ángulo interior de un heptágono regular.

El ángulo interior de un heptágono regular mide:

$$\frac{(7-2) \cdot 180^\circ}{7} = 128^\circ 34' 17''$$

Construcciones

- 5 ▲▲▲ Traza, con el transportador, los ángulos de 30° , 45° , 60° y 75° . Construye sus complementarios y calcula sus medidas.

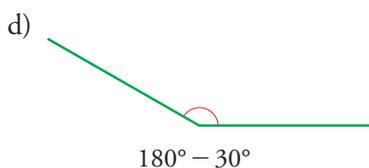
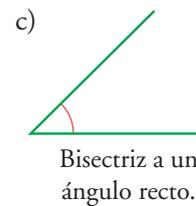
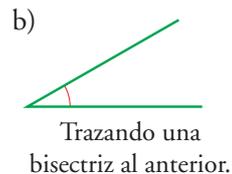
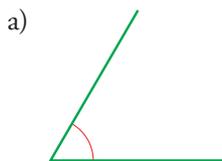


- 6 ▲▲▲ Traza con el transportador los ángulos de 120° , 135° , 150° y 165° . Construye sus suplementarios y calcula sus medidas.



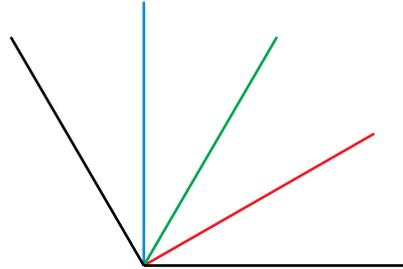
- 7 ▲▲▲ Utilizando exclusivamente el lápiz, la regla y el compás, dibuja los siguientes ángulos:

- a) 60° b) 30° c) 45° d) 150° e) 75°



- 8 ▲▲▲ Dibuja un ángulo de 120° . Traza tres rectas de forma que dividan al ángulo en cuatro partes iguales.

$$120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$$

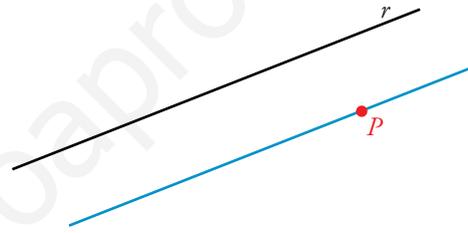


Primero se traza la bisectriz del ángulo de 120° (verde) y luego las dos bisectrices de los ángulos de 60° (azul y rojo).

- 9 ▲▲▲ Dibuja en tu cuaderno una recta r y un punto P exterior a ella. ¿Cuántas rectas paralelas a r que pasen por P puedes trazar?

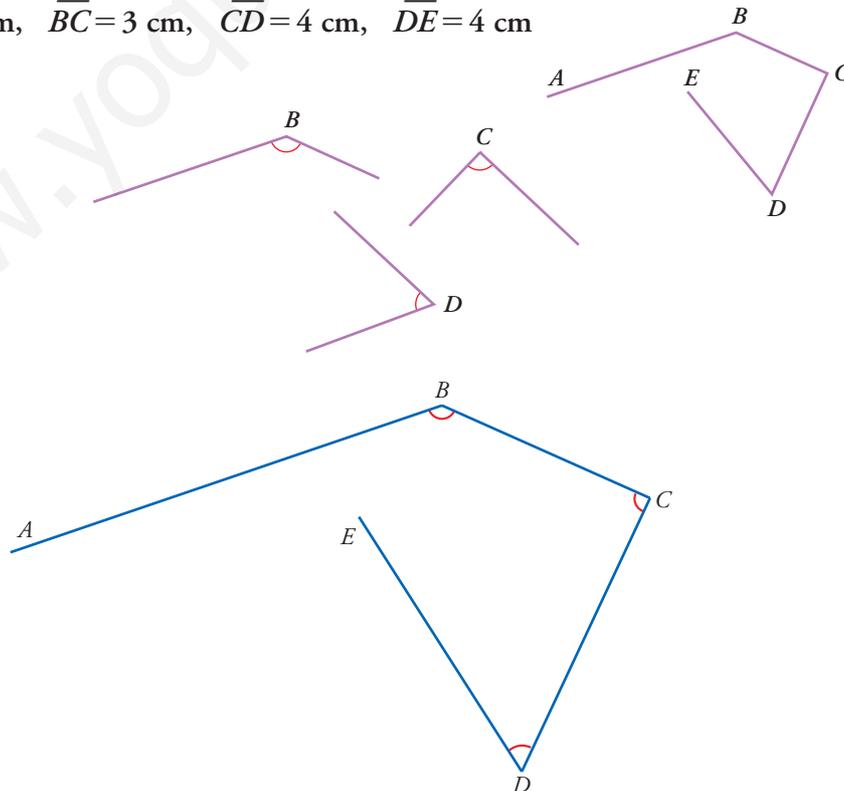
Haz los trazados con regla y escuadra.

Solo puede trazarse una recta paralela.

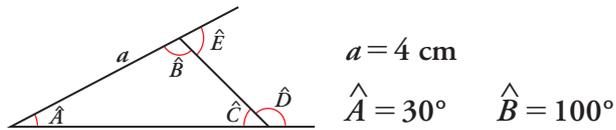


- 10 ▲▲▲ Dibuja en tu cuaderno un itinerario como este con las siguientes medidas:

$$\overline{AB} = 6 \text{ cm}, \quad \overline{BC} = 3 \text{ cm}, \quad \overline{CD} = 4 \text{ cm}, \quad \overline{DE} = 4 \text{ cm}$$



11 $\triangle\triangle\triangle$ Construye un triángulo como este con las siguientes medidas:



Halla los ángulos \hat{D} y \hat{E} . ¿Cómo son los ángulos \hat{B} y \hat{E} ? ¿Y \hat{D} y \hat{C} ?

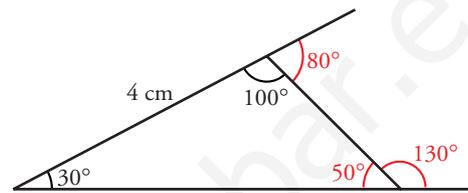
$$\hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 100^\circ) = 50^\circ$$

$$\hat{D} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\hat{E} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

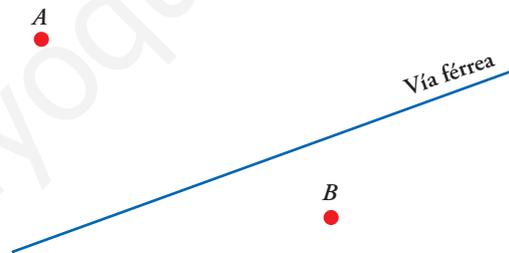
\hat{B} y \hat{E} son suplementarios
(y adyacentes).

\hat{D} y \hat{C} son suplementarios (y adyacentes).



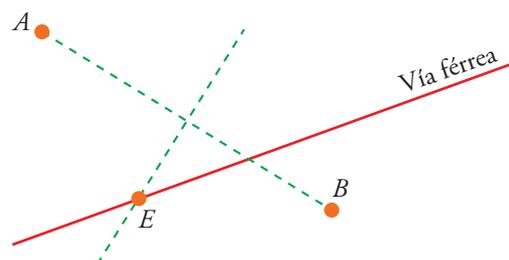
12 $\triangle\triangle\triangle$ Responde a las siguientes preguntas:

- ¿Qué propiedad tiene cada punto de la mediatriz de un segmento?
- ¿En qué punto de la vía férrea hay que situar una estación de modo que se encuentre a la misma distancia de los pueblos A y B ?



Copia en tu cuaderno el dibujo y resuélvelo gráficamente.

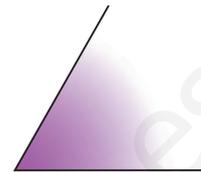
- Que equidista de cada uno de los dos extremos del segmento.
- La estación E hay que situarla en el punto en que la mediatriz de AB corta a la vía férrea. De ese modo, equidista de A y de B .



PÁGINA 214

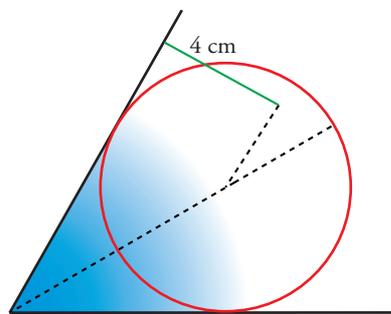
13 ▲▲▲ Contesta y construye:

- a) ¿Qué propiedad tiene cada punto de la bisectriz de un ángulo?
- b) Copia en tu cuaderno un ángulo como este, alargando sus lados varios centímetros. Sitúa una circunferencia de 4 cm de radio, que sea tangente a los dos lados del ángulo (es decir, que la circunferencia toque en un solo punto a cada lado del ángulo).



a) Que equidista de los lados del ángulo.

b)

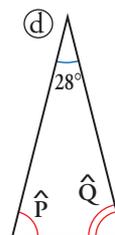
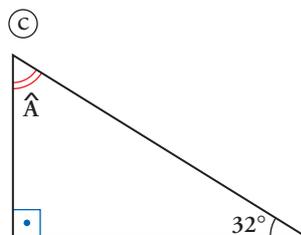
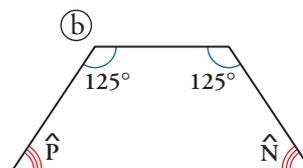
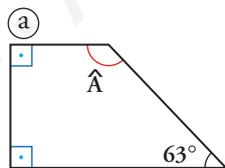


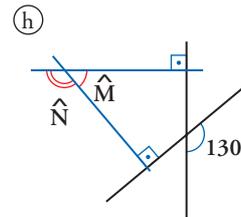
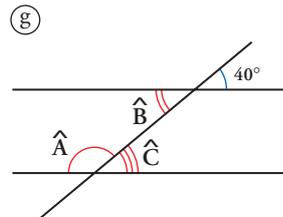
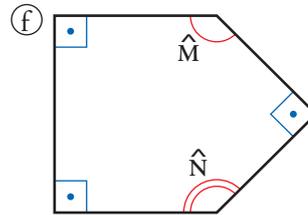
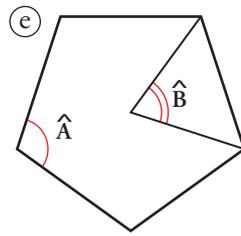
(No construido a su tamaño.)

Trazamos un segmento de 4 cm perpendicular a un lado. Por su extremo trazamos una paralela a este, hasta que corte a la bisectriz. Ahí está el centro de la circunferencia buscada.

Relaciones angulares

14 ▲▲▲ Calcula el valor del ángulo o de los ángulos que se piden en cada figura:

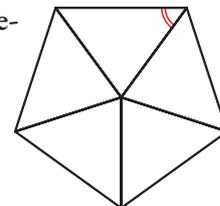




- a) $\hat{A} = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$
- b) $\hat{P} = \hat{N} = \frac{360^\circ - (125^\circ + 125^\circ)}{2} = 55^\circ$
- c) $\hat{A} = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$
- d) $\hat{P} = \hat{Q} = \frac{180^\circ - 28^\circ}{2} = 76^\circ$
- e) $\hat{A} = \frac{180^\circ \cdot 3}{5} = 108^\circ$; $\hat{B} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
- f) $\hat{M} = \hat{N} = \frac{180^\circ \cdot 3 - 90^\circ \cdot 3}{2} = 135^\circ$
- g) $\hat{B} = \hat{C} = 40^\circ$; $\hat{A} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$
- h) $\hat{N} = 130^\circ$; $\hat{M} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

15 **▲▲▲** Averigua cuánto mide el ángulo de un pentágono regular contestando a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuánto mide el ángulo central?
- b) Por tanto, ¿cuánto mide el ángulo señalado en rojo?
- c) Por tanto, ¿cuánto mide el ángulo del pentágono?



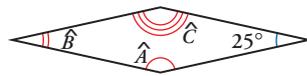
a) Ángulo central = $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

$$\text{b) } \hat{\text{Ángulo señalado}} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$$

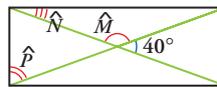
$$\text{c) } \hat{\text{Ángulo del pentágono}} = 54^\circ \cdot 2 = 108^\circ$$

16 $\blacktriangle\blacktriangle\triangle$ Calcula el valor del ángulo o de los ángulos que se piden en cada figura:

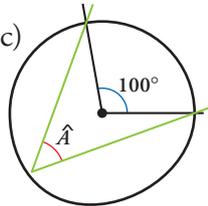
a)



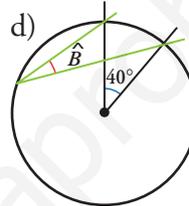
b)



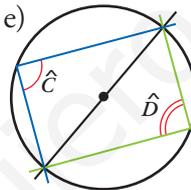
c)



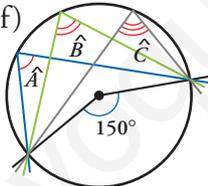
d)



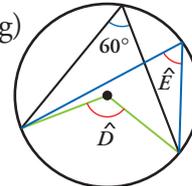
e)



f)



g)



$$\text{a) } \hat{B} = 25^\circ; \hat{A} = \hat{C} = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$$

$$\text{b) } \hat{M} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ; \hat{N} = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ; \hat{P} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

$$\text{c) } \hat{A} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

$$\text{d) } \hat{B} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

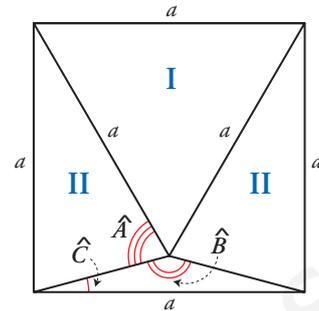
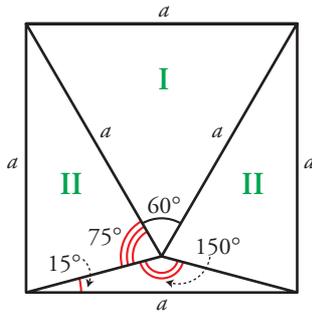
$$\text{e) } \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$$

$$\text{f) } \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 150^\circ : 2 = 75^\circ$$

$$\text{g) } \hat{E} = 60^\circ; \hat{D} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

- 17 **▲▲▲** El triángulo I es equilátero. Los triángulos II son isósceles.

Halla la medida de los ángulos \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} .



$$\hat{A} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

$$\hat{B} = 360^\circ - (60^\circ + 75^\circ \cdot 2) = 150^\circ$$

$$\hat{C} = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$$

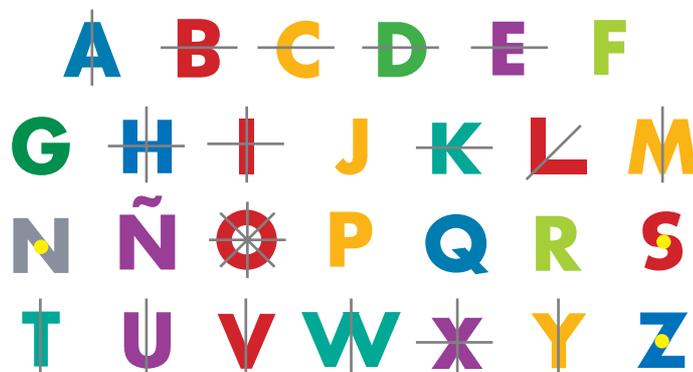
PÁGINA 215

Simetrías

- 18 **▲▲▲** Observa las letras del abecedario:

Di cuáles no tienen ejes de simetría (hay 10), cuáles tienen un eje de simetría (hay 13), cuáles tienen dos (hay 3) y cuál tiene infinitos ejes de simetría.

Dibuja cada una de ellas en tu cuaderno señalando los ejes que tenga.



No tienen eje de simetría: F, G, J, N, Ñ, P, Q, R, S, Z.

Tienen un eje de simetría: A, B, C, D, E, K, L (inclinado), M, T, U, V, W, Y.

Tienen dos ejes de simetría: H, I, X. La O tiene infinitos.

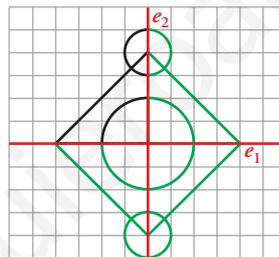
Son simétricas respecto a un punto, además de H, I, X, O, las siguientes: N, S, Z.

- 19 $\triangle\triangle\triangle$ Completa en tu cuaderno cada figura para que sea simétrica respecto al eje señalado:



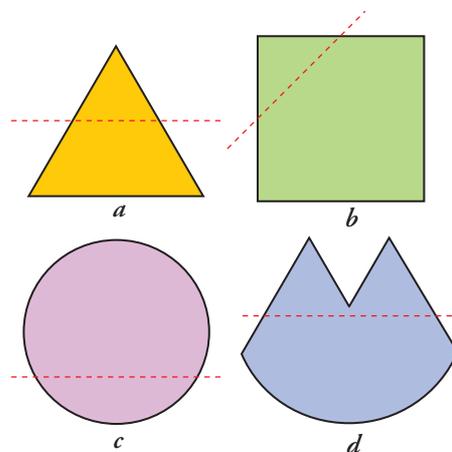
- 20 Completa la siguiente figura para que tenga los dos ejes de simetría que se indican:

Comprueba el resultado con un espejo.



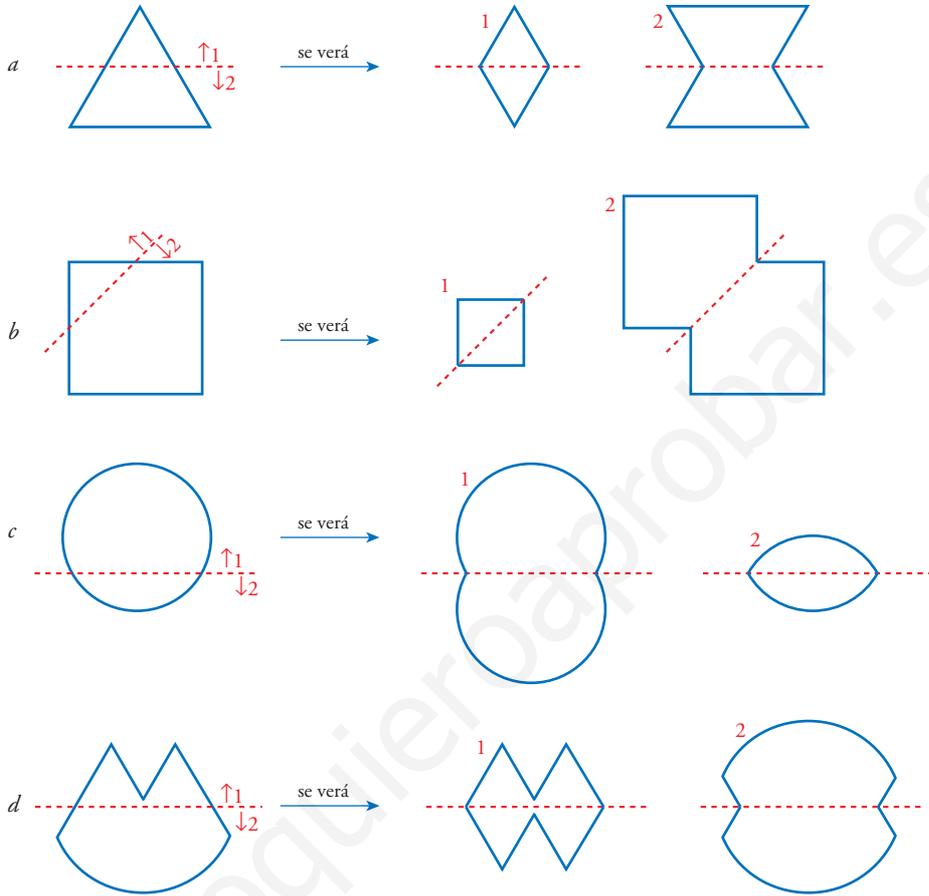
■ PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

- 21 Imagina que pones un espejo sobre la línea de puntos de las siguientes figuras:

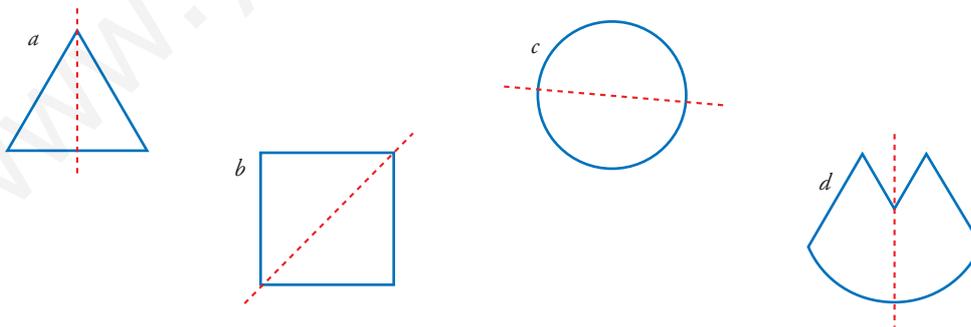


Dibuja en tu cuaderno lo que crees que se verá mirando por cada una de sus dos caras.

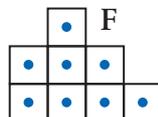
¿Cómo hay que situar el espejo en cada figura para que se vea lo mismo por las dos caras?

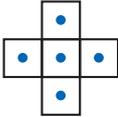


Para que se vea lo mismo por las dos caras hay que situar los espejos así:



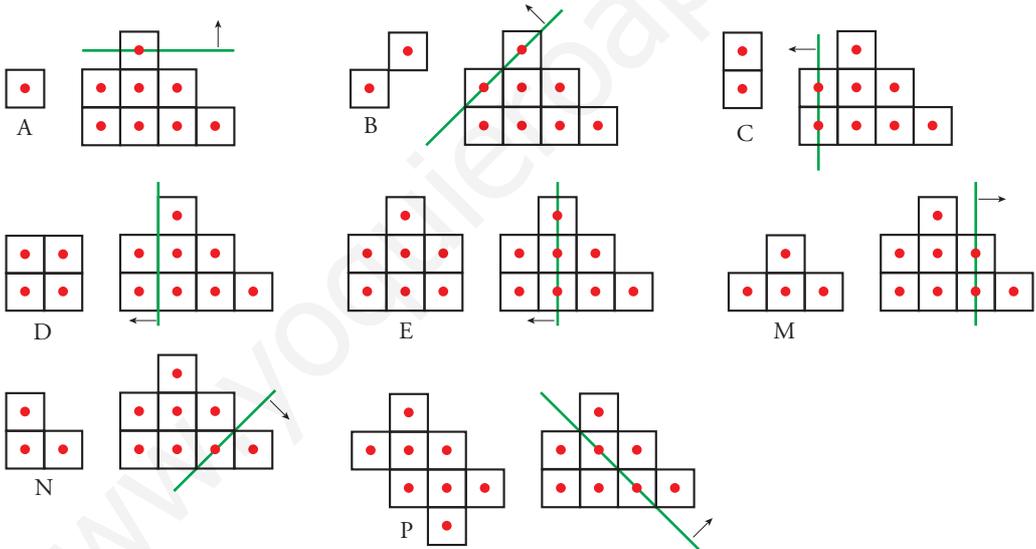
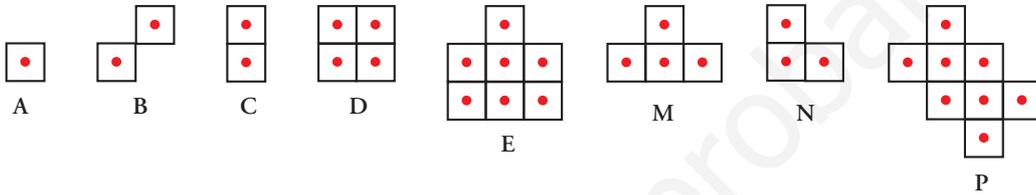
22 Vamos a obtener figuras mirando un trozo de esta figura F con un espejo:



Por ejemplo, para obtener esta  hemos de situar el espejo así:



Pero ¡atención!, no tenemos un espejo a mano. Tienes que imaginártelo. Indica cómo hay que situar el espejo sobre F para visualizar cada una de las siguientes figuras:

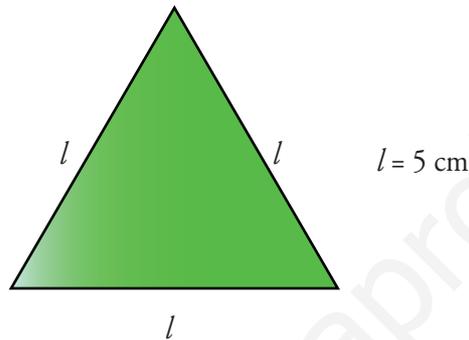


PÁGINA 228

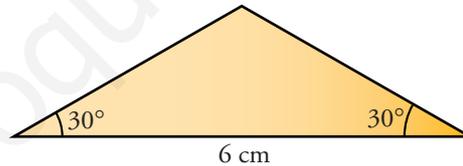
■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Construcción de triángulos

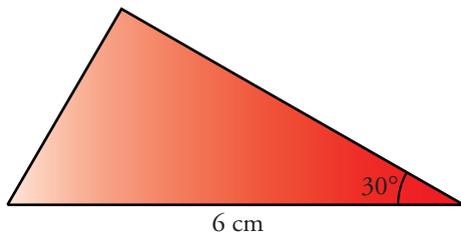
- 1 ▲▲▲ Construye un triángulo equilátero cuyo lado mida $l = 5$ cm.



- 2 ▲▲▲ Construye un triángulo isósceles cuyos ángulos iguales miden 30° y cuyo lado desigual mide 6 cm.

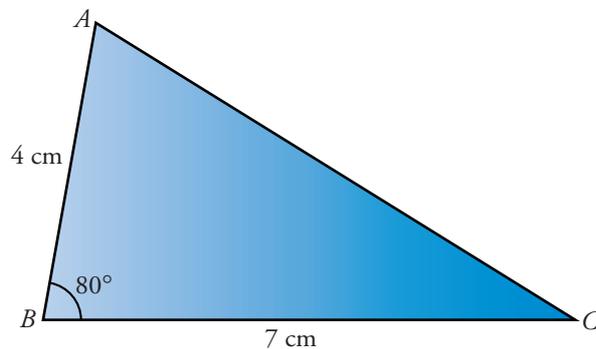


- 3 ▲▲▲ La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 6 cm y uno de sus ángulos, 30° . Constrúyelo. Comprueba que el cateto menor es la mitad de la hipotenusa.



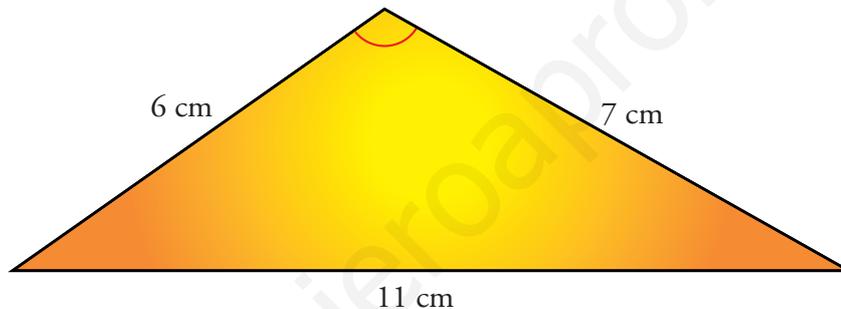
Con la regla se comprueba que el cateto menor mide 3 cm

- 4 ▲▲▲ Construye un triángulo ABC del que se conocen $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm y $\hat{B} = 80^\circ$. ¿De qué tipo es?



El triángulo es acutángulo y escaleno.

- 5 ▲▲▲ Representa el triángulo de lados 6 cm, 7 cm y 11 cm. ¿De qué tipo es?



El triángulo es obtusángulo y escaleno.

- 6 ▲▲▲ ¿Por qué es imposible construir un triángulo cuyos lados midan 15,3 cm, 8,6 cm y 5,2 cm, respectivamente?

Porque la suma de las longitudes de los dos lados menores no supera la longitud del lado mayor.

- 7 ▲▲▲ ¿Por qué no se puede construir un triángulo con dos ángulos que midan 95° y 88°, respectivamente?

Porque la suma de los dos ángulos dados no es menor que 180°.

- 8 ▲▲▲ Dos de los lados de un triángulo miden 5 cm cada uno, y forman un ángulo de 90°. ¿Cuánto miden los otros dos ángulos?

Es un triángulo isósceles.

Por tanto, los otros dos ángulos son iguales:

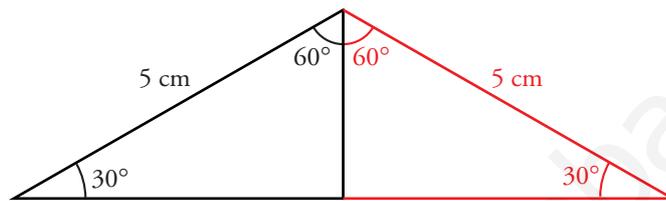
$$180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$90^\circ : 2 = 45^\circ \text{ es la medida de cada uno de ellos}$$

- 9 ▲▲▲ El ángulo desigual de un triángulo isósceles mide 120° y los lados iguales, 5 cm. Constrúyelo.

Se construye en dos pasos:

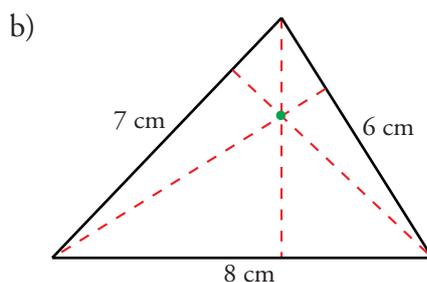
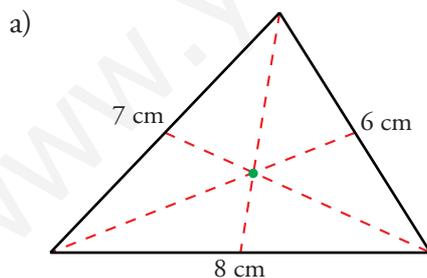
- La mitad del triángulo isósceles es un triángulo rectángulo donde los ángulos agudos miden 30° y 60° , y su hipotenusa mide 5 cm.
- Se construye dicho triángulo y luego se amplía al triángulo completo.

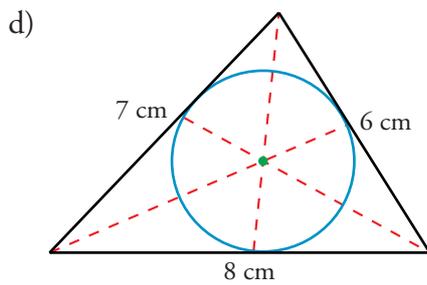
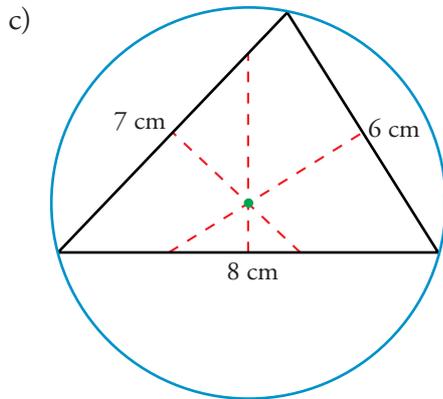


Puntos y rectas notables

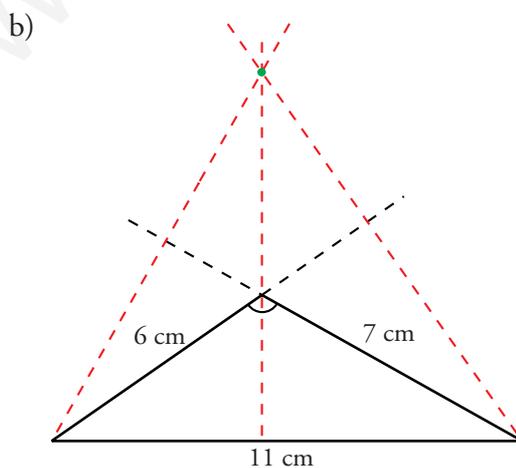
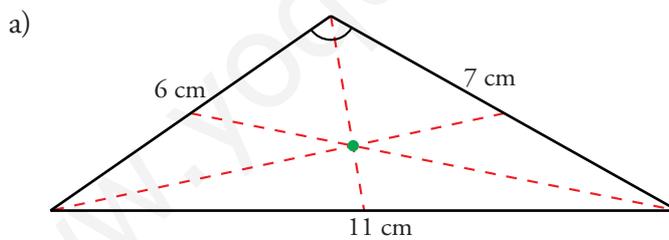
- 10 ▲▲▲ Construye cuatro triángulos cuyos lados midan: $a = 6$ cm, $b = 7$ cm y $c = 8$ cm.

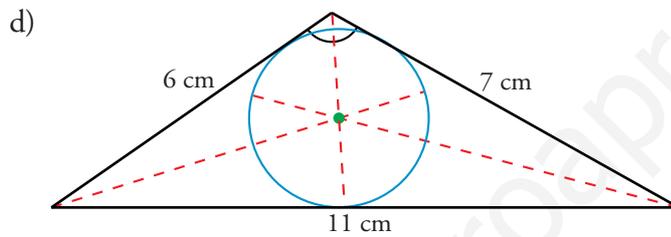
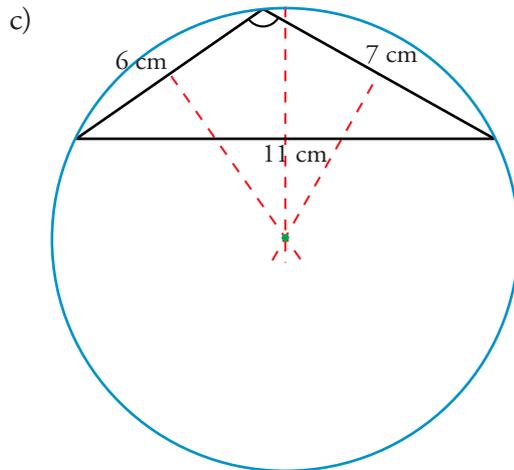
- En uno de ellos, traza sus medianas y localiza el baricentro.
- En otro, traza las alturas y localiza el ortocentro.
- En el tercero, localiza su circuncentro y traza la circunferencia circunscrita.
- En el último, localiza su incentro y traza la circunferencia inscrita.



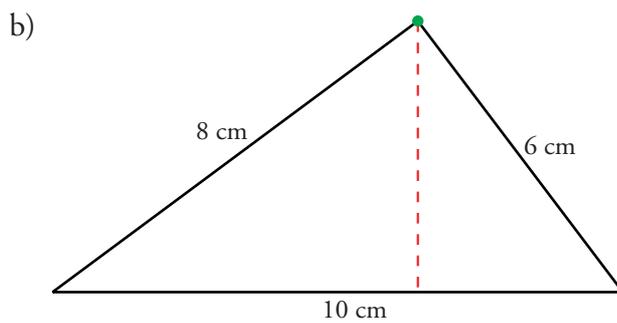
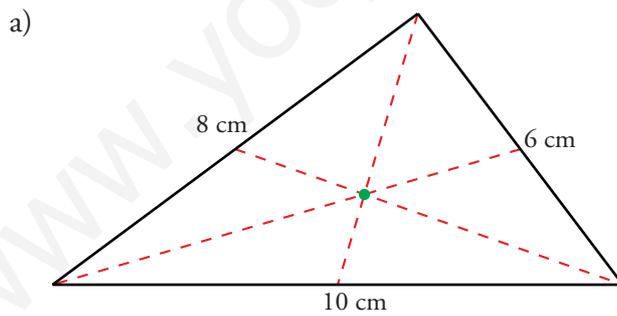


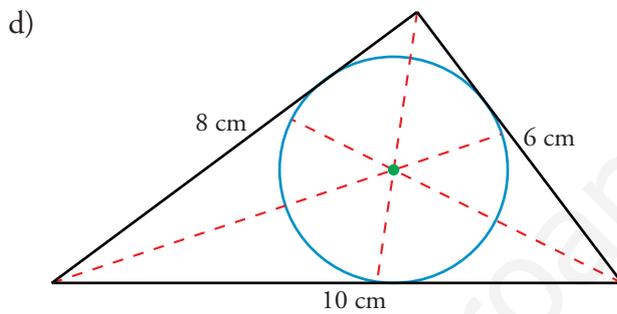
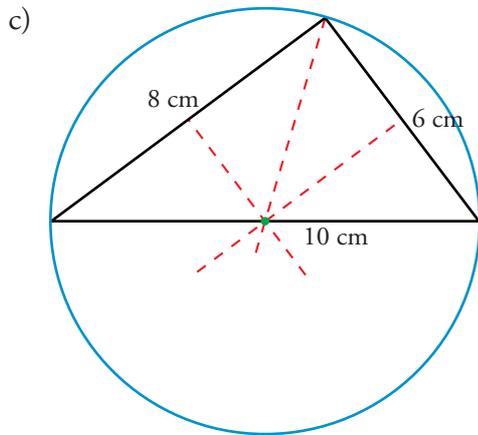
11 $\triangle\triangle\triangle$ Repite la actividad anterior con un triángulo de lados $a=6$ cm, $b=7$ cm y $c=11$ cm.





12 $\triangle\triangle\triangle$ Vuelve a hacer lo mismo con un triángulo de lados $a=10$ cm, $b=8$ cm y $c=6$ cm.



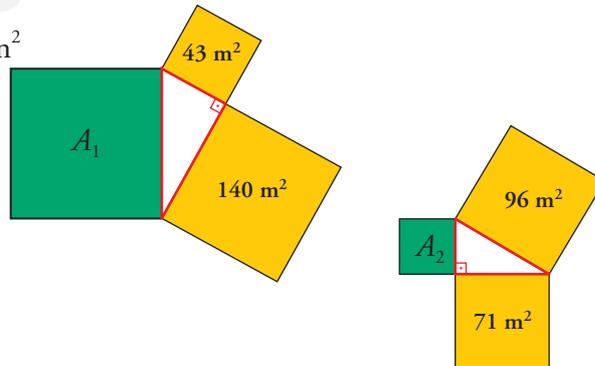


Teorema de Pitágoras

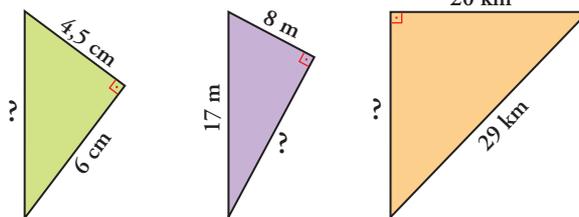
13 $\triangle\triangle\triangle$ Di el valor del área del cuadrado verde en cada uno de los triángulos rectángulos siguientes:

$$A_1 = 140 \text{ m}^2 + 43 \text{ m}^2 = 183 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 96 \text{ m}^2 - 71 \text{ m}^2 = 25 \text{ m}^2$$



14 $\triangle\triangle\triangle$ Calcula el lado desconocido en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:

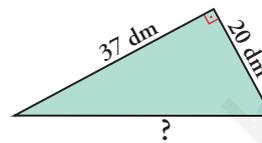
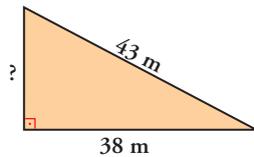


$$x^2 = 4,5^2 + 6^2 = 56,25 \rightarrow x = \sqrt{56,25} = 7,5 \text{ cm}$$

$$x^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \rightarrow x = \sqrt{225} = 15 \text{ m}$$

$$x^2 = 29^2 - 20^2 = 441 \rightarrow x = \sqrt{441} = 21 \text{ km}$$

- 15 ▲▲▲ Calcula el lado desconocido de los siguientes triángulos, aproximando hasta las décimas.



$$x^2 = 43^2 - 38^2 = 405 \rightarrow x = \sqrt{405} \approx 20,1 \text{ m}$$

$$x^2 = 37^2 - 20^2 = 1\,810 \rightarrow x = \sqrt{1\,810} \approx 42,5 \text{ dm}$$

- 16 ▲▲▲ Averigua cuáles de los siguientes triángulos son rectángulos:

I: $a = 22 \text{ m}$ $b = 17 \text{ m}$ $c = 10 \text{ m}$

II: $a = 37 \text{ cm}$ $b = 35 \text{ cm}$ $c = 12 \text{ cm}$

III: $a = 61 \text{ m}$ $b = 60 \text{ m}$ $c = 11 \text{ m}$

IV: $a = 42 \text{ m}$ $b = 31 \text{ m}$ $c = 30 \text{ m}$

En los que no son rectángulos, ¿sabrías decir si son acutángulos u obtusángulos?

I: $22^2 = 484$; $17^2 + 10^2 = 389$; 22^2 es mayor que $17^2 + 10^2$. Es OBTUSÁNGULO

II: $37^2 = 1\,369$; $35^2 + 12^2 = 1\,369$; $37^2 = 35^2 + 12^2$. Es RECTÁNGULO

III: $61^2 = 3\,721$; $60^2 + 11^2 = 3\,721$; $61^2 = 60^2 + 11^2$. Es RECTÁNGULO

IV: $42^2 = 1\,764$; $31^2 + 30^2 = 1\,861$; 42^2 es menor que $31^2 + 30^2$. Es ACUTÁNGULO

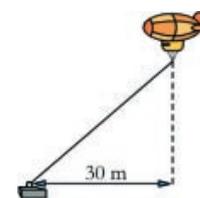
PÁGINA 229

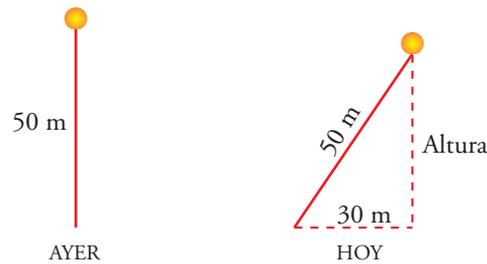
- 17 ▲▲▲ Un globo cautivo está sujeto al suelo con una cuerda.

Ayer, que no había viento, el globo estaba a 50 m de altura.

Hoy hace viento, y la vertical del globo se ha alejado 30 m del punto de amarre.

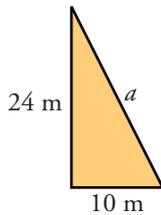
¿A qué altura está hoy el globo?





$$\text{Altura} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40 \text{ m}$$

- 18 ▲▲▲ Para afianzar una antena de 24 m de altura, se van a tender, desde su extremo superior, cuatro tirantes que se amarrarán, en tierra, a 10 m de la base de la torre. ¿Cuántos metros de cable se necesitan para los tirantes?



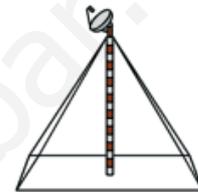
Para un tirante se necesitan:

$$a^2 = 24^2 + 10^2 = 676$$

$$a = 26 \text{ m}$$

$$26 \cdot 4 = 104$$

Por tanto, necesitaremos 104 m de cable.

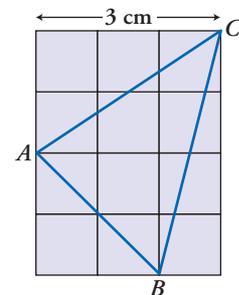


- 19 ▲▲▲ Calcula el perímetro del triángulo ABC .

(NOTA: Aproxima hasta las décimas la medida de cada lado).

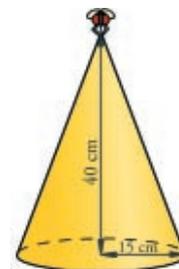
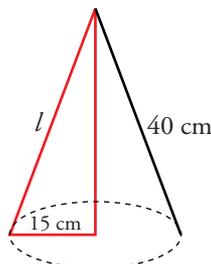
$$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,6 \text{ cm} \quad \overline{AB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,8 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 4^2} = 4,1 \text{ cm} \quad \text{Perímetro} = 10,5 \text{ cm}$$



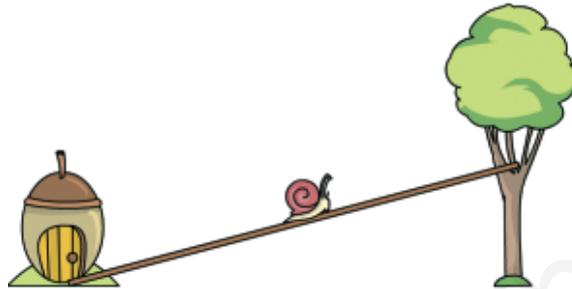
- 20 ▲▲▲ Una mosca está en el vértice de un cucurucho de cartulina con forma de cono. El radio de la base mide 15 cm y la altura es de 40 cm. ¿Cuál es la mayor distancia que puede recorrer la mosca, en línea recta, partiendo del vértice?

$$l = \sqrt{40^2 + 15^2} = 42,7 \text{ cm}$$



- 21 ▲▲▲ Un caracol sale todos los días de su escondite y va a comer los brotes tiernos de un árbol. Para ello se desplaza por el suelo durante 8 minutos y luego, sin variar su velocidad, trepa durante 6 minutos por el tronco.

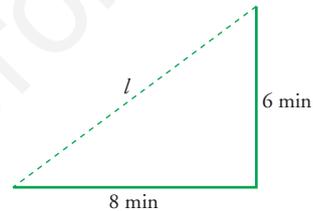
Pero un buen día se encuentra con que alguien ha colocado un tablón justo desde su guarida hasta la base de la copa del árbol.



¿Cuánto crees que tardará si decide subir por el tablón? Eso sí, él avanza, siempre, imperturbable, a la misma velocidad.

$$l = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

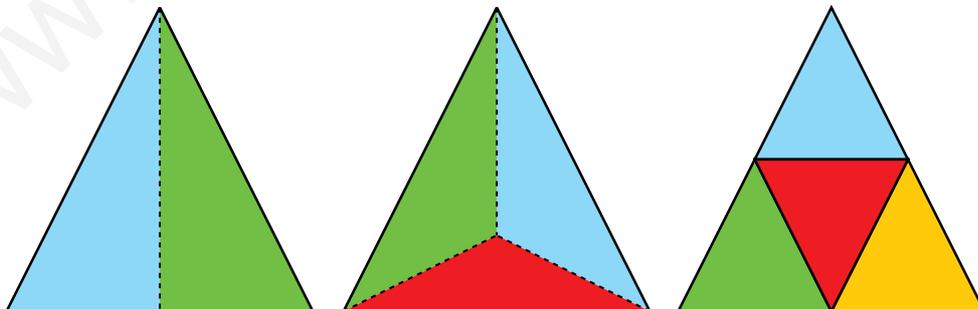
Tardará 10 minutos.



■ PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

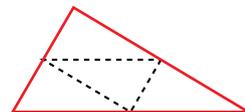
- 22 Dibuja un triángulo equilátero. Divídelo en dos trozos iguales (fácil, ¿verdad?).

Dibuja otro y divídelo en tres trozos iguales (este es menos fácil). ¡Pues también puedes dividirlo en cuatro trozos iguales! Y esto último se puede hacer con un triángulo cualquiera.

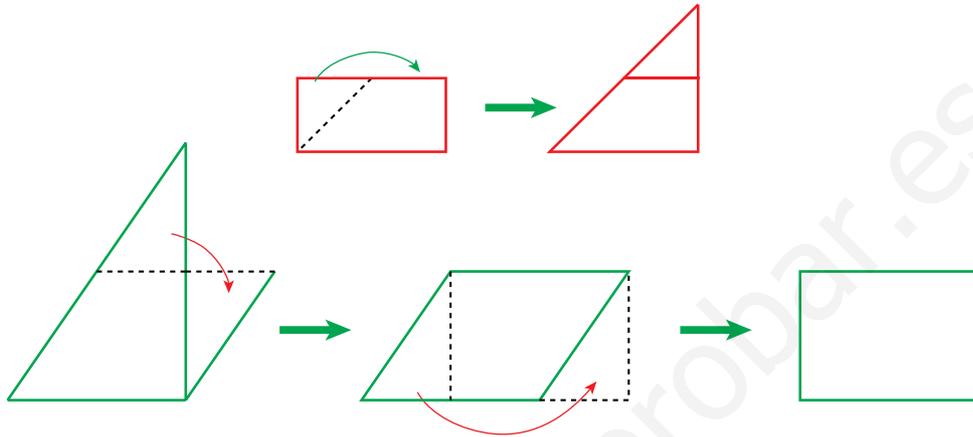


Con un triángulo cualquiera:

Uniéndolo los puntos medios de sus tres lados.

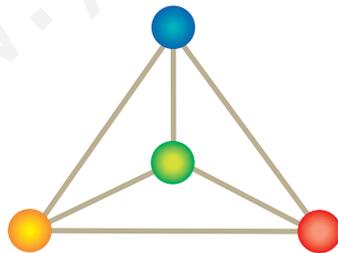
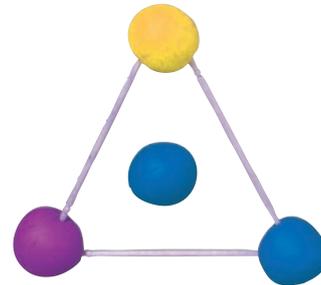


- 23 Busca un método para, cortando y recomponiendo, transformar un rectángulo en un triángulo. Y otro método para transformar un triángulo en cuadrilátero rectángulo (empieza pensando cómo se transforma, cortando y recomponiendo, un triángulo en paralelogramo).



- 24 Con seis palillos de dientes puedes formar 4 triángulos. Piensa y no te empeñes en no levantar los palillos de la mesa. Acaso te resulte más fácil si usas cuatro bolitas de plastilina: tres de ellas te ayudan a formar un triángulo.

¿Dónde debes colocar la cuarta para que con los otros tres palillos se formen tres triángulos más?
4 triángulos con 6 palillos.



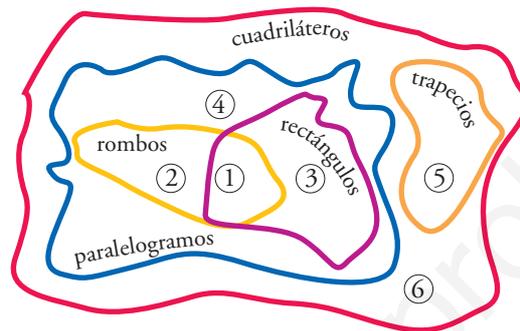
Los cuatro triángulos son las caras del tetraedro.

PÁGINA 241

■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD

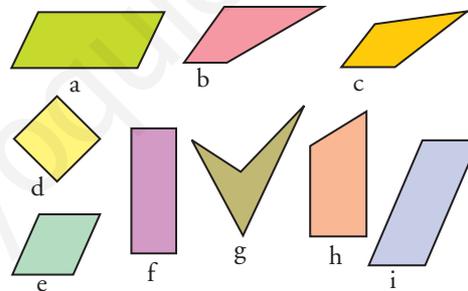
Clasificación. Propiedades

1 ▲▲▲ Observa el siguiente diagrama:



¿Qué figura geométrica corresponde al recinto ①?

Ponle nombre a cada una de las figuras que aparecen a continuación y sitúala en el lugar correspondiente del diagrama asignándole un número:



Por ejemplo: a) romboide, 4; c) cuadrilátero, 6.

En el recinto 1 se encuentran los cuadrados.

- | | | |
|------------------|--------------------|----------------|
| b) Trapecio, 5 | d) Cuadrado, 1 | e) Romboide, 4 |
| f) Rectángulo, 3 | g) Cuadrilátero, 6 | h) Trapecio, 5 |
| i) Romboide, 4 | | |

2 ▲▲▲ Indica qué propiedades de la derecha tienen las figuras de la izquierda:

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| Cuadrado | a) Cuatro lados iguales. |
| Rectángulo
(no cuadrado) | b) Cuatro ángulos rectos. |
| | c) Ángulos opuestos iguales. |

Rombo
(no cuadrado)

Romboide

Paralelogramo

Trapezoide

Cuadrado: a, b, c, d, e y g.

Rectángulo (no cuadrado): b, c, e, f y h.

Rombo (no cuadrado): a, c, d, e y h.

Romboide: c, e y f.

Paralelogramo: c y e.

Trapezoide: Ninguna.

d) Diagonales perpendiculares.

e) Diagonales que se cortan en sus puntos medios.

f) Diagonales no perpendiculares.

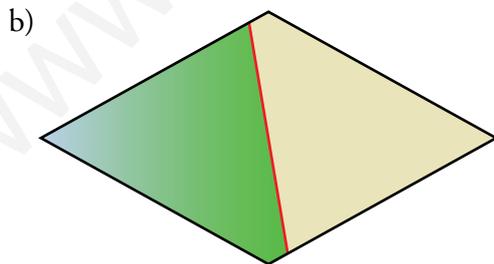
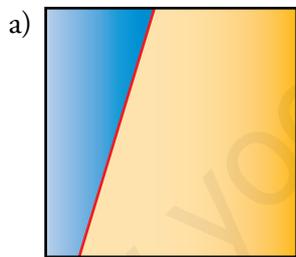
g) Cuatro ejes de simetría.

h) Dos ejes de simetría.

3  Dibuja dos trapezios que, al unirlos, den lugar a las siguientes figuras:

a) Un cuadrado.

b) Un rombo.



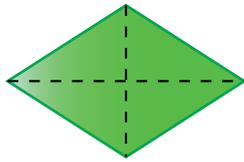
4  Si dibujas dos segmentos que sean perpendiculares en sus puntos medios y unes sus extremos, obtienes un cuadrilátero. ¿De qué tipo es?

Hazlo en tu cuaderno:

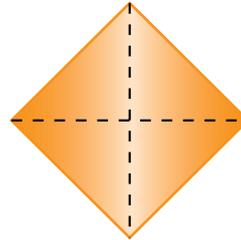
a) Para dos segmentos de distinta longitud.

b) Para dos segmentos de igual longitud.

a) ROMBO



b) CUADRADO

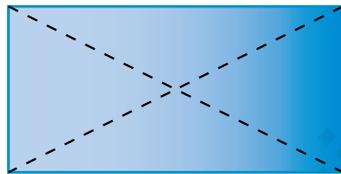


5 ▲▲▲ Dibuja dos segmentos que se corten en sus puntos medios y no sean perpendiculares. Une sus extremos y di qué tipo de cuadrilátero se obtiene:

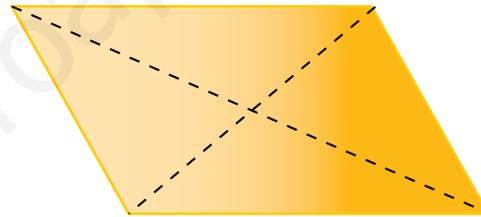
a) Si los dos segmentos son iguales.

b) Si los dos segmentos son distintos.

a) RECTÁNGULO



b) ROMBOIDE



6 ▲▲▲ Dibuja un cuadrilátero en cada caso:

a) Paralelogramo con dos ejes de simetría.

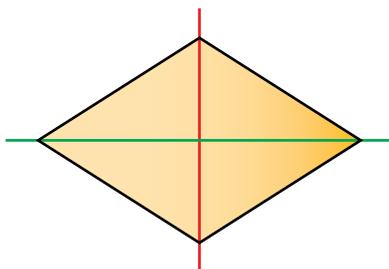
b) Con cuatro ejes de simetría.

c) Paralelogramo con un eje de simetría.

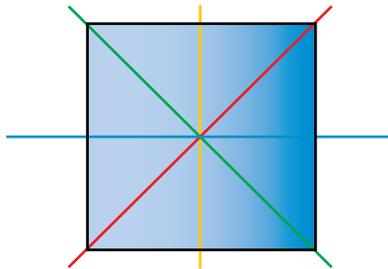
d) Paralelogramo con ningún eje de simetría.

e) No trapezio con un eje de simetría.

a) Un rombo o un rectángulo.

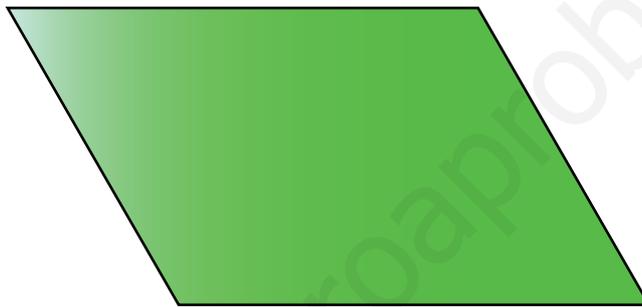


b) Un cuadrado.

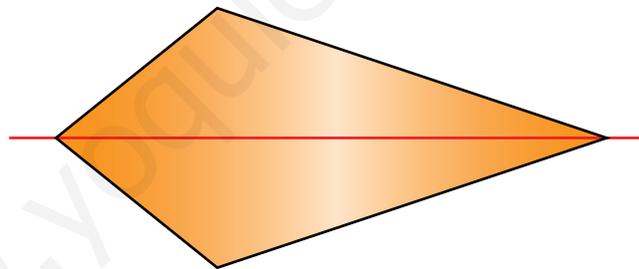


c) No existe ningún paralelogramo con un solo eje de simetría.

d) Un romboide.



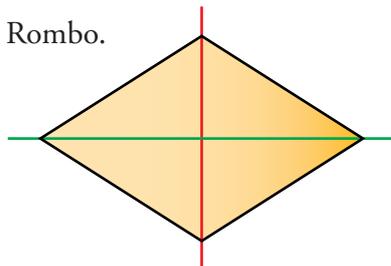
e) Por ejemplo:



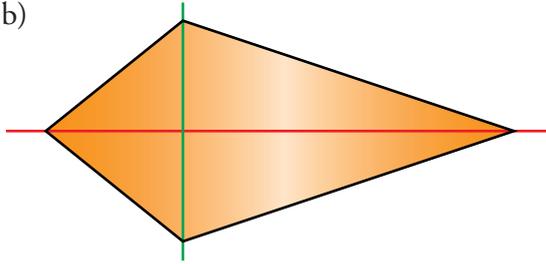
7 ▲▲▲ Dibuja un cuadrilátero en cada caso:

- Paralelogramo con diagonales perpendiculares.
- No paralelogramo con las diagonales perpendiculares.
- Paralelogramo con las diagonales iguales.
- No paralelogramo con las diagonales iguales.

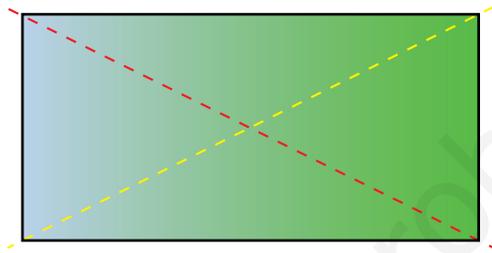
a) Rombo.



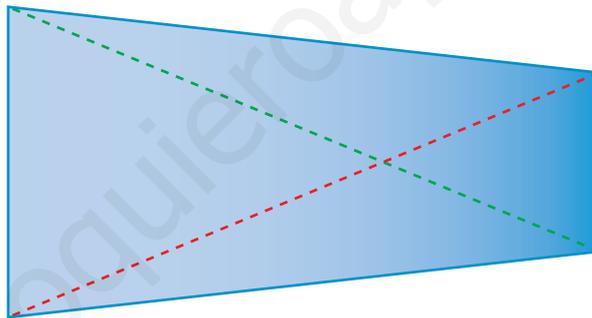
b)



c) Rectángulo



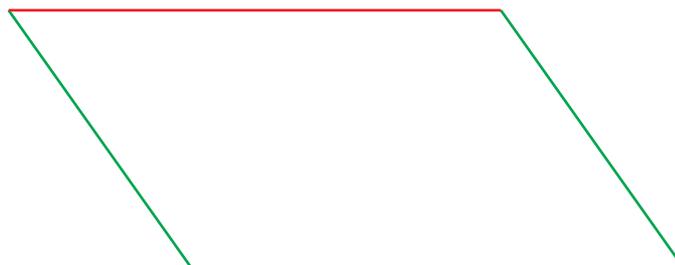
d) Por ejemplo:



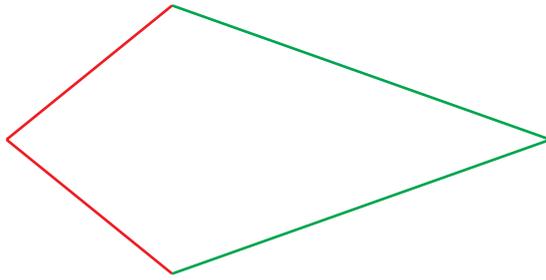
8 ▲▲△ Dibuja un cuadrilátero en cada caso:

- Con dos pares de lados iguales y paralelogramo.
- Con dos pares de lados iguales y no paralelogramo.
- Con dos pares de ángulos iguales y paralelogramo.
- Con dos pares de ángulos iguales y no paralelogramo.

a)



b)



c)



d)



9 ▲▲▲ Di propiedades de los cuadrados que no tengan los rectángulos.

Los cuatro lados iguales, cuatro ejes de simetría y diagonales perpendiculares.

10 ▲▲▲ Di propiedades de los cuadrados que no tengan los rombos.

Los cuatro ángulos rectos, cuatro ejes de simetría y diagonales iguales.

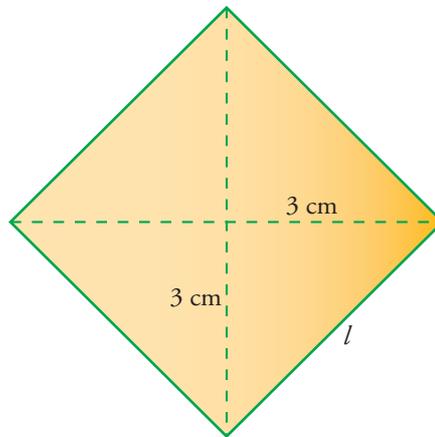
PÁGINA 242

Construcciones y cálculos

11 ▲▲▲ Dibuja un cuadrado cuya diagonal mida 6 cm. ¿Cuánto mide el lado?

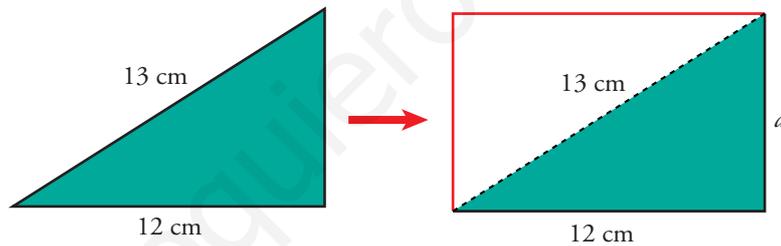
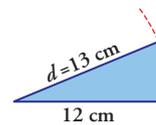
$$l^2 = 3^2 + 3^2 = 18$$

$$l = \sqrt{18} = 4,2 \text{ cm}$$



- 12 $\triangle\triangle\triangle$ Dibuja un rectángulo del que se conoce la diagonal, 13 cm, y un lado, 12 cm. ¿Cuánto mide el otro lado?

■ Empieza construyendo un triángulo rectángulo con la diagonal y el lado conocido. Después, completa el rectángulo.

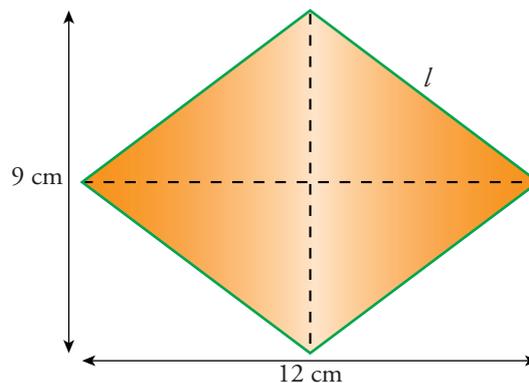


$$a^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

- 13 $\triangle\triangle\triangle$ Dibuja un rombo cuyas diagonales midan $D=12$ cm y $d=9$ cm. ¿Cuánto mide el lado?

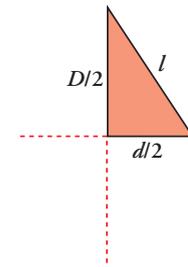
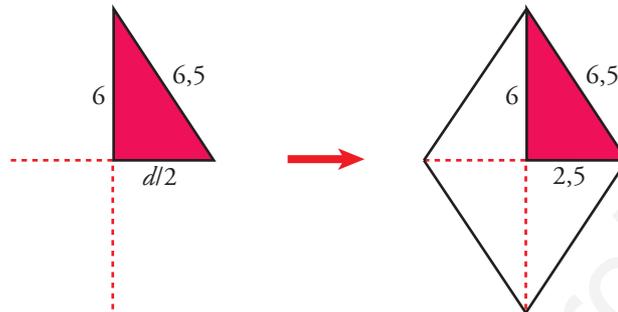
$$l^2 = 6^2 + 4,5^2 = 56,25$$

$$l = 7,5 \text{ cm}$$



- 14 ▲▲▲ Dibuja un rombo con una de sus diagonales de 12 cm y el lado de 6,5 cm. ¿Cuánto mide la otra diagonal?

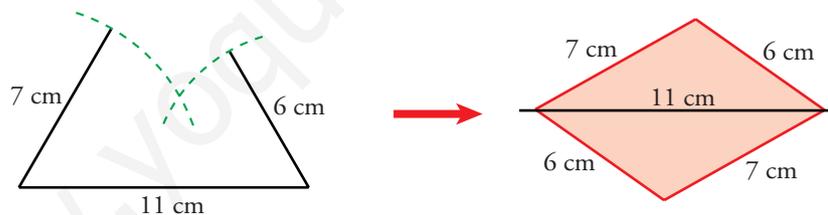
■ Empieza dibujando un triángulo rectángulo con el lado y la mitad de la diagonal. Después, completa las diagonales para hallar los otros dos vértices del rombo.



La otra diagonal mide:

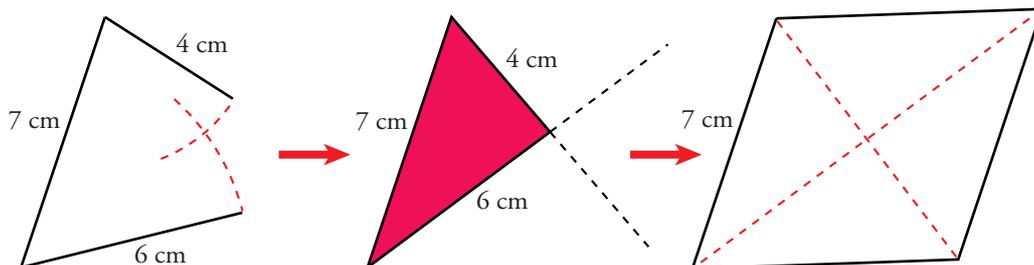
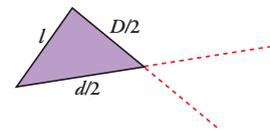
$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 6,5^2 - 6^2 = 6,25 \rightarrow \frac{d}{2} = \sqrt{6,25} = 2,5 \rightarrow d = 5 \text{ cm}$$

- 15 ▲▲▲ Dibuja un paralelogramo cuya diagonal mida 11 cm y sus lados, 7 cm y 6 cm.



- 16 ▲▲▲ Dibuja un paralelogramo cuyas diagonales midan 8 cm y 12 cm y uno de sus lados, 7 cm.

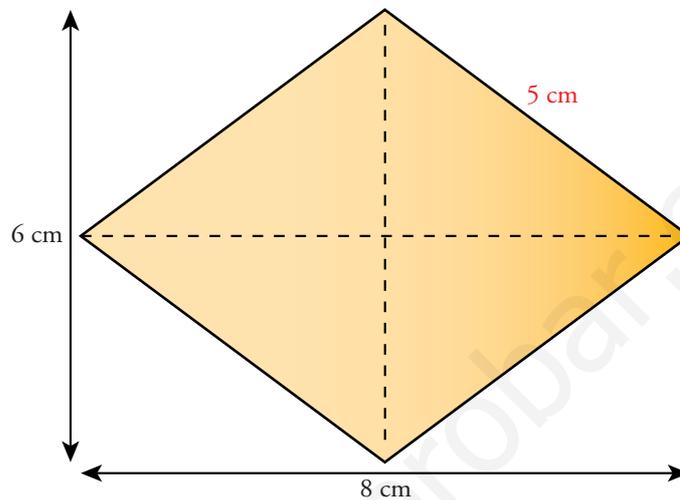
■ Construye un triángulo con el lado y las dos semidiagonales. Después, completa las diagonales para hallar los otros vértices.



- 17 $\triangle\triangle\triangle$ Dibuja un rombo de diagonales 8 cm y 6 cm. Calcula la longitud del lado aplicando el teorema de Pitágoras. Comprueba el resultado sobre el dibujo.

$$l^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$l = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

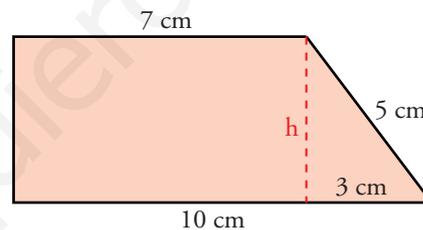


- 18 $\triangle\triangle\triangle$ Dibuja un trapecio rectángulo cuyos lados paralelos miden 10 cm y 7 cm y el lado oblicuo, 5 cm. Empieza averiguando cuánto mide la altura.

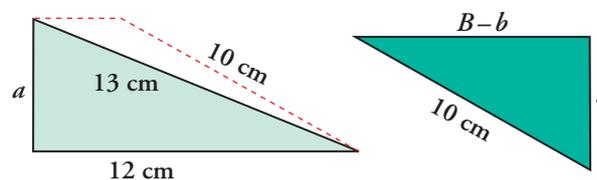
La altura mide:

$$h^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$$h = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$



- 20 $\triangle\triangle\triangle$ La base mayor de un trapecio rectángulo mide 12 cm, su diagonal mayor, 13 cm y el lado oblicuo, 10 cm. Halla la altura y constrúyelo. Halla también la longitud de la base menor. Para ello, calcula $B-b$ en el triángulo verde.



La altura mide: $a^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \rightarrow a = 5 \text{ cm}$

Para calcular la base menor, b , utilizamos el triángulo verde, donde B es la base mayor.

Así, $(B-b)^2 = 10^2 - a^2 = 10^2 - 5^2 = 75$

$$B-b = \sqrt{75} \approx 8,7$$

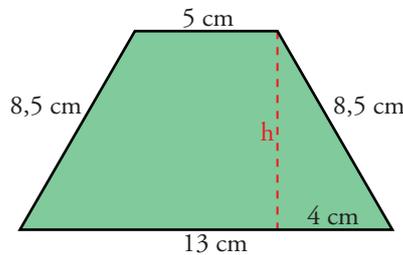
$$b \approx B - 8,7 = 12 - 8,7 = 3,3 \text{ cm}$$

- 21 ▲▲▲ Construye un trapecio isósceles de bases 5 cm y 13 cm, cuyos lados oblicuos miden 8,5 cm. Calcula previamente su altura.

Su altura mide:

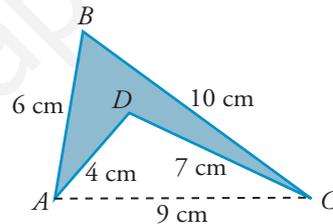
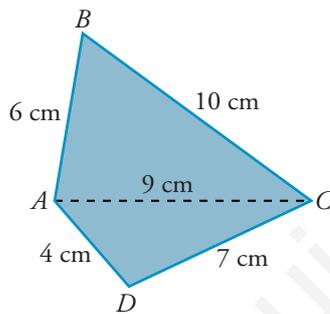
$$h^2 = 8,5^2 - 4^2 = 56,25$$

$$h = 7,5 \text{ cm}$$



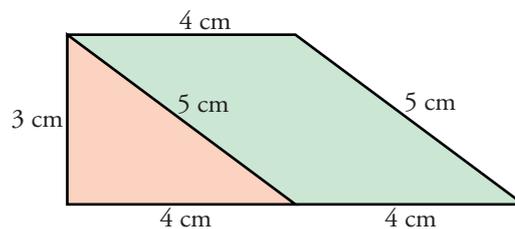
- 22 ▲▲▲ Traza un cuadrilátero $ABCD$ cuyos lados miden $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 10 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 7 \text{ cm}$, $\overline{DA} = 4 \text{ cm}$, y una diagonal, $\overline{AC} = 9 \text{ cm}$.

■ Construye triángulos sobre la diagonal.



- 23 ▲▲▲ Los lados paralelos de un trapecio miden 4 cm y 8 cm. Los otros dos lados miden 3 cm y 5 cm. Dibújalo. Justifica por qué se obtiene un trapecio rectángulo.

El trapecio es rectángulo porque es rectángulo el triángulo de lados 5, 3 y $8 - 4 = 4$.



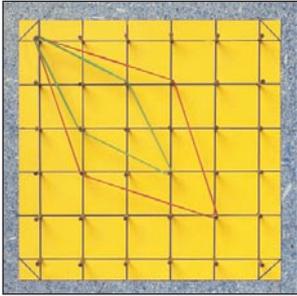
PÁGINA 243

■ PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

Sugerencias para investigar cuadriláteros

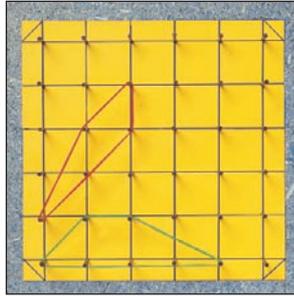
- 24 Estas actividades se realizan sobre papel cuadriculado. Sin ocupar más que un cuadrado de 5×5 y apoyándote en los vértices de la cuadrícula...

a)



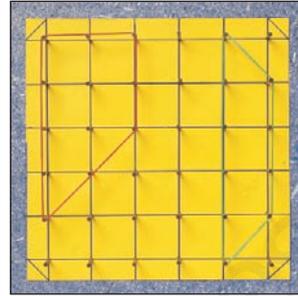
Representa tantos tipos de rombos que no sean cuadrados como puedas.

b)



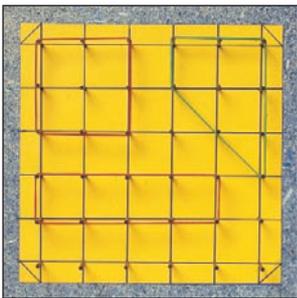
Representa algunos tipos de trapezios, que no sean rectángulos ni isósceles. (¡Hay muchísimos!)

c)



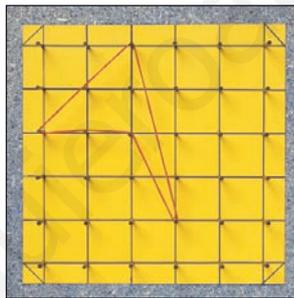
Inventa cuadriláteros distintos, pero todos ellos con el mismo perímetro.

d)



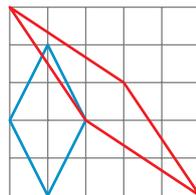
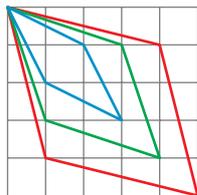
¿Puedes delimitar varios cuadriláteros con la misma área pero con distinto perímetro?

e)

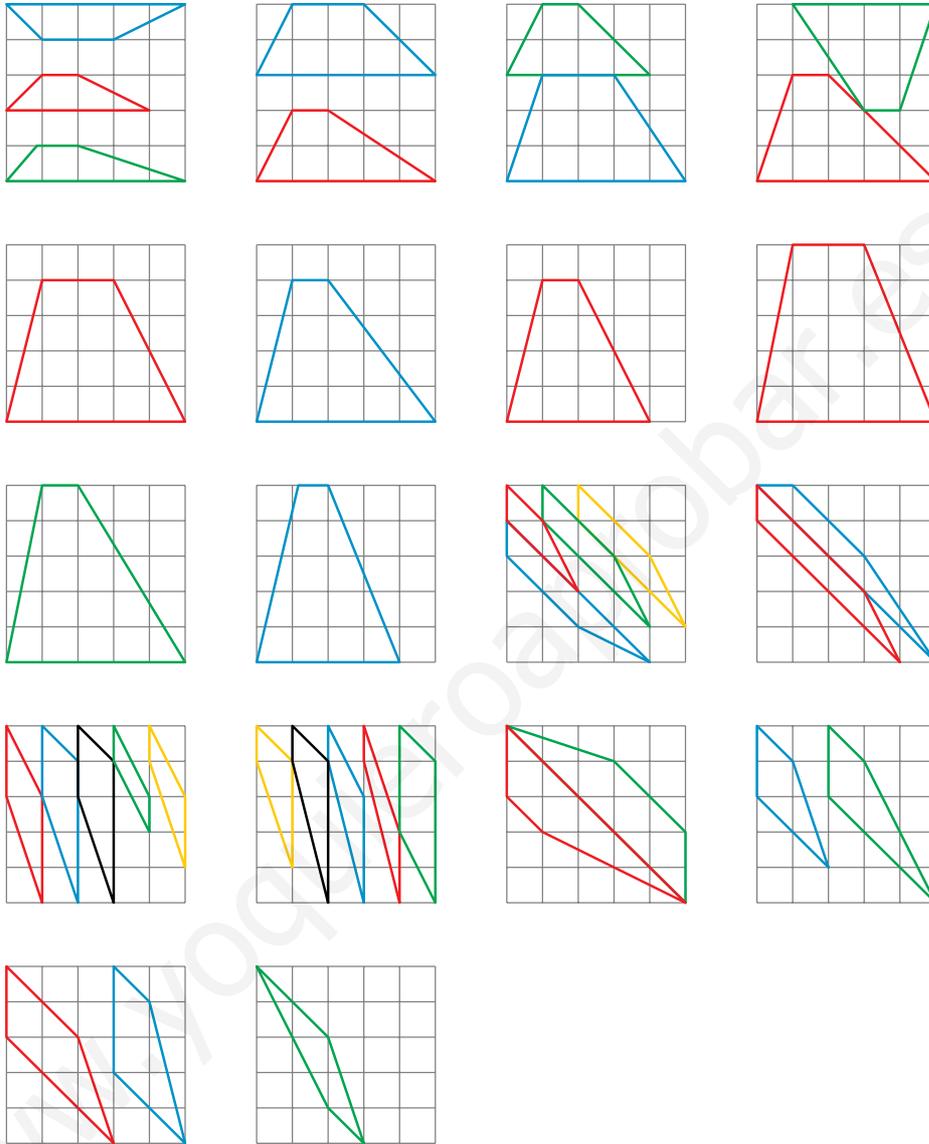


Representa algún cuadrilátero cóncavo.

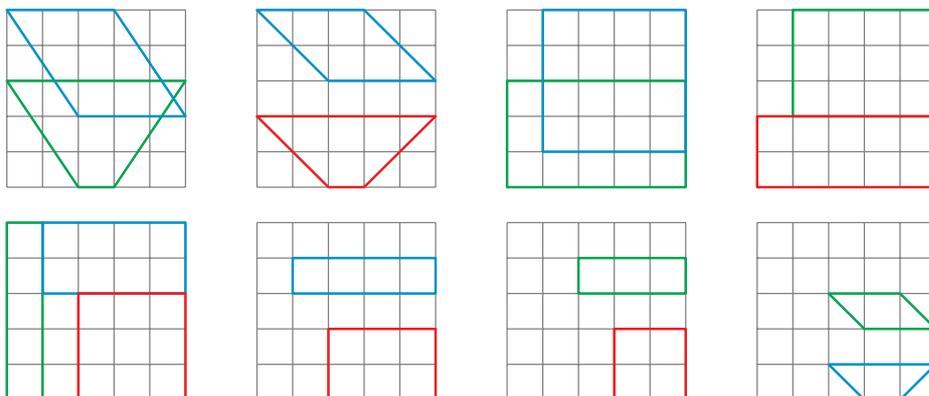
a)

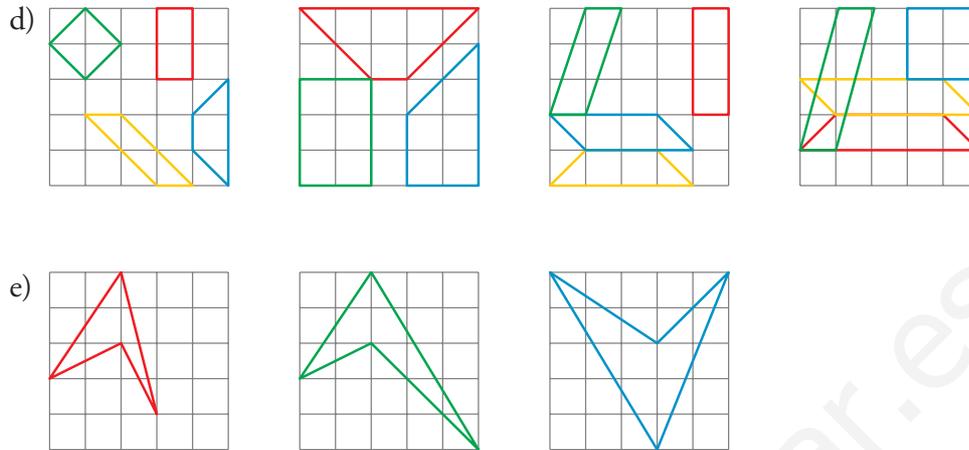


b) Hay muchísimos:



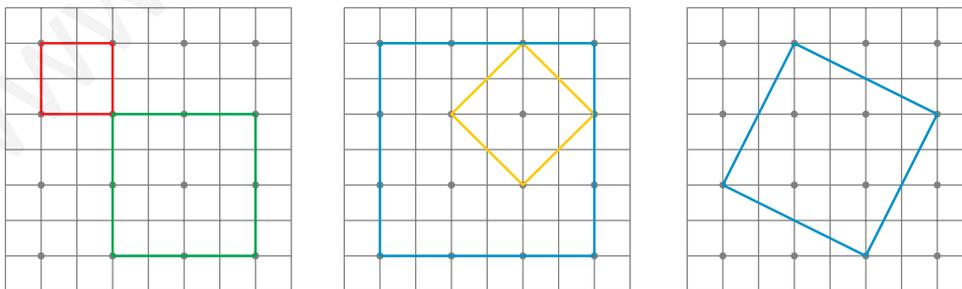
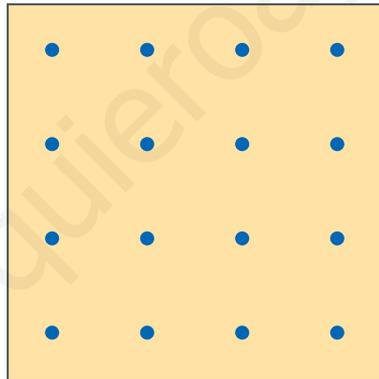
c)





25 Con los vértices en los puntos señalados se pueden encontrar hasta cinco tipos de cuadrados distintos. Localiza todos los que puedas.

(Trabaja sobre tu cuaderno en papel cuadrículado).

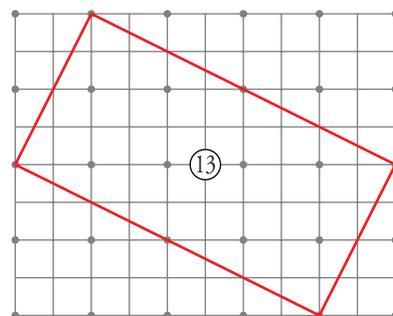
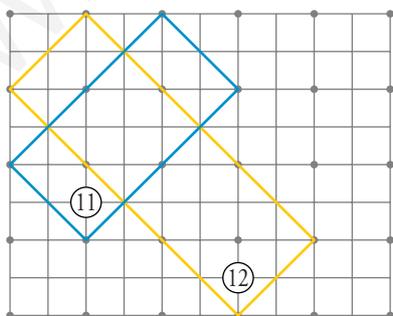
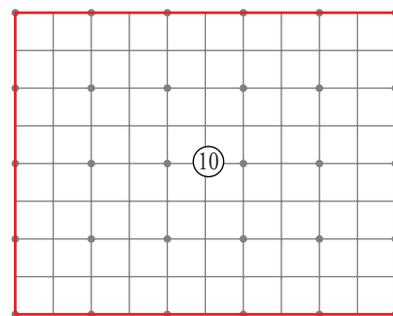
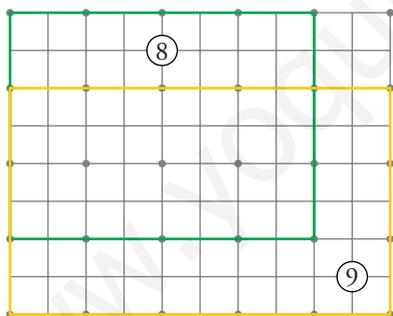
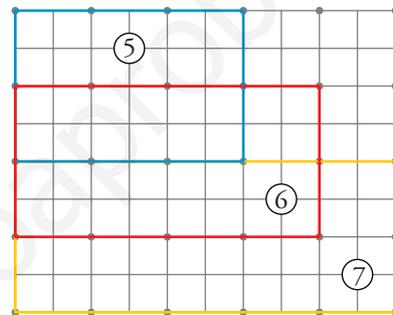
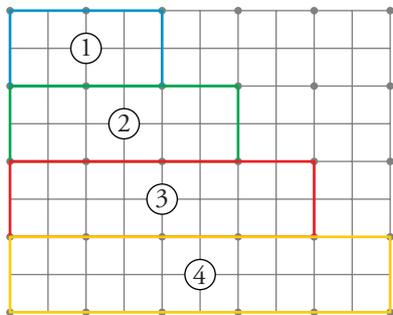
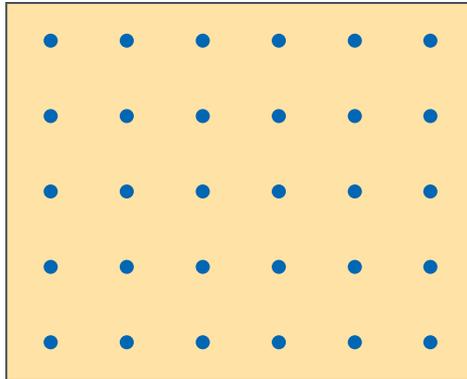


26 Con los vértices en los puntos de esta cuadrícula se pueden dibujar rectángulos no cuadrados.

Hay trece tipos distintos.

Localiza todos los que puedas.

(Trabaja sobre tu cuaderno en papel cuadrulado).



PÁGINA 255

■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Construcciones y ejes de simetría

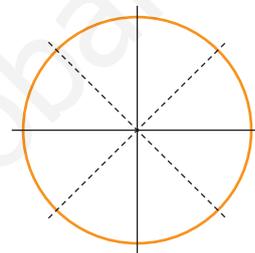
I ▲▲▲ a) Halla el ángulo central de un octógono regular.

b) Dibuja un octógono regular inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio, construyendo el ángulo central con ayuda del transportador. Traza todos sus ejes de simetría.

c) Con regla y compás, traza dos rectas perpendiculares y sus dos bisectrices.

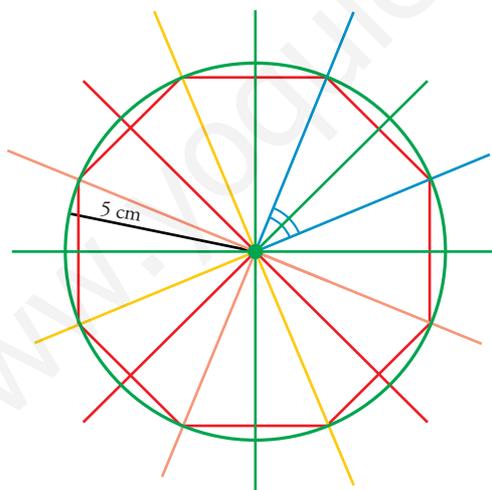
Traza una circunferencia de radio 5 cm con centro en el punto donde se cortan las cuatro rectas.

Dibuja de nuevo un octógono regular. Justifica la construcción.

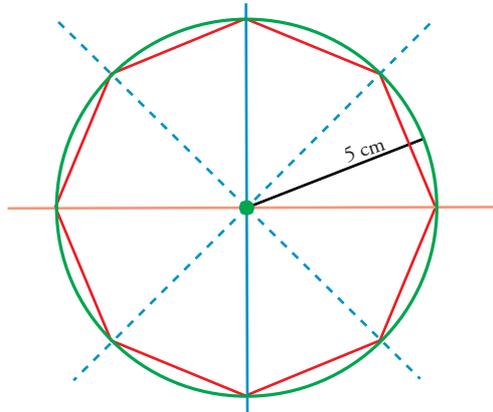


a) El ángulo pedido mide $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

b)

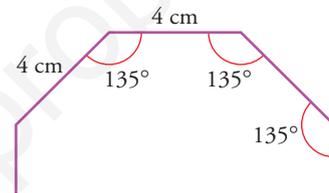


c) El octógono es regular porque estamos trabajando con bisectrices de ángulos iguales, por lo que las distancias son las mismas.



- 2 ▲▲△ Averigua cuánto vale el ángulo de un octógono regular. Obtendrás $A = 135^\circ$. Para dibujar un octógono regular de lado $l = 4$ cm, procede del siguiente modo:

- Traza un segmento de 4 cm de longitud y, en cada uno de sus extremos, construye un ángulo de 135° ($135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$).
- Después, traza los dos lados adyacentes.
- Prosigue así hasta cerrar los 8 lados del polígono.

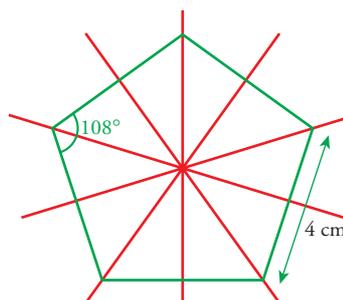


El ángulo es $\frac{180^\circ \cdot 6}{8} = 135^\circ$.

- 3 ▲▲△ Procediendo de forma análoga a la del ejercicio anterior, construye un pentágono regular de 4 cm de lado y traza, en rojo, todos sus ejes de simetría.

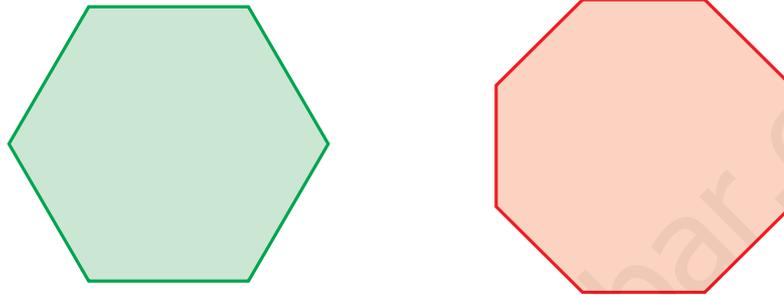
- Primero tendrás que calcular el ángulo de un pentágono regular.

El ángulo es $\frac{180^\circ \cdot 3}{5} = 108^\circ$



- 4 ▲▲▲ Dibuja dos polígonos regulares que cada uno de ellos tenga sus lados paralelos dos a dos.

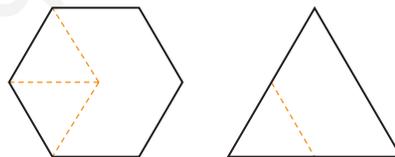
En general, ¿cuáles son los polígonos regulares cuyos lados son paralelos dos a dos?



En general, cumplen esa propiedad los polígonos regulares con un número par de lados.

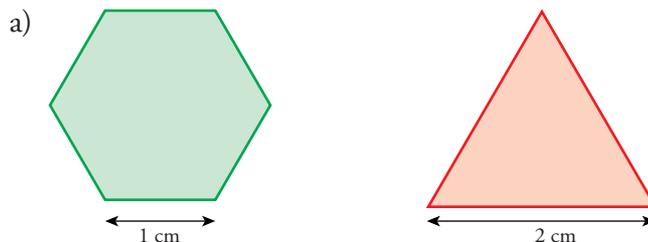
- 5 ▲▲▲ Dibuja en tu cuaderno y comprueba:

- Construye un hexágono regular de 1 cm de lado y un triángulo equilátero de 2 cm de lado.
- Comprueba que las dos figuras anteriores tienen el mismo perímetro.
- Divide el hexágono y el triángulo en triángulos equiláteros de 1 cm de lado.



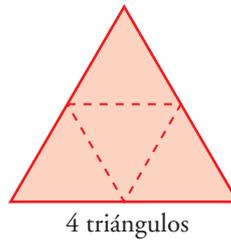
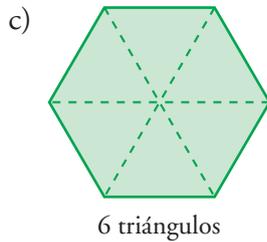
¿Cuántos de estos triángulos tiene cada una de las dos figuras?

¿Qué relación hay entre sus áreas?



$$b) P_{\text{HEXÁGONO}} = 1 \cdot 6 = 6 \text{ cm}$$

$$P_{\text{TRIÁNGULO}} = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$$



El área del hexágono es $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$ veces la del triángulo.

- 6 ▲▲▲ Un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro. Si el área del hexágono es 60 cm^2 , ¿cuál es el área del triángulo?

■ Ten en cuenta el apartado c) del ejercicio anterior.

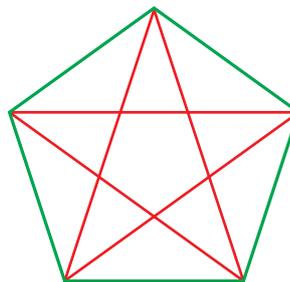
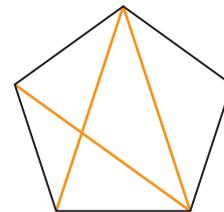
Por el ejercicio 5, el área del triángulo es $60 \text{ cm}^2 : 1,5 = 40 \text{ cm}^2$.

Polígonos estrellados

- 7 ▲▲▲ Calca en tu cuaderno este pentágono regular.

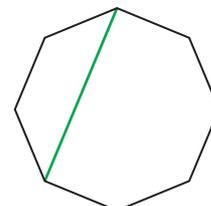
Une cada vértice con el que está “dos lugares más allá”. Obtendrás el pentágono estrellado.

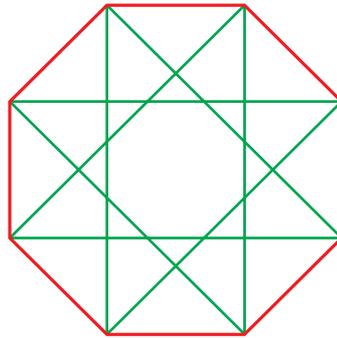
¿Recuerdas? Era el símbolo de los pitagóricos.



- 8 ▲▲▲ El octógono estrellado se obtiene uniendo cada vértice del octógono con los que están “tres lugares más allá”.

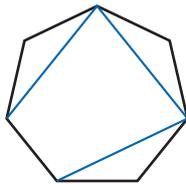
Hazlo en tu cuaderno.



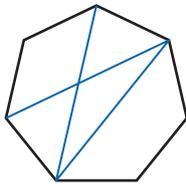


PÁGINA 256

9 ▲▲▲ Existen dos heptágonos estrellados:

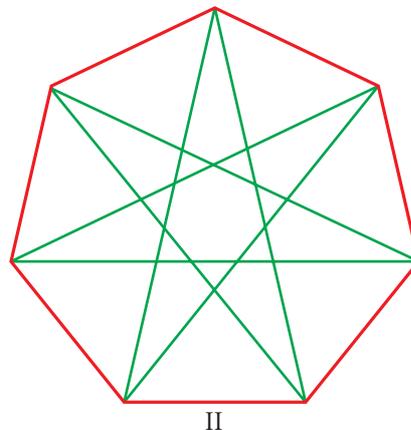
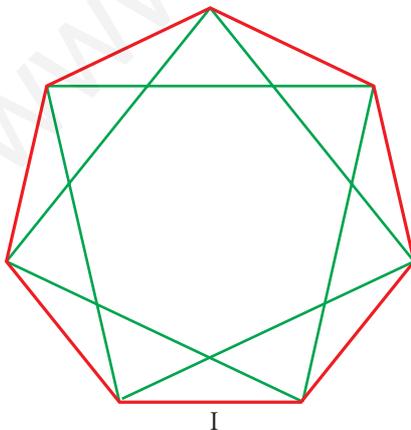


I. Se une cada vértice con los que están “dos lugares más allá”.



II. Se une cada vértice con los que están “tres lugares más allá”.

Hazlos en tu cuaderno.



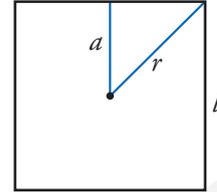
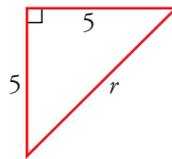
Lado, apotema y radio

- 10 ▲▲▲ ¿Cómo es la longitud de la apotema de un cuadrado con relación a su lado?

Halla el radio de un cuadrado cuyo lado mida 10 cm, con dos cifras decimales.

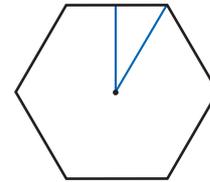
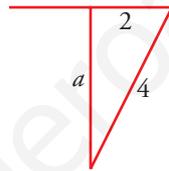
La apotema es la mitad del lado.

$$r = \sqrt{5^2 + 5^2} \approx 7,07 \text{ cm}$$



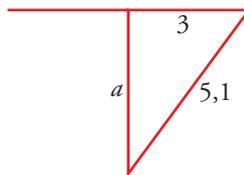
- 11 ▲▲▲ Recuerda que en el hexágono regular el lado es igual al radio. Calcula la longitud de la apotema de un hexágono regular de lado 4 cm, con una cifra decimal.

$$a = \sqrt{4^2 - 2^2} \approx 3,4 \text{ cm}$$



- 12 ▲▲▲ El lado de un pentágono regular mide $l = 6 \text{ cm}$ y su radio, $r = 5,1 \text{ cm}$. Halla su apotema con una cifra decimal.

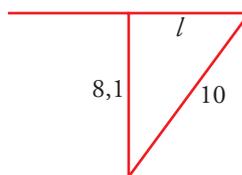
$$a = \sqrt{5,1^2 - 3^2} = 4,1 \text{ cm}$$



- 13 ▲▲▲ El radio de un pentágono regular mide $r = 10 \text{ cm}$ y su apotema, $a = 8,1 \text{ cm}$. Halla la longitud de su lado (con una cifra decimal).

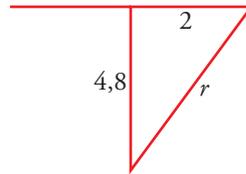
$$\frac{l}{2} = \sqrt{10^2 - 8,1^2} = 5,8 \text{ cm}$$

$$l = 2 \cdot 5,8 = 11,6 \text{ cm}$$



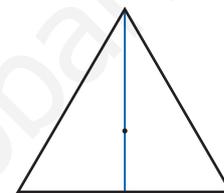
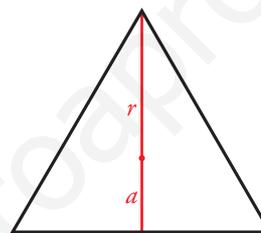
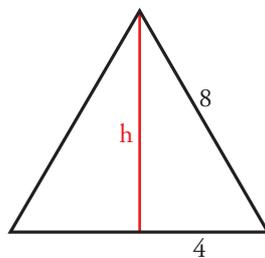
- 14 ▲▲▲ El lado de un octógono regular mide 4 cm y su apotema, 4,8 cm. Halla el radio de la circunferencia circunscrita al polígono.

$$r = \sqrt{4,8^2 + 2^2} = 5,2 \text{ cm}$$



- 15 ▲▲▲ Halla, con una cifra decimal, la altura de un triángulo equilátero de 8 cm de lado.

¿Cuánto miden su apotema y su radio?

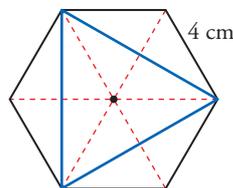


$$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,9 \text{ cm}$$

$$a = 6,9 : 3 = 2,3 \text{ cm}$$

$$r = 2 \cdot 2,3 = 4,6 \text{ cm}$$

- 16 ▲▲▲ El lado del hexágono exterior mide 4 cm.



Halla el radio, la apotema y el lado del triángulo azul.

La altura del triángulo es $4 + 2 = 6 \text{ cm}$.

El radio del triángulo, $r = 4 \text{ cm}$.

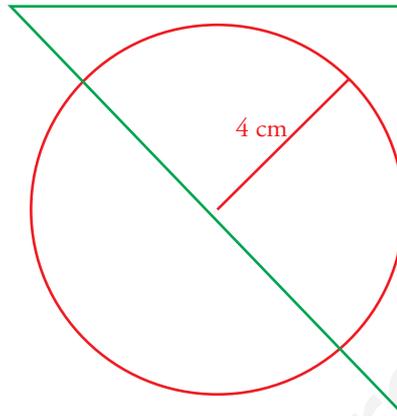
Su apotema, $a = 2 \text{ cm}$.

La mitad del lado mide: $\frac{l}{2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3,46 \text{ cm}$

Por tanto: $l = 2 \cdot 3,46 = 6,92 \text{ cm}$

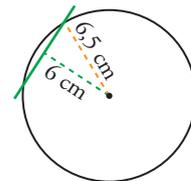
Circunferencias y rectas

- 17 ▲▲▲ Dibuja una circunferencia de 4 cm de radio y un triángulo cuyos lados sean: uno secante a la circunferencia, otro tangente y otro exterior.



- 18 ▲▲▲ Una recta pasa a 6 cm del centro de una circunferencia de radio 6,5 cm. ¿Corta la recta a la circunferencia?

Halla la longitud de la cuerda que determina en ella.

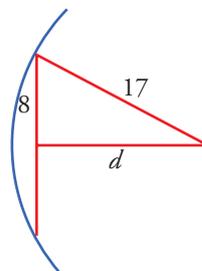


La recta corta a la circunferencia porque su distancia al centro es menor que el radio de la circunferencia.

$$\frac{l}{2} = \sqrt{6,5^2 - 6^2} = 2,5 \text{ cm}$$

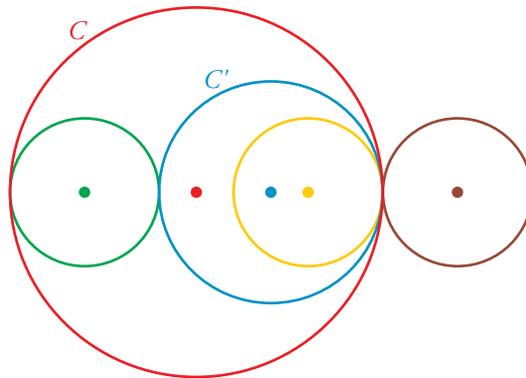
Luego la cuerda mide 5 cm.

- 19 ▲▲▲ Una circunferencia de 17 cm de radio corta a una recta. La cuerda correspondiente mide 16 cm. ¿A qué distancia de la recta está el centro de la circunferencia?



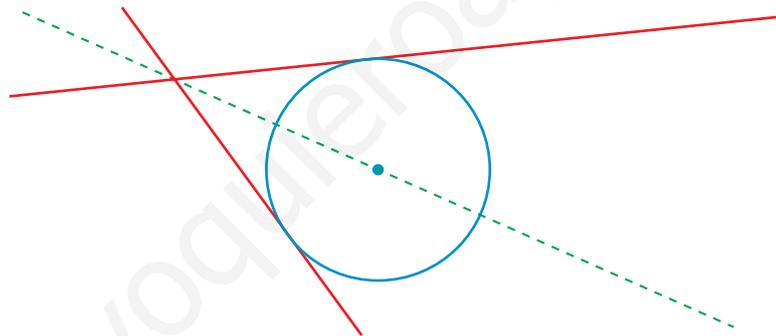
$$d = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 \text{ cm}$$

- 20 ▲▲▲ Dibuja dos circunferencias, C y C' , de radios 5 cm y 3 cm que sean tangentes interiores. Traza tres circunferencias distintas, de 2 cm de radio, tales que cada una de ellas sea tangente a C y a C' .



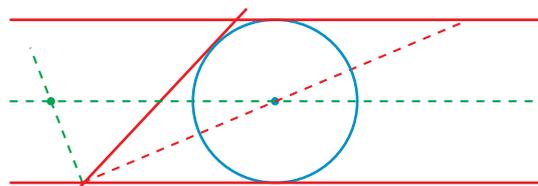
- 21 ▲▲▲ Traza dos rectas que se corten. Dibuja una circunferencia, de radio el que tú quieras, tangente a ambas rectas.

Completa la frase: “Si una circunferencia es tangente a dos rectas que se cortan, su centro estará en la ...”.



Si una circunferencia es tangente a dos rectas que se cortan, su centro estará en la bisectriz del ángulo que forman.

- 22 ▲▲▲ Traza en tu cuaderno dos rectas paralelas, r y s , y otra recta secante a ambas. Localiza el centro de una circunferencia que sea tangente a las tres rectas. ¿Podrías encontrar otra?

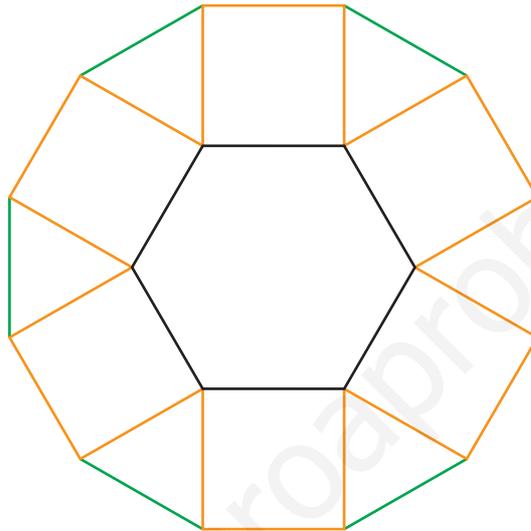


Sí; basta hallar la bisectriz del otro ángulo para localizar el segundo centro.

PÁGINA 257

■ PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

- 23 Sobre cada uno de los lados de un hexágono regular construimos un cuadrado. Unimos los vértices sueltos mediante segmentos. Se obtiene así un dodecágono (polígono de 12 lados).

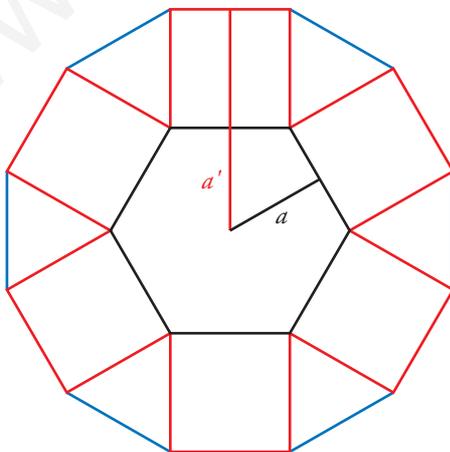


¿Crees que es regular? Justifica la respuesta. En caso afirmativo, halla la apotema para $l = 20$.

Es regular porque todos sus lados son iguales (e iguales a los del hexágono regular) y todos sus ángulos son iguales a la suma del ángulo de un cuadrado (90°) y el de un triángulo equilátero (60°): $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Veamos que es correcto:

El ángulo del dodecágono regular debe ser $\frac{180^\circ \cdot (12 - 2)}{12} = 150^\circ$.

La apotema, a' , es igual a la suma del apotema, a , del hexágono interior más el lado del cuadrado (que es el lado del hexágono).



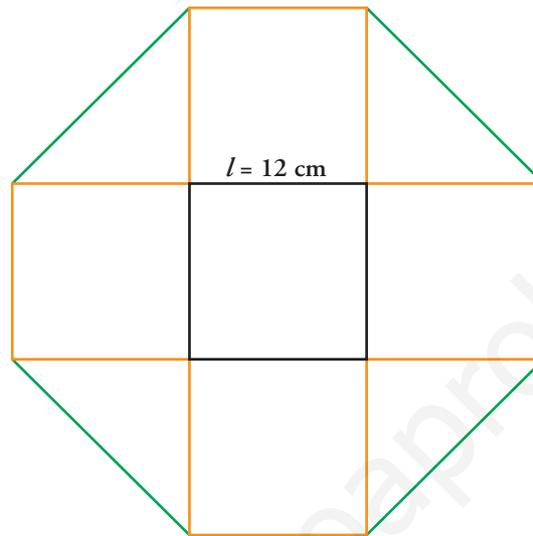
$$a = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17,3 \text{ cm}$$

Apotema del dodecágono: $a' = 17,3 + 20 = 37,3 \text{ cm}$

24 Sobre cada uno de los lados de un cuadrado construimos otro cuadrado.

Unimos los vértices sueltos mediante segmentos.

Se obtiene así un octógono.

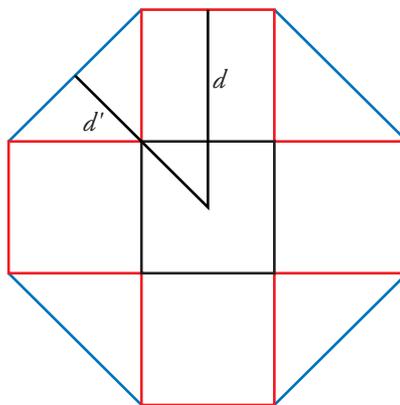


¿Crees que es regular? Justifica la respuesta.

Halla las distancias del centro del cuadrado a los lados verdes y a los lados naranjas del octógono.

No es regular porque los lados naranjas son más largos que los verdes.

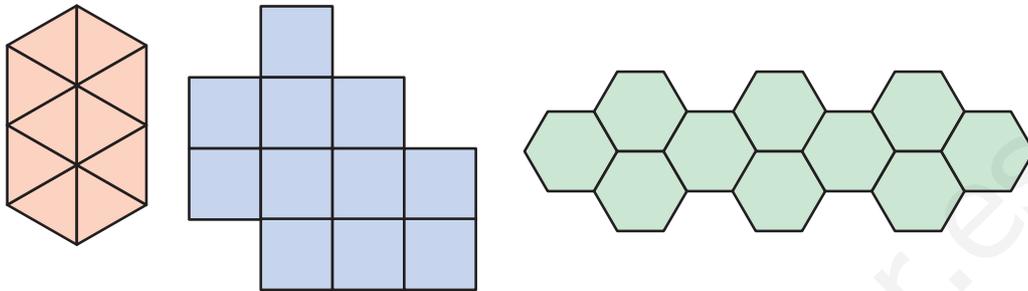
$$d = l + \frac{l}{2} = 12 + 6 = 18 \text{ cm}$$



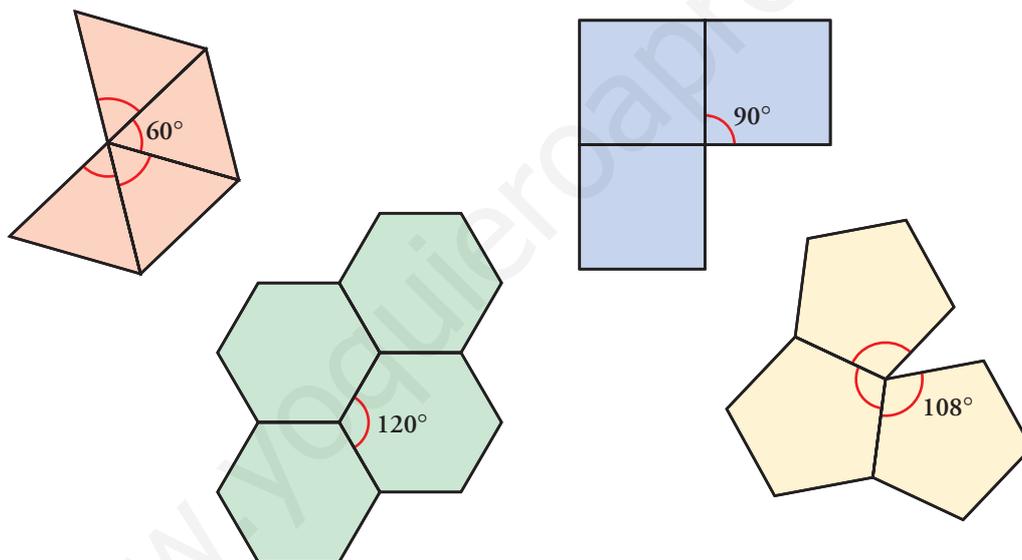
d' es igual a la diagonal del cuadrado:

$$d' = \sqrt{12^2 + 12^2} = 16,97 \text{ cm} \approx 17 \text{ cm}$$

25 Podemos embaldosar el suelo con losetas cuadradas o triangulares regulares.
También encajan bien unas con otras las losetas hexagonales regulares.



Sin embargo, los pentágonos regulares no sirven para embaldosar el suelo.
Explica qué tiene que ver esto con el ángulo de estos polígonos regulares.



El ángulo de un triángulo regular es 60° , divisor de 360° ($360^\circ : 60^\circ = 6$). Por eso coinciden 6 triángulos en cada vértice del embaldosado.

$360^\circ : 90^\circ = 4$. Coinciden 4 cuadrados en cada vértice.

El ángulo del hexágono regular es 120° :

$360^\circ : 120^\circ = 3$. Coinciden 3 hexágonos en cada vértice.

Sin embargo, el ángulo del pentágono regular, 108° , no es divisor de 360° . Por eso no encajan los pentágonos unos con otros para embaldosar el suelo.

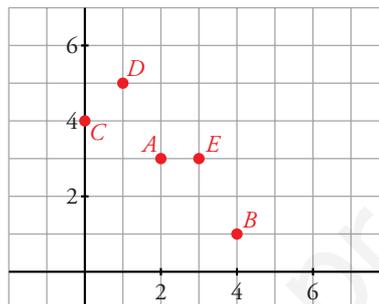
Lo mismo les ocurre a los demás polígonos regulares.

PÁGINA 288

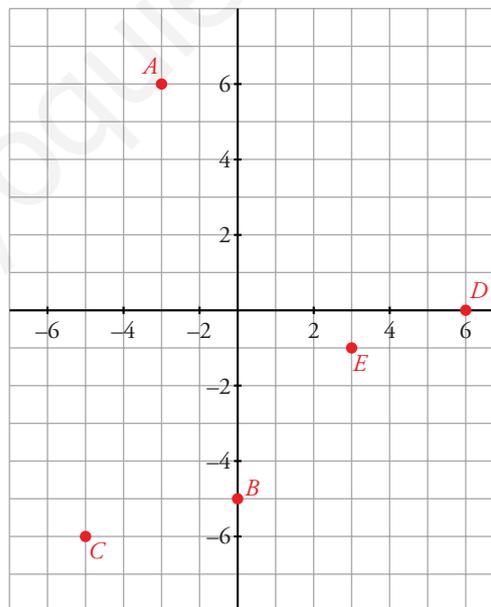
■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Representación de puntos

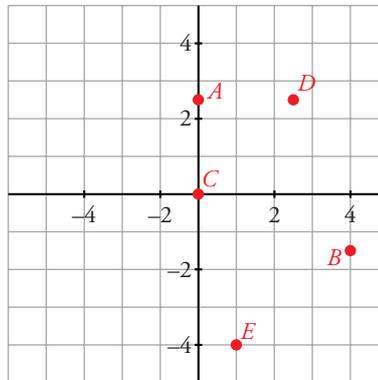
- 1 ▲▲▲ Representa los siguientes puntos: $A(2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(0, 4)$, $D(1, 5)$, $E(3, 3)$.



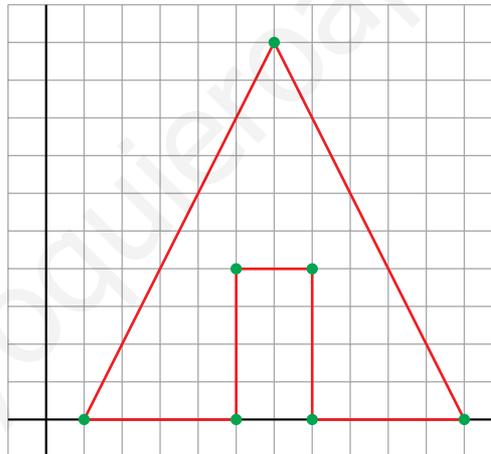
- 2 ▲▲▲ Representa los siguientes puntos: $A(-2, 6)$, $B(0, -5)$, $C(-4, -6)$, $D(6, 0)$, $E(3, -1)$.



- 3 ▲▲▲ Representa los siguientes puntos: $A(0; 2,5)$, $B(4; -1,5)$, $C(0, 0)$, $D(2,5; 2,5)$, $E(1, -4)$.

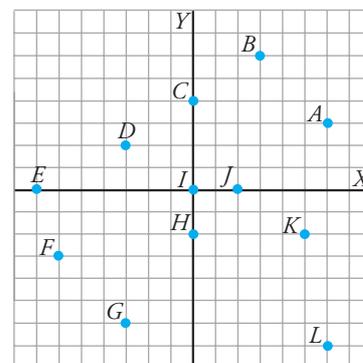


- 4 ▲▲▲ Dibuja la figura que se obtiene al unir cada punto con el siguiente:
 $A(1, 0)$, $B(6, 10)$, $C(11, 0)$, $D(7, 0)$, $E(7, 4)$, $F(5, 4)$, $G(5, 0)$, $A(1, 0)$



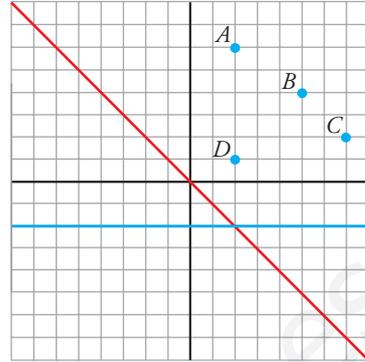
- 5 ▲▲▲ Di las coordenadas de los siguientes puntos:

$A(6, 3)$	$B(3, 6)$	$C(0, 4)$
$D(-3, 2)$	$E(-7, 0)$	$F(-6, -3)$
$G(-3, -6)$	$H(0, -2)$	$I(0, 0)$
$J(2, 0)$	$K(5, -2)$	$L(6, -7)$



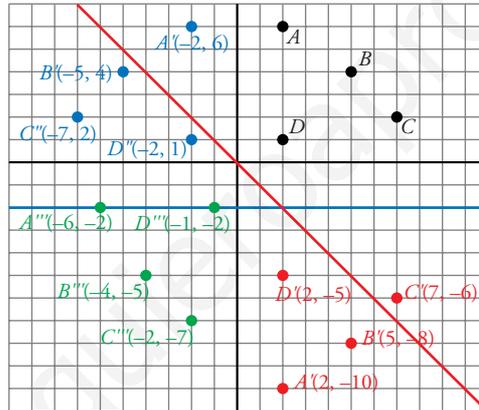
6 ▲▲▲ Observa la siguiente gráfica y contesta:

- a) Escribe las coordenadas de A, B, C y D .
- b) Representa los simétricos de A, B, C y D respecto de la recta azul y pon sus coordenadas.
- c) Representa los simétricos de A, B, C y D respecto del eje Y y pon sus coordenadas.
- d) Representa los simétricos de A, B, C y D respecto de la recta roja y pon sus coordenadas.



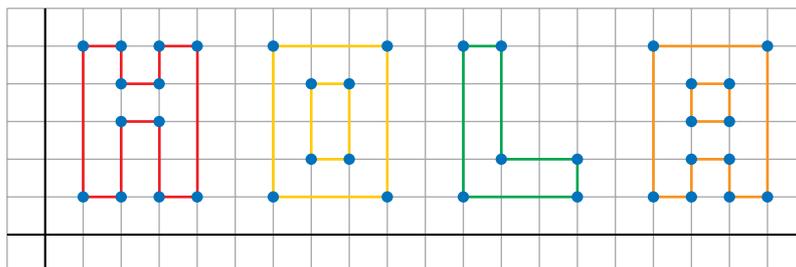
a) $A(2, 6), B(5, 4), C(7, 2), D(2, 1)$

b), c) y d):



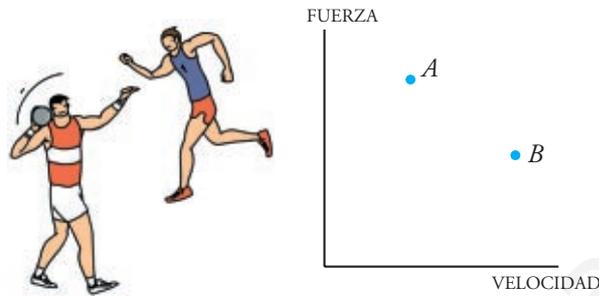
7 ▲▲▲ Lee el mensaje. Para ello representa los puntos y únelos.

- a) $(1, 1), (1, 5), (2, 5), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (4, 1), (3, 1), (3, 3), (2, 3), (2, 1)$ y $(1, 1)$.
- b) $(6, 1), (6, 5), (9, 5), (9, 1)$ y $(6, 1)$.
 $(7, 2), (7, 4), (8, 4), (8, 2)$ y $(7, 2)$.
- c) $(11, 1), (11, 5), (12, 5), (12, 2), (14, 2), (14, 1)$ y $(11, 1)$.
- d) $(16, 1), (16, 5), (19, 5), (19, 1), (18, 1), (18, 2), (17, 2), (17, 1)$ y $(16, 1)$.
 $(17, 3), (17, 4), (18, 4), (18, 3)$ y $(17, 3)$.



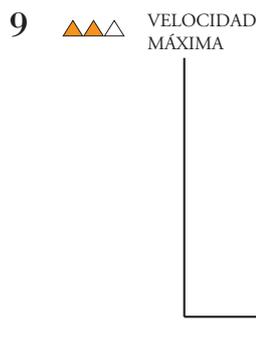
Interpretación de puntos

- 8 ▲▲▲ Alfredo y Pedro son atletas. Alfredo es corredor de medio fondo y Pedro es lanzador de peso. ¿Qué punto corresponde a cada uno?



$A \rightarrow$ Pedro: menos velocidad y más fuerza.

$B \rightarrow$ Alfredo: más velocidad y menos fuerza.

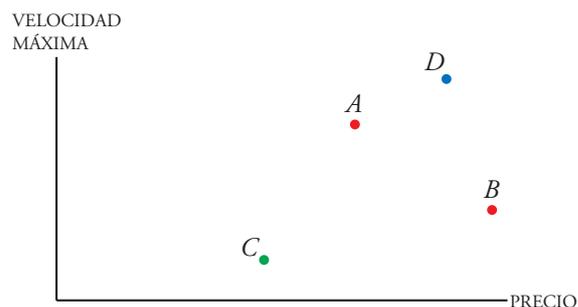


Los puntos A y B son los coches de Ernesto y Carla (o al revés). Di cuál es de cada uno sabiendo que el coche de Ernesto es más caro que el de Carla, pero el de esta corre más.

Sitúa sobre el diagrama un punto, C , que represente el coche de Jaime, más barato y menos veloz que el de Ernesto y Carla. Y otro punto, D , para el de Tiburcio, el más veloz de todos y casi tan caro como el de Ernesto.

El coche de Ernesto es el punto B .

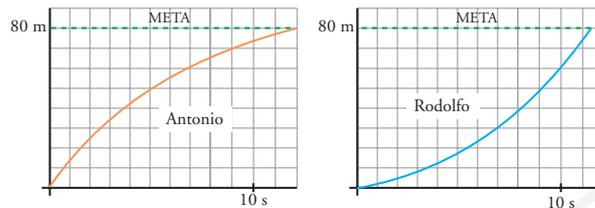
Por ejemplo:



PÁGINA 289

Interpretación de gráficas funcionales

10 ▲▲▲ Observa las carreras de dos velocistas:

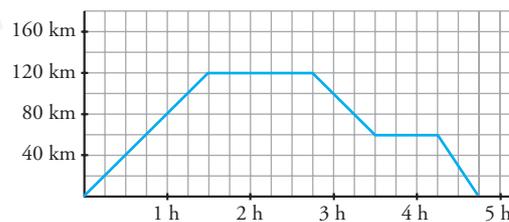


- ¿Cuáles son las dos variables que se relacionan en estas funciones?
- Uno de ellos va “cada vez mas despacio” y el otro “cada vez más deprisa”. ¿Quién es cada uno?
- ¿Cuál de los dos ganará la carrera de 80 m?

■ Para responder a esta pregunta, calca las dos gráficas sobre unos mismos ejes.

- Se relacionan el espacio recorrido y el tiempo empleado.
- Antonio va cada vez más despacio y Rodolfo cada vez más deprisa.
- Gana Rodolfo, que llega medio segundo antes.

11 ▲▲▲ Describe el siguiente viaje en coche:



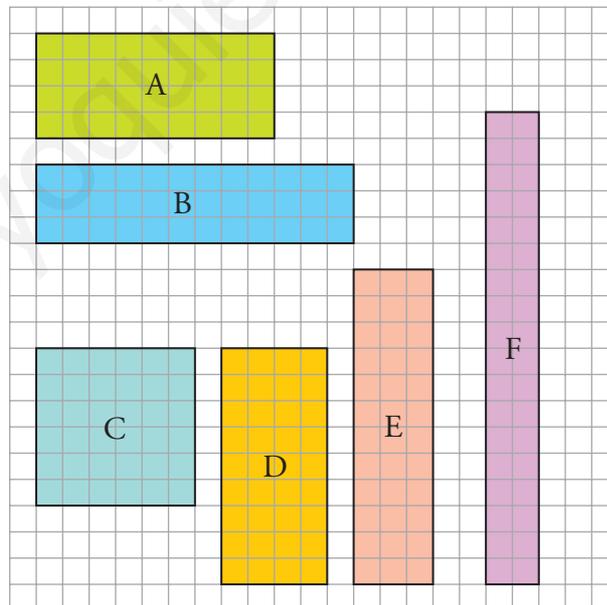
- ¿Cuántos kilómetros recorre en la primera hora y media?
 - ¿Cuánto tiempo permanece parado?
 - ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra el lugar de la segunda parada?
- Recorre, en la primera hora y media, 120 km.
 - Permanece parado durante una hora y cuarto.
 - La segunda parada se encuentra a 60 km de la salida.

- 12 ▲▲▲ Describe este otro viaje en coche al mismo lugar que el del ejercicio anterior.



- a) ¿A qué distancia da la vuelta?
 b) ¿En qué lugar se para? ¿Cuánto duró la parada?
 c) ¿Cuánto tiempo estuvo el coche en marcha?
- a) Da la vuelta a los 120 km de la salida.
 b) Se para en el kilómetro 60 durante una hora y cuarto.
 c) Estuvo en marcha 3 horas y media.

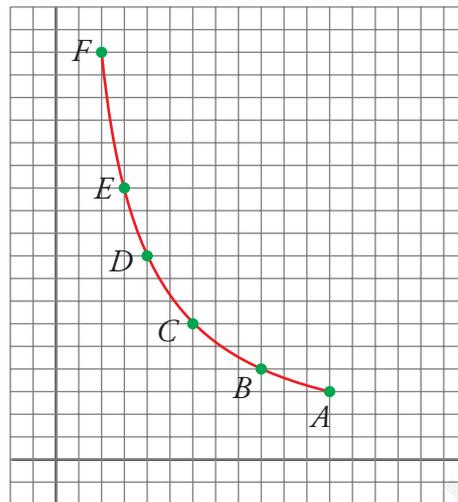
- 13 ▲▲▲ Todos estos rectángulos tienen la misma área, 36 cuadraditos.



Asigna a cada uno su base y su altura, y tómalos como coordenadas de un punto. Por ejemplo: A : base 9, altura 4 $\rightarrow A(9, 4)$.

De este modo obtendrás 6 puntos que has de representar en unos ejes cartesianos.

Une todos los puntos para obtener una curva, que es la gráfica de la función.



$A(9, 4)$; $B(12, 3)$; $C(6, 6)$; $D(4, 9)$; $E(3, 12)$; $F(2, 18)$

14 ▲▲▲ Una pequeña empresa vende cajas con productos navideños.

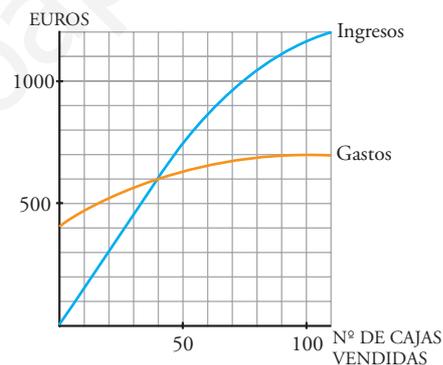
Sus ingresos y sus gastos vienen dados por las siguientes gráficas:

a) ¿A partir de qué número de cajas vendidas empieza a obtener beneficios?

b) ¿Cuánto pierde si solo vende 20 cajas?

c) ¿Cuánto gana si vende 80 cajas?

d) ¿Cuánto gana si vende 110 cajas?



a) Empieza a obtener beneficios a partir de 40 cajas.

b) Ingresos 300 €.

Gasta 520 €.

Pierde 220 €.

c) Ingresos 1 050 €.

Gasta 690 €.

Gana 360 €.

d) Ingresos 1 200 €.

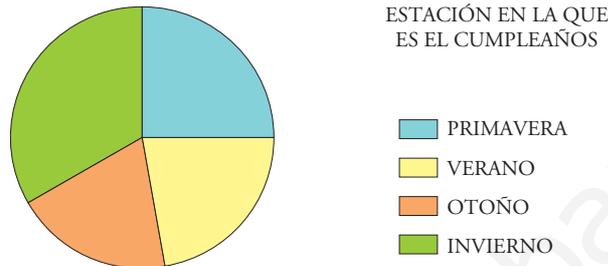
Gasta 700 €.

Gana 500 €.

PÁGINA 290

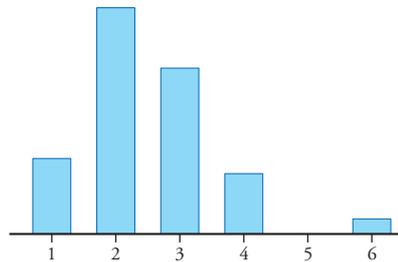
Tablas y gráficas

15 ▲▲▲ Cumpleaños de los alumnos de una clase:



- a) ¿En qué estación del año se celebrarán más cumpleaños? ¿En cuál menos?
- b) ¿Hay alguna estación en la que, exactamente, la cuarta parte de alumnos cumplen años?
- c) Sabiendo que los alumnos que cumplen años en cada estación son 7, 8, 9 y 12, ¿qué número corresponde a cada una de ellas?
- a) En invierno más, en otoño menos.
- b) En primavera.
- c) 7 en otoño, 8 en verano, 9 en primavera y 12 en invierno.

16 ▲▲▲ A los 36 alumnos de una clase se les ha preguntado: “¿Cuántos hermanos sois?”. Estas son las respuestas sintetizadas en un diagrama de barras:



- a) ¿Cuál es la variable estadística?
- b) ¿Es cualitativa o cuantitativa?
- c) En la clase hay un único alumno que pertenece a una familia con 6 hermanos. Midiendo las barras, di cuál es la frecuencia correspondiente a cada una de ellas y lo que significa.
- a) Número de hermanos.
- b) Es cuantitativa, porque toma valores numéricos.

	FRECUENCIA
1	5
2	15
3	11
4	4
5	0
6	1

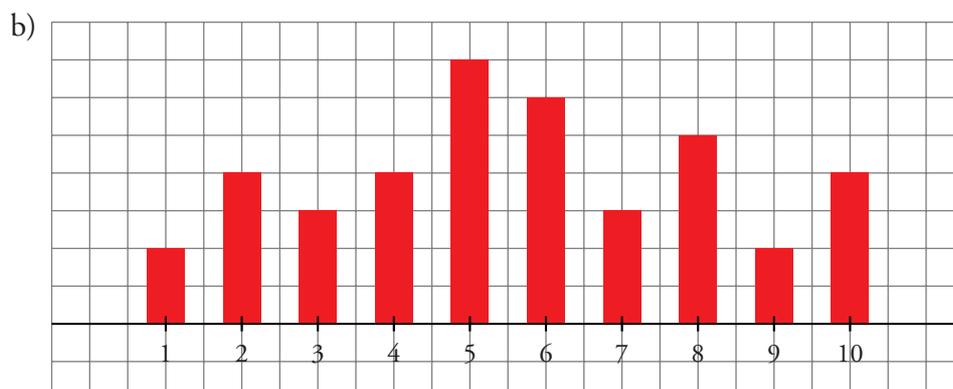
17 ▲▲▲ Estas son las notas que un profesor ha puesto a sus alumnos y alumnas en el último examen:

1	5	8	6	2	2	7	8	4	9
4	6	5	4	5	7	2	3	6	8
9	3	2	5	3	10	6	10	1	10
6	8	7	8	4	5	5	6	10	5

- a) Haz una tabla de frecuencias.
b) Representa en un diagrama de barras los resultados.

a)

NOTAS	FRECUENCIA
1	2
2	4
3	3
4	4
5	7
6	6
7	3
8	5
9	2
10	4

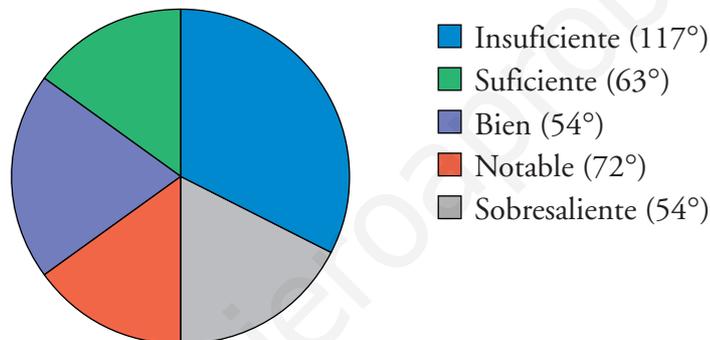


- 18 ▲▲▲ Comprueba que agrupando las notas anteriores obtenemos la tabla de la derecha:

INSUFICIENTE (1, 2, 3, 4)	13
SUFICIENTE (5)	7
BIEN (6)	6
NOTABLE (7, 8)	8
SOBRESALIENTE (9, 10)	6

Haz una representación de estos resultados en un diagrama de sectores.

- Observa que a cada individuo le corresponde un ángulo de 9° , pues $360^\circ : 40 = 9^\circ$.



- 20 ▲▲▲ En los datos de la tabla del ejercicio 18, halla el porcentaje de alumnos que superan el examen, y el porcentaje de los que consiguen sobresaliente.

- Superan el examen: $7 + 6 + 8 + 6 = 27$

$$\frac{27}{40} \cdot 100 = 67,5$$

El 67,5% superan el examen.

- Consiguen sobresaliente:

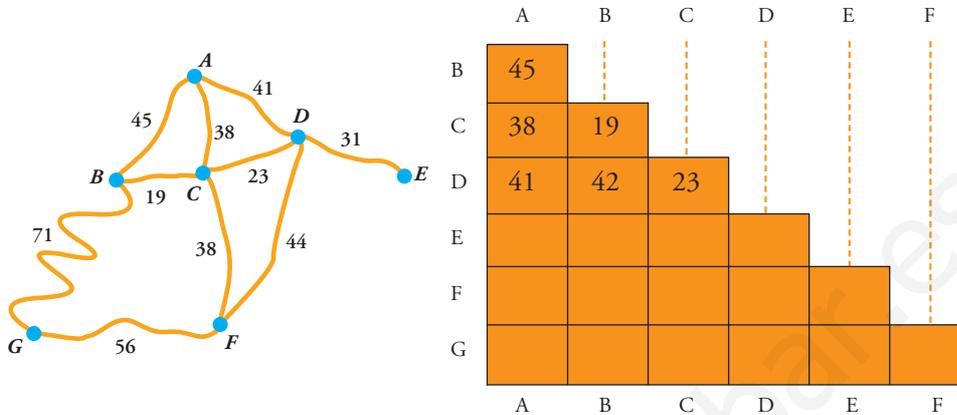
$$\frac{6}{40} \cdot 100 = 15$$

El 15% consiguen sobresaliente.

PÁGINA 291

- 21 ▲▲▲ El mapa de abajo nos da la distancia, en kilómetros, de cada tramo de carretera.

La tabla resume la distancia, en kilómetros, entre cada dos pueblos de esa comarca.



Comprueba que lo que hay es correcto y complétalo en tu cuaderno, de modo que en la tabla aparezca la menor de las distancias posibles entre cada dos localidades.

Una vez completada esta tabla, contesta las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la distancia mínima entre dos localidades? ¿Y la máxima?
- ¿Qué porcentaje de localidades está a menos de 45 km de la localidad D?
- Un representante de una cierta marca comercial tiene que visitar los pueblos A, B, E y F. Si parte de A, ¿cuál será la distancia total mínima que tiene que recorrer?

	A	B	C	D	E	F
B	45					
C	38	19				
D	41	42	23			
E	72	73	54	31		
F	76	57	38	44	75	
G	116	71	90	100	131	56

- Distancia mínima: 19 km entre B y C
Distancia máxima: 131 km entre E y G

b) 5 de 6, es decir, $\frac{5 \cdot 100}{6} = 83,3\%$.

c) La ruta más corta es:

$$A - B - C - F - D - E$$

con:

$$45 + 19 + 38 + 44 + 31 = 177 \text{ km}$$

22 ▲▲▲ En un curso con 36 estudiantes se realiza una encuesta con la siguiente pregunta:

¿Qué prefieres ver por televisión, un partido de baloncesto (BC) o uno de fútbol (F)?

Los resultados vienen dados en la siguiente tabla:

	BC	F	TOTAL
CHICOS	3	13	
CHICAS	12	8	
TOTAL			36

Completa esta tabla en tu cuaderno y responde a las siguientes preguntas:

- ¿Qué significa el 3 de la primera casilla?
- ¿Qué significa el 8?
- ¿Cuántos chicos hay en la clase? ¿Y chicas? ¿A cuántos estudiantes de esa clase les gusta ver el baloncesto y a cuántos ver el fútbol por televisión?
- Averigua qué porcentaje de las chicas prefieren ver el fútbol.
- ¿Qué porcentaje de los que les gusta el baloncesto son chicas?

	BC	F	TOTAL
CHICOS	3	13	16
CHICAS	12	8	20
TOTAL	15	21	36

- Que 3 chicos prefieren ver baloncesto.
- Que 8 chicas prefieren ver fútbol.
- Hay 16 chicos y 20 chicas. 15 prefieren ver baloncesto y 21, fútbol.

d) 8 de 20, es decir, $\frac{8 \cdot 100}{20} = 40\%$.

e) 12 de 15, es decir, $\frac{12 \cdot 100}{15} = 80\%$.

23 ▲▲▲ Se han escogido 100 personas de más de 25 años y menos de 30 al azar, y se les ha preguntado:

- ¿Eres miope?
- ¿Seguiste estudiando después de los 18 años?

Estos son los resultados:

		ESTUDIOS		
		SÍ	NO	
MIOPE	SÍ	21	19	40
	NO	14	46	60
		35	65	100

a) ¿Cuántos miopes hay? ¿Qué porcentaje de miopes hay?

b) Entre los 35 que estudiaron más, ¿cuántos miopes hay?

c) ¿Qué porcentaje de miopes hay entre los que estudiaron más?

a) Hay 40 miopes de 100 personas, es decir, el 40%.

b) 21

c) 21 de 35, es decir, $\frac{21 \cdot 100}{35} = 60\%$.